

Izborna geometrija

Iljkić, Davor

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:361049>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-06**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Davor Ilkić

IZBORNA GEOMETRIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, Ožujak 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

*Hvala mojoj obitelji na svemu što su mi omogućili.
Hvala najboljim prijateljima Dariju i Patriku na podršci te tome što mi iz dana u dan
dokazuju da se trud isplati.
Hvala kolegama Branku, Pavlu i Tinu koji su studiranje obogatili smijehom i lijepim
trenucima.
Posebna zahvala mentoru na podršci i vodstvu tijekom pisanja ovog rada.*

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	2
1 Kompaktnost	3
1.1 Motivacija i primjeri	3
1.2 Mjere kompaktnosti	4
2 Konveksnost	15
2.1 Konveksnost	15
2.2 Koeficijent konveksnosti	16
3 Neke posebne metode i mjere	27
3.1 Primjena ham-sandwich teorema	27
3.2 Jaz učinkovitosti (efficiency gap)	30
Bibliografija	39

Uvod

Definiranje pravednih kriterija za formiranje izbornih jedinica postalo je jedan od najšire poznatih izazova za primjenu matematike u političkim i pravnim aspektima. Političari nekih zemalja pokušavaju pristranim krojenjem granica izbornih jedinica omogućiti stjecanje političke prednosti kroz izborne rezultate. Najpoznatiji pojam vezan uz pristranu podjelu izbornih jedinica jest gerrymandering, te predstavlja vrstu izbornog inženjeringa. Radi se o svjesnom obliku izborne manipulacije gdje se granice izbornih jedinica prekrajaju na način da određena politička stranka stekne prednost. Pojam gerrymander pojavljuje se 1812. godine kada je guverner Massachusettsa Elbridge Gerry pokušao konstruirati izbornu jedinicu u svrhu osvajanja dodatnog mandata svojoj političkoj stranci. Naime, u poznatome časopisu Boston Gazette, jedna od izbornih jedinica, predložena od strane Elbridge Gerrya, uspoređuje se sa izgledom mitskog čudovišta salamander. Spojem imena guvernera Gerry, te naziva salamander, nastao je pojam gerrymander - najpoznatiji pojam politički pristrane podjele izbornih jedinica - vidi Sliku 0.1.



Slika 0.1: Gerrymander

Sam naziv rada "Izborna geometrija" proizlazi iz toga što je cilj ovog rada opisati karakteristike oblika područja izbornih jedinica, te pokušati kvantificirati do koje razine ti oblici odstupaju od nekih osnovnih oblika kao što su primjerice pravokutnik ili krug. Ukoliko je kod određenih izbornih jedinica došlo do većeg odstupanja od osnovnih geometrijskih oblika (primjerice Slika 0.1), smatramo da su određeni pojedinci prilikom krojenja granica izbornih jedinica bili pristrani u korist određene političke stranke.

Postoji nekoliko strategija koje se koriste u svrhu manipulacije kao što su koncentriranje političke moći opozicije u jednu izbornu jedinicu kako bi time smanjili političku moć opozicije u drugim izbornim jedinicama, te raspršivanje političke moći opozicije u više izbornih jedinica s ciljem smanjena utjecaja njihovih glasova. Kvalitetnom primjenom ovakvih strategija određene političke stranke sa manjim brojem glasača mogu osvojiti veći dio izbornih jedinica.

Tematika izborne geometrije iznimno je složena te dan danas ne postoji "apsolutno objektivna" mjera koja bi iskazala razinu pristranog prekrajanja. Razni autori i matematički timovi predlažu mnoge načine mjerenja, a u ovome radu će se tematika prikazati kroz izbor nekoliko reprezentativnih mjera.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prva dva poglavlja analiziramo oblike područja izbornih jedinica, a u trećem poglavlju analizira se uloga raspodjele glasačke populacije unutar izbornih jedinica.

Oblike područja izbornih jedinica prikazivat ćemo pomoću skupova u ravnini. Glavni pojmovi koji se vežu uz oblik područja su konveksnost i kompaktnost područja. U prvom poglavlju promatramo matematički pojam kompaktnosti skupa, te nedefinirani pojam "kompaktnosti" koji se koristi u "svakodnevnom" govoru - dočarava nešto čvrsto povezano, zbijeno, cjelovito. Različitim mjerama "kompaktnosti" analizira se do koje razine određeni skupovi zadovoljavaju takva svojstva. Najvažniji pojam koji se analizira u drugom poglavlju jest koeficijent konveksnosti. Razradu mjere koeficijenta konveksnosti započinjemo jednostavnim i intuitivnim pristupom, dok naknadnim modifikacijama te mjere pokušavamo obuhvatiti sve nepravilnosti područja proizašlih iz samih granica države. Dok mjere iz prva dva poglavlja analiziraju sam oblik područja izbornih jedinica, pristup manipuliranju granica izbornih jedinica u trećem poglavlju bazira se na raspodjeli glasača unutar same izborne jedinice. Glavni pojmovi u trećem poglavlju su jaz učinkovitosti (efficiency gap) koji opisuje raspodjelu tzv. bačenih glasova, te ham-sandwich teorem koji omogućava jednaku raspodjelu glasača u svim izbornim jedinicama.

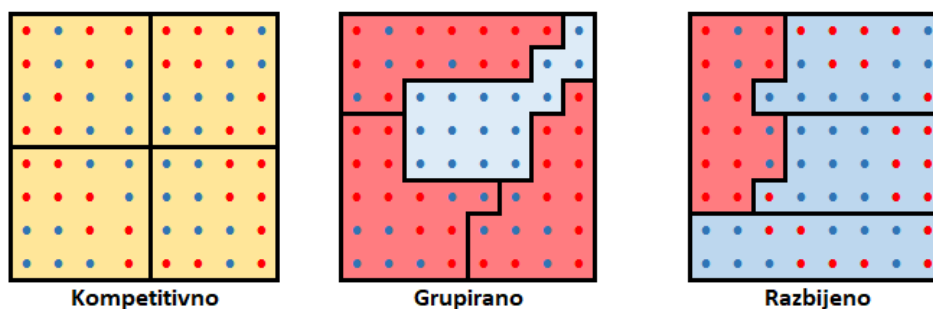
Poglavlje 1

Kompaktnost

1.1 Motivacija i primjeri

Za definiranje problematike pristranog prekrajanja granica izbornih jedinica, promatrati ćemo državu koja se dijeli u $n \in \mathbb{N}$ izbornih jedinica. Problem pristranog prekrajanja granica izbornih jedinica je taj što određenim metodama manipulacije plana krojenja granica izbornih jedinica, politička stranka sa manjim brojem glasača (na razini države) može osvojiti većinski dio izbornih jedinica. Radi ilustracije, promatrajmo izbore koji se sastoje od dvije političke stranke: crveni i plavi. Pobjeda u određenoj izornoj jedinici ostvaruje se većinskim brojem glasova.

Osnovne metode koje se koriste za manipulaciju su grupiranje - koncentriranje političke moći opozicije u jednu izbornu jedinicu kako bi imali što veći broj tzv. bačenih glasova i time smanjili političku moć opozicije u drugim izbornim jedinicama, te razbijanje - raspršivanje političke moći opozicije u više izbornih jedinica s ciljem smanjena utjecaja njihovih glasova. Na Slici 1.1 možemo vidjeti tri vrste izbornih jedinica:



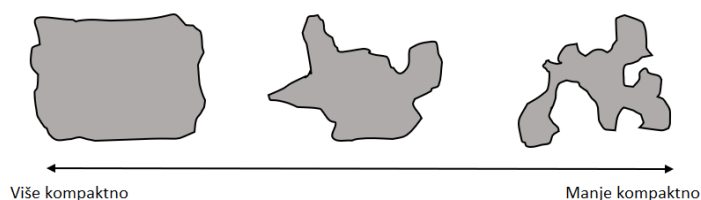
Slika 1.1: Metode prekrajanja

Promatrajući Sliku 1.1 možemo izvući nekoliko zaključaka. Imamo državu koja se dijeli u 4 izborne jedinice, te 3 plana podjele granica izbornih jedinica: kompetitivan, grupiran i razbijen. Ukupno imamo 64 glasača, od čega je 32 crvenih i 32 plavih. Dakle, broj glasača svake stranke je jednak, te svaka izborna jedinica sadrži jednak broj glasača. U prvom slučaju imamo kompetitivnu državu gdje svaka od 4 izborne jedinice sadrži jednak broj glasača obiju stranaka. U drugom slučaju možemo uočiti metodu grupiranja, gdje crvena stranka predlaže definiranje granica na način da grupira što više glasača plave stranke u jednu izbornu jedinicu s ciljem ostvarivanja nadmoći u ostalim izbornim jedinicama, te takvim postupkom osiguravajući pobjedu u 75% izbornih jedinica. U trećem slučaju možemo vidjeti metodu razbijanja provedenu od strane plave stranke koja je raspršila glasače crvene stranke u više izbornih jedinica, ali na način da plava stranka i dalje čini većinu u većem dijelu izbornih jedinica, te takvim postupkom osiguravajući pobjedu u 75% izbornih jedinica.

U navedenom primjeru možemo uočiti da, iako je broj glasača ostao nepromijenjen, različitim krojenjem granica izbornih jedinica dobivamo znatno različite ishode izbora.

1.2 Mjere kompaktnosti

Trenutno ne postoji standardna mjera za odlučivanje je li određena izborna jedinica pristrano krojena, međutim razni autori i matematički timovi predlažu mjere koje bi na neki način kvantificirale prekrajanje izbornih jedinica. Te mjere se većinom odnose na oblik područja izborne jedinice. U ovome radu, oblik područja izborne jedinice predstavljat ćemo pomoću skupova u ravnini. Glavni pojmovi koji se vežu uz oblik područja izborne jedinice su konveksnost i kompaktnost područja. Većina država pri definiranju izbornih jedinica navodi kako one moraju biti kompaktne, ne misleći pritom strogo na matematičku definiciju kompaktnosti. Neki autori smatraju da se kompaktnost oblika može očitovati u odnosu opsega područja i površine područja. Kompaktnost u smislu mjerenja pristranog krojenja izbornih jedinica je veličina koja opisuje koliko je izborna jedinica raspršena oko svog centra, tj. koliko je oblik izborne jedinice "iskrivljen" ili "čudno oblikovan". Intuitivno shvaćanje pojma kompaktnosti koji se koristi u ove svrhe možemo ilustrirati Slikom 1.2:



Slika 1.2: Kompaktnost područja

Skup je osnovni matematički pojam i ne definira se. O njemu razmišljamo kao o cjelini koja se sastoji od elemenata. Uvodimo sljedeće pojmove potrebne za definiranje kompaktnog skupa, te njegove karakterizacije u Euklidskom prostoru \mathbb{R}^2 .

Definicija 1.2.1. Neka je $X \neq \emptyset$ neprazan skup i $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje sa Kartezijevog produkta $X \times X$ u skup realnih brojeva \mathbb{R} za koje vrijedi:

- 1) $d(a, b) \geq 0, \forall a, b \in X$ (pozitivnost),
- 2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (strogost),
- 3) $d(a, b) = d(b, a), \forall a, b \in X$ (simetričnost),
- 4) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c), \forall a, b, c \in X$ (nejednakost trokuta).

Kažemo da je d funkcija udaljenosti ili razdaljinska funkcija, odnosno **metrika** na skupu X . Tada uređeni par (X, d) nazivamo **metrički prostor**, a uvjete 1)-4) aksiomi metrike.

Definicija 1.2.2. Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ njegova točka i $r > 0$ realan broj. Pod **otvorenom kuglom** u prostoru X sa središtem u x_0 i radijusom r podrazumijevamo skup $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U **otvoren** skup u prostoru X ako se može prikazati kao unija otvorenih kugli iz tog prostora. Prazan skup \emptyset je otvoren po definiciji.

Teorem 1.2.3. U metričkom prostoru (X, d) familija U svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ ima sljedeća svojstva:

- 1) Unija svake familije članova iz U je član iz U .
- 2) Presjek konačno članova iz U je član iz U .
- 3) $\emptyset, X \in U$.

Definicija 1.2.4. **Topološki prostor** je uređeni par (X, U) skupa X i familije U podskupova od X za koje vrijedi 1), 2), 3) iz Teorema 1.2.3. Familija U zove se **topologija** prostora (X, U) , a njeni članovi **otvoreni skupovi** topološkog prostora (X, U) .

Definicija 1.2.5. Podskup D metričkog prostora (X, d) je **ograničen** ili **omeđen** ukoliko postoje točka $x_0 \in X$ i broj $r > 0$ takvi da je $D \subseteq K(x_0, r)$.

Definicija 1.2.6. Skup B u metričkom prostoru (X, d) je **zatvoren** ako je njegov komplement $B^c = X \setminus B$ otvoren.

Kako bismo mogli razviti teoriju za mjerenje pristranog prekrivanja izbornih jedinica moramo početi od nekih intuitivnih i smislenih pretpostavki. Jedna od takvih pretpostavki jest da bi područje izborne jedinice trebalo biti kompaktno - u "svakodnevnom" govoru izraz kompaktnost se koristi za dočaravanje nečega što je zbijeno, gusto, sažeto, povezano i slično. U daljnjem nastavku rada, vidjeti ćemo da se većina mjera bazira na konceptima mjerenja kompaktnosti oblika područja, ali ne u običajenom topološkom smislu, nego dodatnim modifikacijama.

Definicija 1.2.7. Kažemo da je familija $S = (S_a, a \in A)$ podskupova S_a skupa X **pokrivač** skupa X ako je $X = \bigcup_{a \in A} S_a$. Pokrivač je **konačan (prebrojiv)** ako je A konačan (prebrojiv) skup. Potfamilija $S' = (S_{a'}, a' \in A')$, $A' \subseteq A$, je **potpokrivač** pokrivača S ako je i sama pokrivač skupa X .

Definicija 1.2.8. Kažemo da pokrivač $T = (T_b, b \in B)$ skupa X **profinjuje** pokrivač $S = (S_a, a \in A)$ ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ takav da je $T_b \subseteq S_a$ i pišemo $T \leq S$. U tom slučaju još kažemo i da je pokrivač T **upisan** u pokrivač S .

Definicija 1.2.9. Neka je X topološki prostor. Za pokrivač $U = (U_a, a \in A)$ skupa X kažemo da je **otvoren pokrivač** prostora X ako je svaki od skupova $U_a, a \in A$, otvoren u X .

Definicija 1.2.10. Topološki prostor X je **kompaktan** ako se u svaki otvoreni pokrivač U prostora X može upisati konačan otvoren pokrivač V prostora X . Skup $Y \subseteq X$ je **kompaktan** ako je Y kao potprostor prostora X kompaktan.

Za dokaz karakterizacije kompaktnih skupova u Euklidskom prostoru \mathbb{R}^2 , biti će nam potrebna definicija gomilišta niza, te pomoćna lema.

Definicija 1.2.11. Kažemo da je $\alpha \in \mathbb{R}$ **gomilište niza** $(a_n)_n$ realnih brojeva ako postoji podniz $(a_{p_n})_n$ niza $(a_n)_n$ takav da vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_n} = \alpha$.

Lema 1.2.12. Neka je (X, d) metrički prostor sa svojstvom da svaki niz (x_n) točaka u X ima barem jedno gomilište. Tada za svaki prebrojivi otvoreni pokrivač $U = (U_n, n \in \mathbb{N})$ postoji konačan potpokrivač.

Dokaz. Dokazat ćemo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Kada to ne bi vrijedilo, mogli bismo za svaki $n \in \mathbb{N}$ izabrati točku $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i, n \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci niz (x_n) ima gomilište $x_0 \in X$. Kako je U pokrivač od X , postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x_0 \in U_i$. Skup U_i je okolina točke x_0 pa postoji prirodan broj $n \geq i$ takav da je $x_n \in U_i$, što je u kontradikciji s definicijom niza (x_n) , tj. $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$. \square

Teorem 1.2.13. Skup $D \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $D \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i omeđen skup. Neka je $U = (U_a, a \in A)$ otvoren pokrivač od D . Budući da je \mathbb{R}^n separabilan prostor i D je separabilan. Zato možemo u U upisati neki prebrojivi otvoreni pokrivač V . Nadalje, svaki niz (x_n) u D je omeđen niz u \mathbb{R}^n pa ima gomilište x_0 koje leži u D , jer je D zatvoren skup. Zato, po Lemi 1.2.12, postoji konačan potpokrivač W pokrivača V . Zbog $W \leq V \leq U$, D je kompaktan. Obratno, neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan. Tada je D zatvoren. Pokažimo da je D omeđen. Neka je $x_0 \in D$. Tada kugle $K(x_0, r), r > 0$, tvore pokrivač od D . Zbog kompaktnosti postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n K(x_0, r_i)$ pa je D sadržan u konačnoj uniji omeđenih skupova i zato je omeđen. \square

Karakterizacijom kompaktnosti iz Teorema 1.2.13 prirodno dolazi naziv kompaktnost područja s obzirom na pretpostavke da oblik područja izbornih jedinica mora biti zatvoren i ograničen. Postoji nekoliko uobičajenih jedostavnijih mjera pristranog prekrajanja izbornih jedinica, a to su one koje se baziraju na omjeru opsega područja izborne jedinice te njene površine, karakteristike kruga opisanog izbornom jedinicom, uspoređivanje oblika područja izborne jedinice sa standardnim geometrijskim oblicima kao što su npr. kvadrat ili krug i slično. Iako smo uveli matematičku definiciju kompaktnog skupa, u daljnjem radu vidjeti ćemo razne nove načine mjerenja kompaktnosti oblika područja.

Od sada pa nadalje u ovome poglavlju, neka nam $D \subseteq \mathbb{R}^2$ označava kompaktan skup (u smislu zatvorenosti i omeđenosti) koji nam ujedno predstavlja i područje izborne jedinice. Za početak uvodimo koncept izoperimetričke nejednakosti koja će nam poslužiti za određivanje granica intervala nekih mjera kompaktnosti.

Sljedeći teorem daje nam svojstvo zatvorenog skupa pomoću kojega možemo mjeriti kompaktnost. Dokaz teorema izlazi izvan okvira rada te ga stoga nećemo navoditi.

Teorem 1.2.14. (*Izoperimetrička nejednakost*). *Pretpostavimo da je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoren skup opsega L i površine A . Tada vrijedi:*

$$4\pi A - L^2 \leq 0 \tag{1.1}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je D krug.

Uvodimo mjeru kompaktnosti koju ćemo nazivati **koeficijent kompaktnosti**, a proizlazi iz izoperimetričke nejednakosti:

$$C = \frac{4\pi A}{L^2}, \tag{1.2}$$

gdje je C koeficijent kompaktnosti, $C \in [0, 1]$, A je površina izborne jedinice, a L je opseg područja izborne jedinice. Opseg je kvadriran kako bi se izbacila mogućnost skaliranja, a π ograničava C na vrijednosti $[0, 1]$ - dokaz slijedi iz Teorema 1.2.14. Izborne jedinice koje imaju koeficijent C blizu 1 smatramo da su kompaktnije od izbornih jedinica

koje imaju koeficijent C blizu 0. Teorem 1.2.14 nam govori da krug smatramo savršeno kompaktnim, te da su skupovi kompaktniji što im je oblik bliži obliku kruga.

Prije uvođenja reprezentativnih mjera, promotrimo kako funkcioniraju parlamentarni izbori u Hrvatskoj. Na Slici 1.3¹ možemo vidjeti podjelu teritorija Republike Hrvatske na deset izbornih jedinica:

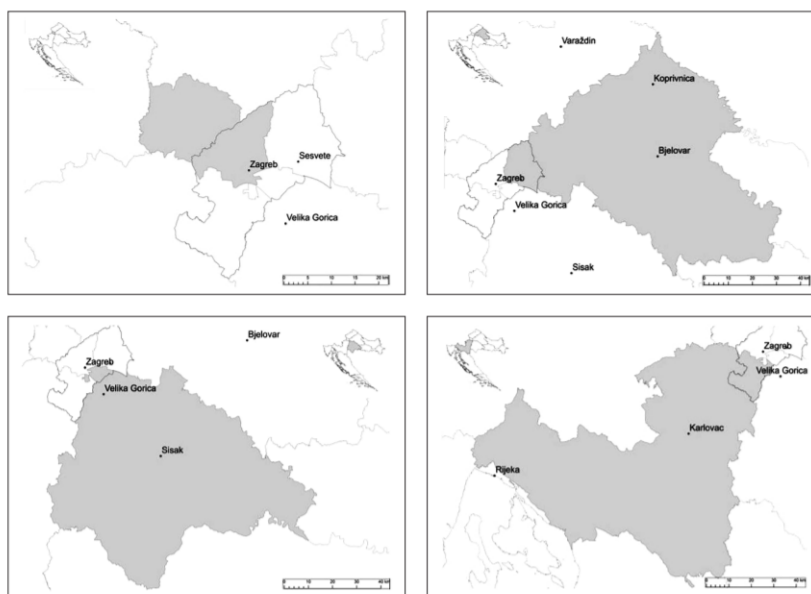


Slika 1.3: Izborne jedinice u RH

Parlamentarnim izborima se u Hrvatski sabor bira 151 zastupnik: 140 zastupnika se bira na temelju glasova u izbornim jedinicama Hrvatske, 3 na temelju glasova dijaspore, te 8 među nacionalnim manjinama. U svakoj izbornoj jedinici Republike Hrvatske bira se 14 zastupnika temeljem broja glasova. Stoga možemo naslutiti da su vodeće stranke mogle primjeniti određene metode manipuliranja granica izbornih jedinica. Zanimljivost koju možemo uočiti jest da se Zagreb dijeli u četiri izborne jedinice - vidi Sliku 1.4²:

¹Slika je preuzeta iz [13]

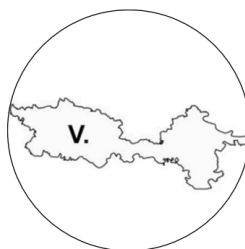
²Slika je preuzeta iz [13]



Slika 1.4: Podjela Zagreba u četiri izborne jedinice

Većina država pri definiranju izbornih jedinica postavlja zahtjev da one trebaju sadržavati podjednak broj građana s dopuštenim odstupanjem. Hrvatska se dijeli u deset izbornih jedinica i stoga svaka izborna jedinica treba sadržavati otprilike desetinu stanovništva cijele Republike Hrvatske, stoga je očito da Zagreb, kao najmnogoljudniji grad u Hrvatskoj, mora biti podijeljen na više izbornih jedinica. U nastavku donosimo pregled nekoliko reprezentativnih mjera kompaktnosti područja.

Reockova mjera kompaktnosti R je omjer površine izborne jedinice te kruga najmanje površine koji opisuje područje te izborne jedinice - vidi Sliku 1.5.

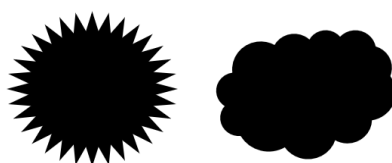


Slika 1.5: Opisani krug pete izborne jedinice RH

Reockova mjera nalazi se u intervalu $[0,1]$, te rezultat bliži 1 označava izbornu jedinicu čiji oblik teži obliku kruga, tj. kompaktniju izbornu jedinicu. Neka je A površina izborne jedinice, a B površina kruga koji opisuje područje te izborne jedinice. Definiramo:

$$R = \frac{A}{B}. \quad (1.3)$$

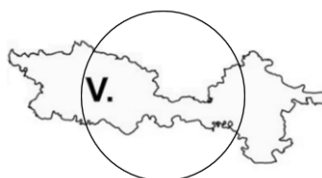
Reockova mjera ima očiti problem, a to je da skupovi jako čudnog oblika mogu dobiti dobar rezultat u smislu kompaktnosti. Radi ilustracije ove problematike pogledajmo Sliku 1.6:



Slika 1.6: Skupovi "čudnih" oblika

Schwartzbergova mjera kompaktnosti S je omjer opsega područja izborne jedinice i opsega kruga čija je površina jednaka površini izborne jedinice - vidi Sliku 1.7. Schwartzbergova mjera nalazi se u intervalu $[0,1]$, te rezultat bliži 1 označava kompaktniju izbornu jedinicu. Neka je L opseg područja izborne jedinice, A površina izborne jedinice, C opseg kruga čija površina iznosi A . Definiramo:

$$S = \frac{C}{L}. \quad (1.4)$$



Slika 1.7: Krug površine jednake površini pete izborne jedinice RH

Ova mjera rješava navedeni problem Reockove mjere jer uzima u obzir opseg područja izborne jedinice. Dokaz da $S \in [0, 1]$ slijedi iz Teorema 1.2.14.

Mjera pomoću **konveksne ljuske** (CH) je omjer površine izborne jedinice te opisanog konveksnog mnogokuta najmanje površine te izborne jedinice - vidi Sliku 1.8. Mjera se

nalazi u intervalu $[0,1]$, te rezultat bliži 1 označava kompaktniju izbornu jedinicu. Neka je A površina izborne jedinice, te neka je B površina najmanjeg opisanog konveksnog mnogokuta te izborne jedinice. Definiramo:

$$CH = \frac{A}{B}. \quad (1.5)$$



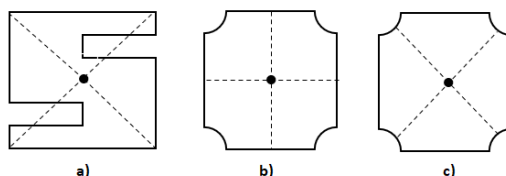
Slika 1.8: Konveksni opisani mnogokut pete izborne jedinice RH

Boyce i Clark su predložili mjeru koja uzima u obzir granice izborne jedinice umjesto opsega i površine. Naime, intuitivan pristup ovoj mjeri je taj da bi sve udaljenosti od centra do granica izborne jedinice trebale biti podjednake. Neka su $r_i, i = 1, \dots, n$, jednako razmaknute dužine kojima je jedna točka u središtu izborne jedinice D , a druga krajnja granica izborne jedinice D , te neka je l_i duljina svake dužine r_i . Pod središtem uzimamo točku koja je težište izborne jedinice. Moguće je da dužina r_i napusti područje izborne jedinice te se vrati u njega - vidi Sliku 1.9 a). Definiramo:

$$C(D) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{l_i}{\sum_i l_i} - \frac{1}{n} \right| \quad (1.6)$$

koja poprima vrijednost 0 kada su svi l_i jednake duljine, npr. područje oblika kruga. Dakle, rezultat bliži 0 označava kompaktniju izbornu jedinicu, a sama mjera nije ograničena na interval $[0,1]$.

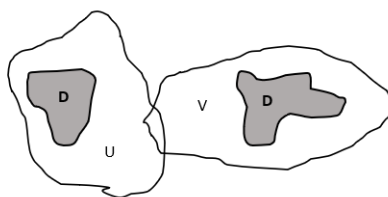
Problem ove mjere usko je povezan sa problemom Reockove mjere jer ne uzima u obzir opseg područja. Također, ova mjera je osjetljiva na broj dužina n , te na rotacije. Pogledamo li Sliku 1.9, možemo vidjeti da su oblici pod b) i c) jednaki, međutim ovisno o položaju dužina r_i , dobiti ćemo različite rezultate.



Slika 1.9: Boyce & Clark

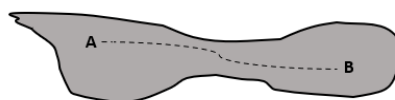
Prilikom definiranja granica izbornih jedinica, važno je pridržavati se svojstva povezanosti. Osoba smještena u točku $A \in D$ mora moći doputovati u točku $B \in D$ ne napuštajući pritom područje izborne jedinice D .

Definicija 1.2.15. Za podskup D metričkog prostora X kažemo da je **nepovezan** ako postoje neprazni otvoreni podskupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $D \cap U \neq \emptyset, D \cap V \neq \emptyset, D \subseteq U \cup V$ i $(U \cap V) \cap D = \emptyset$. Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je **povezan** ako nije nepovezan.



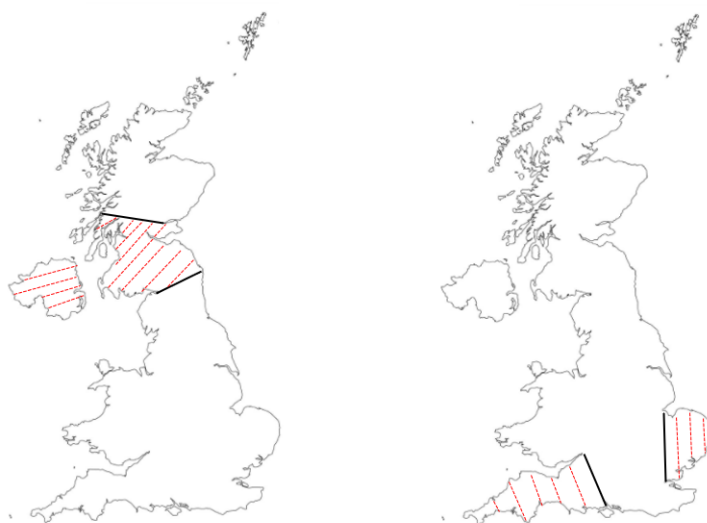
Slika 1.10: Nepovezan skup

Definicija 1.2.16. Za podskup D metričkog prostora X kažemo da je **putevima povezan** ako se svake dvije točke $A, B \in D$ mogu spojiti putem, tj. postoji neprekidno preslikavanje $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$ takvo da je $\varphi(0) = A, \varphi(1) = B$ i $\varphi([0, 1]) \subseteq D$. Funkciju φ nazivamo **staza** ili **put** među točkama A i B .



Slika 1.11: Put između točaka A i B

Izborne jedinice trebale bi biti povezane. Međutim, ta se povezanost odnosi samo na dio izborne jedinice koji ne obuhvaća otoke. Svaka izborna jedinica čije područje obuhvaća barem jedan otok je nepovezana (osim slučaja kada se cijela izborna jedinica sastoji od samog otoka), stoga za povezanost izborne jedinice promatramo samo njezino područje koje ne obuhvaća otoke. Na Slici 1.12 možemo vidjeti primjer dopuštene i nedopuštene nepovezanosti izbornih jedinica:



Slika 1.12: Dopuštena i nedopuštena nepovezanost

Pripadanje otoka određenoj izornoj jedinici uvelike ovisi o populiranosti otoka. Intuitivnim pristupom stanovništvo otoka ne bismo trebali razdvajati u više izbornih jedinica osim u slučaju kada otok ima velik broj stanovnika. Možemo promatrati tri slučaja vezana za podjelu otoka u izborne jedinice: 1. otoke sa malim brojem stanovnika potrebno je pridružiti u najbližu izbornu jedinicu, 2. otok bi trebao biti samostalna izborna jedinica ukoliko ima dovoljan broj stanovnika, te 3. ukoliko otok ima velik broj stanovnika potrebno ga je podijeliti u više izbornih jedinica, ali na način da je područje tih izbornih jedinica podskup područja samog otoka.

Mjere kompaktnosti na izborne jedinice čije granice obuhvaćaju otoke možemo primjeniti na nekoliko načina. Ukoliko imamo izbornu jedinicu takvu da njezin manji dio površine obuhvaća otoke (u potpunosti), tada koeficijente kompaktnosti računamo samo za područje izborne jedinice koje ne obuhvaća otoke. Ukoliko je otok sam izborna jedinica, tada za njega nije potrebno računati nikakve koeficijente krojenja granica, dok u slučaju kada se otok dijeli u dvije ili više izbornih jedinica postupamo analogno kao i prije.

Većina mjera kompaktnosti koje smo do sada definirali uvelike kažnjava područja čija "nekompaktnost" je prouzrokovana prirodnim granicama ili granicama same države. Promotrimo li Sliku 1.3 možemo uočiti primjerice da VII. hrvatska izborna jedinica ima veliko udubljenje prema granici sa Slovenijom. Na prvi pogled ta izborna jedinica ne izgleda jako kompaktno, međutim to se događa iz razloga što je dio njenih granica ujedno i dio granica same države. Mjere kompaktnosti previše kažnjavaju ovakve izborne jedinice, stoga bismo mogli uvesti dodatnu modifikaciju. Za svaku izbornu jedinicu koju promatramo odredimo njezin najmanji konveksni opisani mnogokut. Na dijelovima izborne jedinice gdje su njezine granice ujedno i granice same države ili obala, zamijenimo granice izborne jedinice stranicama konveksnog opisanog mnogokuta, te računamo koeficijente kompaktnosti za tako novodobivene skupove. Primjer toga možemo vidjeti na Slici 1.13:



Slika 1.13: Modifikacija granica izborne jedinice

U ovome poglavlju smo vidjeli nekoliko reprezentativnih mjera kompaktnosti te njihove nedostatke i poteškoće u primjeni. Niti jedna od navedenih mjera nije apsolutno objektivan kriterij za određivanje pristranog prekrajanja granica - dvije različite izborne jedinice mogu imati različitu rangiranost kompaktnosti ovisno o mjeri koju koristimo. Navedene mjere su dobar vodič za dobivanje uvida u problem, međutim niti jednu od njih ne možemo iskoristiti kako bismo točno odgovorili na pitanje je li došlo do pristranog prekrajanja granica.

Poglavlje 2

Konveksnost

2.1 Konveksnost

Gerrymandering je trenutno aktualna politička tema koja je dovela do uplitanja matematike u politiku. U Poglavlju 1 pokazali smo razne kvantitativne načine mjerenja kompaktnosti područja u svrhu odlučivanja u kojoj mjeri određena izborna jedinica zadovoljava određene standarde oblika područja, a u ovome poglavlju nastavit ćemo pristupom razvoja mjera na temelju konveksnosti oblika područja. Uvedimo matematičku definiciju konveksnog skupa.

Definicija 2.1.1. Skup $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je konveksan ukoliko je $\overline{AB} \in D, \forall A, B \in D$, tj. ako vrijedi $\lambda A + (1 - \lambda)B \in D, \forall A, B \in D$ i $\lambda \in [0, 1]$.

Za početak promatrajmo izbornu jedinicu koja ima oblik mnogokuta. Prisjetimo se prvo definicije mnogokuta, te uvedimo definicije reflektivnog i nereflektivnog kuta.

Definicija 2.1.2. *Mnogokut (n -terokut)* je dio ravnine ograničen dužinama čiji su krajevi $n \geq 3$ različitih točaka ravnine, sa svojstvom da se nikoje dvije od tih dužina ne sijeku (osim u svojim krajevima), te da je svaka od tih n točaka kraj točno dviju dužina.

Definicija 2.1.3. Za kut α kažemo da je **refleksivan** ukoliko $\alpha \in \langle 0, 180, 360 \rangle^\circ$. Za kut α kažemo da je **nerefleksivan** ukoliko $\alpha \in \langle 0, 180 \rangle^\circ$.

Označimo sa D područje izborne jedinice (mnogokuta), R broj reflektivnih kutova od D , te sa N broj nereflektivnih kuteva od D . **Taylorov indeks uvlačenja** za izbornu jedinicu D definiramo kao:

$$I(D) = \frac{N - R}{N + R}. \quad (2.1)$$

Kada je D konveksan skup, svi kutevi su nerefleksivni, tj. $R = 0$ pa imamo $I(D) = 1$. Prema Tayloru, konveksan skup se smatra najmanje manipuliranim po ovoj mjeri. Problem ove mjere je vrlo očit. Naime, ako promatramo konveksan n -terokut, njegov indeks uvlačenja iznosi $I(D) = 1$. Međutim, ako bismo svaku od n stranica "pogurnuli" prema unutrašnjosti, dobili bismo znatno različit indeks uvlačenja iako se sam oblik područja nije znatno promijenio. Ako za primjer uzmemo pravokutnik, od početnog $I(D) = 1$, pogurivanjem stranica prema unutrašnjosti dolazimo do $I(D) = 0$. Primjer toga možemo vidjeti na Slici 2.1:



Slika 2.1: Pogurnuti pravokutnik

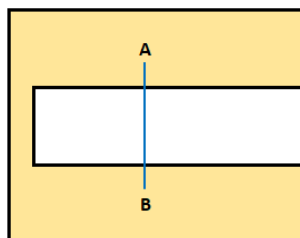
2.2 Koeficijent konveksnosti

Konveksnost izborne jedinice može se mjeriti na način da se odredi vjerojatnost da izborna jedinica sadrži najkraći put između dvije točke unutar te izborne jedinice. Najkraći put podrazumijeva put koji se nalazi unutar države u kojoj se izborna jedinica nalazi, stoga to ne mora biti ravna crta. Također, može postojati više od jednog najkraćeg puta između dvije točke, ovisno o obliku države. Uzimajući to u obzir, možemo računati vjerojatnost da se barem jedan od najkraćih puteva između dvije točke u izornoj jedinici nalazi unutar izborne jedinice. Razradu ove mjere započeti ćemo jednostavnijim pristupom.

Definicija 2.2.1. *Neka je D podskup od \mathbb{R}^2 , te neka su A, B nasumično odabrane točke iz D . **Koeficijent konveksnosti** skupa D označavamo sa $\chi(D)$, te nam on predstavlja vjerojatnost da se dužina \overline{AB} u potpunosti nalazi unutar skupa D .*

Koeficijentom konveksnosti iz Definicije 2.2.1 mjerimo do koje razine izborna jedinica zadovoljava svojstvo konveksnosti.

Primjera radi, promatramo izbornu jedinicu oblika kao na Slici 2.2:

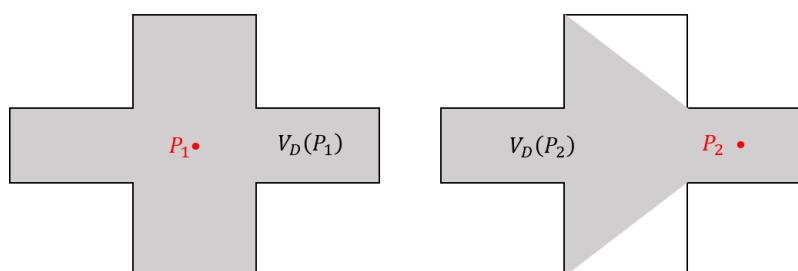


Slika 2.2: Izborna jedinica

Izborna jedinica bi mogla poprimiti oblik područja kao na Slici 2.2 u slučaju želje za grupiranjem glasača sličnih karakteristika, kao što su rasne ili političke preferencije ili u slučaju isključivanja određene grupe glasača iz izborne jedinice. Radi zahtjeva povezanosti područja izborne jedinice, imamo usko područje koje spaja dva veća područja koja obuhvaćaju većinu populacije izborne jedinice. Za područje oblika kao na Slici 2.2 nije teško odrediti gornju granicu koeficijenta konveksnosti. Naime, ako izaberemo dvije točke na način da se jedna nalazi u gornjem dijelu područja, a druga u donjem, dužina koja ih spaja će gotovo uvijek izaći izvan granica izborne jedinice. S obzirom da gotovo polovica točaka spada u takvu kategoriju, razumno je pretpostaviti da je koeficijent konveksnosti ≤ 0.5 . Precizan izračun koeficijenta konveksnosti može biti složen pa stoga uvodimo nekoliko pojmova koji će nam omogućiti njegovo računanje.

Definicija 2.2.2. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, te neka je $P = (x, y)$ točka iz D . Za točku $P' \in D$ kažemo da je **vidljiva** iz točke P (respektivno prema D) ako se dužina $\overline{PP'}$ u potpunosti nalazi unutar D . **Vidljivo područje** točke P , oznake $V_D(P)$, je skup svih točaka iz D koje su vidljive iz točke P . Površinu vidljivog područja točke P označavamo sa $A_D(P)$. U slučaju kada je $V_D(P) = D$, kažemo da je P **univerzalna** točka. Skup svih univerzalnih točaka iz D nazivamo **univerzalno područje** skupa D te označavamo sa U_D .*

Slika 2.3 prikazuje vidljiva područja za točke $P_i, i = 1, 2$. Točka P_1 je univerzalna točka. Za skup $D \subseteq \mathbb{R}^2$ površine A_D , vjerojatnost da će slučajno odabrana točka $P' \in X$ biti vidljiva iz točke $P \in D$ je $A_D(P)/A_D$.



Slika 2.3: Vidljiva područja

Koeficijent konveksnosti $\chi(D)$ je vjerojatnost da su nasumično odabrane točke iz D međusobno vidljive, to jest:

$$\chi(D) = \int \int_D \frac{A_D(x, y)}{A_D} dx dy = \frac{1}{A_D} \int \int_D A_D(x, y) dx dy. \quad (2.2)$$

U praksi je izračun egzaktne vrijednosti koeficijenta konveksnosti gotovo nemoguć s obzirom da većina izbornih jedinica ima kompleksne oblike područja koji bi se u svrhu preciznosti morali aproksimirati mnogokutima s tisućama stranica. Iz tog razloga, aproksimacije koeficijenta konveksnosti se računaju koristeći Monte Carlo simulacije. Monte Carlo metode u praksi se koriste kada određeni problem nije moguće (jednostavno) riješiti analitički. Za korištenje Monte Carlo metoda u svrhe određivanja koeficijenta konveksnosti bit će nam potrebne Bernoullijeve slučajne varijable.

Definicija 2.2.3. Bernoullijeva slučajna varijabla $X \sim B(p)$ s parametrom $p \in [0, 1]$ je svaka slučajna varijabla koja poprima vrijednost 1 s vjerojatnošću p , te vrijednost 0 s vjerojatnošću $q = 1 - p$.

Definicija 2.2.4. Binomna slučajna varijabla $X \sim B(n, p)$ s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in [0, 1]$ je svaka slučajna varijabla čija se vjerojatnosna distribucija sastoji od n nezavisnih i jednakodistribuiranih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom p , tj. vrijedi:

$$\Pr(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}. \quad (2.3)$$

Definicija 2.2.5. Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f . Ako vrijedi $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x|f(x) < \infty$, onda kažemo da X ima **matematičko očekivanje** koje definiramo kao:

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in \mathbb{R}} xf(x). \quad (2.4)$$

Teorem 2.2.6. (Jaki zakon velikih brojeva)¹. Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}[X] = \mu$. Tada vrijedi

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu. \quad (2.5)$$

Neka je X Bernoullijeva slučajna varijabla. Matematičko očekivanje Bernoullijeve slučajne varijable X iznosi $\mathbb{E}[X] = p$. Prema jakom zakonu velikih brojeva, očekivanje $\mathbb{E}[X] = p$ možemo procijeniti aritmetičkom sredinom n nezavisnih i jednako distribuiranih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom p . Iz navedenog slijedi da je postupak procjene koeficijenta konveksnosti pomoću Monte Carlo metoda sljedeći: nasumično odaberemo "veliki" $n \in \mathbb{N}$ broj parova točaka $A_i, B_i \in D, i = 1, \dots, n$, te im pridružimo njihove dužine $\overline{A_i B_i}$. Ukoliko dužina $\overline{A_i B_i}$ u potpunosti leži u D , vrijedi $X_i = 1$, te $X_i = 0$ u suprotnom. Iz jakog zakona velikih brojeva slijedi da koeficijent konveksnosti dobivamo određivanjem $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, tj. procjenom parametra p iz binomne razdiobe $B(n, p)$. Za računanje koeficijenta konveksnosti pomoću Monte Carlo metoda potrebno je koristiti određene matematičke softvere.

U Tablici 2.4² nalaze se prosječni koeficijenti konveksnosti za države SAD-a:

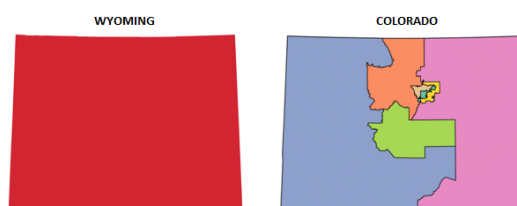
Alabama	0,699	Kentucky	0,789	North Dakota	0,999
Alaska	0,741	Lousiana	0,754	Ohio	0,683
Arizona	0,836	Maine	0,674	Oklahoma	0,776
Arkansas	0,813	Maryland	0,367	Oregon	0,787
California	0,646	Massachusetts	0,599	Pennsylvania	0,635
Colorado	0,771	Michigan	0,778	Rhode Island	0,631
Connecticut	0,728	Minnesota	0,868	South Carolina	0,708
DC	0,951	Mississippi	0,801	South Dakota	0,997
Delaware	0,855	Missouri	0,775	Tennessee	0,705
Florida	0,598	Montana	0,987	Texas	0,700
Georgia	0,829	Nebraska	0,894	Utah	0,838
Hawaii	0,641	Nevada	0,719	Vermont	0,949
Idaho	0,811	New Hampshire	0,709	Virginia	0,677
Illinois	0,664	New Jersey	0,584	Washington	0,746
Indiana	0,804	New Mexico	0,831	West Virginia	0,577
Iowa	0,806	New York	0,655	Wisconsin	0,842
Kansas	0,872	North Carolina	0,585	Wyoming	1,000

Slika 2.4: Prosječan koeficijent konveksnosti izbornih jedinica po državama SAD-a

¹Teorem 8.10 iz [8]

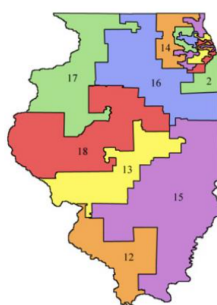
²Rezultati koji se nalaze u tablici preuzeti su iz [6]

Na Slici 2.5 se nalaze izborne jedinice država Wyoming i Colorado. Zanimljivo je da obje države imaju gotov identičan oblik područja, međutim kao što možemo vidjeti iz Tablice 2.4, prosječan koeficijent konveksnosti po izbornim jedinicama za Wyoming iznosi 1.000, dok prosječan koeficijent konveksnosti po izbornim jedinicama za Colorado iznosi 0.771. Naravno, to proizlazi odatle što se Wyoming sastoji od 1 izborne jedinice, dok se Colorado sastoji od 7 izbornih jedinica (Colorado ima desetak puta više stanovnika od Wyominga).



Slika 2.5: Wyoming i Colorado

Prema koeficijentu konveksnosti, najbolji rezultat postiže država Wyoming sa rezultatom 1.000, a najgore država Maryland sa rezultatom 0.367. U ovakvim ekstremnim slučajevima potrebno je uzeti u obzir sam oblik državnih granica. Wyoming ima oblik skoro savršenog pravokutnika te se sastoji od jedne jedine izborne jedinice, dok Maryland ima poprilično nepravilan oblik, te je sam koeficijent konveksnosti države jednak 0.3133 što je manje nego prosjek izbornih jedinica od kojih se sastoji. Primjerice, Illinois ima poprilično konveksan oblik (Slika 2.6) sa koeficijentom konveksnosti 0.968, međutim u prosjeku su koeficijenti konveksnosti njegovih izbornih jedinica za 30% manji što bi moglo dati do znanja da je došlo do pristranog prekrajanja granica izbornih jedinica.³



Slika 2.6: Illinois

³Rezultati su preuzeti iz [6]

Osim samog oblika područja izborne jedinice, kako bismo dodatno modificirali koeficijent konveksnosti 2.2, u obzir treba uzeti i granice države. Pogledamo li Sliku 2.7 (VII. hrvatska izborna jedinica) možemo uočiti da se najkraći put ne nalazi u samoj izbornoj jedinici, međutim najkraći put unutar države se nalazi u njoj:



Slika 2.7: Najkraći put unutar države

Kod izbornih jedinica kao na Slici 2.7, koeficijentom konveksnosti 2.2 previše penaliziramo ne uzimajući u obzir granicu države, stoga moramo modificirati naš koeficijent konveksnosti.

Definicija 2.2.7. *Neka su $D, S \subseteq \mathbb{R}^2$ takvi da je $D \subseteq S$. Za točke $P_1, P_2 \in D$ kažemo da je točka P_2 **kvazi-vidljiva** iz točke P_1 (respektivno prema S) ukoliko je točka P_2 vidljiva iz točke P_1 ili ako dužina $\overline{P_1P_2}$ siječe granice od D samo u točkama koje pripadaju granicama od S . **Granično prilagođen koeficijent konveksnosti** $\tilde{\chi}(D)$ je vjerojatnost da su dvije nasumične točke iz D kvazi-vidljive.*

Točke na Slici 2.7 su kvazi-vidljive. Način određivanja granično prilagođenog koeficijenta konveksnosti je sličan načinu određivanja koeficijenta konveksnosti (2.2). Neka je S područje države, a D područje izborne jedinice. Neka nam X predstavlja Bernoullijevu slučajnu varijablu s parametrom p . Odaberemo "veliki" $n \in \mathbb{N}$ broj parova točaka $A_i, B_i \in D, i = 1, \dots, n$, te im pridružimo njihove dužine $\overline{A_iB_i}$. Ukoliko dužina $\overline{A_iB_i}$ u potpunosti leži u D ili $\overline{A_iB_i}$ siječe granice od D samo u točkama koje su ujedno i granice od S , vrijedi $X_i = 1$, a u suprotnom $X_i = 0$. Daljnji postupak Monte Carlo metoda za određivanje granično prilagođenog koeficijenta konveksnosti analogan je određivanju koeficijenta konveksnosti 2.2.

Za dodatno poboljšanje mjere konveksnosti u obzir možemo uzeti i naseljenost područja, tj. populaciju. Većina mjera konveksnosti/kompaktnosti bavi se samo geometrijom izborne jedinice, a ne načina na koji je stanovništvo unutar nje raspoređeno, no populacija igra veliku ulogu u prekrajanju granica izbornih jedinica. Naime, pri samom definiranju

granica izbornih jedinica često započinjemo uvjetom da izborne jedinice moraju imati podjednak broj stanovnika. Vrlo nepravilna granica izborne jedinice je irelevantna ukoliko je najveći dio stanovništva izborne jedinice koncentriran u konveksnom podskupu interijera izborne jedinice. S druge strane, mala udubljenja mogu biti jak dokaz pristranog krojenja granica ako se javljaju u gusto naseljenim područjima. Postoji jednostavan način za uzimanje populacije u obzir prilikom izračuna koeficijenta konveksnosti. Grupiramo stanovnike u određene blokove određene brojem stanovnika, te primjenimo navedene algoritme za određivanje koeficijenata konveksnosti na blokove umjesto na slučajne točke unutar izborne jedinice. Na taj način osiguravamo da se gušće naseljena područja u algoritmu pojavljuju češće od rjeđe naseljenih područja.

U Tablici 2.8⁴ možemo vidjeti usporedbu mjera koeficijenta konveksnosti $\chi(D)$, granično prilagođenog koeficijenta konveksnosti $\tilde{\chi}(D)$, te populacijsko-granično prilagođen koeficijent konveksnosti $\tilde{\chi}_p(D)$ za nekoliko izbornih jedinica SAD-a:

Izborna jedinica	χ	$\tilde{\chi}$	$\tilde{\chi}_p$
Connecticut 1	0,417	0,451	0,642
Connecticut 2	0,922	0,928	0,876
Connecticut 3	0,744	0,807	0,913
Connecticut 4	0,829	0,903	0,984
Connecticut 5	0,718	0,719	0,509
Maryland 1	0,136	0,974	0,908
Maryland 2	0,073	0,497	0,397
Maryland 3	0,156	0,371	0,325
Maryland 4	0,320	0,338	0,389
Maryland 5	0,313	0,869	0,542
Maryland 6	0,470	0,959	0,924
Maryland 7	0,745	0,760	0,769
Maryland 8	0,742	0,810	0,678
New Hampshire 1	0,750	0,784	0,809
New Hampshire 2	0,671	0,733	0,572
Prosjek	0,534	0,727	0,682

Slika 2.8: Koeficijenti konveksnosti nekoliko izbornih jedinica SAD-a

Iz Tablice 2.8 možemo uočiti da se uzimanjem u obzir granica države koeficijenti konveksnosti mogu znatno promijeniti. Ukoliko je $\tilde{\chi}_p(D) > \tilde{\chi}(D)$ možemo zaključiti da je gušće naseljeni dio izborne jedinice smješten u konveksnijem području nego što je samo područje izborne jedinice što smanjuje sumnju u pristrano prekranje granica. Ukoliko je $\tilde{\chi}_p(D) < \tilde{\chi}(D)$ mogli bi zaključiti da je došlo do pristranog prekranja granica izborne jedinice.

⁴Rezultati su preuzeti iz [6]

S obzirom da ne postoji apsolutno objektivna mjera pomoću koje bismo utvrdili pristrano prekrajanje izbornih jedinica, intuicija nam može biti dobar vodič prilikom odabira mjera za kvantificiranje pristranog prekrajanja granica. Naime, u nepristrano krojenoj izbornoj jedinici bi nasumično postavljen šetač (unutar područja izborne jedinice) trebao hodajući ravnom linijom doputovati iz točke $A \in D$ u točku $B \in D$ ne napuštajući pritom područje izborne jedinice D . Koeficijenti konveksnosti koje smo do sada uveli nam kvantificiraju vjerojatnost takvih događaja. Sada ćemo uvesti novu mjeru konveksnosti koja se bazira na "hvatanju" izobličivosti granica izbornih jedinica. Vođeni intuicijom također bismo za nepristrano krojene izborne jedinice očekivali da bi nasumično postavljen šetač (unutar područja izborne jedinice), hodajući ravnom linijom, točno jednom prešao preko granica izborne jedinice. Preciznije, za početnu točku $p \in D$, osoba koja hoda u smjeru $\theta \in [0, 2\pi)$ siječe granice izborne jedinice k puta. Pošto su izborne jedinice omeđene, osoba mora izaći izvan područja izborne jedinice, stoga slijedi $k \geq 1$. $k : D \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ je slučajna varijabla koja predstavlja broj presjeka granica izborne jedinice slučajno postavljenog šetača, a čija vjerojatnosna distribucija se sastoji od zajedničkih vjerojatnosnih distribucija nezavisnih slučajnih varijabli $p \in D$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ čije su vjerojatnosne distribucije uniformne, stoga vrijedi $Pr(p, \theta) = Pr(p)Pr(\theta) = \frac{1}{2\pi A}$. Ovaj koncept možemo formalizirati, te uvesti novu mjeru pristranog prekrajanja izbornih jedinica koju ćemo nazivati **očekivani broj graničnih presjeka**.

Definicija 2.2.8. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $(p, \theta) \in D \times [0, 2\pi)$ par nasumično odabranih slučajnih varijabli sa zajedničkom funkcijom gustoće $Pr(p, \theta)$. Tada je broj graničnih presjeka slučajna varijabla $k : D \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. **Očekivani broj graničnih presjeka** je očekivanje slučajne varijable $k(p, \theta)$:*

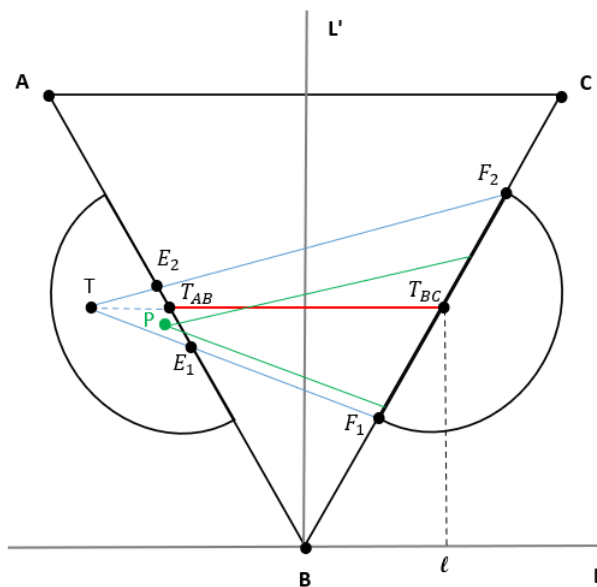
$$\gamma(D) = \int_{p \in D} \int_{\theta \in [0, 2\pi)} k(p, \theta) Pr(p, \theta) dp d\theta. \quad (2.6)$$

Iz monotonosti matematičkog očekivanja slijedi $k \geq 1 \Rightarrow \gamma(D) \geq 1, \forall D \subseteq \mathbb{R}^2$. Očekivani broj graničnih presjeka intepretiramo na način da je to očekivanje koliko puta će osoba smještena u točku $p \in D$, hodajući ravnom linijom u pravcu $\theta \in [0, 2\pi)$, prijeći granicu izborne jedinice. Prepostavljamo da konveksni mnogokuti predstavljaju nepristrano krojene izborne jedinice te da su odstupanja od konveksnosti indikatori pristranog prekrajanja. Pokazati ćemo da za konveksne mnogokute vrijedi $\gamma(D) = 1$, što je donja granica za očekivani broj graničnih presjeka.

Lema 2.2.9. *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mnogokut. Ukoliko D nije konveksan, tada je $\gamma(D) > 1$.*

Dokaz. Kako D nije konveksan, postoje vrhovi $A, B, C \in D$ takvi da je kut $\angle ABC > 180^\circ$. Neka je T_{AB} središte dužine \overline{AB} , te neka je T_{BC} središte dužine \overline{BC} . Za točku $p \in D$ definiramo r -okolinu unutar D , tj. $\{q \in \mathbb{R}^2 \mid |p - q| < r\} \cap D = Q_r(p)$. Neka je L' simetrala kuta $\angle ABC$, te neka je L pravac okomit na L' koji prolazi točkom B . Definiramo

$r_{AB} = \min_{l \in L} |l - T_{AB}|$, te na analogan način definiramo r_{BC} i odaberemo $r < \min\{r_{AB}, r_{BC}\}$. Bez smanjenja općenitosti, odaberemo točku $T \in \underline{Q}_r(T_{AB})$ takvu da $T \notin \overline{AB}$, te označimo sa F_1, F_2 točke koje se nalaze na presjeku dužine \overline{BC} i skupa $\underline{Q}_r(T_{BC})$. Očito, svaka zraka iz točke T koja se nalazi unutar trokuta $\triangle F_1TF_2$ siječe dužine $\overline{AB}, \overline{BC}$, dakle siječe mnogokut D u dvije njegove stranice. Skicu dokaza možemo vidjeti na Slici 2.9:



Slika 2.9: Skica

Ukoliko iz neke točke $P \in \text{int}(\triangle E_1TE_2)$ povučemo zrake paralelne sa kracima kuta $\angle F_1TF_2$, dobivamo trokut sličan trokutu $\triangle F_1TF_2$, te sve zrake unutar kuta $\angle F_1TF_2$ sijeku dužine \overline{AB} i \overline{BC} . Time smo dobili podskup $S = \triangle E_1TE_2$ od D pozitivne mjere na kojemu vrijedi $k(p, \theta) > 1, \forall \theta \in [0, \phi]$, pri čemu je $\phi \in (0, \angle F_1TF_2)$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
 \gamma(D) &= \int_{p \in D} \int_{\theta \in [0, 2\pi)} k(p, \theta) Pr(p, \theta) dp d\theta \\
 &= \int_{p \in S} \int_{\theta \in [0, \phi]} k(p, \theta) Pr(p, \theta) dp d\theta + \int_{p \in D \setminus S} \int_{\theta \in [\phi, 2\pi)} k(p, \theta) Pr(p, \theta) dp d\theta \quad (2.7) \\
 &> \int_{p \in S} \int_{\theta \in [0, \phi]} Pr(p, \theta) dp d\theta + \int_{p \in D \setminus S} \int_{\theta \in [\phi, 2\pi)} Pr(p, \theta) dp d\theta = 1.
 \end{aligned}$$

□

Teorem 2.2.10. Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mnogokut. Tada je $\gamma(D) = 1$ ako i samo ako je D konveksan.

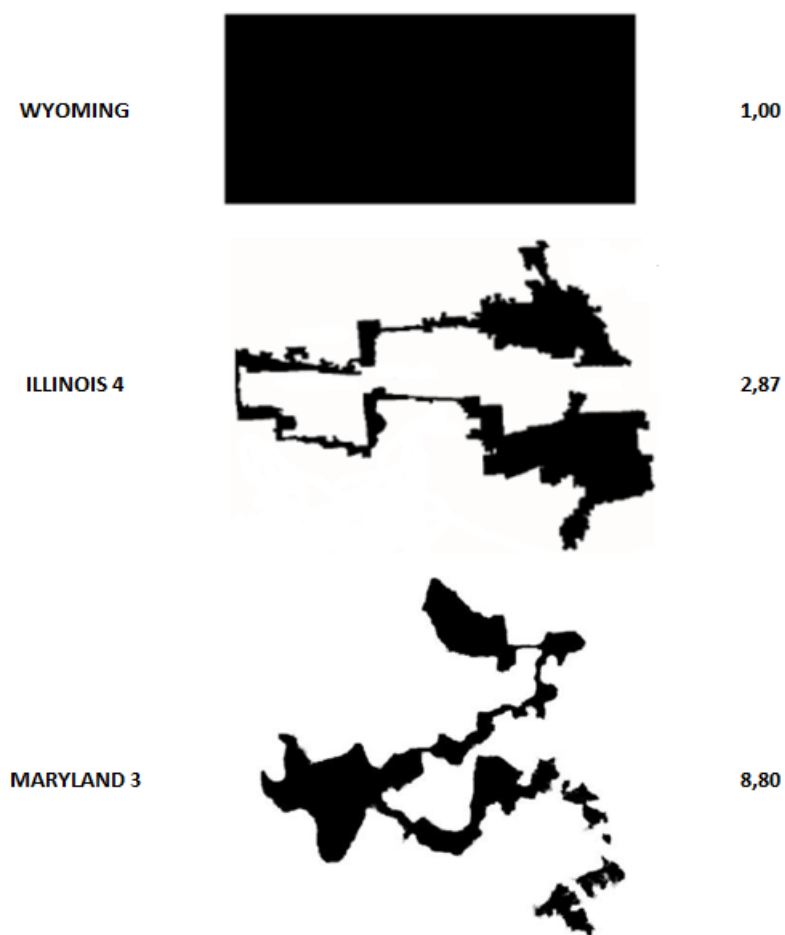
Dokaz. Ako je D konveksan, tada će svaka zraka koja počinje iz $p \in D$ sjeći granice od D točno jednom pri izlazu iz D . U suprotnom, ako takva zraka siječe granice od D više od jednom, tada bi pri drugom presjeku zraka ponovno ušla u mnogokut D , što bi značilo da postoji točka $q \in D$ takva dužina \overline{PQ} ne leži potpuno u D , što je u kontradikciji s definicijom konveksnog skupa. Negacijom Leme 2.2.9 dobivamo tvrdnju suprotnog smjera. \square

Za izračun $\gamma(D)$ koristi se jaki zakon velikih brojeva i Monte Carlo metode. Jaki zakon velikih brojeva nam govori da aritmetička sredina uzorka teži u očekivanje slučajne varijable kada $n \rightarrow \infty$. Za funkciju gustoće slučajne varijable $k(p, \theta)$ koristimo $Pr(p, \theta) = \frac{1}{2\pi A}$, na temelju pretpostavke da su slučajne varijable p i θ nezavisne, te da su im vjerojatnosne distribucije uniformne. Neka je $k_i = (p_i, \theta_i) \in D \times [0, 2\pi), i = 1, \dots, n$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Prema jakom zakonu velikih brojeva vrijedi $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \rightarrow \gamma(D)$ kada $n \rightarrow \infty$, stoga $\gamma(D)$ možemo procijeniti uzoračkom aritmetičkom sredinom slučajnih varijabli k_i , gdje je k_i zapravo:

$$k_i(p_i, \theta_i) = \sum_{e \in E(D)} I_i(e) \quad (2.8)$$

pri čemu je $I_i(e)$ indikatorska varijabla koja nam govori siječe li zraka iz točke p_i smjera θ_i stranicu e mnogokuta D . Na Slici 2.10⁵ se nalazi nekoliko primjera izračuna očekivanog broja graničnih presjeka:

⁵Rezultati su preuzeti iz [10]



Slika 2.10: Očekivani broj graničnih presjeka

Poglavlje 3

Neke posebne metode i mjere

3.1 Primjena ham-sandwich teorema

Prilikom svakog definiranja granica izbornih jedinica postoji nekoliko uobičajenih pretpostavki kojih se moramo pridržavati. Pogledajmo koliko možemo izmanipulirati određene granice izborne jedinice ukoliko se pridržavamo sljedećih pretpostavki: imamo državu koja se dijeli u $n \in \mathbb{N}$ izbornih jedinica, te pretpostavljamo da se u svakoj izornoj jedinici nalazi podjednak broj glasača. Također, ukoliko to granice same države dopuštaju, područja izbornih jedinica moraju biti konveksna.

Pretpostavimo da imamo izbore koji se sastoje od dvije političke stranke: crveni i plavi. Ono što se pristranim krojenjem izbornih jedinica može postići prilikom pridržavanja navedenih uvjeta jest da za stranku koja na razini države ima većinski dio glasača, možemo osigurati pobjedu u svakoj izornoj jedinici. Način na koji to možemo osigurati proizlazi iz diskretne geometrije, te je zapravo poopćenje **ham-sandwich teorema** u \mathbb{R}^2 . Prije uvođenja ham-sandwich teorema u \mathbb{R}^2 , povoljno je navesti **Borsuk-Ulamov teorem**. Neka nam S^n predstavlja n -dimenzionalnu jediničnu sferu u euklidskom prostoru \mathbb{R}^{n+1} , tj. neka je S^n skup svih vektora x norme 1 u euklidskom prostoru \mathbb{R}^{n+1} .

Teorem 3.1.1. (*Borsuk-Ulamov teorem*). *Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija. Tada postoji $x \in S^n$ takav da $f(x) = f(-x)$.*

Dokaz ćemo provesti samo za slučaj $n = 1$ s obzirom da nam je taj potreban.

Dokaz. Neka je $n = 1$ i neka je $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno preslikavanje. Kružnicu S^1 možemo zapisati u parametriziranom obliku $p(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi)$. Ako je $f(0) = f(\pi)$, onda već imamo jednaku vrijednost preslikavanja u dvjema dijametralno suprotnim točkama pa uzmimo, bez smanjenja općenitosti, da je $f(0) > f(\pi)$. Uvedimo funkciju $h(\theta) = f(\theta + \pi), \theta \in [0, 2\pi)$, pri čemu uzimamo $[\theta + \pi](\text{mod } 2\pi)$ ukoliko je $\theta \geq \pi$.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} h(0) &= f(\pi) - f(0) < 0, \\ h(\pi) &= f(0) - f(\pi) > 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

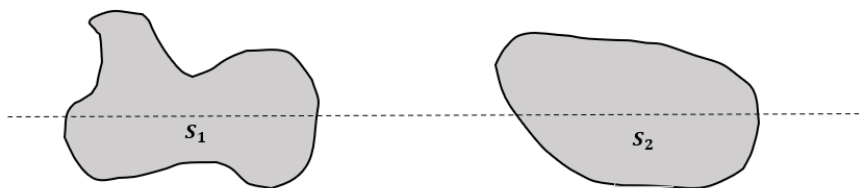
Funkcija h je neprekidna na $[0, \pi]$ a u krajnjim točkama segmenta poprima vrijednosti suprotnih predznaka pa postoji točka $\theta_0 \in (0, \pi)$ takva da je $h(\theta_0) = 0$. Stoga je $f(\theta_0 + \pi) - f(\theta_0) = 0$, dakle $f(\theta_0 + \pi) = f(\theta_0)$. Za točku $x_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ vrijedi

$$x_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) = (\cos(\theta_0 + \pi), \sin(\theta_0 + \pi)) = (-\cos \theta_0, -\sin \theta_0) = -x_0, \quad (3.2)$$

pa je $f(x) = f(-x)$.

□

Teorem 3.1.2. (*Ham-sandwich teorem*). *Neka je zadano $n \in \mathbb{N}$ omeđenih izmjerivih skupova $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{R}^n$ n -dimenzionalnog euklidskog prostora. Tada postoji $(n - 1)$ -dimenzionalna hiperravnina koja dijeli svaki skup S_i u dva podskupa jednakih mjera.*



Slika 3.1: Skica teorema u \mathbb{R}^2

Dokaz ćemo pokazati za slučaj Euklidskog prostora \mathbb{R}^2 gdje za mjeru uzimamo površinu skupa.

Dokaz. Neka su $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^2$ omeđeni skupovi pozitivne površine, te neka su $A(S_1)$ i $A(S_2)$ njihove površine respektivno. Svaki smjer u ravnini \mathbb{R}^2 ima odgovarajući vektor smjera, koji se može predstavljati pomoću točaka, tj. radijvektora jedinične kružnice $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Za svaki smjer $v = (\cos \theta, \sin \theta) \in K, \theta \in [0, 2\pi)$, postoji pravac $p(v)$ nagiba $tg \theta$ takav da dijeli skup S_1 u dva skupa jednakih površina. Nadalje, pravac $p(v)$ dijeli \mathbb{R}^2 u dvije poluravnine, koje proizvoljno označavamo kao pozitivna strana $w^+(v)$ i negativna strana $w^-(v)$. Definiramo funkciju $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ kao

$$f(v) := A(S_2 \cap w^+(v)). \quad (3.3)$$

To jest, $f(v)$ odgovara površini onog dijela skupa S_2 koji se nalazi na pozitivnoj strani od $p(v)$. Budući da je f neprekidna funkcija, možemo primjeniti 1-dimenzionalnu verziju

Teorema 3.1.1. Tada postoji $v' \in K$ takav da $f(v') = f(-v')$. Primjetimo da vrijedi $f(-v') = A(S_2 \cap w^-(v'))$, s obzirom da je $w^+(-v') = w^-(v')$ ¹. Tada vrijedi $A(S_2 \cap w^+(v')) = A(S_2 \cap w^-(v'))$. To znači da možemo podijeliti skup S_2 na dva podskupa jednakih površina, ali ujedno smo p konstruirali na način da $p(v')$ dijeli S_1 na dva jednaka podskupa $\forall v' \in K$. Iz navedenoga slijedi da $p(v')$ istovremeno dijeli skupove S_1 i S_2 na dva podskupa jednakih površina. \square

Postoji varijanta ham-sandwich teorema koja nam pomaže da izborne jedinice unutar jedne države odaberemo na način da sadrže podjednak broj ljudi. Dokaz navedenog teorema nećemo prikazati u radu, a može se naći u [2].

Teorem 3.1.3. (Varijanta ham-sandwich teorema). *Neka su zadani $D \subseteq \mathbb{R}^2$, brojevi $g, h, n \in \mathbb{N}$, te neka nam gn predstavlja broj crvenih točaka u \mathbb{R}^2 , a hn broj plavih točaka u \mathbb{R}^2 tako da nikoje tri istobojne točke nisu kolinearne. Tada skup D možemo podijeliti u n konveksnih podskupova na način da svaki od poskupova sadrži točno g crvenih točaka i h plavih točaka.*

Pogledajmo kako možemo iskoristiti Teorem 3.1.3 u svrhu konstruiranja konveksnih izbornih jedinica s jednakim brojem glasača. S obzirom da teorem vrijedi ukoliko imamo paran broj točaka, te da većina država u svojim izbornim jedinicama ima velik broj glasača, oduzimanjem/nadodavanjem jednog glasača nećemo promijeniti rezultate izbora stoga to zanemarujemo. Nadalje, Teorem 3.1.3 možemo koristiti samo ukoliko je broj izbornih jedinica potencija broja 2. Za početak promatrajmo državu čije područje predstavljamo skupom D . Primjenom Teorema 3.1.3 možemo D podijeliti na dva podskupa K_1, K_2 takva da oba sadrže jednak broj crvenih i plavih točaka. Sada analogni postupak provodimo na podskupovima K_1 i K_2 sve do željenog broja izbornih jedinica unutar države. Nakon k koraka imamo 2^k izbornih jedinica čija su područja konveksna (ukoliko to granice države dopuštaju), te imaju jednak broj plavih i crvenih glasača, što znači da politička stranka koja na razini države ima veći broj glasača sada ima veći broj glasača u svakoj izornoj jedinici te time ostvaruje osvajanje izbora u 100% izbornih jedinica.

Želimo li na ovaj način podijeliti državu u proizvoljan broj izbornih jedinica moramo koristiti dijadske racionalne brojeve. To su brojevi oblika $\frac{a}{2^b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ koji su gusti u \mathbb{R} . Zaista, za $x \in \mathbb{R}$ možemo izabrati dijadski broj $\frac{\lfloor 2^i x \rfloor}{2^i}$ proizvoljno blizak x uzimajući dovoljno velik i , pa stoga ako želimo dobiti n izbornih jedinica radimo sljedeće:

1) izaberemo $i \in \mathbb{N}$ te koristeći gornju proceduru konstruiramo 2^i izbornih jedinica izjednačavajući plavu i crvenu populaciju

¹Promjenom orijentacije pravca p mijenja se "pozitivnost/negativnost" poluravnina.



Slika 3.2: Dijeljenje države u izborne jedinice s jednakim brojem glasača

2) definiramo n novih izbornih jedinica grupirajući dobivenih 2^i izbornih jedinica u skupove veličina $\lfloor \frac{2^i}{n} \rfloor$ ili $\lceil \frac{2^i}{n} \rceil$.

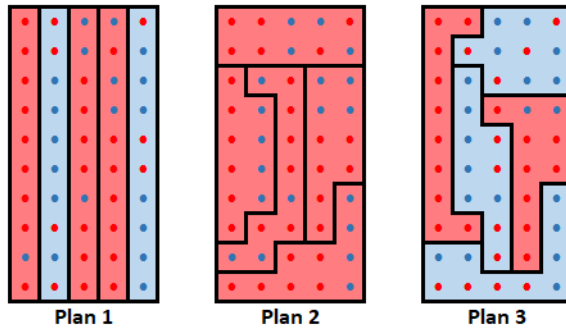
Kako se n izbornih jedinica dobivenih primjenom koraka 2) razlikuju međusobno najviše za veličinu $\frac{1}{2^i}$ ukupne populacije, devijacije između n izbornih jedinica mogu biti proizvoljno male uzimajući i dovoljno velikim.

3.2 Jaz učinkovitosti (efficiency gap)

Pretpostavimo da imamo dvije političke stranke A i B , te da se država dijeli u n izbornih jedinica čiji ćemo skup označiti sa $D = \{d_1, \dots, d_n\}$. Pobjeda u određenoj izbornoj jedinici ostvaruje se većinskim brojem glasova. Nadalje, vrijedi $D = D^A \cup D^B$, gdje je D^P podskup izbornih jedinica osvojenih od strane političke stranke $P \in \{A, B\}$. Neka je $S_i^P = 1$ ako je politička stranka P pobjedila u izbornoj jedinici d_i , te $S_i^P = 0$ u suprotnom. Slijedi $S^P = |D^P|$ je broj izbornih jedinica osvojenih u državi od stranke P . Neka je T_i^P broj glasača za stranku P u izbornoj jedinici d_i . T_i nam predstavlja broj glasača u izbornoj jedinici d_i , a T^P nam predstavlja ukupni broj glasača za političku stranku P . Također, označimo sa $\Phi^P = \frac{T^P}{T}$ ukupan postotak glasova za stranku P , te sa $\Psi^P = \frac{|D^P|}{n}$ ukupan postotak osvojenih izbornih jedinica stranke P .

Primjer 3: Imamo državu sa 50 glasača, od čega je 30 glasača za stranku A (crveno), a 20 glasača za stranku B (plavo). Pretpostavimo da se država dijeli u 5 izbornih jedinica. Na Slici 3.3 su navedena tri primjera plana krojenja izbornih jedinica:

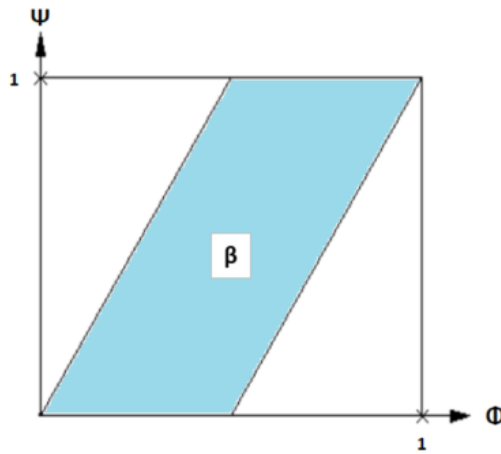
U planu 1 imamo slučaj gdje stranka A odnosi pobjedu u 60% izbornih jedinica, u planu 2 stranka A odnosi pobjedu u 100% izbornih jedinica, dok planu 3 stranka A odnosi pobjedu u svega 40% izbornih jedinica. Uvedimo sada neke dodatne pretpostavke koje će nam pomoći pri sagledanju simetričnosti navedenih planova.



Slika 3.3: Planovi prekrajanja

Radi jednostavnosti, pretpostavljamo da nema izjednačenih izbornih jedinica, tj. $T_i^A \neq T_i^B$, te da se u svakoj izbornoj jedinici nalazi jednak broj glasača, tj. $T_i = \frac{T}{n}, \forall d_i$. Ove pretpostavke nam omogućuju sljedeći rezultat.

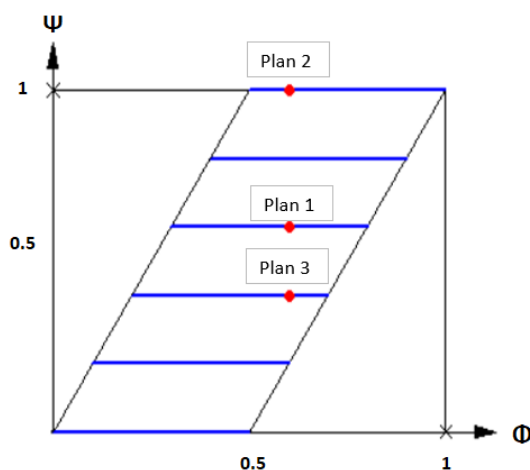
Lema 3.2.1. (Φ^P, Ψ^P) se nalazi unutar paralelograma β na Slici 3.4.



Slika 3.4: $(\Phi^P, \Psi^P) \in \beta$

Dokaz. Kako bi stranka A osvojila k izbornih jedinica, tj. $\Psi^A = \frac{k}{n}$, potrebno je da u k izbornih jedinica ima više od 50% glasova, tj. $\Phi^A > \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n}$. Slijedi, $\Phi^A > \frac{1}{2} \cdot \Psi^A$ što je lijevi rub paralelograma β . Uvodeći analogne restrikcije za stranku B dobivamo desni rub paralelograma β . \square

Pogledajmo ponovno Primjer 3.2. Možemo uočiti da se ishodi izbora (Ψ^P, Φ^P) moraju nalaziti na jednoj od 6 horizontalnih plavih linija prikazanih na Slici 3.5, dok su stvarni rezultati iz primjera (za stranku A) prikazani crvenim točkama:



Slika 3.5: (Φ^A, Ψ^A)

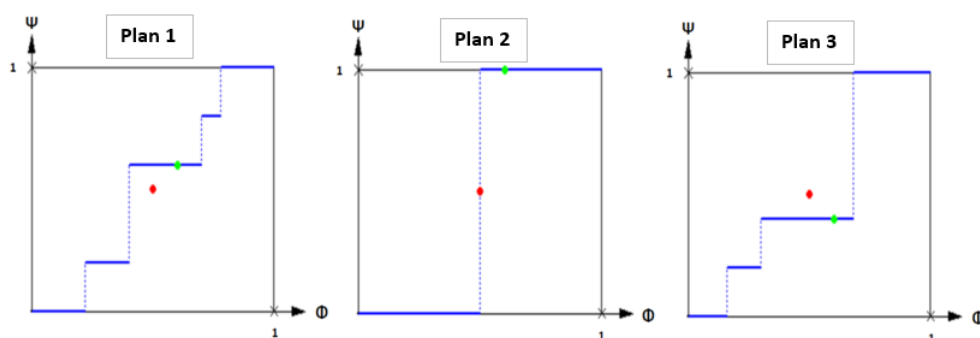
Rezultate izbora u državi određuje uređeni par $(\Phi^A, \Psi^A) \in \beta$, međutim ishode glasovanja po izbornim jedinicama možemo zapisati kao $D = \{(T_1^A, T_1^B), \dots, (T_n^A, T_n^B)\}$. Iz ovakvog zapisa možemo odrediti vrijednost (Φ^A, Ψ^A) koja bi nastala kao rezultat uniformnog pomaka u distribuciji glasova za ili protiv stranke A. Pretpostavimo da je za neki $t \in \mathbb{Z}$ došlo do pomaka u distribuciji glasova u svakoj izbornoj jedinici u korist stranke A. Definiramo $(\Phi_t^A, \Psi_t^A) \in \beta$ novi ishod izbora, tj. $D_t = \{(T_1^A + t, T_1^B - t), \dots, (T_n^A + t, T_n^B - t)\}$, gdje $T_i^P - t \leq 0$ interpretiramo kao $T_i^P = 0$, dok $T_i^P \geq T_i$ interpretiramo kao $T_i^P = T_i$. Postoje sofisticiranije metode za formiranje uniformnog pomaka u distribuciji glasova, međutim ovakav običan aditivni model je dovoljan za demonstraciju ideje simetričnosti.

Skup $\{(\Phi_t^A, \Psi_t^A) | t \in \mathbb{Z}\}$ ilustriramo tzv. mandat-glas krivuljom. Za svaku moguću vrijednost $\Phi^A \in [0, 1]$, krivulja prikazuje proporciju osvojenih izbornih jedinica koju bi stranka A osvojila kada bi došlo do uniformnog pomaka u distribuciji glasova.

Slika 3.6 prikazuje mandat-glas krivulju za planove prekrajanja iz Primjera 3.2. Za potrebe ilustracije mandat-glas krivulje, promatramo proporcije glasova iz Primjera 3.2 u tisućama umjesto u jedinicama. "Fer" planovi su oni gdje je mandat-glas krivulja simetrična oko točke $(0.5, 0.5)$ koja nam govori da bi stranka sa 50% glasova trebala osvojiti 50% izbornih jedinica.

Za Plan 1 iz Primjera 3.2 vrijedi $D = \{(9, 1), (4, 6), (7, 3), (7, 3), (3, 7)\}$. Napravimo li uniformnu distribuciju za $t = 1$ dobivamo $D_1 = \{(10, 0), (5, 5), (8, 2), (8, 2), (4, 6)\}$ iz čega

možemo vidjeti da ovakvim pomakom stranka A osvaja dodatnu izbornu jedinicu koja povećava Φ^A za 20%. Sa početnih ($\Psi^A = 60\%$, $\Phi^A = 60\%$) sada imamo ($\Psi_1^A = 70\%$, $\Phi_1^A = 80\%$). Uzmemo li $t = 2$ dobivamo $D_2 = \{(10, 0), (6, 4), (9, 1), (9, 1), (5, 5)\}$, te ($\Psi_2^A = 78\%$, $\Phi_2^A = 100\%$). Ovaj postupak ponavljamo za sve $t \in \mathbb{Z}$ dok ne dobijemo vrijednosti (Ψ^A, Φ^A), $\forall \Psi^A \in [0, 1]$. Analogan postupak ponavljamo za Plan 2 i Plan 3 iz Primjera 3.2 te dobivamo sljedeće krivulje:



Slika 3.6: Mandat-glas krivulja

Na Slici 3.6 crvena točka predstavlja centar simetrije $(0.5, 0.5)$, dok zelena točka predstavlja ishod planova (Ψ^A, Φ^A) iz Primjera 3.2. Prema mandat-glas krivulji, plan krojenja izbornih jedinica je pravedan ukoliko je krivulja simetrična oko $(0.5, 0.5)$ jer nam to govori da ukoliko stranke zamijene pozicije (u smislu broja glasova), ostvarile bi jednak rezultat (u smislu osvojenih izbornih jedinica) kao i njihova opozicija. Također, možemo uočiti da Plan 1 ide u korist stranke A (crvena stranka), Plan 2 je nepristran, dok Plan 3 ide u korist stranke B (plava stranka).

Kao što smo već naveli, glavne metode za prekrajanje izbornih jedinica su grupiranje i razbijanje. Provedenje tih metoda uzorkuje tzv. bačene glasove. Cilj svake stranke je osigurati da protivnička stranka ima što više bačenih glasova.

Bačeni glasovi, u kontekstu jaza učinkovitosti kao mjere, su glasovi koji su ili na strani gubitničke stranke ili oni glasovi koji prelaze granicu od 50% potrebnih za pobjedu unutar izborne jedinice. Broj bačenih glasova stranke A u izbornoj jedinici d_i označavamo sa:

$$W_i^A = \begin{cases} T_i^A - \frac{T_i}{2}, & \text{ako } d_i \in D^A \text{ (višak glasova),} \\ T_i^A, & \text{ako } d_i \in D^B \text{ (gubitnički glasovi)} \end{cases} = T_i^A - S_i^A \cdot \frac{T_i}{2}. \quad (3.4)$$

Možemo uočiti da je ukupan broj bačenih glasova u jednoj izbornoj jedinici d_i jednak $W_i = W_i^A + W_i^B$, te da on uvijek iznosi $\frac{T_i}{2}$.

Postavlja se pitanja kako su bačeni glasovi distribuirani. Ako većina bačenih glasova pripada pobjedničkoj stranci, izborna jedinica je grupirana, ako većina bačenih glasova pripada gubitničkoj stranci, izborna jedinica je kompetitivna. Ako je nekoliko susjednih izbornih jedinica gdje je većina bačenih glasova na strani gubitničke stranke, onda je to plan razbijanja.

Sada možemo uvesti pojam **jaz učinkovitosti** EG (efficiency gap) vezan za plan prekrajanja D :

$$EG = \sum_{i=1}^n \frac{W_i^A - W_i^B}{T} = \frac{W^A - W^B}{T}. \quad (3.5)$$

Dakle, jaz učinkovitosti je mjera koja govori o udjelu bačenih glasova stranke A u odnosu na stranku B . Pozitivan i velik EG daje naslutiti da podjela izbornih jedinica nije pravedna prema stranci A . S druge strane, $EG \approx 0$ nam govori da je podjela izbornih jedinica pravilna u smislu da obje stranke imaju podjednak broj bačenih glasova. Također, vrijedi $-0.5 \leq EG \leq 0.5$.

Pogledamo li planove krojenja izbornih jedinica iz Primjera 3.2, dobivamo sljedeće rezultate: Plan 1 $\rightarrow EG = 0.1$, Plan 2 $\rightarrow EG = -0.3$, te za Plan 3 $\rightarrow EG = 0.3$. Neki autori smatraju da $|EG| > 0.08$ odgovara jakoj granici za neprihvatanje plana podjele izbornih jedinica upućujući na sumnju da je pristrano krojenje, iz čega možemo zaključiti da su prema jazu učinkovitosti sva tri plana iz Primjera 3.2 pristrano skrojena s obzirom da im je $|EG| > 0.08$.

Nakon što smo uveli ovu notaciju, dodatno možemo uvesti dva nova pojma:

$$\tau = \frac{T^A - T^B}{T}, \quad (3.6)$$

$$\sigma = \frac{S^A - S^B}{n}, \quad (3.7)$$

gdje nam τ predstavlja udio glasova naklonjenih stranci A , dok σ predstavlja udio osvojenih izbornih jedinica naklonjenih stranci A .

Intuitivno bismo mogli zaključiti da bi pravedna podjela izbornih jedinica doprinosila tome da vrijedi $\tau \approx \sigma$.

Pogledajmo što nam EG govori. Pretpostavimo da u svakoj izbornoj jedinici d_i imamo jednak broj glasača $T_i = T/n, \forall d_i$. U tom slučaju, dobivamo

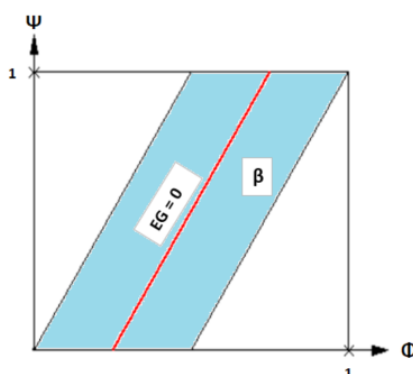
$$W^A = \sum_{i=1}^n W_i^A = T^A - S^A \cdot \frac{T}{2n}, \quad (3.8)$$

iz čega slijedi

$$EG = \frac{T^A - T^B}{T} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S^A - S^B}{n} = \tau - \frac{1}{2} \cdot \sigma. \quad (3.9)$$

Dakle, EG je udio glasova naklonjenih stranci A umanjeno za polovinu udjela osvojenih izbornih jedinica naklonjenih stranci A .

Ilustrirajmo slučaj $EG = 0$ na našem paralelogramu β . Dakle, ako želimo izbornu jedinicu koja ima podjednak broj bačenih glasova obiju stranaka, (Φ^P, Ψ^P) se mora nalaziti na pravcu $EG = 0$:



Slika 3.7: $EG = 0$

U svojoj pojednostavljenoj formi $EG = \tau - \frac{1}{2} \cdot \sigma$ možemo vidjeti koji su nedostaci ove mjere:

Kažnjava proporcionalnost: pretpostavimo da vrijedi $\Phi^A = 60\%$, te $\Psi^A = 60\%$. Iz navedenog slijedi da je $EG = 0.2 - 0.1 = 0.1 > 0.08$, što upućuje na to da plan krojenja izbornih jedinica pogoduje stranci B . To je zbog toga što $EG = 0 \Leftrightarrow \tau = 2\sigma$. Ovdje dolazi do konflikta sa intuitivnom idejom proporcionalnosti osvojenih izbornih jedinica s brojem glasača, gdje prema EG slijedi da udio osvojenih izbornih jedinica naklonjenih stranci A mora biti dvostruko veći od udjela osvojenih glasova naklonjenih stranci A .

Tri naspram jedan: iz ideje $EG = 0$ slijedi da je izborna jedinica pravedno krojena ako je omjer bačenih glasova jedne stranke jednak tom omjeru druge strane, što zapravo znači da je pravedna izborna jedinica ona gdje je 75% glasača za pobjedničku stranku te 25% glasača za gubitničku stranku. Dakle, jedine izborne jedinice koje prema EG smatramo savršeno pravednim su ovakve nekompetitivne izborne jedinice.

Granična vrijednost: unatoč činjenici da je EG u ravnoteži kada vodeća stranka ima 75% glasova, ukoliko vodeća stranka ima broj glasova veći od 79%, EG mjera ne vrijedi. Ako primjerice stranka A ima 79% glasova, slijedi $\tau = 0.79 - 0.21 = 0.58$. Kako bi vrijedilo $EG = \tau - \frac{1}{2} \cdot \sigma < 0.08$, slijedi $\sigma > 1$ što je nemoguće.

Za razliku od uvedenih mjera kompaktnosti i konveksnosti, EG ovisi o rezultatima izbora. Pretpostavimo li situaciju u kojoj su sve izborne jedinice kompetitivne, problem

može nastati ako jedna stranka pobijedi u većini izbornih jedinica. Naime, prema EG u tom slučaju slijedi da plan krojenja izbornih jedinica služi u korist pobjedničke stranke.

Da li $EG \cong 0$ sprječava osobe koje prave plan krojenja izbornih jedinica da iskoriste grupiranje i razbijanje? Odgovor je potvrđan ukoliko definiramo grupiranu izbornu jedinicu kao izbornu jedinicu u kojoj je stranka ostvarila pobjedu sa više od 75% glasova, te razbijenu izbornu jedinicu kao izbornu jedinicu u kojoj je gubitnička stranka osvojila 25 – 50% glasova. Ove granice su određene iz $EG = 0 \Leftrightarrow (75\%, 25\%) = (\Phi^A, \Phi^B)$, jer je prilikom takvog omjera jednak broj bačenih glasova obiju stranaka.

Izborna jedinica u kojoj je pobjednička stranka ostvarila pobjedu sa više od 75% glasova može se smatrati manipuliranom metodom grupiranja od strane protivničke stranke, dok izborna jedinica u kojoj je pobjeda ostvarena sa manje od 75% glasova se smatra manipuliranom od same pobjedničke stranke, u smislu da je protivnička stranka razbijena. Ova se rasprava može mjeriti u smislu kompetitivnosti. Definirajmo

$$C_i = \frac{|T_i^A - T_i^B|}{T_i}, \quad (3.10)$$

$$C^P = \text{AVG}\{C_i | d_i \in D^P\}, \quad (3.11)$$

$$C = \text{AVG}\{C_i | 1 \leq d_i \leq n\}. \quad (3.12)$$

$C_i \in [0, 1]$ označava kompetitivnost izborne jedinice d_i , definiranu kao proporciju glasova kojom je ostvarena pobjeda u toj izbornoj jedinici, C^P označava prosječnu kompetitivnost izbornih jedinica u kojima je pobjedila stranka P , a C označava prosječnu kompetitivnost svih izbornih jedinica u državi. Primjetimo da $C_i = 0.5$ ne pridonosi promjeni EG . Jaz učinkovitosti kažnjava pobjedničku stranku kompetitivnog okruga ($0 < C_i < 0.5$) za razbijanje gubitničke stranke, te kažnjava gubitničku stranku nekompetitivnog okruga ($0.5 < C_i < 1$) za grupiranje pobjedničke stranke. Rezultati izbora svake izborne jedinice aditivno doprinose EG za iznos $\pm(C_i - \frac{1}{2})/n$ što se lako vidi iz 3.4 i 3.5. Pokažimo sada još jedno svojstvo jaza učinkovitosti koje proizlazi iz opaženog.

Lema 3.2.2. *Vrijedi sljedeća jednakost:*

$$EG = \Psi^A \cdot (C^A - \frac{1}{2}) - \Psi^B \cdot (C^B - \frac{1}{2}). \quad (3.13)$$

Dokaz. Jaz učinkovitosti je prosječni bačeni udio po izbornoj jedinici:

$$EG = \frac{W^A - W^B}{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{W_i^A - W_i^B}{T_i}. \quad (3.14)$$

Bačeni udio u jednoj izbornoj jedinici linearno je povezan sa svojom kompetitivnosti:

$$\frac{W_i^A - W_i^B}{T_i} = \begin{cases} C_i - \frac{1}{2}, & \text{ako } d_i \in D^A, \\ -C_i + \frac{1}{2}, & \text{ako } d_i \in D^B. \end{cases} \quad (3.15)$$

Slijedi

$$EG = \frac{1}{n} \left[\sum_{i \in D^A} (C_i - \frac{1}{2}) - \sum_{i \in D^B} (C_i - \frac{1}{2}) \right] = \quad (3.16)$$

$$= \Psi^A \cdot \text{AVG}\{C_i - \frac{1}{2} | i \in D^A\} - \Psi^B \cdot \text{AVG}\{C_i - \frac{1}{2} | i \in D^B\}, \quad (3.17)$$

iz čega slijedi tvrdnja. \square

Neki autori kritiziraju ovako definiran EG zbog načina na koji broji bačene glasove. Bačeni glas bi trebao biti svaki glas koji je višak u potrebi ostvarivanja pobjede u izborima. Primjerice, ukoliko stranka A osvoji izbornu jedinicu sa 60% glasova, prema dosadašnjoj EG formulaciji, 10% glasova te stranke je viška. Međutim, ne bi li trebalo biti 20% viška glasova iz razloga što je za pobjedu potrebno samo 1 glas više od protivničke stranke koja ima 40% glasova? Ako uzmemo u obzir ovakvu formulaciju, gdje za višak glasova uzimamo sve glasove iznad glasova gubitničke stranke, moramo urediti EG formulu:

$$W_i^P(\lambda) = \begin{cases} T_i^P, & \text{ako } d_i \notin D^P \text{ (gubitnički glasovi),} \\ \lambda \cdot (T_i^P - \frac{T_i}{2}), & \text{ako } d_i \in D^P \text{ (višak glasova),} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$EG_\lambda = \frac{W^A(\lambda) - W^B(\lambda)}{T}, \lambda \in \{1, 2\}. \quad (3.19)$$

U 3.5 vrijedi slučaj $\lambda = 1$.

Lema 3.2.3. $EG_\lambda = (1 + \lambda) \cdot (\Phi^A - 0.5) - (\Psi^A - 0.5)$.

Dokaz. Iz definicije EG_λ slijedi

$$W_i^P(\lambda) = T_i^P - S_i^P \left[\lambda \cdot \frac{T}{2n} + (1 - \lambda) \cdot T_i^P \right], \quad (3.20)$$

iz čega slijedi da ukupan broj bačenih glasova stranke P iznosi

$$W_\lambda^P = \sum_{i=1}^n W_i^P(\lambda) = T^P - \lambda \cdot S^P \cdot \frac{T}{2n} + (\lambda - 1) \sum_{i \in D^P} T_i^P. \quad (3.21)$$

Dobivamo

$$EG_\lambda = 2(\Phi^A - 0.5) - \lambda(\Psi^A - 0.5) - (\lambda - 1)[H(B, B) - H(A, A)], \quad (3.22)$$

gdje je $H(X, Y) = \frac{1}{T} \sum_{i \in D^Y} T_i^X$ udio glasača sa sljedećim svojstvima: glasali su za stranku X , a žive u izbornoj jedinici osvojenoj od strane stranke Y .

Koristeći relacije

$$H(A, A) + H(B, A) = \Psi^A, \quad (3.23)$$

$$H(B, A) + H(B, B) = \Phi^B, \quad (3.24)$$

dobivamo

$$H(B, B) - H(A, A) = 1 - \Psi^A - \Phi^A, \quad (3.25)$$

iz čega slijedi tvrdnja. \square

Iz navedenog slijedi da je $EG_1 = \tau - \frac{1}{2} \cdot \sigma$ definiran jednažbom 3.9 jednak $EG_1 = 2(\Phi^A - 0.5) - (\Psi^A - 0.5)$, što se može vidjeti iz:

$$EG = \tau - \frac{1}{2} \cdot \sigma \quad (3.26)$$

$$= \frac{T^A - T^B}{T} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S^A - S^B}{n} \quad (3.27)$$

$$= 2\Phi^A - 1 - \frac{1}{2}(2\Psi^A - 1) \quad (3.28)$$

$$= 2(\Phi^A - 0.5) - (\Psi^A - 0.5). \quad (3.29)$$

Za $\lambda = 2$ vrijedi

$$EG_2 = 3(\Phi^A - 0.5) - (\Psi^A - 0.5), \quad (3.30)$$

što ustvari predstavlja trostruki bonus pobjednika. Radi ilustracije ovog primjera pretpostavimo da imamo stranku A koja ima 60% glasova, tj. $\Phi^A = 60\%$. Da bi vrijedilo $EG_2 = 0$, slijedi da mora biti $\Psi_2^A = 0.8$, za razliku od $EG_1 = 0$ gdje mora vrijediti $\Psi_1^A = 0.7$. Razlog naziva dvostruki/trostruki bonus pobjednika je taj što za ovako definirane EG_λ postizanje ravnoteže se događa ako i samo ako je postotak osvojenih izbornih jedinica iznad razine od 50% dvostruko/trostruko veći od postotka glasača iznad 50%. Kao što smo već pokazali bezvrijednost EG_1 mjere za $\Psi^P \geq 0.79$, lako se vidi da je mjera EG_2 bezvrijedna već za $\Psi^P \geq 0.67$.

Izborna jedinica sa kompetitivnošću $C_i = \frac{1}{1+\lambda}$ ne doprinosi EG-u. Iako ova granična vrijednost ovisi o λ , logika ostaje nepromijenjena: EG_λ kažnjava pobjedničku stranku kompetitivne izborne jedinice ($0 < C_i < \frac{1}{1+\lambda}$) za razbijanje gubitničke stranke, te kažnjava gubitničku stranku nekompetitivne izborne jedinice ($\frac{1}{1+\lambda} < C_i < 1$) za grupiranje pobjedničke stranke.

Bibliografija

- [1] M. Bernstein i M. Duchin, *A Formula Goes to Court: Partisan Gerrymandering and the Efficiency Gap*, Notices of the American Mathematical Society **64** (2017).
- [2] S. Bespamyatnikh, D. Kirkpatrick i J. Snoeyink, *Generalizing Ham Sandwich Cuts to Equitable Subdivisions*, Discrete & Computational Geometry **24** (2000), 605–622.
- [3] M. Duchin, *Gerrymandering metrics: How to measure? What's the baseline?*, (2018).
- [4] N. Giansiracusa i C. Ricciardi, *Geometry in the courtroom*, The American Mathematical Monthly **125** (2017).
- [5] B. Guljaš, *Osnove matematičke analize*, 2019.
- [6] J. K. Hodge, E. Marshall i G. Patterson, *Gerrymandering and Convexity*, The College Mathematics Journal **41** (2010), br. 4, 312–324.
- [7] A. Kaufman, G. King i M. Komisarchik, *How to Measure Legislative District Compactness If You Only Know it When You See it*, American Journal of Political Science **65** (2017), br. 3.
- [8] N. Sandrić i Z. Vondraček, *Vjerojatnost*, 2019.
- [9] P. Soberón, *Gerrymandering, Sandwiches, and Topology*, Notices of the American Mathematical Society **64** (2017), br. 9, 1010–1013.
- [10] C. Sprock, *A Boundary-Based Measure for Gerrymandering*, (2017), https://scholarworks.sjsu.edu/etd_theses/4861.
- [11] K. Tapp, *Measuring Political Gerrymandering*, The American Mathematical Monthly (2018).
- [12] S. Štimac, *Metrički prostori*, (2022).

- [13] M. Žugaj i S. Šterc, *Hrvatske izborne jedinice — postojeći nesklad i buduće promjene*, **11** (2017), br. 22, <https://hrcak.srce.hr/187784>.

Sažetak

U radu je prikaza tematika izborne geometrije, te određene metode krojenja granica izbornih jedinica u svrhu manipuliranja izbornih rezultata. Na jednostavnim primjerima vidjeli smo kako granice izbornih jedinica mogu uvelike promijeniti rezultate izbora iako je broj glasača ostao nepromijenjen.

Razradu mjera započeli smo određenim intuitivnim i smislenim pretpostavkama o izbornim jedinicama. Pridržavajući se tih pretpostavki prilikom krojenja granica izbornih jedinica, uvedenim mjerama pokušali smo utvrditi do koje razine je došlo do pristranog krojenja granica. Uveli smo mjere kompaktnosti i konveksnosti područja koje opisuju oblik područja izbornih jedinica, te smo ih dodatno modificirali kako ne bismo kažnjavali "čudne" granice izbornih jedinica ukoliko su one prouzrokovane granicama države ili obalom. Osim samog oblika područja, raspodjela glasačke populacije unutar same izborne jedinice također igra veliku ulogu u rezultatima izbora, stoga se određene nepravilnosti granica mogu zanemariti ukoliko one obuhvaćaju rjeđe naseljena područja, a dodatno kazniti ukoliko obuhvaćaju gušće naseljena područja.

Iako postoji mnoštvo mjera vezanih uz ovu tematiku, niti jedna od njih nije apsolutno objektivna mjera koja nam govori jesu li određene granice pristrano skrojene ili ne. Svaka mjera sama za sebe nije dobar kriterij s obzirom da dvije izborne jedinice mogu dobiti različito rangirane rezultate ovisno o mjeri koju koristimo, stoga da bismo dobili jasniju sliku u obzir moramo uzeti više mjera. Danas je izborna geometrija još uvijek aktualna politička tema, a razni matematički timovi pokušavaju doći do novih mjera i algoritama koji bi pomogli pri rješavanju ove problematike.

Summary

In this paper, we present the topic of electoral geometry and certain methods of drawing boundaries of the electoral districts in order to manipulate electoral results. Through simple examples, we have seen how district boundaries can change election results even though the number of voters has remained unchanged.

We started the elaboration of measures with certain intuitive and meaningful assumptions about electoral districts. Adhering to these assumptions when shaping the boundaries of the electoral districts, with the introduced measures we tried to determine the level to which the bias occurred in drawing the boundaries. We have introduced measures of compactness and convexity of the areas which describe the shape of the electoral districts, and we modified them so as not to penalize “weird” district borders if they are caused by state borders or by coastline. Apart from the shape of the area itself, the distribution of the voting population within the district itself also plays a big role in election results, hence certain irregularities in borders can be neglected if they include sparsely populated areas, and additionally punished if they include more densely populated areas.

Although there are many measures related to this topic, none of them is an absolute objective measure that tells us whether certain boundaries are biased drawn or not. None of the measures alone is a good criterion given that two districts can have differently ranked results depending on the measure we use, so to get clearer picture we need to take several measures into account. Electoral geometry is still relevant political topic and various mathematical teams are trying to come up with new measures and algorithms which would help solve this problem.

Životopis

Rođen sam 11.08.1997. godine u Münchenu, a odrastao u Stupniku. Osnovnoškolsko obrazovanje završio sam 2012. godine u Osnovnoj školi Lučko. Srednjoškolsko obrazovanje nastavio sam u X. gimnaziji Ivan Supek u Zagrebu gdje sam pohađao prirodoslovno-matematički smjer. Obrazovanje sam nastavio upisom, 2016. godine, na preddiplomski studij Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu na Matematičkom odsjeku - nastavnički smjer. Titulu sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike (univ. bacc. educ. math.) stekao sam 2019. godine. Po završetku preddiplomskog studija upisao sam diplomski studij Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu - smjer: Financijska i poslovna matematika. Tijekom diplomskog studija, 09/2020-09/2021, radio sam kao student u Nets CEE na autorizacijskim sustavima, a od 09/2021- sam zaposlen kao student u Privrednoj Banci Zagreb u odjelu za razvijanje internih kreditnih modela. Od 11/2021 član sam Hrvatske Mense.