

# Analiza strategija i pripadnih vjerojatnosti u igri "Rizik"

---

Lančić, Alen

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:887318>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Alen Lančić

**ANALIZA STRATEGIJA I PRIPADNIH  
VJEROJATNOSTI U IGRI "RIZIK"**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. MILJENKO  
HUZAK

Zagreb, ožujak, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Roditeljima, bez čije podrške ovaj rad ne bi bio moguć*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Analiza igre</b>	<b>3</b>
1.1 Osnovna pravila . . . . .	3
1.2 Analiza borbe . . . . .	5
1.3 Planiranje napada . . . . .	21
<b>Bibliografija</b>	<b>33</b>

# Uvod

U ovom radu bavit ćemo se proučavanjem optimalne strategije i pripadnih vjerojatnosti u pojednostavljenoj verziji strateške stohastičke igre za više igrača "Rizik" koja se može modelirati kao Markovljev lanac s diskretnim vremenom i konačnim skupom stanja. Za proučavanje, pravila igre su pojednostavljena tako da je promatramo kao igru sa savršenom informacijom na poteze za dvoje igrača.



# Poglavlje 1

## Analiza igre

### 1.1 Osnovna pravila

#### Mapa svijeta

Igra Rizik [2] se vodi na mapi svijeta podjeljenoj na 42 područja grupiranih u 6 kontinenata kao što je prikazano na slici 1.1. Na slici 1.2 se nalazi graf koji mapu svijeta igre prikazuje tako da su susjedna područja na mapi prikazana susjednim vrhovima u grafu.

Na svakom teritoriju se nalazi barem jedna vojska točno jednog igrača u svakom trenutku. Broj vojski na nekom teritoriju je prirodan broj. Vojske protivničkih igrača koje se nalaze na susjednim teritorijima mogu ući u borbu.

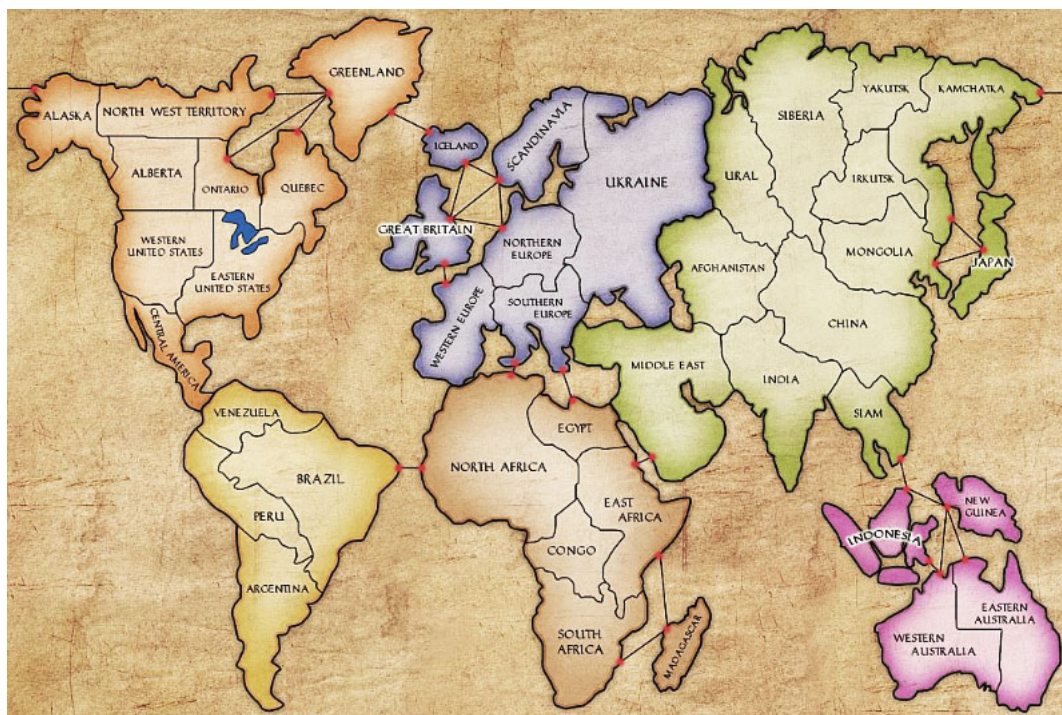
#### Borba

Igrač koji je na potezu može svojim vojskama iz nekog područja na kojem ima barem dvije vojske napasti vojsku protivničkog igrača koja se nalazi na susjednom području. Pri tome baca do  $\min\{n - 1, 3\}$  šesterostranih kockica (sam bira koliko), gdje je  $n$  broj vojski na području s kojeg napada, i dobivene brojeve poreda redom od najvećeg do najmanjeg.

Nakon što je vidio brojeve koje je napadač dobio (po pravilima starije Britanske verzije [1]), branitelj baca do  $\min\{m, 2\}$  šesterostranih kockica (sam bira koliko), gdje je  $m$  broj vojski na području koje napadač napada, i dobivene brojeve poreda redom od najvećeg do najmanjeg.

Dobiveni brojevi napadača i branitelja se sparuju tako da se usporede najveći dobiveni brojevi napadača i branitelja te, ako oba postoje, drugi najveći dobiveni brojevi napadača i branitelja. U svakom takvom sparivanju, ako je napadačev rezultat veći od braniteljevog, branitelj gubi jednu vojsku, u suprotnom napadač gubi jednu vojsku.

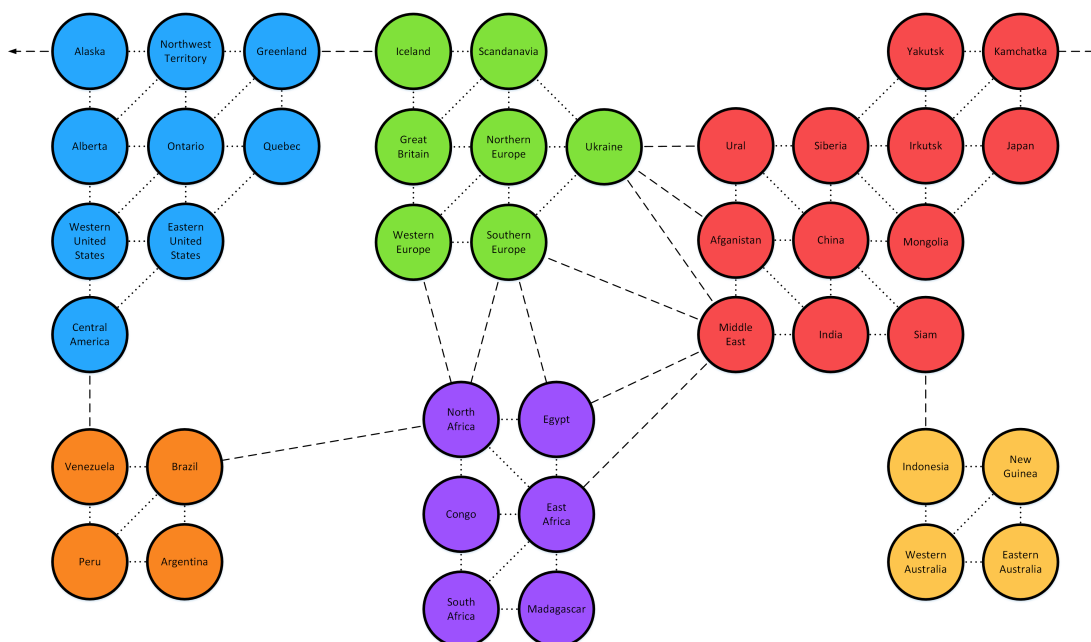




Slika 1.1: Mapa svijeta igre

Na taj način su mogući ishodi napada, u slučaju da su oba igrača bacila barem dvije kocke, da napadač izgubi dvije vojske, da i branitelj i napadač izgube po jednu vojsku svaki ili da branitelj izgubi dvije vojske, odnosno, u slučaju da je barem jedan igrač bacio samo jednu kocku, da napadač izgubi jednu vojsku ili da branitelj izgubi jednu vojsku. Gore opisani postupak napadač može ponoviti koliko god puta želi (dokle god ispunjava već navedeni uvjet da ima barem dvije vojske na teritoriju iz kojeg napada).

Ako branitelj tim postupkom ostane bez vojski na napadnutom teritoriju, napadač osvaja teritorij i mora premjestiti barem onoliko vojski iz teritorija iz kojeg je napao koliko je kocka bacio tokom zadnjeg napada. Ako bi time ostao bez vojski u području iz kojega je napao, onda u tom području ipak ostaje jedna vojska, a sve ostale se premještaju u novo-osvojeno područje.



Slika 1.2: Mapa svijeta prikazana kao graf

## 1.2 Analiza borbe

### Izračun osnovnih vjerojatnosti

Neka su  $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 \sim U(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$  redom slučajne varijable ishoda bacanja svake od tri kocaka napadača i dvije branitelja. Iz opisa pravila borbe je jasno da moramo izračunati zajedničke funkcije mase vjerojatnosti vektora  $(X_2, X_3)$  uzlazno sortiranih dvaju najvećih brojeva na kockicama napadača i vektora  $(Y_1, Y_2)$  uzlazno sortiranih brojeva na kockicama branitelja, gdje su  $X_{(i)}, Y_{(j)}$  uređajne statistike. U tu svrhu koristimo činjenicu da se zajednička funkcija mase vjerojatnosti svih uređajnih statistika svodi na računanje broja permutacija s ponavljanjem. Počnimo s  $(Y_1, Y_2)$ . Ako je  $y_1, y_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , imamo

$$y_1 < y_2 \Rightarrow \mathbb{P}(Y_{(1)} = y_1, Y_{(2)} = y_2) = \frac{2!}{6^2}, \quad (1.1)$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \mathbb{P}(Y_{(1)} = y_1, Y_{(2)} = y_2) = \frac{1}{6^2}. \quad (1.2)$$

Za  $(X_{(2)}, X_{(3)})$  slično računamo

$$\begin{aligned}
 x_2 < x_3 &\Rightarrow \mathbb{P}(X_{(2)} = x_2, X_{(3)} = x_3) = \\
 \sum_{x_1=1}^{x_2-1} &\mathbb{P}(X_{(1)} = x_1, X_{(2)} = x_2, X_{(3)} = x_3) + \mathbb{P}(X_{(1)} = X_{(2)} = x_2, X_{(3)} = x_3) = \\
 3! \frac{x_2 - 1}{6^3} &+ \frac{3!}{2!} \frac{1}{6^3} = \frac{3(2x_2 - 1)}{6^3},
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 = x_3 &\Rightarrow \mathbb{P}(X_{(2)} = x_2, X_{(3)} = x_3) = \\
 \sum_{x_1=1}^{x_2-1} &\mathbb{P}(X_{(1)} = x_1, X_{(2)} = x_2, X_{(3)} = x_3) + \mathbb{P}(X_{(1)} = x_2, X_{(2)} = x_2, X_{(3)} = x_3) = \\
 \frac{3!}{2!} \frac{x_2 - 1}{6^3} &+ \frac{1}{6^3} = \frac{3x_2 - 2}{6^3}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Na kraju, lako se pokaže da je

$$\mathbb{P}(X_{(3)} \leq x_3) = \frac{x_3^3}{6^3}, \tag{1.5}$$

$$\mathbb{P}(Y_{(2)} \leq y_2) = \frac{y_2^2}{6^2}. \tag{1.6}$$

## Vjerojatnosti ishoda napada

Kada igrač napada, ovisno o broju vojski na teritoriju iz kojeg napada, može napadati jednom do tri vojske (bacati jednu do tri kockice). Vjerojatnosti pripadnih ishoda želimo zapisati matrično i imenovati za daljnje korištenje. Ako stavimo  $[N^{(3,2)}]_{i,j} = \mathbb{P}(X_{(2)} = i, X_{(3)} = j)$  (u toj matrici su zapisane sve vjerojatnosti vezane za napad trima kockicama koje su nam bitne kod obrane dvjema kockicama) i  $[N^{(2,2)}]_{i,j} = \mathbb{P}(Y_{(1)} = i, Y_{(2)} = j)$ , iz 1.1, 1.2, 1.3 i 1.4 dobivamo

$$N^{(3,2)} = \frac{1}{6^3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 15 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

$$N^{(2,2)} = \frac{1}{6^2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Za napad jednom vojskom imamo diskretnu uniformnu distribuciju pa je

$$\left[ N^{(1,2)} \right]_i = \left[ N^{(1,1)} \right]_i = \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{6}. \quad (1.9)$$

Za napad trima kockicama protiv jedne iz 1.5 dobivamo

$$\left[ N^{(3,1)} \right]_i = \mathbb{P}(X_{(3)} = i) = \frac{i^3 - (i-1)^3}{6^3}. \quad (1.10)$$

Za napad dvijema kockicama protiv jedne iz 1.6 dobivamo

$$\left[ N^{(2,1)} \right]_i = \mathbb{P}(Y_{(2)} = i) = \frac{i^2 - (i-1)^2}{6^2}. \quad (1.11)$$

## Vjerojatnosti ishoda obrane

Kada se igrač brani, može se braniti jednom ili dvjema vojskama (baciti jednu ili dvije kockice) nakon što vidi ishod kockica za napad. Za obranu korištenjem dvije kockice imamo matricu  $B^{(2)} = N^{(2,2)}$  u kojoj su zapisane vjerojatnosti svih mogućih ishoda bacanja dvije kockice slično kao za napad, dok za jednu kockicu opet imamo diskretnu uniformnu distribuciju. Vjerojatnosti vezane za konačne ishode gubitaka vojski želimo zapisati matrično i imenovati za daljnje korištenje. Kada promatramo obranu dvjema kockicama protiv napada barem dvjema kockicama, ako stavimo  $\left[ B^{(2)--} \right]_{i,j} = \mathbb{P}(Y_{(1)} < i, Y_{(2)} < j)$ ,  $\left[ B^{(2)++} \right]_{i,j} = \mathbb{P}(Y_{(1)} \geq i, Y_{(2)} \geq j)$  i  $\left[ B^{(2)+-} \right]_{i,j} = \mathbb{P}(Y_{(1)} < i, Y_{(2)} \geq j) + \mathbb{P}(Y_{(1)} \geq i, Y_{(2)} < j)$ , iz 1.8 dobivamo

$$B^{(2)--} = \frac{1}{6^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 15 & 21 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 24 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

$$B^{(2)++} = \frac{1}{6^2} \begin{bmatrix} 36 & 35 & 32 & 27 & 20 & 11 \\ 25 & 25 & 24 & 21 & 16 & 9 \\ 16 & 16 & 16 & 15 & 12 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$B^{(2)+-} = \frac{1}{6^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 11 & 10 & 9 & 10 & 13 & 18 \\ 20 & 19 & 16 & 13 & 12 & 13 \\ 27 & 26 & 23 & 18 & 13 & 10 \\ 32 & 31 & 28 & 23 & 16 & 9 \\ 35 & 34 & 31 & 26 & 19 & 10 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Kada promatramo obranu dvjema kockicama protiv napada jednom kockicom, ako stavimo  $[B^{(2)-}]_i = \mathbb{P}(Y_{(2)} < i)$  i  $[B^{(2)+}]_i = \mathbb{P}(Y_{(2)} \geq i) = 1 - [B^{(2)-}]_i$ , iz 1.6 dobivamo

$$[B^{(2)-}]_i = \frac{(i-1)^2}{6^2}. \quad (1.15)$$

Kada promatramo obranu jednom kockicom protiv napada jednom kockicom, imamo

$$[B^{(1)-}]_i := \mathbb{P}(Y_1 < i) = \frac{i-1}{6} \quad (1.16)$$

te  $[B^{(1)+}]_i := \mathbb{P}(Y_1 \geq i) = 1 - \frac{i-1}{6} = \frac{7-i}{6}$ .

Sada računamo vjerojatnosti ishoda kada napadač koristi tri kockice, a napadač dvije da branitelj izgubi dvije vojske:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{(1)} < X_{(2)}, Y_{(2)} < X_{(3)}) &= \mathbb{P}\left(Y_{(1)} < X_{(2)}, Y_{(2)} < X_{(3)}, \bigcup_{i=1}^6 \bigcup_{j=1}^6 (X_{(2)} = i, X_{(3)} = j)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(Y_{(1)} < X_{(2)}, Y_{(2)} < X_{(3)}, X_{(2)} = i, X_{(3)} = j) = \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(Y_{(1)} < i, Y_{(2)} < j, X_{(2)} = i, X_{(3)} = j) = \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(Y_{(1)} < i, Y_{(2)} < j | X_{(2)} = i, X_{(3)} = j) \mathbb{P}(X_{(2)} = i, X_{(3)} = j) = \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(Y_{(1)} < i, Y_{(2)} < j) \mathbb{P}(X_{(2)} = i, X_{(3)} = j) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 b_{i,j}^{(2)-} n_{i,j}^{(3,2)} = \frac{2890}{6^5}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

analogno da i napadač i branitelj izgube svaki po jednu vojsku

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{(1)} < X_{(2)}, Y_{(2)} \geq X_{(3)}) + \mathbb{P}(Y_{(1)} \geq X_{(2)}, Y_{(2)} < X_{(3)}) = \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 b_{i,j}^{(2)+-} n_{i,j}^{(3,2)} = \frac{2611}{6^5} \end{aligned} \quad (1.18)$$

te da napadač izgubi dvije vojske

$$\mathbb{P}(Y_{(1)} \geq X_{(2)}, Y_{(2)} \geq X_{(3)}) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 b_{i,j}^{(2)++} n_{i,j}^{(3,2)} = \frac{2275}{6^5}. \quad (1.19)$$

Vjerojatnosti ishoda kada napadač koristi tri, a branitelj jednu kockicu, da napadač izgubi jednu vojsku:

$$\mathbb{P}(X_{(3)} \leq Y_1) = \sum_{i=1}^6 b_i^{(1)+} n_i^{(3,1)} = \frac{441}{6^4}, \quad (1.20)$$

odakle dobivamo da je vjerojatnost da branitelj izgubi jednu vojsku  $\mathbb{P}(X_{(3)} > Y_1) = \frac{855}{6^4}$ .

Vjerojatnosti ishoda kada napadač koristi dvije, a branitelj jednu kockicu, da napadač izgubi jednu vojsku:

$$\mathbb{P}(X_{(2)} \leq Y_1) = \sum_{i=1}^6 b_i^{(1)+} n_i^{(2,1)} = \frac{91}{6^3}, \quad (1.21)$$

odakle dobivamo da je vjerojatnost da branitelj izgubi jednu vojsku  $\mathbb{P}(X_{(2)} > Y_1) = \frac{125}{6^3}$ .

Da bismo zapisali vjerojatnosti kada napadač i branitelj svaki koriste po dvije kockice, uvedimo slučajne varijable  $\Psi_1, \Psi_2 \sim U(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$  čije vrijednosti odgovaraju brojevima koje napadač dobije kada baca dvije kockice. Sada dobivamo vjerojatnosti kada i napadač i branitelj koriste dvije kockice da, redom, branitelj izgubi dvije vojske, i napadač i branitelj izgube po jednu vojsku svaki te da napadač izgubi dvije vojske:

$$\mathbb{P}(Y_{(1)} < \Psi_{(1)}, Y_{(2)} < \Psi_{(2)}) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 b_{i,j}^{(2)--} n_{i,j}^{(2,2)} = \frac{1770}{6^5}, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{(1)} \geq \Psi_{(1)}, Y_{(2)} < \Psi_{(2)}) + \mathbb{P}(Y_{(1)} < \Psi_{(1)}, Y_{(2)} \geq \Psi_{(2)}) = \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 b_{i,j}^{(2)+-} n_{i,j}^{(2,2)} = \frac{2520}{6^5}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\mathbb{P}(Y_{(1)} \geq \Psi_{(1)}, Y_{(2)} \geq \Psi_{(2)}) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 b_{i,j}^{(2)++} n_{i,j}^{(2,2)} = \frac{3486}{6^5}. \quad (1.24)$$

Kada napadač koristi jednu kockicu, a branitelj dvije, vjerojatnost da napadač izgubi jednu vojsku:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq Y_{(2)}) = \sum_{i=1}^6 b_i^{(2)+} n_i^{(1,2)} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{6^2 - (i-1)^2}{6^2} = \frac{161}{6^3}, \quad (1.25)$$

odakle dobivamo da je vjerojatnost da branitelj izgubi jednu vojsku  $\mathbb{P}(X_1 > Y_{(2)}) = \frac{55}{6^3}$ .

Kada napadač i branitelj svaki koriste po jednu kockicu, vjerojatnost da napadač izgubi jednu vojsku :

$$\mathbb{P}(X_1 \leq Y_1) = \sum_{i=1}^6 b_i^{(1)+} n_i^{(1,1)} = \sum_{i=1}^6 \frac{7-i}{6} \frac{1}{6} = \frac{21}{6^2}, \quad (1.26)$$

odakle dobivamo da je vjerojatnost da branitelj izgubi jednu vojsku  $\mathbb{P}(X_1 > Y_1) = \frac{15}{6^2}$ .

### Optimalna strategija napada za velike vojske

Sada ćemo pokušati vidjeti postoji li optimalna strategija napada u nekom smislu kada i napadač i branitelj imaju velike vojske na susjednim teritorijima.

Neka je  $N$  slučajna varijabla izbora broja vojski napadača i  $M$  slučajna varijabla izbora broja vojski branitelja, usporedimo ishode i njihove vjerojatnosti kada napadač napada  $N = n$  vojskama i branitelj se brani  $M = m$  vojskama, za  $L_A$  slučajnu varijablu izgubljenih vojski napadača,  $L_D$  izgubljenih vojski branitelja,  $p_{n,m}(l_A, l_D) := \mathbb{P}((L_A, L_D) = (l_A, l_D) | (N, M) = (n, m))$ ,  $\mathbb{E}_{n,m}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | (N, M) = (n, m)]$  dobivamo, primjera radi, iz 1.26

$$p_{1,1}(0, 1) = \mathbb{P}(X_1 < Y_1) = \frac{15}{6^2},$$

$$p_{1,1}(1, 0) = \mathbb{P}(X_1 \geq Y_1) = \frac{21}{6^2}$$

te slično, primjenom 1.17 do 1.25, i za ostale vrijednosti izračunamo

$$\begin{array}{c|ccc} m \backslash n & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \begin{cases} p_{n,m}(1, 0) = 21/6^2 \\ p_{n,m}(0, 1) = 15/6^2 \end{cases} & \begin{cases} p_{n,m}(1, 0) = 91/6^3 \\ p_{n,m}(0, 1) = 125/6^3 \end{cases} & \begin{cases} p_{n,m}(1, 0) = 441/6^4 \\ p_{n,m}(0, 1) = 855/6^4 \end{cases} \\ 2 & \begin{cases} p_{n,m}(1, 0) = 161/6^3 \\ p_{n,m}(0, 1) = 55/6^3 \end{cases} & \begin{cases} p_{n,m}(2, 0) = 3486/6^5 \\ p_{n,m}(1, 1) = 2520/6^5 \\ p_{n,m}(0, 2) = 1770/6^5 \end{cases} & \begin{cases} p_{n,m}(2, 0) = 2275/6^5 \\ p_{n,m}(1, 1) = 2611/6^5 \\ p_{n,m}(2, 0) = 2890/6^5 \end{cases} \end{array} \cdot (1.27)$$

Sada iz dobivenih vrijednosti možemo, na primjer, izračunati

$$\mathbb{E}_{1,1}[(L_A, L_D)] = (1, 0) p_{1,1}(1, 0) + (0, 1) p_{1,1}(0, 1) = \frac{21}{6^2} (1, 0) + \frac{15}{6^2} (0, 1) = \left( \frac{4536}{6^5}, \frac{3240}{6^5} \right)$$

te slično za ostale vrijednosti

$$\begin{array}{c|ccc} m \backslash n & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \mathbb{E}_{n,m}[(L_A, L_D)] = \left( \frac{4536}{6^5}, \frac{3240}{6^5} \right) & \mathbb{E}_{n,m}[(L_A, L_D)] = \left( \frac{3276}{6^5}, \frac{4500}{6^5} \right) & \mathbb{E}_{n,m}[(L_A, L_D)] = \left( \frac{2646}{6^5}, \frac{5130}{6^5} \right) \\ 2 & \mathbb{E}_{n,m}[(L_A, L_D)] = \left( \frac{9492}{6^5}, \frac{6060}{6^5} \right) & \mathbb{E}_{n,m}[(L_A, L_D)] = \left( \frac{9492}{6^5}, \frac{6060}{6^5} \right) & \mathbb{E}_{n,m}[(L_A, L_D)] = \left( \frac{7161}{6^5}, \frac{8391}{6^5} \right) \end{array}, \quad (1.28)$$

odakle je

$$\begin{array}{rcc}
 m \backslash n & 1 & 2 & 3 \\
 1 & \mathbb{E}_{n,m}[L_A] / \mathbb{E}_{n,m}[L_D] = 1.4 & \mathbb{E}_{n,m}[L_A] / \mathbb{E}_{n,m}[L_D] = 0.73 & \mathbb{E}_{n,m}[L_A] / \mathbb{E}_{n,m}[L_D] = 0.52 \\
 2 & \mathbb{E}_{n,m}[L_A] / \mathbb{E}_{n,m}[L_D] = 2.93 & \mathbb{E}_{n,m}[L_A] / \mathbb{E}_{n,m}[L_D] = 1.57 & \mathbb{E}_{n,m}[L_A] / \mathbb{E}_{n,m}[L_D] = 0.85
 \end{array} \quad (1.29)$$

Vidimo da je, u slučaju kada napadač i branitelj oboje imaju velike vojske na susjednim teritorijima, optimalna strategija napadaču napasti trima vojskama bez obzira na odgovor branitelja jer omjer izgubljenih vojski napadača i branitelja tada gotovo sigurno konvergira prema najmanjoj vrijednosti po zakonu velikih brojeva, budući da  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k L_{A,i} \xrightarrow{\text{g.s.}} \mathbb{E}_{3,m}[L_A]$  i

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k L_{D,i} \xrightarrow{\text{g.s.}} \mathbb{E}_{3,m}[L_D] \text{ pa } \frac{\sum_{i=1}^k L_{A,i}}{\sum_{i=1}^k L_{D,i}} \xrightarrow{\text{g.s.}} \frac{\mathbb{E}_{3,m}[L_A]}{\mathbb{E}_{3,m}[L_D]}.$$

## Optimalna strategija obrane za velike vojske

Sada proučavamo odgovor branitelja. Neka je  $s_{x_2, x_3} := \mathbb{P}(M = 2 | N = 3, (X_{(2)}, X_{(3)}) = (x_2, x_3))$  vjerojatnost izbora branitelja da se brani dvijema vojskama, imamo

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[L_D | N = 3, (X_{(2)}, X_{(3)})] = \\
 & \mathbb{E}_{3,2}[L_D | (X_{(2)}, X_{(3)})] s_{X_{(2)}, X_{(3)}} + \mathbb{E}_{3,1}[L_D | (X_{(2)}, X_{(3)})] (1 - s_{X_{(2)}, X_{(3)}}),
 \end{aligned} \quad (1.30)$$

a kako je  $\mathbb{E}_{3,2}[L_D | (X_{(2)}, X_{(3)})] = 2b_{X_{(2)}, X_{(3)}}^{(2)--} + b_{X_{(2)}, X_{(3)}}^{(2)+-}$  i  $\mathbb{E}_{3,1}[L_D | (X_{(2)}, X_{(3)})] = b_{X_{(3)}}^{(1)-}$ , dobivamo

$$\mathbb{E}[L_D | N = 3, (X_{(2)}, X_{(3)})] = (2b_{X_{(2)}, X_{(3)}}^{(2)--} + b_{X_{(2)}, X_{(3)}}^{(2)+-}) s_{X_{(2)}, X_{(3)}} + b_{X_{(3)}}^{(1)-} (1 - s_{X_{(2)}, X_{(3)}}). \quad (1.31)$$

Potpuno analogno slijedi i

$$\mathbb{E}[L_A | N = 3, (X_{(2)}, X_{(3)})] = (2b_{X_{(2)}, X_{(3)}}^{(2)++} + b_{X_{(2)}, X_{(3)}}^{(2)+-}) s_{X_{(2)}, X_{(3)}} + b_{X_{(3)}}^{(1)+} (1 - s_{X_{(2)}, X_{(3)}}). \quad (1.32)$$



Sada računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(L_A, L_D) | N = 3] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(L_A, L_D) | N = 3, M, (X_{(2)}, X_{(3)})]] = \\
&\sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 \mathbb{E}_{3,2}[(L_A, L_D) | (X_{(2)}, X_{(3)}) = (i, j)] s_{i,j} n_{i,j}^{(3,2)} + \\
&\sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 \mathbb{E}_{3,1}[(L_A, L_D) | (X_{(2)}, X_{(3)}) = (i, j)] (1 - s_{i,j}) n_{i,j}^{(3,2)} = \\
&\sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 (2b_{i,j}^{(2)++} + b_{i,j}^{(2)+-}, 2b_{i,j}^{(2)--} + b_{i,j}^{(2)+-}) s_{i,j} n_{i,j}^{(3,2)} + \\
&\sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 (b_j^{(1)+}, b_j^{(1)-}) (1 - s_{i,j}) n_{i,j}^{(3,2)} = \\
&\sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 [(2b_{i,j}^{(2)++} + b_{i,j}^{(2)+-}, 2b_{i,j}^{(2)--} + b_{i,j}^{(2)+-}) s_{i,j} + (b_j^{(1)+}, b_j^{(1)-}) (1 - s_{i,j})] n_{i,j}^{(3,2)} = \\
&\frac{1}{2592} (a_0 + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 a_{i,j} s_{i,j}, d_0 + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 d_{i,j} s_{i,j}),
\end{aligned} \tag{1.33}$$

gdje su  $a_0 = 882, a_{1,1} = 12, a_{1,2} = 41, a_{1,3} = 44, a_{1,4} = 45, a_{1,5} = 44, a_{1,6} = 41, a_{2,2} = 40, a_{2,3} = 99, a_{2,4} = 102, a_{2,5} = 99, a_{2,6} = 90, a_{3,3} = 56, a_{3,4} = 125, a_{3,5} = 120, a_{3,6} = 105, a_{4,4} = 60, a_{4,5} = 119, a_{4,6} = 98, a_{5,5} = 52, a_{5,6} = 81, a_{6,6} = 32, d_0 = 1710, d_{1,1} = 0, d_{1,2} = -5, d_{1,3} = -8, d_{1,4} = -9, d_{1,5} = -8, d_{1,6} = -5, d_{2,2} = 8, d_{2,3} = 9, d_{2,4} = 6, d_{2,5} = 9, d_{2,6} = 18, d_{3,3} = 28, d_{3,4} = 55, d_{3,5} = 60, d_{3,6} = 75, d_{4,4} = 60, d_{4,5} = 133, d_{4,6} = 154, d_{5,5} = 104, d_{5,6} = 243, d_{6,6} = 160$ .

Želimo maksimizirati  $\frac{\mathbb{E}[L_A | N=3]}{\mathbb{E}[L_D | N=3]} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 a_{i,j} s_{i,j}}{d_0 + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 d_{i,j} s_{i,j}} = \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{s} + a_0}{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{s} + d_0}$  uz uvjete  $s_{i,j} \leq 1, -s_{i,j} \leq 0$ .

Koristimo Charnes-Cooperovu transformaciju [3]  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{s} + d_0}, t = \frac{1}{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{s} + d_0}$  da problem prevedemo iz linearno-frakcijskog programiranja na obično linearno programiranje za maksimizaciju funkcije  $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{y} + a_0 t$  uz uvjete  $t - y_{i,j} \geq 0, y_{i,j} \geq 0, \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{y} + d_0 t = 1, t \geq 0$ . Rješavanjem dobivamo

$$\left. \begin{aligned} i < 4 &\Rightarrow t = y_{i,j} = 1943^{-1} \\ i \geq 4 &\Rightarrow y_{i,j} = 0 \\ \mathbf{s} &= \mathbf{y}/t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} i < 4 &\Rightarrow s_{i,j} = 1 \\ i \geq 4 &\Rightarrow s_{i,j} = 0 \end{cases} \tag{1.34}$$

pa je za  $[S]_{i,j} = s_{i,j}$  optimalna strategija obrane

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

te za nju dobivamo  $\frac{\mathbb{E}[L_A|N=3]}{\mathbb{E}[L_D|N=3]} = \frac{1945}{1943} = 1.00103$ . Odavde vidimo da, iako se iz vrijednosti u 1.29 čini da je biti branitelj nepovoljno koristeći bilo koju od čistih strategija obrane bez obzira na ishod bacanja kockica napadača, informacija o ishodu bacanja kockica napadača branitelju omogućuje korištenje miješane strategije uz koju je u neznatno povoljnijem položaju od napadača.

Za slučaj  $N = 2$ , stavimo  $s_{i,j}^{(2)} = \mathbb{P}(M = 2|N = 2, (\Psi_{(1)}, \Psi_{(2)}) = (i, j))$ , slično kao i prije dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(L_A, L_D) | N = 2] = \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 [(2b_{i,j}^{(2)++} + b_{i,j}^{(2)+-}, 2b_{i,j}^{(2)--} + b_{i,j}^{(2)+-})s_{i,j}^{(2)} + (b_j^{(1)+}, b_j^{(1)-})(1 - s_{i,j}^{(2)})]n_{i,j}^{(2)} = \\ \frac{1}{648}(a_0^{(2)} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 a_{i,j}^{(2)}s_{i,j}^{(2)}, d_0^{(2)} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 d_{i,j}^{(2)}s_{i,j}^{(2)}), \end{aligned} \quad (1.36)$$

gdje su  $a_0^{(2)} = 273, a_{1,1}^{(2)} = 18, a_{1,2}^{(2)} = 41, a_{1,3}^{(2)} = 44, a_{1,4}^{(2)} = 45, a_{1,5}^{(2)} = 44, a_{1,6}^{(2)} = 41, a_{2,2}^{(2)} = 15, a_{2,3}^{(2)} = 33, a_{2,4}^{(2)} = 34, a_{2,5}^{(2)} = 33, a_{2,6}^{(2)} = 30, a_{3,3}^{(2)} = 12, a_{3,4}^{(2)} = 25, a_{3,5}^{(2)} = 24, a_{3,6}^{(2)} = 21, a_{4,4}^{(2)} = 9, a_{4,5}^{(2)} = 17, a_{4,6}^{(2)} = 14, a_{5,5}^{(2)} = 6, a_{5,6}^{(2)} = 9, a_{6,6}^{(2)} = 3, d_0^{(2)} = 375, d_{1,1}^{(2)} = 0, d_{1,2}^{(2)} = -5, d_{1,3}^{(2)} = -8, d_{1,4}^{(2)} = -9, d_{1,5}^{(2)} = -8, d_{1,6}^{(2)} = -5, d_{2,2}^{(2)} = 3, d_{2,3}^{(2)} = 3, d_{2,4}^{(2)} = 2, d_{2,5}^{(2)} = 3, d_{2,6}^{(2)} = 6, d_{3,3}^{(2)} = 6, d_{3,4}^{(2)} = 11, d_{3,5}^{(2)} = 12, d_{3,6}^{(2)} = 15, d_{4,4}^{(2)} = 9, d_{4,5}^{(2)} = 19, d_{4,6}^{(2)} = 22, d_{5,5}^{(2)} = 12, d_{5,6}^{(2)} = 27, d_{6,6}^{(2)} =$

15. Želimo maksimizirati  $\frac{\mathbb{E}[L_A|N=2]}{\mathbb{E}[L_D|N=2]} = \frac{a_0^{(2)} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 a_{i,j}^{(2)}s_{i,j}^{(2)}}{d_0^{(2)} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 d_{i,j}^{(2)}s_{i,j}^{(2)}} = \frac{(\mathbf{a}^{(2)})^T \cdot \mathbf{s}^{(2)} + a_0^{(2)}}{(\mathbf{d}^{(2)})^T \cdot \mathbf{s}^{(2)} + d_0^{(2)}}$ , kao i u prethodnom

slučaju transformacijom  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{s}^{(2)}}{(\mathbf{d}^{(2)})^T \cdot \mathbf{s}^{(2)} + d_0^{(2)}}$ ,  $t = \frac{1}{(\mathbf{d}^{(2)})^T \cdot \mathbf{s}^{(2)} + d_0^{(2)}}$  problem prevodimo na linearno programiranje funkcije  $(\mathbf{a}^{(2)})^T \cdot \mathbf{y}^{(2)} + a_0^{(2)}t$  uz uvjete  $t - y_{i,j} \geq 0, y_{i,j} \geq 0, (\mathbf{d}^{(2)})^T \cdot \mathbf{y} + d_0t =$

1,  $t \geq 0$ , rješavanjem dobivamo

$$\left. \begin{array}{l} i \leq 2 \vee (i = 3 \wedge j < 6) \Rightarrow t = y_{i,j} = 386^{-1} \\ i \geq 4 \Rightarrow y_{3,6} = y_{i,j} = 0 \\ \mathbf{s} = \mathbf{y}/t \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (1.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i \leq 2 \vee (i = 3 \wedge j < 6) \Rightarrow s_{i,j} = 1 \\ i \geq 4 \Rightarrow s_{3,6} = s_{i,j} = 0 \end{array} \right.$$

pa je za  $[S^{(2)}]_{i,j} := s_{i,j}^{(2)}$  optimalna strategija obrane

$$S^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

te za nju dobivamo  $\frac{\mathbb{E}[L_A|N=2]}{\mathbb{E}[L_D|N=2]} = \frac{356}{193} = 1.84456$ , što je gore za napadača nego napad trima kockicama.

Na kraju, za  $N = 1$  stavimo  $s_i^{(1)} = \mathbb{P}(M = 2|N = 1, X_1 = i)$ , imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(L_A, L_D)|N = 1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(L_A, L_D)|N = 1, M, X_1]] = \\ &= \sum_{i=1}^6 \mathbb{E}_{1,2}[(L_A, L_D)|X_1 = i] s_i^{(1)} n_i^{(1,2)} + \\ &= \sum_{i=1}^6 \mathbb{E}_{1,1}[(L_A, L_D)|X_1 = i] (1 - s_i^{(1)}) n_i^{(1,1)} = \\ &= \sum_{i=1}^6 (b_i^{(2)+}, b_i^{(2)-}) s_i^{(1)} n_i^{(1,2)} + \sum_{i=1}^6 (b_i^{(1)+}, b_i^{(1)-}) (1 - s_i^{(1)}) n_i^{(1,1)} = \\ &= \frac{1}{216} (a_0^{(1)} + \sum_{i=1}^6 a_i^{(1)} s_i^{(1)}, d_0^{(1)} + \sum_{i=1}^6 d_i^{(1)} s_i^{(1)}), \end{aligned} \quad (1.39)$$

gdje su  $a_0^{(1)} = 126, a_1^{(1)} = 0, a_2^{(1)} = 5, a_3^{(1)} = 8, a_4^{(1)} = 9, a_5^{(1)} = 8, a_6^{(1)} = 5, d_0^{(1)} = 90, d_1^{(1)} = 0, d_2^{(1)} = -5, d_3^{(1)} = -8, d_4^{(1)} = -9, d_5^{(1)} = -8, d_6^{(1)} = -5$ , odakle se odmah vidi da je za  $[S^{(1)}]_i = s_i^{(1)}$  optimalna strategija  $S^{(1)} = (s_1, 1, 1, 1, 1, 1)$  (parametar  $s_1$  je neodređen, što i ima smisla jer ako napadač na kockici dobije jedinicu, izgubit će jednu vojsku neovisno o tome brani li se branitelj jednom ili dvijema kockicama) te za nju dobivamo  $\frac{\mathbb{E}[L_A|N=1]}{\mathbb{E}[L_D|N=1]} = \frac{161}{55} = 2.92727$ , što vidimo da je najgori ishod za napadača.

Zaključujemo da se ekvilibrij postiže napadanjem trima vojskama i obranom kako je opisano u promatranju prvog slučaja. Također iz 1.29 vidimo da, ako je branitelj ograničen na obranu jednom vojskom, je opcija napada trima vojskama najbolja za napadača, zatim napada dvijema vojskama, dok je napad jednom vojskom najgora opcija.

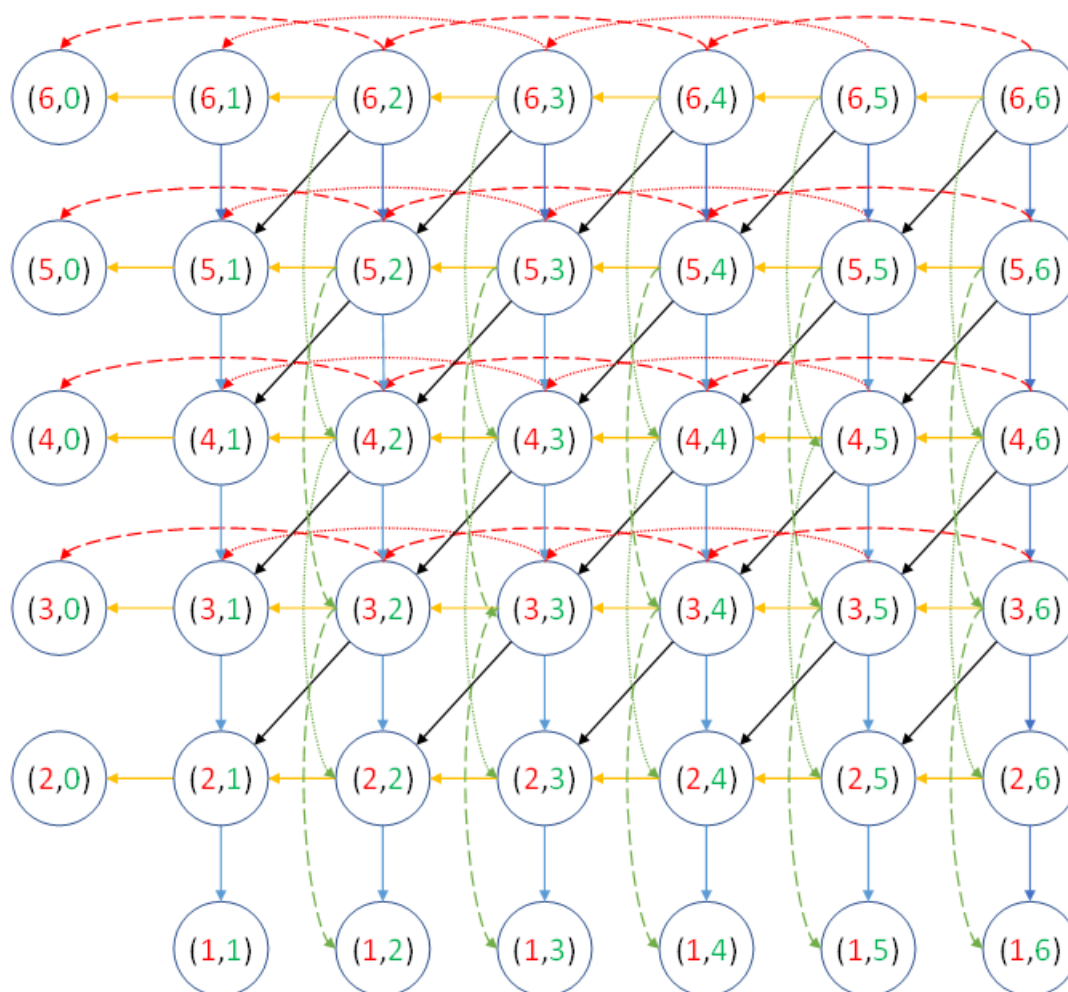
## Optimalne strategije obrane za male vojske

Sada ćemo optimizirati strategije napada i obrane za mali broj vojski napadača i branitelja. Iz prethodnog razmatranja vidimo da je omjer očekivanja izgubljenih vojski napadača i branitelja najpovoljniji za napadača kada za napad u svakoj borbi koristi najveći raspoloživi broj vojski, što je i očekivano, tako da ćemo u ovom razmatranju pretpostaviti da napadač uvijek napada najvećim raspoloživim brojem vojski. Također je, u slučaju da je napadač ograničen napasti jednom vojskom, za branitelja uvijek omjer bio najveći kada se branio najvećim raspoloživim brojem vojski pa ćemo slično pretpostaviti i za branitelja u toj situaciji.

Na slici 1.3 je prikazan tranzicijski dijagram Markovljevog lanca [5]  $X_k = (A_k, D_k)$  broja vojski napadača i branitelja čija su stanja dvodimenzionalni vektori čija je prva komponenta broj vojski napadača na nekom proizvoljnom, ali fiksnom teritoriju, a druga broj vojski branitelja na proizvoljnom, ali fiksnom, njemu susjednom teritoriju, indeksirani trenutkom  $k$  u sukcesivnom nizu napada igrača koji označava diskretno vrijeme lanca. Da ovaj slučajni proces ima Markovljevo svojstvo vidimo iz dosadašnjih računa (nijedna od vjerojatnosti gubitaka vojski napadača i branitelja nije ovisila o tome kako smo došli u dano stanje). Da se stvarno radi o vremenski homogenom Markovljevom lancu će postati jasno jednom kada napišemo izraze za prijelazne vjerojatnosti 1.40, 1.41, 1.42, 1.44 i 1.46. Strelice prikazuju sve tranzicije čije su vjerojatnosti pozitivne. **Žutom** bojom su označene tranzicije u kojima branitelj izgubi jednu vojsku, **plavom** u kojima napadač izgubi jednu vojsku, **crvenom** u kojima branitelj izgubi dvije vojske, crnom u kojima i branitelj i napadač izgube jednu vojsku te **zelenom** u kojima napadač izgubi dvije vojske. Vidimo da su stanja u lijevom stupcu i donjem retku apsorbirajuća.

Neka je  $(A_k, D_k)$  slučajni vektor stanja kako je opisano gore,  $(L_A, L_D)$  slučajni vektor izgubljenih vojski napadača i branitelja kao u prethodnom dijelu,  $T$  vrijeme pogađanja nekog od apsorbirajućih stanja (to je vrijeme zaustavljanja) te  $(A_T, D_T)$  slučajni vektor broja vojski napadača i branitelja kada lanac pogodi apsorbirajuće stanje. Označimo  $p_{a,d}(n, b) := \mathbb{P}((L_A, L_D) = (a, d) | (A_k, D_k) = (n, b))$  (ovo je za sada samo oznaka uz pretpostavku da je promatrani Markovljev lanac vremenski homogen, što još uvijek ne znamo dok ne napišemo tranzicijske vjerojatnosti, ali iz njihovih izraza ćemo vidjeti da jest) i  $\mu(n, b) := \mathbb{E}[A_T - D_T | (A_0, D_0) = (n, b)]$ . U ovom poglavlju ćemo optimizirati strategije obrane minimiziranjem funkcije  $\mu$  u svakom stanju.

Prvo računamo prijelazne vjerojatnosti i  $\mu$  za drugi stupac i predzadnji redak jer nam



Slika 1.3: Tranzicijski dijagram

te vrijednosti trebaju za izračun ostalih. Zbog pretpostavke s početka poglavlja napadač uvijek napada, a branitelj se brani najvećim mogućim brojem vojski u tim stanjima, tako da izbora strategije nema i računi nam postaju jednostavniji.

Imamo

$$\begin{cases} p_{1,0}(2, 1) = \mathbb{P}(X_1 \leq Y_1) = 21/6^2 \\ p_{0,1}(2, 1) = \mathbb{P}(X_1 > Y_1) = 15/6^2 \end{cases} \Rightarrow \quad (1.40)$$

$$\mu(2, 1) = 2p_{0,1}(2, 1) + 0p_{1,0}(2, 1) = \frac{42}{6^2},$$

$$\begin{cases} p_{1,0}(3,1) = \mathbb{P}(X_{(2)} \leq Y_1) = 91/6^3 \\ p_{0,1}(3,1) = \mathbb{P}(X_{(2)} > Y_1) = 125/6^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mu(3,1) = 3p_{0,1}(3,1) + \mu(2,1)p_{1,0}(3,1) = \frac{2887}{6^4},$$

$$\begin{cases} n \geq 4 \Rightarrow p_{1,0}(n,1) = \mathbb{P}(X_{(3)} \leq Y_1) = 441/6^4 \\ n \geq 4 \Rightarrow p_{0,1}(n,1) = \mathbb{P}(X_{(3)} > Y_1) = 855/6^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mu(n,1) = np_{0,1}(n,1) + \mu(n-1,1)p_{1,0}(n,1) = \frac{855n}{6^4} + \frac{441}{6^4}\mu(n-1,1).$$

Riješavamo rekurziju u 1.42 koristeći funkciju izvodnicu, imamo

$$\begin{aligned} a_n := \mu(n+3,1) &\Rightarrow a_n = \frac{855(n+3)}{6^4} + \frac{441}{6^4}a_{n-1} \Rightarrow \\ a_n x^n &= \frac{95(n+3)}{144}x^n + \frac{49}{144}xa_{n-1}x^{n-1} \Rightarrow \\ S(x) - a_0 &= \frac{95}{144} \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{95 \cdot 3}{144} \frac{x}{1-x} + \frac{49}{144}xS(x) \Rightarrow \\ \frac{144-49x}{144}S(x) &= \frac{95}{144} \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3 \cdot 95}{144} \frac{x}{1-x} + \frac{2887}{6^4} \Rightarrow \\ S(x) &= \frac{1}{144-49x} \left( \frac{95x}{(1-x)^2} + \frac{3 \cdot 95x}{1-x} + \frac{2887}{9} \right) = \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{141}{95} \frac{1}{1-x} - \frac{31591}{144 \cdot 855} \frac{1}{1 - \frac{49}{144}x} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( n+1 + \frac{141}{95} - \frac{31591}{144 \cdot 855} \left( \frac{49}{144} \right)^n \right) x^n, \end{aligned}$$

odakle čitamo da je

$$\mu(n+3,1) = n + \frac{236}{95} - \frac{31591}{144 \cdot 855} \left( \frac{7}{12} \right)^{2n}. \quad (1.43)$$

Za predzadnji redak stanja imamo

$$\begin{cases} b \geq 2 \Rightarrow p_{1,0}(2,b) = \mathbb{P}(X_1 \leq Y_{(2)}) = 161/6^3 \\ b \geq 2 \Rightarrow p_{0,1}(2,b) = \mathbb{P}(X_1 > Y_{(2)}) = 55/6^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mu(2,n) = -np_{1,0}(2,n) + \mu(2,n-1)p_{0,1}(2,n) = -\frac{161n}{6^3} + \frac{55}{6^3}\mu(2,n-1).$$

Rješavamo rekurziju 1.44, imamo

$$\begin{aligned}
 b_n &:= \mu(2, n+1) \Rightarrow b_n = -\frac{161(n+1)}{6^3} + \frac{55}{6^3}b_{n-1} \Rightarrow \\
 b_n x^n &= -\frac{161(n+1)}{6^3}x^n + \frac{55x}{6^3}b_{n-1}x^{n-1} \Rightarrow \\
 S(x) - b_0 &= -\frac{161}{6^3} \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{161}{6^3} \frac{x}{1-x} + \frac{55}{6^3}xS(x) \Rightarrow \\
 \frac{6^3 - 55x}{6^3}S(x) &= -\frac{161}{6^3} \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{161}{6^3} \frac{x}{1-x} + \frac{42}{6^2} \Rightarrow \\
 S(x) &= \frac{1}{216 - 55x} \left( -\frac{161x}{(1-x)^2} - \frac{161x}{1-x} + 252 \right) = \\
 &= -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{55}{161} \frac{1}{1-x} + \frac{1763}{966} \frac{1}{1 - \frac{55}{216}x} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -(n+1) + \frac{55}{161} + \frac{1763}{966} \left( \frac{55}{216} \right)^n \right) x^n,
 \end{aligned}$$

odakle čitamo da je

$$\mu(2, n+1) = -n - \frac{106}{161} + \frac{1763}{966} \left( \frac{55}{216} \right)^n. \quad (1.45)$$

Za sva ostala stanja imamo prijelazne vjerojatnosti

$$\nu \geq 3, \beta \geq 2, \theta := \min\{\nu - 1, 3\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 p_{2,0}(\nu, \beta) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 b_{i,j}^{(2)++} s_{i,j}(\nu, \beta) n_{i,j}^{(\theta,2)} \\
 p_{1,0}(\nu, \beta) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 b_j^{(1)+} (1 - s_{i,j}(\nu, \beta)) n_{i,j}^{(\theta,2)} \\
 p_{1,1}(\nu, \beta) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 b_j^{(2)+-} s_{i,j}(\nu, \beta) n_{i,j}^{(\theta,2)} \\
 p_{0,1}(\nu, \beta) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 b_j^{(1)-} (1 - s_{i,j}(\nu, \beta)) n_{i,j}^{(\theta,2)} \\
 p_{0,2}(\nu, \beta) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 b_j^{(2)--} s_{i,j}(\nu, \beta) n_{i,j}^{(\theta,2)}
 \end{array} \right. , \quad (1.46)$$

odakle sijedi da je

$$\begin{aligned}
 \mu(n, b) &= \mu(n-2, b) p_{2,0}(n, b) + \mu(n-1, b) p_{1,0}(n, b) + \\
 &\mu(n-1, b-1) p_{1,1}(n, b) + \mu(n, b-1) p_{0,1}(n, b) + \mu(n, b-2) p_{0,2}(n, b).
 \end{aligned} \quad (1.47)$$

U nastavku nam je cilj odrediti  $s_{i,j}(n, b)$  koji minimiziraju  $\mu(n, b)$  za svako stanje  $(n, b)$ . Vidimo da se opet radi o linearnom programiranju, rekurzivnim rješavanjem uz  $[S_{n,m}]_{i,j} := s_{i,j}(n, m)$  i  $[M]_{i,j} = \mu(11 - i, j - 1)$  dobivamo

$$S_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{3,4} = S_{3,5} = S_{3,6} = S_{3,7} = S_{3,8} = S_{3,9} = S_{3,10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{3,2} = S_{4,3} = S_{4,4} = S_{4,5} = S_{4,6} = S_{4,7} = S_{4,8} = S_{4,9} = S_{4,10} =$$

$$S_{5,3} = S_{6,3} = S_{6,4} = S_{6,5} = S_{6,6} = S_{6,7} = S_{6,8} = S_{6,9} = S_{6,10} =$$

$$S_{7,3} = S_{8,3} = S_{8,4} = S_{8,5} = S_{8,6} = S_{8,7} = S_{8,8} = S_{8,9} = S_{8,10} =$$

$$S_{9,3} = S_{9,5} = S_{9,6} = S_{9,7} =$$

$$S_{10,3} = S_{10,4} = S_{10,5} = S_{10,6} = S_{10,7} = S_{10,8} = S_{10,9} = S_{10,10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{5,4} = S_{5,5} = S_{5,6} = S_{5,7} = S_{5,8} = S_{5,9} = S_{5,10} =$$

$$S_{7,4} = S_{7,5} = S_{7,6} = S_{7,7} = S_{7,8} = S_{7,9} = S_{7,10} =$$

$$S_{9,4} = S_{9,8} = S_{9,9} = S_{9,10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$



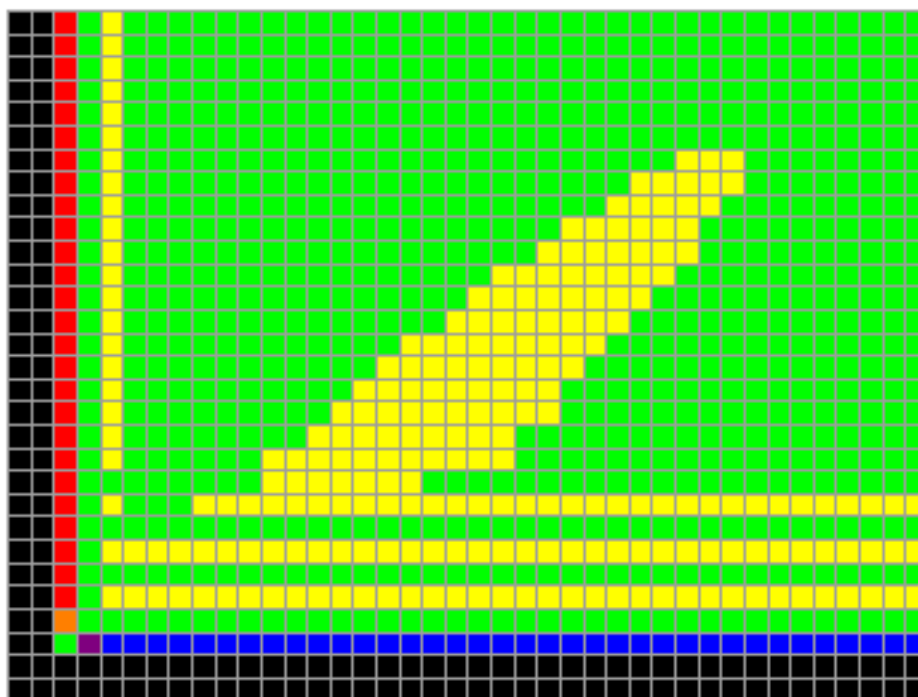
$$S_{4,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{5,2} = S_{6,2} = S_{7,2} = S_{8,2} = S_{9,2} = S_{10,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 10.00 & 9.48 & 8.36 & 7.34 & 6.28 & 5.19 & 4.07 & 2.95 & 1.82 & 0.70 & -0.42 \\ 9.00 & 8.48 & 7.35 & 6.31 & 5.22 & 4.10 & 2.97 & 1.83 & 0.70 & -0.43 & -1.53 \\ 8.00 & 7.48 & 6.33 & 5.26 & 4.14 & 2.99 & 1.84 & 0.70 & -0.44 & -1.55 & -2.64 \\ 7.00 & 6.48 & 5.29 & 4.18 & 3.02 & 1.85 & 0.69 & -0.46 & -1.57 & -2.67 & -3.74 \\ 6.00 & 5.47 & 4.25 & 3.08 & 1.88 & 0.70 & -0.46 & -1.59 & -2.68 & -3.75 & -4.80 \\ 5.00 & 4.46 & 3.10 & 1.88 & 0.66 & -0.52 & -1.65 & -2.75 & -3.81 & -4.85 & -5.88 \\ 4.00 & 3.40 & 2.02 & 0.74 & -0.48 & -1.63 & -2.72 & -3.78 & -4.81 & -5.83 & -6.84 \\ 3.00 & 2.23 & 0.54 & -0.75 & -1.89 & -2.96 & -3.98 & -4.99 & -6.00 & -7.00 & -8.00 \\ 2.00 & 1.17 & -0.45 & -1.61 & -2.65 & -3.66 & -4.66 & -5.66 & -6.66 & -7.66 & -8.66 \\ & 0.00 & -1.00 & -2.00 & -3.00 & -4.00 & -5.00 & -6.00 & -7.00 & -8.00 & -9.00 \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

Vidimo da su optimalne strategije obrane, barem do promatranog broja vojski napadača i branitelja, particionirane u samo šest determinističkih strategija označenih različitim bojama. Ako na strategijama obrane protiv barem dvije napadačke vojske uvedemo parcijalni uređaj tako da kažemo da je jedna strategija agresivnija od druge ako su joj svi unosi u matricnom zapisu veći od onoga druge strategije, onda je strategija koju smo obojali **crveno** najagresivnija, zatim **narančasta** i **žuta** koje su međusobno neusporedive, zatim **zelena**, zatim **plava** i na kraju **ljubičasta** koja je najmanje agresivna od svih. Iz 1.48 vidimo da je za branitelja optimalno biti manje agresivan kada je u boljem položaju (**ljubičasta** i **plava**), a najviše agresivan kada je u gorjoj poziciji (**crvena** i **narančasta**). Neobično je što je **ljubičasta** strategija bolja od **plave** baš samo kada je branitelj u relativno lošijem položaju. Zanimljiv je i način kako se izmjenjuju **žuta** i **zelena** strategija kao optimalne.

Primjetimo još kako na dijagonalnim unosima u smjeru od dolje- lijevo prema gore-desno vrijednosti unosa počinju sporo padati nakon relativno malog broja članova u skladu s prijašnjim promatranjem kvocijenta očekivanja izgubljenih vojski za optimalne strategije napada i obrane nakon 1.35.



Slika 1.4: Optimalne strategije obrane za do 30 vojski napadača i 39 vojski branitelja

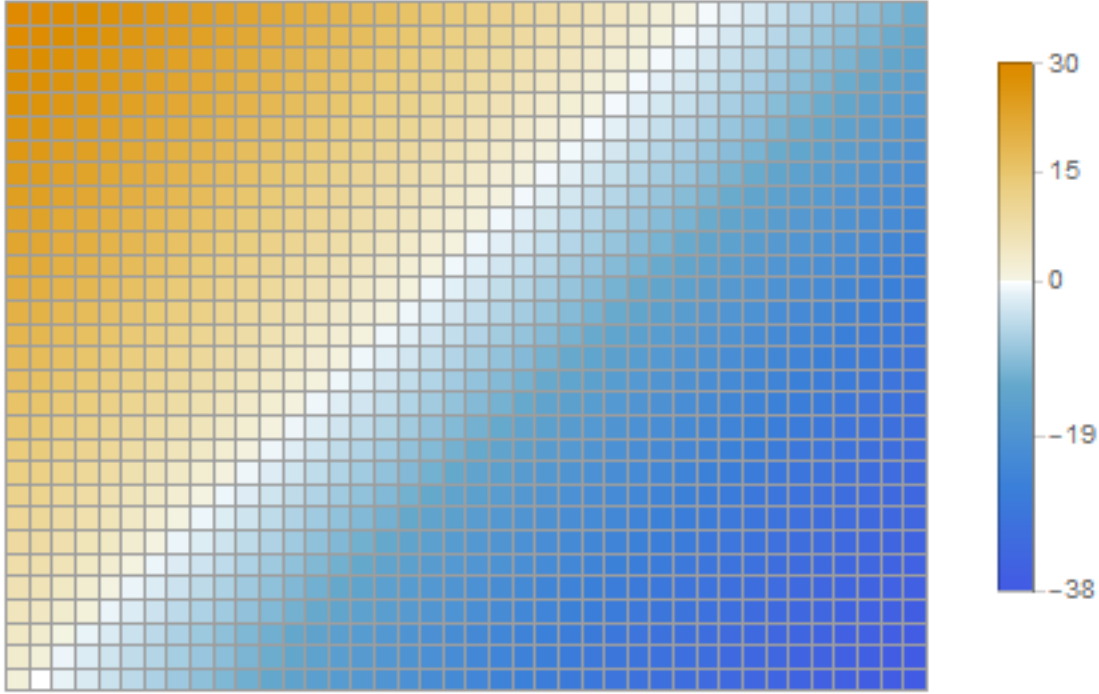
## 1.3 Planiranje napada

### Funkcije gustoće vjerojatnosti apsorbirajućih stanja

Sada možemo izračunati prijelazne vjerojatnosti u optimalnom slučaju. Vidimo da stanja s barem tri napadačke i dvije obrambene vojske koja imaju istu optimalnu strategiju obrane imaju i sve odgovarajuće prijelazne vjerojatnosti prikazane na slici 1.3 jednake. Iz 1.46 dobivamo:

$$\begin{aligned} & (p_{2,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2})(3, 2) = \\ & \left( \frac{535}{1296}, \frac{7}{108}, \frac{13}{54}, \frac{5}{27}, \frac{125}{1296} \right) = (.4128, .0648, .2407, .1852, .0965), \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} & \nu > 3, \beta > 2, S_{\nu, \beta} = S_{3,2} \Rightarrow (p_{2,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2})(\nu, \beta) = \\ & \left( \frac{1763}{7776}, \frac{1}{8}, \frac{1337}{7776}, \frac{3}{8}, \frac{197}{1944} \right) = (.2267, .1250, .1719, .3750, .1013), \end{aligned} \quad (1.50)$$



Slika 1.5: Očekivanje razlike broja vojski napadača i branitelja u apsorbirajućem stanju počevši iz danog stanja

$$\begin{aligned} & (p_{2,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2})(4, 2) = \\ & \left( \frac{509}{1944}, \frac{11}{144}, \frac{455}{1944}, \frac{11}{48}, \frac{193}{972} \right) = (.2618, .0764, .2341, .2292, .1986), \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \nu > 4 \Rightarrow & (p_{2,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2})(\nu, 2) = \\ & \left( \frac{1063}{3888}, \frac{23}{432}, \frac{125}{486}, \frac{89}{432}, \frac{817}{3888} \right) = (.2734, .0532, 0.2572, .2060, .2101), \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} & (p_{2,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2})(3, 3) = \\ & \left( \frac{451}{1296}, \frac{5}{36}, \frac{55}{324}, \frac{11}{36}, \frac{49}{1296} \right) = (.3480, .1389, .1698, .3056, .03781), \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \beta > 3 \Rightarrow & (p_{2,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2})(3, \beta) = \\ & \left( \frac{481}{1296}, \frac{1}{9}, \frac{41}{216}, \frac{5}{18}, \frac{65}{1296} \right) = (.3711, 0.1111, .1898, 0.2778, .0502), \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\nu > 3, \beta > 2, S_{\nu, \beta} = S_{5,4} \Rightarrow (p_{2,0}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2})(\nu, \beta) = \left( \frac{1853}{7776}, \frac{11}{108}, \frac{1517}{7776}, \frac{19}{54}, \frac{439}{3888} \right) = (.2383, .1016, .1951, .3519, .1129). \quad (1.55)$$

U nastavku želimo izračunati uvjetne funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $A_T - D_T$  ako znamo da lanac krene iz stanja  $(A_0, D_0) = (\nu, \beta)$ . Da bismo to postigli, prvo ćemo trebati neke poznate pojmove i rezultate [4] koje navodimo u narednom tekstu.

**Definicija 1.3.1.** *Markovljev lanac je apsorbirajući ako posjeduje barem jedno apsorbirajuće stanje i ako je iz svakog stanja dostižno neko apsorbirajuće stanje.*

**Napomena 1.3.2.** *Primjetimo da je Markovljev lanac koji smo do sada promatrali također apsorbirajući.*

**Definicija 1.3.3.** *Prijelazna matrica  $P$  apsorbirajućeg Markovljevog lanca je u kanonskoj formi ako su mu stanja poredana tako da prvo imamo sva prolazna stanja, a zatim sva apsorbirajuća stanja. Ako lanac ima  $t$  prolaznih i  $r$  apsorbirajućih stanja, tada je kanonska forma prijelazne matrice oblika*

$$P = \begin{pmatrix} Q_{t \times t} & R_{t \times r} \\ 0_{r \times t} & I_{r \times r} \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

**Napomena 1.3.4.** *Lako se provjeri da je*

$$P^n = \begin{pmatrix} Q^n & * \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

gdje je "\*" neka  $t \times r$  matrica.

**Teorem 1.3.5.** *U apsorbirajućem Markovljevom lancu je vjerojatnost da će lanac pogoditi apsorbirajuće stanje jednaka 1. Posebno,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = \mathbf{0}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $s_j$  neko stanje koje nije apsorbirajuće, po definiciji je neko apsorbirajuće stanje dostižno iz  $s_j$  pa postoji pozitivna vjerojatnost da pogodimo to stanje u konačnom broju koraka počevši iz  $s_j$ . Neka je  $m_j$  minimalan broj koraka za koji postoji pozitivna vjerojatnost da pogodimo neko apsorbirajuće stanje počevši iz  $s_j$  i neka je  $p_j$  vjerojatnost da, počevši iz  $s_j$ , ne pogodimo apsorbirajuće stanje u  $m_j$  koraka ili manje. Zbog izbora  $m_j$  je  $p_j < 1$ . Neka je sada  $m$  najveći među svim  $m_j$  i  $p$  najveći među svim  $p_j$ . Tada je vjerojatnost da lanac ne pogodi apsorbirajuće stanje do  $m$ -tog koraka manja ili jednaka  $p < 1$ . Zbog Markovljevog svojstva je vjerojatnost da lanac ne pogodi apsorbirajuće stanje do  $km$ -tog koraka manja ili jednaka  $p^k$  pa je vjerojatnost da pogodi neko apsorbirajuće stanje do  $km$ -tog koraka veća od  $1 - p^k$ , odakle slijedi prva tvrdnja. Ako je lanac do nekog koraka u apsorbirajućem stanju, onda u tom koraku nije u stanju koje nije apsorbirajuće pa je  $\|Q^{km}\|_{\max} \leq p^k$  odakle  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = \mathbf{0}$ .  $\square$

**Teorem 1.3.6.** *Za apsorbirajući Markovljev lanac je matrica  $I-Q$  invertibilna i  $(I-Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$ .*

*Dokaz.* Imamo

$$(I-Q)x = 0 \Rightarrow x = Qx \Rightarrow x = Q^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n x = 0 \Rightarrow \ker(I-Q) = \{0\}$$

pa je  $I-Q$  invertibilna. Nadalje,

$$\begin{aligned} (I-Q) \sum_{i=0}^n Q^i &= I - Q^{n+1} \Rightarrow \sum_{i=0}^n Q^i = (I-Q)^{-1} (I - Q^{n+1}) \Rightarrow \\ \sum_{i=0}^{\infty} Q^i &= (I-Q)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} (I - Q^{n+1}) = (I-Q)^{-1}. \end{aligned}$$

□

**Definicija 1.3.7.** *Za prijelaznu matricu  $P$  apsorbirajućeg Markovljevog lanca u kanonskoj formi se matrica  $N = (I-Q)^{-1}$  zove fundamentalna matrica od  $P$ .*

**Napomena 1.3.8.** *Sada ćemo prethodno definirane matrice  $R$  (vidi 1.56) i  $N$  (fundamentalnu matricu, vidi 1.3.7) konačno iskoristiti da bismo dobili vjerojatnosti apsorpcije. Primjetimo da je  $[N]_{i,k} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{i,k}^{(n)}$  zbog 1.3.6.*

**Teorem 1.3.9.** *Neka je  $[B]_{i,j}$  vjerojatnost da će apsorbirajući Markovljev lanac pogoditi apsorbirajuće stanje  $s_j$  ako počne u prolaznom stanju  $s_i$ . Tada je*

$$B = NR. \quad (1.57)$$

*Dokaz.*

$$[B]_{i,j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^t q_{i,k}^{(n)} r_{k,j} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=1}^t \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_{i,k}^{(n)} \right) r_{k,j} = \sum_{k=1}^t n_{i,k} r_{k,j} = [NR]_{i,j}.$$

□

Sada je jasno da, ako dobijemo matrice  $Q$  i  $R$ , ćemo moći izračunati apsorpcijske vjerojatnosti. U tu svrhu koristimo 1.49-1.55 i sljedeći kod u programskom paketu Mathematica:

maxn = 15; (\*računamo do ovog broja napadačkih vojski\*)

maxb = 10; (\*računamo do ovog broja obrambenih vojski\*)

```

vertices =
  Flatten[Table[{i, j}, {i, maxn, 2, -1}, {j, maxb, 1, -1}], 1]~Join~
  Table[{i, 0}, {i, maxn, 2, -1}]~Join~ Table[{1, i}, {i, 1, maxb}];
  (*poredamo stanja tako da su apsorbirajuća na kraju*)

edges=Flatten [Table[If[MemberQ[{{2,0},{1,0},{1,1},{0,1},{0,2}},{i-k,j-1}],
Property[{i,j}\[DirectedEdge]{k,l},
EdgeWeight->\[Piecewise]
1763/7776 i==k+2&&j==l&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 3,2]
1/8 i==k+1&&j==l&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 3,2]
1337/7776 i==k+1&&j==l+1&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 3,2]
3/8 i==k&&j==l+1&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 3,2]
197/1944 i==k&&j==l+2&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 3,2]
1853/7776 i==k+2&&j==l&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 5,4]
11/108 i==k+1&&j==l&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 5,4]
1517/7776 i==k+1&&j==l+1&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 5,4]
19/54 i==k&&j==l+1&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 5,4]
439/3888 i==k&&j==l+2&&i>3&&j>2&&Subscript[s, i,j]==Subscript[s, 5,4]
1063/3888 i==k+2&&j==l&&i>=5&&j==2
23/432 i==k+1&&j==l&&i>=5&&j==2
125/486 i==k+1&&j==l+1&&i>=5&&j==2
89/432 i==k&&j==l+1&&i>=5&&j==2
817/3888 i==k&&j==l+2&&i>=5&&j==2
481/1296 i==k+2&&j==l&&i==3&&j>=4
1/9 i==k+1&&j==l&&i==3&&j>=4
41/216 i==k+1&&j==l+1&&i==3&&j>=4
5/18 i==k&&j==l+1&&i==3&&j>=4
65/1296 i==k&&j==l+2&&i==3&&j>=4
1 i==k&&j==l==0
1 i==k==1&&j==l
441/6^4 i==k+1&&j==l&&i>=4&&j==1
855/6^4 i==k&&j==l+1&&i>=4&&j==1
161/6^3 i==k+1&&j==l&&i==2&&j>= 2
55/6^3 i==k&&j==l+1&&i==2&&j>= 2
91/6^3 i==k+1&&j==l&&i==3&&j==1
125/6^3 i==k&&j==l+1&&i==3&&j==1
21/6^2 i==k+1&&j==l&&i==2&&j==1
15/6^2 i==k&&j==l+1&&i==2&&j==1
509/1944 i==k+2&&j==l&&i== 4&&j== 2

```

```

11/144 i==k+1&&j==l&&i== 4&&j== 2
455/1944 i==k+1&&j==l+1&&i== 4&&j== 2
11/48 i==k&&j==l+1&&i== 4&&j== 2
193/972 i==k&&j==l+2&&i== 4&&j== 2
451/1296 i==k+2&&j==l&&i== 3&&j== 3
5/36 i==k+1&&j==l&&i== 3&&j== 3
55/324 i==k+1&&j==l+1&&i== 3&&j== 3
11/36 i==k&&j==l+1&&i== 3&&j== 3
49/1296 i==k&&j==l+2&&i== 3&&j== 3
535/1296 i==k+2&&j==l&&i== 3&&j== 2
7/108 i==k+1&&j==l&&i== 3&&j== 2
13/54 i==k+1&&j==l+1&&i== 3&&j== 2
5/27 i==k&&j==l+1&&i== 3&&j== 2
125/1296 i==k&&j==l+2&&i== 3&&j== 2
0 True
],Nothing],[i,maxn,1,-1],[j,maxb,0,-1],[k,i,1,-1],[l,j,0,-1]],4];
(*prijelazne vjerojatnosti zapisujemo kao težinske bridove*)

```

```

markovc = Graph[vertices, edges];
(*stvaramo graf s vrhovima poredanima kao gore i
težinskim bridovima kao gore*)

```

```

fundamental =
Inverse [IdentityMatrix[maxn*(maxb + 1) - (maxn + maxb)] -
WeightedAdjacencyMatrix[
markovc][[1 ;; maxn*(maxb + 1) - 1 - (maxn + maxb - 1),
1 ;; maxn*(maxb + 1) -
1 - (maxn + maxb -
1)]]]; (*koristimo težinsku matricu susjedstva grafa da
izračunamo fundamentalnu matricu*)

```

```

rpart = WeightedAdjacencyMatrix[
markovc][[1 ;; maxn*(maxb + 1) - 1 - (maxn + maxb - 1),
maxn*(maxb + 1) - 1 - (maxn + maxb - 1) + 1 ;;
maxn*(maxb + 1) - 1]]; (*slično i matricu R*)

```

```

B = fundamental.rpart; (*matrica apsorpcijskih vjerojatnosti*)

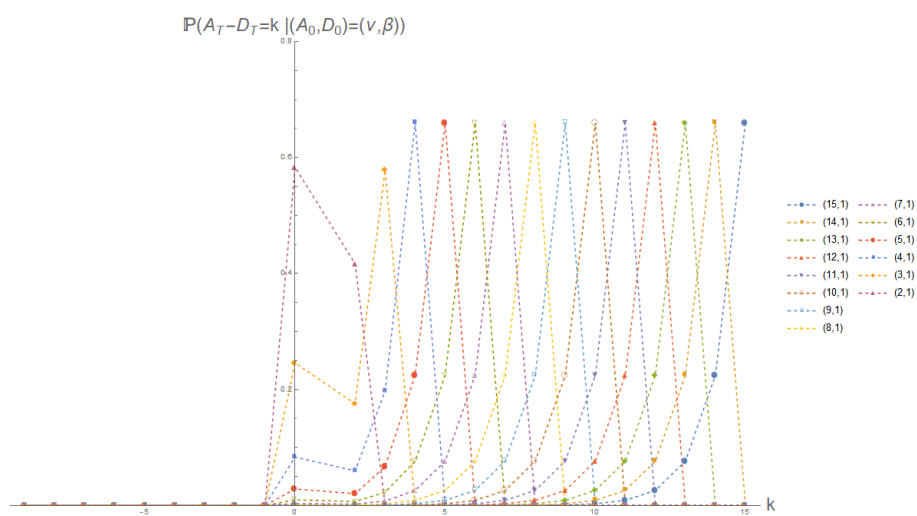
```

Sada smo spremni izračunati vjerojatnosti pogađanja apsorbirajućih stanja, na slikama 1.6, 1.7 i 1.8 prikazujemo neke od njih grafički. Također na slici 1.9 prikazujemo vjerojatnost

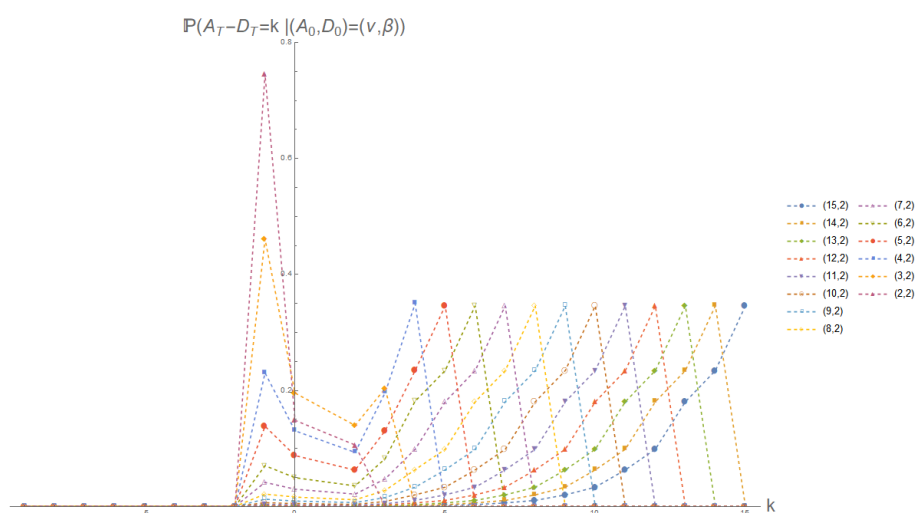
osvajanja susjednog teritorija za razne brojeve napadačkih i obrambenih vojski.

Iz dobivenih rezultata vidimo da su gustoće vjerojatnosti  $A_T - D_T$  unimodalne ili bimodalne. Za unimodalne gustoće vidimo da se mod postiže za pozitivnu vrijednost varijable kada je  $A_0 > D_0$ , a za nepozitivnu kada je  $A_0 < D_0$ , dok za bimodalne vidimo da se jedan mod postiže za pozitivnu vrijednost varijabli, a drugi za nepozitivnu. Povećanjem broja napadačkih vojski gustoća postaje više koncentrirana na pozitivnim vrijednostima, dok povećanjem broja vojski branitelja postaje više koncentrirana na nepozitivnim vrijednostima, kao što je i za očekivati. Također dobivamo i očekivani rezultat da povećanjem broja napadačkih vojski vjerojatnost uspješnog osvajanja teritorija raste, dok povećanjem broja obrambenih vojski pada. Ono što je zanimljivo je da, ako promatramo do četiri napadačke i obrambene vojske, vjerojatnost uspješnog osvajanja jako brzo pada povećanjem broja obrambenih vojski, što sugerira igraču da ima koristi od smještanja do četiri vojske na teritorij ako u blizini tog teritorija protivnički igrač nema puno veći broj vojski.

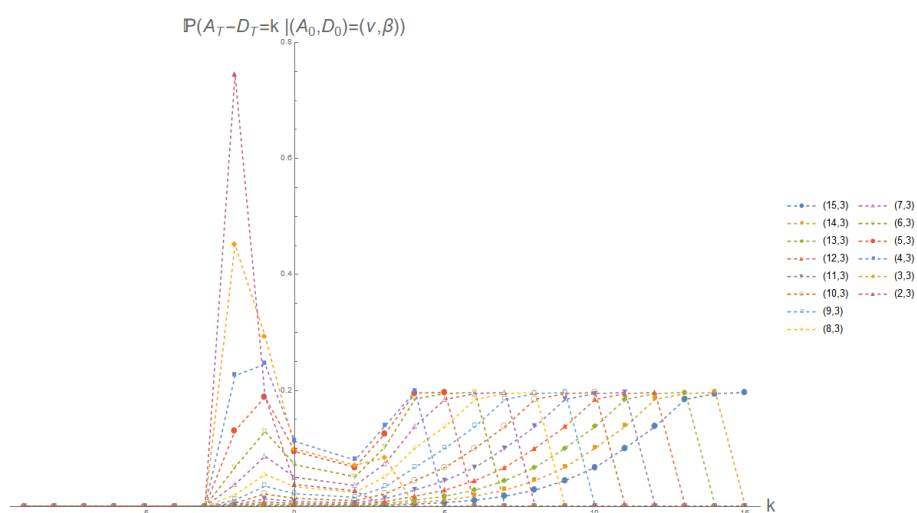




(a) 1

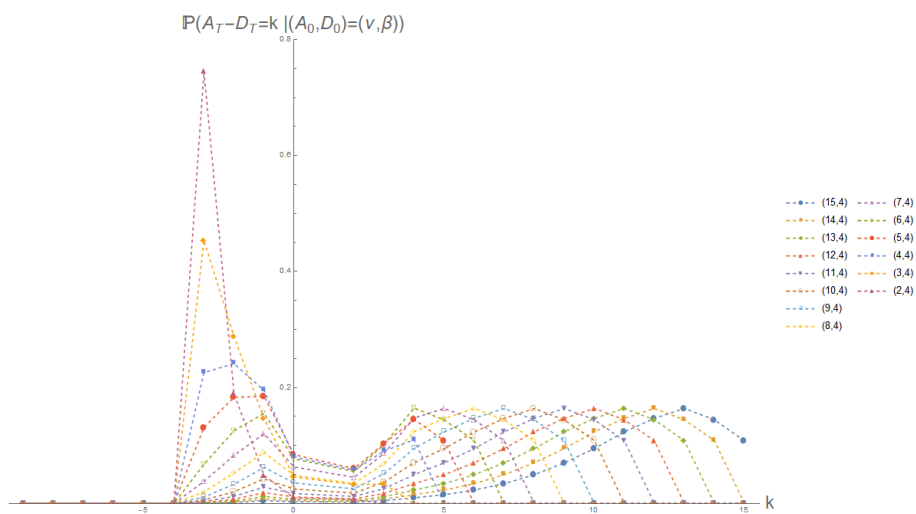


(b) 2

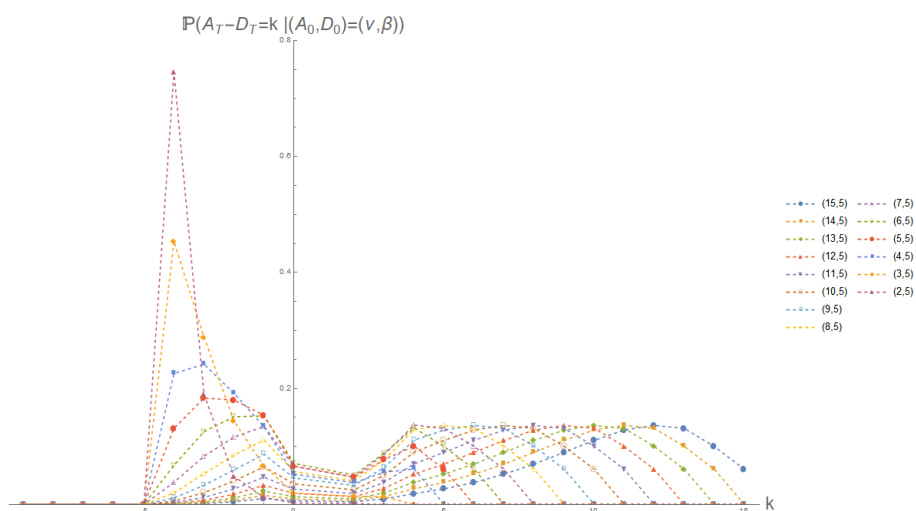


(c) 3

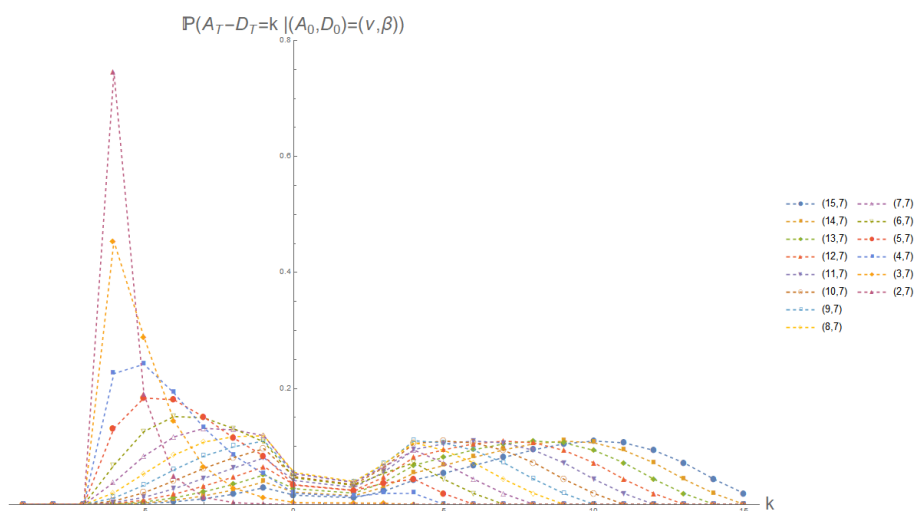
Slika 1.6: Uvjetna funkcija gustoće vjerojatnosti  $A_T - D_T$  za zadano početno stanje i naznačeni broj obrambenih vojski



(a) 4

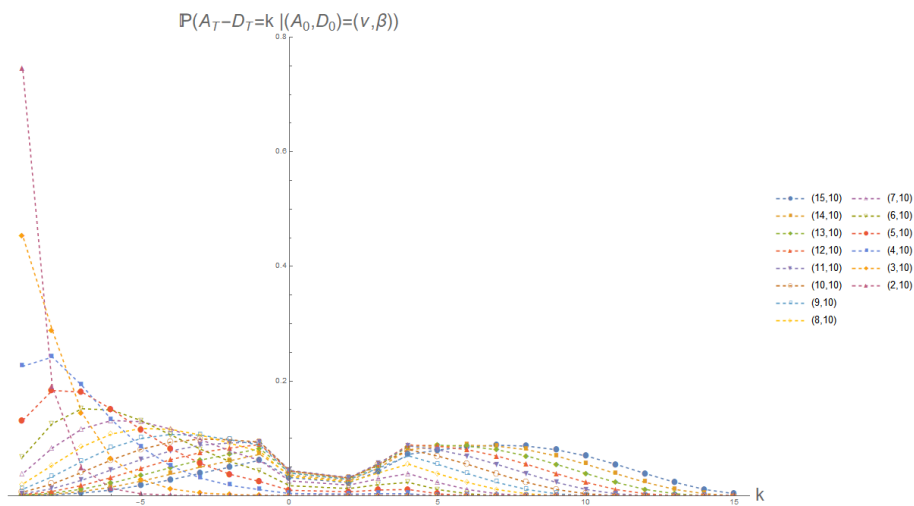
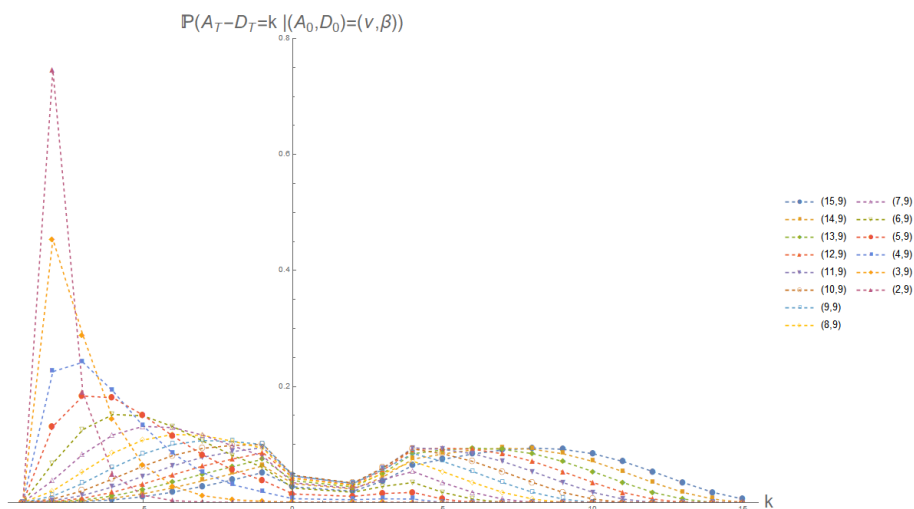
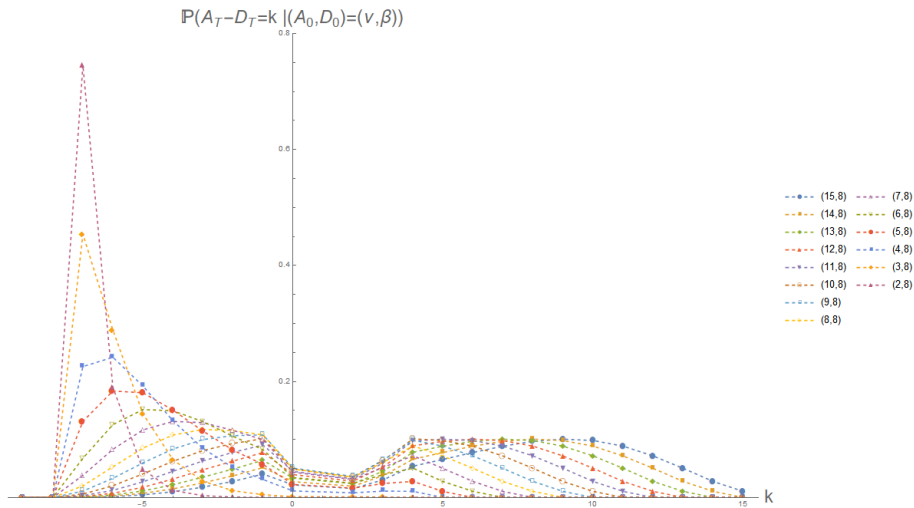


(b) 5

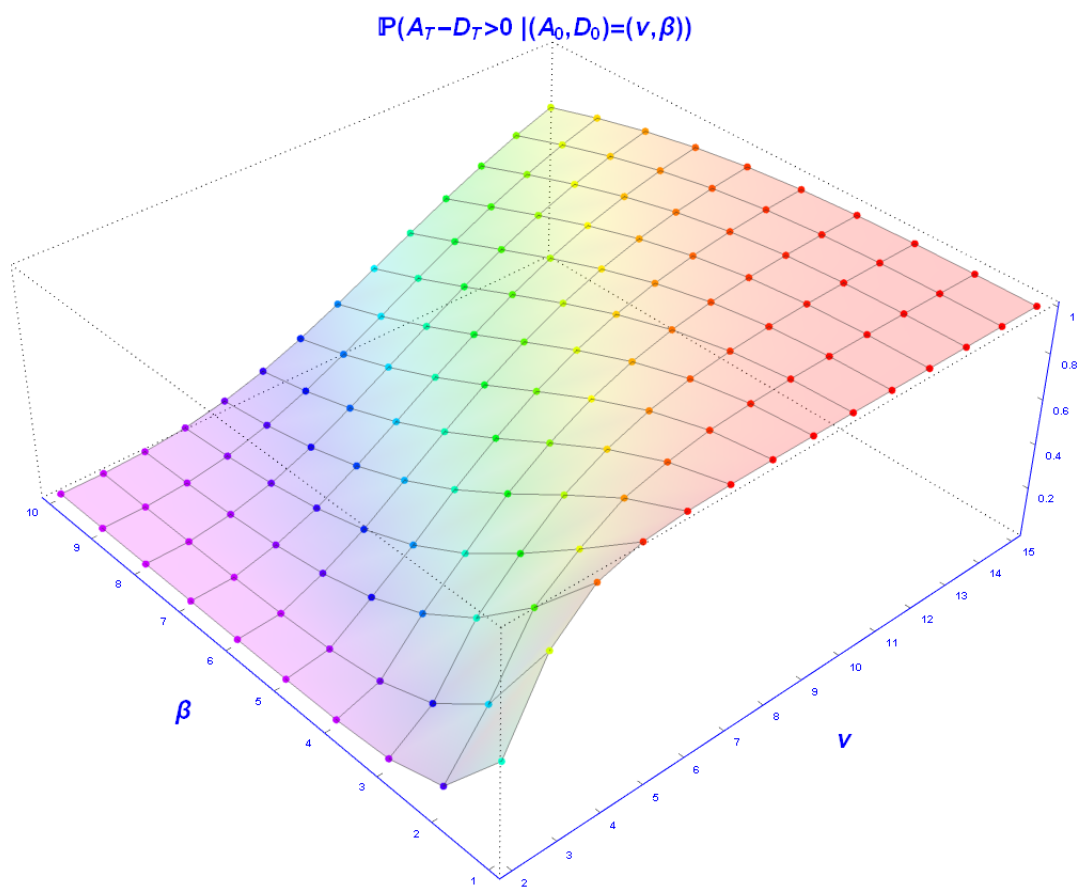


(c) 7

Slika 1.7: Uvjetna funkcija gustoće vjerojatnosti  $A_T - D_T$  za zadano početno stanje i naznačeni broj obrambenih vojski



Slika 1.8: Uvjetna funkcija gustoće vjerojatnosti  $A_T - D_T$  za zadano početno stanje i naznačeni broj obrambenih vojski



Slika 1.9: Vjerojatnost da napadač osvoji susjedni teritorij za dani broj vojski napadača i branitelja



# Bibliografija

- [1] *Risk FAQ*, <https://www.kent.ac.uk/smsas/personal/odl/riskfaq.htm>, (siječanj 2022.).
- [2] *Risk, The world conquest game*, <https://www.hasbro.com/common/instruct/risk.pdf>, (siječanj 2022.).
- [3] Abraham Charnes i William W Cooper, *Programming with linear fractional functionals*, *Naval Research logistics quarterly* **9** (1962), br. 3-4, 181–186.
- [4] Charles Miller Grinstead i James Laurie Snell, *Introduction to probability*, American Mathematical Soc., 1997.
- [5] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1987.



# Sažetak

U ovom radu smo analizirali neke elemente igre "Rizik". Izračunali smo vjerojatnosti ishoda jedne iteracije napada i obrane. Zatim smo igru promatrali kao Markovljev lanac s diskretnim vremenom, našli optimalne strategije obrane za svako stanje i vidjeli kako se skup stanja s obzirom na optimalne strategije obrane particionira na šest particija. Na kraju smo izračunali apsorbirajuće vjerojatnosti lanca počevši iz svakog neapsorbirajućeg stanja te to iskoristili da izračunamo funkcije gustoće vjerojatnosti konačnog ishoda napada teritorija i vjerojatnost njegovog osvajanja počevši iz različitih stanja Markovljevog lanca.





# Summary

In this work, some elements of the game "Risk" were analysed. Outcome probabilities of a single iteration of attack and defence were obtained. Then, the game was considered as a Markov chain with discrete time, the optimal defence strategies for each state were found and the way in which the state set partitions into six partitions with regard to the optimal defence strategies was determined. In the end, absorbing probabilities of the chain from each source state were obtained, which were used for obtaining the probability mass functions of the final outcome of an attack of a territory and the probability of its capture starting from various states of the Markov chain.



# Životopis

Alen Lančić rođen je 25.10.1986. u Virovitici gdje je pohađao osnovnu i srednju školu. Tokom pohađanja gimnazije Petra Preradovića u Virovitici je osvojio 5. mjesto na državnom natjecanju iz matematike, 7. iz kemije i sudjelovao na državnom natjecanju iz fizike 2002. godine, osvojio 2. mjesto na državnom natjecanju iz fizike 2003. godine te sudjelovao na državnom natjecanju iz fizike 2004. i 2005. godine. 2005. godine upisuje preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji završava 2008. godine te potom iste godine upisuje diplomski studij teorijske matematike. 2009. osvaja Rektorovu nagradu sveučilišta u Zagrebu za rad "Širenje epidemija na kompleksnim mrežama – teorijski modeli i računalne simulacije". Tokom diplomskog studija objavio je sljedeće članke: Phase diagram of epidemic spreading - Unimodal vs. bimodal probability distributions, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* (siječanj 2011.), Epidemic centrality and the underestimated epidemic impact of network peripheral nodes, *Physics of Condensed Matter* (kolovoz 2011.), Statistical Inference Framework for Source Detection of Contagion Processes on Arbitrary Network Structures, *IEEE* (travanj 2013.), FastSIR algorithm: A fast algorithm for the simulation of the epidemic spread in large networks by using the susceptible–infected–recovered compartment model, *Information Sciences* (kolovoz 2013.), Identification of Patient Zero in Static and Temporal Networks: Robustness and Limitations, *Physical Review Letters* (lipanj 2015.). Konferencije: Some new results on assessment of Q-gram filter efficiency, 2015 9th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), Low-dimensional statistical manifold embedding of directed graphs, International Conference on Learning Representations 2020.