Jednodimenzionalni model toka realnog mikropolarnog plina s primjenom na termalnu eksploziju reaktivnog fluida

Bašić-Šiško, Angela

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Angela Bašić-Šiško

Jednodimenzionalni model toka realnog mikropolarnog plina s primjenom na termalnu eksploziju reaktivnog fluida

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Angela Bašić-Šiško

Jednodimenzionalni model toka realnog mikropolarnog plina s primjenom na termalnu eksploziju reaktivnog fluida

DOKTORSKI RAD

Mentori:

doc. dr. sc. Ivan Dražić, izv. prof. dr. sc. Boris Muha

Zagreb, 2022.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Angela Bašić-Šiško

One-dimensional model of real micropolar gas flow with application to the thermal explosion of a reactive fluid

DOCTORAL THESIS

Supervisors:

doc. dr. sc. Ivan Dražić, izv. prof. dr. sc. Boris Muha

Zagreb, 2022.

ZAHVALA

Hvala mojoj obitelji, prijateljima, mentorima i kolegama na podršci, razumijevanju i savjetima.

♡

SAŽETAK

U ovoj disertaciji razmatramo model jednodimenzionalnog toka viskoznog toplinski provodljivog realnog mikropolarnog plina kojeg karakterizira generalizirana jednadžba stanja. Iz konstitutivnih jednadžbi mehanike fluida i zakona očuvanja izvodimo pripadni početno-rubni problem s homogenim rubnim uvjetima, prvo u Eulerovim, a zatim u masenim Lagrangeovim koordinatama. Izvedeni model zatim primjenjujemo u slučaju toka i termalne eksplozije reaktivnog fluida. Za oba modela konstruiramo niz aproksimativnih rješenja korištenjem Faedo-Galerkinove metode, opisujemo algoritam za numeričko rješavanje i diskutiramo rezultate numeričkih testova. Kako bismo potvrdili značaj novih modela, ispitujemo utjecaj mikropolarnosti i generalizirane jednadžbe stanja na ponašanje fluida. Naposljetku, za svaki od modela pokazujemo da ima jedinstveno rješenje lokalno po vremenu, a zatim i na proizvoljnom vremenskom intervalu.

Ključne riječi: mikropolarni fluid; realni plin; reaktivan fluid; egzistencija i jedinstvenost generaliziranog rješenja; numeričko rješenje

EXTENDED SUMMARY

In this dissertation, we consider a model of the one-dimensional flow of a viscous and thermally conductive real micropolar fluid characterized by a generalized equation of state. From the constitutive equations of fluid mechanics and the conservation laws, we derive the corresponding initial-boundary value problem with homogeneous boundary conditions, first in Euler and then in Lagrangian mass coordinates. The derived model is then applied to the case of flow and thermal explosion of a reactive fluid.

For each model, we first show that it has a solution locally in time. We prove this result using a constructive technique based on the Faedo-Galerkin projection. In particular, we show that the constructed sequence of approximate solutions is bounded, and then we obtain convergence (on a subsequence) using classical compactness theorems. Next, we show that the governing initial-boundary problem has at most one solution. Based on the theorems on local existence and uniqueness just proved, we then prove that the problem under consideration has a solution in any finite time interval by applying the principle of expansion. In proving this result, we bound the solutions independently of the finite time interval chosen, using the generalized energy method and the Kazhikov representation of the mass density.

Finally, using the semi-discretized approximate systems constucted in the proof of the local existence theorem, we develop a fully discretized numerical scheme for the initial-boundary value problems considered. We perform several numerical tests to confirm the validity of the numerical method and the model itself. We do this by discussing the stabilization properties of the solution. To confirm the significance of the new models, we also investigate the influence of micropolarity and the generalized equation of state on the fluid behavior.

Keywords: micropolar fluid; real gas; reactive fluid; existence and uniqueness of generalized solution; numerical solution

Sadržaj

UVOD

Primjena matematičkih modela, odnosno pojednostavljeni kvantitativni prikaz stvarnih fenomena ključni je alat većine znanosti. Zadatak matematičke analize modela je ustanoviti rješivost i ispitati svojstva modela. Teoretski rezultati ovog tipa imaju za cilj opravdanje fizikalnosti te uviđanje svojstava i predviđanje ponašanja modelirane pojave. Pri modeliranju je potrebno postići kompromis između težnje za što vjernijim prikazom stvarnosti i jednostavnosti koja omogućuje provođenje matematičke analize i efikasnu računalnu implementaciju.

Jedan od najpoznatijih matematičkih modela je klasični model toka fluida reprezentiran Navier-Stokesovim jednadžbama koji se koristi u mehanici fluida za proučavanje statičkih i dinamičkih svojstava fluida. Zbog zanemarivanja pojedinih karakteristika materijala, taj model, iako robustan, nije dostatan za opisivanje nekih specifičnih fenomena, primjerice utjecaja eritrocita na tok krvi u kapilarama, odnosno općenitije, efekta lokalnih pokreta čvrstih čestica raspršenih u fluidu na tok s malom karakterističnom dimenzijom ([44, 48]). Nedostatci klasičnog modela u takvim situacijama mogu se umanjiti dodavanjem novih varijabli koje opisuju mikroefekte u kontinuumu. Pri tome se osobito ističe model mikropolarnog fluida kojeg je uveo Ahmed Cemal Eringen 1964. u radu [35]. Taj ne-newtonovski fluid sačinjava viskozan medij u kojemu su nasumično raspršene čestice čije se deformacije zanemaruju ([48]).

Ideja da se uvaži mikrostruktura u modeliranju materijala postojala je i prije nego što je Eringen uveo mikropolarni kontinuum. Prvi model mikrokontinuuma opisala su braća Cosserat ([21, 78]). U njemu se pojavljuje devet dodatnih stupnjeva slobode u odnosu na klasični model fluida, što matematičku analizu čini vrlo kompliciranom i gotovo nemogućom. Upravo zato su takvi modeli dugo bili zanemareni u matematici, kao i u primjeni. Eringenov model u obzir uzima samo rotacije čestica što rezultira dodavanjem jednog dodatnog polja s tri stupnja slobode koje predstavlja brzinu mikrorotacije. Ta redukcija novouvedenih parametara učinila je ovaj model najznačajnijim i najkorištenijim poopćenjem klasičnog modela za opisivanje toka fluida s čestičnom strukturom jer dozvoljava svu uobičajenu matematičku analizu uz razumnu količinu dodatnog računa. Napori uloženi u složeniju analizu su opravdani jer je pokazano da taj model znatno bolje opisuje ponašanje fluida na mikrorazini ([67, 84]).

U mikropolarnom kontinuumu prisutna je mikroinercija pa je za razliku od klasičnog fluida, uz normalni tenzor naprezanja, za modeliranje naprezanja zbog međuodnosa čestica potrebno uvesti i drugi tenzor koji se naziva tenzor kontaktnog para. Normalni tenzor naprezanja ovdje nije simetričan što zajedno s prisutnošću unutarnjeg angularnog momenta koji dolazi od kontaktnog naprezanja za posljedicu ima netrivijalnost zakona očuvanja ukupnog angularnog momenta. S obzirom na to, mikropolarni model ima jednu dodatnu jednadžbu u odnosu na klasični. Zakoni očuvanja mase i momenta imaju istu tenzorsku formu kao i u klasičnom modelu, dok se zakon očuvanja energije mijenja zbog prisutnosti kinetičke energije uzrokovane mikrorotacijom, odnosno rada koji dolazi od intrinzičnog naprezanja i torzije ([48]). Osim u matematičkoj teoriji mehanike fluida, model je od velikog interesa i u drugim disciplinama čemu je osobito pridonio ubrzani razvoj nanotehnologije posljednjih godina. Model je uspješno primijenjen u strojarstvu kod istraživanja lubrikanata ([11, 15]), u biomedicinskom inženjerstvu za modeliranje bioloških tekućina ([43, 51]) te u modeliranju geofizikalnih procesa ([1]).

Osim uvođenja mikrostrukture, klasične modele mehanike fluida moguće je generalizirati i u termodinamičkom smislu preispitivanjem koncepata jednadžbe stanja kojom je opisana međuovisnost temperature, volumena i tlaka. Naime, pri modeliranju kompresibilnih fluida najčešće se pretpostavlja Clapeyronov idealizirani model karakteriziran jednadžbom stanja u kojoj je tlak proporcionalan umnošku temperature i gustoće mase. Taj se model smatra prihvatljivom aproksimacijom za opisivanje ponašanja plinova osobito pri nižoj gustoći ([20, 34]). Međutim, u mnogim slučajevima, primjerice u blizini kritičnih točaka ili ekstremnih vrijednosti varijabli sustava (niske temperature, velika gustoća, odnosno visoki tlak), ponašanje plinova značajno odstupa od onog predviđenog idealiziranim modelom. Stoga se nastoji pronaći nove modele koji bi bolje opisivali plinove u širem opsegu stanja sustava, ali mnogi su se prijedlozi pokazali nepraktičnima zbog kompleksnosti izraza i mnoštva parametara ([17]). Jedna od poznatijih generalizacija je klasa kubičnih jednadžbi stanja za koje se pokazalo da vjernije modeliraju realne plinove ([17, 69]).

U [37] je predložena generalizirana jednadžba stanja u kojoj je tlak proporcionalan umnošku apsolutne temperature i neke potencije gustoće mase, a koja bi po autorima trebala bolje opisivati ponašanje realnih plinova čim temperatura nije blizu apsolutnoj nuli. U slučaju klasičnog fluida, pokazalo se da ovaj model, iako složeniji, dopušta analizu prilagodbom postojećih i uvođenjem nekih novih tehnika ([24, 46, 73, 80]).

Kao što je ranije rečeno, odmak od idealiziranog modela osobito dobiva na važnosti u ekstremnim uvjetima, pa ga ima smisla primijeniti prilikom proučavanja modela toka i termalne eksplozije reaktivnog fluida koji opisuje ponašanje mješavine plinova tijekom kemijske reakcije ([12, 46, 70]). Pripadni sustav nastaje proširenjem klasičnog na način da se uvede nova varijabla koja predstavlja maseni udio goriva i nove jednadžbe koja opisuje dinamiku kemijske reakcije, a potrebno je prilagoditi zakon očuvanja energije tako da se u obzir uzme i promjena temperature prilikom izgaranja ([12, 70, 74]).

Analiza mikropolarnog fluida isprva je uglavnom bila usmjerena na stacionarni i inkompresibilni slučaj ([48]), a tek krajem dvadesetog stoljeća Nermina Mujaković započinje s matematičkom analizom nestacionarnog kompresibilnog mikropolarnog fluida. U svom prvom radu [54] je pokazala da model jednodimenzionalnog toka idealnog mikropolarnog plina ima generalizirano rješenje lokalno po vremenu te da je ono jedinstveno. Kasnije je dokazala i globalnu egzistenciju ([53]) te neka dodatna svojstva poput regularnosti i stabilizacije ([55, 60]). Numerička metoda za rješavanje problema predstavljena je u [61], a u [56, 64–66] je analiziran Cauchyjev problem. Trodimenzionalni model analiziran je uz pretpostavke sferne ([27–29, 33, 57, 59]) i cilindrične simetrije ([30–32, 40, 63]). Numerička analiza bazirana na Faedo-Galerkinovoj metodi obrađena je u [23, 26, 31, 61], a na metodi konačnih razlika u [23, 58, 59, 62]. Aktualna su i istraživanja o nekim specijalnim klasama mikropolarnih fluida, primjerice magneto-mikropolarnim fluidima ([85]), te poopćenjima kao što su fluidi s nekonstantnim koeficijentima (mikro)viskoznosti ([19, 85]).

Generalizirana jednadžba stanja plina primijenjena je na modelu klasičnog ([24, 50, 72, 73, 79–81, 83]) i reaktivnog plina ([46, 71, 73]). U tim istraživanjima proučavana je globalna egzistencija i asimptotsko ponašanje rješenja dok su nimalo trivijalni teoremi o egzistenciji rješenja lokalno u vremenu, na kojima se temelje dokazi tih rezultata, tek naslućeni i navedeni bez dokaza, pozivajući se pritom na odgovarajuće rezultate za slične, ali znatno jednostavnije modele. Također, problem klasičnog i mikropolarnog realnog reaktivnog fluida još uvijek nije analiziran numerički.

Osnovni predmet interesa ove disertacije je jednodimenzionalan tok kompresibilnog viskoznog mikropolarnog realnog plina, pri čemu dodatno pretpostavljamo da je plin u termodinamičkom smislu politropan. Ranije je tok kompresibilnog mikropolarnog fluida s uključenom temperaturom promatran isključivo za idealni plin. Glavni cilj ove disertacije je izvesti model jednodimenzionalnog toka viskoznog toplinski provodljivog realnog mikropolarnog plina i model jednodimenzionalnog toka i termalne eksplozije viskoznog toplinski provodljivog reaktivnog realnog mikropolarnog plina u cijevi s čvrstim i toplinski izoliranim stijenkama te definirati generalizirano rješenje i dokazati da ono postoji i jedinstveno je. Sekundarni cilj je formiranje i testiranje numeričke metode za opisani problem te ispitivanje utjecaja mikropolarnosti i generalizirane jednadžbe stanja na ponašanje fluida. Dijelovi disertacije već su objavljeni kao znanstveni članci ([7–10]).

Disertacija je strukturirana na sljedeći način. U prvom poglavlju dan je pregled matematičkih alata koji se koriste u dokazima. U drugom poglavlju je izveden model jednodimenzionalnog toka viskoznog realnog mikropolarnog plina koji provodi toplinu kroz cijev s čvrstim i termički izoliranim stijenkama u masenim Lagrangeovim koordinatama iz općeg trodimenzionalnog modela u Eulerovim koordinatama. Zatim je izvedeni model primijenjen u slučaju reaktivnog fluida čime je formiran model jednodimenzionalnog toka i termalne eksplozije viskoznog reaktivnog realnog mikropolarnog plina koji provodi toplinu kroz cijev s čvrstim i termički izoliranim stijenkama. U trećem poglavlju razmatra se problematika egzistencije i jedinstvenosti rješenja početno-rubnog problema za model jednodimenzionalnog toka viskoznog realnog mikropolarnog plina. Definira se pojam generaliziranog rješenja, konstruira niz aproksimativnih rješenja za dobiveni početno-rubni problem pomoću kojih se onda dokazuje teorem o egzistenciji lokalno u vremenu. Zatim je dokazano da je generalizirano rješenje jedinstveno te da se može proširiti na proizvoljan vremenski interval, odnosno da postoji globalno po vremenu. U četvrtom poglavlju, tehnike razrađene u trećem poglavlju, uz prilagodbu gdje je to potrebno, se primjenjuju za dokazivanje rezultata o lokalnoj i globalnoj egzistenciji te jedinstvenosti generaliziranog rješenja početno-rubnog problema za model jednodimenzionalnog toka i termalne eksplozije viskoznog reaktivnog realnog mikropolarnog plina. U petom poglavlju opisan je algoritam za numeričko rješavanje početno-rubnog problema temeljen na aproksimativnim rješenjima definiranim u trećem poglavlju te su prezentirani rezultati numeričkih testova.

U ovoj disertaciji koriste se neke ideje, strategije i tehnike za matematičku analizu sustava kvazilinearnih paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s pridruženim odgovarajućim početnim i homogenim rubnim uvjetima koji modelira jednodimenzionalni tok fluida iz opće matematičke literature (parcijalne i obične diferencijalne jednadžbe, funkcionalna analiza, matematička teorija mehanike fluida), kao i radova iz užeg područja disertacije (modeli mikropolarnog i reaktivnog fluida te realnog plina). Za računalnu implementaciju numeričkog algoritma koristi se programski jezik Python. Glavni rezultati bit će iskazani u teoremima, a njihovi dokazi podijeljeni u niz koraka iskazanih i dokazanih u obliku lema i propozicija.

1. POMOĆNI REZULTATI

U ovom poglavlju dan je pregled matematičkih alata korištenih u ovom radu. Najprije je dan pregled prostora funkcija u kojima se traži rješenje, a najvažniji za istaknuti su L^p prostori, prostori Soboljeva i evolucijski prostori. Navodimo i neka njihova svojstva, primjerice nejednakosti i ulaganja. Poseban odjeljak je posvećen definiranju različitih vrsta konvergencija te teorema o kompaktnosti koji su ključni alat u dokazu egzistencije rješenja. Budući da se većina dokaza u ovom radu svodi na ocjenjivanje odgovarajućih funkcija, dan je i detaljan pregled svih korištenih nejednakosti. Naposljetku, navedeno je nekoliko teorema o običnim diferencijalnim jednadžbama te opisana Faedo-Galerkinova metoda. Naime, korištenjem te metode, konstruira se aproksimativni problem za promatrani početno-rubni problem u obliku sustava običnih diferencijalnih jednadžbi kojega je potrebno analizirati.

1.1. PROSTORI FUNKCIJA

U prvom dijelu navodimo važne koncepte i rezultate o prostorima funkcija korištenima u ovom radu ([2, 36, 38]).

Neka je Ω dovoljno regularan, otvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^d$. Kažemo da izmjeriva funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pripada prostoru $L^p(\Omega)$, za $p \geq 1$ ako vrijedi

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1.1}$$

odnosno prostoru $L^\infty(\Omega)$ ako vrijedi

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty. \tag{1.2}$$

Za $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ je Banachov prostor s normom $||\cdot||_{L^p(\Omega)}$. Za razliku od ostalih L^p prostora, prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertov, pri čemu je skalarni produkt koji inducira normu $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ dan s

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx. \tag{1.3}$$

Za $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ je separabilan, a za $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ je refleksivan. Dual prostora $L^p(\Omega)$, za $1 \leq p < \infty$ (oznaka $\big(L^p(\Omega)\big)'$), je izometrički izomorfan prostoru $L^{p'}(\Omega)$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Za L^p prostore vrijedi Hölderova nejednakost.

Propozicija 1.1.1 (Hölder, [38])**.** Neka su $p, p' \in [1, \infty]$ takvi da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Ako su f i g izmjerive na $[a,b]$, onda vrijedi

$$||fg||_{L^1(a,b)} \leq ||f||_{L^p(a,b)} \cdot ||g||_{L^{p'}(a,b)}. \tag{1.4}$$

Kažemo da izmjeriva funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pripada prostoru $H^k(\Omega)$, za $k \in \mathbf{N}$ ako vrijedi

$$||f||_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f(x)||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{1.5}$$

gdje je $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbf{N}_0^d$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, multiindeks i $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, a

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}} \tag{1.6}$$

parcijalna derivacija od f u slabom smislu. Prostori $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbf{N}$, su separabilni Hilbertovi (pa stoga i refleksivni) prostori s normom $|| \cdot ||_{H^k}$ koju inducira skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}, \tag{1.7}$$

te pripadaju klasi funkcijskih prostora koje nazivamo Soboljevljevima.

Radi kratkoće zapisa uvodimo sljedeće pojednostavljene oznake koje ćemo koristiti u ostatku ovog rada

$$L^p(]a,b[) = L^p(a,b), \quad H^k(]a,b[) = H^k(a,b), \quad ||f|| = ||f||_{L^2(a,b)}. \tag{1.8}$$

S $C_c^\infty(\Omega)$ označavamo skup svih beskonačno puta diferencijabilnih funkcija s kompaktnim nosačem u Ω koji je gust u $L^2(\Omega)$. S $H_0^k(\Omega)$ označavamo zatvarač od $C_c^\infty(\Omega)$ u $H^k(\Omega)$, a čine ga sve funkcije iz $H^k(\Omega)$ čiji je trag nula. Tragom nazivamo operator kojim se proširuje pojam vrijednosti funkcije na rubu domene u slučaju funkcija koje nisu neprekidne.

U sljedećoj propoziciji iskazan je poseban slučaj dviju poznatih nejednakosti, Poincaréove i Gagliardo-Ladyzhenskayine nejednakosti, te nejednakost koja je njihova direktna posljedica.

Propozicija 1.1.2 (Poincaré, [36]; Gagliardo-Ladyzhenskaya, [45])**.** Neka je $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ i neka vrijedi barem jedan od sljedećih uvjeta

1. $f \in H_0^1(a,b)$,

2. $f \in H^1(a,b)$ i $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Tada vrijedi

$$||f|| \leq C||f'||, \tag{1.9}$$

$$||f||^2_{L^\infty(a,b)} \leq C||f|| \cdot ||f'||, \tag{1.10}$$

$$||f||_{L^\infty(a,b)} \leq C||f'||, \tag{1.11}$$

gdje je C konstanta koja ne ovisi o f.

S $\overline{\Omega}$ označavamo zatvarač skupa Ω. Prostor $C(\overline{\Omega})$ čine sve neprekidne funkcije, a $C^1(\overline{\Omega})$ sve neprekidno diferencijabilne funkcije na $\overline{\Omega}$. Prostor $C(\overline{\Omega})$ opskrbljen normom

$$||f||_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| \tag{1.12}$$

je Banachov, kao i $C^1(\overline{\Omega})$ opskrbljen normom

$$||f||_{C^1} = \max\left\{||f||_\infty, ||\partial_1 f||_\infty, \ldots, ||\partial_d f||_\infty\right\}. \tag{1.13}$$

1.1.1. Evolucijski prostori

U ovom radu obrađujemo nestacionaran problem čija rješenja su elementi prostora koje nazivamo evolucijskim. Ti su prostori poseban slučaj Bochnerovih prostora koji generaliziraju L^p prostore na funkcije koje poprimaju vrijednosti u općem Banachovom prostoru. Domena evolucijskog prostora je podskup skupa realnih brojeva i vrijednosti u njoj interpretiraju se kao vremenski trenutci. Definicije i rezultati iz ovog odjeljka preuzeti su iz [25, 36].

Neka je X realan Banachov prostor s normom $||\cdot||_X$. Evolucijske prostore $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ čine izmjerive funkcije $f :]0,T[\to X$ za koje vrijedi

$$||f||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||f(t)||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1.14}$$

odnosno

$$||f||_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in]0,T_0[} ||f(t)||_X < \infty. \tag{1.15}$$

Ti prostori opskrbljeni normama $||f||_{L^p(0,T;X)}$ su Banachovi.

$C([0,T];X)$ je skup svih neprekidnih funkcija $f : [0,T] \to X$ koji zajedno s normom

$$||f||_{C([0,T];X)} := \sup_{t \in [0,T]} ||f(t)||_X \tag{1.16}$$

čini Banachov prostor.

Ako je X Hilbertov prostor, onda je $L^2(0,T;X)$ također Hilbertov. Za $1 \leq p < \infty$, dual prostora $L^p(0,T;X)$, $\left(L^p(0,T;X)\right)'$ je izometrički izomorfan prostoru $L^{p'}(0,T;X')$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, a X' dual od X. Za $1 \leq p < \infty$, $L^p(0,T;X)$ je separabilan ako je X separabilan, a za $1 < p < \infty$, $L^p(0,T;X)$ je refleksivan ako je X refleksivan.

Skup svih funkcija $f \in L^2(0,T;X)$ takvih da derivacija f' postoji u slabom smislu i da vrijedi $f' \in L^2(0,T;X)$ označavamo s $H^1(0,T;X)$. Prostor $H^1(0,T;X)$ opskrbljen normom

$$||f||_{H^1(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||f(t)||_X^2 + ||f'(t)||_X^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

je Banachov.

1.1.2. Ulaganja prostora

Važno svojstvo prostora Soboljeva su njihova ulaganja (oznaka $\hookrightarrow$) u druge prostore funkcija. Nekoliko rezultata koji će se koristiti u ovom radu su navedeni u nastavku.

Propozicija 1.1.3 ([2])**.** Vrijedi:

1. $H^1(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$,
2. $H^2(a,b) \hookrightarrow C^1([a,b])$,
3. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otvoren ograničen skup s dovoljno glatkim rubom,

pri čemu su sva navedena ulaganja kompaktna.

Koristimo i sljedeća ulaganja evolucijskih prostora.

Propozicija 1.1.4 ([36])**.** Neka je $u \in H^1(0,T;X)$. Tada je $u \in C([0,T];X)$.

Propozicija 1.1.5 ([36])**.** Neka je k nenegativan cijeli broj, Ω otvoren, ograničen s glatkim rubom i neka je $u \in L^2(0,T;H^{k+2}(\Omega))$ te $u' \in L^2(0,T;H^k(\Omega))$. Tada je $u \in C([0,T];H^{k+1}(\Omega))$.

1.2. KONVERGENCIJE U PROSTORIMA FUNKCIJA

Definicije i rezultati u ovom odjeljku preuzeti su iz [2, 38, 75], a korišteni su u dokazu lokalne egzistencije za konstrukciju rješenja problema kao limesa niza aproksimacija.

Neka je X Banachov prostor s normom $||\cdot||_X$ te neka je X' njegov dual. Kažemo da niz (f^n) u X konvergira

1. jako (u normi) k $f \in X$ (oznaka $f^n \to f$) ako $||f^n - f||_X \to 0$, kad $n \to \infty$,

2. slabo k $f \in X$ (oznaka $f^n \rightharpoonup f$) ako za svaki $F \in X'$, $F(f^n) \to F(f)$, kad $n \to \infty$.

Svaki jako konvergentan niz je i slabo konvergentan.

Kažemo da niz (f^n) konvergira uniformno k $f \in X$ (oznaka $f^n \rightrightarrows f$) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i svaki $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Kažemo da niz (F^n) u X' konvergira slabo* k $F \in X'$ ($F^n \overset{*}{\rightharpoonup} F$) ako za svaki $f \in X$, $F^n(f) \to F(f)$, kad $n \to \infty$.

Problem koji se obrađuje u ovom radu je nelinearan pa će biti potrebno koristiti rezultate o umnošku konvergentnih nizova funkcija.

Lema 1.2.1. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omeđen.

1. Ako $f^n \to f$ u $C(\overline{\Omega})$ i $g^n \rightharpoonup g$ u $L^2(\Omega)$, tada $f^n g^n \rightharpoonup fg$ u $L^2(\Omega)$.

2. Ako $f^n \to f$ u $C(\overline{\Omega})$, $g^n \rightharpoonup g$ u $L^2(\Omega)$ i $h^n \to h$ u $L^2(\Omega)$ tada $f^n g^n h^n \rightharpoonup fgh$ u $L^2(\Omega)$.

Dokaz.

1. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Korištenjem Hölderove nejednakosti i činjenice da je svaki slabo konvergentan niz ograničen, dobivamo

$$\begin{aligned} |\langle f^n g^n - fg, \varphi\rangle_\Omega| &\leq |\langle f^n - f, g^n\varphi\rangle_\Omega| + |\langle g^n - g, f\varphi\rangle_\Omega| \\ &\leq ||f^n - f||_\infty \cdot ||g^n|| \cdot ||\varphi|| + |\langle g^n - g, f\varphi\rangle_\Omega| \to 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

2. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Korištenjem Hölderove nejednakosti, činjenice da je svaki slabo konvergentan niz ograničen i tvrdnje 1 ove leme, dobivamo

$$\begin{aligned} |\langle f^n g^n h^n - fgh, \varphi\rangle_\Omega| &\leq |\langle h^n - h, f^n g^n\varphi\rangle_\Omega| + |\langle f^n g^n - fg, h\varphi\rangle_\Omega| \\ &\leq ||\varphi||_\infty \cdot ||h^n - h|| \cdot ||f^n g^n|| + |\langle f^n g^n - fg, h\varphi\rangle_\Omega| \to 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

■

Propozicija 1.2.2 (Banach-Alaoglu, [75]). Neka je X normiran vektorski prostor. Svaki ograničen niz (F_n) u X' ima slabo* konvergentan podniz.

Sljedeća propozicija je direktna posljedica Banach–Alaogluovog teorema primijenjenog na dual X' refleksivnog Banachovog prostora X, budući da je u tom slučaju $X = (X')' = X''$ te se slabo-* topologija na X'' podudara sa slabom topologijom na X.

Propozicija 1.2.3 ([36]). Neka je X refleksivan Banachov prostor. Svaki ograničen niz (f_n) u X ima slabo konvergentan podniz.

Kažemo da je niz funkcija (f^n), gdje je $f^n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ekvineprekidan u $\mathbf{x} \in \Omega$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbf{y} \in \Omega$ vrijedi

$$||x - y|| < \delta \implies |f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon. \tag{1.20}$$

Propozicija 1.2.4 (Arzelà–Ascoli, [75]). Neka je $S \subset \mathbb{R}^d$ kompaktan. Ako je niz (f^n), $f^n : S \to \mathbb{R}$, ekvineprekidan u $\mathbf{x}$, za svaki $\mathbf{x} \in S$, i ako postoji $M > 0$ takav da za sve $\mathbf{x} \in S$ i $n \in \mathbf{N}$, vrijedi $|f^n(x)| \leq M$, onda (f^n) ima uniformno konvergentan podniz.

Budući da se u dokazu egzistencije početne funkcije aproksimiraju Fourierovim polinomom, potreban nam je i sljedeći rezultat.

Propozicija 1.2.5 ([38]). Neka je $f \in L^2([-1,1]^d)$, gdje je $[-1,1]^d$ kocka u $\mathbb{R}^d$. Tada Fourierov red od f konvergira jako (u normi L^2) k f.

1.3. NEJEDNAKOSTI

U ovom dijelu navodimo nekoliko općih nejednakosti koje će često biti korištene u ovom radu. U sljedećoj propoziciji iskazana je poznata Youngova nejednakost.

Propozicija 1.3.1 (Young, [38]). Neka je $a, b \geq 0$ i $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Tada vrijedi

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}. \tag{1.21}$$

U sljedećoj lemi dana je jedna posljedica Youngove nejednakosti koja će biti korištena u ovom radu.

Lema 1.3.2. Neka je $m \geq 1$, $\gamma = \max\{4, m\}$ i $\beta \geq 0$. Tada vrijedi

$$\beta^4 \leq C(1+\beta^\gamma), \quad \beta^8 \leq C(1+\beta^{2\gamma}), \quad \beta^{2m} \leq C(1+\beta^{2\gamma}). \tag{1.22}$$

Dokaz. Ako je $m = 4$, nejednakosti trivijalno vrijede.

Ako je $m < 4$, onda Youngova nejednakost (1.21) s parametrima $q = \frac{4}{m}$, $q' = \frac{4}{4-m}$ daje $\beta^{2m} \leq C(1+\beta^{2\gamma})$ dok preostale nejednakosti trivijalno vrijede.

Ako je $m > 4$, onda Youngova nejednakost (1.21) s parametrima $q = \frac{m}{4}$, $q' = \frac{m}{m-4}$ daje $\beta^4 \leq C(1+\beta^\gamma)$ i $\beta^8 \leq C(1+\beta^{2\gamma})$ dok preostala nejednakost trivijalno vrijedi. ■

U sljedećoj propoziciji iskazana je integralna Jensenova nejednakost.

Propozicija 1.3.3 (Jensen, [52]). Ako je φ konveksna funkcija na $[a,b]$, a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, onda vrijedi

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx. \tag{1.23}$$

U nastavku navodimo poznatu Grönwallovu nejednakost i nekoliko njezinih varijanti i generalizacija koje se koriste u ovom radu.

Propozicija 1.3.4 (Grönwall, [4]). Neka su u, f, g, h nenegativne neprekidne funkcije definirane na $[a,b]$ i neka vrijedi

$$u(x) \leq f(x) + g(x)\int_a^x h(t)u(t)dt, \quad x \in [a,b]. \tag{1.24}$$

Tada je

$$u(x) \leq f(x) + g(x)\int_a^x f(t)h(t)\exp\left(\int_t^x g(s)h(s)ds\right)dt, \quad x \in [a,b]. \tag{1.25}$$

Diferencijalna forma Grönwallove nejednakosti dana je u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.3.5 (Grönwall, [36]). Neka je u nenegativna apsolutno neprekidna funkcija na $[a,b]$, a f i g nenegativne sumabilne[1] na $[a,b]$. Ako vrijedi

$$u'(x) \leq f(x) + g(x)u(x), \tag{1.26}$$

za skoro sve $x \in [a,b]$ onda je

$$u(x) \leq \left(u(a) + \int_a^x f(t)dt\right) \exp\left(\int_a^x g(t)dt\right), \quad x \in [a,b]. \tag{1.27}$$

Sljedeća propozicija je verzija Grönwallove nejednakosti za izmjerive funkcije.

Propozicija 1.3.6 (Grönwall, [13]). Neka su u, f, g, h realne izmjerive funkcije definirane na $[a,b]$, takve da su fh, gh i uh integrabilne. Ako su f, g i h nenegativne te vrijedi

$$u(x) \leq f(x) + g(x) \int_a^x h(t)u(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{1.28}$$

onda vrijedi

$$u(x) \leq f(x) + g(x) \int_a^x f(t)h(t) \exp\left(\int_t^x g(s)h(s)ds\right) dt \tag{1.29}$$

skoro svuda na $[a,b]$.

U ovom radu koristimo i jednu nelinearnu generalizaciju Grönwallove nejednakosti koja spada u klasu nejednakosti poznatih pod imenom Bihari-LaSalle. U ovom slučaju nelinearna ovisnost se javlja u obliku potencije.

Propozicija 1.3.7 (Bihari-LaSalle, [77]). Neka je $n_0 \geq 2$ cijeli broj, x, a, b i k neprekidne i nenegativne funkcije na $J = [\alpha, \beta]$ takve da je $\frac{a}{b}$ neopadajuća. Ako je

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_\alpha^t k(s)x^{n_0}(s)ds, \quad t \in J,$$

tada vrijedi

$$x(t) \leq a(t) \left[1 - (n_0 - 1) \int_\alpha^t k(s)b(s)a^{n_0-1}(s)ds\right]^{\frac{1}{1-n_0}}, \quad \alpha \leq t \leq \beta_{n_0},$$

gdje je

$$\beta_{n_0} = \sup\left\{t \in J : (n_0 - 1) \int_\alpha^t kba^{n_0-1}ds < 1\right\}. \tag{1.30}$$

[1] Sumabilna funkcija je integrabilna funkcija čiji je integral konačan.

U sljedećoj propoziciji iskazane su Cauchy-Schwarzova i Besselova nejednakost za Hilbertove prostore. U nastavku s $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ označavamo skalarni produkt na Hilbertovom prostoru H, a s $||\cdot||_H$ normu koja je njime generirana tj. $||x||_H = \sqrt{\langle x,x\rangle_H}$, za sve $x \in H$.

Lema 1.3.8 (Cauchy-Schwarz, [38]). Neka je H Hilbertov prostor. Tada za svaki $x, y \in H$ vrijedi

$$|\langle x,y\rangle_H| \leq ||x||_H||y||_H. \tag{1.31}$$

Lema 1.3.9 (Bessel, [38]). Neka je (u_n) ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru H. Tada za svaki $x \in H$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x,u_n\rangle_H|^2 \leq ||x||_H^2. \tag{1.32}$$

U nastavku su dane dvije algebarske nejednakosti koje se koriste u dokazu globalne egzistencije rješenja. Prva od dviju nejednakosti preuzeta je iz [28].

Lema 1.3.10 ([28]). Nejednakost

$$\begin{aligned}(A_1-A_2)(a_1+a_2+a_3)^2+(A_3-A_1)a_3(a_1+a_2+a_3) &\geq (A_3-3A_2)a_3^2 \\ -a_1^2\left(2A_2+\frac{(A_1-2A_2+A_3)^2}{4A_2}\right)-\frac{a_2^2}{2A_2}&\left((A_1-A_2)^2+\frac{(A_1-2A_2+A_3)^2}{2}\right)\end{aligned} \tag{1.33}$$

vrijedi za $A_1, A_2, A_3, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, takve da je $A_1 > A_2 > 0$.

Lema 1.3.11. Nejednakost

$$\begin{aligned}(A_1-A_2)(a_1+a_2+a_3+a_4)^2+(A_3-A_1)a_3(a_1+a_2+a_3+a_4)& \\ +(A_4-A_1)a_4(a_1+a_2+a_3+a_4)& \\ \geq -\frac{a_1^2}{4A_2}\left[4(A_1-A_2)^2+(A_1-2A_2+A_3)^2+(A_1-2A_2+A_4)^2\right]& \\ -\frac{a_2^2}{4A_2}\left[4A_2^2+(A_1-2A_2+A_3)^2+(A_1-2A_2+A_4)^2\right]+a_3^2\left[A_3-4A_2\right]& \\ +a_4^2\left[A_4-\left(3A_2+\frac{(A_3-2A_2+A_4)^2}{4A_2}\right)\right]&\end{aligned} \tag{1.34}$$

vrijedi za $A_1, A_2, A_3, A_4, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, takve da je $A_1 > A_2 > 0$.

Dokaz. Direktnim računom dobiva se

$$\begin{aligned}
&(A_1-A_2)(a_1+a_2+a_3+a_4)^2+(A_3-A_1)a_3(a_1+a_2+a_3+a_4)\\
&\qquad\qquad +(A_4-A_1)a_4(a_1+a_2+a_3+a_4)\\
&= a_1^2\left[A_1-A_2-\frac{(A-A_2)^2}{A_2}-\frac{(A-2A_2+A_3)^2}{4A_2}-\frac{(A-2A_2+A_4)^2}{4A_2}\right]\\
&\qquad +a_2^2\left[A_1-2A_2-\frac{(A-2A_2+A_3)^2}{4A_2}-\frac{(A-2A_2+A_4)^2}{4A_2}\right]\\
&\qquad +a_3^2(A_3-4A_2)+a_4^2\left[A_4-3A_2-\frac{(A_3-2A_2+A_4)^2}{4A_2}\right]\\
&\quad +\left(\frac{A_1-A_2}{\sqrt{A_2}}a_1+\sqrt{A_2}a_2\right)^2+\left(\frac{A_1-2A_2+A_3}{2\sqrt{A_2}}a_1+\sqrt{A_2}a_3\right)^2\\
&+\left(\frac{A_1-2A_2+A_4}{2\sqrt{A_2}}a_1+\sqrt{A_2}a_4\right)^2+\left(\frac{A_1-2A_2+A_3}{2\sqrt{A_2}}a_2+\sqrt{A_2}a_3\right)^2\\
&+\left(\frac{A_1-2A_2+A_4}{2\sqrt{A_2}}a_2+\sqrt{A_2}a_4\right)^2+\left(\frac{A_3-2A_2+A_4}{2\sqrt{A_2}}a_4+\sqrt{A_2}a_3\right)^2\\
&\quad\geq -\frac{a_1^2}{4A_2}\left[4(A_1-A_2)^2+(A_1-2A_2+A_3)^2+(A_1-2A_2+A_4)^2\right]\\
&-\frac{a_2^2}{4A_2}\left[4A_2^2+(A_1-2A_2+A_3)^2+(A_1-2A_2+A_4)^2\right]+a_3^2\left[A_3-4A_2\right]\\
&\qquad +a_4^2\left[A_4-\left(3A_2+\frac{(A_3-2A_2+A_4)^2}{4A_2}\right)\right].
\end{aligned}\tag{1.35}$$

■

1.4. OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

U ovom dijelu navodimo nekoliko rezultata iz područja običnih diferencijalnih jednadžbi. Najprije je iskazan Picardov teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja početnog problema za sustav običnih diferencijalnih jednadžbi.

Propozicija 1.4.1 (Picard, [68])**.** Neka su $f_i = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, neprekidne funkcije na $[0,T] \times R$, gdje je $R = [a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$ i $y^0 \in R$. Ako su f_i Lipschitzove po obzirom na varijable $y_1, y_2, \ldots, y_n$, odnosno ako postoji konstanta $L > 0$ takva da za sve $(t, y_1, \ldots, y_{i-1}, \hat{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$, $(t, y_1, \ldots, y_{i-1}, \hat{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in [0,T] \times R$ vrijedi

$$|f(t, y_1, \ldots, y_{i-1}, \hat{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) - f(t, y_1, \ldots, y_{i-1}, \bar{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)| \leq L|\hat{y}_i - \bar{y}_i|. \tag{1.36}$$

Tada postoji $0 < T_0 \leq T$ takav da početni problem

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i(0) &= y_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.37}$$

ima jedinstveno rješenje na $[0, T_0]$.

Sljedeća propozicija daje uvjete pod kojima je rješenje početnog problema maksimalno proširivo.

Propozicija 1.4.2 (O apriornim ocjenama, [68])**.** Ako je rješenje početnog problema (1.37) pri čemu su f_i, $i = 1, \ldots, d$, neprekidne na cilindru $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, ograničeno na svom maksimalnom intervalu egzistencije, onda je maksimalan interval egzistencije $[0,T]$.

U nastavku je iskazan jedan rezultat o diferencijalnim nejednakostima.

Neka je $f = f(t,x)$ neprekidna funkcija na $[0,T] \times [a,b]$ i $y_0 \in [a,b]$ i neka je r rješenje početnog problema

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

na intervalu $[0,T]$. Kažemo da je r maksimalno rješenje od (1.38) ako za svako rješenje z od (1.38) na $[0,T]$ vrijedi nejednakost $r(t) \geq z(t)$, $\forall t \in [0,T]$.

Propozicija 1.4.3 (O diferencijalnim nejednakostima, [68])**.** Neka je r maksimalno rješenje početnog problema (1.38) i neka y zadovoljava diferencijalnu nejednakost

$$y'(t) \leq f(t, y(t)), \ \forall t \in [0,T], \quad y(0) \leq y_0. \tag{1.39}$$

Tada vrijedi $r(t) \geq y(t)$, $\forall t \in [0,T]$.

1.5. Faedo-Galerkinova metoda

U ovom dijelu opisujemo ideju Faedo-Galerkinove metode za konstrukciju aproksimativnih rješenja paraboličnog početno-rubnog problema koja se koristi u dokazu lokalne egzistencije ([36]).

Neka je zadan opći parabolički problem na $[a,b]\times[0,T]$

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= f \\ u = 0, \quad x = a \text{ ili } x &= b \\ u = u_0, \quad t &= 0, \end{aligned} \tag{1.40}$$

gdje je A uniformno eliptični diferencijalni operator po prostornoj varijabli za svaki fiksni $0 \leq t \leq T$. Neka je $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortogonalna baza za $L^2(a,b)$ i $H_0^1(a,b)$. Za svaki $n\in\mathbb{N}$, aproksimativno rješenje u^n definira se izrazom

$$u^n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} z_i^n(t) w_i(x), \tag{1.41}$$

gdje su z_i^n nepoznate funkcije rješenja sustava dobivenog projekcijom problema (1.40) na konačnodimenzionalan prostor razapet funkcijama $\{w_i\}_{i=1}^n$, odnosno,

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u^n + Au^n, w_i\rangle &= \langle f, w_i\rangle, \quad i = 1,\ldots,n, \\ \langle u^n(0), w_i\rangle &= \langle u_0, w_i\rangle, \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{1.42}$$

U ovom radu koristimo ortogonalne baze $\{\sin(\pi i x)\}_{i=1}^{\infty}$ i $\{\cos(\pi i x)\}_{i=0}^{\infty}$, pritom, bazu kosinusa koristimo u slučaju kada umjesto Dirichletovog rubnog uvjeta, zadani problem zadovoljava Neumannov rubni uvjet $\partial_x u = 0$, za $x = a,b$.

2. IZVOD MODELA

U ovom poglavlju izvodimo model jednodimenzionalnog toka kompresibilnog realnog mikropolarnog fluida koji provodi toplinu i koji je u termodinamičkom smislu politropan. Izvedeni model zatim primjenjujemo na modelu reaktivnog fluida u kojem osim toka razmatramo i promjene u kvalitativnom sastavu fluida koje se događaju uslijed kemijske reakcije, specijalno, promjene varijable koja predstavlja udio neizgorene tvari u ukupnoj masi fluida.

Modelom mikropolarnog fluida opisano je ponašanje fluida s mikrostrukturom na način da se uz klasične hidrodinamičke i termodinamičke varijable: gustoću mase, brzinu i apsolutnu temperaturu, razmatra i brzina mikrorotacije čestica. Opširan pregled matematičkog modela dan je u [48] te je zapis općeg modela, kao i većina oznaka korištenih u ovom radu preuzeta otud. U literaturi na hrvatskom jeziku model se spominje jako rijetko. Kratak opis je dan u [3], odakle je preuzeta i nomenklatura u ovom radu.

Tok mikropolarnog fluida na domeni $Q_T = \Omega \times]0,T[$, gdje je $T > 0$ i $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, opisan je zakonima očuvanja, i to

- zakonom očuvanja mase

$$\dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{2.1}$$

- zakonom očuvanja momenta

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \tag{2.2}$$

- zakonom očuvanja angularnog momenta

$$\rho \dot{\mathbf{l}} = \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{T}_x + \rho \mathbf{g}, \tag{2.3}$$

- zakonom očuvanja energije

$$\dot{E} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{C} : \nabla \boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_x \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{2.4}$$

gdje su ρ i E skalarna polja koja predstavljaju gustoću mase i unutarnju energiju, a $\mathbf{v}$ i $\boldsymbol{\omega}$ vektorska polja brzine, odnosno mikrorotacijske brzine. $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_{ij}]$ i $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{ij}]$ su oznake za tenzor naprezanja, odnosno tenzor kontaktnog para. Funkcija $\mathbf{f}$ je gustoća volumne sile, a $\mathbf{g}$ gustoća volumnog para. S $\mathbf{l}$ označavamo specifični spin, a s $\mathbf{q}$ toplinski fluks.

Točkasti diferencijalni operator na lijevoj strani jednadžbi (2.1)-(2.4) označava materijalnu derivaciju i na vektorsko polje $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x},t) = [b_i(\mathbf{x},t)]_i$ djeluje kao

$$\dot{\mathbf{b}} = \partial_t \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \tag{2.5}$$

gdje je $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ pozicija čestice u vremenskom trenutku t, $\partial_t \mathbf{b} = [\partial_t b_i]_i$, $\nabla \mathbf{b} = [\partial_j b_i]_{ij}$ i $\partial_j = \partial_{x_j}$, a $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ je brzina toka. U slučaju skalarnog polja $b = b(\mathbf{x},t)$ materijalna derivacija je dana s

$$\dot{b} = \partial_t b + (\nabla) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \tag{2.6}$$

gdje je $\nabla b = [\partial_i b]_i$. Vektor $\mathbf{T}_x$ predstavlja aksijalni vektor i po komponentama je dan s

$$\mathbf{T}_x = [\varepsilon_{ijk} \mathbf{T}_{jk}]_i, \tag{2.7}$$

gdje je ε_{ijk} Levi-Civita simbol. Ovdje i u nastavku podrazumijevamo Einsteinovu notaciju za sumaciju. S : je označen skalarni produkt tenzora, specijalno imamo

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{T}_{ji} \partial_j v_i. \tag{2.8}$$

Specifični spin mikropolarnog fluida dan je s

$$\mathbf{l} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \tag{2.9}$$

gdje je $\mathbf{J}$ tenzor mikroinercije. U ovom radu razmatrat ćemo slučaj homogenog izotropnog mikropolarnog fluida što znači da tenzor mikroinercije ima sljedeću formu

$$\mathbf{J} = j_I \mathbf{I}, \tag{2.10}$$

gdje je j_I $\left[\mathrm{m}^2\right]$ pozitivna konstanta koju nazivamo gustoćom mikroinercije, a $\mathbf{I}$ jedinični tenzor.

Pretpostavljamo da je fluid politropan u termodinamičkom smislu, odnosno da je unutarnja energija dana s

$$E = c_v \theta, \tag{2.11}$$

gdje je θ skalarno polje i predstavlja apsolutnu temperaturu fluida, a pozitivna konstanta c_v $\left[\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}\mathrm{K}^{-1}\right]$ je specifična toplina pri konstantnom volumenu.

Nadalje, pretpostavljamo da fluid provodi toplinu, odnosno da vrijedi Fourierov zakon za toplinski fluks

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla \theta, \tag{2.12}$$

gdje je pozitivna konstanta κ $\left[\text{kg m s}^{-3}\text{K}^{-1}\right]$ koeficijent toplinske provodljivosti.

Konstitutivne jednadžbe mikropolarnog fluida dane su po komponentama s

$$\mathbf{T}_{ij} = (-P + \lambda \partial_k v_k)\delta_{ij} + \mu \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right) + \mu_r \left(\partial_i v_j - \partial_j v_i\right) - 2\mu_r \varepsilon_{mij}\omega_m, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = c_0 \partial_k \omega_k \delta_{ij} + c_d \left(\partial_i \omega_j + \partial_j \omega_i\right) + c_a \left(\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i\right), \tag{2.14}$$

gdje je $P = P(\rho, \theta)$ tlak, δ_{ij} Kroneckerov simbol, λ $\left[\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}\right]$ i μ $\left[\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}\right]$ koeficijenti viskoznosti, a μ_r $\left[\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}\right]$, c_0 $\left[\text{kg m s}^{-1}\right]$, c_d $\left[\text{kg m s}^{-1}\right]$ i c_a $\left[\text{kg m s}^{-1}\right]$ ([22]) koeficijenti mikroviskoznosti za koje vrijede Clausius-Duhamelove nejednakosti

$$\begin{gathered} \mu \geq 0, \qquad 3\lambda + 2\mu \geq 0, \qquad \mu_r \geq 0, \\ c_d \geq 0, \quad 3c_0 + 2c_d \geq 0, \quad |c_d - c_a| \leq c_d + c_a. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Primijetimo da se jednadžbe (2.1)-(2.4) svode na zakone očuvanja za klasičan model fluida ako stavimo $\boldsymbol{\omega} = 0$ i $\mu_r = 0$. Istaknimo i da za razliku od klasičnog fluida, tenzor naprezanja $\mathbf{T}$ mikropolarnog fluida nije simetričan, što omogućava modeliranje pojava koje su izvan dosega klasičnog modela. Važno je istaknuti da je upravo simetričnost tenzora naprezanja razlog što u klasičnim Navier-Stokesovim jednadžbama zakon očuvanja angularnog momenta proizlazi iz zakona očuvanja mase i momenta. U mikropolarnom modelu to nije slučaj.

Radi jednostavnosti, u ovom radu pretpostavljamo i da vrijedi

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} = 0. \tag{2.16}$$

Do sada je razmatran model kompresibilnog idealnog mikropolarnog fluida u jednoj i tri dimenzije, pri čemu se u potonjem slučaju dodatno pretpostavljala sferna ili cilindrična simetrija. Dokazani su rezultati o lokalnoj i globalnoj egzistenciji, jedinstvenosti, regularnosti i stabilizaciji generaliziranog rješenja, a razrađena je i metoda za numeričko rješavanje.

2.1. Mikropolarni realni plin

Model kompresibilnog mikropolarnog fluida dosad je razmatran isključivo uz Clapeyronovu jednadžbu stanja idealnog plina koja je dana s

$$P(\rho, \theta) = R\rho\theta, \tag{2.17}$$

gdje je R $\left[\mathrm{m}^2\mathrm{K}^{-1}\mathrm{s}^{-2}\right]$ specifična plinska konstanta. U ovom radu se odmičemo od pretpostavke idealnosti i razmatramo jednadžbu stanja realnog plina čiji je opći oblik

$$P(\rho,\theta) = f(\rho) + \theta g(\rho), \tag{2.18}$$

gdje funkcija f predstavlja vanjski, a g unutarnji tlak. Generalizirana jednadžba stanja ovog oblika uvedena je prvi put u [37] i očekuje se da vjernije opisuje ponašanje plinova. U modelu realnog plina koji promatramo, zanemarujemo vanjski tlak i pretpostavljamo da je unutarnji tlak proporcionalan nekoj potenciji gustoće mase, odnosno

$$g(\rho) = R\rho^p, \tag{2.19}$$

gdje je $p \geq 1$ bezdimenzionalna konstanta koju nazivamo eksponent tlaka, a R $\left[\mathrm{m}^{3p-1}\,\mathrm{K}^{-1}\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{kg}^{1-p}\right]$ neka pozitivna konstanta. Drugim riječima, razmatramo sljedeću jednadžbu stanja

$$P = R\rho^p\theta. \tag{2.20}$$

Primijetimo da se za $p = 1$ (2.20) svodi na jednadžbu stanja idealnog plina. Naglasimo da čim p nije jednak 1, R više nije specifična plinska konstanta te da njezina dimenzija (mjerna jedinica) ovisi o p.

Generalizirana jednadžba stanja (2.20) dosad je razmatrana samo u kontekstu klasičnog fluida (ne-mikropolarnog).

Uzimajući u obzir sve ranije spomenute pretpostavke, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{T} =& (-R\rho^p\theta + \lambda\nabla\cdot v)\mathbf{I} + \mu\left((\nabla\mathbf{v})^T + \nabla\mathbf{v}\right) + \mu_r\left((\nabla\mathbf{v})^T - \nabla\mathbf{v}\right)\\ &- 2\mu_r\begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = -R\nabla(\rho^p\theta) + (\lambda+\mu-\mu_r)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\mu+\mu_r)\Delta\mathbf{v}) + 2\mu_r\nabla\times\boldsymbol{\omega}, \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}:\nabla\mathbf{v} =& -R\rho^p\theta\nabla\cdot\mathbf{v} + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{v})^2 + \mu((\nabla\mathbf{v})^T + \nabla\mathbf{v}):\nabla\mathbf{v} + \mu_r(\nabla\times\mathbf{v})^2\\ &- 2\mu_r\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}),\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\mathbf{T}_x = 2\mu_r\nabla\times\mathbf{v} - 4\mu_r\boldsymbol{\omega}, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{C} = (c_0\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{I} + c_d\left((\nabla\boldsymbol{\omega})^T + \nabla\boldsymbol{\omega}\right) + c_a\left((\nabla\boldsymbol{\omega})^T - \nabla\boldsymbol{\omega}\right), \tag{2.25}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{C} = (c_0 + c_d - c_a)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}) + (c_d + c_a)\Delta\boldsymbol{\omega}, \tag{2.26}$$

$$\mathbf{C}:\nabla\boldsymbol{\omega} = c_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})^2 + c_d((\nabla\boldsymbol{\omega})^T + \nabla\boldsymbol{\omega}):\nabla\boldsymbol{\omega} + c_a((\nabla\boldsymbol{\omega})^T - \nabla\boldsymbol{\omega}):\nabla\boldsymbol{\omega}, \tag{2.27}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{q} = -\kappa\Delta\theta, \tag{2.28}$$

pa opći trodimenzionalni model realnog mikropolarnog plina glasi:

$$\partial_t \rho = -(\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} - \rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{2.29}$$

$$\rho \partial_t \mathbf{v} = -\rho (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - R \nabla (\rho^p \theta) + (\lambda + \mu - \mu_r) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{v} + 2\mu_r \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.30}$$

$$j_I \rho \partial_t \boldsymbol{\omega} = -j_I \rho (\nabla \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{v} + (c_0 + c_d - c_a) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + (c_d + c_a) \Delta \boldsymbol{\omega} + 2\mu_r (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} c_v \rho \partial_t \theta = & -c_v \rho (\nabla \theta) \cdot \mathbf{v} + \kappa \Delta \theta - R \rho^p \theta \nabla \cdot \mathbf{v} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \frac{1}{2} \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) : (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + 4\mu_r \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) \\ & + c_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + (c_d - c_a) \nabla \boldsymbol{\omega} : \nabla \boldsymbol{\omega} + (c_d + c_a)(\nabla \boldsymbol{\omega})^T : \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Modelu pridružujemo odgovarajuće početne

$$\rho(\mathbf{x},0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x},0) = \theta_0(\mathbf{x}), \tag{2.33}$$

i homogene rubne uvjete

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{\omega}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \theta|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.34}$$

S obzirom na odabrane rubne uvjete za $\mathbf{v}$ i θ, početno-rubni problem (2.29)–(2.34) modelira tok mikropolarnog realnog plina kroz cijev s čvrstim i termički izoliranim stijenkama. S druge strane, još uvijek nije sasvim usuglašeno koji je ispravan odabir rubnog uvjeta za $\boldsymbol{\omega}$. Homogeni Dirichletov rubni uvjet korišten ovdje je najčešći u literaturi ([14,28,48,49]). Primjer drugačijeg rubnog uvjeta za $\boldsymbol{\omega}$ dan je u [16].

Da bi model bio fizikalno smislen, početna gustoća mase i apsolutna temperatura bi trebale biti nenegativne, odnosno

$$\rho_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \theta_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2.35}$$

Dakle, u najopćenitijem slučaju dopušta se vakuum i apsolutna nula, odnosno $\rho_0(\mathbf{x}) = 0$, za neke $\mathbf{x} \in \Omega$ i $\theta_0(\mathbf{x}) = 0$, za neke $\mathbf{x} \in \Omega$, međutim u ovom radu dodatno ćemo pretpostaviti da je u početnom trenutku cijev u potpunosti ispunjena fluidom odnosno da nema vakuuma te da je apsolutna temperatura strogo pozitivna. Slični problemi u kojima je dopušten vakuum razmatrani su primjerice u [18,47].

2.1.1. Jednodimenzionalni model

U ovom radu proučavamo jednodimenzionalan tok mikropolarnog realnog fluida. Pripadni početno-rubni problem dobivamo iz općeg modela (2.29)–(2.34) uvođenjem dodatnih pretpostavki

$$\rho(\mathbf{x},t) = \rho(x,t), \tag{2.36}$$

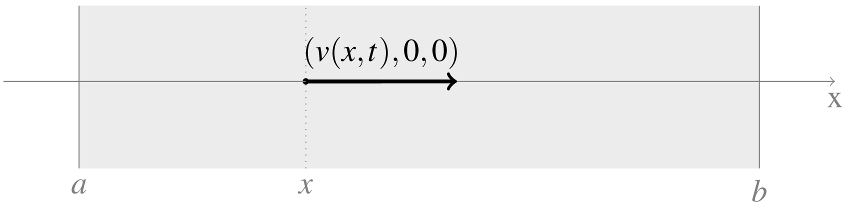
$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = (v(x,t),0,0), \tag{2.37}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t) = (\omega(x,t),\omega_2(x,t),\omega_3(x,t)), \tag{2.38}$$

$$\theta(\mathbf{x},t) = \theta(x,t), \tag{2.39}$$

za $(x,t) \in]a,b[\times]0,T[$, pri čemu je $a < b$.

Na slici 2.1 prikazana je geometrija jednodimenzionalnog toka i smjer brzine.



Slika 2.1: Model jednodimenzionalnog toka: geometrija i smjer brzine

Uvrštavanjem (2.36)-(2.39) u (2.29)–(2.29) i raspisom po komponentama vektorskih polja, dobivamo

$$\partial_t\rho = -v\partial_x\rho - \rho\partial_x v, \tag{2.40}$$

$$\rho\partial_t v = -\rho v\partial_x v - R\partial_x(\rho^p\theta) + (\lambda+2\mu)\partial_{xx}v, \tag{2.41}$$

$$0 = -2\mu_r\partial_x\omega_3, \tag{2.42}$$

$$0 = 2\mu_r\partial_x\omega_2, \tag{2.43}$$

$$j_I\rho\partial_t\omega = -j_I\rho v\partial_x\omega + (c_0+2c_d)\partial_{xx}\omega - 4\mu_r\omega, \tag{2.44}$$

$$j_I\rho\partial_t\omega_2 = -j_I\rho v\partial_x\omega_2 + (c_d+c_a)\partial_{xx}\omega_2 - 4\mu_r\omega_2, \tag{2.45}$$

$$j_I\rho\partial_t\omega_3 = -j_I\rho v\partial_x\omega_3 + (c_d+c_a)\partial_{xx}\omega_3 - 4\mu_r\omega_3, \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned} c_v\rho\partial_t\theta = & -c_v\rho v\partial_x\theta + \kappa\partial_{xx}\theta - R\rho^p\theta\partial_x v + (\lambda+2\mu)(\partial_x v)^2 + (c_0+2c_d)(\partial_x\omega)^2 \\ & + (c_d+c_a)\big((\partial_x\omega_2)^2 + (\partial_x\omega_3)^2\big) + 4\mu_r(\omega^2+\omega_2^2+\omega_3^2). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Uvodimo dodatnu pretpostavku na koeficijent mikroviskoznosti μ_r koji je općenito nenegativan (vidjeti 2.15). Odsad i nadalje smatramo da je

$$\mu_r > 0. \tag{2.48}$$

Modelski je ova pretpostavka opravdana budući da u slučaju $\mu_r = 0$ tenzor naprezanja (2.13) postaje simetričan i neovisan o mikrorotaciji, a cilj nam je u ovom radu istražiti puni efekt mikropolarnosti.

Iz (2.42)–(2.43) i (2.48) slijedi

$$\omega_2(x,t)=\omega_2(t), \quad \omega_3(x,t)=\omega_3(t), \tag{2.49}$$

odakle, uzimanjem u obzir jednadžbi (2.45)–(2.46) dobivamo

$$\omega_i(t)=0, \quad i=2,3. \tag{2.50}$$

Stoga, umjesto (2.38) možemo pisati

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)=(\omega(x,t),0,0). \tag{2.51}$$

Uvrštavanjem (2.50) u (2.40)–(2.47), dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje jednodimenzionalan tok realnog mikropolarnog fluida u Eulerovim koordinatama

$$\partial_t\rho = -v\partial_x\rho - \rho\partial_x v, \tag{2.52}$$

$$\rho\partial_t v = -\rho v\partial_x v - R\partial_x(\rho^p\theta) + (\lambda+2\mu)\partial_{xx}v, \tag{2.53}$$

$$j_I\rho\partial_t\omega = -j_I\rho v\partial_x\omega + (c_0+2c_d)\partial_{xx}\omega - 4\mu_r\omega, \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} c_v\rho\partial_t\theta = &- c_v\rho v\partial_x\theta + \kappa\partial_{xx}\theta - R\rho^p\theta\partial_x v + (\lambda+2\mu)(\partial_x v)^2 \\ &+ (c_0+2c_d)(\partial_x\omega)^2 + 4\mu_r\omega^2, \end{aligned} \tag{2.55}$$

za $(x,t)\in]a,b[\times]0,T[$. Pripadni početni uvjeti postaju

$$\rho(x,0)=\rho_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x), \quad \omega(x,0)=\omega_0(x), \quad \theta(x,0)=\theta_0(x), \tag{2.56}$$

za $x\in]a,b[$, a homogeni rubni uvjeti

$$v(a,t)=v(b,t)=0, \quad \omega(a,t)=\omega(b,t)=0, \quad \partial_x\theta(a,t)=\partial_x\theta(b,t)=0, \tag{2.57}$$

za $t\in]0,T[$.

Dobiveni sustav čine četiri kvazilinearne parcijalne jednadžbe i mješovitog je paraboličko-hiperboličkog tipa. Kako bismo pojednostavnili analizu modela prevodimo jednadžbe iz Eulerove na Lagrangeovu deskripciju. Naime, na taj način postižemo paraboličnost sustava što omogućava korištenje mnoštva već poznatih pristupa za analizu takvih sustava.

Jednodimenzionalni model u Lagrangeovoj deskripciji

Promatramo česticu fluida s početnim položajem u točki ξ, koja se u trenutku $t>0$ giba kroz točku x. Točku ξ nazivamo Lagrangeovom ili materijalnom koordinatom, a x Eulerovom koordinatom ili pozicijom promatrane čestice ([5,48]). Vrijedi

$$\frac{d}{dt}x(\xi,t)=v(x(\xi,t),t)=v(x,t), \qquad x(\xi,0)=\xi, \tag{2.58}$$

pri čemu je ξ parametar, odnosno

$$x(\xi,t)=\xi+\int_0^t \tilde{v}(\xi,\tau)d\tau \tag{2.59}$$

gdje je

$$\tilde{v}(\xi,t)=v(x(\xi,t),t). \tag{2.60}$$

U nastavku, za proizvoljnu diferencijabilnu funkciju $\phi=\phi(x,t)$ s $\tilde{\phi}(\xi,t)=\phi(x(\xi,t),t)$ označavamo pripadnu funkciju u Lagrangeovoj deskripciji. Kako bismo problem (2.52)-(2.57) preveli na Lagrangeovu deskripciju, definiramo invertibilno preslikavanje

$$\mathscr{M}_t=x(\cdot,t):\xi\mapsto x, \tag{2.61}$$

čiji je Jakobijan dan s

$$J(\xi,t)=\frac{dx}{d\xi}. \tag{2.62}$$

Parcijalna derivacija Jakobijana (2.62) po vremenu, nakon uvrštavanja (2.58), može se zapisati kao

$$\partial_t J=J\partial_x v. \tag{2.63}$$

Za gustoću mase $\tilde{\rho}(\xi,t)=\rho(x(\xi,t),t)$, primjenom (2.58) na (2.52) dobivamo

$$\partial_t\tilde{\rho}=\partial_x\rho\cdot\partial_t x+\partial_t\rho=v\partial_x\rho+\partial_t\rho=-\rho\partial_x v=-\tilde{\rho}\partial_x v. \tag{2.64}$$

Iz (2.63) i (2.64) slijedi

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}\partial_t\tilde{\rho}+\frac{1}{J}\partial_t J=0, \tag{2.65}$$

odnosno

$$\partial_t\ln(\tilde{\rho}J)=0. \tag{2.66}$$

Integriranjem (2.66) po $[0,t]$, te budući da za $t=0$ vrijedi $\xi=x$ i $J=1$, dobivamo

$$\tilde{\rho}J=\rho_0. \tag{2.67}$$

Primjenom relacije (2.67) na diferencijabilnu funkciju ϕ dobivamo

$$\partial_x\phi=\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{\phi}, \tag{2.68}$$

$$\partial_{xx}\phi=\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{\phi}\right), \tag{2.69}$$

$$\partial_t\tilde{\phi}=\partial_t\phi+v\partial_x\phi. \tag{2.70}$$

Uvrštavanjem gornjih relacija u (2.52)–(2.57), dobivamo zapis istog sustava u Lagrangeovoj deskripciji

$$\partial_t \tilde{\rho} = -\frac{\tilde{\rho}^2}{\rho_0}\partial_\xi \tilde{v}, \tag{2.71}$$

$$\partial_t \tilde{v} = -\frac{R}{\rho_0}\partial_\xi\left(\tilde{\rho}^p\tilde{\theta}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi \tilde{v}\right), \tag{2.72}$$

$$j_I\partial_t\tilde{\omega} = \frac{c_0+2c_d}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{\omega}\right) - 4\mu_r\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\rho}}, \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned} c_v\partial_t\tilde{\theta} = &\frac{\kappa}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{\theta}\right) - \frac{R}{\rho_0}\tilde{\rho}^p\tilde{\theta}\partial_\xi\tilde{v} + \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0^2}\tilde{\rho}\left(\partial_\xi\tilde{v}\right)^2 \\ &+ \frac{c_0+2c_d}{\rho_0^2}\tilde{\rho}\left(\partial_\xi\tilde{\omega}\right)^2 + 4\mu_r\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\rho}}, \end{aligned} \tag{2.74}$$

za $(\xi,t)\in]a,b[\times]0,T[$,

$$\tilde{\rho}(\xi,0)=\rho_0(\xi), \quad \tilde{v}(\xi,0)=v_0(\xi), \quad \tilde{\omega}(\xi,0)=\omega_0(\xi), \quad \tilde{\theta}(\xi,0)=\theta_0(\xi), \tag{2.75}$$

za $\xi\in[a,b]$,

$$\tilde{v}(a,t)=\tilde{v}(b,t)=0, \quad \tilde{\omega}(a,t)=\tilde{\omega}(b,t)=0, \quad \partial_x\tilde{\theta}(a,t)=\partial_x\tilde{\theta}(b,t)=0, \tag{2.76}$$

za $t\in[0,T]$.

Dobiveni sustav sastoji se od četiri kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe i paraboličkog je tipa. Primijetimo da prva jednadžba (2.71) ima jednostavniju formu od odgovarajuće jednadžbe u Eulerovoj deskripciji (2.52), gdje se osim vremenske, javlja i prostorna derivacija funkcije ρ. Upravo će ovo pojednostavljenje, odnosno paraboličnost omogućiti kasniju analizu sustava odabranim metodama.

Jednodimenzionalni model u masenim Lagrangeovim koordinatama

Sustav dodatno pojednostavljujemo prelaskom na masene Lagrangeove koordinate ([5]). Definiramo funkciju η izrazom

$$\eta(\xi) = \int_a^\xi \rho_0(s)ds. \tag{2.77}$$

Zbog (2.67), vrijedi

$$\eta(\xi) = \int_a^{x(\xi,t)} \rho(s,t)ds. \tag{2.78}$$

Kao što je već najavljeno, sada uvodimo još jednu dodatnu pretpostavku. Naime, odsad i nadalje pretpostavljamo da je u početnom trenutku cijela domena ispunjena fluidom, odnosno ne dopuštamo vakuum u početnom trenutku. Drugim riječima, vrijedi

$$\inf_{x\in[a,b]} \rho_0(x) > 0. \tag{2.79}$$

Iz (2.79) slijedi da je η invertibilna, što omogućava sljedeću definiciju nove prostorne bezdimenzionalne koordinate

$$q = \frac{1}{L}\eta(\xi), \tag{2.80}$$

gdje je

$$L = \int_a^b \rho_0(s)ds > 0 \tag{2.81}$$

karakteristična duljina (L $\left[\text{kg m}^{-2}\right]$). Točke (q,t) nazivamo masenim Lagrangeovim koordinatama koje poprimaju vrijednosti na skupu

$$Q_T =]0,1[\times]0,T[. \tag{2.82}$$

Za diferencijabilnu funkciju ϕ, iz (2.77) i (2.80), dobivamo

$$\partial_\xi \tilde{\phi} = \frac{1}{L}\rho_0 \partial_q \hat{\phi}, \tag{2.83}$$

gdje je $\hat{\phi}(q,t) = \tilde{\phi}(\xi,t)$.

Početno-rubni problem (2.71)-(2.76) zapisujemo u novim koordinatama (q,t), pri čemu radi jednostavnosti zapisa umjesto (q,t) pišemo (x,t) i izostavljamo oznake $\hat{}$ i $\tilde{}$ u oznakama funkcija

$$\partial_t \rho = -\frac{1}{L}\rho^2 \partial_x v, \tag{2.84}$$

$$\partial_t v = -\frac{R}{L}\partial_x(\rho^p \theta) + \frac{\lambda + 2\mu}{L^2}\partial_x(\rho \partial_x v), \tag{2.85}$$

$$j_I \partial_t \omega = \frac{c_0 + 2c_d}{L^2}\partial_x(\rho \partial_x \omega) - 4\mu_r \frac{\omega}{\rho}, \tag{2.86}$$

$$c_v \partial_t \theta = \frac{\kappa}{L^2}\partial_x(\rho \partial_x \theta) - \frac{R}{L}\rho^p \theta\, \partial_x v + \frac{\lambda + 2\mu}{L^2}\rho(\partial_x v)^2 + \frac{c_0 + 2c_d}{L^2}\rho(\partial_x \omega)^2 + 4\mu_r \frac{\omega^2}{\rho}, \tag{2.87}$$

za $(x,t) \in]0,1[\times]0,T[$,

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad \omega(x,0) = \omega_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \tag{2.88}$$

za $x \in [0,1]$,

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad \omega(0,t) = \omega(1,t) = 0, \quad \partial_x \theta(0,t) = \partial_x \theta(1,t) = 0, \tag{2.89}$$

za $t \in [0,T]$.

U kasnijim poglavljima analizirat ćemo izvedeni model i pri tome koristiti zapis u masenim Lagrangeovim koordinatama dan s (2.84)–(2.89). Napomenimo da je izvod ovog modela već objavljen u [10].

2.2. Model toka i termalne eksplozije reaktivnog realnog mikropolarnog plina

Jedan od glavnih razloga za uvođenje generalizirane jednadžbe stanja (2.20) jest očekivanje da model fluida vjernije opisuje ponašanje plinova u nekim ekstremnim uvjetima, primjerice za vrijeme kemijske reakcije. U ovom odjeljku primjenjujemo model mikropolarnog realnog plina na modelu reaktivnog fluida koji opisuje fluid prilikom procesa dinamičkog izgaranja. Razmatramo jednostavan model u kojem mješavina plinova ima jedinstvenu molekularnu masu i jedan koeficijent difuzije. Ovakav model opisan je u kontekstu klasičnog modela fluida u [46, 70, 73, 74], odakle su preuzete oznake, nomenklatura i osnovni oblik modela korišten u ovom radu. Reaktivan fluid nije dosad razmatran u kontekstu mikropolarnog kontinuuma.

Promatramo jednokoračnu ireverzibilnu reakciju u kojoj reaktanti, gorivo uz prisutnost oksidansa, prelaze u produkte

$$\text{gorivo} + \text{oksidans} \to \text{produkti}. \tag{2.90}$$

Dinamika kemijske reakcije opisana je sljedećom jednadžbom

$$\rho \dot{z} = \sigma \nabla \cdot (\rho \nabla z) - \rho r(\rho, \theta, z), \tag{2.91}$$

gdje je z udio neizgorenog goriva u mješavini plinova, a pozitivna konstanta σ $\left[\mathrm{m^2 s^{-1}}\right]$ koeficijent difuzije. Funkcija r $\left[\mathrm{s^{-1}}\right]$ opisuje intenzitet reakcije i najčešće dolazi u obliku Arrheniusovog zakona

$$r(\rho, \theta, z) = \varepsilon \rho^{m-1} z^m \exp \frac{\theta - 1}{\varepsilon \theta}, \tag{2.92}$$

gdje je $m \geq 1$ cijeli broj jednak sumi reakcijskih redova reaktanata, a pozitivna konstanta ε je aktivacijska energija.

Uvođenje novog procesa u model utječe na ostale aspekte modela. U slučaju reaktivnog realnog mikropolarnog fluida dolazi do promjene u iskazu zakona očuvanja energije u odnosu na model bez kemijske reakcije. Naime, zakon očuvanja energije za reaktivan mikropolaran plin glasi

$$\rho \dot{E} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{C} : \nabla \boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_x \cdot \boldsymbol{\omega} + \delta \rho r(\rho, \theta, z), \tag{2.93}$$

pri čemu je dodatni član u odnosu na (2.4) posljedica promjene unutarnje energije uzrokovane izgaranjem. Ovdje je pozitivna konstanta δ $\left[\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}\right]$ koja opisuje brzinu reakcije.

Uvažavanjem pretpostavki (2.5)–(2.16), (2.20) u jednadžbama (2.1)–(2.3), (2.91) i (2.93), dobivamo trodimenzionalni model reaktivnog realnog mikropolarnog plina s homogenim rubnim uvjetima za brzinu, mikrorotacijsku brzinu i toplinski fluks na $\Omega\times]0,T[$, za $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ i $T>0$,

$$\partial_t\rho = -(\nabla\rho)\cdot\mathbf{v}-\rho\nabla\cdot\mathbf{v}, \tag{2.94}$$

$$\rho\partial_t\mathbf{v} = -\rho(\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}-R\nabla(\rho^p\theta)+(\lambda+\mu-\mu_r)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+(\mu+\mu_r)\Delta\mathbf{v}+2\mu_r\nabla\times\boldsymbol{\omega}, \tag{2.95}$$

$$j_I\rho\partial_t\boldsymbol{\omega} = -j_I\rho(\nabla\boldsymbol{\omega})\cdot\mathbf{v}+(c_0+c_d-c_a)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})+(c_d+c_a)\Delta\boldsymbol{\omega}+2\mu_r(\nabla\times\mathbf{v}-2\boldsymbol{\omega}) \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned} c_v\rho\partial_t\theta = & -c_v\rho(\nabla\theta)\cdot\mathbf{v}+\kappa\Delta\theta-R\rho^p\theta\nabla\cdot\mathbf{v}+\lambda(\nabla\cdot\mathbf{v})^2+c_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}) \\ & +\frac{1}{2}\mu(\nabla\mathbf{v}+\nabla\mathbf{v}^T):(\nabla\mathbf{v}+\nabla\mathbf{v}^T)+4\mu_r\left(\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}-\boldsymbol{\omega}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}-\boldsymbol{\omega}\right) \\ & +(c_d-c_a)\nabla\boldsymbol{\omega}:\nabla\boldsymbol{\omega}+(c_d+c_a)(\nabla\boldsymbol{\omega})^T:\nabla\boldsymbol{\omega}+\delta\rho f(\rho,\theta,z) \end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\rho\partial_t z = -\rho(\nabla z)\cdot\mathbf{v}+\sigma\nabla\cdot(\rho\nabla z)-\rho f(\rho,\theta,z), \tag{2.98}$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0,\quad \boldsymbol{\omega}|_{\partial\Omega}=0,\quad \nabla\theta|_{\partial\Omega}=0,\quad \nabla z|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.99}$$

pri čemu su odgovarajući početni uvjeti dani s

$$\begin{aligned} &\rho(\mathbf{x},0)=\rho_0(\mathbf{x}),\quad \mathbf{v}(\mathbf{x},0)=\mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}),\\ &\theta(\mathbf{x},0)=\theta_0(\mathbf{x}),\quad z(\mathbf{x},0)=z_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2.100}$$

Izbor rubnih uvjeta za ρ, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ i θ u skladu je s osnovnim modelom iz prethodnog odjeljka, dok je izbor homogenog Neumannovog rubnog uvjeta za z usuglašen s većinom literature u ovom području ([46, 70, 74]). Rubni uvjeti sugeriraju da promatramo reaktivan fluid u cijevi s čvrstim, termički izoliranim i nepropusnim stijenkama. Da bi model bio u skladu sa svojom fizikalnom interpretacijom, sljedeće pretpostavke trebale vrijediti za početnu gustoću mase, apsolutnu temperaturu i udio goriva u mješavini

$$\rho_0(\mathbf{x})\geq 0,\quad \theta_0(\mathbf{x})\geq 0,\quad 0\leq z_0(\mathbf{x})\leq 1,\quad x\in\Omega. \tag{2.101}$$

Analogno kao i u osnovnom modelu, u ovom radu razmatrat ćemo samo slučaj kada su početna gustoća mase ρ_0 i početna apsolutna temperatura θ_0 strogo pozitivne. Početno-rubni problem (2.94)–(2.100) za $z_0=0$, $\delta=0$, $\sigma=0$, $f=0$ svodi na početno-rubni problem (2.29)–(2.34) koji modelira ponašanje nereaktivnog mikropolarnog realnog plina.

2.2.1. Jednodimenzionalni model

U ovom radu detaljno ćemo proučavati jednodimenzionalan model reaktivnog mikropolarnog realnog plina koji dobivamo iz (2.94)–(2.100) nakon uvrštavanja pretpostavki

$$\rho(\mathbf{x},t) = \rho(x,t), \tag{2.102}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = (v(x,t),0,0), \tag{2.103}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t) = (\omega(x,t),\omega_2(x,t),\omega_3(x,t)), \tag{2.104}$$

$$\theta(\mathbf{x},t) = \theta(x,t), \tag{2.105}$$

$$z(\mathbf{x},t) = z(x,t), \tag{2.106}$$

za $(x,t) \in]a,b[\times]0,T[$, pri čemu je $a < b$. Na sličan način kao u odjeljku 2.1.1, uzimanjem u obzir da vrijedi (2.48), dobivamo

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t) = (\omega(x,t),0,0), \tag{2.107}$$

te pripadni početno-rubni problem ima sljedeći oblik u Eulerovoj deskripciji

$$\partial_t\rho = -v\partial_x\rho - \rho\partial_x v, \tag{2.108}$$

$$\rho\partial_t v = -\rho v\partial_x v - R\partial_x(\rho^p\theta) + (\lambda+2\mu)\partial_{xx}v, \tag{2.109}$$

$$j_I\rho\partial_t\omega = -j_I\rho v\partial_x\omega + (c_0+2c_d)\partial_{xx}\omega - 4\mu_r\omega, \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned} c_v\rho\partial_t\theta = & -c_v\rho v\partial_x\theta + \kappa\partial_{xx}\theta - R\rho^p\theta\partial_x v + (\lambda+2\mu)(\partial_x v)^2 \\ & + (c_0+2c_d)(\partial_x\omega)^2 + 4\mu_r\omega^2 + \delta\rho r(\rho,\theta,z), \end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\rho\partial_t z = -\rho v\partial_x z + \sigma\partial_x(\rho\partial_x z) - \rho r(\rho,\theta,z), \tag{2.112}$$

za $(x,t) \in]a,b[\times]0,T[$,

$$\rho(x,0) = \rho_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ \omega(x,0) = \omega_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ z(x,0) = z_0(x), \tag{2.113}$$

za $x \in]a,b[$, te

$$\begin{aligned} v(a,t) = v(b,t) = 0, \quad & \omega(a,t) = \omega(b,t) = 0, \\ \partial_x\theta(a,t) = \partial_x\theta(b,t) = 0, \quad & \partial_x z(a,t) = \partial_x z(b,t) = 0, \end{aligned} \tag{2.114}$$

za $t \in]0,T[$. Dobiveni sustav pet kvazilinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je mješovitog paraboličko-hiperboličkog tipa.

Korištenjem veze između Eulerovih i Lagrangeovih koordinata

$$\partial_t x = v(x,t), \qquad x(\xi,0) = \xi, \tag{2.115}$$

i tehnika iz odjeljka 2.1.1 izvodimo pripadni model u Lagrangeovoj deskripciji

$$\partial_t \tilde{\rho} = -\frac{\tilde{\rho}^2}{\rho_0}\partial_\xi \tilde{v}, \tag{2.116}$$

$$\partial_t \tilde{v} = -\frac{R}{\rho_0}\partial_\xi\left(\tilde{\rho}^p\tilde{\theta}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{v}\right), \tag{2.117}$$

$$j_I\partial_t\tilde{\omega} = \frac{c_0+2c_d}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{\omega}\right) - 4\mu_r\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\rho}}, \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned} c_v\partial_t\tilde{\theta} =& \frac{\kappa}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{\theta}\right) - \frac{R}{\rho_0}\tilde{\rho}^p\tilde{\theta}\partial_\xi\tilde{v} + \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0^2}\tilde{\rho}\left(\partial_\xi\tilde{v}\right)^2 + \frac{c_0+2c_d}{\rho_0^2}\tilde{\rho}\left(\partial_\xi\tilde{\omega}\right)^2 \\ &+ 4\mu_r\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\rho}} + \delta r(\tilde{\rho},\tilde{\theta},\tilde{z}) \end{aligned} \tag{2.119}$$

$$\partial_t\tilde{z} = \frac{\sigma}{\rho_0}\partial_\xi\left(\frac{\tilde{\rho}^2}{\rho_0}\partial_\xi\tilde{z}\right) - r(\tilde{\rho},\tilde{\theta},\tilde{z}) \tag{2.120}$$

za $(\xi,t) \in]a,b[\times]0,T[$,

$$\begin{aligned} &\tilde{\rho}(\xi,0) = \rho_0(\xi),\ \tilde{v}(\xi,0) = v_0(\xi),\ \tilde{\omega}(\xi,0) = \omega_0(\xi), \\ &\tilde{\theta}(\xi,0) = \theta_0(\xi),\ \tilde{z}(\xi,0) = z_0(\xi), \end{aligned} \tag{2.121}$$

za $\xi \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} &\tilde{v}(a,t) = \tilde{v}(b,t) = 0, \quad \tilde{\omega}(a,t) = \tilde{\omega}(b,t) = 0, \\ &\partial_x\tilde{\theta}(a,t) = \partial_x\tilde{\theta}(b,t) = 0, \quad \partial_x\tilde{z}(a,t) = \partial_x\tilde{z}(b,t) = 0, \end{aligned} \tag{2.122}$$

za $t \in [0,T]$. Dobiveni sustav je paraboličkog tipa.

Konačno, zapis modela dodatno pojednostavljujemo prelaskom na masene Lagrangeove koordinate

$$(q,t) = \left(L^{-1}\int_a^\xi \rho_0(s)ds, t\right), \tag{2.123}$$

gdje je $L = \int_a^b \rho_0(s)ds > 0$, budući da tada domena našeg problema postaje skup $]0,1[\times]0,T[$. Ovdje smo koristili pretpostavku da je

$$\inf_{x\in[a,b]} \rho_0(x) > 0. \tag{2.124}$$

Postupak je analogan postupku iz odjeljka 2.1.1, a dobiveni početno-rubni problem glasi[1]

$$\partial_t \rho = -\frac{1}{L}\rho^2 \partial_x v, \tag{2.125}$$

$$\partial_t v = -\frac{R}{L}\partial_x(\rho^p \theta) + \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x(\rho\partial_x v), \tag{2.126}$$

$$j_I \partial_t \omega = \frac{c_0+2c_d}{L^2}\partial_x(\rho\partial_x\omega) - 4\mu_r\frac{\omega}{\rho}, \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned} c_v\partial_t\theta =& \frac{\kappa}{L^2}\partial_x(\rho\partial_x\theta) - \frac{R}{L}\rho^p\theta\,\partial_x v + \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho(\partial_x v)^2 + \frac{c_0+2c_d}{L^2}\rho(\partial_x\omega)^2 \\ &+ 4\mu_r\frac{\omega^2}{\rho} + \delta r(\rho,\theta,z) \end{aligned} \tag{2.128}$$

$$\partial_t z = \frac{\sigma}{L^2}\partial_x\left(\rho^2\partial_x z\right) - r(\rho,\theta,z) \tag{2.129}$$

za $(x,t) \in]0,1[\times]0,T[$,

$$\rho(x,0) = \rho_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ \omega(x,0) = \omega_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ z(x,0) = z_0(x), \tag{2.130}$$

za $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad \omega(0,t) = \omega(1,t) = 0, \\ \partial_x\theta(0,t) = \partial_x\theta(1,t) = 0, \quad \partial_x z(0,t) = \partial_x z(1,t) = 0, \end{aligned} \tag{2.131}$$

za $t \in [0,T]$.

[1]Umjesto (q,t), koristimo zapis u varijablama (x,t).

3. Egzistencija i jedinstvenost generaliziranog rješenja za jednodimenzionalni model mikropolarnog realnog plina

U ovom poglavlju istražujemo početno-rubnu zadaću (2.84)–(2.89). Specijalno, bavimo se problematikom egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Prije svega potrebno je definirati što podrazumijevamo pod pojmom rješenja problema vodeći pri tome računa da ono mora biti matematički smisleno i fizikalno opravdano. Kako je uobičajeno u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, tražimo da rješenje zadovoljava početno-rubni problem u slabom smislu. Međutim, već iz definicije moći ćemo zaključiti da takvo rješenje ima određenu glatkoću pa se stoga može smatrati i jakim rješenjem. Pokazuje se da promatrani početno-rubni problem može imati najviše jedno rješenje, a da problem zaista ima rješenje može se pokazati uz dodatne pretpostavke o glatkoći i pozitivnosti početnih funkcija. Neke od pretpostavki na početne funkcije uveli smo već prilikom izvoda modela, te ćemo im u ovom poglavlju pridružiti neke nove vodeći pritom računa o fizikalnoj interpretaciji.

Konačni cilj ovog poglavlja je pokazati da promatrani problem ima jedinstveno rješenje globalno po vremenu, odnosno na svakom proizvoljno velikom, ali konačnom vremenskom intervalu. Pritom prvo konstruiramo takozvano lokalno rješenje - rješenje na nekom dovoljno malom vremenskom intervalu dobiveno kao limes niza rješenja aproksimativnih sustava nastalih Faedo-Galerkinovom semidiskretizacijom sustava. Vremenski neovisne ocjene rješenja omogućuju proširenje lokalnog rješenja na proizvoljan vremenski interval. U nastavku formalno definiramo opisane pojmove i iskazujemo najavljene rezultate u obliku teorema.

3.1. DEFINICIJA GENERALIZIRANOG RJEŠENJA

Za početak definiramo pojam generaliziranog rješenja. Riječ generalizirano ovdje koristimo kako bismo istaknuli da se ne radi o klasičnom glatkom rješenju početno-rubnog problema, već o rješenju u slabom smislu koje ima određenu glatkoću (nedovoljnu da bi se smatralo rješenjem u klasičnom smislu, vidjeti Propoziciju 3.1.2).

Definicija 3.1.1. Generalizirano rješenje početno-rubne zadaće (2.84)–(2.89) na $Q_T =]0,1[\times]0,T[$, za neki $T > 0$, je funkcija oblika

$$(x,t) \mapsto (\rho, v, \omega, \theta)(x,t), \quad (x,t) \in Q_T$$

takva da

$$\rho \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,1)\big) \cap H^1(Q_T), \quad \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \rho > 0 \tag{3.1}$$

$$v, \omega, \theta \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,1)\big) \cap H^1(Q_T) \cap L^2\big(0,T;H^2(0,1)\big), \tag{3.2}$$

ρ, v, ω i θ zadovoljavaju jednadžbe (2.84)–(2.87) s.s. u Q_T, početne uvjete (2.88) s.s. u $]0,1[$ i rubne uvjete (2.89) u smislu traga.

Koristeći teoreme o ulaganjima Soboljevih prostora (Propozicije 1.1.3–1.1.5) može se pokazati da generalizirano rješenje ima svojstvo iskazano u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.1.2. Neka je $(\rho, v, \omega, \theta)$ generalizirano rješenje iz Definicije 3.1.1. Tada vrijedi

$$\rho \in C\big([0,T];L^2(0,1)\big) \cap L^\infty\big(0,T;C([0,1])\big), \tag{3.3}$$

$$v, \omega, \theta \in L^2\big(0,T;C^1([0,1])\big) \cap C\big([0,T];H^1(0,1)\big) \cap C\big(\overline{Q}_T\big). \tag{3.4}$$

Dokaz. Budući da je po (3.1) $\rho \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,1)\big)$, iz Propozicije 1.1.3 slijedi $\rho \in L^\infty\big(0,T; C([0,1])\big)$. Zbog $\rho \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,1)\big) \cap H^1(Q_T)$, vrijedi $\rho \in H^1\big(0,T;L^2(0,1)\big) \cap H^1(Q_T)$, pa iz Propozicije 1.1.4 slijedi $\rho \in C\big([0,T];L^2(0,1)\big)$.

Iz $v, \omega, \theta \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,1)\big)$, po Propoziciji 1.1.3 slijedi $v, \omega, \theta \in L^2\big(0,T;C^1([0,1])\big)$. Iz $v, \omega, \theta \in H^1(Q_T))$ slijedi da je $\partial_t v, \partial_t \omega, \partial_t \theta \in L^2(Q_T)$, što zajedno s $v, \omega, \theta \in L^2\big(0,T;H^2(0,1)\big)$ po Propoziciji 1.1.5 daje $v, \omega, \theta \in C\big([0,T];H^1(0,1)\big)$. Iz $v, \omega, \theta \in C\big([0,T];H^1(0,1)\big)$ i Propozicije 1.1.3 slijedi i $v, \omega, \theta \in C\big(\overline{Q}_T\big)$. ■

Naglasimo da su spomenuti rezultati već pokazani za idealan mikropolarni fluid (vidjeti [53, 54]) koji je poseban slučaj razmatranog modela, a dobije se za vrijednost eksponenta tlaka $p = 1$. Ideje dokaza bazirane su na tehnikama iz [5,53,54], ali tehnike su prilagođene i proširene u skladu sa specifičnostima novog modela.

Napomena 3.1.3. U analizi egzistencije i jedinstvenosti generaliziranog rješenja pretpostavljamo da početne funkcije zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$\rho_0, \theta_0 \in H^1(0,1), \quad v_0, \omega_0 \in H_0^1(0,1). \tag{3.5}$$

Primijetimo da je ovakav odabir početnih uvjeta u skladu s odabranim rubnim uvjetima (2.89). Budući da je prema Propoziciji 1.1.3 prostor $H^1(0,1)$ uložen u $C([0,1])$, sve su početne funkcije neprekidne na zatvorenom intervalu $[0,1]$, pa su i ograničene, odnosno, postoji konstanta $M_0 > 0$ takva da vrijedi

$$\rho_0(x) \leq M_0, \quad \theta_0(x) \leq M_0, \qquad \text{za } x \in [0,1]. \tag{3.6}$$

U izvodu osnovnog modela uvedena je pretpostavka (2.79) na pozitivnost početne gustoće mase ρ_0. U nastavku isti uvjet postavljamo i na početnu temperaturu koja je određena funkcijom θ_0, odnosno tražimo da vrijedi

$$\inf_{x\in[0,1]} \theta_0(x) > 0. \tag{3.7}$$

Drugim riječima, smatramo da je temperatura fluida u početnom trenutku odmaknuta od apsolutne nule. Stoga postoji konstanta $m_0 > 0$ takva da vrijedi

$$\rho_0(x) \geq m_0, \quad \theta_0(x) \geq m_0, \qquad \text{za } x \in [0,1]. \tag{3.8}$$

Pretpostavka o strogoj pozitivnosti početne gustoće ρ_0 bila nam je nužna već pri izvodu modela u masenim Lagrangeovim koordinatama, a nužnom će se pokazati i u dokazima lokalne i globalne egzistencije generaliziranog rješenja. Koristimo je i u dokazu jedinstvenosti jer pojednostavljuje račun. S druge strane, pretpostavka o strogoj pozitivnosti početne temperature θ_0 potrebna je kako bismo mogli zaključiti da je apsolutna temperatura strogo pozitivna na cijelom intervalu lokalne egzistencije što je pak jedan od ključnih elemenata u dokazu globalne egzistencije.

Uz uvjete kao u Napomeni 3.1.3, može se pokazati da je funkcija ρ iz generaliziranog rješenja neprekidna.

Propozicija 3.1.4. Neka je $(\rho, v, \omega, \theta)$ generalizirano rješenje iz Definicije 3.1.1 i neka je $\rho_0 \in H^1(0,1)$. Tada vrijedi

$$\rho \in C\big(\overline{Q}_T\big). \tag{3.9}$$

Dokaz. Iz jednadžbe (2.84) i početnih uvjeta (2.88) slijedi da ρ zadovoljava sljedeći početni problem

$$\partial_t \left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{L}\partial_x v, \tag{3.10}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \tag{3.11}$$

čije je rješenje

$$\rho(x,t) = \frac{L\rho_0(x)}{L + \rho_0(x)\displaystyle\int_0^t \partial_x v(x,\tau)\, d\tau}. \tag{3.12}$$

Iz Propozicije 3.1.2 imamo $v \in L^2\big(0,T;C^1([0,1])\big)$, a iz pretpostavke $\rho_0 \in H^1(0,1)$ po Propoziciji 1.1.3 slijedi i da je ρ_0 neprekidna, što zajedno s (3.12) daje tvrdnju. ∎

Primijetimo da uz pretpostavke iz prethodne propozicije $\operatorname{ess\,inf}$ u Definiciji 3.1.1 možemo zamijeniti infimumom, odnosno za generalizirano rješenje vrijedi

$$\inf_{Q_T} \rho > 0. \tag{3.13}$$

3.2. LOKALNA EGZISTENCIJA

U ovom odjeljku iskazujemo i dokazujemo teorem o lokalnoj egzistenciji generaliziranog rješenja iz Definicije 3.1.1. Pod pojmom lokalna egzistencija podrazumijevamo postojanje rješenja na nekom dovoljno malom vremenskom intervalu. Do rješenja dolazimo konstruktivnim pristupom. Naime, projekcijom početno-rubnog problema (2.84)–(2.89) na odabrane konačno-dimenzionalne prostore konstruiramo niz aproksimativnih problema čija rješivost proizlazi iz elementarne teorije običnih diferencijalnih jednadžbi. Apriornom analizom moguće je najprije ustanoviti postojanje traženog vremenskog intervala, a zatim i rješenja na tom intervalu kao limesa konvergentnog (pod)niza aproksimativnih rješenja.

U sljedećem teoremu iskazan je rezultat o lokalnoj egzistenciji koji dokazujemo u nastavku ovog odjeljka.

Teorem 3.2.1. Neka funkcije ρ_0, v_0, ω_0 i θ_0 zadovoljavaju uvjete (3.5) i (3.8). Tada postoji $T_0 > 0$ takav da početno-rubni problem (2.84)–(2.89) ima generalizirano rješenje u smislu Definicije 3.1.1 na $Q_0 =]0,1[\times]0,T_0[$ sa svojstvom

$$\theta > 0 \quad \text{na} \quad \overline{Q}_0. \tag{3.14}$$

Teorem 3.2.1 dokazujemo konstruktivnim pristupom baziranim na tehnikama iz [5,54]. Dokaz započinjemo konstrukcijom niza aproksimativnih problema za promatrani početno-rubni problem korištenjem Faedo-Galerkinove metode opisane u odjeljku 1.5, čija rješenja predstavljaju aproksimacije generaliziranog rješenja. Metodu je moguće primijeniti jer je promatrani sustav parabolički. U drugom koraku izvodimo apriorne ocjene za niz aproksimativnih rješenja koje nam omogućuju odabir dovoljno malog vremenskog intervala na kojem će konstruirani niz biti ograničen u odgovarajućim prostorima funkcija. Dobivena ograničenost garantira da vrijede pretpostavke teorema o (slaboj) kompaktnosti (Propozicije 1.2.3–1.2.4) koji impliciraju postojanje konvergentnog podniza. U posljednjem dijelu dokaza pokazujemo da je limes tog podniza generalizirano rješenje početno-rubne zadaće (2.84)–(2.89) koje ima traženo svojstvo (3.14).

3.2.1. Faedo-Galerkinove aproksimacije

U nastavku konstruiramo niz pomoćnih problema za početno-rubni problem (2.84)–(2.89) korištenjem Faedo-Galerkinove projekcije. Skupovi

$$\{\sin(\pi ix) : i = 1,2,...\} \text{ i } \{\cos(\pi ix) : i = 0,1,2,...\} \tag{3.15}$$

ortogonalne su baze prostora $H_0^1(0,1)$ i $H^1(0,1)$, respektivno. Uvodimo niz funkcija v^n, ω^n, i θ^n sljedećim relacijama

$$v^n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} v_i^n(t)\sin(\pi ix), \tag{3.16}$$

$$\omega^n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^n(t)\sin(\pi ix), \tag{3.17}$$

$$\theta^n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \theta_i^n(t)\cos(\pi ix), \tag{3.18}$$

pri čemu su v_i^n, ω_i^n i θ_i^n nepoznate glatke funkcije. Ovako definirane funkcije (3.16)–(3.18) zadovoljavaju rubne uvjete

$$v^n(0,t) = v^n(1,t) = 0, \tag{3.19}$$

$$\omega^n(0,t) = \omega^n(1,t) = 0, \tag{3.20}$$

$$\partial_x\theta^n(0,t) = \partial_x\theta^n(1,t) = 0, \tag{3.21}$$

te su oni u skladu s rubnim uvjetima promatranog problema (2.89). Ovime je opravdan izbor baza (3.15).

Prema Faedo-Galerkinovoj metodi, nepoznate funkcije v^n, ω^n, i θ^n zadovoljavaju sljedeće početne uvjete koji su dobiveni projekcijom početnih uvjeta (2.88):

$$v^n(x,0) = \sum_{i=1}^{n} v_{0i}\sin(\pi ix), \tag{3.22}$$

$$\omega^n(x,0) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{0i}\sin(\pi ix), \tag{3.23}$$

$$\theta^n(x,0) = \sum_{i=0}^{n} \theta_{0i}\cos(\pi ix), \tag{3.24}$$

gdje su

$$v_{0i} = 2\int_0^1 v_0(x)\sin(\pi ix)dx, \tag{3.25}$$

$$\omega_{0i} = 2\int_0^1 \omega_0(x)\sin(\pi ix)dx, \tag{3.26}$$

$$\theta_{0i} = 2\int_0^1 \theta_0(x)\cos(\pi i x)dx, \tag{3.27}$$

za $i = 1,\dots,n$ i

$$\theta_{00} = \int_0^1 \theta_0(x)dx, \tag{3.28}$$

Fourierovi koeficijenti početnih funkcija $v_0(x)$, $\omega_0(x)$ i $\theta_0(x)$, respektivno.

Aproksimaciju ρ^n za ρ definiramo kao rješenje sljedeće početne zadaće

$$\partial_t\rho^n + \frac{1}{L}(\rho^n)^2\partial_x v^n = 0, \tag{3.29}$$

$$\rho^n(x,0) = \rho_0(x), \tag{3.30}$$

pri čemu jednadžba dolazi iz (2.84), a početni uvjet iz (2.88). Jednadžba (3.29) može se zapisati u ekvivalentnoj formi

$$\partial_t\left(\frac{1}{\rho^n}\right) = \frac{1}{L}\partial_x v^n, \tag{3.31}$$

pa rješenje početne zadaće (3.29)–(3.30) možemo zapisati eksplicitno izrazom

$$\rho^n(x,t) = \frac{L\rho_0(x)}{L+\rho_0(x)\displaystyle\int_0^t \partial_x v^n(x,\tau)\,d\tau}. \tag{3.32}$$

Označimo sa $\zeta_i^n(t)$ funkciju

$$\zeta_i^n(t) = \int_0^t v_i^n(\tau)d\tau, \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.33}$$

Tada relaciju ρ^n možemo zapisati na sljedeći način:

$$\rho^n(x,t) = \frac{L\rho_0(x)}{L+\pi\rho_0(x)\displaystyle\sum_{i=1}^n i\zeta_i^n(t)\cos(\pi i x)}. \tag{3.34}$$

Prema Faedo-Galerkinovoj metodi, tražimo da funkcije (3.16)–(3.18) zadovoljavaju i sljedeće jednadžbe:

$$\int_0^1\left[\partial_t v^n + \frac{R}{L}\partial_x((\rho^n)^p\theta^n) - \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x(\rho^n\partial_x v^n)\right]\sin(\pi i x)dx = 0, \tag{3.35}$$

$$\int_0^1\left[\partial_t\omega^n - \frac{c_0+2c_d}{L^2 j_I}\partial_x(\rho^n\partial_x\omega^n) + 4\frac{\mu_r}{j_I}\frac{\omega^n}{\rho^n}\right]\sin(\pi i x)dx = 0, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\Bigg[\partial_t\theta^n &- \frac{\kappa}{L^2 c_v}\partial_x(\rho^n\partial_x\theta^n) + \frac{R}{Lc_v}(\rho^n)^p\theta^n\partial_x v^n - \frac{\lambda+2\mu}{L^2 c_v}\rho^n(\partial_x v^n)^2 \\ &-4\frac{\mu_r}{c_v}\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} - \frac{c_0+2c_d}{L^2 c_v}\rho^n(\partial_x\omega^n)^2\Bigg]\cos(\pi j x)dx = 0,\end{aligned} \tag{3.37}$$

za $i = 1, \ldots, n$ i $j = 0, 1, \ldots, n$. Uvrštavanjem definicijskih izraza (3.16)–(3.18) u relacije (3.35)–(3.37) i korištenjem (3.33), dobivamo sljedeći sustav običnih diferencijalnih jednadžbi za nepoznate funkcije v_i^n, ω_i^n, θ_j^n i ζ_i^n

$$\dot{v}_i^n(t) = 2\int_0^1 \left[-\frac{R}{L}\partial_x((\rho^n)^p\theta^n) + \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x(\rho^n\partial_x v^n)\right]\sin(\pi i x)dx, \tag{3.38}$$

$$\dot{\omega}_i^n(t) = 2\int_0^1 \left[\frac{c_0+2c_d}{L^2 j_I}\partial_x(\rho^n\partial_x\omega^n) - 4\frac{\mu_r}{j_I}\frac{\omega^n}{\rho^n}\right]\sin(\pi i x)dx, \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j^n(t) = \lambda_j\int_0^1 \Bigg[&\frac{\kappa}{L^2 c_v}\partial_x(\rho^n\partial_x\theta^n) - \frac{R}{Lc_v}(\rho^n)^p\theta^n\partial_x v^n + \frac{\lambda+2\mu}{L^2 c_v}\rho^n(\partial_x v^n)^2\\ &+4\frac{\mu_r}{c_v}\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} + \frac{c_0+2c_d}{L^2 c_v}\rho^n(\partial_x\omega^n)^2\Bigg]\cos(\pi j x)dx,\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\dot{\zeta}_i^n(t) = v_i^n(t), \tag{3.41}$$

gdje je

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 2, & j = 1, \ldots, n \end{cases}, \tag{3.42}$$

a pripadne početne uvjete

$$v_i^n(0) = v_{0i}, \quad \omega_i^n(0) = \omega_{0i}, \quad \theta_j^n(0) = \theta_{0j}, \quad \zeta_i^n(0) = 0, \tag{3.43}$$

dobivamo iz (3.22)–(3.24).

Sustav (3.38)–(3.43) zadovoljava uvjete Picardovog teorema iskazanog u Propoziciji 1.4.1. Naime, desna strana sustava ne ovisi eksplicitno o t, a Lipschitz je neprekidna u okolini početnog uvjeta s obzirom na varijable v_i^n, ω_i^n, θ_j^n i ζ_i^n pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $T^n > 0$ takav da na $[0, T_n]$ postoji glatko rješenje tog sustava. Ovime je dokazana tvrdnja sljedeće propozicije.

Propozicija 3.2.2. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji $T_n > 0$ i jedinstvene funkcije v_i^n, ω_i^n, $i = 1, \ldots, n$, θ_j^n, $j = 0, 1, \ldots, n$ definirane na $[0, T_n]$ takve da funkcije definirane relacijama (3.16)–(3.18), (3.32) zadovoljavaju jednadžbe (3.35)–(3.37), (3.29) i početne uvjete (3.22)–(3.24), (3.30), te imaju sljedeća svojstva

$$v^n, \omega^n, \theta^n \in C^1(\overline{Q}_n), \tag{3.44}$$

$$\rho^n \in C(\overline{Q}_n), \tag{3.45}$$

pri čemu je

$$Q_n =]0,1[\times]0, T^n[, \tag{3.46}$$

Sljedeći korolar direktna je posljedica Propozicije 3.2.2, odnosno neprekidnosti funkcija ρ^n, početnog uvjeta (3.30) kojeg one zadovoljavaju te pretpostavki (3.8) i (3.6).

Korolar 3.2.3. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $T^n > 0$, takav da za funkciju ρ^n danu izrazom (3.32) vrijedi

$$\frac{m_0}{2} \leq \rho^n(x,t) \leq 2M_0, \tag{3.47}$$

za sve $(x,t) \in Q^n$ pri čemu su m_0 i M_0 definirani u (3.8) i (3.6), respektivno.

3.2.2. Pomoćne tvrdnje

U nastavku dokazujemo nekolicinu pomoćnih ocjena za niz aproksimativnih funkcija v^n, ω^n, θ^n, ρ^n koje smo definirali u prethodnom odjeljku. Kroz cijeli dokaz C, C_1, C_2, $\ldots$ oznake su za pozitivne konstante, koje na različitim mjestima mogu poprimati različite vrijednosti, ali ne ovise n, nego eventualno o početnim podacima promatranog problema.

U prvoj lemi dane su ocjene na aproksimativne početne uvjete (3.22)–(3.24). Tvrdnja neposredno slijedi iz činjenice da su skupovi $\{\sin(\pi ix) : i = 1,2,\ldots\}$ i $\{\cos(\pi ix) : i = 0,1,\ldots\}$ ortogonalni u Hilbertovom prostoru $L^2(0,1)$.

Lema 3.2.4. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} &||v^n(\cdot,0)|| \leq ||v_0||, \quad ||(v^n(\cdot,0))'|| \leq ||v_0'||,\\ &||(\omega^n(\cdot,0))'|| \leq ||\omega_0'||, \quad ||\omega^n(\cdot,0)|| \leq ||\omega_0||,\\ &||(\theta^n(\cdot,0))'|| \leq ||\theta_0'||, \quad ||\theta^n(\cdot,0)|| \leq ||\theta_0||, \end{aligned} \tag{3.48}$$

gdje je $v^n(\cdot,0)$, $\omega^n(\cdot,0)$ i $\theta^n(\cdot,0)$ dano u (3.22)–(3.24), a v_0, ω_0 i θ_0 su početni uvjeti početno-rubnog problema definirani u (2.88).

Dokaz. Skupovi $\{\sqrt{2}\sin(\pi ix) : i = 1,2,\ldots\}$ i $\{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(\pi ix) : i = 1,\ldots\}$[1] su ortonormirani u Hilbertovom prostoru $L^2(0,1)$. Iz (3.22) i (3.25) možemo zaključiti da vrijedi

$$v^n(x,0) = \sum_{i=1}^{n} \langle \sqrt{2}\sin(\pi ix), v_0 \rangle_{L^2(0,1)} \sqrt{2}\sin(\pi ix), \tag{3.49}$$

dok iz ortonormiranosti odmah slijedi i

$$||v^n(\cdot,0)||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \sqrt{2}\sin(\pi ix), v_0 \rangle_{L^2(0,1)}|^2. \tag{3.50}$$

[1] Ovdje koristimo 1 kao oznaku za konstantnu funkciju.

Besselova nejednakost (Propozicija 1.3.9) tada daje $||v^n(\cdot,0)||^2 \leq ||v_0||^2$.

Nadalje, primjenom parcijalne integracije i pretpostavke (3.5) dobivamo da vrijedi

$$v_{0i} = \frac{2}{\pi i}\int_0^1 v_0' \cos(\pi i x)dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi i}\langle v_0', \sqrt{2}\cos(\pi i x)\rangle_{L^2(0,1)}. \tag{3.51}$$

Deriviranjem izraza (3.22) nakon uvrštavanja (3.51) dobivamo

$$(v^n(x,0))' = \sum_{i=1}^{n} \pi i\, v_{0i}\cos(\pi i x) = \sum_{i=1}^{n}\langle v_0', \sqrt{2}\cos(\pi i x)\rangle_{L^2(0,1)}\sqrt{2}\cos(\pi i x), \tag{3.52}$$

a odatle zbog ortonormiranosti dobivamo da vrijedi i

$$||(v^n(\cdot,0))'||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \sqrt{2}\cos(\pi i x), v_0'\rangle_{L^2(0,1)}|^2. \tag{3.53}$$

Besselova nejednakost tada daje $||(v^n(\cdot,0))'|| \leq ||v_0'||$.

Preostale nejednakosti dobiju se na sličan način. ■

U sljedećoj lemi iz jednadžbe (3.36) izvodimo ocjenu za ω^n. Dokaz je preuzet iz [54] jer ne ovisi o eksponentu tlaka p.

Lema 3.2.5. Za sve $t \in [0,T^n]$ vrijedi

$$||\omega^n(t)||^2 + \int_0^t \big(||\omega^n(\tau)||^2 + ||\partial_x\omega^n(\tau)||^2\big)d\tau \leq C. \tag{3.54}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.36) s ω_i^n i sumiranjem po $i = 1,\dots,n$ dobivamo

$$\int_0^1 \left[\partial_t\omega^n - \frac{c_0+2c_d}{L^2 j_I}\partial_x(\rho^n\partial_x\omega^n) + \frac{4\mu_r}{j_I}\frac{\omega^n}{\rho^n}\right]\omega^n dx = 0, \tag{3.55}$$

pri čemu smo koristili definiciju funkcije ω^n danu u relaciji (3.17). Parcijalnom integracijom u drugom članu i uvrštavanjem rubnih uvjeta za ω^n iz (3.55) dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(||\omega^n(t)||^2\big) + \int_0^1 \left[\frac{c_0+2c_d}{L^2 j_I}\rho^n(\partial_x\omega^n)^2 + \frac{4\mu_r}{j_I}\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n}\right]dx = 0. \tag{3.56}$$

Integriranjem (3.56) po $[0,t]$, za $0 < t \leq T^n$, te primjenom ocjena (3.47) i (3.48) slijedi

$$||\omega^n(t)||^2 + \int_0^t \left[||\partial_x\omega^n(\tau)||^2 + ||\omega^n(\tau)||^2\right]d\tau \leq C||\omega^n(\cdot,0)||^2 \leq C||\omega_0||^2 \leq C. \tag{3.57}$$

■

Osnovni alati koji će nam omogućiti dobivanje traženih ocjena su nejednakosti navedene u odjeljku 1.3. Posebno, iz relacija (3.16)–(3.18) lako se vidi da funkcije v^n, ω^n, $\partial_x v^n$, $\partial_x\omega^n$ i $\partial_x\theta^n$ zadovoljavaju pretpostavke Propozicije 1.1.2, točnije, za njih vrijede nejednakosti (1.9)–(1.11). S druge strane, spomenute nejednakosti ne vrijede za funkcije θ^n. Budući da su takve relacije ključne u dokazu teorema lokalne egzistencije, u nastavku izvodimo rezultat sličnog tipa za funkcije θ^n, za što je prvo potrebno dokazati sljedeću lemu.

Lema 3.2.6. Za sve $t \in [0, T^n]$, vrijedi

$$\left| \int_0^1 \theta^n dx \right| \leq C\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2\big). \tag{3.58}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.35) s v_i^n i sumiranjem po $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\int_0^1 \left[\partial_t v^n + \frac{R}{L} \partial_x\big((\rho^n)^p \theta^n\big) - \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \partial_x\big(\rho^n \partial_x v^n\big) \right] v^n dx = 0. \tag{3.59}$$

Nakon primjene parcijalne integracije i uvrštavanja početnog uvjeta (3.22) u (3.59), dobivamo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\big(||v^n(t)||^2\big) - \int_0^1 \left[\frac{R}{L} (\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n - \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \rho^n (\partial_x v^n)^2 \right] dx = 0. \tag{3.60}$$

Nadalje, parcijalnom integracijom u jednadžbi (3.37) za $j = 0$ i uvrštavanjem početnog uvjeta (3.24), dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Bigg[c_v \partial_t \theta^n + \frac{R}{L} (\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n - \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \rho^n (\partial_x v^n)^2 & \\ -4\mu_r \frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} - \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \rho^n (\partial_x \omega^n)^2 \Bigg] dx = 0. & \end{aligned} \tag{3.61}$$

Zbrajanjem relacija (3.60) i (3.61) i integriranjem po $[0, t]$, za $0 < t \leq T^n$ dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} c_v \int_0^1 \theta^n dx = & -\frac{1}{2} ||v^n(t)||^2 + \frac{1}{2} ||v^n(\cdot, 0)||^2 + c_v \int_0^1 \theta^n(x, 0) dx \\ & + \int_0^t \int_0^1 \left[4\mu_r \frac{(\omega^n(x, \tau))^2}{\rho^n(x, \tau)} + \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \rho^n(x, \tau) \big(\partial_x \omega^n(x, \tau)\big)^2 \right] dx d\tau. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Hölderova nejednakost i relacija (3.54) impliciraju sljedeću ocjenu

$$\left| \int_0^1 \theta^n(x, 0) dx \right| \leq ||\theta^n(\cdot, 0)|| \leq ||\theta_0||. \tag{3.63}$$

Primjena te ocjene zajedno s relacijama (3.54) i (3.47) na (3.62) daje

$$c_v \left| \int_0^1 \theta^n dx \right| \leq \frac{1}{2} ||v^n(t)||^2 + C\left(1 + \int_0^t \int_0^1 \left[(\omega^n(x, \tau))^2 + (\partial_x \omega^n(x, \tau))^2 \right] dx d\tau \right). \tag{3.64}$$

Primjenom tvrdnje Leme 3.2.5 na (3.64) dobivamo

$$\left| \int_0^1 \theta^n dx \right| \leq C\big(1 + ||v^n(t)||^2\big) \tag{3.65}$$

iz čega, pomoću Poincaréove nejednakosti (1.9), slijedi tvrdnja leme. ■

Sada možemo dokazati relaciju analognu (1.11) koja vrijedi za θ^n. Budući da ne ovisi o p, dokaz se podudara s dokazom odgovarajuće tvrdnje u [54], a ovdje ga navodimo radi potpunosti.

Lema 3.2.7. Za sve $(x,t) \in \overline{Q}_n$, vrijedi

$$\left|\theta^n(x,t)\right| \leq C\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||\big). \tag{3.66}$$

Dokaz. Prema Propoziciji 3.2.2, θ^n je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $\overline{Q}_n$ pa za sve $t \in [0,T^n]$ postoje brojevi $x_m^n(t)$, $x_M^n(t) \in [0,1]$ takvi da vrijedi

$$m_n(t) = \min_{x\in[0,1]} \theta^n(x,t) = \theta(x_m^n(t),t), \tag{3.67}$$

$$M_n(t) = \max_{x\in[0,1]} \theta^n(x,t) = \theta(x_M^n(t),t). \tag{3.68}$$

Iz (3.67) primjenom Hölderove nejednakosti dobivamo

$$\theta^n(x,t) - m_n(t) = \int_{x_m^n(t)}^{x} \partial_x \theta^n(\xi,t) d\xi \leq \int_0^1 |\partial_x \theta^n(\xi,t)| d\xi \leq ||\partial_x \theta^n(t)||, \tag{3.69}$$

a odatle i

$$\theta^n(x,t) \leq ||\partial_x \theta^n(t)|| + m_n(t) \leq ||\partial_x \theta^n(t)|| + \left| \int_0^1 \theta^n(\xi,t) d\xi \right|. \tag{3.70}$$

Primjenom tvrdnje Leme 3.2.6 na (3.70) slijedi

$$\theta^n(x,t) \leq C\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||\big). \tag{3.71}$$

Na sličan način se dobije i ocjena odozdo za $\theta^n(x,t)$:

$$M_n(t) - \theta^n(x,t) \leq ||\partial_x \theta^n(t)||, \tag{3.72}$$

$$\theta^n(x,t) \geq -||\partial_x \theta^n(t)|| - \left| \int_0^1 \theta^n(\xi,t) d\xi \right|, \tag{3.73}$$

$$\theta^n(x,t) \geq -C\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||\big). \tag{3.74}$$

Tvrdnja leme slijedi iz (3.71) i (3.74). ■

Ocjene za derivacije

U nastavku izvodimo ocjene za derivacije aproksimativnih funkcija ρ^n, v^n, ω^n i θ^n.

Lema 3.2.8. Za sve $t \in [0,T^n]$ i $a \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left|\left|\partial_x\Big(\big(\rho^n(t)\big)^a\Big)\right|\right|^2 \leq C\big(1 + \int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\big), \tag{3.75}$$

pri čemu C ovisi o a.

Dokaz. Deriviranjem jednadžbe (3.32) po varijabli x dobivamo

$$\partial_x \rho^n(x,t) = (\rho^n(x,t))^2 \left[\frac{\rho_0'(x)}{\rho_0^2(x)} - \frac{1}{L} \int_0^1 \partial_{xx} v^n(x,\tau) d\tau \right]. \tag{3.76}$$

Primjenom pretpostavke (3.8), ocjene (3.47) te Youngove i Hölderove nejednakosti na (3.76) dobivamo

$$|\partial_x \rho^n(x,t)|^2 \leq C\Big(|\rho_0'(x)|^2 + \int_0^t |\partial_{xx} v^n(x,\tau)|^2 d\tau \Big). \tag{3.77}$$

Nakon integriranja (3.77) po $[0,1]$ dobivamo

$$||\partial_x \rho^n(t)||^2 \leq C\Big(\int_0^1 |\rho_0'(x)|^2 dx + \int_0^1 \int_0^t |\partial_{xx} v^n(x,\tau)|^2 d\tau dx \Big). \tag{3.78}$$

Budući da je po (3.5) $\rho_0 \in H^1(0,1)$, vrijedi

$$\int_0^1 |\rho_0'(x)|^2 dx = ||\rho_0'||^2 \leq ||\rho_0||^2_{H^1(0,1)} \leq C,$$

pa stoga iz (3.78) imamo

$$||\partial_x \rho^n(t)||^2 \leq C\big(1 + \int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\big). \tag{3.79}$$

Iz

$$\partial_x \Big(\big(\rho^n(x,t)\big)^a \Big) = a\big(\rho^n(t)\big)^{a-1} \partial_x \rho^n(x,t),$$

korištenjem ocjene (3.47) i relacije (3.79), dobivamo (3.75). ■

Lema 3.2.9. Za sve $t \in [0,T^n]$ vrijedi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\big(||\partial_x v^n(t)||^2\big) + ||\partial_{xx} v^n(t)||^2 \\ &\qquad \leq C\Big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + \big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\big)^4\Big). \end{aligned} \tag{3.80}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.35) s $(\pi i)^2 v_i^n(t)$ i sumiranjem po $i = 1, \ldots, n$, dobivamo

$$\int_0^1 \left[\partial_t v^n + \frac{R}{L} \partial_x((\rho^n)^p \theta^n) - \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \partial_x(\rho^n \partial_x v^n) \right] \partial_{xx} v^n dx = 0. \tag{3.81}$$

Primjenom parcijalne integracije na (3.81) te uvažavanjem definicije (3.16), dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(||\partial_x v^n(t)||^2\big) + \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \int_0^1 \rho^n \big(\partial_{xx} v^n\big)^2 dx = \sum_{i=1}^3 I_i, \tag{3.82}$$

pri čemu smo koristili sljedeće oznake

$$\begin{aligned} &I_1 = -\frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \int_0^1 \partial_x \rho^n \partial_x v^n \partial_{xx} v^n dx, \quad I_2 = \frac{R}{L} \int_0^1 \partial_x \Big((\rho^n)^p \Big) \theta^n \partial_{xx} v^n dx, \\ &I_3 = \frac{R}{L} \int_0^1 (\rho^n)^p \partial_x \theta^n \partial_{xx} v^n dx. \end{aligned} \tag{3.83}$$

U nastavku dokaza ocjenjujemo integrale I_1, I_2 i I_3.

Za I_1 imamo

$$|I_1| \leq C_1 \max_{x\in[0,1]} |\partial_x v^n| \int_0^1 \left|\partial_x \rho^n \partial_{xx} v^n\right| dx. \tag{3.84}$$

Primjenom relacije (1.10) i Hölderove nejednakosti na (3.84) slijedi

$$|I_1| \leq C||\partial_{xx} v^n(t)||^{\frac{3}{2}} ||\partial_x v^n(t)||^{\frac{1}{2}} ||\partial_x \rho^n(t)||. \tag{3.85}$$

Youngova nejednakost (1.21) s parametrima $q = \frac{4}{3}$ i $q' = 4$, za neki $0 < \alpha < 1$ koji ćemo specificirati kasnije u dokazu, te Youngova nejednakost s parametrima $q = q' = 2$, primijenjene na (3.85) daju

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}||\partial_x \rho^n(t)||^4 ||\partial_x v^n(t)||^2 \\ &\leq \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\Big(||\partial_x \rho^n(t)||^8 + ||\partial_x v^n(t)||^4\Big). \end{aligned} \tag{3.86}$$

Korištenjem ocjene (3.75) za $a = 1$ i Youngove nejednakosti iz (3.86) dobivamo sljedeću ocjenu za I_1

$$|I_1| \leq \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\Big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + \big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\big)^4\Big). \tag{3.87}$$

Korištenjem Leme 3.2.7, Hölderove i Youngove nejednakosti za I_2 dobivamo

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\theta^n| \int_0^1 \left|\partial_x \Big(\big(\rho^n\big)^p\Big) \partial_{xx} v^n\right| dx \\ &\leq C\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||\big) \left|\left|\partial_x \Big(\big(\rho^n(t)\big)^p\Big)\right|\right| ||\partial_{xx} v^n(t)|| \\ &\leq \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||\big)^2 \left|\left|\partial_x \Big(\big(\rho^n(t)\big)^p\Big)\right|\right|^2. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Ponovnom primjenom Youngove nejednakosti i ocjene (3.75) za $a = p$, iz (3.88) slijedi

$$|I_2| \leq \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\left[1 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + \Big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^4\right]. \tag{3.89}$$

Za ocjenjivanje integrala I_3 koristimo (3.47), Hölderovu i Youngovu nejednakost i dobivamo

$$\begin{aligned} |I_3| \leq C\int_0^1 |\partial_x \theta^n \partial_{xx} v^n| dx &\leq \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}||\partial_x \theta^n(t)||^2 \\ &\leq \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\Big(1 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8\Big). \end{aligned} \tag{3.90}$$

Primjenom ocjena (3.87), (3.89) i (3.90) na (3.82) dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(||\partial_x v^n(t)||^2\big) + \frac{\lambda + 2\mu}{L^2}\int_0^1 \rho^n \big(\partial_{xx} v^n\big)^2 dx \\ &\leq 3\alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\left(1 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + \Big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^4\right). \end{aligned} \tag{3.91}$$

Primjenom ocjene (3.47) na integral na lijevoj strani relacije (3.91) dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x v^n(t)||^2\right)+C_1||\partial_{xx}v^n(t)||^2 \\ &\leq 3\alpha||\partial_{xx}v^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha^3}\left(1+||\partial_x v^n(t)||^8+||\partial_x\theta^n(t)||^8+\left(\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau\right)^4\right). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Ako odaberemo α tako da vrijedi $0<\alpha<\frac{C_1}{3}$, iz (3.92) dobivamo (3.80). ∎

Lema 3.2.10. Za sve $t\in[0,T^n]$, vrijedi

$$\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\omega^n(t)||^2\right)+||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2\leq C\left(1+||\partial_x\omega^n(t)||^8+\left(\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau\right)^4\right). \tag{3.93}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.36) s $(\pi i)^2\omega_i^n(t)$ i sumiranjem po $i=1,\dots,n$, dobivamo

$$\int_0^1\left[\partial_t\omega^n-\frac{c_0+2c_d}{L^2j_I}\partial_x(\rho^n\partial_x\omega^n)+4\frac{\mu_r}{j_I}\frac{\omega^n}{\rho^n}\right]\partial_{xx}\omega^n dx=0. \tag{3.94}$$

Primjenom parcijalne integracije na (3.94) i uvrštavanjem početnog uvjeta (3.23) dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\omega^n(t)||^2\right)+\frac{c_0+2c_d}{j_IL^2}\int_0^1\rho^n\left(\partial_{xx}\omega^n\right)^2dx=\sum_{i=1}^2 I_i, \tag{3.95}$$

pri čemu smo koristili sljedeće oznake

$$I_1=-\frac{c_0+2c_d}{j_IL^2}\int_0^1\partial_x\rho^n\partial_x\omega^n\partial_{xx}\omega^n dx,\quad I_2=\frac{4\mu_r}{j_I}\int_0^1\frac{\omega^n}{\rho^n}\partial_{xx}\omega^n dx.$$

Integral I_1 ocjenjujemo na isti način kao integral I_1 u dokazu Leme 3.2.9, i dobivamo

$$|I_1|\leq\alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha^3}\left(1+||\partial_x\omega^n(t)||^8+\left(\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau\right)^4\right), \tag{3.96}$$

gdje je $0<\alpha<1$, a čiju ćemo vrijednost dodatno specificirati kasnije u dokazu.

Kako bismo ocijenili I_2 koristimo (3.47), Hölderovu i Youngovu nejednakost te Lemu 3.2.5

$$|I_2|\leq C||\partial_{xx}\omega^n(t)||\,||\omega^n(t)||\leq\alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||\omega^n(t)||^2\leq\alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha}. \tag{3.97}$$

Iz (3.95) uz pomoć ocjena (3.96) i (3.97) zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\omega^n(t)||^2\right)+\frac{c_0+2c_d}{j_IL^2}\int_0^1\rho^n\left(\partial_{xx}\omega^n\right)^2dx \\ &\quad\leq 2\alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha^3}\left(1+||\partial_x\omega^n(t)||^8+\left(\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau\right)^4\right). \end{aligned} \tag{3.98}$$

Ocjena (3.47) primijenjena na lijevoj strani relacije (3.98) daje

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\omega^n(t)||^2\right)+C_1||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 \\ &\leq 2\alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha^3}\left(1+||\partial_x\omega^n(t)||^8+\left(\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau\right)^4\right), \end{aligned} \tag{3.99}$$

Neka je $0<\alpha<\frac{C_1}{2}$. Tada iz (3.99) slijedi (3.93). ∎

Lema 3.2.11. Za sve $t \in [0, T^n]$ vrijedi

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \omega^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||^2\Big)\\&\quad + ||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2\\&\quad \le C\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x \omega^n(t)||^8 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + \Big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^4\Big).\end{aligned} \tag{3.100}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.37) s $(\pi j)^2 \theta_j^n(t)$ i sumiranjem po $j = 1, \ldots, n$, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big[&\partial_t \theta^n - \frac{\kappa}{L^2 c_v}\partial_x(\rho^n \partial_x \theta^n) + \frac{R}{L c_v}(\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n - \frac{\lambda + 2\mu}{L^2 c_v}\rho^n(\partial_x v^n)^2\\&-4\frac{\mu_r}{c_v}\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} - \frac{c_0 + 2c_d}{L^2 c_v}\rho^n(\partial_x \omega^n)^2\Big]\partial_{xx}\theta^n dx = 0.\end{aligned} \tag{3.101}$$

Primjenom parcijalne derivacije u (3.101) i uvrštavanjem relacije (3.18) dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(||\partial_x \theta^n(t)||^2\big) + \frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n\big(\partial_{xx}\theta^n\big)^2 dx = \sum_{i=1}^5 I_i, \tag{3.102}$$

gdje smo koristili sljedeće oznake

$$\begin{aligned}&I_1 = -\frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \partial_x \rho^n \partial_x \theta^n \partial_{xx}\theta^n dx, \quad I_2 = \frac{R}{c_v L}\int_0^1 \big(\rho^n\big)^p \theta^n \partial_x v^n \partial_{xx}\theta^n dx,\\&I_3 = -\frac{\lambda + 2\mu}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n\big(\partial_x v^n\big)^2 \partial_{xx}\theta^n dx, \quad I_4 = -\frac{4\mu_r}{c_v}\int_0^1 \frac{\big(\omega^n\big)^2}{\rho^n}\partial_{xx}\theta^n dx,\\&I_5 = \frac{c_0 + 2c_d}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n\big(\partial_x \omega^n\big)^2 \partial_{xx}\theta^n dx.\end{aligned} \tag{3.103}$$

Integral I_1 ocjenjujemo slično kao I_1 u dokazu Leme 3.2.9 i dobijemo

$$|I_1| \le \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\Big(1 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + \big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\big)^4\Big), \tag{3.104}$$

gdje je $0 < \alpha < 1$ parametar čiju ćemo vrijednost specificirati kasnije u dokazu.

Integral I_2 ocjenjujemo koristeći (3.47), Hölderovu i Youngovu nejednakost te Lemu 3.2.7

$$\begin{aligned}|I_2| &\le C\max_{x\in[0,1]}|\theta^n| \cdot ||\partial_x v^n(t)||\,||\partial_{xx}\theta^n(t)||\\&\le \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\max_{x\in[0,1]}|\theta^n|^2||\partial_x v^n(x)||^2\\&\le \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\big(1 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + ||\partial_x v^n(t)||^8\big).\end{aligned} \tag{3.105}$$

Integral I_3 ocjenjujemo korištenjem ocjene (3.47), Hölderove nejednakosti, relacije (1.10) i

Youngove nejednakosti (1.21), prvo s parametrima $q = q' = 2$, a zatim $q = \frac{8}{6}$, $q' = \frac{8}{2}$, te dobijemo

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\partial_x v^n| \cdot ||\partial_x v^n(t)|| \cdot ||\partial_{xx}\theta^n(t)|| \\
&\leq C||\partial_{xx} v^n(t)||^{\frac{1}{2}} \cdot ||\partial_x v^n(t)||^{\frac{3}{2}} \cdot ||\partial_{xx}\theta^n(t)|| \\
&\leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}||\partial_{xx} v^n(t)|| \cdot ||\partial_x v^n(t)||^3 \\
&\leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}||\partial_x v^n(t)||^6 \\
&\leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^8\big).
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Integral I_5 ocjenjujemo slično kao I_3 i dobijemo

$$|I_5| \leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\big(1 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8\big). \tag{3.107}$$

Za ocjenjivanje I_4 koristimo (3.47), Hölderovu nejednakost, relaciju (1.10), Lemu 3.2.5, te Youngovu nejednakost (1.21), prvo s parametrima $q = q' = 2$, a zatim $q = 8$, $q' = \frac{8}{7}$, i dobivamo

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\omega^n| \cdot ||\omega^n(t)|| \cdot ||\partial_{xx}\theta^n(t)|| \\
&\leq C||\omega^n(t)||^{\frac{3}{2}} \cdot ||\partial_x\omega^n(t)||^{\frac{1}{2}} \cdot ||\partial_{xx}\theta^n(t)|| \\
&\leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}||\partial_x\omega^n(t)|| \\
&\leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\big(1 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8\big).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Primjenom ocjena (3.104)–(3.108) na (3.102) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(||\partial_x\theta^n(t)||^2\big) + \frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n\big(\partial_{xx}\theta^n\big)^2 dx \\
&\leq 5\alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 \\
&+ \frac{C}{\alpha^3}\left(1 + ||\partial_x\theta^n(t)||^8 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8 + \left(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\right)^4\right).
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Primjenom ocjene (3.47) na lijevoj strani relacije (3.109) slijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(||\partial_x\theta^n(t)||^2\big) + ||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 \\
&\leq C\alpha\big(||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2\big) \\
&+ \frac{C}{\alpha^3}\left(1 + ||\partial_x\theta^n(t)||^8 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8 + \left(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\right)^4\right).
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Zbrajanjem nejednakosti (3.80), (3.93) i (3.110) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \omega^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||^2\Big) \\
&+ ||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \omega^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \theta^n(t)||^2 \\
\le& C_1 \alpha\big(||\partial_{xx} \theta^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \omega^n(t)||^2\big) \\
&+ \frac{C}{\alpha^3}\left(1 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x \omega^n(t)||^8 + \left(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\right)^4\right).
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Neka je $0 < \alpha < \frac{1}{C_1}$. Tada iz (3.111) slijedi (3.100). ■

3.2.3. Apriorne ocjene

U ovom odjeljku cilj nam je izvesti apriorne ocjene za aproksimativna rješenja v^n, ω^n, θ^n i ρ^n te pokazati da je moguće izabrati dovoljno mali vremenski interval $[0, T_0]$, za neki $T_0 > 0$ na kojem su aproksimativna rješenja dobro definirana i ograničena u odgovarajućim prostorima funkcija.

U sljedećoj lemi, korištenjem pomoćnih rezultata iz prethodnog odjeljka, izvodimo ocjene neovisne o n za aproksimativna rješenja.

Lema 3.2.12. Postoji $T_0 > 0$ takav da za funkcije v^n, ω^n, θ^n, ρ^n vrijede sljedeće ocjene:

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,T_0]}\Big(||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \omega^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||^2\Big) \\
&+ \int_0^{T_0}\Big(||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \omega^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \theta^n(t)||^2\Big)\, dt \le C,
\end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\max_{t\in[0,T_0]} ||\partial_x \rho^n(t)|| \le C, \tag{3.113}$$

$$\frac{m_0}{2} \le \rho^n(x,t) \le 2M_0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{3.114}$$

Dokaz. Definirajmo

$$y_n(t) = ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \omega^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau. \tag{3.115}$$

Iz Leme 3.2.11 slijedi da vrijedi

$$\dot{y}_n(t) \le A(1 + y_n^4(t)), \tag{3.116}$$

dok iz Leme 3.2.4 slijedi

$$\begin{aligned}
y_n(0) &= ||(v^n(\cdot,0))'||^2 + ||(\omega^n(\cdot,0))'||^2 + ||(\theta^n(\cdot,0))'||^2 \\
&\le ||v_0'||^2 + ||\omega_0'||^2 + ||\theta_0'||^2 \le B,
\end{aligned} \tag{3.117}$$

gdje su A, $B > 0$ konstante neovisne o n.

Početni problem

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(1+y^4(t)) \\ y(0) &= B. \end{aligned} \tag{3.118}$$

zadovoljava pretpostavke Picardovog teorema (Propozicija 1.4.1), pa možemo zaključiti da postoji $T' > 0$ i njegovo jedinstveno glatko rješenje $y : [0, T'[\to \mathbb{R}$. Po Propoziciji 1.4.3, iz (3.116)–(3.118), zaključujemo da za sve $t < T'$ vrijedi

$$y_n(t) \leq y(t), \tag{3.119}$$

odakle slijedi

$$\sup_{t\in[0,T']} y_n(t) \leq \sup_{t\in[0,T']} y(t) \leq C. \tag{3.120}$$

Kombiniranjem nejednakosti (3.100) i (3.120) te definicije (3.115), dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \omega^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||^2\Big) \\ &+ ||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \omega^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \theta^n(t)||^2 \leq C(1+y_n^4(t)) \leq C. \end{aligned} \tag{3.121}$$

Integriranjem relacije (3.121) po $[0,t]$, $0 < t < T'$ i uvažavanjem ocjene (3.117), slijedi

$$\begin{aligned} &||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \omega^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||^2 \\ &+ \int_0^t \Big(||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} \omega^n(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} \theta^n(\tau)||^2\Big) d\tau \leq T'C + B = C. \end{aligned} \tag{3.122}$$

Neka je $T_0 \in]0, T'[$. Ocjena (3.112) slijedi nakon uzimanja maksimuma po $t \in [0, T_0]$ u (3.122) budući da desna strana ne ovisi o t.

Ocjena (3.113) slijedi iz (3.112) i Leme 3.2.8 za $a = 1$.

U nastavku postavljamo dodatne restrikcije na odabir $T_0 \in]0, T'[$ tako da (3.112) vrijedi. Prvo želimo osigurati da vrijedi $\rho^n(x,t) \leq 2M_0$, $(x,t) \in \overline{Q}_0$. Iz (3.32) i (3.6) dobivamo

$$\rho^n(x,t) \leq \frac{LM_0}{\left| L - \left| \rho_0(x) \int_0^t \partial_x v^n(x,\tau)\, d\tau \right| \right|}. \tag{3.123}$$

Korištenjem relacija (3.6), (1.11), Hölderove nejednakosti i (3.112), zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \rho_0(x) \int_0^t \partial_x v^n(x,\tau)\, d\tau \right| &\leq M_0 C \int_0^{T_0} ||\partial_{xx} v^n(\tau)|| d\tau \\ &\leq M_0 C \Big(T_0 \int_0^{T_0} ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau \Big)^{\frac{1}{2}} \leq D\sqrt{T_0}, \end{aligned} \tag{3.124}$$

pri čemu konstanta $D > 0$ ne ovisi o T_0 ni o n. Za

$$0 < T_0 < \min\left\{T', \frac{L^2}{4D^2}\right\}, \tag{3.125}$$

vrijedi

$$L > \left|\rho_0(x)\int_0^t \partial_x v^n(x,\tau)\,d\tau\right|, \tag{3.126}$$

i

$$\rho^n(x,t) \leq \frac{LM_0}{L - D\sqrt{T_0}} \leq 2M_0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{3.127}$$

Nadalje, trebamo osigurati da vrijedi i $\rho^n(x,t) \geq \frac{m_0}{2}$. Korištenjem pretpostavke (3.6) i relacije (3.124) za T_0 kao u (3.125) dobivamo da vrijedi

$$L + \rho_0(x)\int_0^t \partial_x v^n(x,\tau)\,d\tau \geq L - D\sqrt{T_0} > 0. \tag{3.128}$$

Odatle, pomoću (3.32), (3.8), (3.124) i (3.125) slijedi

$$\rho^n(x,t) \geq \frac{Lm_0}{L + D\sqrt{T_0}} \geq \frac{m_0}{2} \tag{3.129}$$

za $t \in [0, T_0]$, čime je dokaz leme završen. ■

U nastavku izvodimo ocjene za vremenske derivacije aproksimativnih rješenja.

Lema 3.2.13. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Tada vrijedi

$$\int_0^{T_0} ||\partial_t v^n(t)||^2 dt \leq C. \tag{3.130}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.35) s $(v_i^n)'(t)$ i sumiranjem po $i = 1, 2, \ldots, n$, dobivamo

$$||\partial_t v^n(t)||^2 = \sum_{i=1}^4 I_i, \tag{3.131}$$

gdje smo koristili sljedeće oznake

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{R}{L}\int_0^1 \partial_x\big((\rho^n)^p\big)\theta^n \partial_t v^n dx, \quad I_2 = -\frac{R}{L}\int_0^1 (\rho^n)^p \partial_x \theta^n \partial_t v^n dx, \\ I_3 &= \frac{\lambda + 2\mu}{L^2}\int_0^1 \partial_x \rho^n \partial_x v^n \partial_t v^n dx, \quad I_4 = \frac{\lambda + 2\mu}{L^2}\int_0^1 \rho^n \partial_{xx} v^n \partial_t v^n dx. \end{aligned} \tag{3.132}$$

Primjenom Hölderove nejednakosti, Lema 3.2.7–3.2.8 te relacija (1.11) i (3.112) na (3.131) dobivamo

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\theta^n| \cdot ||\partial_x\big((\rho^n)^p\big)(t)|| \cdot ||\partial_t v^n(t)|| \\ &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\theta^n| \cdot \Big(1 + \int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^{\frac{1}{2}} ||\partial_t v^n(t)|| \\ &\leq C\Big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||\Big) ||\partial_t v^n(t)|| \\ &\leq C||\partial_t v^n(t)||, \end{aligned} \tag{3.133}$$

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq C||\partial_x\theta^n(t)||\cdot||\partial_t v^n(t)|| \leq C||\partial_t v^n(t)||, && (3.134)\\
|I_3| &\leq C\max_{x\in[0,1]}|\partial_x v^n|\cdot||\partial_x\rho^n(t)||\cdot||\partial_t v^n(t)|| \\
&\leq C||\partial_{xx}v^n||\Big(1+\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}||\partial_t v^n(t)|| && (3.135)\\
&\leq C||\partial_{xx}v^n||\cdot||\partial_t v^n(t)||,\\
|I_4| &\leq C||\partial_{xx}v^n(t)||\cdot||\partial_t v^n(t)||. && (3.136)
\end{aligned}
$$

Primjenom ocjena (3.133)–(3.136) na (3.131) dobivamo

$$
||\partial_t v^n(t)||^2 \leq C||\partial_t v^n(t)||\Big(1+||\partial_{xx}v^n(t)||\Big). \tag{3.137}
$$

Neka je $0<\alpha<1$. Youngova nejednakost primijenjena na (3.137) daje

$$
||\partial_t v^n(t)||^2 \leq \alpha||\partial_t v^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha}\Big(1+||\partial_{xx}v^n(t)||^2\Big), \tag{3.138}
$$

odnosno,

$$
||\partial_t v^n(t)||^2 \leq C\Big(1+||\partial_{xx}v^n(t)||^2\Big). \tag{3.139}
$$

Integriranjem relacije (3.139) po $[0,T_0]$, i primjenom ocjene (3.112), dobivamo (3.130). ■

Lema 3.2.14. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Tada vrijedi

$$
\int_0^{T_0}||\partial_t\omega^n(t)||^2dt \leq C. \tag{3.140}
$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.36) s $(\omega_i^n)'(t)$ i sumiranjem po $i=1,2,\ldots,n$ dobivamo

$$
||\partial_t\omega^n(t)||^2 = \sum_{i=1}^{3}I_i, \tag{3.141}
$$

pri čemu koristimo sljedeće oznake

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{c_0+2c_d}{j_IL^2}\int_0^1\partial_x\rho^n\partial_x\omega^n\partial_t\omega^n dx, \quad I_2 = \frac{c_0+2c_d}{j_IL^2}\int_0^1\rho^n\partial_{xx}\omega^n\partial_t\omega^n dx,\\
I_3 &= -\frac{4\mu_r}{c_v}\int_0^1\frac{\omega^n}{\rho^n}\partial_t\omega^n dx.
\end{aligned} \tag{3.142}
$$

Slično kao u Lemi 3.2.13, pri čemu dodatno koristimo relacije (3.114) i (1.9), ocjenjujemo članove na desnoj strani jednadžbe (3.141) i dobivamo

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq C\max_{x\in[0,1]}|\partial_x\omega^n|\cdot||\partial_x\rho^n(t)||\cdot||\partial_t\omega^n(t)||\\
&\leq C||\partial_{xx}\omega^n||\Big(1+\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}||\partial_t\theta^n(t)|| && (3.143)\\
&\leq C||\partial_{xx}\omega^n||\cdot||\partial_t\omega^n(t)||
\end{aligned}
$$

$$|I_2| \leq C||\partial_{xx}\omega^n(t)|| \cdot ||\partial_t\omega^n(t)|| \tag{3.144}$$

$$|I_3| \leq C||\omega^n(t)|| \cdot ||\partial_t\omega^n(t)|| \leq C||\partial_t\theta^n(t)||. \tag{3.145}$$

Uvažavanjem ocjena (3.143)–(3.145) u jednakosti (3.141) i primjenom Youngove nejednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned} ||\partial_t\omega^n(t)||^2 &\leq C||\partial_t\omega^n(t)||\big(1+||\partial_{xx}\omega^n(t)||\big) \\ &\leq \alpha||\partial_t\omega^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\Big(1+||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2\Big), \end{aligned} \tag{3.146}$$

pri čemu je $0 < \alpha < 1$, odnosno imamo

$$||\partial_t\omega^n(t)||^2 \leq C\Big(1+||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2\Big), \tag{3.147}$$

odakle integriranjem po $[0,T_0]$ uz primjenu (3.112) dobivamo (3.140). ■

Lema 3.2.15. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Tada vrijedi

$$\int_0^{T_0} ||\partial_t\theta^n(t)||^2 dt \leq C. \tag{3.148}$$

Dokaz. Množenjem relacije (3.37) s $(\theta_j^n)'(t)$ i sumiranjem po $j = 0,1,\ldots,n$ dobivamo

$$||\partial_t\theta^n(t)||^2 = \sum_{i=1}^{6} I_i, \tag{3.149}$$

gdje smo koristili sljedeće oznake

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \partial_x\rho^n\partial_x\theta^n\partial_t\theta^n dx, \quad I_2 = \frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n\partial_{xx}\theta^n\partial_t\theta^n dx, \\ I_3 &= -\frac{R}{Lc_v}\int_0^1 (\rho^n)^p\theta^n\partial_x v^n\partial_t\theta^n dx, \quad I_4 = \frac{\lambda+2\mu}{L^2 c_v}\int_0^1 \rho^n\big(\partial_x v^n\big)^2\partial_t\theta^n dx, \\ I_5 &= \frac{4\mu_r}{c_v}\int_0^1 \frac{(\omega^n)^2}{\rho^n}\partial_t\theta^n dx, \quad I_6 = \frac{c_0+2c_d}{L^2 c_v}\int_0^1 \rho^n\big(\partial_x\omega^n\big)^2\partial_t\theta^n dx. \end{aligned} \tag{3.150}$$

Slično kao u Lemama 3.2.13 i 3.2.14, ocjenjujemo integrale na desnoj strani (3.149) i dobivamo

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C\max_{x\in[0,1]}|\partial_x\theta^n| \cdot ||\partial_x\rho^n(t)|| \cdot ||\partial_t\theta^n(t)|| \\ &\leq C||\partial_{xx}\theta^n||\Big(1+\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}||\partial_t\theta^n(t)|| \\ &\leq C||\partial_{xx}\theta^n|| \cdot ||\partial_t\theta^n(t)|| \end{aligned} \tag{3.151}$$

$$|I_2| \leq C||\partial_{xx}\theta^n(t)|| \cdot ||\partial_t\theta^n(t)|| \tag{3.152}$$

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\theta^n| \cdot ||\partial_x v^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)|| \\
&\leq C\left(1+||\partial_x \theta^n(t)||+||\partial_x v^n(t)||^2\right) ||\partial_t \theta^n(t)|| \\
&\leq C||\partial_t \theta^n(t)||
\end{aligned} \tag{3.153}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_4| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\partial_x v^n| \cdot ||\partial_x v^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)|| \\
&\leq C||\partial_{xx} v^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)||
\end{aligned} \tag{3.154}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_5| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\omega^n| \cdot ||\omega^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)|| \\
&\leq C||\partial_x \omega^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)|| \leq C||\partial_t \theta^n(t)||
\end{aligned} \tag{3.155}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_6| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\partial_x \omega^n| \cdot ||\partial_x \omega^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)|| \\
&\leq C||\partial_{xx} \omega^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)||.
\end{aligned} \tag{3.156}
$$

Uvažavanjem ocjena (3.151)–(3.156) u jednakosti (3.149) i primjenom Youngove nejednakosti slijedi da je

$$
\begin{aligned}
||\partial_t \theta^n(t)||^2 &\leq C||\partial_t \theta^n(t)||\left(1+||\partial_{xx} v^n(t)||+||\partial_{xx} \omega^n(t)||+||\partial_{xx} \theta^n(t)||\right) \\
&\leq \alpha||\partial_t \theta^n(t)||^2+\frac{C}{\alpha}\left(1+||\partial_{xx} v^n(t)||^2+||\partial_{xx} \omega^n(t)||^2+||\partial_{xx} \theta^n(t)||^2\right),
\end{aligned} \tag{3.157}
$$

pri čemu je $0<\alpha<1$, odnosno imamo

$$
||\partial_t \theta^n(t)||^2 \leq C\left(1+||\partial_{xx} v^n(t)||^2+||\partial_{xx} \omega^n(t)||^2+||\partial_{xx} \theta^n(t)||^2\right), \tag{3.158}
$$

odakle integriranjem po $[0,T_0]$ uz primjenu (3.112) dobivamo (3.148). ■

Lema 3.2.16. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Tada vrijedi

$$
\max_{t\in[0,T_0]} ||\partial_t \rho^n(t)|| \leq C. \tag{3.159}
$$

Dokaz. Iz jednadžbe (3.29), korištenjem ocjena (3.112) i (3.114), za sve $t\in[0,T_0]$ vrijedi

$$
||\partial_t \rho^n(t)||^2 = \frac{1}{L}\int_0^1 |\rho^n|^4 |\partial_x v^n|^2 dx \leq C||\partial_x v^n(t)||^2 \leq C, \tag{3.160}
$$

odakle slijedi (3.159). ■

U sljedećoj lemi izvodimo ocjene za koeficijente v_i^n, ω_i^n i θ_i^n aproksimativnih funkcija v^n, ω^n i θ^n.

Lema 3.2.17. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Tada za sve $t\in[0,T_0]$, vrijedi

$$
\sum_{i=1}^{n}\left(v_i^n(t)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\omega_i^n(t)\right)^2+\sum_{i=0}^{n}\left(\theta_i^n(t)\right)^2 \leq C. \tag{3.161}
$$

Dokaz. Iz definicije funkcije v^n (3.16) i ortogonalnosti skupa $\{\cos(\pi ix) : i = 0, 1, \dots\}$ u Hilbertovom prostoru $L^2(0,1)$ dobivamo

$$||\partial_x v^n(t)||^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi^2 i^2}{2} \left(v_i^n(t)\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \left(v_i^n(t)\right)^2, \tag{3.162}$$

i slično

$$||\partial_x \omega^n(t)||^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\omega_i^n(t)\right)^2, \quad ||\partial_x \theta^n(t)||^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\theta_i^n(t)\right)^2. \tag{3.163}$$

Nadalje, iz (3.18) i Leme 3.2.6 dobivamo

$$|\theta_0^n(t)| = \left| \int_0^1 \theta^n dx \right| \leq C(1 + ||\partial_x v^n(t)||^2). \tag{3.164}$$

Ako uzmemo u obzir ocjenu (3.112), iz (3.162)–(3.164) slijedi tvrdnja leme. ■

Tvrdnja sljedeće leme slijedi direktno iz Propozicije 1.4.2 i apriorne ocjene iz Leme 3.2.17.

Lema 3.2.18. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ aproksimativni problem (3.22)–(3.24), (3.32), (3.35)–(3.37) ima jedinstveno glatko rješenje $(\rho^n, v^n, \omega^n, \theta^n)$ definirano na $[0, T_0]$.

Kako bismo mogli dokazati da su aproksimativna rješenja ograničena u odgovarajućim prostorima funkcija, trebamo još dokazati sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Lema 3.2.19. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Za funkcije v^n, ω^n, θ^n vrijedi

$$\max_{t\in[0,T_0]} \left(||v^n(t)||^2 + ||\omega^n(t)||^2 + ||\theta^n(t)||^2 \right) \leq C. \tag{3.165}$$

Dokaz. Koristeći ortogonalnost skupova $\{\sin(\pi ix) : i = 1, 2, \dots\}$ i $\{\cos(\pi ix) : i = 0, 1, \dots\}$ u Hilbertovom prostoru $L^2(0,1)$ i (3.161), za sve $t \in [0, T_0]$, dobivamo

$$||v^n(t)||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} v_i^n(t) v_j^n(t) \int_0^1 \sin(\pi ix)\sin(\pi jx)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(v_i^n(t)\right)^2 \leq C, \tag{3.166}$$

i slično

$$||\omega^n(t)||^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\omega_i^n(t)\right)^2 \leq C, \tag{3.167}$$

$$||\theta^n(t)||^2 = \left(\theta_0^n(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\theta_i^n(t)\right)^2 \leq C, \tag{3.168}$$

Ovime je tvrdnja leme dokazana. ■

Konačno, koristeći Leme 3.2.12–3.2.16 i 3.2.19 možemo dokazati da su nizovi aproksimativnih funkcija ρ^n, v^n, ω^n, θ^n ograničeni u odgovarajućim prostorima funkcija.

Propozicija 3.2.20. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Za nizove funkcija ρ^n, v^n, ω^n, θ^n definiranih s (3.32), (3.16)–(3.18) vrijedi

1. (ρ^n) je ograničen u $L^\infty(Q_0)$, $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$ i $H^1(Q_0)$.

2. (v^n), (ω^n), (θ^n) su ograničeni u $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$, $L^2(0,T_0;H^2(0,1))$ i $H^1(Q_0)$.

Dokaz. 1. Iz (3.114) dobivamo ograničenost u prostoru $L^\infty(Q_0)$:

$$||\rho^n||_{L^\infty(Q_0)} = \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_0} |\rho^n(t)| \leq 2M. \tag{3.169}$$

Iz (3.113)–(3.114) dobivamo ograničenost u $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$:

$$\begin{aligned} ||\rho^n||_{L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))} &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]0,T_0[} ||\rho^n(t)||_{H^1(0,1)} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]0,T_0[} \left(||\rho^n(t)||^2 + ||\partial_x\rho^n(t)||^2\right) \leq C. \end{aligned} \tag{3.170}$$

Iz (3.113)–(3.114) i (3.159) dobivamo ograničenost u $H^1(Q_0)$:

$$\begin{aligned} ||\rho^n||^2_{H^1(Q_0)} &= ||\rho^n||^2_{L^2(Q_0)} + ||\partial_x\rho^n||^2_{L^2(Q_0)} + ||\partial_t\rho^n||^2_{L^2(Q_0)} \\ &= \int_0^{T_0} \left(||\rho^n(t)||^2 + ||\partial_x\rho^n(t)||^2 + ||\partial_t\rho^n(t)||^2\right) dt \leq C. \end{aligned} \tag{3.171}$$

2. Iz (3.165) i (3.112) dobivamo ograničenost u $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$ i $L^2(0,T_0;H^2(0,1))$. Primjerice, za v^n imamo:

$$\begin{aligned} ||v^n||_{L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))} &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]0,T_0[} ||v^n(t)||_{H^1(0,1)} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in]0,T_0[} \left(||v^n(t)||^2 + ||\partial_x v^n(t)||^2\right) \leq C, \end{aligned} \tag{3.172}$$

i

$$\begin{aligned} ||v^n||_{L^2(0,T_0;H^2(0,1))} &= \int_0^{T_0} ||v^n(t)||^2_{H^2(0,1)} dt \\ &= \int_0^{T_0} \left(||v^n(t)||^2 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} v^n(t)||^2\right) dt \leq C. \end{aligned} \tag{3.173}$$

Iz (3.112), (3.130), (3.140), (3.148) i (3.165) dobivamo ograničenost u $H^1(Q_0)$. Primjerice, za v^n imamo:

$$\begin{aligned} ||v^n||^2_{H^1(Q_0)} &= ||v^n(t)||^2_{L^2(Q_0)} + ||\partial_x v^n(t)||^2_{L^2(Q_0)} + ||\partial_t v^n(t)||^2_{L^2(Q_0)} \\ &= \int_0^{T_0} \left(||v^n(t)||^2 + ||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_t v^n(t)||^2\right) dt \leq C. \end{aligned} \tag{3.174}$$

Ograničenost ostalih funkcija dokazuje se analogno.

■

3.2.4. Dokaz teorema o lokalnoj egzistenciji

U ovom odjeljku dokazujemo Teorem 3.2.1 korištenjem svojstava koje smo pokazali u prethodna dva odjeljka. U prvom koraku dokaza pokazujemo da nizovi aproksimativnih rješenja v^n, ω^n, θ^n, ρ^n definirani u odjeljku 3.2.1 konvergiraju na podnizu, a zatim prelaskom na limes u aproksimativnim jednadžbama pokazujemo da je tim limesima dano generalizirano rješenje početno-rubnog problema (2.84)–(2.89).

U naredne dvije leme pokazujemo da ograničenost nizova aproksimativnih funkcija ustanovljena u Propoziciji 3.2.20 implicira egzistenciju konvergentnog podniza u odgovarajućim prostorima funkcija. U tu svrhu koristimo klasične teoreme o kompaktnosti poput Alaoglu-ovog i Arzela-Ascolijevog teorema te ulaganja prostora funkcija.

Radi konciznosti zapisa, u nastavku ovog odjeljka sve oznake za konvergenciju nizova funkcija pretpostavljat će da se radi o konvergenciji kada n teži ka beskonačno. Dokazi sljedeće dvije leme preuzeti su iz [54] jer zaključci ovdje proizlaze iz analognih rezultata dobivenih za model koji je tamo promatran.

Lema 3.2.21. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Tada postoji funkcija

$$\rho \in L^\infty(0,T_0;H^1(0,1)) \cap H^1(Q_0) \cap C(\overline{Q}_0) \tag{3.175}$$

i podniz[2] niza (ρ^n) takav da

$$\rho^n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{u} \quad L^\infty(0,T_0;H^1(0,1)), \tag{3.176}$$

$$\rho^n \rightharpoonup \rho \quad \text{u} \quad H^1(Q_0), \tag{3.177}$$

$$\rho^n \to \rho \quad \text{u} \quad C(\overline{Q}_0). \tag{3.178}$$

Funkcija ρ ima sljedeća svojstva

$$\frac{m_0}{2} \leq \rho(x,t) \leq 2M_0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0, \tag{3.179}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{3.180}$$

pri čemu su m_0 i M_0 pozitivne konstante iz (3.8) i (3.6), a ρ_0 je iz (2.88).

Dokaz. Po Propoziciji 3.2.20, niz (ρ^n) je ograničen u $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$. Prostor $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$ je izometrički izomorfan dualu separabilnog Banachovog prostora $L^1(0,T_0;\, H^1(0,1))$, pa Propozicija 1.2.2 implicira postojanje funkcije $\rho \in L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$ i podniza za kojeg vrijedi $\rho^n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho$ u $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$.

[2] radi jednostavnosti podniz označavamo istom oznakom

Kako je $H^1(Q_0)$ refleksivan Banachov prostor, a po Propoziciji 3.2.20 (ρ^n) je ograničen u $H^1(Q_0)$, Propozicija 1.2.3 implicira postojanje podniza koji konvergira slabo k ρ u $H^1(Q_0)$.

Skup $\overline{Q}_0$ je kompaktan podskup od $\mathbb{R}^2$ i po (3.114) niz (ρ^n) je uniformno ograničen. Neka je (x,t), $(x',t') \in \overline{Q}_0$ i $n \in \mathbb{N}$. Hölderova nejednakost i relacija (3.112) impliciraju

$$\begin{aligned} |\rho^n(x,t) - \rho^n(x',t)| &= \Big| \int_{x'}^{x} \partial_\xi \rho^n(\xi,t) d\xi \Big| \\ &\leq \Big(\int_{x'}^{x} |\partial_\xi \rho^n(\xi,t)|^2 d\xi \cdot \int_{x'}^{x} d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot |x - x'|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.181}$$

dok iz jednadžbe (3.29), relacija (3.114) i (1.11), Propozicije 3.2.20 i Hölderove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} |\rho^n(x',t) - \rho^n(x',t')| &= \Big| \int_{t'}^{t} \partial_\xi \rho^n(x',\tau) d\tau \Big| \leq \int_{t'}^{t} |\rho^n(x',\tau)| \cdot |\partial_x v^n(x',\tau)| d\tau \\ &\leq C \int_{t'}^{t} ||\partial_{xx} v^n(\tau)|| d\tau \leq C \int_{t'}^{t} ||v^n(\tau)||_{H^2(0,1)} d\tau \\ &\leq C ||v^n||_{L^2(0,T_0;H^2(0,1))} |t - t'|^{\frac{1}{2}} \leq C |t - t'|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Iz (3.181)–(3.182) dobivamo

$$\begin{aligned} |\rho^n(x,t) - \rho^n(x',t')| &\leq |\rho^n(x,t) - \rho^n(x',t)| + |\rho^n(x',t) - \rho^n(x',t')| \\ &\leq C\big(|x - x'|^{\frac{1}{2}} + |t - t'|^{\frac{1}{2}}\big), \end{aligned} \tag{3.183}$$

iz čega zaključujemo da je niz (ρ^n) ekvineprekidan. Tada Propozicija 1.2.4 implicira postojanje podniza (ρ^n) koji jako konvergira k ρ u $C(\overline{Q}_0)$.

Ocjene (3.179) dobivamo iz (3.114), a (3.180) slijedi iz (3.30), (3.178) i

$$\max_{x\in[0,1]} |\rho_0(x) - \rho(x,0)| = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |\rho^n(x,0) - \rho(x,0)| = 0. \tag{3.184}$$

■

Lema 3.2.22. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Postoje funkcije

$$v,\ \omega,\ \theta \in H^1(Q_0) \cap L^2(0,T_0;H^2(0,1)) \cap L^\infty(0,T_0;H^1(0,1)) \tag{3.185}$$

i podniz[3] niza $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ takav da

$$(v^n, \omega^n, \theta^n) \rightharpoonup (v, \omega, \theta) \quad \text{u} \quad \big(H^1(Q_0)\big)^3, \tag{3.186}$$

$$(v^n, \omega^n, \theta^n) \rightharpoonup (v, \omega, \theta) \quad \text{u} \quad \big(L^2(0,T_0;H^2(0,1))\big)^3, \tag{3.187}$$

$$(v^n, \omega^n, \theta^n) \to (v, \omega, \theta) \quad \text{u} \quad \big(L^2(Q_0)\big)^3, \tag{3.188}$$

$$(v^n, \omega^n, \theta^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (v, \omega, \theta) \quad \text{u} \quad \big(L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))\big)^3. \tag{3.189}$$

[3] radi jednostavnosti podniz označavamo istom oznakom

Dokaz. Po Propoziciji 3.2.20 niz $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ je ograničen u $H^1(Q_0)$, koji je Hilbertov, pa stoga i refleksivan Banachov prostor. Propozicija 1.2.3 implicira postojanje funkcija v, ω i θ i podniza $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ koji konvergira slabo k (v, ω, θ) u $H^1(Q_0)$.

Slično, $L^2(0, T_0; H^1(0,1))$ je Hilbertov prostor, a po Propoziciji 3.2.20 je $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ u njemu ograničen. Propozicija 1.2.3 tada implicira postojanje podniza $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ koji konvergira k (v, ω, θ) u $L^2(0, T_0; H^1(0,1))$.

Po Propoziciji 1.1.3, prostor $H^1(Q_0)$ je kompaktno uložen u $L^2(Q_0)$. Budući da je $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ ograničen u $H^1(Q_0)$, postoji podniz $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ takav da $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ konvergira jako k (v, ω, θ) u $L^2(Q_0)$.

Budući da je po Propoziciji 3.2.20 niz $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ ograničen u $\left(L^\infty(0, T_0; H^1(0,1))\right)^3$, slično kao u Lemi 3.2.21 korištenjem Propozicije 1.2.2 možemo zaključiti da postoji konvergentan podniz $(v^n, \omega^n, \theta^n)$ koji konvergira slabo-* k (v, ω, θ) u $\left(L^\infty(0, T_0; H^1(0,1))\right)^3$. ■

Tvrdnja sljedećeg korolara direktna je posljedica prethodne dvije leme, a ovdje je navodimo iz praktičnih razloga, budući da ćemo se u nastavku često pozivati na njih.

Korolar 3.2.23. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Za funkcije iz Lema 3.2.21–3.2.22, vrijedi

$$(\rho^n, v^n, \omega^n, \theta^n) \rightharpoonup (\rho, v, \omega, \theta) \quad \text{u} \quad \left(L^2(Q_0)\right)^4, \tag{3.190}$$

$$(\partial_x v^n, \partial_x \omega^n, \partial_x \theta^n) \rightharpoonup (\partial_x v, \partial_x \omega, \partial_x \theta) \quad \text{u} \quad \left(L^2(Q_0)\right)^3, \tag{3.191}$$

$$(\partial_{xx} v^n, \partial_{xx} \omega^n, \partial_{xx} \theta^n) \rightharpoonup (\partial_{xx} v, \partial_{xx} \omega, \partial_{xx} \theta) \quad \text{u} \quad \left(L^2(Q_0)\right)^3, \tag{3.192}$$

$$(\partial_t v^n, \partial_t \omega^n, \partial_t \theta^n) \rightharpoonup (\partial_t v, \partial_t \omega, \partial_t \theta) \quad \text{u} \quad \left(L^2(Q_0)\right)^3. \tag{3.193}$$

U sljedećim lemama, prelaskom na limes, pokazujemo da su granične funkcije iz Lema 3.2.21–3.2.22 generalizirano rješenje početno-rubnog problema kojeg promatramo.

Lema 3.2.24. Funkcije v, ω i θ iz Leme 3.2.22 zadovoljavaju početne uvjete (2.88).

Dokaz. Pokazat ćemo da tvrdnja leme vrijedi za v, a odgovarajuće tvrdnje za ω i θ slijede analogno. Za $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v(\cdot,0) - v_0)\varphi dx = & \int_0^1 (v(\cdot,0) - v^n(\cdot,0))\varphi dx + \int_0^1 (v^n(\cdot,0) - v_0)\varphi dx \\ = & \frac{1}{T_0}\iint_{Q_0} (v - v^n)\varphi dxdt + \frac{1}{T_0}\iint_{Q_0} (\partial_t v - \partial_t v^n)(t - T_0)\varphi dxdt \\ & + \int_0^1 (v^n(\cdot,0) - v_0)\varphi dx. \end{aligned} \tag{3.194}$$

Iz (3.190) dobivamo

$$\iint_{Q_0} (v - v^n)\phi dxdt \to 0, \quad \forall \phi \in L^2(Q_0), \tag{3.195}$$

a iz (3.193)

$$\iint_{Q_0} (\partial_t v^n - \partial_t v)\phi dxdt \to 0, \quad \forall \phi \in L^2(Q_0). \tag{3.196}$$

Koristeći (3.22) i činjenicu da Fourierov red za $v_0 \in L^2(0,1)$ konvergira jako, a onda i slabo, k v_0 u $L^2(0,1)$, zaključujemo da vrijedi

$$\int_0^1 (v^n(\cdot,0) - v_0)\varphi dx \to 0. \tag{3.197}$$

Iz (3.194)–(3.197) zaključujemo da vrijedi $v(0,x) = v_0(x)$, $\forall x \in [0,1]$. ■

Lema 3.2.25. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Funkcije v, ω i θ iz Leme 3.2.22 zadovoljavaju rubne uvjete (2.89) u smislu traga na $[0,T_0]$.

Dokaz. Za $\varphi \in C_c^\infty(0,T_0)$ korištenjem relacije (3.19) dobivamo

$$\int_0^{T_0} v(0,\cdot)\varphi dt = \iint_{Q_0} (\partial_x v - \partial_x v^n)(x-1)\varphi dxdt + \iint_{Q_0} (v - v^n)\varphi dxdt. \tag{3.198}$$

Iz (3.190)–(3.191) slijedi da desna strana u (3.198) konvergira u nulu, pa dobivamo da vrijedi $v(\cdot,0) = 0$ na $[0,T_0]$. Slično, iz

$$\int_0^{T_0} v(1,\cdot)\varphi dt = \iint_{Q_0} (\partial_x v - \partial_x v^n)x\varphi dxdt + \iint_{Q_0} (v - v^n)\varphi dxdt. \tag{3.199}$$

dobivamo da je $v(1,\cdot) = 0$ na $[0,T_0]$. Analognim postupkom dobivamo i da ω zadovoljava rubne uvjete (2.89).

Za $\varphi \in C_c^\infty(0,T_0)$ korištenjem relacije (3.21) dobivamo

$$\int_0^{T_0} \partial_x\theta(0,t)\varphi(t)dt = \iint_{Q_0} (\partial_{xx}\theta - \partial_{xx}\theta^n)(x-1)\varphi dxdt + \iint_{Q_0} (\partial_x\theta - \partial_x\theta^n)\varphi dxdt, \tag{3.200}$$

$$\int_0^{T_0} \partial_x\theta(1,t)\varphi(t)dt = \iint_{Q_0} (\partial_{xx}\theta - \partial_{xx}\theta^n)x\varphi dxdt + \iint_{Q_0} (\partial_x\theta - \partial_x\theta^n)\varphi dxdt. \tag{3.201}$$

Pomoću (3.191)–(3.192) zaključujemo da desne strane u (3.200) i (3.201) konvergiraju u nulu, pa stoga vrijedi $\partial_x\theta(t,0) = \partial_x\theta(t,1) = 0$ na $]0,T_0[$. ■

Lema 3.2.26. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Funkcije ρ i v iz Lema 3.2.21–3.2.22 zadovoljavaju jednadžbu (2.84) s.s. na Q_0.

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(Q_0)$. Množenjem jednadžbe (3.29) s φ, integriranjem po Q_0, te primjenom parcijalne integracije dobivamo

$$-\iint_{Q_0} \rho^n \partial_t \varphi dxdt + \frac{1}{L} \iint_{Q_0} (\rho^n)^2 \partial_x v^n \varphi dxdt = 0. \tag{3.202}$$

Korištenjem relacije (3.190) dobivamo

$$\iint_{Q_0} \rho^n \partial_t \varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho \partial_t \varphi dxdt. \tag{3.203}$$

Relacija (3.178) implicira da $(\rho^n)^2 \to (\rho)^2$ u $C(\overline{Q_0})$. Odatle korištenjem Leme 1.2.1 (1) i relacije (3.191) dobivamo

$$\iint_{Q_0} (\rho^n)^2 \partial_x v^n \varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho^2 \partial_x v \varphi dxdt. \tag{3.204}$$

Puštanjem n u beskonačno u (3.202), primjenom relacija (3.203)–(3.204) i parcijalne integracije dobivamo

$$\iint_{Q_0} \left(\partial_t \rho + \frac{1}{L} \rho^2 \partial_x v \right) \varphi dxdt = 0, \tag{3.205}$$

čime je tvrdnja leme dokazana. ∎

Lema 3.2.27. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Funkcije ρ, v i θ iz Lema 3.2.21–3.2.22 zadovoljavaju jednadžbu (2.85) s.s. na Q_0.

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(0, T_0)$. Množenjem (3.35) s φ, integriranjem po $[0, T_0]$ i primjenom parcijalne integracije dobivamo

$$\begin{aligned} -\iint_{Q_0} v^n \sin(\pi i x) \varphi' dxdt - \frac{R\pi i}{L} \iint_{Q_0} (\rho^n)^p \theta^n \cos(\pi i x) \varphi dxdt \\ + \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \pi i \iint_{Q_0} \rho^n \partial_x v^n \cos(\pi i x) \varphi dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.206}$$

Primjenom (3.190) za prvi član u (3.206) dobivamo

$$\iint_{Q_0} v^n \sin(\pi i x) \varphi' dxdt \to \iint_{Q_0} v \sin(\pi i x) \varphi' dxdt. \tag{3.207}$$

Za drugi i treći član, korištenjem relacija (3.178), (3.190) odnosno (3.191), te Leme 1.2.1 (1) dobivamo

$$\iint_{Q_0} (\rho^n)^p \theta^n \cos(\pi i x) \varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho^p \theta \cos(\pi i x) \varphi dxdt. \tag{3.208}$$

$$\iint_{Q_0} \rho^n \partial_x v^n \cos(\pi i x) \varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho \partial_x v \cos(\pi i x) \varphi dxdt. \tag{3.209}$$

Nakon puštanja n u beskonačno u (3.206), uzimanjem u obzir relacija (3.207)–(3.209) te primjenom parcijalne integracije dobivamo tvrdnju leme. ∎

Lema 3.2.28. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Funkcije ρ i ω iz Lema 3.2.21–3.2.22 zadovoljavaju jednadžbu (2.86) s.s. na Q_0.

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(0,T_0)$. Množenjem jednadžbe (3.36) s φ, integriranjem po $[0,T_0]$ te primjenom parcijalne integracije dobivamo

$$\begin{aligned} -\iint_{Q_0} \omega^n \sin(\pi i x)\varphi' dxdt + \frac{c_0+2c_d}{L^2 j_I}\pi i \iint_{Q_0} \rho^n \partial_x \omega^n \cos(\pi i x)\varphi dxdt& \\ +\frac{4\mu_r}{j_I}\iint_{Q_0} \frac{\omega^n}{\rho^n}\sin(\pi i x)\varphi dxdt = 0.& \end{aligned} \tag{3.210}$$

Korištenjem relacije (3.190) za prvi član u (3.210) dobivamo

$$\iint_{Q_0} \omega^n \sin(\pi i x)\varphi' dxdt \to \iint_{Q_0} \omega \sin(\pi i x)\varphi' dxdt. \tag{3.211}$$

Za drugi član u (3.210), pomoću relacija (3.178), (3.190), te tvrdnje (1) iz Leme 1.2.1 dobivamo

$$\iint_{Q_0} \rho^n \partial_x \omega^n \cos(\pi i x)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho \partial_x \omega \cos(\pi i x)\varphi dxdt. \tag{3.212}$$

Iz (3.178) i (3.114) slijedi da $(\rho^n)^{-1} \to (\rho)^{-1}$ u $C(\overline{Q_0})$, što zajedno s relacijom (3.190), i tvrdnjom (1) iz Leme 1.2.1 daje

$$\iint_{Q_0} \frac{\omega^n}{\rho^n}\sin(\pi i x)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \frac{\omega}{\rho}\sin(\pi i x)\varphi dxdt. \tag{3.213}$$

Puštanjem n u beskonačno u (3.210), primjenom relacija (3.211)–(3.213) i parcijalne integracije, tvrdnja leme slijedi.

■

Lema 3.2.29. Neka je T_0 kao u Lemi 3.2.12. Funkcije ρ, v, ω i θ iz Lema 3.2.21–3.2.22 zadovoljavaju jednadžbu (2.87) s.s. na Q_0.

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(0,T_0)$. Množenjem jednadžbe (3.37) s φ, integriranjem po $[0,T_0]$, primjenom parcijalne integracije i rubnih uvjeta (3.21) dobivamo

$$\begin{aligned} &-\iint_{Q_0} \theta^n \cos(\pi j x)\varphi' dxdt - \frac{\kappa\pi j}{L^2 c_v}\iint_{Q_0} \rho^n \partial_x \theta^n \sin(\pi j x)\varphi dxdt \\ &+\frac{R}{Lc_v}\iint_{Q_0} (\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n \cos(\pi j x)\varphi dxdt - \frac{\lambda+2\mu}{L^2 c_v}\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x v^n)^2 \cos(\pi j x)\varphi dxdt \\ &-\frac{4\mu_r}{c_v}\iint_{Q_0} \frac{(\omega^n)^2}{\rho^n}\cos(\pi j x)\varphi dxdt - \frac{c_0+2c_d}{L^2 c_v}\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x \omega^n)^2 \cos(\pi j x)\varphi dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.214}$$

Za prvi član u (3.214) pomoću (3.190) dobivamo

$$\iint_{Q_0} \theta^n \cos(\pi j x)\varphi' dxdt \to \iint_{Q_0} \theta \cos(\pi j x)\varphi' dxdt. \tag{3.215}$$

Na drugi član primjenjujemo (3.178), (3.191), i relaciju (1) Leme 1.2.1 i dobivamo

$$\iint_{Q_0} \rho^n \partial_x \theta^n \sin(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho \partial_x \theta \sin(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{3.216}$$

Na treći i peti član primjenjujemo (3.178), (3.188), (3.191), odnosno (3.190) te Lemu 1.2.1 i dobivamo

$$\iint_{Q_0} (\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n \cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho^p \theta \partial_x v \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{3.217}$$

$$\iint_{Q_0} \frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} \cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \frac{\omega^2}{\rho} \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{3.218}$$

Preostaje proučiti četvrti i šesti član. Neka je

$$\iint_{Q_0} (\rho^n(\partial_x v^n)^2 - \rho(\partial_x v)^2) \cos(\pi jx)\varphi dxdt = I_1 + I_2, \tag{3.219}$$

gdje je

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{Q_0} (\rho^n - \rho)(\partial_x v^n)^2 \cos(\pi jx)\varphi dxdt, \\ I_2 &= \iint_{Q_0} \rho\left((\partial_x v^n)^2 - (\partial_x v)^2\right) \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \end{aligned} \tag{3.220}$$

Uz pomoć (3.178) i činjenice da je $(\partial_x v^n)$ ograničen u L^2 (vidjeti Propoziciju 3.2.20) dobivamo

$$|I_1| \leq ||\rho^n - \rho||_\infty \cdot ||\varphi \cos(\pi jx)||_\infty \cdot ||\partial_x v^n||^2_{L^2(Q_0)} \to 0. \tag{3.221}$$

Nadalje, primjenom parcijalne integracije i uvrštavanjem rubnih uvjeta iz (3.19), Leme 3.2.25 i (3.179) dobivamo

$$|I_2| = \left| \iint_{Q_0} \rho(\partial_x v^n - \partial_x v)(\partial_x v^n + \partial_x v) \cos(\pi jx)\varphi dxdt \right| \leq I_3 + I_4, \tag{3.222}$$

gdje je

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{Q_0} |(v^n - v)(\partial_{xx} v^n + \partial_{xx} v) \cos(\pi jx)\varphi|\, dxdt, \\ I_4 &= \iint_{Q_0} |(v^n - v)(\partial_x v^n + \partial_x v)\partial_x(\cos(\pi jx))\varphi|\, dxdt. \end{aligned} \tag{3.223}$$

Primjenom Hölderove nejednakosti, ocjene (3.112) i relacije (3.188) dobivamo

$$\begin{aligned} I_3 &\leq ||\varphi \cos(\pi ix)||_\infty ||v^n - v||_{L^2(Q_0)} \int_0^{T_0} (||\partial_{xx} v^n||^2 + ||\partial_{xx} v(t)||^2) dt \\ &\leq C||v^n - v||_{L^2(Q_0)} \left(1 + \int_0^{T_0} ||\partial_{xx} v(t)||^2 dt\right) \to 0. \end{aligned} \tag{3.224}$$

Integral I_4 ocjenjujemo korištenjem nejednakosti (1.11), Hölderove nejednakosti, ocjene (3.112) te relacije (3.188) i dobivamo

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C \int_0^{T_0} ||\partial_{xx}(v^n + v)(t)|| \int_0^1 |v^n - v| \cdot |\varphi \partial_x \big(\cos(\pi jx)\big)| dx dt \\ &\leq C \int_0^{T_0} \big(||\partial_{xx} v^n(t)|| + ||\partial_{xx} v(t)||\big) ||(v^n - v)(t)|| \cdot ||\varphi \partial_x \big(\cos(\pi jx)\big)(t)|| dt \\ &\leq C ||\varphi \partial_x \big(\cos(\pi jx)\big)||_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} ||v^n - v||_{L^2(Q_0)} \\ &\qquad \cdot \int_0^{T_0} \big(||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} v(t)||^2\big) dt \\ &\leq C ||v^n - v||_{L^2(Q_0)} \left(1 + \int_0^{T_0} ||\partial_{xx} v(t)||^2\right) dt \to 0. \end{aligned} \tag{3.225}$$

Sada iz (3.219)–(3.225) slijedi

$$\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x v^n)^2 \cos(\pi jx) \varphi dx dt \to \iint_{Q_0} \rho (\partial_x v)^2 \cos(\pi jx) \varphi dx dt. \tag{3.226}$$

Na sličan način dobije se i

$$\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x \omega^n)^2 \cos(\pi jx) \varphi dx dt \to \iint_{Q_0} \rho (\partial_x \omega)^2 \cos(\pi jx) \varphi dx dt. \tag{3.227}$$

Puštanjem n u beskonačno u (4.135), primjenom relacija (3.215)–(3.218), (3.226)–(3.227) i parcijalne integracije dobivamo tvrdnju leme. ■

Preostaje pokazati da je θ strogo pozitivna na intervalu egzistencije, odnosno da vrijedi (3.14). Dokaz je preuzet iz [54] jer ne ovisi o p nego samo o svojstvima funkcije θ.

Lema 3.2.30. Postoji $T_0 \in]0, T[$ takav da funkcija θ iz Leme 3.2.22 zadovoljava uvjet (3.14) na $\overline{Q}_0$.

Dokaz. Zbog (3.4) znamo da vrijedi $\theta \in C(\overline{Q}_0)$, pri čemu je T_0 iz Leme 3.2.12. Budući da je $\overline{Q}_0$ kompaktan, θ je uniformno neprekidna na $\overline{Q}_0$, pa stoga za $\frac{m_0}{2} > 0$ postoji $0 < T'' \leq T_0$ takav da za sve $x \in [0,1]$ i $t \in [0, T_0]$ vrijedi

$$0 \leq t \leq T'' \implies \big|\theta(x,t) - \theta(x,0)\big| < \frac{m_0}{2}, \tag{3.228}$$

gdje je m_0 iz (3.8). Koristeći pretpostavku (3.8) i Lemu (3.2.24), iz (3.228) za $(x,t) \in [0,1] \times [0, T'']$ dobivamo

$$\theta(x,t) \geq \theta_0(x) - \frac{m_0}{2} \geq \frac{m_0}{2} > 0. \tag{3.229}$$

Ako je potrebno, smanjimo vrijednost T_0 tako da bude jednako T''. ■

Tvrdnja Teorema 3.2.1 slijedi iz Lema 3.2.24–3.2.30.

3.3. JEDINSTVENOST

U ovom odjeljku dokazujemo da može postojati najviše jedno generalizirano rješenje početno-rubnog problema (2.84)–(2.89) definirano u Definiciji 3.1.1. Tvrdnja je iskazana u sljedećem teoremu, a dokaz je već objavljen u [8].

Teorem 3.3.1. Za svaki $T > 0$ postoji najviše jedno generalizirano rješenje početno-rubnog problema (2.84)–(2.89) u smislu Definicije 3.1.1 na $Q_T =]0,1[\times]0,T[$.

Teorem se dokazuje klasičnom tehnikom svođenja na kontradikciju, pri čemu je početna pretpostavka da za proizvoljno odabran i fiksiran vremenski interval sustav ima barem dva različita generalizirana rješenja. Primjenom tehnika iz [5] gdje je razmatran slučaj klasičnog fluida, te [76] gdje je razmatran idealan mikropolaran fluid, izvodi se niz ocjena pomoću kojih se dolazi do kontradikcije čime opovrgavamo istinitost početne pretpostavke.

3.3.1. Pomoćni sustav

U prvom dijelu dokaza formira se pomoćni sustav diferencijalnih jednadžbi na temelju kojeg u nastavku izvodimo tražene ocjene. Radi jednostavnosti umjesto gustoće mase ρ u ovom dokazu koristimo specifični volumen u

$$u = \frac{1}{\rho}. \tag{3.230}$$

Uvođenje specifičnog volumena opravdano je zbog svojstva (3.1) generaliziranog rješenja.

Neka je $T > 0$ proizvoljan i fiksan te neka su

$$(\rho_i, v_i, \omega_i, \theta_i), \quad i = 1,2, \tag{3.231}$$

dva različita generalizirana rješenja od (2.84)–(2.89), pri čemu koristimo i sljedeće oznake $u_i = \rho_i^{-1}$, $i = 1,2$. Napomenimo da je u_i dobro definiran zbog uvjeta stroge pozitivnosti $\operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \rho_i$ po (3.1). Nadalje, relacije (3.1) i (3.3) impliciraju da vrijedi

$$u_i \in L^\infty(Q_T), \quad \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} u_i > 0, \quad i = 1,2. \tag{3.232}$$

Iz (2.84)–(2.87), uvrštavanjem (3.230), dobivamo da su $(u_i, v_i, \omega_i, \theta_i)$, $i = 1,2$, rješenja početno-rubnog problema

$$\begin{aligned}
\partial_t u =& \frac{1}{L}\partial_x v, && (3.233)\\
\partial_t v =& -\frac{R}{L}\partial_x\left(\frac{\theta}{u^p}\right)+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x v}{u}\right), && (3.234)\\
j_I\partial_t\omega =& \frac{c_0+2c_d}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x\omega}{u}\right)-4\mu_r\omega u, && (3.235)\\
c_v\partial_t\theta =& \frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x\theta}{u}\right)-\frac{R}{L}\frac{\theta\,\partial_x v}{u^p}+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\frac{(\partial_x v)^2}{u}+\frac{c_0+2c_d}{L^2}\frac{(\partial_x\omega)^2}{u}+4\mu_r\omega^2 u, && (3.236)
\end{aligned}$$

za $(x,t)\in]0,1[\times]0,T[$,

$$u(x,0)=\frac{1}{\rho_0(x)},\quad v(x,0)=v_0(x),\quad \omega(x,0)=\omega_0(x),\quad \theta(x,0)=\theta_0(x), \tag{3.237}$$

za $x\in[0,1]$,

$$v(0,t)=v(1,t)=0,\quad \omega(0,t)=\omega(1,t)=0,\quad \partial_x\theta(0,t)=\partial_x\theta(1,t)=0, \tag{3.238}$$

za $t\in[0,T]$.

Napomenimo da relacije (1.9)–(1.11) iz Propozicije 1.1.2 vrijede za v_i, $\partial_x v_i$, ω_i, $\partial_x\omega_i$ i $\partial_x\theta_i$, ali ne i za θ_i.

Uvodimo sljedeće oznake za razlike dvaju rješenja

$$u=u_1-u_2=\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2},\quad v=v_1-v_2,\quad \omega=\omega_1-\omega_2,\quad \theta=\theta_1-\theta_2. \tag{3.239}$$

Iz (3.233)–(3.236) slijedi da funkcije definirane u (3.239) zadovoljavaju sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
\partial_t u =& \frac{1}{L}\partial_x v, && (3.240)\\
\partial_t v =& -\frac{R}{L}\partial_x\left(\frac{\theta}{u_1^p}-\frac{(u_1^p-u_2^p)\,\theta_2}{u_1^p u_2^p}\right)+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x v}{u_1}-\frac{u\,\partial_x v_2}{u_1u_2}\right), && (3.241)\\
j_I\partial_t\omega =& \frac{c_0+2c_d}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x\omega}{u_1}-\frac{u\,\partial_x\omega_2}{u_1u_2}\right)-4\mu_r\left(\omega\,u_1+u\,\omega_2\right), && (3.242)\\
c_v\partial_t\theta =& \frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x\theta}{u_1}-\frac{u\,\partial_x\theta_2}{u_1u_2}\right)-\frac{R}{L}\left(\frac{\theta_1\,\partial_x v}{u_1^p}+\frac{\theta\,\partial_x v_2}{u_1^p}-\frac{(u_1^p-u_2^p)\,\theta_2\,\partial_x v_2}{u_1^p u_2^p}\right)\\
&+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\left(\frac{(\partial_x v_1+\partial_x v_2)\,\partial_x v}{u_1}-\frac{(\partial_x v_2)^2 u}{u_1u_2}\right)\\
&+\frac{c_0+2c_d}{L^2}\left(\frac{(\partial_x\omega_1+\partial_x\omega_2)\,\partial_x\omega}{u_1}-\frac{(\partial_x\omega_2)^2 u}{u_1u_2}\right) && (3.243)\\
&+4\mu_r\left((\omega_1+\omega_2)\,u_1\omega+\omega_2^2\,u\right),
\end{aligned}$$

za $(x,t) \in \Omega_T$, dok iz (3.237)–(3.238) dobivamo da vrijede i sljedeći homogeni početni i rubni uvjeti

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad \omega(x,0) = 0, \quad \theta(x,0) = 0, \tag{3.244}$$

za $x \in [0,1]$,

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad \omega(0,t) = \omega(1,t) = 0, \quad \partial_x \theta(0,t) = \partial_x \theta(1,t) = 0, \tag{3.245}$$

za $t \in [0,T]$.

3.3.2. Pomoćne ocjene

U nastavku izvodimo ocjene za funkcije u, v, ω i θ. Osnovna ideja dokaza narednih lema je primjena integralne Grönwallove nejednakosti koja je iskazana u Propoziciji 1.3.6. Kroz dokaz s C, C_1, $C_2, \ldots$ označavamo pozitivnu konstantu koja na različitim mjestima poprima različite vrijednosti.

U prvoj lemi ocjenjujemo funkciju u.

Lema 3.3.2. Postoji $C > 0$ tako da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||u(t)||^2 \leq C \int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau. \tag{3.246}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.240) s u i integriranjem po $]0,1[$ dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||u(t)||^2\right) = \frac{1}{L}\int_0^1 u\,\partial_x v\,dx. \tag{3.247}$$

Korištenjem Hölderove i Youngove nejednakosti u (3.247) dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(||u(t)||^2\right) \leq C||u(t)|| \cdot ||\partial_x v(t)|| \leq C\left(||u(t)||^2 + ||\partial_x v(t)||^2\right). \tag{3.248}$$

Nakon integriranja (3.248) po $]0,t[$, za bilo koji $t \in]0,T[$, i uvrštavanja početnih uvjeta (3.244) dobivamo

$$||u(t)||^2 \leq C\int_0^t ||u(\tau)||^2 d\tau + C\int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau. \tag{3.249}$$

Primjenom Grönwallove nejednakosti na (3.249) slijedi (3.246). ∎

U jednadžbama (3.241) i (3.243) javljaju se i izrazi $(u_1^p - u_2^p)$ koje je također potrebno ocijeniti budući da je općenito $p \geq 1$.

Lema 3.3.3. Postoji $C > 0$ tako da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2 \leq C\int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau. \tag{3.250}$$

Dokaz. Za $p = 1$, tvrdnja je dokazana u Lemi 3.3.2.

Neka je $p > 1$. Množenjem jednadžbe (3.233), koja je zadovoljena za u_i i v_i, $i = 1,2$, s u_i^{p-1}, redom, dobivamo

$$\partial_t(u_i^p) = \frac{p}{L}\partial_x v_i\, u_i^{p-1}, \quad i = 1,2. \tag{3.251}$$

Oduzimanjem relacija (3.251) za $i = 1$ i $i = 2$ dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(u_1^p - u_2^p\right) = \frac{p}{L}\left(\partial_x v u_1^{p-1} + \partial_x v_2 \frac{u_1^p - u_2^p}{u_1} - \partial_x v_2 \frac{u_2^{p-1} u}{u_1}\right). \tag{3.252}$$

Množenjem relacije (3.252) s $(u_1^p - u_2^p)$, te nakon integriranja po $]0,1[$ dobivamo

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2\right)\\ &= \frac{p}{L}\int_0^1 \left(\partial_x v u_1^{p-1}(u_1^p - u_2^p) + \partial_x v_2 \frac{(u_1^p - u_2^p)^2}{u_1} - \partial_x v_2 \frac{u_2^{p-1} u}{u_1}(u_1^p - u_2^p)\right) dx.\end{aligned} \tag{3.253}$$

Korištenjem svojstava generaliziranog rješenja (3.232), relacije (3.230), primjenom Hölderove i Youngove nejednakosti te Propozicije 1.1.2, dobivamo sljedeće ocjene za integrale na desnoj strani nejednakosti (3.253)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \partial_x v u_1^{p-1}(u_1^p - u_2^p)\, dx\right| &\le C||\partial_x v(t)|| \cdot ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||\\ &\le C\left(||\partial_x v(t)||^2 + ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2\right),\end{aligned} \tag{3.254}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \partial_x v_2 \frac{(u_1^p - u_2^p)^2}{u_1}\, dx\right| &\le C||\partial_{xx} v_2|| \cdot ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2\\ &\le C\left(1 + ||\partial_{xx} v_2(t)||^2\right)||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2,\end{aligned} \tag{3.255}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \partial_x v_2 \frac{u_2^{p-1} u}{u_1}(u_1^p - u_2^p)\, dx\right| &\le C||\partial_{xx} v_2(t)|| \cdot ||u(t)|| \cdot ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||\\ &\le C\left(1 + ||\partial_{xx} v_2(t)||^2\right)\left(||u(t)||^2 + ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2\right).\end{aligned} \tag{3.256}$$

Integriranjem (3.253) po $]0,t[$, za bilo koji $t \in]0,T[$, uvažavanjem relacija (3.254)–(3.256), i uvrštavanjem početnih uvjeta (3.244) dobivamo

$$\begin{aligned}||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2 \le\, & C\int_0^t \left(1 + ||\partial_{xx} v_2(\tau)||^2\right)||u_1^p(\tau) - u_2^p(\tau)||^2 d\tau\\ &+ C\int_0^t \left(1 + ||\partial_{xx} v_2(\tau)||^2\right)||u(\tau)||^2 d\tau + C\int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau.\end{aligned} \tag{3.257}$$

Ocjene (3.246) i (3.257) zajedno sa svojstvom (3.2) generaliziranog rješenja daju

$$\begin{aligned}&||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2\\ &\le C\int_0^t \left(1 + ||\partial_{xx} v_2(\tau)||^2\right)||u_1^p(\tau) - u_2^p(\tau)||^2 d\tau + C\int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau.\end{aligned} \tag{3.258}$$

Konačno, Grönwallova nejednakost i (3.2) daju tvrdnju leme. ∎

U naredne dvije leme izvedene su ocjene za v i ω.

Lema 3.3.4. Postoji $C>0$ tako da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$||v(t)||^2+\int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau \le C\int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau. \tag{3.259}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.241) s v, integriranjem po $]0,1[$, nakon primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (3.245) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||v(t)||^2\right)+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\frac{(\partial_x v)^2}{u_1}dx =& \frac{R}{L}\int_0^1\frac{\theta\partial_x v}{u_1^p}dx-\frac{R}{L}\int_0^1\frac{(u_1^p-u_2^p)\theta_2\partial_x v}{u_1^p u_2^p}dx\\ &+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\frac{u\partial_x v\,\partial_x v_2}{u_1u_2}dx.\end{aligned}\tag{3.260}$$

Uvažavanjem svojstva (3.232) i relacije (3.230) dobivamo ocjenu odozdo za integral na lijevoj strani relacije (3.260)

$$\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\frac{(\partial_x v)^2}{u_1}dx\ge C_1||\partial_x v(t)||^2. \tag{3.261}$$

Korištenjem svojstava generaliziranog rješenja (3.232), (3.4), relacije (3.230), te primjenom Hölderove i Youngove nejednakosti, Propozicije 1.1.2 ocjenjujemo integrale na desnoj strani relacije (3.260) i dobivamo

$$\left|\int_0^1\frac{\theta\partial_x v}{u_1^p}dx\right|\le C||\theta(t)||\cdot||\partial_x v(t)||\le\alpha||\partial_x v(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||\theta(t)||^2, \tag{3.262}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\frac{(u_1^p-u_2^p)\theta_2\partial_x v}{u_1^p u_2^p}dx\right| &\le C||u_1^p(t)-u_2^p(t)||\cdot||\partial_x v(t)||^2\\ &\le\alpha||\partial_x v(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||u_1^p(t)-u_2^p(t)||^2,\end{aligned}\tag{3.263}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\frac{u\partial_x v\,\partial_x v_2}{u_1u_2}dx\right| &\le C||\partial_{xx}v_2(t)||\cdot||u(t)||\cdot||\partial_x v(t)||\\ &\le\alpha||\partial_x v(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||u(t)||^2\,||\partial_{xx}v_2(t)||^2,\end{aligned}\tag{3.264}$$

pri čemu je $\alpha>0$ te će njegova vrijednost biti specificirana kasnije. Integriranjem relacije (3.260) po $]0,t[$ za bilo koji $t\in]0,T[$, uvažavanjem ocjena (3.261)–(3.264), i uvrštavanjem početnih uvjeta (3.244) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||v(t)||^2+C_1\int_0^t||\partial_x v(\tau)||^2d\tau &\le 3\alpha\int_0^t||\partial_x v(\tau)||^2d\tau\\ &+\frac{C}{\alpha}\int_0^t\left(||\theta(\tau)||^2+||u_1^p(\tau)-u_2^p(\tau)||^2+||u(\tau)||^2\,||\partial_{xx}v_2(\tau)||^2\right)d\tau.\end{aligned}\tag{3.265}$$

Ocjene (3.246), (3.250) i (3.265) daju

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||v(t)||^2+C_1\int_0^t||\partial_x v(\tau)||^2d\tau &\le 3\alpha\int_0^t||\partial_x v(\tau)||^2d\tau+\frac{C}{\alpha}\int_0^t||\theta(\tau)||^2d\tau\\ &+\frac{C}{\alpha}\int_0^t\left(1+||\partial_{xx}v_2(\tau)||^2\right)\int_0^\tau||\partial_x v(s)||^2ds\,d\tau.\end{aligned}\tag{3.266}$$

Neka je $\alpha < \frac{C_1}{3}$. Iz (3.266) dobivamo

$$\begin{aligned} ||v(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau \leq & C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau \\ & + C \int_0^t \left(1 + ||\partial_{xx} v_2(\tau)||^2\right) \int_0^\tau ||\partial_x v(s)||^2 ds\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.267}$$

Konačno, korištenjem Grönwallove nejednakosti i svojstva (3.2) iz (3.267) dobivamo tvrdnju leme. ■

Lema 3.3.5. Postoji $C > 0$ tako da za sve $t \in]0, T[$ vrijedi

$$||\omega(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x \omega(\tau)||^2 d\tau \leq C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau. \tag{3.268}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (3.242) s ω, integriranjem po $]0,1[$, nakon primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (3.245) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{j_I}{2} \frac{d}{dt} \left(||\omega(t)||^2\right) + \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \int_0^1 \frac{(\partial_x \omega)^2}{u_1} dx = & \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \int_0^1 \frac{u \partial_x \omega\, \partial_x \omega_2}{u_1 u_2} dx \\ & - 4\mu_r \int_0^1 \left(u_1 \omega^2 + u\, \omega_2 \omega\right) dx. \end{aligned} \tag{3.269}$$

Uvažavanjem svojstva (3.232) dobivamo ocjenu odozdo za integral na lijevoj strani relacije (3.269)

$$\frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \int_0^1 \frac{(\partial_x \omega)^2}{u_1} dx \geq C_2 ||\partial_x \omega(t)||^2. \tag{3.270}$$

Koristeći svojstva (3.232), (3.4), te primjenom Hölderove i Youngove nejednakosti i Propozicije 1.1.2 za neki $\alpha > 0$ čiju ćemo vrijednost specificirati naknadno, dobivamo sljedeće ocjene za integrale na desnoj strani relacije (3.269)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{u \partial_x \omega\, \partial_x \omega_2}{u_1 u_2} dx \right| & \leq C ||\partial_{xx} \omega_2(t)|| \cdot ||u(t)|| \cdot ||\partial_x \omega(t)|| \\ & \leq \alpha ||\partial_x \omega(t)||^2 + \frac{C}{\alpha} ||u(t)||^2\, ||\partial_{xx} \omega_2(t)||^2, \end{aligned} \tag{3.271}$$

$$\left| \int_0^1 u_1 \omega^2\, dx \right| \leq C ||\omega(t)||^2, \tag{3.272}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 u\, \omega_2 \omega\, dx \right| & \leq C ||u(t)|| \cdot ||\omega(t)|| \leq C ||u(t)|| \cdot ||\partial_x \omega(t)|| \\ & \leq \alpha ||\partial_x \omega(t)||^2 + \frac{C}{\alpha} ||u(t)||^2. \end{aligned} \tag{3.273}$$

Integriranjem relacije (3.269) po $]0,t[$ za bilo koji $t \in]0,T[$, uvažavanjem ocjena (3.270)–(3.273), nakon uvrštavanja početnih uvjeta (3.244) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{j_I}{2} ||\omega(t)||^2 + C_2 \int_0^t ||\partial_x \omega(\tau)||^2 d\tau \leq & 2\alpha \int_0^t ||\partial_x \omega(\tau)||^2 d\tau + C \int_0^t ||\omega(\tau)||^2 d\tau \\ & + \frac{C}{\alpha} \int_0^t \left(1 + ||\partial_{xx} \omega_2(\tau)||^2\right) ||u(\tau)||^2 d\tau. \end{aligned} \tag{3.274}$$

Neka je $\alpha < \frac{C_2}{2}$. Primjenom ocjene (3.246) u (3.274) dobivamo

$$\begin{aligned} ||\omega(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x \omega(\tau)||^2 d\tau \leq & C \int_0^t ||\omega(\tau)||^2 d\tau \\ & + C \int_0^t \left(1 + ||\partial_{xx}\omega_2(\tau)||^2\right) \int_0^\tau ||\partial_x v(s)||^2 ds\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.275}$$

Primjenom ocjene (3.259) i svojstva (3.2) u (3.275) dobivamo

$$||\omega(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x \omega(\tau)||^2 d\tau \leq C \int_0^t ||\omega(\tau)||^2 d\tau + C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau. \tag{3.276}$$

Primjenom Grönwallove nejednakosti iz (3.276) dobivamo (3.268). ■

U sljedećem korolaru objedinjene su ocjene (3.246), (3.250), (3.259) i (3.268).

Korolar 3.3.6. Postoji $C > 0$ tako da za sve $t \in]0, T[$ vrijedi

$$\begin{aligned} ||u(t)||^2 + ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2 + ||v(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 + \int_0^t \left(||\partial_x v(\tau)||^2 + ||\partial_x \omega(\tau)||^2\right) d\tau \\ \leq C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau. \end{aligned} \tag{3.277}$$

3.3.3. Dokaz teorema o jedinstvenosti

Množenjem jednadžbe (3.243) s θ, integriranjem po $]0,1[$, nakon primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (3.245) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{2} \frac{d}{dt}\left(||\theta(t)||^2\right) + \frac{\kappa}{L^2} \int_0^1 \frac{(\partial_x \theta)^2}{u_1} dx = & \frac{\kappa}{L^2} \int_0^1 \frac{u \partial_x \theta\, \partial_x \theta_2}{u_1 u_2} dx \\ & - \frac{R}{L} \int_0^1 \left(\frac{\theta_1 \partial_x v}{u_1^p} + \frac{\theta \partial_x v_2}{u_1^p} - \frac{(u_1^p - u_2^p)\theta_2 \partial_x v_2}{u_1^p u_2^p} \right) \theta\, dx \\ & + \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial_x v}{u_1}(\partial_x v_1 + \partial_x v_2) - \frac{(\partial_x v_2)^2 u}{u_1 u_2} \right) \theta\, dx \\ & + \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial_x \omega}{u_1}(\partial_x \omega_1 + \partial_x \omega_2) - \frac{(\partial_x \omega_2)^2 u}{u_1 u_2} \right) \theta\, dx \\ & + 4\mu_r \int_0^1 \left((\omega_1 + \omega_2)\omega u_1 \theta + \omega_2^2 u \theta \right) dx. \end{aligned} \tag{3.278}$$

Korištenjem svojstava (3.232) ocjenjujemo odozdo integral na lijevoj strani od (3.278)

$$\frac{\kappa}{L^2} \int_0^1 \frac{(\partial_x \theta)^2}{u_1} dx \geq C_3 ||\partial_x \theta(t)||^2. \tag{3.279}$$

Uvažavanjem svojstava (3.2), (3.4), (3.9), (3.232), nakon primjene Hölderove i Youngove nejednakosti te Propozicije 1.1.2, za neki $\alpha > 0$, dobivamo sljedeće ocjene za integrale na desnoj strani relacije (3.278)

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{u \partial_x \theta \, \partial_x \theta_2}{u_1 u_2} \, dx \right| &\le C ||\partial_{xx} \theta_2(t)|| \cdot ||u(t)|| \cdot ||\partial_x \theta(t)|| \\
&\le \alpha ||\partial_x \theta(t)||^2 + \frac{C}{\alpha} ||\partial_{xx} \theta_2(t)||^2 \cdot ||u(t)||^2,
\end{aligned} \tag{3.280}
$$

$$
\left| \int_0^1 \frac{\theta_1 \theta \partial_x v}{u_1^p} \, dx \right| \le C ||\partial_x v(t)|| \cdot ||\theta(t)|| \le C ||\partial_x v(t)||^2 + C ||\theta(t)||^2, \tag{3.281}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{\theta^2 \partial_x v_2}{u_1^p} \, dx \right| &\le C ||\partial_{xx} v_2(t)|| \cdot ||\theta(t)||^2 \\
&\le C \left(1 + ||\partial_{xx} v_2(t)||^2 \right) ||\theta(t)||^2,
\end{aligned} \tag{3.282}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{(u_1^p - u_2^p) \theta_2 \theta \partial_x v_2}{u_1^p u_2^p} \, dx \right| &\le C ||\partial_{xx} v_2(t)|| \cdot ||u_1^p(t) - u_2^p(t)|| \cdot ||\theta(t)|| \\
&\le C ||\partial_{xx} v_2(t)||^2 \cdot ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2 + C ||\theta(t)||^2,
\end{aligned} \tag{3.283}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{\partial_x v}{u_1} (\partial_x v_1 + \partial_x v_2) \theta \, dx \right| &\le C \left(||\partial_{xx} v_1(t)|| + ||\partial_{xx} v_2(t)|| \right) ||\partial_x v(t)|| \cdot ||\theta(t)|| \\
&\le C ||\partial_x v(t)||^2 + C \left(||\partial_{xx} v_1(t)||^2 + ||\partial_{xx} v_2(t)||^2 \right) ||\theta(t)||^2,
\end{aligned} \tag{3.284}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{(\partial_x v_2)^2 u \theta}{u_1 u_2} \, dx \right| &\le C ||\partial_{xx} v_2(t)||^2 \cdot ||u(t)|| \cdot ||\theta(t)|| \\
&\le C ||\partial_{xx} v_2(t)||^2 \left(||u(t)||^2 + ||\theta(t)||^2 \right),
\end{aligned} \tag{3.285}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{\partial_x \omega}{u_1} (\partial_x \omega_1 + \partial_x \omega_2) \theta \, dx \right| &\le C \left(||\partial_{xx} \omega_1(t)|| + ||\partial_{xx} \omega_2(t)|| \right) ||\partial_x \omega(t)|| \cdot ||\theta(t)|| \\
&\le C ||\partial_x \omega(t)||^2 + C \left(||\partial_{xx} \omega_1(t)||^2 + ||\partial_{xx} \omega_2(t)||^2 \right) ||\theta(t)||^2,
\end{aligned} \tag{3.286}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{(\partial_x \omega_2)^2 u \theta}{u_1 u_2} \, dx \right| &\le C ||\partial_{xx} \omega_2(t)||^2 \cdot ||u(t)|| \cdot ||\theta(t)|| \\
&\le C ||\partial_{xx} \omega_2(t)||^2 \left(||u(t)||^2 + ||\theta(t)||^2 \right),
\end{aligned} \tag{3.287}
$$

$$
\left| \int_0^1 (\omega_1 + \omega_2) \omega u_1 \theta \, dx \right| \le C ||\omega(t)|| \cdot ||u(t)|| \le C ||\partial_x \omega(t)||^2 + C ||u(t)||^2, \tag{3.288}
$$

$$
\left| \int_0^1 \omega_2^2 u \theta \, dx \right| \le C ||\theta(t)|| \cdot ||u(t)|| \le C ||\theta(t)||^2 + C ||u(t)||^2. \tag{3.289}
$$

Integriranjem relacije (3.278) po $]0,t[$ za bilo koji $t \in]0,T[$, nakon uvažavanja ocjena (3.279)–(3.289) i uvrštavanja početnog uvjeta (3.244) dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{c_v}{2} ||\theta(t)||^2 + C_3 \int_0^t ||\partial_x \theta(\tau)||^2 d\tau \le \int_0^t \Big[\alpha ||\partial_x \theta(\tau)||^2 + \frac{C}{\alpha} ||\partial_{xx} \theta_2(\tau)||^2 \cdot ||u(\tau)||^2 \\
&\quad + C \left(||\partial_x v(\tau)||^2 + ||\partial_x \omega(\tau)||^2 \right) + C \left(||\theta(\tau)||^2 + ||u(\tau)||^2 + ||u_1^p(\tau) - u_2^p(\tau)||^2 \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(1 + ||\partial_{xx} v_1(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} v_2(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} \omega_1(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} \omega_2(\tau)||^2 \right) \Big] d\tau.
\end{aligned} \tag{3.290}
$$

Neka je $\alpha < C_3$. Iz (3.290) dobivamo

$$||\theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x\theta(\tau)||^2 d\tau \leq C\int_0^t \Big[||\partial_x v(\tau)||^2 + ||\partial_x\omega(\tau)||^2 + W(\tau)\left(||\theta(\tau)||^2 + ||u(\tau)||^2 + ||u_1^p(\tau) - u_2^p(\tau)||^2\right)\Big] d\tau, \tag{3.291}$$

gdje je

$$W(t) = 1 + ||\partial_{xx}v_1(t)||^2 + ||\partial_{xx}v_2(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega_1(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega_2(t)||^2 + ||\partial_{xx}\theta_2(t)||^2, \tag{3.292}$$

za $t \in]0,T[$. Primjenom ocjene (3.277) u (3.291) dobivamo

$$||\theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x\theta(\tau)||^2 d\tau \leq C\int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau + C\int_0^t W(\tau)\left(||\theta(\tau)||^2 + \int_0^\tau ||\theta(s)||^2 ds\right) d\tau, \tag{3.293}$$

Svojstvo (3.2) daje

$$\int_0^t W(\tau)d\tau \leq C, \tag{3.294}$$

pa iz (3.293) dobivamo

$$||\theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x\theta(\tau)||^2 d\tau \leq C\int_0^t W(\tau)||\theta(\tau)||^2 d\tau, \tag{3.295}$$

Grönwallova nejednakost zajedno s (3.294) daje

$$||\theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x\theta(\tau)||^2 d\tau \leq 0, \tag{3.296}$$

odnosno

$$\theta = 0 \quad \text{na} \quad Q_T. \tag{3.297}$$

Konačno, zbog (3.297) iz (3.277) dobivamo i

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{na} \quad Q_T, \tag{3.298}$$

čime je dokaz Teorema 3.3.1 završen.

3.4. GLOBALNA EGZISTENCIJA

Dosad smo pokazali da početno-rubni problem (2.84)–(2.89) ima generalizirano rješenje na nekom dovoljno malom vremenskom intervalu $[0,T_0]$ te da je ono nužno jedinstveno. U ovom odjeljku dokazujemo da jedinstveno generalizirano rješenje postoji i na svakom konačnom vremenskom intervalu $[0,T]$, $T>0$, odnosno globalno po vremenu. U sljedećem teoremu dan je formalan iskaz ove tvrdnje. Istaknimo da se pretpostavka o konačnoj duljini intervala egzistencije pokazuje nužnom u njegovom dokazu.

Teorem 3.4.1. Neka funkcije ρ_0, v_0, ω_0 i θ_0 zadovoljavaju uvjete (3.5) i (3.8). Tada za svaki $T>0$ postoji generalizirano rješenje (ρ,v,ω,θ) početno-rubnog problema (2.84)–(2.89) u smislu Definicije 3.1.1 na $Q_T =]0,1[\times]0,T[$ sa svojstvom

$$\theta > 0 \quad \text{na} \quad \overline{Q}_T. \tag{3.299}$$

Napomenimo da Teorem 3.4.1 vrijedi za sve $p \geq 1$, ali u ovom radu dokazujemo samo slučaj $p>1$. Taj je dokaz već objavljen u [7], a tvrdnju teorema za $p=1$ ranije je pokazala Mujaković u [53].

Ideja i osnovne tehnike dokaza Teorema 3.4.1 potječu iz [5], dok su neke tehnike svojstvene za mikropolaran fluid preuzete iz [28, 32, 53], ali se pokazuje da ih je potrebno značajno prilagoditi novom problemu. Dokaz se bazira na primjeni principa proširenja (vidjeti [5, 28, 39]) te Teorema o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti generaliziranog rješenja, odnosno Teorema 3.2.1 i Teorema 3.3.1. Naime, pokazuje se da je generalizirano rješenje moguće na jedinstven način proširivati u vremenskoj domeni dok god vrijedi (3.5) i (3.8). U nastavku detaljnije opisujemo ovaj postupak.

Neka je $T>0$ proizvoljan, ali fiksan. Po Teoremima 3.2.1 i 3.3.1 slijedi da postoji $T_0>0$ i jedinstveno generalizirano rješenje na vremenskom intervalu $[0,T_0]$. Ako je $T_0 \geq T$, dokaz je završen. Neka je stoga $T_0<T$. Budući da funkcije $\rho(\cdot,T_0)$, $v(\cdot,T_0)$, $\omega(\cdot,T_0)$ i $\theta(\cdot,T_0)$ zadovoljavaju uvjete za početne funkcije iz Teorema 3.2.1 i 3.3.1, postoji $T_1>0$ i jedinstveno generalizirano rješenje problema (2.84)–(2.89) na $[0,1]\times[T_0,T_0+T_1]$ pri čemu su početne funkcije dane s

$$\rho_0(x)=\rho(x,T_0), \quad v_0(x)=v(x,T_0), \quad \omega_0(x)=\omega(x,T_0), \quad \theta_0(x)=\theta(x,T_0), \tag{3.300}$$

za $x\in[0,1]$. Drugim riječima, generalizirano rješenje možemo na jedinstven način proširiti s intervala $[0,T_0]$ na $[0,T_0+T_1]$.

Ako je $T_0 + T_1 \geq T$, dokaz je završen, a u suprotnom postupak ponavljamo. Naime, na početku k-tog koraka znamo da postoji jedinstveno generalizirano rješenje na $[0, \sum_{i=0}^{k-1} T_i]$. Primijenimo teoreme o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti za početno-rubni problem (2.84)–(2.89) s početnim funkcijama

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= \rho\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} T_i\right), \quad v_0(x) = v\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} T_i\right), \\ \omega_0(x) &= \omega\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} T_i\right), \quad \theta_0(x) = \theta\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} T_i\right), \end{aligned} \tag{3.301}$$

te dobijemo $T_k > 0$ i jedinstveno generalizirano rješenje problema na $[0,1] \times [\sum_{i=0}^{k-1} T_i, \sum_{i=0}^{k} T_i]$. Generalizirano rješenje tada možemo proširiti s intervala $[0, \sum_{i=0}^{k-1} T_i]$ na interval $[0, \sum_{i=0}^{k} T_i]$. Proces zaustavljamo ako se ispuni uvjet $\sum_{i=0}^{k} T_i \geq T$ za neki $k \in \mathbb{N}$ i tada je dokaz teorema završen.

Preostaje razmotriti slučaj kada je

$$\tilde{T}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} T_i < T. \tag{3.302}$$

U tom slučaju princip proširenja možemo primijeniti uz pretpostavku da vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 3.4.2. Neka je $T > 0$. Ako je $(\rho, v, \omega, \theta)$ generalizirano rješenje početno-rubnog problema (2.84)–(2.89) na $Q_{T'} =]0,1[\times]0,T'[$, za sve $T' \in]0,T[$, takvo da vrijedi $\theta > 0$ na $\overline{Q}_{T'}$, onda je $(\rho, v, \omega, \theta)$ generalizirano rješenje od (2.84)–(2.89) na Q_T za koje vrijedi $\theta > 0$ na $\overline{Q}_T$.

Naime, pretpostavka Propozicije 3.4.2 je ispunjena za $T' = \tilde{T}_0$ definiran u (3.302), te stoga tvrdnja propozicije osigurava postojanje jedinstvenog generaliziranog rješenja na zatvorenom intervalu $[0, \tilde{T}_0]$. To znači da, slično kao i ranije, funkcije $\rho(\cdot, \tilde{T}_0)$, $v(\cdot, \tilde{T}_0)$, $\omega(\cdot, \tilde{T}_0)$ i $\theta(\cdot, \tilde{T}_0)$ zadovoljavaju uvjete za početne funkcije iz Teorema 3.2.1 i 3.3.1, pa postoji $\tilde{T}_1 > 0$ i jedinstveno generalizirano rješenje problema (2.84)–(2.89) na $Q_{\tilde{T}_0 + \tilde{T}_1}$. Proces proširivanja se nastavlja dok se ne dosegne vremenski interval $[0, T]$.

Kako bi dokaz Teorema 3.4.1 bio potpun, moramo još dokazati Propoziciju 3.4.2. Propoziciju dokazujemo u nastavku ovog poglavlja kroz niz lema. Dokaz je podijeljen na nekoliko dijelova, pri čemu je ključno dobivanje globalnih apriornih ocjena za generalizirano rješenje koje ovise samo o početnim podacima i fiksiranoj duljini vremenskog intervala $T > 0$, ali ne i T'.

U nastavku pretpostavljamo da vrijede pretpostavke Propozicije 3.4.2 te s $C, C_1, C_2, \dots$ označavamo pozitivne konstante koje na različitim mjestima mogu poprimiti različite vrijednosti i koje ovise samo o početnim podacima i T.

3.4.1. Ocjene odozdo za θ i ρ

Kako bismo mogli dobiti globalne apriorne ocjene za generalizirano rješenje, najprije moramo dokazati nekolicinu svojstava funkcija ρ i θ, od kojih su najvažnije, ali i najkompleksnije za dokazati, uniformne ocjene odozdo. Ključni koncepti korišteni u dokazu su generalizirana energetska ocjena i generalizirana Kazhikova reprezentacija gustoće mase. Spomenuti koncepti su bazirani na idejama iz [5, 53], ali su posebno prilagođeni novom modelu.

Generalizirana energetska ocjena

Započinjemo s izvođenjem generalizirane energetske ocjene.

Lema 3.4.3 (Generalizirana energetska ocjena)**.** Neka je $p > 1$ i U generalizirana energetska funkcija dana s

$$U(x,t) = \frac{v^2}{2} + j_I \frac{\omega^2}{2} + R\vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right) + c_v \psi(\theta), \tag{3.303}$$

gdje su

$$\vartheta(x) = x + \frac{x^{1-p} - p}{p-1},\ x > 0 \tag{3.304}$$

i

$$\psi(x) = x - \ln x - 1 \tag{3.305}$$

nenegativne konveksne funkcije.

Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $t \in]0, T[$ vrijedi

$$\int_0^1 U dx + \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \frac{\rho(\partial_x v)^2}{\theta} + \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \frac{\rho(\partial_x \omega)^2}{\theta} + \frac{\kappa}{L^2} \frac{\rho(\partial_x \theta)^2}{\theta^2} \right) dxdt \le C. \tag{3.306}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbi (2.84)–(2.87) s $R\left(-\rho^{-2} + \rho^{p-2}\right)$, v, ω i $\left(1 - \theta^{-1}\right)$, redom, nakon integriranja po $[0,1]$, zbrajanja, primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_0^1 U dx + \int_0^1 \left(\frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \frac{\rho(\partial_x v)^2}{\theta} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \frac{\rho(\partial_x \omega)^2}{\theta} + 4\mu_r \frac{\omega^2}{\rho\theta} + \frac{\kappa}{L^2} \frac{\rho(\partial_x \theta)^2}{\theta^2} \right) dx = 0. \end{aligned} \tag{3.307}$$

Nakon integriranja jednadžbe (3.307) po $[0,t]$, za neki $t \in]0,T[$, primjene svojstava (3.5), (3.8), definicije (3.303), te činjenice da su ϑ i ψ nenegativne, slijedi

$$\begin{aligned} &\int_0^1 U dx + \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\lambda+2\mu}{L^2} \frac{\rho(\partial_x v)^2}{\theta} + \frac{c_0+2c_d}{L^2} \frac{\rho(\partial_x \omega)^2}{\theta} + \frac{\kappa}{L^2} \frac{\rho(\partial_x \theta)^2}{\theta^2} \right) dxdt \\ &\leq \frac{||v_0||^2 + j_I ||\omega_0||^2}{2} + R \int_0^1 \vartheta \left(\frac{1}{\rho_0} \right) dx + c_v \int_0^1 \psi(\theta_0)\, dx \leq C. \end{aligned} \tag{3.308}$$

■

Primijetimo da je generalizirana energetska funkcija (3.303) dobro definirana za $p > 1$, dok za $p = 1$ nije definirana. U tom slučaju se umjesto gornje definicije funkcije ϑ, uzima $\vartheta := \psi$. Kao što je ranije spomenuto, dokaz teorema globalne egzistencije te generalizirane energetske ocjene za $p = 1$ nalazi se u [53].

Pomoćni rezultati

U ovom odjeljku navodimo nekoliko svojstava funkcija ρ i θ koje će se koristiti u dokazu. Dokaz sljedeće leme sličan je dokazu odgovarajućeg rezultata u [28].

Lema 3.4.4. Neka su α_1 i α_2 dva pozitivna rješenja jednadžbe

$$\psi(x) = \frac{C}{c_v}, \tag{3.309}$$

gdje je C konstanta iz relacije (3.306), a ψ definirana s (3.305). Tada za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$\alpha_1 \leq \int_0^1 \theta(x,t)dx \leq \alpha_2 \tag{3.310}$$

i postoji funkcija $a : [0,T] \to [0,1]$ takva da

$$\alpha_1 \leq \theta(a(t),t) \leq \alpha_2. \tag{3.311}$$

Dokaz. Budući da je funkcija ψ definirana s (3.305) neprekidna, konveksna, te je $\lim_{x\to 0+} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \psi(x) = +\infty$ i $\psi(1) = 0$, odmah slijedi da jednadžba (3.309) ima točno dva pozitivna rješenja. Iz (3.306) zaključujemo da za svaki $t \in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^1 \psi(\theta(x,t))dx \leq \frac{C}{c_v}, \tag{3.312}$$

pa nakon primjene Jensenove nejednakosti dobivamo

$$\psi\left(\int_0^1 \theta(x,t)dx \right) \leq \frac{C}{c_v}. \tag{3.313}$$

Kako je ψ konveksna funkcija, a α_1 i α_2 rješenja jednadžbe (3.309), slijedi (3.310). S druge strane, budući da je po Propoziciji 3.1.2 funkcija θ neprekidna, korištenjem teorema srednje vrijednosti možemo zaključiti da za svaki $t \in]0,T[$ postoji $a(t) \in [0,1]$ takav da je $\int_0^1 \theta(x,t)dx = \theta(a(t),t)$. ■

Dokaz sljedeće leme sličan je dokazu odgovarajućeg rezultata u [5].

Lema 3.4.5. Za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho(x,t)} dx = A, \tag{3.314}$$

gdje je A konstanta definirana s

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\rho_0(x)} dx. \tag{3.315}$$

Nadalje, postoji funkcija $g : [0,T] \to [0,1]$ takva da

$$\rho(g(t),t) = \frac{1}{A}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.316}$$

Dokaz. Istaknimo najprije da je po Definiciji 3.1.1 ρ strogo pozitivna, a po Propoziciji 3.1.4 i neprekidna. Iz (2.84) slijedi

$$\partial_t \left(\frac{1}{\rho(x,t)} \right) = \frac{1}{L} \partial_x v. \tag{3.317}$$

Nakon integriranja jednadžbe (3.317) po $[0,1]$ i uvrštavanja rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\partial_t \int_0^1 \frac{dx}{\rho(x,t)} = 0, \tag{3.318}$$

odakle slijedi (3.314). Primjenom teorema srednje vrijednosti slijedi da je moguće odabrati funkciju g koja poprima vrijednosti iz segmenta $[0,1]$ takvu da za svaki t vrijedi

$$\frac{1}{\rho(g(t),t)} = \int_0^1 \frac{dx}{\rho(x,t)} = A. \tag{3.319}$$

■

Budući da je preslikavanje $x \mapsto x^p$ konveksno za $p > 1$, iz Leme 3.4.5 i Jensenove nejednakosti odmah slijedi tvrdnja sljedećeg korolara.

Korolar 3.4.6. Za funkciju ρ vrijedi

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho^p(x,t)} dx \geq A^p > 0, \tag{3.320}$$

gdje je A definirano s (3.315).

Generalizirana Kazhikova reprezentacija

Najvažniji korak u procesu dobivanja traženih ocjena za ρ i θ je izvođenje generalizirane Kazhikove reprezentacije koja povezuje te dvije funkcije. Tehnika ovog tipa prvi puta je korištena u [5] na modelu klasičnog fluida, dok je u [28] primijenjena i u slučaju idealnog mikropolarnog fluida. Kako bi sličan princip dokaza funkcionirao i na modelu realnog mikropolarnog plina, značajnije promjene su bile nužne pa stoga dobivenu reprezentaciju nazivamo generaliziranom.

Lema 3.4.7. Za funkciju ρ na Q_T vrijedi

$$\rho^p(x,t) = \frac{\rho_0^p(x) Y(t) B(x,t)}{1 + \dfrac{pR}{\lambda+2\mu}\rho_0^p(x)\displaystyle\int_0^t Y(\tau)B(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau}, \tag{3.321}$$

gdje su

$$Y(t) = \frac{1}{A^p \rho_0^p(g(t))}\exp\left(\frac{pR}{\lambda+2\mu}\int_0^t \rho^p(g(t),\tau)\theta(g(t),\tau)d\tau\right), \tag{3.322}$$

$$B(x,t) = \exp\left(\frac{pL}{\lambda+2\mu}\int_{g(t)}^x (v_0(\xi)-v(\xi,t))d\xi\right), \tag{3.323}$$

a konstanta A i funkcija g kao u Lemi 3.4.5.

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.84) s ρ^{-1} dobivamo

$$\rho\partial_x v = -L\partial_t(\ln\rho). \tag{3.324}$$

Uvrštavanjem izraza (3.324) u jednadžbu (2.85) dobivamo

$$\partial_t v = -\frac{R}{L}\partial_x(\rho^p\theta) - \frac{\lambda+2\mu}{L}\partial_{xt}(\ln\rho). \tag{3.325}$$

Integriranjem jednadžbe (3.325) po $[0,t]$, za bilo koji $t\in]0,T[$, slijedi

$$\begin{aligned}\partial_x\left(\frac{R}{L}\int_0^t \rho^p(x,\tau)\ \theta(x,\tau)d\tau + \frac{\lambda+2\mu}{L}\ln\rho(x,t)\right)& \\ = v_0(x) - v(x,t) + \frac{\lambda+2\mu}{L}\partial_x(\ln\rho_0(x)).&\end{aligned} \tag{3.326}$$

Nadalje, integriranjem dobivene jednadžbe (3.326) po $[g(t),x]$, za bilo koji $x\in[0,1]$, i primjenom relacije (3.316) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{R}{L}\int_0^t \rho^p(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau + \frac{\lambda+2\mu}{L}\ln\rho(x,t) = \int_{g(t)}^x (v_0(\xi)-v(\xi,t))d\xi \\ + \frac{\lambda+2\mu}{L}\ln\frac{\rho_0(x)}{\rho_0(g(t))} + \frac{R}{L}\int_0^t \rho^p(g(t),\tau)\theta(g(t),\tau)d\tau - \frac{\lambda+2\mu}{L}\ln A.\end{aligned} \tag{3.327}$$

Množenjem s $\frac{pL}{\lambda+2\mu}$ i primjenom eksponencijalne funkcije, relaciju (3.327) možemo zapisati na ekvivalentan način kao

$$\rho^p(x,t)\exp\left(\frac{pR}{\lambda+2\mu}\int_0^t \rho^p(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau\right) = \rho_0^p(x)Y(t)B(x,t). \tag{3.328}$$

Množenjem (3.328) s $\frac{pR}{\lambda+2\mu}\theta(x,t)$ dobivamo

$$\partial_t\left[\exp\left(\frac{pR}{\lambda+2\mu}\int_0^t \rho^p(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau\right)\right] = \frac{pR}{\lambda+2\mu}\rho_0^p(x)Y(t)B(x,t)\theta(x,t), \tag{3.329}$$

odakle integriranjem po $[0,t]$ slijedi

$$\begin{aligned}\exp&\left(\frac{pR}{\lambda+2\mu}\int_0^t \rho^p(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau\right)\\ &= 1+\frac{pR}{\lambda+2\mu}\rho_0^p(x)\int_0^t Y(\tau)B(x,\tau)\theta(x,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{3.330}$$

Konačno, relaciju (3.321) dobivamo uvrštavanjem izraza (3.330) u (3.328). ■

U nastavku dokazujemo nekoliko svojstava funkcija B i Y iz prethodne leme.

Lema 3.4.8. Neka je B funkcija definirana relacijom (3.323). Tada postoji konstanta $C>0$ takva da vrijedi

$$\frac{1}{C}\le B(x,t)\le C. \tag{3.331}$$

Nadalje, za $\partial_x B$ vrijedi

$$\partial_x B(x,t) = \frac{pL}{\lambda+2\mu}(v_0(x)-v(x,t))B(x,t). \tag{3.332}$$

Dokaz. Generalizirana energetska ocjena (3.306) i Hölderova nejednakost daju da vrijedi

$$\left|\int_{g(t)}^x v(\xi,t)d\xi\right| \le ||v|| \le C. \tag{3.333}$$

Iz (3.323), (3.333), (3.5) i (3.8) dobivamo (3.331), dok relacija (3.332) slijedi direktno iz (3.323).

■

Radi jednostavnosti zapisa uvodimo sljedeću notaciju

$$\begin{aligned} m_\rho(t) &= \min_{x\in[0,1]}\rho(x,t), \quad M_\rho(t) = \max_{x\in[0,1]}\rho(x,t),\\ m_\theta(t) &= \min_{x\in[0,1]}\theta(x,t), \quad M_\theta(t) = \max_{x\in[0,1]}\theta(x,t).\end{aligned} \tag{3.334}$$

Lema 3.4.9. Neka je funkcija Y definirana s (3.322). Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$\frac{m_\rho^{p-1}(t)}{C} \leq Y(t) \leq C. \tag{3.335}$$

Dokaz. Relaciju (3.321) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku kao

$$\frac{Y(t)}{\rho^p(x,t)} = \frac{1}{\rho_0^p(x)B(x,t)} + \frac{pR}{\lambda+2\mu}\int_0^t Y(\tau)\frac{B(x,\tau)}{B(x,t)}\theta(x,\tau)d\tau. \tag{3.336}$$

Zbog (3.8)–(3.6) i (3.331) postoji $C > 0$ takav da vrijedi

$$\frac{1}{C} \leq \int_0^1 \frac{1}{\rho_0^p(x)B(x,t)}dx \leq C. \tag{3.337}$$

Nakon integriranja relacije (3.336) po $[0,1]$ i primjene (3.337), (3.320), (3.331) i (3.310) dobivamo

$$A^p Y(t) \leq C + C\int_0^t Y(\tau)\int_0^1 \theta(x,\tau)dxd\tau \leq C + C\int_0^t Y(\tau)d\tau. \tag{3.338}$$

Grönwallova nejednakost primijenjena na (3.338) daje $Y(t) \leq C$.

Integriranjem relacije (3.336) po $[0,1]$ te primjenom (3.337), (3.320), (3.331) i (3.310) dobivamo

$$\begin{aligned} Y(t) &\geq C\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^p(x,t)}dx\right)^{-1}\left(1+\int_0^t Y(\tau)\int_0^1 \theta(x,\tau)dxd\tau\right) \\ &\geq C\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^p(x,t)}dx\right)^{-1}\left(1+C\int_0^t Y(\tau)d\tau\right). \end{aligned} \tag{3.339}$$

Iz definicije funkcije Y (3.322) odmah slijedi da je $Y(t) \geq 0$, $\forall t \in]0,T[$, pa stoga korištenjem (3.339) možemo zaključiti da vrijedi

$$Y(t) \geq C\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^p(x,t)}dx\right)^{-1}. \tag{3.340}$$

Iz (3.334) i (3.314) dobivamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho^p(x,t)}dx \leq \frac{1}{m_\rho^{p-1}(t)}\int_0^1 \frac{1}{\rho(x,t)}dx \leq \frac{A}{m_\rho^{p-1}(t)}. \tag{3.341}$$

Konačno, ocjena odozdo u (3.335) slijedi iz (3.340) i (3.341). ■

Uniformne ocjene odozdo za θ i ρ

Koristeći Kazhikovu reprezentaciju izvedenu u prethodnom odjeljku, sada dokazujemo da su θ i ρ odozdo uniformno ograničene nekom pozitivnom konstantom.

Prvo izvodimo pomoćnu ocjenu odozdo za m_ρ i uniformnu ocjenu odozgo za M_ρ.

Lema 3.4.10. Postoji pozitivna konstanta C takva da vrijedi

$$m_\rho(t) \geq \frac{C}{1+\int_0^t M_\theta(\tau)d\tau}, \tag{3.342}$$

pri čemu su m_ρ i M_θ definirani u (3.334).

Dokaz. Iz (3.321), (3.331), (3.335), (3.6) i (3.8) slijedi

$$\rho^p(x,t) \geq \frac{Cm_\rho^{p-1}(t)}{1+\int_0^t M_\theta(\tau)d\tau}, \tag{3.343}$$

za svaki t. Iz (3.343), po definiciji m_ρ danoj u (3.334) dobivamo da vrijedi

$$m_\rho^p(t) \geq \frac{Cm_\rho^{p-1}(t)}{1+\int_0^t M_\theta(\tau)d\tau}. \tag{3.344}$$

Budući da je ρ pozitivna po (3.1), odnosno vrijedi $m_\rho(t) > 0$, za sve t, iz (3.344) slijedi (3.342).

■

Lema 3.4.11. Postoji pozitivna konstanta C takva da vrijedi

$$M_\rho(t) \leq C, \tag{3.345}$$

gdje je M_ρ definirano u (3.334).

Dokaz. Iz (3.321), (3.331), (3.335), (3.6) i (3.8) te pozitivnosti funkcija ρ i θ dobivamo

$$\rho^p(x,t) \leq \frac{C}{1+C\int_0^t m_\rho^{p-1}(\tau)m_\theta(\tau)d\tau} \leq C. \tag{3.346}$$

■

U sljedećoj lemi iskazano je važno svojstvo funkcije M_θ, a dokaz je preuzet iz [5].

Lema 3.4.12. Za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$M_\theta^2(t) \leq \alpha J_1(t) + C_\alpha(1+J_2(t)), \tag{3.347}$$

gdje je M_θ definirano u (3.334),

$$J_1(t) = \int_0^1 \rho(x,t)(\partial_x\theta(x,t))^2dx, \quad J_2(t) = \int_0^t J_1(\tau)d\tau, \tag{3.348}$$

a C_α je konstanta koja ovisi samo o α, T i početnim podacima.

Dokaz. Neka je Φ definirana formulom

$$\Phi(x,t) = \theta(x,t) - \int_0^1 \theta(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{3.349}$$

Navedimo nekoliko svojstava funkcije Φ. Iz (3.349) je odmah slijedi

$$\partial_x\Phi(x,t) = \partial_x\theta(x,t), \quad \forall t \in Q_T \tag{3.350}$$

$$\int_0^1 \Phi(x,t)dx = 0, \quad \forall t \in]0,T[, \tag{3.351}$$

pa teorem srednje vrijednosti implicira postojanje funkcije $x_1 : [0,T] \to [0,1]$ takve da vrijedi

$$\Phi(x_1(t),t) = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.352}$$

Nadalje, primjenom ocjene (3.306) dobivamo

$$\int_0^1 |\Phi(\xi,t)|d\xi \leq \int_0^1 \left(|\theta(\xi,t)| + \left|\int_0^1 \theta(\zeta,t)d\zeta\right|\right) d\xi = 2\int_0^1 \theta(\xi,t)d\xi \leq C, \tag{3.353}$$

$$|\theta(x,t)|^2 \leq \left(|\Phi(x,t)| + \left|\int_0^1 \theta(\xi,t)d\xi\right|\right)^2 \leq (|\Phi(x,t)|+C)^2 \leq |\Phi(x,t)|^2 + C. \tag{3.354}$$

Koristeći svojstva (3.350), (3.352)–(3.353), Cauchy-Schwarzovu nejednakost i (3.334) dobivamo sljedeću ocjenu za Φ

$$\begin{aligned} |\Phi(x,t)|^{\frac{3}{2}} &= \int_{x_1(t)}^x \partial_\xi \left(|\Phi(\xi,t)|^{\frac{3}{2}}\right) d\xi = \frac{3}{2}\int_{x_1(t)}^x |\Phi(\xi,t)|^{\frac{1}{2}} \partial_\xi\Phi(\xi,t)\,\mathrm{sign}(\Phi(\xi,t))d\xi \\ &\leq \frac{3}{2}\left(\int_0^1 \frac{|\Phi(\xi,t)|}{\rho(\xi,t)}d\xi \cdot \int_0^1 \rho(\xi,t)\left(\partial_\xi\Phi(\xi,t)\right)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{J_1(t)}{m_\rho(t)}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.355}$$

odnosno nakon potenciranja obje strane s $\frac{4}{3}$ i primjene ocjene (3.342)

$$|\Phi(x,t)|^2 \leq C\left(J_1(t)\left(1+\int_0^t M_\theta(\tau)d\tau\right)\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3.356}$$

Iz (3.354) i (3.356), nakon primjene Hölderove, Youngove (s parametrima $q = \frac{3}{2}$ i $q' = 3$) i Jensenove nejednakosti, za proizvoljan $\alpha > 0$, slijedi

$$\begin{aligned} \theta^2(x,t) &\leq C + C\left(J_1(t)\left(1+\int_0^t M_\theta(\tau)d\tau\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &\leq C\left(1+\alpha J_1(t) + \frac{1}{\alpha^2}\left(1+\int_0^t M_\theta^2(\tau)d\tau\right)\right). \end{aligned} \tag{3.357}$$

Uzimanjem maksimuma po $x \in [0,1]$ u (3.357) te uvrštavanjem oznaka definiranih u (3.334), dobivamo

$$M_\theta^2(t) \leq C\left(1+\alpha J_1(t) + \frac{C}{\alpha^2}\right) + \frac{C}{\alpha^2}\int_0^t M_\theta^2(\tau)d\tau, \tag{3.358}$$

odakle primjenom Grönwallove nejednakosti slijedi

$$M_\theta^2(t) \leq C\left(1+\alpha J_1(t)+\frac{C}{\alpha^2}\right)+\frac{C}{\alpha^2}\int_0^t\left(1+\alpha J_1(t)+\frac{C}{\alpha^2}\right)e^{\int_\tau^t \frac{C}{\alpha^2}ds}d\tau \tag{3.359}$$

iz čega, nakon sređivanja i uvažavanja definicije za J_2, slijedi tvrdnja leme. ■

Koristeći prethodne leme sada možemo dokazati da su θ i ρ uniformno ograničene odozdo.

Lema 3.4.13. Postoji konstanta $C>0$ takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$m_\theta \geq C, \tag{3.360}$$

gdje je m_θ definirana u (3.334).

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.87) s $(-\theta^{-2})$ dobivamo

$$\begin{aligned} c_v\partial_t\left(\frac{1}{\theta}\right) &= \frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\rho\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)+\frac{R}{L}\frac{\rho^p\partial_x v}{\theta}-\frac{2\kappa}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\theta)^2}{\theta^3} \\ &\quad -\frac{1}{\theta^2}\left[\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho(\partial_x v)^2+\frac{c_0+2c_d}{L^2}\rho(\partial_x\omega)^2+4\mu_r\frac{\omega^2}{\rho}\right] \\ &\leq \frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\rho\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)+\frac{R}{L}\frac{\rho^p\partial_x v}{\theta}. \end{aligned} \tag{3.361}$$

Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{R}{L}\frac{\rho^p\partial_x v}{\theta} &= \frac{3R\rho^2}{4(3\lambda+2\mu)}-\frac{\rho}{\theta^2}\left(\frac{\sqrt{3}R\theta}{2\sqrt{3\lambda+2\mu}}-\frac{\rho^{p-1}\partial_x v\sqrt{3\lambda+2\mu}}{\sqrt{3}L}\right)^2 \\ &\quad -\frac{\rho}{\theta^2}\left(\frac{\rho^{p-1}\partial_x v\sqrt{3\lambda+2\mu}}{\sqrt{3}L}\right)^2 \leq \frac{3R^2\rho}{4(3\lambda+2\mu)}. \end{aligned} \tag{3.362}$$

Nakon uvažavanja ocjene (3.362) iz (3.361) slijedi

$$c_v\partial_t\left(\frac{1}{\theta}\right) \leq \frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\rho\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)+\frac{3R^2\rho}{4(3\lambda+2\mu)}. \tag{3.363}$$

Množenjem relacije (3.363) s $(s\theta^{1-s})$, za neki $s \geq 2$, te integriranjem po $[0,1]$ dobivamo

$$c_v\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{1}{\theta}\right\|_{L^s(0,1)}^s\right) \leq \frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\partial_x\left(\rho\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)\frac{dx}{\theta^{s-1}}+\frac{3R^2}{4(3\lambda+2\mu)}\int_0^1\frac{\rho dx}{\theta^{s-1}}. \tag{3.364}$$

Nakon primjene parcijalne integracije u prvom članu na desnoj strani relacije (3.364) i uvrštavanja rubnih uvjeta (2.89) dobivamo da vrijedi

$$\frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\partial_x\left(\rho\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)\frac{dx}{\theta^{s-1}} = -(s-1)\frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\rho\left[\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]^2\frac{dx}{\theta^{s-2}} \leq 0. \tag{3.365}$$

Raspis derivacije na lijevoj te primjena Hölderove nejednakosti i (3.365) na desnoj strani od (3.364) daju

$$c_v s \left|\left|\frac{1}{\theta}\right|\right|_{L^s(0,1)}^{s-1} \frac{d}{dt} \left|\left|\frac{1}{\theta}\right|\right|_{L^s(0,1)} \leq \frac{3R^2}{4(3\lambda+2\mu)} ||\rho||_{L^s(0,1)} \left|\left|\frac{1}{\theta}\right|\right|_{L^s(0,1)}^{s-1}. \tag{3.366}$$

Nakon sređivanja i integriranja relacije (3.366) po $[0,t]$, za neki $t \in]0,T[$ dobivamo

$$\left|\left|\frac{1}{\theta}\right|\right|_{L^s(0,1)} \leq \left|\left|\frac{1}{\theta_0}\right|\right|_{L^s(0,1)} + \frac{3R^2}{4c_v(3\lambda+2\mu)} \int_0^t ||\rho(\tau)||_{L^s(0,1)} d\tau. \tag{3.367}$$

Puštanjem limesa kad $s \to \infty$ slijedi da je

$$\left|\left|\frac{1}{\theta}\right|\right|_{L^\infty(0,1)} \leq \left|\left|\frac{1}{\theta_0}\right|\right|_{L^\infty(0,1)} + \frac{3R^2}{4c_v(3\lambda+2\mu)} \int_0^t ||\rho(\tau)||_{L^\infty(0,1)} d\tau. \tag{3.368}$$

Uvažavanjem definicije za m_θ (3.334) te ocjene (3.345) u (3.368) dobivamo da vrijedi

$$\frac{1}{m_\theta(t)} \leq C, \tag{3.369}$$

što daje tvrdnju leme. ■

Lema 3.4.14. Postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$m_\rho \geq C, \tag{3.370}$$

gdje je m_ρ definirana u (3.334).

Dokaz. Neka je a funkcija iz Leme 3.4.4. Hölderova nejednakost daje sljedeću ocjenu

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{\theta(x,t)} - \sqrt{\theta(a(t),t)}\right| &= \left|\int_{a(t)}^x \frac{\partial_\xi \theta(\xi,t)}{2\sqrt{\theta(\xi,t)}} d\xi\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\rho(\xi,t)(\partial_\xi\theta(\xi,t))^2}{\theta^2(\xi,t)} d\xi \cdot \int_0^1 \frac{\theta(\xi,t)}{\rho(\xi,t)} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.371}$$

Korištenjem notacije uvedene u (3.334) te primjenom svojstava (3.310) i (3.311), iz (3.371) dobivamo

$$\sqrt{\theta(x,t)} \leq \sqrt{\alpha_2} + \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2\sqrt{m_\rho(t)}} \left(\int_0^1 \frac{\rho(\xi,t)(\partial_\xi\theta(\xi,t))^2}{\theta^2(\xi,t)} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.372}$$

Nakon kvadriranja i primjene Youngove nejednakosti u (3.372) slijedi

$$\theta(x,t) \leq C\left(1 + \frac{1}{m_\rho(t)} \int_0^1 \frac{\rho(\xi,t)(\partial_\xi\theta(\xi,t))^2}{\theta^2(\xi,t)} d\xi\right). \tag{3.373}$$

Primjenom ocjene (3.373) u nejednakosti (3.342) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_\rho(t)} &\leq C\left[1+\int_0^t\left(1+\frac{1}{m_\rho(\tau)}\int_0^1\frac{\rho(\xi,\tau)(\partial_\xi\theta(\xi,\tau))^2}{\theta^2(\xi,\tau)}d\xi\right)d\tau\right]\\ &\leq C\left[1+\int_0^t\frac{1}{m_\rho(\tau)}\int_0^1\frac{\rho(\xi,\tau)(\partial_\xi\theta(\xi,\tau))^2}{\theta^2(\xi,\tau)}d\xi d\tau\right].\end{aligned}\tag{3.374}$$

Konačno, Grönwallova nejednakost primijenjena na (3.374), zajedno s generaliziranom energetskom ocjenom (3.306) daje tvrdnju leme. ■

3.4.2. Globalne apriorne ocjene za derivacije i dokaz Propozicije 3.4.2

U ovom odjeljku korištenjem energetske metode izvodimo niz globalnih apriornih ocjena za derivacije funkcija ρ, v, ω i θ. Neka je funkcija Ψ definirana s

$$\Psi=\frac{v^2}{2}+j_I\frac{\omega^2}{2}+c_v\theta.\tag{3.375}$$

U sljedećoj lemi izvodimo ocjenu za Ψ koja je ključ za dobivanje ocjena za θ i njezine derivacije. Dokaz je inspiriran dokazom slične tvrdnje u [28].

Lema 3.4.15. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^1\Psi^2dx+J_2\leq C,\tag{3.376}$$

gdje je J_2 definiran u (3.348), a funkcija Ψ je dana s (3.375).

Dokaz. Zbrajanjem jednadžbi (2.85)–(2.87) pomnoženih s $v\Psi$, $\omega\Psi$ i Ψ, redom, integriranjem po $[0,1]$, primjenom parcijalne integracije i uvrštavanjem rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\Psi^2dx=\int_0^1\left[-\frac{R}{L}\rho^p\theta v-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho v\partial_x v-\frac{c_0+2c_d}{L^2}\rho\omega\partial_x\omega\right.\\ &\left.-\frac{\kappa}{L^2}\rho\partial_x\theta\right]\partial_x\Psi dx=-\int_0^1\left[\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho\partial_x\Psi+\frac{R}{L}\rho^p\theta v\right.\\ &\left.+\left(\frac{c_0+2c_d}{L^2}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}j_I\right)\rho\omega\partial_x\omega+\left(\frac{\kappa}{L^2}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}c_v\right)\rho\partial_x\theta\right]\partial_x\Psi dx.\end{aligned}\tag{3.377}$$

Youngova nejednakost zatim daje da vrijedi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\Psi^2dx+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\rho(\partial_x\Psi)^2dx+\left(\frac{\kappa}{L^2}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}c_v\right)\int_0^1\rho\partial_x\theta\partial_x\Psi dx\\ &\leq C_1\alpha\int_0^1\rho(\partial_x\Psi)^2dx+\frac{C_1}{\alpha}\int_0^1\left[\rho^{2p-1}\theta^2v^2+\rho\omega^2(\partial_x\omega)^2\right]dx,\end{aligned}\tag{3.378}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Psi^2 dx + \left(\frac{\lambda+2\mu}{L^2} - C\alpha\right)\int_0^1 \rho(\partial_x\Psi)^2 dx + \left(\frac{\kappa}{L^2} - \frac{\lambda+2\mu}{L^2}c_v\right)\int_0^1 \rho\partial_x\theta\partial_x\Psi dx \\
&\quad \leq \frac{C_1}{\alpha}\int_0^1 \left[\rho^{2p-1}\theta^2 v^2 + \rho\omega^2(\partial_x\omega)^2\right] dx,
\end{aligned} \tag{3.379}$$

gdje je $\alpha > 0$ bilo koji. Ako odaberemo parametar α tako da vrijedi

$$\alpha < \min\left\{\frac{\lambda+2\mu}{C_1 L^2}, \frac{\kappa}{3C_1 c_v L^2}\right\}, \tag{3.380}$$

Algebarska nejednakost (1.33) vrijedi za $A_1 = \frac{\lambda+2\mu}{L^2}$, $A_2 = C_1\alpha$, $A_3 = \frac{\kappa}{c_v L^2}$, $a_1 = v\partial_x v$, $a_2 = j_I\omega\partial_x\omega$ i $a_3 = c_v\partial_x\theta$. Uz oznake

$$\begin{aligned}
&D_1 = A_3 - 3A_2 > 0, \\
&D_2 = 2A_2 + \frac{(A_1 - 2A_2 + A_3)^2}{4A_2} > 0, \\
&D_3 = \frac{1}{2A_2}\left((A_1 - A_2)^2 + \frac{(A_1 - 2A_2 + A_3)^2}{2}\right) > 0,
\end{aligned} \tag{3.381}$$

primjenom (1.33) na lijevoj strani od (3.379) i (3.345) na desnoj dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Psi^2 dx + \int_0^1 \rho\left[D_1 c_v^2(\partial_x\theta)^2 - D_2 v^2(\partial_x v)^2 - D_3 j_I^2\omega^2(\partial_x\omega)^2\right] dx \\
&\quad \leq C\int_0^1 \left[\theta^2 v^2 + \omega^2(\partial_x\omega)^2\right] dx.
\end{aligned} \tag{3.382}$$

Sada iz (3.382) i ocjene (3.345) slijedi

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \Psi^2 dx + \int_0^1 \rho(\partial_x\theta)^2 dx \leq C_2\int_0^1 \left[\theta^2 v^2 + v^2(\partial_x v)^2 + \omega^2(\partial_x\omega)^2\right] dx. \tag{3.383}$$

Množenjem jednadžbe (2.85) s v^3, integriranjem po $[0,1]$, primjenom parcijalne integracije i rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^4 dx + 3\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1 \rho v^2(\partial_x v)^2 dx = \frac{3R}{L}\int_0^1 \rho^p\theta v^2\partial_x v dx. \tag{3.384}$$

Nadalje, primjenom Youngove nejednakosti na desnoj strani nejednakosti (3.384) slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{3R}{L}\int_0^1 \rho^p\theta v^2\partial_x v dx &= \frac{3R}{L}\int_0^1 \left(\rho^{\frac{1}{2}}v\partial_x v\right)\left(\rho^{p-\frac{1}{2}}\theta v\right) dx \\
&\leq C_3\int_0^1 \left[\beta\rho v^2(\partial_x v)^2 + \frac{1}{\beta}\rho^{2p-1}\theta^2 v^2\right] dx,
\end{aligned} \tag{3.385}$$

gdje je $\beta > 0$ proizvoljan. Uvažavanjem ocjene (3.385) u (3.384) dobivamo

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^4 dx + \left(3\frac{\lambda+2\mu}{L^2} - C_3\beta\right)\int_0^1 \rho v^2(\partial_x v)^2 dx \leq \frac{C_3}{\beta}\int_0^1 \rho^{2p-1}\theta^2 v^2 dx. \tag{3.386}$$

Ako uzmemo

$$\beta < 3\frac{\lambda + 2\mu}{L^2 C_3}, \tag{3.387}$$

nakon primjena ocjena (3.345) i (3.370) na (3.386) slijedi da je

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v^4 dx + \int_0^1 v^2(\partial_x v)^2 dx \leq C\int_0^1 \theta^2 v^2 dx \tag{3.388}$$

Množenjem jednadžbe (2.86) s ω^3, integriranjem po $[0,1]$, primjenom parcijalne integracije te uvrštavanjem rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\frac{j_I}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 \omega^4 dx + 3\frac{c_0 + 2c_d}{L^2}\int_0^1 \rho\omega^2(\partial_x\omega)^2 dx \leq 4\mu_r \int_0^1 \frac{\omega^4}{\rho} dx, \tag{3.389}$$

iz čega, nakon uvažavanja ocjena (3.345) i (3.370), slijedi

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \omega^4 dx + \int_0^1 \omega^2(\partial_x\omega)^2 dx \leq C\int_0^1 \omega^4 dx. \tag{3.390}$$

Nakon množenja relacija (3.388) i (3.390) s C_2, te zbrajanja dobivenih nejednakosti s (3.383) dobivamo

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\Psi^2 + v^4 + \omega^4\right) dx + J_1(t) \leq C\int_0^1 (\theta^2 v^2 + \omega^4) dx, \tag{3.391}$$

gdje je J_1 definiran u (3.348). Nejednakosti (3.347) i (3.306) primijenjene na desnoj strani od (3.391) daju

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (\Psi^2 + v^4 + \omega^4) dx + J_1(t) \leq C_4 \eta J_1(t) + C_\eta\left(1 + J_2(t) + \int_0^1 \omega^4 dx\right), \tag{3.392}$$

gdje je $\eta > 0$ proizvoljan, a C_η ovisi o η. Ako uzmemo $\eta < \frac{1}{C_4}$, korištenjem definicije (3.348) iz (3.392) slijedi

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 (\Psi^2 + v^4 + \omega^4) dx + J_2\right] \leq C\left(1 + J_2 + \int_0^1 \omega^4 dx\right). \tag{3.393}$$

Konačno, diferencijalna verzija Grönwallove nejednakosti (Propozicija 1.3.5) primijenjena na (3.393) daje (3.376). ■

Iz prethodne leme lako slijedi sljedeći rezultat.

Korolar 3.4.16. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||M_\theta||_{L^2(0,T)} \leq C, \tag{3.394}$$

gdje je M_θ definirano u (3.334).

Dokaz. Integriranjem nejednakosti (3.347) za $\alpha = 1$ po $]0,T[$ i primjenom ocjene (3.376) dobivamo

$$\int_0^T M_\theta^2(t)dt \leq \int_0^T (J_1(t) + C_1(1 + J_2(t)))\,dt \leq J_2(T) + C\int_0^T C_1 dt \leq C. \tag{3.395}$$

■

U nastavku izvodimo ocjene za derivacije funkcija ρ, v, ω i θ. Započinjemo s ocjenom za θ budući da ona lako slijedi iz prethodnih lema, a koristi se u izvodima preostalih traženih ocjena.

Lema 3.4.17. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||\theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x\theta(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{3.396}$$

Dokaz. Iz (3.375) i (3.376) slijedi

$$\int_0^1 \theta^2 dx \leq C_1. \tag{3.397}$$

Korištenjem oznaka uvedenih u (3.348) i (3.334), te ocjena (3.376) i (3.370) dobivamo

$$\int_0^t ||\partial_x\theta(\tau)||^2 d\tau \leq Cm_\rho(t)\int_0^t\int_0^1 (\partial_x\theta)^2 dxd\tau \leq C\int_0^t\int_0^1 \rho(\partial_x\theta)^2 dxd\tau \leq C. \tag{3.398}$$

Iz (3.397) i (3.398) slijedi (3.396). ■

Ocjene za prostornu derivaciju od ρ

Lema 3.4.18. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||\partial_x\rho(t)|| \leq C. \tag{3.399}$$

Dokaz. Parcijalna derivacija po prostornoj varijabli x generalizirane Kazhikove reprezentacije za ρ koja je dana s (3.321) glasi

$$p\rho^{p-1}\partial_x\rho = \rho^p\varphi - \frac{\rho^{2p}}{YB}\left[\partial_x\left(\rho_0^{-p}\right) + \frac{pR}{\lambda+2\mu}\int_0^t (\varphi\theta + \partial_x\theta)YBd\tau\right], \tag{3.400}$$

pri čemu smo koristili i relaciju (3.332) te oznaku

$$\varphi(x,t) = \frac{pL}{\lambda+2\mu}(v_0(x) - v(x,t)). \tag{3.401}$$

Kvadriranjem definicijskog izraza (3.401) za funkciju φ, primjenom Youngove nejednakosti na dobiveni izraz, integriranjem po $[0,1]$, primjenom pretpostavke (3.5) i generalizirane energetske ocjene (3.306) dobivamo da za φ vrijedi

$$||\varphi(t)||^2 \leq C(1 + ||v(t)||^2) \leq C. \tag{3.402}$$

Uzimanjem u obzir oznaka definiranih u (3.334), ocjene (3.345), (3.370), (3.331) i (3.335) primijenjene na (3.400) daju

$$|\partial_x \rho| \leq C\left[|\varphi| + |\partial_x(\rho_0^{-p})| + \int_0^t (|\varphi|\theta + |\partial_x \theta|)\, d\tau\right]. \tag{3.403}$$

Kvadriranjem relacije (3.403), te nakon primjene Youngove i Jensenove nejednakosti, integriranja po $[0,1]$ i korištenja oznaka (3.334) dobivamo

$$\begin{aligned}||\partial_x \rho(t)|| \leq C\Big(&||\varphi(t)||^2 + \int_0^1 \frac{(\partial_x \rho_0(x))^2}{\rho_0^{2p+2}}dx + \int_0^t ||\varphi(\tau)||^2 M_\theta^2(\tau)d\tau \\ &+ \int_0^t ||\partial_x \theta(\tau))||^2 d\tau\Big).\end{aligned} \tag{3.404}$$

Konačno, nakon primjene ocjena (3.6), (3.402), (3.394) i (3.396) na desnoj strani nejednakosti (3.404) slijedi (3.399). ■

Ocjene za prostorne derivacije od v

Lema 3.4.19. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||v(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{3.405}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.85) s v, integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$, te nakon primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||v(t)||^2\right) + \frac{\lambda + 2\mu}{L^2}\int_0^1 \rho(\partial_x v)^2 dx = \frac{R}{L}\int_0^1 \rho^p \theta \partial_x v dx. \tag{3.406}$$

Ako uzmemo u obzir oznake (3.334), korištenjem ocjena (3.370) i (3.345), te Youngove nejednakosti, za bilo koji $\alpha > 0$, iz (3.406) slijedi

$$\frac{d}{dt}\left(||v(t)||^2\right) + \int_0^1 (\partial_x v)^2 dx \leq C_1\left(\alpha||\partial_x v||^2 + \frac{1}{\alpha}||\theta||^2\right). \tag{3.407}$$

Neka je $\alpha < \frac{1}{C_1}$. Tada iz (3.407) dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(||v(t)||^2\right) + ||\partial_x v(t)||^2 \leq C||\theta||^2. \tag{3.408}$$

Integriranjem relacije (3.408) po $[0,t]$, za bilo koji $t \in]0,T[$, te uvažavanjem oznaka (3.334), dobivamo

$$||v(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x v(\tau)||^2 d\tau \leq ||v_0||^2 + C||M_\theta(\tau)||^2_{L^2(0,T)}. \tag{3.409}$$

Tvrdnja leme slijedi nakon primjene ocjene (3.394) i pretpostavke (3.5) u (3.409). ■

Lema 3.4.20. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$||\partial_x v(t)||^2+\int_0^t ||\partial_{xx}v(\tau)||^2 d\tau\le C. \tag{3.410}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.85) s $\partial_{xx}v$, integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$ te primjenom parcijalne integracije i uvrštavanjem rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x v(t)||^2\right)+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\rho(\partial_{xx}v)^2dx=&\frac{Rp}{L}\int_0^1\rho^{p-1}\partial_x\rho\cdot\theta\partial_{xx}vdx\\ +\frac{R}{L}\int_0^1\rho^p\partial_x\theta\cdot\partial_{xx}vdx-&\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\partial_x\rho\cdot\partial_x v\cdot\partial_{xx}vdx.\end{aligned} \tag{3.411}$$

Integral na lijevoj strani jednakosti (3.411) ocjenjujemo odozgo koristeći ocjenu (3.370), pri čemu uzimamo u obzir oznaku (3.334), i dobivamo

$$\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\rho(\partial_{xx}v)^2dx\ge C||\partial_{xx}v(t)||^2. \tag{3.412}$$

Korištenjem oznaka (3.334), ocjena (3.345) i (3.399), Hölderove i Youngove nejednakosti te nejednakosti (1.10), za neki $0<\alpha<1$, ocjenjujemo integrale na desnoj strani jednakosti (3.411) na sljedeći način

$$\begin{aligned}\left|\frac{Rp}{L}\int_0^1\rho^{p-1}\partial_x\rho\cdot\theta\partial_{xx}vdx\right|&\le CM_\theta(t)||\partial_x\rho(t)||\cdot||\partial_{xx}v(t)||\\ &\le\alpha||\partial_{xx}v(t)||^2+\frac{C}{\alpha}M_\theta^2(t),\end{aligned} \tag{3.413}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{R}{L}\int_0^1\rho^p\partial_x\theta\cdot\partial_{xx}vdx\right|&\le C||\partial_x\theta(t)||\cdot||\partial_{xx}v(t)||\\ &\le\alpha||\partial_{xx}v(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||\partial_x\theta(t)||^2,\end{aligned} \tag{3.414}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\partial_x\rho\cdot\partial_x v\cdot\partial_{xx}vdx\right|&\le C||\partial_x\rho(t)||\cdot||\partial_x v(t)||^{\frac{1}{2}}\cdot||\partial_{xx}v(t)||^{\frac{3}{2}}\\ &\le\alpha||\partial_{xx}v(t)||^2+\frac{C}{\alpha^3}||\partial_x v(t)||^2.\end{aligned} \tag{3.415}$$

Primjenom dobivenih ocjena (3.412)–(3.415) na (3.411) dobivamo

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(||\partial_x v(t)||^2\right)+||\partial_{xx}v(t)||^2\\ &\le C_1\alpha||\partial_{xx}v(t)||^2+\frac{C_1}{\alpha^3}\left(M_\theta^2(t)+||\partial_x\theta(t)||^2+||\partial_x v(t)||^2\right).\end{aligned} \tag{3.416}$$

Neka je $\alpha<\frac{1}{C_1}$. Tada integriranjem relacije (3.416) po $[0,t]$, za bilo koji $t\in]0,T[$, dobivamo

$$\begin{aligned}||\partial_x v(t)||^2+\int_0^t||\partial_{xx}v(\tau)||^2d\tau\le&||\partial_x v_0||^2\\ +C\Big(||M_\theta||^2_{L^2(0,T)}+&\int_0^t(||\partial_x\theta(\tau)||^2+||\partial_x v(\tau)||^2)d\tau\Big).\end{aligned} \tag{3.417}$$

Tvrdnja leme slijedi nakon primjene pretpostavke (3.5) i ocjena (3.394), (3.396), (3.405) na (3.417). ■

Ocjene za prostorne derivacije od ω

Dokazi sljedeće dvije leme preuzeti su iz [53] budući da jednadžba (2.86) ne ovisi o eksponentu tlaka p.

Lema 3.4.21. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||\omega(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x \omega(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{3.418}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.86) s ω te integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$, primjene parcijalne integracije i uvažavanja rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\frac{j_I}{2}\frac{d}{dt}\left(||\omega(t)||^2\right) = -\frac{c_0+2c_d}{L^2}\int_0^1 \rho(\partial_x\omega)^2 dx - 4\mu_r \int_0^1 \frac{\omega^2}{\rho} dx. \tag{3.419}$$

Uzimajući u obzir oznake (3.334), koristeći ocjenu (3.370) dobivamo

$$||\omega(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x\omega||^2 dx \leq 0. \tag{3.420}$$

Integriranjem relacije (3.420) po $[0,t]$, za bilo koji $t \in]0,T[$, i uvažavanjem pretpostavke (3.5) slijedi tvrdnja leme. ∎

Lema 3.4.22. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||\partial_x\omega(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_{xx}\omega(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{3.421}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.86) s $\partial_{xx}\omega$, te nakon integriranja po $[0,1]$, primjene parcijalne integracije i primjene rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{j_I}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\omega||^2\right) &+ \frac{c_0+c_d}{L^2}\int_0^1 \rho(\partial_{xx}\omega)^2 dx \\ &= -\frac{c_0+c_d}{L^2}\int_0^1 \partial_x\rho\,\partial_x\omega\,\partial_{xx}\omega dx + 4\mu_r\int_0^1 \frac{\omega}{\rho}\partial_{xx}\omega dx\end{aligned} \tag{3.422}$$

Integral na lijevoj strani relacije (3.422) ocjenjujemo odozdo korištenjem ocjene (3.370) pri čemu uzimamo u obzir oznake uvedene u (3.334) i dobivamo

$$\frac{c_0+c_d}{L^2}\int_0^1 \rho(\partial_{xx}\omega)^2 dx \geq C||\partial_{xx}\omega||^2. \tag{3.423}$$

Integrale na desnoj strani relacije (3.422) ocjenjujemo primjenom Hø"lderove i Youngove nejednakosti, relacije (1.10), ocjena (3.370) i (3.399) te oznaka uvedenih u 3.334, za neki $0 < \alpha < 1$, kako bismo dobili

$$\left|\int_0^1 \partial_x\rho\,\partial_x\omega\,\partial_{xx}\omega dx\right| \leq C||\partial_x\rho||\,||\partial_x\omega||^{\frac{1}{2}}||\partial_{xx}\omega||^{\frac{3}{2}} \leq \alpha||\partial_{xx}\omega||^2 + \frac{C}{\alpha^3}||\partial_x\omega||^2, \tag{3.424}$$

$$\left|\int_0^1 \frac{\omega}{\rho}\partial_{xx}\omega dx\right| \leq C||\omega||\,||\partial_{xx}\omega|| \leq \alpha||\partial_{xx}\omega||^2 + \frac{C}{\alpha}||\omega||^2. \tag{3.425}$$

Primjenom ocjena (3.423)–(3.425) na (3.422) dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\omega||^2\right)+||\partial_{xx}\omega||^2\leq C_1\alpha||\partial_{xx}\omega||^2+\frac{C_1}{\alpha^3}\left(||\omega||^2+||\partial_x\omega||^2\right). \tag{3.426}$$

Za $\alpha<\frac{1}{C_1}$, nakon integriranja nejednakosti (3.426) po $[0,t]$, za $t\in]0,T[$, dobivamo

$$||\partial_x\omega||^2+\int_0^t||\partial_{xx}\omega||^2d\tau\leq||\partial_x\omega_0||^2+C\int_0^t\left(||\omega||^2+||\partial_x\omega||^2\right)d\tau. \tag{3.427}$$

Konačno, iz (3.418) i pretpostavke (3.5) slijedi tvrdnja leme. ■

Ocjene za prostorne derivacije od θ

Lema 3.4.23. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$||\partial_x\theta(t)||^2+\int_0^t||\partial_{xx}\theta(\tau)||^2d\tau\leq C. \tag{3.428}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.87) s $\partial_{xx}\theta$, nakon integriranja po $[0,1]$, primjene parcijalne integracije i rubnih uvjeta (2.89) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{c_v}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\theta(t)||^2\right)+\frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\rho(\partial_{xx}\theta)^2dx&=-\frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\partial_x\rho\cdot\partial_x\theta\partial_{xx}\theta dx\\&+\frac{R}{L}\int_0^1\rho^p\theta\partial_xv\cdot\partial_{xx}\theta dx-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\rho(\partial_xv)^2\partial_{xx}\theta dx\\&-\frac{c_0+2c_d}{L^2}\int_0^1\rho(\partial_x\omega)^2\partial_{xx}\theta dx+4\mu_r\int_0^1\frac{\omega^2}{\rho}\partial_{xx}\theta dx.\end{aligned} \tag{3.429}$$

Integral na lijevoj strani u (3.429) ocjenjujemo korištenjem (3.370) pri čemu u obzir uzimamo oznake (3.334) i dobivamo

$$\frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\rho(\partial_{xx}\theta)^2dx\geq C||\partial_{xx}\theta(t)||^2. \tag{3.430}$$

Uzimajući u obzir oznake (3.334), ocjene (3.345), (3.399), (3.410), (3.418), (3.421), (3.370), Hölderovu i Youngovu nejednakost te (1.10), za neki $0<\alpha<1$, dobivamo sljedeće ocjene za integrale na desnoj strani relacije (3.429)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\partial_x\rho\cdot\partial_x\theta\partial_{xx}\theta dx\right|&\leq C||\partial_x\rho(t)||\cdot||\partial_x\theta(t)||^{\frac{1}{2}}||\partial_{xx}\theta(t)||^{\frac{3}{2}}\\&\leq\alpha||\partial_{xx}\theta(t)||^2+\frac{C}{\alpha^3}||\partial_x\theta(t)||^2,\end{aligned} \tag{3.431}$$

$$\left|\int_0^1\rho^p\theta\partial_xv\cdot\partial_{xx}\theta dx\right|\leq CM_\theta(t)||\partial_xv(t)||\cdot||\partial_{xx}\theta(t)||\leq\alpha||\partial_{xx}\theta(t)||^2+\frac{C}{\alpha}M_\theta^2(t), \tag{3.432}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\rho(\partial_xv)^2\partial_{xx}\theta dx\right|&\leq C||\partial_{xx}v(t)||\cdot||\partial_xv(t)||\cdot||\partial_{xx}\theta(t)||\\&\leq\alpha||\partial_{xx}\theta(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||\partial_{xx}v(t)||^2,\end{aligned} \tag{3.433}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \rho(\partial_x\omega)^2\partial_{xx}\theta dx\right| &\le C||\partial_{xx}\omega(t)||\cdot||\partial_x\omega(t)||\cdot||\partial_{xx}\theta(t)|| \\ &\le \alpha||\partial_{xx}\theta(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||\partial_{xx}\omega(t)||^2,\end{aligned} \tag{3.434}$$

$$\left|\int_0^1 \frac{\omega^2}{\rho}\partial_{xx}\theta dx\right| \le C||\partial_x\omega(t)||\cdot||\omega(t)||\cdot||\partial_{xx}\theta(t)|| \le \alpha||\partial_{xx}\theta(t)||^2+\frac{C}{\alpha}, \tag{3.435}$$

Primjenom dobivenih ocjena na (3.429) slijedi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x\theta(t)||^2\right)+||\partial_{xx}\theta(t)||^2 &\le C_1\alpha||\partial_{xx}\theta(t)||^2 \\ &+\frac{C_1}{\alpha^3}\left(1+M_\theta^2(t)+||\partial_x\theta(t)||^2+||\partial_{xx}v(t)||^2+||\partial_{xx}\omega(t)||^2\right).\end{aligned} \tag{3.436}$$

Za $\alpha<\frac{1}{C_1}$, nakon integriranja relacije (3.436) po $[0,t]$, za $t\in]0,T[$, dobivamo

$$\begin{aligned}||\partial_x\theta(t)||^2+\int_0^t||\partial_{xx}\theta(\tau)||^2d\tau &\le ||\partial_x\theta_0||^2+C||M_\theta||^2_{L^2(0,T)} \\ &+C\int_0^t\left(1+||\partial_x\theta(\tau)||^2+||\partial_{xx}v(\tau)||^2+||\partial_{xx}\omega(\tau)||^2\right)d\tau.\end{aligned} \tag{3.437}$$

Tvrdnja leme slijedi iz (3.437) nakon uvažavanja pretpostavke (3.5), (3.394), (3.396), (3.410) i (3.421). ■

Ocjene za vremenske derivacije

Lema 3.4.24. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^t||\partial_t\rho(\tau)||^2d\tau\le C. \tag{3.438}$$

Dokaz. Kvadriranjem jednadžbe (2.84) i integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$ dobivamo

$$||\partial_t\rho(t)||^2=\frac{1}{L^2}\int_0^1\rho^4(\partial_x v)^2dx. \tag{3.439}$$

Ocjene (3.345) i (3.410), pri čemu uzimamo u obzir (3.334), primijenjene na (3.439) daju (3.438). ■

Lema 3.4.25. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^t||\partial_t v(\tau)||^2d\tau\le C. \tag{3.440}$$

Dokaz. Kvadriranjem jednadžbe (2.85), integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$ te nakon primjene Youngove nejednakosti dobivamo

$$||\partial_t v(t)||^2\le C\int_0^1\left(\rho^{2p-2}(\partial_x\rho)^2\theta^2+\rho^{2p}(\partial_x\theta)^2+(\partial_x\rho)^2(\partial_x v)^2+\rho^2(\partial_{xx}v)^2\right)dx. \tag{3.441}$$

Uzimajući u obzir oznake (3.334), ocjena (3.345), (3.399) i (3.428) te nejednakosti (1.11) na (3.441) dobivamo

$$
\begin{aligned}
||\partial_t v(t)||^2 &\leq C\Big(||\partial_x \rho(t)||^2 M_\theta^2(t) + ||\partial_x \theta(t)||^2 + ||\partial_x \rho(t)||^2 ||\partial_{xx} v(t)||^2 + ||\partial_{xx} v(t)||^2\Big) \\
&\leq C\big(1 + M_\theta^2(t) + ||\partial_{xx} v(t)||^2\big).
\end{aligned}
\tag{3.442}
$$

Nakon integriranja relacije (3.442) po $[0,t]$, za $t \in]0,T[$ te primjene ocjena (3.394) i (3.410) dobivamo (3.440). ■

Dokaz sljedeće leme preuzet je iz [53] budući da jednadžba (2.86) ne ovisi o eksponentu tlaka p.

Lema 3.4.26. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$
\int_0^t ||\partial_t \omega(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{3.443}
$$

Dokaz. Kvadriranjem jednadžbe (2.86), integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$ te nakon primjene Youngove nejednakosti dobivamo

$$
||\partial_t v(t)||^2 \leq C \int_0^1 \left((\partial_x \rho)^2 (\partial_x \omega)^2 + \rho^2 (\partial_{xx} \omega)^2 + \frac{\omega^2}{\rho^2} \right) dx. \tag{3.444}
$$

Uzimajući u obzir oznake (3.334), ocjena (3.345), (3.370), (3.399) i (3.418) te nejednakosti (1.11) na (3.444) dobivamo

$$
||\partial_t v(t)||^2 \leq C\Big(||\partial_x \rho||^2 ||\partial_{xx} \omega||^2 + ||\partial_{xx} \omega||^2 + ||\omega||^2\Big) \leq C\big(1 + ||\partial_{xx} \omega||^2\big). \tag{3.445}
$$

Nakon integriranja relacije (3.445) po $[0,t]$, za $t \in]0,T[$ te primjene ocjene (3.421) dobivamo (3.443). ■

Lema 3.4.27. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$
\int_0^t ||\partial_t \theta(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{3.446}
$$

Dokaz. Kvadriranjem jednadžbe (2.87), integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$ i primjenom Youngove nejednakosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
||\partial_t \theta(t)||^2 \leq C \int_0^1 \Big(&(\partial_x \rho)^2 (\partial_x \theta)^2 + \rho^2 (\partial_{xx} \omega)^2 + \rho^{2p} \theta^2 (\partial_x v)^2 \\
&+ \rho^2 (\partial_x v)^4 + \rho^2 (\partial_x \omega)^4 + \frac{\omega^4}{\rho^2} \Big) dx.
\end{aligned}
\tag{3.447}
$$

Uzimanjem u obzir oznaka uvedenih u (3.334), primjenom ocjena (3.345), (3.370), (3.399), (3.410), (3.418) i (3.421) te nejednakosti (1.9)–(1.10) ocjenjujemo desnu stranu od (3.447) odozgo i dobivamo

$$\begin{aligned}||\partial_t\theta(t)||^2 \leq & C\Big(||\partial_{xx}\theta(t)||^2||\partial_x\rho(t)||^2+||\partial_{xx}\theta(t)||^2+M_\theta^2(t)||\partial_x v(t)||^2 \\ & +||\partial_{xx}v(t)||^2||\partial_x v(t)||^2+||\partial_{xx}\omega(t)||^2||\partial_x\omega(t)||^2+||\partial_x\omega(t)||^2||\omega(t)||^2\Big) \\ \leq & C\Big(1+M_\theta^2(t)+||\partial_{xx}v(t)||^2+||\partial_{xx}\omega(t)||^2+||\partial_{xx}\theta(t)||^2\Big).\end{aligned} \tag{3.448}$$

Nakon integriranja (3.448) po $[0,t]$, za $t\in]0,T[$, te primjene ocjena (3.394), (3.410), (3.421) i (3.428) slijedi tvrdnja leme. ■

Konačno, na temelju prethodnih ocjena možemo dokazati tvrdnju Propozicije 3.4.2.

Dokaz Propozicije 3.4.2. Neka vrijede pretpostavke propozicije. Tada zaključujemo sljedeće:

- Iz (3.334), (3.345) i Lema 3.4.18 i 3.4.24 slijedi

$$\rho\in L^\infty(0,T;H^1(0,1))\cap H^1(Q_T). \tag{3.449}$$

- Leme 3.4.19, 3.4.20 i 3.4.25 daju

$$v\in L^\infty(0,T;H^1(0,1))\cap H^1(Q_T)\cap L^2(0,T;H^2(0,1)) \tag{3.450}$$

- Tvrdnje Lema 3.4.21, 3.4.22 i 3.4.26 impliciraju da vrijedi

$$\omega\in L^\infty(0,T;H^1(0,1))\cap H^1(Q_T)\cap L^2(0,T;H^2(0,1)). \tag{3.451}$$

- Iz Lema 3.4.17, 3.4.23 i 3.4.27 slijedi

$$\theta\in L^\infty(0,T;H^1(0,1))\cap H^1(Q_T)\cap L^2(0,T;H^2(0,1)). \tag{3.452}$$

- Koristeći (3.334), iz Lema 3.4.13 i 3.4.14 dobiva se da vrijedi

$$\inf_{Q_T}\rho>0 \tag{3.453}$$

  i (3.299).

Ovime je pokazano da je (ρ,v,ω,θ) iz pretpostavke propozicije generalizirano rješenje početno-problema (2.84)–(2.89) na Q_T čime je dokaz završen. ■

4. Egzistencija i jedinstvenost generaliziranog rješenja za jednodimenzionalni model reaktivnog mikropolarnog realnog plina

U ovom poglavlju istražujemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja za jednodimenzionalni model toka i termalne eksplozije reaktivnog mikropolarnog realnog plina koji u odnosu na osnovni model toka mikropolarnog fluida obrađenog u Poglavlju 3 ima dodatnu zavisnu varijablu z koja predstavlja udio neizgorenog goriva. Budući da se prve tri jednadžbe modela (2.125)–(2.127) podudaraju s prve tri jednadžbe (2.84)–(2.86) osnovnog modela, a četvrte jednadžbe (2.128) i (2.87) se razlikuju u jednom članu, dijelovi dokaza teorema se također podudaraju pa ih nećemo ispisivati, nego ćemo se pozvati na odgovarajuće rezultate koji su ranije dokazani. Dakle, osnovne tehnike korištene u dokazima su kao i u prethodnom poglavlju bazirane na radovima [5, 53, 54], ali znatne prilagodbe su bile neizbježne kako bi se one mogle primijeniti na ovom modelu. Osobite poteškoće izazvala je nelinearnost koja dolazi od članova koji sadrže intenzitet kemijske reakcije r. Kako bismo došli do željenih rezultata koristili smo neke ideje iz [46], te neke sasvim nove pristupe koji dosad nisu korišteni u području analize kompresibilnih mikropolarnih fluida.

4.1. Definicija generaliziranog rješenja

U sljedećoj definiciji uvodimo pojam generaliziranog rješenja modela.

Definicija 4.1.1. Generalizirano rješenje početno-rubnog problema (2.125)–(2.131) na $Q_T =]0,1[\times]0,T[$, za neki $T > 0$, je funkcija oblika

$$(x,t) \mapsto (\rho, v, \omega, \theta, z)(x,t), \quad (x,t) \in Q_T$$

takva da vrijedi

$$\rho \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,1)\big) \cap H^1(Q_T), \quad \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} \rho > 0 \tag{4.1}$$

$$v, \omega, \theta, z \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,1)\big) \cap H^1(Q_T) \cap L^2\big(0,T;H^2(0,1)\big), \tag{4.2}$$

ρ, v, ω, θ i z zadovoljavaju jednadžbe (2.125)–(2.129) s.s. na Q_T, početne uvjete (2.130) s.s. na $]0,1[$ i rubne uvjete (2.131) u smislu traga.

Slično kao i u Propozicijama 3.1.2 i 3.1.4, ulaganja Soboljevih prostora navedenih u Definiciji 4.1.1 impliciraju sljedeća dodatna svojstva generaliziranog rješenja.

Propozicija 4.1.2. Neka je $(\rho, v, \omega, \theta, z)$ je generalizirano rješenje definirano u Definiciji 4.1.1. Tada vrijedi

$$\rho \in C\big([0,T];L^2(0,1)\big) \cap L^\infty\big(0,T;C([0,1])\big), \tag{4.3}$$

$$v, \omega, \theta, z \in L^2\big(0,T;C^1([0,1])\big) \cap C\big([0,T];H^1(0,1)\big) \cap C\big(\overline{Q}_T\big). \tag{4.4}$$

Ako je dodatno i $\rho_0 \in H^1(0,1)$, tada vrijedi i

$$\rho \in C\big(\overline{Q}_T\big). \tag{4.5}$$

Kako bismo dokazali da generalizirano rješenje postoji, koristimo neke već uvedene pretpostavke na zadane podatke te uvodimo neke nove. U ovom poglavlju pretpostavljamo da vrijedi

$$\rho_0, \theta_0, z_0 \in H^1(0,1), \quad v_0, \omega_0 \in H_0^1(0,1). \tag{4.6}$$

Kao i u modelu mikropolarnog realnog plina za ρ_0 i θ_0 tražimo da vrijedi

$$\rho_0(x) \geq m_0, \qquad \theta_0(x) \geq m_0, \qquad \text{za } x \in [0,1], \tag{4.7}$$

gdje je m_0 neka pozitivna konstanta. Pretpostavka na strogu pozitivnost od ρ_0 već je uvedena pri izvodu modela u (2.79). Nadalje, zbog (4.6) i Propozicije 1.1.3 postoji pozitivna konstanta M_0 takva da vrijedi

$$\rho_0(x) \leq M_0, \qquad \theta_0(x) \leq M_0, \qquad \text{za } x \in [0,1]. \tag{4.8}$$

Za početni udio goriva u plinu z_0 pretpostavljamo da vrijedi

$$0 \leq z_0(x) \leq 1, \qquad \text{za } x \in]0,1[. \tag{4.9}$$

Pretpostavljamo da intenzitet kemijske reakcije ima sljedeći opći oblik

$$r(\rho,\theta,z) = z^m \tilde{r}(\rho,\theta,z), \tag{4.10}$$

pri čemu je $m \geq 1$, a $\tilde{r}$ je funkcija definirana na $]0,+\infty[\, \times\,]0,+\infty[\, \times\, [0,+\infty[$. Dodatne pretpostavke na oblik funkcije r su potrebne kako bismo mogli pokazati egzistenciju i jedinstvenost rješenja promatranog početno-rubnog problema:

- m je ili pozitivan neparan cijeli broj ili jednak 2, (4.11)
- $\tilde{r}$ je nenegativna neprekidna funkcija, (4.12)
- $\tilde{r}$ je ograničena na skupovima oblika $[a,b]\times]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, za $0 < a < b$, (4.13)
- $\tilde{r}$ je Lipschitz neprekidna na ograničenim skupovima s obzirom na ρ i globalno Lipschitz neprekidna obzirom na θ i z, (4.14)
- $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \tilde{r}(\rho,\theta,z) = 0$ i $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \tilde{r}(\rho,\theta,z) = 0$. (4.15)

Ideja za ovakav oblik funkcije r preuzeta je iz [46]. Primijetimo da je Arrheniusov zakon (2.92) poseban slučaj gore opisanog intenziteta kemijske reakcije r te stoga uvedene pretpostavke nisu odviše restriktivne.

U nastavku ćemo r poistovjećivati s pripadnim proširenjem nulom na $\mathbb{R}^3$, pri čemu pretpostavljamo da je $\tilde{r}$ proširena na $\mathbb{R}^3$ tako da za proširenje vrijedi (4.12)–(4.15), na primjer

$$\tilde{r}(\rho,\theta,z) = \begin{cases} \tilde{r}(\rho,\theta,z), & \text{za} \quad \rho > 0,\ \theta > 0,\ z \geq 0, \\ \tilde{r}(\rho,\theta,0), & \text{za} \quad \rho > 0,\ \theta > 0,\ z < 0, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{4.16}$$

pri čemu smo koristili svojstvo (4.15) funkcije $\tilde{r}$.

4.2. Lokalna egzistencija

U ovom odjeljku iskazujemo i dokazujemo teorem o lokalnoj egzistenciji generaliziranog rješenja za model toka i termalne eksplozije reaktivnog mikropolarnog realnog plina. Teorem i njegov dokaz već su objavljeni u [9]. Naglasimo da ranije nije razmatrana lokalna egzistencija za reaktivni fluid ni u klasičnom slučaju, pa budući da je mikropolarni model samo proširenje klasičnog, dokaz sljedećeg teorema potvrda je lokalne egzistencije i za klasičan reaktivni fluid. Važnost ove primjedbe proizlazi iz činjenice da se već dokazani teoremi globalne egzistencije temelje na pretpostavci da rješenje postoji lokalno po vremenu (vidjeti primjerice [46]).

Teorem 4.2.1. Neka za funkcije ρ_0, v_0, ω_0, θ_0 i z_0 vrijedi (4.6)–(4.7) i (4.9) te neka funkcija r zadovoljava pretpostavke (4.10)–(4.15). Tada postoji $T_0 > 0$ takav da početno-rubni problem (2.125)–(2.131) ima generalizirano rješenje u smislu Definicije 4.1.1 na $Q_0 =]0,1[\times]0,T_0[$ takvo da vrijedi

$$\theta > 0 \quad \text{i} \quad 0 \leq z \leq \max_{x\in[0,1]} z_0(x) \leq 1 \quad \text{na} \quad \overline{Q}_0. \tag{4.17}$$

4.2.1. Faedo-Galerkinove aproksimacije

Prvi korak u dokazu teorema je konstrukcija niza aproksimativnih rješenja Faedo-Galerkinovom metodom. Funkcije v^n, ω^n, θ^n i ρ^n definirane su relacijama (3.16)–(3.18), (3.32). U reaktivnom modelu definiramo nove aproksimativne funkcije

$$z^n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} z_i^n(t)\cos(\pi i x), \tag{4.18}$$

za $n = 1,2,3,\ldots$, gdje su z_i^n nepoznate glatke funkcije. Funkcije v^n, ω^n i θ^n zadovoljavaju rubne uvjete (3.19)–(3.21) i početne uvjete (3.22)–(3.24). Za z^n vrijedi

$$\partial_x z^n(0,t) = \partial_x z^n(1,t) = 0. \tag{4.19}$$

U skladu s Faedo-Galerkinovom metodom z^n zadovoljava sljedeći početni uvjet

$$z^n(x,0) = \sum_{i=0}^{n} z_{0i}\cos(\pi i x), \tag{4.20}$$

gdje su z_{0i} Fourierovi koeficijenti od z_0, odnosno vrijedi

$$z_{0i} = 2\int_0^1 z_0(x)\cos(\pi i x)dx, \quad i = 1,2,3,\ldots, \tag{4.21}$$

$$z_{00} = \int_0^1 z_0(x)dx. \tag{4.22}$$

Po Faedo-Galerkinovoj metodi, funkcije v^n, ω^n, θ^n, z^n zadovoljavaju sljedeće uvjete

$$\int_0^1 \left[\partial_t v^n + \frac{R}{L}\partial_x((\rho^n)^p\theta^n) - \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x(\rho^n\partial_x v^n)\right]\sin(\pi ix)dx = 0, \tag{4.23}$$

$$\int_0^1 \left[\partial_t \omega^n - \frac{c_0+2c_d}{L^2 j_I}\partial_x(\rho^n\partial_x\omega^n) + 4\frac{\mu_r}{j_I}\frac{\omega^n}{\rho^n}\right]\sin(\pi ix)dx = 0, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Bigg[\partial_t\theta^n &- \frac{\kappa}{L^2c_v}\partial_x(\rho^n\partial_x\theta^n) + \frac{R}{Lc_v}(\rho^n)^p\theta^n\partial_x v^n - \frac{\lambda+2\mu}{L^2c_v}\rho^n(\partial_x v^n)^2 - 4\frac{\mu_r}{c_v}\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n}\\ &- \frac{c_0+2c_d}{L^2c_v}\rho^n(\partial_x\omega^n)^2 - \frac{\delta}{c_v}r(\rho^n,\theta^n,z^n)\Bigg]\cos(\pi jx)dx = 0,\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\int_0^1 \left[\partial_t z^n - \frac{\sigma}{L^2}\partial_x\Big((\rho^n)^2\partial_x z^n\Big) + r(\rho^n,\theta^n,z^n)\right]\cos(\pi jx)dx = 0, \tag{4.26}$$

za $i = 1,2,3,\dots,$ i $j = 0,1,2,\dots$

Korištenjem oznake (3.33), definicija (3.16)–(3.18), (4.18), jednadžbi (4.23)–(4.26) i uvjeta (3.22)–(3.24), (4.20) Faedo-Galerkinov aproksimativni problem može se zapisati na sljedeći ekvivalentan način:

$$\dot{v}_i^n(t) = 2\int_0^1 \left[-\frac{R}{L}\partial_x((\rho^n)^p\theta^n) + \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x(\rho^n\partial_x v^n)\right]\sin(\pi ix)dx, \tag{4.27}$$

$$\dot{\omega}_i^n(t) = 2\int_0^1 \left[\frac{c_0+2c_d}{L^2 j_I}\partial_x(\rho^n\partial_x\omega^n) - 4\frac{\mu_r}{j_I}\frac{\omega^n}{\rho^n}\right]\sin(\pi ix)dx, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j^n(t) = \lambda_j\int_0^1 \Bigg[&\frac{\kappa}{L^2c_v}\partial_x(\rho^n\partial_x\theta^n) - \frac{R}{Lc_v}(\rho^n)^p\theta^n\partial_x v^n + \frac{\lambda+2\mu}{L^2c_v}\rho^n(\partial_x v^n)^2\\ &+ 4\frac{\mu_r}{c_v}\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} + \frac{c_0+2c_d}{L^2c_v}\rho^n(\partial_x\omega^n)^2 + \frac{\delta}{c_v}r(\rho^n,\theta^n,z^n)\Bigg]\cos(\pi jx)dx,\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\dot{z}_j^n(t) = \lambda_j\int_0^1 \left[\frac{\sigma}{L^2}\partial_x\Big((\rho^n)^2\partial_x z^n\Big) - r(\rho^n,\theta^n,z^n)\right]\cos(\pi jx)dx, \tag{4.30}$$

$$\dot{\zeta}_i^n(t) = v_i^n(t), \tag{4.31}$$

za $i = 1,\dots,n$ i $j = 0,1,\dots,n$, gdje je λ_j dan s (3.42), s pripadnim uvjetima

$$v_i^n(0) = v_{0i}, \quad \omega_i^n(0) = \omega_{0i}, \quad \theta_j^n(0) = \theta_{0j}, \quad z_j^n(0) = z_{0j}, \quad \zeta_i^n(0) = 0. \tag{4.32}$$

Kao i u osnovnom modelu mikropolarnog realnog plina, tvrdnja sljedeće propozicije slijedi neposredno iz Picardovog teorema (Propozicija 1.4.1) i (4.7)–(4.8).

Propozicija 4.2.2. Za sve $n \in \mathbb{N}$, postoji $T_n \in]0,T]$ i jedinstvene funkcije $(v_i^n, \omega_i^n, \theta_j^n, z_j^n, \zeta_i^n)$: $i = 1,\dots,n$, $j = 0,1,\dots,n$ na $[0,T_n]$ takve da funkcije v^n, ω^n, θ^n, ρ^n, z^n definirane s (3.16)–

(3.18), (3.32), (4.18) imaju sljedeća svojstva

$$v^n, \omega^n, \theta^n, z^n \in C^1(\overline{Q}_n), \tag{4.33}$$

$$\rho^n \in C(\overline{Q}_n), \tag{4.34}$$

$$\frac{m_0}{2} \leq \rho^n(x,t) \leq 2M_0, \quad (x,t) \in Q_n, \tag{4.35}$$

gdje je $Q_n =]0,1[\times]0,T_n[$, i zadovoljavaju jednadžbe (4.23)–(4.26) te početne uvjete (3.22)–(3.24), (4.20).

4.2.2. Pomoćne tvrdnje

Sljedeća lema je posljedica ortogonalnosti skupova $\{\sin(\pi ix) : i = 1,2,\dots\}$ i $\{\cos(\pi ix) : i = 0,1,\dots\}$ u Hilbertovom prostoru $L^2(0,1)$. Dokaz se podudara s dokazom Leme 3.2.4 pa ga izostavljamo.

Lema 4.2.3. Neka su v_0, ω_0, θ_0, i z_0 početne funkcije iz (2.130), i neka su $v^n(\cdot,0)$, $\omega^n(\cdot,0)$, $\theta^n(\cdot,0)$ i $z^n(\cdot,0)$ dane s (3.22)–(3.24), (4.20). Tada za svaki n vrijedi

$$\begin{aligned}
&||v^n(\cdot,0)|| \leq ||v_0||, \quad ||(v^n(\cdot,0))'|| \leq ||v_0'||,\\
&||\omega^n(\cdot,0)|| \leq ||\omega_0||, \quad ||(\omega^n(\cdot,0))'|| \leq ||\omega_0'||,\\
&||\theta^n(\cdot,0)|| \leq ||\theta_0||, \quad ||(\theta^n(\cdot,0))'|| \leq ||\theta_0'||,\\
&||z^n(\cdot,0)|| \leq ||z_0||, \quad ||(z^n(\cdot,0))'|| \leq ||z_0'||.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Sljedeća lema ima isti dokaz kao i Lema 3.2.5 budući da se jednadžbe (3.36) i (4.24) podudaraju.

Lema 4.2.4. Za sve $t \in [0,T^n]$ vrijedi

$$||\omega^n(t)||^2 + \int_0^t \left(||\omega^n(\tau)||^2 + ||\partial_x\omega^n(\tau)||^2\right) d\tau \leq C. \tag{4.37}$$

Funkcije v^n, ω^n, $\partial_x v^n$, $\partial_x\omega^n$ i $\partial_x\theta^n$ zadovoljavaju pretpostavke Propozicije 1.1.2, točnije, za njih vrijede nejednakosti (1.9)–(1.11). Isto ne vrijedi za θ^n i z^n, pa u nastavku za te funkcije izvodimo alternativne ocjene budući da su ocjene tog tipa ključne u dokazu Teorema 4.2.1.

U sljedećoj lemi izvodimo ocjenu za z^n.

Lema 4.2.5. Za sve $(x,t) \in Q_n$ vrijedi

$$|z^n(x,t)| \leq ||z^n(\cdot,t)|| + ||\partial_x z^n(\cdot,t)||. \tag{4.38}$$

Dokaz. Primjenom istog postupka kao u dokazu Leme 3.2.7 na z^n umjesto θ^n za sve $(x,t) \in]0,1[\times]0,T^n[$ dobivamo

$$|z^n(x,t)| \leq ||\partial_x z^n(\cdot,t)|| + \left| \int_0^1 z^n(y,t)dy \right|. \tag{4.39}$$

Primjenom Hölderove nejednakosti na desnu stranu od (4.39) dobivamo tvrdnju leme. ■

U sljedećoj lemi koristimo pretpostavku (4.11) da je cjelobrojni parametar m neparan pozitivan broj ili 2.

Lema 4.2.6. Neka je m iz (4.10) takav da vrijedi (4.11). Tada za sve $t \in [0,T^n]$ vrijedi

$$||z^n(\cdot,t)|| \leq C. \tag{4.40}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (4.26) s z_j^n, sumiranjem po $j = 1,\ldots,n$ i uvrštavanjem pretpostavke (4.10) dobivamo

$$\frac{1}{2}\partial_t \left(||z^n||^2\right) + \int_0^1 \left[\frac{\sigma}{L^2}(\rho^n)^2(\partial_x z^n)^2 + (z^n)^{m+1}\tilde{r}(\rho^n,\theta^n,z^n)\right] dx = 0. \tag{4.41}$$

Neka je sada m pozitivan neparan cijeli broj. Integriranjem relacije (4.41) po $[0,t]$ i primjenom ocjena (4.36) dobivamo

$$\frac{1}{2}||z^n||^2 + \int_0^t \int_0^1 \left[\frac{\sigma}{L^2}(\rho^n)^2(\partial_x z^n)^2 + (z^n)^{m+1}\tilde{r}(\rho^n,\theta^n,z^n)\right] dxd\tau \leq C, \tag{4.42}$$

posebno, budući da su svi članovi na lijevoj strani od (4.42) nenegativni, dobivamo tvrdnju leme.

Neka je sada $m = 2$. Iz (4.41), primjenom (4.35) dobivamo

$$\partial_t \left(||z^n||^2\right) + ||\partial_x z^n||^2 \leq C||z^n||^2 \max_{x\in[0,1]} |z^n|. \tag{4.43}$$

Primjenom ocjene (4.38) u (4.43) dobivamo

$$\partial_t \left(||z^n||^2\right) + ||\partial_x z^n||^2 \leq C||z^n||^2 \left(||\partial_x z^n|| + ||z^n||\right). \tag{4.44}$$

Za bilo koji $\alpha \in]0,1[$ Youngova nejednakost daje

$$\begin{aligned}\partial_t \left(||z^n||^2\right) + ||\partial_x z^n||^2 &\leq \alpha||\partial_x z^n||^2 + \frac{C}{\alpha}||z^n||^4 + C||z^n||^2 + C||z^n||^4 \\ &\leq \alpha||\partial_x z^n||^2 + C(1+||z^n||^4),\end{aligned} \tag{4.45}$$

odakle dobivamo

$$\partial_t \left(||z^n||^2\right) + ||\partial_x z^n||^2 \leq C(1+||z^n||^4). \tag{4.46}$$

Integriranjem relacije (4.46) po $]0,t[$, $0<t<T^n$, dobivamo

$$||z^n||^2+\int_0^t ||\partial_x z^n||^2 d\tau \le C\left(1+\int_0^t ||z^n||^4 d\tau\right). \tag{4.47}$$

Primjenom Propozicije 1.3.7 na (4.47) za vrijednosti parametara $n_0=2$, $a=b=C$ i $k=1$, dobivamo

$$||z^n||^2\le C,$$

za sve $t\in]0,\tilde{T}^n[$, gdje je $\tilde{T}^n=\min\{T^n,C^{-1}\}>0$. Ovime je tvrdnja leme pokazana nakon smanjivanja intervala $]0,T^n[$ ako je potrebno. ■

Tvrdnja sljedećeg korolara slijedi direktno iz Lema 4.2.5–4.2.6.

Korolar 4.2.7. Neka je m iz (4.10) takav da vrijedi (4.11). Za sve $(x,t)\in Q_n$ vrijedi

$$|z^n(x,t)|\le C(1+||\partial_x z^n(\cdot,t)||). \tag{4.48}$$

Lema 4.2.8. Za sve $t\in[0,T^n]$ vrijedi

$$\left|\int_0^1 \theta^n(x,t)dx\right|\le C\big(1+||\partial_x v^n(\cdot,t)||^2\big). \tag{4.49}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (4.23) s v_i^n i sumiranjem po $i=1,\ldots,n$, primjenom parcijalne integracije i rubnih uvjeta (3.19) dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(||v^n||^2\big)-\int_0^1\left[\frac{R}{L}(\rho^n)^p\theta^n\partial_x v^n-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho^n(\partial_x v^n)^2\right]dx=0. \tag{4.50}$$

Dodavanjem jednadžbe (4.25) za $j=0$ jednadžbi (4.26) pomnoženoj s δ za $j=0$, primjenom parcijalne integracije i rubnih uvjeta (3.21) i (4.19) slijedi

$$\begin{aligned}\int_0^1 &\left[c_v\partial_t\theta^n+\delta z^n+\frac{R}{L}(\rho^n)^p\theta^n\partial_x v^n-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho^n(\partial_x v^n)^2\right.\\ &\left.-4\mu_r\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n}-\frac{c_0+2c_d}{L^2}\rho^n(\partial_x\omega^n)^2\right]dx=0.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Zbrajanjem relacija (4.50) i (4.51) te integriranjem dobivene sume po $[0,t]$ slijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||v^n||^2+c_v\int_0^1\theta^n dx+\delta\int_0^1 z^n dx&=\frac{1}{2}||v^n(\cdot,0)||^2+c_v\int_0^1\theta^n(x,0)dx+\delta\int_0^1 z^n(x,0)dx\\ &+\int_0^t\int_0^1\left[4\mu_r\frac{(\omega^n(x,\tau))^2}{\rho^n(x,\tau)}+\frac{c_0+2c_d}{L^2}\rho^n(x,\tau)\big(\partial_x\omega^n(x,\tau)\big)^2\right]dxd\tau.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Hölderova nejednakost, i ocjene (4.36)–(4.37) primijenjene na (4.52) daju

$$\left|\frac{1}{2}||v^n||^2+c_v\int_0^1\theta^n dx+\delta\int_0^1 z^n dx\right|\le C, \tag{4.53}$$

odakle primjenom nejednakosti trokuta i Hölderove nejednakosti dobivamo

$$c_v\left|\int_0^1 \theta^n dx\right| \leq C+\frac{1}{2}||v^n||^2+\delta\left|\int_0^1 z^n dx\right| \leq C+\frac{1}{2}||v^n||^2+\delta||z^n||. \tag{4.54}$$

Konačno, primjenom relacija (4.40) i (1.9) u (4.54) dobivamo tvrdnju leme. ■

Pomoću Leme 4.2.8 dobivamo ocjenu iskazanu u sljedećoj lemi. Dokaz izostavljamo budući da se u potpunosti podudara s dokazom Leme 3.2.7.

Lema 4.2.9. Za sve $(x,t)\in Q_n$ vrijedi

$$\left|\theta^n(x,t)\right| \leq C\big(1+||\partial_x v^n(\cdot,t)||^2+||\partial_x\theta^n(\cdot,t)||\big). \tag{4.55}$$

Ocjene za derivacije

U ovom nastavku izvodimo pomoćne ocjene za derivacije aproksimativnih funkcija. Budući da aproksimativna funkcija ρ^n dana s (3.32) ima isti oblik u modelu reaktivnog i nereaktivnog mikropolarnog realnog plina, te budući da se jednadžbe (4.23)–(4.24) podudaraju s jednadžbama (3.35)–(3.36) dokaz sljedeće leme u potpunosti se podudara s dokazima odgovarajućih lema u poglavlju 3.2, preciznije Lema 3.2.8–3.2.10.

Lema 4.2.10. Za sve $t\in[0,T^n]$ i $a\neq 0$ vrijedi

$$\left|\left|\partial_x\Big(\big(\rho^n(t)\big)^a\Big)\right|\right|^2 \leq C\big(1+\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2 d\tau\big), \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(||\partial_x v^n(t)||^2\big)+||\partial_{xx}v^n(t)||^2 \leq C\Big[&1+||\partial_x v^n(t)||^8+||\partial_x\theta^n(t)||^8\\ &+\Big(\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^4\Big],\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\frac{d}{dt}\big(||\partial_x\omega^n(t)||^2\big)+||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 \leq C\left[1+||\partial_x\omega^n(t)||^8+\Big(\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^4\right]. \tag{4.58}$$

U sljedećoj lemi ocjenjujemo prostorne derivacije od z^n.

Lema 4.2.11. Za sve $t\in[0,T^n]$ vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(||\partial_x z^n(t)||^2\big)+||\partial_{xx}z^n(t)||^2 \leq C\Big[&1+||\partial_x z^n(t)||^8+||\partial_x z^n(t)||^{2m}\\ &+\Big(\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^4\Big],\end{aligned} \tag{4.59}$$

gdje je m definiran u (4.10) takav da vrijedi (4.11).

Dokaz. Množenjem jednadžbe (4.26) s $(\pi j)^2 z_j^n$ i sumiranjem po $j = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\int_0^1 \left[\partial_t z^n - \frac{\sigma}{L^2}\partial_x\left((\rho^n)^2\partial_x z^n\right) + r(\rho^n, \theta^n, z^n)\right]\partial_{xx} z^n dx = 0. \tag{4.60}$$

Primjenom parcijalne integracije na (4.60) slijedi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||z^n||^2\right) + \frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 (\rho^n)^2(\partial_{xx}z^n)^2 dx = \sum_{i=1}^2 I_i, \tag{4.61}$$

gdje smo koristili sljedeće oznake

$$I_1 = -\frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 2\rho^n\partial_x\rho^n\partial_x z^n\partial_{xx}z^n dx, \quad I_2 = \int_0^1 \partial_{xx}z^n r(\rho^n, \theta^n, z^n)dx. \tag{4.62}$$

Drugi član na lijevoj strani jednadžbe (4.61) ocjenjujemo odozdo korištenjem (4.35) i dobivamo

$$\frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 (\rho^n)^2(\partial_{xx}z^n)^2 dx \geq C\int_0^1 (\partial_{xx}z^n)^2 dx = C||\partial_{xx}z^n||^2. \tag{4.63}$$

U nastavku integrale na desnoj strani jednadžbe (4.61) ocjenjujemo odozgo. Korištenjem ocjena (4.35), (1.10) i Hölderove nejednakosti dobivamo

$$|I_1| \leq C||\partial_{xx}z^n||^{\frac{1}{2}}||\partial_x z^n||^{\frac{1}{2}}\int_0^1 |\partial_x\rho^n\partial_{xx}z^n|dx \leq C||\partial_{xx}z^n||^{\frac{3}{2}}||\partial_x z^n||^{\frac{1}{2}}||\partial_x\rho^n||. \tag{4.64}$$

Uzimanjem vrijednosti parametara $q = \frac{4}{3}$ i $q' = 4$, a zatim $q = q' = 2$ u Youngovoj nejednakosti (1.21), te za proizvoljan $\alpha \in]0,1[$, iz (4.64) dobivamo

$$|I_1| \leq \alpha||\partial_{xx}z^n||^2 + \frac{C}{\alpha^3}||\partial_x z^n||^2||\partial_x\rho^n||^4 \leq \alpha||\partial_{xx}z^n||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\left(||\partial_x z^n||^4 + ||\partial_x\rho^n||^8\right). \tag{4.65}$$

Primjenom ocjene (4.56) za $a = 1$ i Youngove nejednakosti na (4.65) dobivamo

$$|I_1| \leq \alpha||\partial_{xx}z^n||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\left[1 + ||\partial_x z^n||^8 + \left(\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\cdot,\tau)||^2 d\tau\right)^4\right]. \tag{4.66}$$

Uvrštavanjem pretpostavke (4.10) za funkciju r, korištenjem pretpostavke (4.13) o ograničenosti funkcije $\tilde{r}$, relacije (4.48), te Hölderove i Jensenove nejednakosti dobivamo

$$|I_2| = \left|\int_0^1 (z^n)^m\partial_{xx}z^n\tilde{r}(\rho^n, \theta^n, z^n)dx\right| \leq C(1 + ||\partial_x z^n||^m)||\partial_{xx}z^n||. \tag{4.67}$$

Za $\alpha \in]0,1[$, primjenom Youngove nejednakosti iz (4.67) slijedi

$$|I_2| \leq \alpha||\partial_{xx}z^n||^2 + \frac{C}{\alpha}(1 + ||\partial_x z^n||^{2m}). \tag{4.68}$$

Uzimanjem u obzir ocjena (4.63), (4.66) i (4.68) iz (4.61) slijedi

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(||z^n||^2\right) + ||\partial_{xx}z^n||^2 \\ &\leq 4\alpha||\partial_{xx}z^n||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\left[1 + ||\partial_x z^n||^8 + ||\partial_x z^n||^{2m} + \left(\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\cdot,\tau)||^2 d\tau\right)^4\right].\end{aligned} \tag{4.69}$$

Tvrdnju leme dobivamo ako u (4.69) uzmemo bilo koji $\alpha < \frac{1}{4}$. ■

Budući da se jednadžbe (3.37) i (4.25) razlikuju se u jednom članu, dokaz sljedeće leme u nekim dijelovima se podudara s dokazom Leme 3.2.11, pa neke detalje dokaza izostavljamo.

Lema 4.2.12. Za sve $t \in [0, T^n]$ vrijedi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x \omega^n(t)||^2 + ||\partial_x \theta^n(t)||^2 + ||\partial_x z^n(t)||^2\Big) \\ &+||\partial_{xx} v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \omega^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} \theta^n(t)||^2 + ||\partial_{xx} z^n(t)||^2 \\ \leq C\Big[&1 + ||\partial_x v^n(t)||^{2\gamma} + ||\partial_x \omega^n(t)||^{2\gamma} + ||\partial_x \theta^n(t)||^{2\gamma} + ||\partial_x z^n(t)||^{2\gamma} \\ &+ \Big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\Big)^\gamma\Big], \end{aligned} \tag{4.70}$$

gdje je $\gamma = \max\{4, m\}$, a m iz (4.10) takav da vrijedi (4.11).

Dokaz. Množenjem jednadžbe (4.25) s $(\pi j)^2 \theta_j^n(t)$ i sumiranjem po $j = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Big[&\partial_t \theta^n - \frac{\kappa}{L^2 c_v}\partial_x(\rho^n \partial_x \theta^n) + \frac{R}{L c_v}(\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n - \frac{\lambda + 2\mu}{L^2 c_v}\rho^n (\partial_x v^n)^2 \\ &-4\frac{\mu_r}{c_v}\frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} - \frac{c_0 + 2c_d}{L^2 c_v}\rho^n(\partial_x \omega^n)^2 - \delta r(\rho^n, \theta^n, z^n)\Big] \partial_{xx}\theta^n dx = 0. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Primjenom parcijalne integracije u (4.71) i uvrštavanjem rubnog uvjeta (3.21) dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||\partial_x \theta^n(t)||^2\right) + \frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n \left(\partial_{xx}\theta^n\right)^2 dx = \sum_{i=1}^6 I_i \tag{4.72}$$

gdje smo koristili sljedeće oznake

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \partial_x \rho^n \partial_x \theta^n \partial_{xx}\theta^n dx, \quad I_2 = \frac{R}{c_v L}\int_0^1 \left(\rho^n\right)^p \theta^n \partial_x v^n \partial_{xx}\theta^n dx, \\ I_3 &= -\frac{\lambda + 2\mu}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n \left(\partial_x v^n\right)^2 \partial_{xx}\theta^n dx, \quad I_4 = -\frac{4\mu_r}{c_v}\int_0^1 \frac{\left(\omega^n\right)^2}{\rho^n}\partial_{xx}\theta^n dx, \\ I_5 &= \frac{c_0 + 2c_d}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n \left(\partial_x \omega^n\right)^2 \partial_{xx}\theta^n dx, \quad I_6 = -\delta \int_0^1 r(\rho^n, \theta^n, z^n)\partial_{xx}\theta^n dx. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Drugi član na lijevoj strani jednadžbe (4.72) ocjenjujemo odozdo korištenjem (4.35) i dobivamo

$$\frac{\kappa}{c_v L^2}\int_0^1 \rho^n \left(\partial_{xx}\theta^n\right)^2 dx \geq C_1 ||\partial_{xx}\theta^n||^2. \tag{4.74}$$

Integrale I_1–I_5 ocjenjujemo odozgo korištenjem Hölderove i Youngove nejednakosti, (4.35), (4.37), (1.10), (4.55) i (4.56) na isti način kao i integrale I_1–I_5 u dokazu Leme 3.2.11 i dobivamo

$$|I_1| \leq \alpha ||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\Big(1 + ||\partial_x \theta^n(t)||^8 + \big(\int_0^t ||\partial_{xx} v^n(\tau)||^2 d\tau\big)^4\Big), \tag{4.75}$$

$$|I_2| \leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\big(1 + ||\partial_x\theta^n(t)||^8 + ||\partial_x v^n(t)||^8\big), \tag{4.76}$$

$$|I_3| \leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx}v^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\big(1 + ||\partial_x v^n(t)||^8\big), \tag{4.77}$$

$$|I_4| \leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\big(1 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8\big), \tag{4.78}$$

$$|I_5| \leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3}\big(1 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8\big), \tag{4.79}$$

gdje je $\alpha \in]0,1[$.

Integral I_6 ocjenjujemo na sličan način kao integral I_2 u Lemi 4.2.11 korištenjem relacija (4.10), (4.13), (4.48), te Hölderove, Jensenove i Youngove nejednakosti

$$\begin{aligned} |I_6| &= \left|\delta\int_0^1 (z^n)^m\tilde{r}(\rho^n,\theta^n,z^n)\partial_{xx}\theta^n dx\right| \leq C(1+||\partial_x z^n||^m)||\partial_{xx}\theta^n|| \\ &\leq \alpha||\partial_{xx}\theta^n||^2 + \frac{C}{\alpha}(1+||\partial_x z^n||^{2m}). \end{aligned} \tag{4.80}$$

Primjenom ocjena (4.74)–(4.80) u jednadžbi (4.72) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(||\partial_x\theta^n(t)||^2\big) + C_1||\partial_{xx}\theta^n||^2 &\leq \alpha||\partial_{xx}v^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + 6\alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 \\ &+ \frac{C}{\alpha^3}\Bigg[1 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8 + ||\partial_x\theta^n(t)||^8 + ||\partial_x z^n||^{2m} \\ &+ \left(\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2 d\tau\right)^4\Bigg] \end{aligned} \tag{4.81}$$

Zbrajanjem relacija (4.57)–(4.59) i (4.81) dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(||\partial_x v^n(t)||^2 + ||\partial_x\omega^n(t)||^2\frac{1}{2}||\partial_x\theta^n(t)||^2 + \frac{d}{dt}||\partial_x z^n(t)||^2\right) \\ &+||\partial_{xx}v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + C_1||\partial_{xx}\theta^n||^2 + ||\partial_{xx}z^n(t)||^2 \\ &\leq \alpha||\partial_{xx}v^n(t)||^2 + \alpha||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + 6\alpha||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2 \\ &+\frac{C}{\alpha^3}\Bigg[1 + ||\partial_x v^n(t)||^8 + ||\partial_x\omega^n(t)||^8 + ||\partial_x\theta^n(t)||^8 + ||\partial_x z^n(t)||^8 + ||\partial_x z^n||^{2m} \\ &+ \left(\int_0^t ||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2 d\tau\right)^4\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Neka je $\gamma = \max\{4,m\}$. Tada za bilo koji $\alpha < \min\left\{1,\frac{C_1}{6}\right\}$, primjenom nejednakosti (1.22) iz (4.82) slijedi tvrdnja leme. ■

4.2.3. Apriorne ocjene

U ovom odjeljku za niz aproksimativnih rješenja izvodimo apriorne ocjene neovisne o n na temelju kojih konstruiramo dovoljno mali vremenski interval $[0,T_0]$ na kojem će sve aproksimativne funkcije biti dobro definirane i ograničene u odgovarajućim funkcijskim prostorima.

Dijelovi dokaza sljedeće leme podudaraju se s dokazom Leme 3.2.12 pa ih ovdje ne navodimo.

Lema 4.2.13. Postoji dovoljno mali vremenski interval $]0,T_0]$, $T_0>0$, takav da vrijede sljedeće ocjene

$$\begin{aligned}&\max_{t\in[0,T_0]}\Big(||\partial_x v^n(t)||^2+||\partial_x\omega^n(t)||^2+||\partial_x\theta^n(t)||^2+||\partial_x z^n(t)||^2\Big)\\&+\int_0^{T_0}\Big(||\partial_{xx}v^n(t)||^2+||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2+||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2+||\partial_{xx}z^n(t)||^2\Big)dt\le C,\end{aligned}\tag{4.83}$$

$$\max_{t\in[0,T_0]}||\partial_x\rho^n(t)||\le C,\tag{4.84}$$

$$\frac{m}{2}\le\rho^n(x,t)\le 2M,\quad (x,t)\in\overline{Q}_0,\tag{4.85}$$

gdje je $Q_0=]0,1[\times]0,T_0[$.

Dokaz. Definiramo pomoćnu funkciju

$$y_n(t)=||\partial_x v^n(t)||^2+||\partial_x\omega^n(t)||^2+||\partial_x\theta^n(t)||^2+||\partial_x z^n(t)||^2+\int_0^t||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2d\tau.\tag{4.86}$$

Koristeći ocjenu (4.36) možemo vidjeti da za y_n vrijedi sljedeći početni uvjet

$$y_n(0)=||(v^n(\cdot,0))'||^2+||(\omega^n(\cdot,0))'||^2+||(\theta^n(\cdot,0))'||^2+||(z^n(\cdot,0))'||^2\le B,\tag{4.87}$$

gdje je $B>0$ i ne ovisi o n. Nadalje, iz ocjene (4.70) slijedi da y_n zadovoljava sljedeću diferencijalnu nejednakost

$$\dot{y}_n(t)\le A(1+y_n^\gamma(t)),\tag{4.88}$$

gdje je $A>0$ i ne ovisi o n, a γ je iz Leme 4.2.12.

Picardov teorem (Propozicija 1.4.1) garantira da početni problem

$$\begin{aligned}&y'(t)=A(1+y^\gamma(t))\\&y(0)=B,\end{aligned}\tag{4.89}$$

ima jedinstveno glatko rješenje y, na $[0,T'[$, za neki $T'>0$. Propozicija 1.4.3 zatim daje da za sve $t\in[0,T']$ vrijedi

$$y_n(t)\le y(t).\tag{4.90}$$

Neka je $T_0\le T'$. Pomoću relacije (4.90) zaključujemo da vrijedi

$$\sup_{t\in[0,T_0]}y_n(t)\le\sup_{t\in[0,T_0]}y(t)\le C,\tag{4.91}$$

pri čemu desna strana od (4.91) ne ovisi o n. Sada koristeći definiciju funkcije y_n, ocjenu (4.70) i (4.91) dobivamo

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(||\partial_x v^n(t)||^2+||\partial_x\omega^n(t)||^2+||\partial_x\theta^n(t)||^2+||\partial_x z^n(t)||^2\Big)\\&+||\partial_{xx}v^n(t)||^2+||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2+||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2+||\partial_{xx}z^n(t)||^2\leq C(1+y_n^\gamma(t))\leq C.\end{aligned}\tag{4.92}$$

Integriranjem (4.92) po $[0,t]$, za $t\in]0,T_0[$, i uvrštavanjem početnog uvjeta (4.87) dobivamo

$$\begin{aligned}&||\partial_x v^n(t)||^2+||\partial_x\omega^n(t)||^2+||\partial_x\theta^n(t)||^2+||\partial_x z^n(t)||^2\\&+\int_0^t\Big(||\partial_{xx}v^n(\tau)||^2+||\partial_{xx}\omega^n(\tau)||^2+||\partial_{xx}\theta^n(\tau)||^2+||\partial_{xx}z^n(\tau)||^2\Big)d\tau\leq T'C+B\leq C.\end{aligned}\tag{4.93}$$

Primijetimo da desna strana u (4.93) ne ovisi o t ni o izboru $T_0\leq T'$. Stoga, ocjena (4.83) slijedi nakon što u (4.93) uzmemo maksimum po $t\in[0,T_0]$, zatim ocjena (4.84) slijedi lako iz relacije (4.56) za $a=1$ i (4.83).

Preostaje pokazati je moguće odabrati dovoljno mali $0<T_0\leq T'$ tako da vrijedi (4.85). Međutim, budući da je definicija aproksimativne funkcije ρ^n (3.32) ista kao i u modelu nereaktivnog mikropolarnog realnog plina, taj dio dokaza se u potpunosti podudara s odgovarajućim dijelom dokaza Leme 3.2.12 ((3.123)–(3.129)) pa ga izostavljamo.

■

Neposredna posljedica ocjena (4.48) i (4.83) je iskazana u sljedećem korolaru.

Korolar 4.2.14. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Za z^n vrijedi

$$|z^n(x,t)|\leq C,\quad (x,t)\in Q_0.\tag{4.94}$$

U nastavku izvodimo ocjene neovisne o n za vremenske derivacije aproksimativnih funkcija. Ocjene za vremenske derivacije funkcija v^n, ω^n i ρ^n izvode se iz jednadžbi (4.23)–(4.24) i (3.32) na isti način kao i za model nereaktivnog mikropolarnog realnog plina obrađenog u prethodnom poglavlju budući da se te jednadžbe iste u oba modela. Stoga, dokaz sljedeće leme izostavljamo i upućujemo na dokaze Lema 3.130, 3.140 i 3.159.

Lema 4.2.15. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Vrijedi

$$\int_0^{T_0}||\partial_t v^n(t)||^2dt\leq C,\tag{4.95}$$

$$\int_0^{T_0}||\partial_t \omega^n(t)||^2dt\leq C,\tag{4.96}$$

$$\max_{t\in[0,T_0]}||\partial_t\rho^n(t)||\leq C.\tag{4.97}$$

Jednadžbe (4.25) i (3.37) razlikuju se u jednom članu, pa se dokaz sljedeće leme u nekim dijelovima podudara s dokazom Leme 3.148. Stoga detalje o dijelovima koji se podudaraju izostavljamo.

Lema 4.2.16. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Vrijedi

$$\int_0^{T_0} ||\partial_t \theta^n(t)||^2 dt \leq C. \tag{4.98}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (4.25) s $(\theta_j^n)'$ i sumiranjem po $j = 0, 1, \dots, n$ dobivamo

$$||\partial_t \theta^n(t)||^2 = \sum_{i=1}^{7} I_i, \tag{4.99}$$

gdje smo koristili sljedeće oznake

$$\begin{aligned}
&I_1 = \frac{\kappa}{c_v L^2} \int_0^1 \partial_x \rho^n \partial_x \theta^n \partial_t \theta^n dx, \quad I_2 = \frac{\kappa}{c_v L^2} \int_0^1 \rho^n \partial_{xx} \theta^n \partial_t \theta^n dx, \\
&I_3 = -\frac{R}{L c_v} \int_0^1 (\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n \partial_t \theta^n dx, \quad I_4 = \frac{\lambda + 2\mu}{L^2 c_v} \int_0^1 \rho^n \left(\partial_x v^n\right)^2 \partial_t \theta^n dx, \\
&I_5 = \frac{4\mu_r}{c_v} \int_0^1 \frac{(\omega^n)^2}{\rho^n} \partial_t \theta^n dx, \quad I_6 = \frac{c_0 + 2c_d}{L^2 c_v} \int_0^1 \rho^n \left(\partial_x \omega^n\right)^2 \partial_t \theta^n dx, \\
&I_7 = \delta \int_0^1 r(\rho^n, \theta^n, z^n) \partial_t \theta^n dx.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Prvih šest članova na desnoj strani relacije (4.99) ocjenjujemo na sličan način kao u Lemi 3.148 (vidjeti relaciju (3.157)) korištenjem ocjena (4.35), (4.56), (4.83), Lema 4.2.4 i 4.2.9, Propozicije 1.1.2, te Hölderove nejednakosti i dobivamo

$$|I_1| \leq C||\partial_{xx} \theta^n|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)||, \tag{4.101}$$

$$|I_2| \leq C||\partial_{xx} \theta^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)||, \tag{4.102}$$

$$|I_3| \leq C||\partial_t \theta^n(t)||, \tag{4.103}$$

$$|I_4| \leq C||\partial_{xx} v^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)||, \tag{4.104}$$

$$|I_5| \leq C||\partial_t \theta^n(t)||, \tag{4.105}$$

$$|I_6| \leq C||\partial_{xx} \omega^n(t)|| \cdot ||\partial_t \theta^n(t)||. \tag{4.106}$$

Za ocjenjivanje zadnjeg člana na desnoj strani od (4.99) koristimo relacije (4.10), (4.48), (4.83), te Hölderovu nejednakost i dobivamo

$$\begin{aligned}
|I_7| &= \left| \delta \int_0^1 (z^n)^m \tilde{r}(\rho^n, \theta^n, z^n) \partial_t \theta^n dx \right| \\
&\leq C \max_{x \in [0,1]} |z^n|^m \int_0^1 |\partial_t \theta^n| dx \leq C(1 + ||\partial_x z^n||)^m ||\partial_t \theta^n(t)|| \\
&\leq C||\partial_t \theta^n(t)||.
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Uzimajući u obzir relacije (4.101)–(4.107), te primjenom Youngove nejednakosti, za proizvoljan $\alpha \in]0,1[$, iz (4.99) slijedi

$$\begin{aligned} ||\partial_t \theta^n(t)||^2 &\leq C\big(1 + ||\partial_{xx} v^n(t)|| + ||\partial_{xx}\omega^n(t)|| + ||\partial_{xx}\theta^n(t)||\big)||\partial_t\theta^n(t)|| \\ &\leq \alpha ||\partial_t\theta^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}\Big(1 + ||\partial_{xx}v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2\Big), \end{aligned} \tag{4.108}$$

odnosno

$$||\partial_t\theta^n(t)||^2 \leq C\Big(1 + ||\partial_{xx}v^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega^n(t)||^2 + ||\partial_{xx}\theta^n(t)||^2\Big). \tag{4.109}$$

Integriranjem relacije (4.109) po $[0,T_0]$ i primjenom ocjene (4.83) slijedi tvrdnja propozicije.

■

Lema 4.2.17. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Vrijedi

$$\int_0^{T_0} ||\partial_t z^n(t)||^2 dt \leq C. \tag{4.110}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (4.26) s $(z_j^n)'$ i sumiranjem po $j = 0,1,\ldots,n$ dobivamo

$$||\partial_t z^n||^2 = \sum_{i=1}^{3} I_i, \tag{4.111}$$

gdje koristimo sljedeće oznake

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 2\rho^n\partial_x\rho^n\partial_x z^n\partial_t z^n dx, \quad I_2 = \frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 (\rho^n)^2\partial_{xx}z^n\partial_t z^n dx, \\ I_3 &= -\int_0^1 r(\rho^n,\theta^n,z^n)\partial_t z^n dx. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Članove na desnoj strani jednakosti (4.111) ocjenjujemo korištenjem relacija (4.10), (4.35), (4.48), (4.56), (4.83), Propozicije 1.1.2 te Hölderove i Jensenove nejednakosti i dobivamo

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \max_{x\in[0,1]} |\partial_x z^n| \cdot ||\rho^n|| \cdot ||\partial_t z^n|| \leq C||\partial_{xx}z^n||\left(1 + \int_0^t ||\partial_{xx}v^n||^2 d\tau\right)||\partial_t z^n|| \\ &\leq C||\partial_{xx}z^n|| \cdot ||\partial_t z^n|| \end{aligned} \tag{4.113}$$

$$|I_2| \leq C||\partial_{xx}z^n|| \cdot ||\partial_t z^n|| \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned} |I_3| &= -\int_0^1 (z^n)^m \tilde{r}(\rho^n,\theta^n,z^n)\partial_t z^n dx \leq C \max_{x\in[0,1]} |z^n|^m ||\partial_t z^n|| \\ &\leq C(1 + ||\partial_x z^n||)^m ||\partial_t z^n(t)|| \leq C||\partial_t z^n(t)||. \end{aligned} \tag{4.115}$$

Primjenom ocjena (4.113)–(4.115) i Youngove nejednakosti iz (4.111) dobivamo

$$||\partial_t z^n(t)||^2 \leq C\big(1 + ||\partial_{xx}z^n||\big)||\partial_t z^n(t)|| \leq \alpha||\partial_t z^n(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}(1 + ||\partial_{xx}z^n(t)||^2), \tag{4.116}$$

pri čemu je $\alpha \in]0,1[$, odnosno

$$||\partial_t z^n(t)||^2 \leq C(1 + ||\partial_{xx} z^n(t)||^2). \tag{4.117}$$

Integriranjem relacije (4.117) po $[0, T_0]$ i primjenom ocjene (4.83) (4.110). ■

U sljedećoj lemi izvodimo uniformne ocjene na funkcijske koeficijente iz raspisa aproksimativnih funkcija (3.16)–(3.18), (4.18) po sinusima, odnosno kosinusima.

Lema 4.2.18. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Za aproksimativne funkcije v^n, ω^n, θ^n, z^n definirane s (3.16)–(3.18), (4.18) vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(v_i^n(t)\right)^2 + \left(\omega_i^n(t)\right)^2 \right] + \sum_{i=0}^{n} \left[\left(\theta_i^n(t)\right)^2 + \left(z_i^n(t)\right)^2 \right] \leq C, \ \forall t \in]0, T_0[, \tag{4.118}$$

$$\max_{t\in[0,T_0]} \left(||v^n(t)||^2 + ||\omega^n(t)||^2 + ||\theta^n(t)||^2 + ||z^n(t)||^2 \right) \leq C. \tag{4.119}$$

Dokaz. Ortogonalnost niza $\{\sin(\pi i x)\}_{i=1}^{\infty}$ u Hilbertovom prostoru $L^2(0,1)$ i ocjena (4.83) impliciraju sljedeći niz nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} \left(z_i^n(t)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi^2 i^2}{2} \left(z_i^n(t)\right)^2 = ||\partial_x z^n(t)||^2 \leq C, \tag{4.120}$$

a iz (4.40) dobivamo

$$|z_0^n(t)| = \left| \int_0^1 z^n dx \right| \leq C. \tag{4.121}$$

Ortogonalnost niza $\{\cos(\pi i x)\}_{i=1}^{\infty}$ u Hilbertovom prostoru $L^2(0,1)$ i ocjene (4.120)–(4.121) daju

$$||z^n(t)||^2 = (z_0^n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(z_i^n(t)\right)^2 \leq C. \tag{4.122}$$

Na sličan način dobiju se i ocjene za preostale funkcije (pogledati dokaze Lema 3.2.17 i 3.2.19). ■

Koristeći uniformnu ocjenu (4.118), pomoću Propozicije 1.4.2 dobivamo tvrdnju sljedeće leme.

Lema 4.2.19. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveno rješenje $(\rho^n, v^n, \omega^n, \theta^n)$ aproksimativnog problema (4.23)–(4.26), (3.32), (3.22)–(3.24), (4.20) definirano na $[0, T_0]$.

Tvrdnja sljedeće propozicije slijedi iz ocjena izvedenih u Lemama 4.2.13–4.2.18. Dokaz izostavljamo budući da je potpuno analogan dokazu Propozicije 3.2.20.

Propozicija 4.2.20. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Za nizove funkcija ρ^n, v^n, ω^n, θ^n, z^n definiranih s (3.32), (3.16)–(3.18) i (4.18) vrijedi

1. (ρ^n) je ograničen u $L^\infty(Q_0)$, $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$ i $H^1(Q_0)$.
2. (v^n), (ω^n), (θ^n) i (z^n) su ograničeni u $L^\infty(0,T_0;H^1(0,1))$, $L^2(0,T_0;H^2(0,1))$ i $H^1(Q_0)$.

4.2.4. Dokaz teorema o lokalnoj egzistenciji

U nastavku dokazujemo Teorem 4.2.1 korištenjem pomoćnih rezultata iz prethodnih odjeljaka. U prvom koraku dokaza pokazujemo da nizovi aproksimativnih funkcija konvergiraju na podnizu, a zatim prelaskom na limes pokazujemo da su dobivene granične funkcije rješenje početno rubne zadaće (2.125)–(2.131) s traženim svojstvima.

U sljedeće dvije leme se koristimo činjenicom da su nizovi aproksimativnih rješenja ograničeni po Propoziciji 4.2.20 te Propozicijama 1.2.3–1.2.4 koje govore o kompaktnosti da bismo dokazali egzistenciju konvergentnih podnizova. Dokaze ne navodimo budući da su analogni dokazima Lema 3.2.21–3.2.22, respektivno.

Lema 4.2.21. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Tada postoji funkcija

$$\rho \in L^\infty(0,T_0;H^1(0,1)) \cap H^1(Q_0) \cap C(\overline{Q}_0) \tag{4.123}$$

i podniz[1] niza (ρ^n) takav da

$$\rho^n \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{u} \quad L^\infty(0,T_0;H^1(0,1)), \tag{4.124}$$

$$\rho^n \rightharpoonup \rho \quad \text{u} \quad H^1(Q_0), \tag{4.125}$$

$$\rho^n \to \rho \quad \text{u} \quad C(\overline{Q}_0). \tag{4.126}$$

Funkcija ρ ima sljedeća svojstva

$$\frac{m_0}{2} \le \rho(x,t) \le 2M_0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0, \tag{4.127}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{4.128}$$

pri čemu su m_0 i M_0 pozitivne konstante iz (4.7) i (4.8), a ρ_0 je iz (2.130).

Lema 4.2.22. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Postoje funkcije

$$v,\ \omega,\ \theta,\ z \in H^1(Q_0) \cap L^2(0,T_0;H^2(0,1)) \cap L^\infty(0,T_0;H^1(0,1)) \tag{4.129}$$

[1] radi jednostavnosti podniz označavamo istom oznakom

i podniz[2] niza $(v^n, \omega^n, \theta^n, z^n)$ takav da

$$(v^n, \omega^n, \theta^n, z^n) \rightharpoonup (v, \omega, \theta, z) \quad \text{u} \quad \left(H^1(Q_0)\right)^4, \tag{4.130}$$

$$(v^n, \omega^n, \theta^n, z^n) \rightharpoonup (v, \omega, \theta, z) \quad \text{u} \quad \left(L^2(0, T_0; H^2(0,1))\right)^4, \tag{4.131}$$

$$(v^n, \omega^n, \theta^n, z^n) \to (v, \omega, \theta, z) \quad \text{u} \quad \left(L^2(Q_0)\right)^4, \tag{4.132}$$

$$(v^n, \omega^n, \theta^n, z^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (v, \omega, \theta, z) \quad \text{u} \quad \left(L^\infty(0, T_0; H^1(0,1))\right)^4. \tag{4.133}$$

U sljedećem korolaru iskazujemo dodatno svojstvo graničnih funkcija ρ, v, ω, θ i z koje slijedi direktno iz Lema (4.2.21)–(4.2.22), a koje ćemo često koristiti u narednim dokazima.

Korolar 4.2.23. Neka je T_0 kao u Lemi 4.2.13. Za funkcije iz Lema 4.2.21–4.2.22 vrijedi

$$\rho, v, \omega, \theta, z \in L^\infty(Q_0). \tag{4.134}$$

U sljedeće dvije leme tvrdimo da granične funkcije iz Lema 4.2.21–4.2.22 zadovoljavaju početne i rubne uvjete (2.130)–(2.131) te jednadžbe (2.125)–(2.127). Dokaz se temelji na pažljivom odabiru test funkcija iz prostora $C_c^\infty(0,1)$, $C_c^\infty(0,T_0)$, odnosno $C_c^\infty(Q_0)$, pri čemu se koristimo svojstvima graničnih funkcija iz Lema 4.2.21–4.2.22 te svojstvima aproksimativnih funkcija iz prethodnih odjeljaka. Dokaze izostavljamo budući da su potpuno analogni dokazima Lema 3.2.24–3.2.28.

Lema 4.2.24. Granične funkcije v, ω, θ i z iz Leme 4.2.22 zadovoljavaju početne uvjete (2.130) s.s. na $[0,1]$ i rubne uvjete (2.131) na $[0, T_0]$, gdje je T_0 iz Leme 4.2.13, u smislu traga.

Lema 4.2.25. Neka je Q_0 kao u Lemi 4.2.13. Funkcije ρ, v, ω i θ iz Lema 4.2.21–4.2.22 zadovoljavaju jednadžbe (2.125)–(2.127) s.s. na Q_0.

Jednadžba (4.25) se od jednadžbe (3.37) razlikuje u jednom članu, pa se dokaz sljedeće leme djelomično podudara s dokazom Leme 3.2.29. Stoga ovdje izostavljamo detalje za one dijelove dokaza koji se podudaraju.

Lema 4.2.26. Neka je Q_0 kao u Lemi 4.2.13. Funkcije ρ, v, ω, θ i z iz Lema 4.2.21–4.2.22 zadovoljavaju jednadžbu (2.128) s.s. na Q_0.

[2] radi jednostavnosti podniz označavamo istom oznakom

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(0,T_0)$. Množenjem jednadžbe (4.25) s φ, integriranjem po $[0,T_0]$, te primjenom parcijalne integracije i uvrštavanjem rubnih uvjeta (3.21), dobivamo

$$\begin{aligned}
&-c_v \iint_{Q_0} \theta^n \cos(\pi jx)\varphi' dxdt - \frac{\kappa\pi j}{L^2}\iint_{Q_0} \rho^n \partial_x \theta^n \sin(\pi jx)\varphi dxdt \\
&+\frac{R}{L}\iint_{Q_0} (\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n \cos(\pi jx)\varphi dxdt - \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x v^n)^2 \cos(\pi jx)\varphi dxdt \\
&-4\mu_r \iint_{Q_0} \frac{(\omega^n)^2}{\rho^n}\cos(\pi jx)\varphi dxdt - \frac{c_0+2c_d}{L^2}\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x \omega^n)^2 \cos(\pi jx)\varphi dxdt \\
&-\delta \iint_{Q_0} r(\rho^n,\theta^n,z^n)\cos(\pi jx)\varphi dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{4.135}$$

Pomoću Lema 4.2.21–4.2.22, analogno kao u Lemi 3.2.29, dobivamo da vrijedi

$$\iint_{Q_0} \theta^n \cos(\pi jx)\varphi' dxdt \to \iint_{Q_0} \theta \cos(\pi jx)\varphi' dxdt. \tag{4.136}$$

$$\iint_{Q_0} \rho^n \partial_x \theta^n \sin(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho \partial_x \theta \sin(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.137}$$

$$\iint_{Q_0} (\rho^n)^p \theta^n \partial_x v^n \cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho^p \theta \partial_x v \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.138}$$

$$\iint_{Q_0} \frac{(\omega^n)^2}{\rho^n}\cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \frac{\omega^2}{\rho}\cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.139}$$

$$\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x v^n)^2 \cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho (\partial_x v)^2 \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.140}$$

$$\iint_{Q_0} \rho^n (\partial_x \omega^n)^2 \cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} \rho (\partial_x \omega)^2 \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.141}$$

Preostaje ispitati konvergenciju zadnjeg člana u (4.135). Neka je

$$\iint_{Q_0} (r(\rho^n,\theta^n,z^n) - r(\rho,\theta,z))\cos(\pi jx)\varphi dxdt = \sum_{i=1}^4 I_i, \tag{4.142}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{Q_0} (z^n)^m (\tilde{r}(\rho^n,\theta^n,z^n) - \tilde{r}(\rho,\theta^n,z^n))\cos(\pi jx)\varphi dxdt, \\
I_2 &= \iint_{Q_0} (z^n)^m (\tilde{r}(\rho,\theta^n,z^n) - \tilde{r}(\rho,\theta,z^n))\cos(\pi jx)\varphi dxdt, \\
I_3 &= \iint_{Q_0} (z^n)^m (\tilde{r}(\rho,\theta,z^n) - \tilde{r}(\rho,\theta,z))\cos(\pi jx)\varphi dxdt, \\
I_4 &= \iint_{Q_0} ((z^n)^m - z^m)\tilde{r}(\rho,\theta,z)\cos(\pi jx)\varphi dxdt.
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Korištenjem relacije (4.94), neprekidnosti funkcije $\tilde{r}$ po prvoj varijabli, odnosno pretpostavke (4.14), te (4.126) dobivamo

$$|I_1| \le C||\tilde{r}(\rho^n,\theta^n,z^n) - \tilde{r}(\rho,\theta^n,z^n)||_\infty \iint_{Q_0} |\cos(\pi jx)\varphi|\, dxdt \to 0. \tag{4.144}$$

Iz (4.94), Lipschitz neprekidnosti funkcije of $\tilde{r}$ po drugoj i trećoj varijabli (vidjeti (4.14)), Hölderove nejednakosti i (4.132) dobivamo

$$|I_2| \leq C \iint_{Q_0} |\theta^n - \theta| \cdot |\cos(\pi jx)\varphi| \, dxdt \leq C||\theta^n - \theta||_{L^2(Q_0)} \to 0, \tag{4.145}$$

$$|I_3| \leq C \iint_{Q_0} |z^n - z| \cdot |\cos(\pi jx)\varphi| \, dxdt \leq C||z^n - z||_{L^2(Q_0)} \to 0. \tag{4.146}$$

Slično, budući da je preslikavanje $y \mapsto y^m$ Lipschitz neprekidno na $[0,C]$, gdje je C iz (4.94), korištenjem ograničenosti funkcije $\tilde{r}$, odnosno pretpostavke (4.13), Hölderove nejednakosti i (4.132) dobivamo

$$|I_4| \leq C \iint_{Q_0} |z^n - z| \cdot |\cos(\pi jx)\varphi| \, dxdt \leq C||z^n - z||_{L^2(Q_0)} \to 0. \tag{4.147}$$

Iz (4.142)–(4.147) slijedi

$$\iint_{Q_0} r(\rho^n, \theta^n, z^n) \cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} r(\rho, \theta, z) \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.148}$$

Tvrdnja leme slijedi nakon puštanja n u beskonačno u (4.135) i primjene relacija (4.136)–(4.141), (4.148). ■

U sljedećoj lemi pokazujemo da granične funkcije iz Lema 4.2.21–4.2.22 zadovoljavaju i posljednju, novu jednadžbu (2.129) za koju ne postoji analogon u osnovnom modelu.

Lema 4.2.27. Neka je Q_0 kao u Lemi 4.2.13. Funkcije ρ, θ i z iz Lema 4.2.21–4.2.22 zadovoljavaju jednadžbu (2.129) s.s. na Q_0.

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(0,T_0)$. Množenjem jednadžbe (4.26) s φ, integriranjem po $[0,T_0]$, primjenom parcijalne integracije i uvrštavanjem rubnih uvjeta (4.19) dobivamo

$$\begin{aligned} \iint_{Q_0} z^n \cos(\pi jx)\varphi' dxdt + \frac{\sigma\pi j}{L^2} \iint_{Q_0} (\rho^n)^2 \partial_x z^n \sin(\pi jx)\varphi dxdt \\ - \iint_{Q_0} r(\rho^n, \theta^n, z^n) \cos(\pi jx)\varphi dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.149}$$

Korištenjem Hölderove nejednakosti i (4.132) dobivamo

$$\left| \iint_{Q_0} (z^n - z) \cos(\pi jx)\varphi' dxdt \right| \leq ||z^n - z||_{L^2(Q_0)} ||\cos(\pi jx)\varphi'||_{L^2(Q_0)} \to 0. \tag{4.150}$$

Nadalje, neka je

$$\iint_{Q_0} \left((\rho^n)^2 \partial_x z^n - (\rho)^2 \partial_x z \right) \sin(\pi jx)\varphi dxdt = \sum_{i=1}^{2} I_i, \tag{4.151}$$

gdje je

$$I_1 = \iint_{Q_0} \left((\rho^n)^2 - (\rho)^2\right) \partial_x z^n \sin(\pi jx)\varphi dxdt, \tag{4.152}$$

$$I_2 = \iint_{Q_0} (\rho)^2(\partial_x z^n - \partial_x z) \sin(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.153}$$

Hölderova nejednakost, Propozicija 4.2.20 i relacija (4.126) impliciraju

$$|I_1| \leq ||(\rho^n)^2 - (\rho)^2||_\infty ||\partial_x z^n||_{L^2(Q_0)} ||\sin(\pi jx)\varphi||_{L^2(Q_0)} \leq C||(\rho^n)^2 - (\rho)^2||_\infty \to 0. \tag{4.154}$$

Budući da po Lemi 4.2.22 vrijedi $\partial_x z^n \rightharpoonup \partial_x z$ u $L^2(Q_0)$, možemo zaključiti da $I_2 \to 0$. U Lemi 4.2.27 pokazali smo da za zadnji član u (4.149) vrijedi

$$\iint_{Q_0} r(\rho^n, \theta^n, z^n) \cos(\pi jx)\varphi dxdt \to \iint_{Q_0} r(\rho, \theta, z) \cos(\pi jx)\varphi dxdt. \tag{4.155}$$

(za detalje vidjeti (4.142)–(4.147)). Tvrdnja Leme slijedi nakon puštanja n u beskonačno u (4.149) i primjene relacija (4.150)–(4.155). ■

Ovime je pokazano da početno-rubni problem (2.125)–(2.131) ima rješenje na Q_0. Preostaje pokazati da to rješenje ima tražena svojstva, odnosno da vrijedi (4.17). Dokaz sljedeće Leme temelji se na neprekidnosti funkcije θ (vidjeti Propoziciju 4.1.2) i analogan je dokazu Leme 3.2.30 pa ga iz tog razloga ne pišemo.

Lema 4.2.28. Postoji $T_0 > 0$ takav da funkcija θ iz Leme 4.2.22 zadovoljava uvjet (4.17) na $\overline{Q}_0$.

Ideja za dokaz sljedeće leme preuzeta je iz [46].

Lema 4.2.29. Neka funkcija z zadovoljava jednadžbu (2.129). Tada vrijedi

$$0 \leq z \leq M_{z_0}, \tag{4.156}$$

pri čemu je $M_{z_0} = \max_{x\in[0,1]} z_0 \in [0,1]$. Posebno, funkcija z iz Leme 4.2.22 zadovoljava uvjet (4.17).

Dokaz. Neka je

$$z_- = \min\{z, 0\} \leq 0.$$

Množenjem jednadžbe (2.129) sa z_-, integriranjem po $]0,1[$, te primjenom relacija (4.10)–(4.13) i (4.134) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_-^2 dx &= -\frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 \rho^2(\partial_x z_-)^2 dx - \int_0^1 r(\rho,\theta,z_-)z_- dx \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |z_-|^{m-1} \int_0^1 (z_-)^2 \tilde{r}(\rho,\theta,z_-)dx \leq C\int_0^1 (z_-)^2 dx.\end{aligned} \tag{4.157}$$

Grönwallova nejednakost primijenjena na (4.157) i pretpostavka (4.9) daju

$$0 \leq \int_0^1 z_-^2 dx \leq C \int_0^1 (z_-(x,0))^2 dx = 0, \tag{4.158}$$

pa stoga vrijedi $z \geq 0$.

Neka je

$$z_+ = \max\{z, M_{z0}\} - M_{z0} \geq 0. \tag{4.159}$$

Množenjem jednadžbe (2.129) s z_+, integriranjem po $]0,1[$, i primjenom relacija (4.10)–(4.12) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z_+^2 dx &= -\frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 \rho^2(\partial_x z_+)^2 dx - \int_0^1 r(\rho,\theta,z_+)z_+ dx \\ &\leq \int_0^1 (z_+)^{m+1}\tilde{r}(\rho,\theta,z_+)dx \leq 0. \end{aligned} \tag{4.160}$$

Integriranjem (4.160) po $]0,t[$ dobivamo

$$0 \leq \int_0^1 z_+^2 dx \leq \int_0^1 (z_+(x,0))^2 dx = 0, \tag{4.161}$$

odnosno, $||z_+|| = 0$. Stoga, uvažavajući (4.9) i (4.159), slijedi da je $z \leq M_{z_0} \leq 1$, čime je dokaz leme završen. ■

Ovime je dokaz teorema o lokalnoj egzistenciji završen.

4.3. JEDINSTVENOST

Drugi važan rezultat vezan za model toka i termalne eksplozije reaktivnog mikropolarnog realnog plina, iskazan u sljedećem teoremu, je jedinstvenost generaliziranog rješenja uvedenog u Definiciji 4.1.1.

Teorem 4.3.1. Neka funkcija r zadovoljava pretpostavke (4.10)–(4.15). Za svaki $T > 0$ postoji najviše jedno generalizirano rješenje početno-rubnog problema (2.125)–(2.131) u smislu Definicije 4.1.1 na $Q_T =]0,1[\times]0,T[$.

Teorem se dokazuje na sličan način kao i odgovarajući teorem za mikropolarni realni plin u Poglavlju 3.3, pri čemu gustoću mase ρ u zapisu sustava zamjenjujemo specifičnim volumenom u koji je dan s

$$u = \frac{1}{\rho}. \tag{4.162}$$

Ova zamjena ima smisla zbog uvjeta (4.1) iz definicije generaliziranog rješenja. Sukladno tome, uvodimo i sljedeće oznake

$$r_u(u,\theta,z) = r\left(\frac{1}{u},\theta,z\right), \quad \tilde{r}_u(u,\theta,z) = \tilde{r}\left(\frac{1}{u},\theta,z\right), \tag{4.163}$$

pri čemu je r funkcija intenziteta reakcije, a $\tilde{r}$ iz (4.10).

Napomena 4.3.2. Primijetimo da funkcija $\tilde{r}_u$ definirana s (4.163) zadržava svojstva (4.12)–(4.14) funkcije $\tilde{r}$ koja će nam biti potrebna u dokazu Teorema 4.3.1. Jedini netrivijalni dio ove tvrdnje odnosi se na Lipschitzovost funkcije po varijabli ρ na ograničenim skupovima iz (4.14) koji se lako pokaže. Naime, neka je $0 < a < b$ i $u_1, u_2 \in]a,b[$. Tada zbog (4.14) vrijedi

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_u(u_1,\theta,z) - \tilde{r}_u(u_2,\theta,z)| &= \left| r\left(\frac{1}{u_1},\theta,z\right) - r\left(\frac{1}{u_2},\theta,z\right)\right| \\ &\leq \frac{L_{\rho,a,b}}{|u_1u_2|}|u_1-u_2| \leq \frac{L_{\rho,a,b}}{a^2}|u_1-u_2|, \end{aligned} \tag{4.164}$$

gdje smo s $L_{\rho,a,b}$ označili Lipshitzovu konstantu po varijabli ρ na skupu $]a,b[$.

U prvom koraku konstruira se pomoćni sustav diferencijalnih jednadžbi za razlike dvaju rješenja promatranog početno-rubnog problema, a zatim se korištenjem dobivenih jednadžbi i svojstava generaliziranog rješenja izvode ocjene za razlike rješenja. Jedan od osnovnih alata u dokazu je Grönwallova nejednakost (Propozicija 1.3.6). Dijelovi dokaza se podudaraju s dokazom Teorema 3.3.1 pa ih ovdje izostavljamo i upućujemo na mjesta gdje su dokazani.

4.3.1. Pomoćni sustav

Označimo dva različita generalizirana rješenja početno-rubnog problema (2.125)–(2.131) na Q_T, gdje je $T > 0$ proizvoljan i fiksan, s

$$(\rho_i, v_i, \omega_i, \theta_i, z_i), \quad i = 1,2, \tag{4.165}$$

i neka je $u_i = \rho_i^{-1}$, za $i = 1,2$. Relacije (4.1) i (4.3) impliciraju da vrijedi

$$u_i \in L^\infty(Q_T), \quad \operatorname*{ess\,inf}_{Q_T} u_i > 0, \quad i = 1,2. \tag{4.166}$$

Uvodimo sljedeće oznake za razlike dvaju rješenja

$$u = u_1 - u_2 = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}, \quad v = v_1 - v_2, \quad \omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad z = z_1 - z_2. \tag{4.167}$$

Oduzimanjem jednadžbi (2.125)–(2.128) koje su po pretpostavci zadovoljene za $(\rho, v, \omega, \theta, z) = (\rho_i, v_i, \omega_i, \theta_i, z_i)$, za $i = 1,2$, i nakon uvrštavanja (4.162), dobivamo

$$\partial_t u = \frac{1}{L}\partial_x v, \tag{4.168}$$

$$\partial_t v = -\frac{R}{L}\partial_x\left(\frac{\theta}{u_1^p} - \frac{(u_1^p - u_2^p)\,\theta_2}{u_1^p u_2^p}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x v}{u_1} - \frac{u\,\partial_x v_2}{u_1 u_2}\right), \tag{4.169}$$

$$j_I\partial_t\omega = \frac{c_0+2c_d}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x\omega}{u_1} - \frac{u\,\partial_x\omega_2}{u_1u_2}\right) - 4\mu_r\left(\omega u_1 + u\,\omega_2\right), \tag{4.170}$$

$$\begin{aligned} c_v\partial_t\theta = &\frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x\theta}{u_1} - \frac{u\,\partial_x\theta_2}{u_1u_2}\right) - \frac{R}{L}\left(\frac{\theta_1\,\partial_x v}{u_1^p} + \frac{\theta\,\partial_x v_2}{u_1^p} - \frac{(u_1^p - u_2^p)\,\theta_2\,\partial_x v_2}{u_1^p u_2^p}\right) \\ &+ \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\left(\frac{(\partial_x v_1 + \partial_x v_2)\,\partial_x v}{u_1} - \frac{(\partial_x v_2)^2 u}{u_1u_2}\right) \\ &+ \frac{c_0+2c_d}{L^2}\left(\frac{(\partial_x\omega_1 + \partial_x\omega_2)\,\partial_x\omega}{u_1} - \frac{(\partial_x\omega_2)^2 u}{u_1u_2}\right) \\ &+ 4\mu_r\left((\omega_1+\omega_2)\,u_1\,\omega + \omega_2^2\,u\right) + \delta\left(r_u(u_1,\theta_1,z_1) - r_u(u_2,\theta_2,z_2)\right), \end{aligned} \tag{4.171}$$

$$\partial_t z = \frac{\sigma}{L^2}\partial_x\left(\frac{\partial_x z}{u_1^2} - \frac{u(u_1+u_2)\partial_x z_2}{u_1^2u_2^2}\right) - \left(r_u(u_1,\theta_1,z_1) - r_u(u_2,\theta_2,z_2)\right). \tag{4.172}$$

za $(x,t) \in \Omega_T$. Nadalje, budući da $(\rho_i, v_i, \omega_i, \theta_i, z_i)$ zadovoljavaju početne i rubne uvjete (2.130)–(2.131) dobivamo da za razlike $(u, v, \omega, \theta, z)$ vrijede sljedeći homogeni početni i rubni uvjeti

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad \omega(x,0) = 0, \quad \theta(x,0) = 0, \quad z(x,0) = 0, \tag{4.173}$$

za $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad \omega(0,t) = \omega(1,t) = 0, \\ \partial_x\theta(0,t) = \partial_x\theta(1,t) = 0, \quad \partial_x z(0,t) = \partial_x z(1,t) = 0, \end{aligned} \tag{4.174}$$

za $t \in [0,T]$.

U sljedećoj lemi dane su ocjene za u, $u_1^p - u_2^p$, v i ω. Dokaz izostavljamo budući da se temelji na jednadžbama (4.168)–(4.170) koje se podudaraju s jednadžbama (3.240)–(3.242) u osnovnom modelu mikropolarnog realnog plina. Za detalje pogledati Leme 3.3.2–3.3.5, odnosno Korolar 3.3.6 i njihove dokaze.

Lema 4.3.3. Postoji $C > 0$ tako da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$\begin{aligned} ||u(t)||^2 + ||u_1^p(t) - u_2^p(t)||^2 + ||v(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 + \int_0^t \left(||\partial_x v(\tau)||^2 + ||\partial_x \omega(\tau)||^2\right) d\tau \\ \leq C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau. \end{aligned} \tag{4.175}$$

U sljedećoj lemi izvodimo ocjenu za z.

Lema 4.3.4. Postoji $C > 0$ tako da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||z(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x z(\tau)||^2 d\tau \leq C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau. \tag{4.176}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (4.172) sa z, integriranjem po $]0,1[$, nakon primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (4.174) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(||z(t)||^2\right) + \frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 \frac{(\partial_x z)^2}{u_1^2}\,dx =& \frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 \frac{(u_1+u_2)u\partial_x z\,\partial_x z_2}{u_1^2 u_2^2}\,dx \\ &- \int_0^1 z\left(r_u(u_1,\theta_1,z_1) - r_u(u_2,\theta_2,z_2)\right) dx. \end{aligned} \tag{4.177}$$

Uvažavanjem svojstva (4.166) dobivamo ocjenu odozdo za integral na lijevoj strani relacije (4.177)

$$\frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 \frac{(\partial_x z)^2}{u_1^2}\,dx \geq C_1||\partial_x z(t)||^2. \tag{4.178}$$

Primijetimo da je preslikavanje $x \mapsto x^m$ Lipschitzovo na ograničenom intervalu

$$I = [\min_{i=1,2}\min_{(x,t)\in Q_T}|z_i(x,t)|, \max_{i=1,2}\max_{(x,t)\in Q_T}|z_i(x,t)|]. \tag{4.179}$$

Naime, teorem srednje vrijednosti i (4.4) daju

$$|\zeta_1^m - \zeta_2^m| \leq m\max_{\zeta\in I}|\zeta|^{m-1}|\zeta_1 - \zeta_2| \leq C|\zeta_1 - \zeta_2|, \tag{4.180}$$

za sve $\zeta_1, \zeta_2 \in I$. Koristeći Napomenu 4.3.2, svojstva (4.4), (4.10)–(4.14), (4.163), (4.166), primjenom Hölderove i Youngove nejednakosti i Propozicije 1.1.2 za neki $\alpha > 0$ čiju ćemo vrijednost specificirati naknadno, te (4.180), dobivamo sljedeće ocjene za integrale na desnoj strani relacije (4.177)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{(u_1+u_2)u\partial_x z\, \partial_x z_2}{u_1^2 u_2^2}\, dx \right| &\leq C||\partial_{xx} z_2(t)|| \cdot ||u(t)|| \cdot ||\partial_x z(t)|| \\ &\leq \alpha ||\partial_x z(t)||^2 + \frac{C}{\alpha} ||u(t)||^2 \, ||\partial_{xx} z_2(t)||^2, \end{aligned} \tag{4.181}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 z\left(r_u(u_1,\theta_1,z_1) - r_u(u_2,\theta_2,z_2)\right) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 z(z_1^m - z_2^m) \tilde{r}_u(u_1,\theta_1,z_1) dx \right| \\ &+ \left| \int_0^1 z z_2^m \left(\tilde{r}_u(u_1,\theta_1,z_1) - \tilde{r}_u(u_2,\theta_1,z_1)\right) dx \right| \\ &+ \left| \int_0^1 z z_2^m \left(\tilde{r}_u(u_2,\theta_1,z_1) - \tilde{r}_u(u_2,\theta_2,z_1)\right) dx \right| \\ &+ \left| \int_0^1 z z_2^m \left(\tilde{r}_u(u_2,\theta_2,z_1) - \tilde{r}_u(u_2,\theta_2,z_2)\right) dx \right| \\ \leq C \int_0^1 \left(|z|^2 + |z| \frac{|u|}{|u_1 u_2|} + |z\theta| \right) dx & \\ \leq C \left(||z||^2 + ||z|| \cdot ||u|| + ||z|| \cdot ||\theta|| \right) & \\ \leq C \left(||z||^2 + ||u||^2 + ||\theta||^2 \right). & \end{aligned} \tag{4.182}$$

Integriranjem relacije (4.177) po $]0,t[$ za bilo koji $t \in [0,T]$, uvažavanjem ocjena (4.178)–(4.182), nakon uvrštavanja početnih uvjeta (4.173) dobivamo

$$\begin{aligned} ||z(t)||^2 + C_1 \int_0^t ||\partial_x z(\tau)||^2 d\tau \leq \alpha \int_0^t ||\partial_x z(\tau)||^2 d\tau \\ + C \int_0^t \left(||z(\tau)||^2 + ||u(\tau)||^2 + ||\theta(\tau)||^2 \right) d\tau + \frac{C}{\alpha} \int_0^t ||\partial_{xx} z_2(\tau)||^2 ||u(\tau)||^2 d\tau. \end{aligned} \tag{4.183}$$

Neka je $\alpha < C_1$. Primjenom ocjene (4.175) u (4.183) dobivamo

$$\begin{aligned} ||z(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x z(\tau)||^2 d\tau \leq & C \int_0^t ||z(\tau)||^2 d\tau + C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau \\ & + C \int_0^t \left(1 + ||\partial_{xx} z_2(\tau)||^2\right) \int_0^\tau ||\theta(s)|| ds\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.184}$$

Primjenom svojstva (4.2) u (4.184) dobivamo

$$||z(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x z(\tau)||^2 d\tau \leq C \int_0^t ||z(\tau)||^2 d\tau + C \int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau. \tag{4.185}$$

Primjenom Grönwallove nejednakosti iz (4.185) dobivamo (4.176). ■

4.3.2. Dokaz teorema o jedinstvenosti

Množenjem jednadžbe (4.171) s θ, integriranjem po $]0,1[$, nakon primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (4.174) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{c_v}{2}\frac{d}{dt}\left(||\theta(t)||^2\right)+\frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\frac{(\partial_x\theta)^2}{u_1}dx&=\frac{\kappa}{L^2}\int_0^1\frac{u\partial_x\theta\,\partial_x\theta_2}{u_1u_2}dx\\&-\frac{R}{L}\int_0^1\left(\frac{\theta_1\partial_x v}{u_1^p}+\frac{\theta\partial_x v_2}{u_1^p}-\frac{(u_1^p-u_2^p)\theta_2\partial_x v_2}{u_1^pu_2^p}\right)\theta\,dx\\&+\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\left(\frac{\partial_x v}{u_1}(\partial_x v_1+\partial_x v_2)-\frac{(\partial_x v_2)^2u}{u_1u_2}\right)\theta\,dx\\&+\frac{c_0+2c_d}{L^2}\int_0^1\left(\frac{\partial_x\omega}{u_1}(\partial_x\omega_1+\partial_x\omega_2)-\frac{(\partial_x\omega_2)^2u}{u_1u_2}\right)\theta\,dx\\&+4\mu_r\int_0^1\left((\omega_1+\omega_2)\omega u_1\theta+\omega_2^2u\theta\right)dx\\&+\delta\int_0^1\theta\left(r_u(u_1,\theta_1,z_1)-r_u(u_2,\theta_2,z_2)\right)dx.\end{aligned}\tag{4.186}$$

Integrale u relaciji (4.186) ocjenjujemo koristeći tvrdnju Napomene 4.3.2, svojstva (4.4), (4.166), (4.10)–(4.14), (4.163), Hölderovu i Youngovu nejednakost i Propoziciju 1.1.2 za neki $\alpha>0$ čiju ćemo vrijednost specificirati naknadno, te činjenicu da je preslikavanje $x\mapsto x^m$ Lipschitzovo na ograničenom intervalu. Budući da je postupak ocjenjivanja isti kao u relacijama (3.279)–(3.289) u dokazu Teorema 3.2, detalje izostavljamo osim u slučaju posljednjeg integrala na desnoj strani za koji, slično kao u u dokazu Leme 4.3.4, vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\theta\left(r_u(u_1,\theta_1,z_1)-r_u(u_2,\theta_2,z_2)\right)dx\right|&\le\left|\int_0^1\theta(z_1^m-z_2^m)\tilde r_u(u_1,\theta_1,z_1)dx\right|\\&+\left|\int_0^1\theta z_2^m\left(\tilde r_u(u_1,\theta_1,z_1)-\tilde r_u(u_2,\theta_1,z_1)\right)dx\right|\\&+\left|\int_0^1\theta z_2^m\left(\tilde r_u(u_2,\theta_1,z_1)-\tilde r_u(u_2,\theta_2,z_1)\right)dx\right|\\&+\left|\int_0^1\theta z_2^m\left(\tilde r_u(u_2,\theta_2,z_1)-\tilde r_u(u_2,\theta_2,z_2)\right)dx\right|\\&\le C\int_0^1\left(|z\theta|+|\theta|\frac{|u|}{|u_1u_2|}+|\theta|^2\right)dx\le C\left(||z||^2+||u||^2+||\theta||^2\right).\end{aligned}\tag{4.187}$$

Korištenjem ocjena (3.279)–(3.289) i (4.187) dobivamo

$$\begin{aligned}&\frac{c_v}{2}\frac{d}{dt}\left(||\theta(t)||^2\right)+C_1||\partial_x\theta(t)||^2\\&\le\alpha||\partial_x\theta(t)||^2+\frac{C}{\alpha}||\partial_{xx}\theta_2(t)||^2\cdot||u(t)||^2+C\left(||\partial_x v(t)||^2+||\partial_x\omega(t)||^2\right)\\&\quad+C\left(||\theta(t)||^2+||u(t)||^2+||u_1^p(t)-u_2^p(t)||^2+||z(\tau)||^2\right)W(t),\end{aligned}\tag{4.188}$$

gdje je

$$W(t)=1+||\partial_{xx}v_1(t)||^2+||\partial_{xx}v_2(t)||^2+||\partial_{xx}\omega_1(t)||^2+||\partial_{xx}\omega_2(t)||^2+||\partial_{xx}\theta_2(t)||^2, \quad (4.189)$$

te zbog (4.2) vrijedi

$$\int_0^t W(\tau)d\tau \leq C. \quad (4.190)$$

Neka je $\alpha < C_1$. Integriranjem relacije (4.188) po $]0,t[$ za bilo koji $t \in [0,T]$, nakon uvrštavanja početnog uvjeta (4.173) dobivamo

$$\begin{aligned}||\theta(t)||^2+\int_0^t ||\partial_x\theta(\tau)||^2 d\tau \leq C\int_0^t \Big[&||\partial_x v(\tau)||^2+||\partial_x\omega(\tau)||^2 \\ &+W(\tau)\left(||\theta(\tau)||^2+||u(\tau)||^2+||u_1^p(\tau)-u_2^p(\tau)||^2+||z(\tau)||^2\right)\Big]d\tau,\end{aligned} \quad (4.191)$$

za $t\in[0,T]$. Primjenom ocjena (4.175)–(4.176) u (4.191) dobivamo

$$\begin{aligned}||\theta(t)||^2+\int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau \leq & C\int_0^t ||\theta(\tau)||^2 d\tau \\ & +C\int_0^t W(\tau)\left(||\theta(\tau)||^2+\int_0^\tau ||\theta(s)||^2 ds\right)d\tau \\ \leq & C\int_0^t W(\tau)||\theta(\tau)||^2 d\tau.\end{aligned} \quad (4.192)$$

Iz (4.190) i (4.192), primjenom Grönwallove nejednakosti slijedi da je

$$\theta = 0 \quad \text{na} \quad Q_T, \quad (4.193)$$

zbog čega iz (4.175)–(4.176) dobivamo i

$$u=0, \quad v=0, \quad \omega=0, \quad z=0 \quad \text{na} \quad Q_T, \quad (4.194)$$

čime je dokaz teorema 4.3.1 završen.

4.4. GLOBALNA EGZISTENCIJA

U ovom odjeljku dokazujemo teorem o egzistenciji generaliziranog rješenja početno-rubnog problema (2.125)–(2.131) globalno po vremenu. U ovom kontekstu, smatramo da rješenje postoji globalno po vremenu ako postoji na vremenskom intervalu proizvoljne, ali konačne duljine. Pokazuje se da je pretpostavka o konačnosti intervala egzistencije nužna u dokazu. Rezultat formalno je iskazan u sljedećem teoremu.

Teorem 4.4.1. Neka funkcije ρ_0, v_0, ω_0, θ_0 i z_0 zadovoljavaju uvjete (4.6)–(4.7) i (4.9) te neka funkcija r zadovoljava pretpostavke (4.10)–(4.15). Tada za svaki $T > 0$ postoji generalizirano rješenje $(\rho, v, \omega, \theta, z)$ početno-rubnog problema (2.125)–(2.131) u smislu Definicije 4.1.1 na $Q_T =]0,1[\times]0,T[$ sa svojstvom

$$\theta > 0, \quad 0 \leq z \leq \max_{x\in[0,1]} z_0(x) \leq 1 \quad \text{na} \quad \overline{Q}_T. \tag{4.195}$$

U dokazu teorema služimo se tehnikama koje su slične onima korištenima u dokazu Teorema 3.4.1, a temelje se na idejama iz [5, 28, 32, 53]. Iz tog razloga dijelove dokaza koji se podudaraju s onima iz Odjeljka 3.4 izostavljamo.

Uz već dokazane teoreme o lokalnoj egzistenciji (Teorem 4.2.1) i jedinstvenosti (Teorem 4.3.1) generaliziranog rješenja, kao što je opisano kod prethodnog slučaja u odjeljku 3.4, sljedeća propozicija osnova je dokaza Teorema 4.4.1.

Propozicija 4.4.2. Neka je $T > 0$. Ako je $(\rho, v, \omega, \theta, z)$ generalizirano rješenje početno-rubnog problema (2.125)–(2.131) na $Q_{T'} =]0,1[\times]0,T'[$, za sve $T' \in]0,T[$, takvo da vrijedi

$$\theta > 0, \quad 0 \leq z \leq \max_{x\in[0,1]} z_0(x) \leq 1 \quad \text{na} \quad \overline{Q}_{T'}, \tag{4.196}$$

onda je $(\rho, v, \omega, \theta, z)$ generalizirano rješenje od (2.125)–(2.131) na Q_T za koje vrijedi

$$\theta > 0, \quad 0 \leq z \leq \max_{x\in[0,1]} z_0(x) \leq 1 \quad \text{na} \quad \overline{Q}_T. \tag{4.197}$$

U nastavku dokazujemo niz pomoćnih tvrdnji potrebnih za dokazivanje Propozicije 3.4.2 te pritom pretpostavljamo da vrijede sve pretpostavke dane u toj propoziciji. Napomenimo da s C, C_1, $C_2, \ldots$ označavamo pozitivne konstante koje na različitim mjestima mogu poprimiti različite vrijednosti i koje ovise samo o početnim podacima i T. Primijetimo da zbog (4.10), (4.12), (4.13) i (4.196) postoji $C > 0$ takav da vrijedi

$$0 \leq r(\rho, \theta, z) \leq C. \tag{4.198}$$

4.4.1. Globalne apriorne ocjene i dokaz Propozicije 4.4.2

U ovom odjeljku pomoću nekolicine pomoćnih rezultata dolazimo do globalnih apriornih ocjena koje nam omogućuju dokaz Propozicije 4.4.2, a zatim i teorema o globalnoj egzistenciji.

Nova generalizirana energetska ocjena

Definiramo novu generaliziranu energetsku funkciju

$$V(x,t) = \frac{v^2}{2} + j_I\frac{\omega^2}{2} + R\vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right) + c_v\psi(\theta) + \delta\eta(z), \tag{4.199}$$

gdje su ϑ, ψ i η nenegativne konveksne funkcije definirane s (3.304)–(3.305) i

$$\eta(x) = x + \frac{x^2}{2}, \quad x \geq 0, \tag{4.200}$$

redom. Primijetimo da je nova generalizirana energetska funkcija nastala proširenjem Generalizirane energetske funkcije definirane s (4.199) novim članom koji uključuje doprinos funkcije z.

U nastavku izvodimo generaliziranu energetsku ocjenu.

Lema 4.4.3 (Nova generalizirana energetska ocjena)**.** Postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^1 V\,dx + \int_0^t\int_0^1 \Bigg(&\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\frac{\rho(\partial_x v)^2}{\theta} + \frac{c_0+2c_d}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\omega)^2}{\theta}\\ &+\frac{\kappa}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\theta)^2}{\theta^2} + \frac{\sigma\delta}{L^2}\rho^2(\partial_x z)^2\Bigg)\,dxdt \leq C.\end{aligned} \tag{4.201}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbi (2.125)–(2.129) s $R\left(-\rho^{-2}+\rho^{p-2}\right)$, v, ω, $\left(1-\theta^{-1}\right)$ i $\delta(1+z)$, redom, nakon integriranja po $[0,1]$, zbrajanja, primjene parcijalne integracije i uvrštavanja rubnih uvjeta (2.131) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 V\,dx + \int_0^1 \Bigg(&\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\frac{\rho(\partial_x v)^2}{\theta} + \frac{c_0+2c_d}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\omega)^2}{\theta} + 4\mu_r\frac{\omega^2}{\rho\theta}\\ &+\frac{\kappa}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\theta)^2}{\theta^2} + \frac{\sigma\delta}{L^2}\rho^2(\partial_x z)^2 + \delta\frac{r(\rho,\theta,z)}{\theta} + \delta z r(\rho,\theta,z)\Bigg)\,dx = 0.\end{aligned} \tag{4.202}$$

Nakon integriranja jednadžbe (4.202) po $[0,t]$, za neki $t \in]0,T[$, primjene svojstava (4.6)–(4.8), (4.196), (4.198), definicije (4.199), te činjenice da su ϑ, ψ i η nenegativne, slijedi

$$\int_0^1 V\,dx + \int_0^t\int_0^1 \Bigg(\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\frac{\rho(\partial_x v)^2}{\theta} + \frac{c_0+2c_d}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\omega)^2}{\theta}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\kappa}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\theta)^2}{\theta^2}+\frac{\sigma\delta}{L^2}\rho^2(\partial_x z)^2\bigg)\,dxdt \qquad (4.203)\\
&\leq \frac{||v_0||^2+j_I||\omega_0||^2}{2}+R\int_0^1\vartheta\left(\frac{1}{\rho_0}\right)dx+c_v\int_0^1\psi(\theta_0)\,dx+\delta\int_0^1\eta\,(z_0)\,dx\leq C.
\end{aligned}
$$

■

Ocjene za θ i ρ

U ovom odjeljku dokazujemo nekolicinu ocjena za θ i ρ, od kojih je najvažnije istaknuti uniformne ocjene odozdo nekom pozitivnom konstantom. Kao i u dokazu globalne egzistencije u Poglavlju 3.4, ovo je ključan korak u dokazu, a uključuje i korištenje generalizirane Kazhikove reprezentacije za ρ. Budući da generalizirana Kazhikova reprezentacija ovisi isključivo o prve dvije jednadžbe sustava (2.84)–(2.85) koje se podudaraju s prve dvije jednadžbe u ovdje razmatranom modelu (2.125)–(2.126), pomoćni rezultati i njihovi dokazi se također u potpunosti podudaraju te ih stoga ovdje ne navodimo. Navodimo samo glavne zaključke i one dijelove dokaza koji su novi.

Lema 4.4.4 (Lema 3.4.11)**.** Postoji pozitivna konstanta C takva da vrijedi

$$M_\rho(t)\leq C, \qquad (4.204)$$

pri čemu je M_ρ definiran u (3.334).

Lema 4.4.5 (Lema 3.4.12)**.** Za svaki $\alpha>0$ vrijedi

$$M_\theta^2(t)\leq \alpha J_1(t)+C_\alpha(1+J_2(t)), \qquad (4.205)$$

gdje je M_θ definirano u (3.334), J_1 i J_2 u (3.348), a C_α je konstanta koja ovisi samo o α, T i početnim podacima.

Lema 4.4.6. Postoji konstanta $C>0$ takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$m_\theta\geq C, \qquad (4.206)$$

gdje je m_θ definirana u (3.334).

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.87) s $(-\theta^{-2})$ te primjenom svojstva (4.198) dobivamo

$$
\begin{aligned}
c_v\partial_t\left(\frac{1}{\theta}\right)&=\frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\rho\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)+\frac{R}{L}\frac{\rho^p\partial_x v}{\theta}-\frac{2\kappa}{L^2}\frac{\rho(\partial_x\theta)^2}{\theta^3}\\
&\quad-\frac{1}{\theta^2}\left[\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho(\partial_x v)^2+\frac{c_0+2c_d}{L^2}\rho(\partial_x\omega)^2+4\mu_r\frac{\omega^2}{\rho}+\delta r(\rho,\theta,z)\right] \qquad (4.207)\\
&\leq\frac{\kappa}{L^2}\partial_x\left(\rho\partial_x\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)+\frac{R}{L}\frac{\rho^p\partial_x v}{\theta}.
\end{aligned}
$$

Iz (4.207), postupkom kao u dokazu Leme 3.4.13 (relacije (3.362)–(3.369)) dobivamo tvrdnju leme. ■

Lema 4.4.7 (Lema 3.4.14)**.** Postoji konstanta $C>0$ takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$m_\rho \geq C, \tag{4.208}$$

gdje je m_ρ definirana u (3.334).

Ocjene za prostorne derivacije

U dokazu globalnih ocjena za derivacije koristimo se rezultatom sljedeće leme.

Lema 4.4.8. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^1 \Xi^2 dx + J_2 + J_4 \leq C, \tag{4.209}$$

gdje je J_2 definiran u (3.348),

$$J_3(t)=\int_0^1 (\partial_x z)^2 dx, \quad J_4(t)=\int_0^t J_3(\tau)d\tau, \tag{4.210}$$

a funkcija Ξ je dana s

$$\Xi=\frac{v^2}{2}+j_I\frac{\omega^2}{2}+c_v\theta+\delta z. \tag{4.211}$$

Dokaz. Zbrajanjem jednadžbi (2.126)–(2.129) pomnoženih s $v\Xi$, $\omega\Xi$, Ξ i $\delta\Xi$, redom, integriranjem po $[0,1]$, primjenom parcijalne integracije i uvrštavanjem rubnih uvjeta (2.131) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Xi^2 dx &= \int_0^1 \Big[-\frac{R}{L}\rho^p\theta v - \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho v\partial_x v - \frac{c_0+2c_d}{L^2}\rho\omega\partial_x\omega \\ &\qquad - \frac{\kappa}{L^2}\rho\partial_x\theta - \frac{\delta\sigma}{L^2}\rho^2\partial_x z\Big]\partial_x\Xi dx \\ &= -\int_0^1 \Big[\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\rho\partial_x\Xi + \frac{R}{L}\rho^p\theta v + \Big(\frac{c_0+2c_d}{L^2}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}j_I\Big)\rho\omega\partial_x\omega \\ &\qquad + \Big(\frac{\kappa}{L^2}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}c_v\Big)\rho\partial_x\theta + \Big(\frac{\delta\sigma}{L^2}\rho - \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\delta\Big)\rho\partial_x z\Big]\partial_x\Xi dx.\end{aligned} \tag{4.212}$$

Youngova nejednakost zatim daje da vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Xi^2 dx &+ \int_0^1 \rho\Big[\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\partial_x\Xi + \Big(\frac{\kappa}{L^2}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}c_v\Big)\partial_x\theta \\ &\qquad + \Big(\frac{\delta\sigma}{L^2}\rho-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\delta\Big)\partial_x z\Big]\partial_x\Xi dx \\ &= -\int_0^1 \Big[\frac{R}{L}\rho^p\theta v + \Big(\frac{c_0+2c_d}{L^2}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}j_I\Big)\rho\omega\partial_x\omega\Big]\partial_x\Xi dx \\ &\leq \alpha\int_0^1 \rho(\partial_x\Xi)^2 dx + \frac{C}{\alpha}\int_0^1 \Big[\rho^{2p-1}\theta^2 v^2 + \rho\omega^2(\partial_x\omega)^2\Big]dx,\end{aligned} \tag{4.213}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Xi^2 dx + \int_0^1 \rho\Big[\left(\frac{\lambda+2\mu}{L^2}-\alpha\right)(\partial_x\Xi)^2 + \left(\frac{\kappa}{L^2c_v}-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\right)c_v\partial_x\theta\partial_x\Xi \\ + \left(\frac{\sigma}{L^2}\rho-\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\right)\delta\partial_x z\partial_x\Xi\Big]dx \\ \leq \frac{C}{\alpha}\int_0^1\left[\rho^{2p-1}\theta^2v^2+\rho\omega^2(\partial_x\omega)^2\right]dx,\end{aligned} \tag{4.214}$$

gdje je $\alpha > 0$ bilo koji. Ako odaberemo parametar α tako da vrijedi

$$\alpha < \min\left\{\frac{\lambda+2\mu}{2L^2}, \frac{\kappa}{4c_vL^2}\right\}, \tag{4.215}$$

Algebarska nejednakost (1.34) vrijedi za $A_1 = \frac{\lambda+2\mu}{L^2}$, $A_2 = \alpha$, $A_3 = \frac{\kappa}{c_vL^2}$, $A_4 = \frac{\sigma\rho}{L^2}$ $a_1 = v\partial_x v$, $a_2 = j_I\omega\partial_x\omega$, $a_3 = c_v\partial_x\theta$ i $a_4 = \delta\partial_x z$ te vrijedi

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{4A_2}\left[4(A_1-A_2)^2+(A_1-2A_2+A_3)^2+(A_1-2A_2+A_4)^2\right] > 0, \\ D_2 &= \frac{1}{4A_2}\left[4A_2^2+(A_1-2A_2+A_3)^2+(A_1-2A_2+A_4)^2\right] > 0, \\ D_3 &= A_3-4A_2 > 0, \\ D_4 &= 3A_2+\frac{(A_3-2A_2+A_4)^2}{4A_2} > 0. \end{aligned} \tag{4.216}$$

Primjenom (1.34) na lijevoj strani od (4.214) i (4.204) na desnoj dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Xi^2 dx + \int_0^1 \rho\Big[-D_1v^2(\partial_x v)^2 - D_2 j_I^2\omega^2(\partial_x\omega)^2 + D_3c_v^2(\partial_x\theta)^2 \\ + \left(\frac{\sigma\rho}{L^2}-D_4\right)\delta^2(\partial_x z)^2\Big]dx \leq C\int_0^1\left[\theta^2v^2+\omega^2(\partial_x\omega)^2\right]dx.\end{aligned} \tag{4.217}$$

Nakon dodatnog sređivanja i primjene (4.204) i (4.208) u (4.217) slijedi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Xi^2 dx + \int_0^1\left[(\partial_x\theta)^2+(\partial_x z)^2\right]dx \\ \leq C_1\int_0^1\left[\theta^2v^2+\omega^2(\partial_x\omega)^2+v^2(\partial_x v)^2+(\partial_x z)^2\right]dx.\end{aligned} \tag{4.218}$$

Množenjem jednadžbe (2.126) s v^3, integriranjem po $[0,1]$, primjenom parcijalne integracije i rubnih uvjeta (2.131), a zatim i Youngove nejednakosti, pri čemu je $\beta > 0$, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^4dx + 3\frac{\lambda+2\mu}{L^2}\int_0^1\rho v^2(\partial_x v)^2dx = \frac{3R}{L}\int_0^1\rho^p\theta v^2\partial_x v dx \\ \leq C_2\int_0^1\left[\beta\rho v^2(\partial_x v)^2+\frac{1}{\beta}\rho^{2p-1}\theta^2v^2\right]dx,\end{aligned} \tag{4.219}$$

odnosno

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^4dx + \left(3\frac{\lambda+2\mu}{L^2}-C_2\beta\right)\int_0^1\rho v^2(\partial_x v)^2dx \leq \frac{C_2}{\beta}\int_0^1\rho^{2p-1}\theta^2v^2dx. \tag{4.220}$$

Ako uzmemo

$$\beta < 3\frac{\lambda+2\mu}{L^2C_2}, \tag{4.221}$$

nakon primjena ocjena (4.204) i (4.208) na (4.220) slijedi da je

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v^4dx + \int_0^1 v^2(\partial_x v)^2dx \leq C\int_0^1 \theta^2v^2dx \tag{4.222}$$

Množenjem jednadžbe (2.127) s ω^3, integriranjem po $[0,1]$, primjenom parcijalne integracije te uvrštavanjem rubnih uvjeta (2.131) dobivamo

$$\frac{j_I}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 \omega^4dx + 3\frac{c_0+2c_d}{L^2}\int_0^1 \rho\omega^2(\partial_x\omega)^2dx \leq 4\mu_r\int_0^1 \frac{\omega^4}{\rho}dx, \tag{4.223}$$

iz čega, nakon uvažavanja ocjena (4.204) i (4.208), slijedi

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \omega^4dx + \int_0^1 \omega^2(\partial_x\omega)^2dx \leq C\int_0^1 \omega^4dx. \tag{4.224}$$

Množenjem jednadžbe (2.129) sa z, integriranjem po $[0,1]$, primjenom parcijalne integracije te uvrštavanjem rubnih uvjeta (2.131) dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z^2dx + \frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 \rho^2(\partial_x z)^2dx = -\int_0^1 zr(\rho,\theta,z)dx \tag{4.225}$$

iz čega, nakon uvažavanja ocjene (4.208) te svojstava (4.198) i (4.196), slijedi

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 z^2dx + \int_0^1 (\partial_x z)^2dx \leq 0. \tag{4.226}$$

Nakon množenja relacija (4.222), (4.224) i (4.224) s C_1, te zbrajanja dobivenih nejednakosti s (4.218) dobivamo

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\Xi^2+v^4+\omega^4+z^2\right)dx + J_1 + J_3 \leq C\int_0^1 (\theta^2v^2+\omega^4)dx, \tag{4.227}$$

gdje je J_1 definiran u (3.348), a J_3 u (4.210). Nejednakosti (4.205) i (4.201) primijenjene na desnoj strani od (4.227) daju

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (\Xi^2+v^4+\omega^4+z^2)dx + J_1 + J_3 \leq C_3\eta J_1 + C_\eta\Big(1+J_2\Big) + C\int_0^1 \omega^4dx, \tag{4.228}$$

gdje je $\eta > 0$ proizvoljan, a C_η ovisi o η. Ako uzmemo $\eta < \frac{1}{C_3}$, korištenjem definicije (3.348) iz (4.228) slijedi

$$\frac{d}{dt}\left[1+J_2+J_4+\int_0^1 (\Xi^2+v^4+\omega^4+z^2)dx\right] \leq C\Big(1+J_2+\int_0^1 \omega^4dx\Big). \tag{4.229}$$

Konačno, diferencijalna verzija Grönwallove nejednakosti primijenjena na (4.229) daje (4.209).

■

Iz prethodne leme neposredno slijedi tvrdnja sljedećeg korolara.

Korolar 4.4.9 (Korolar 3.4.16)**.** Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||M_\theta||_{L^2(0,T)} \leq C, \tag{4.230}$$

gdje je M_θ definirano u (3.334).

U sljedećoj lemi dan je niz ocjena za derivacije pri čemu ocjene za derivacije od ρ, v, ω i θ imaju iste dokaze kao odgovarajući rezultati u Poglavlju 3.4, dok je ocjena za z slijedi direktno iz Leme 4.4.8.

Lema 4.4.10 (Leme 3.4.17–3.4.22)**.** Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||\partial_x \rho(t)|| \leq C, \tag{4.231}$$

$$||v(t)||^2 + ||\partial_x v(t)||^2 + \int_0^t \left(||\partial_x v(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} v(\tau)||^2 \right) d\tau \leq C, \tag{4.232}$$

$$||\omega(t)||^2 + ||\partial_x \omega(t)||^2 + \int_0^t \left(||\partial_x \omega(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} \omega(\tau)||^2 \right) d\tau \leq C, \tag{4.233}$$

$$||\theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x \theta(\tau)||^2 d\tau \leq C, \tag{4.234}$$

$$||z(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_x z(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{4.235}$$

Preostale ocjene za derivacije od θ i z dokazane su u naredne dvije leme.

Lema 4.4.11. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||\partial_x \theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_{xx} \theta(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{4.236}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.128) s $\partial_{xx}\theta$, nakon integriranja po $[0,1]$, primjene parcijalne integracije i rubnih uvjeta (2.131) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{c_v}{2} \frac{d}{dt} \left(||\partial_x \theta(t)||^2 \right) + \frac{\kappa}{L^2} \int_0^1 \rho (\partial_{xx}\theta)^2 dx = -\frac{\kappa}{L^2} \int_0^1 \partial_x \rho \cdot \partial_x \theta \partial_{xx} \theta dx \\
&\quad + \frac{R}{L} \int_0^1 \rho^p \theta \partial_x v \cdot \partial_{xx} \theta dx - \frac{\lambda + 2\mu}{L^2} \int_0^1 \rho (\partial_x v)^2 \partial_{xx} \theta dx \\
&\quad - \frac{c_0 + 2c_d}{L^2} \int_0^1 \rho (\partial_x \omega)^2 \partial_{xx} \theta dx + 4\mu_r \int_0^1 \frac{\omega^2}{\rho} \partial_{xx} \theta dx + \delta \int_0^1 r(\rho, \theta, z) \partial_{xx} \theta dx.
\end{aligned} \tag{4.237}$$

Posljednji integral na desnoj strani relacije (4.237) ocjenjujemo korištenjem svojstva (4.198) i Youngove nejednakosti te dobivamo

$$\left| \int_0^1 r(\rho, \theta, z) \partial_{xx} \theta dx \right| \leq C ||\partial_{xx} \theta|| \leq \alpha ||\partial_{xx} \theta||^2 + \frac{C}{\alpha}, \tag{4.238}$$

za neki $0 < \alpha < 1$. Preostale integrale na desnoj strani relacije (4.237) ocjenjujemo na isti način kao u Lemi 3.4.23 (relacije (3.431)–(3.435)) koristeći (3.334), (4.204), (4.231)–(4.233), (4.208), Hölderovu i Youngovu nejednakost te (1.10) i dobivamo

$$\left| \int_0^1 \partial_x \rho \cdot \partial_x \theta \partial_{xx} \theta dx \right| \leq \alpha ||\partial_{xx}\theta(t)||^2 + \frac{C}{\alpha^3} ||\partial_x \theta(t)||^2, \tag{4.239}$$

$$\left| \int_0^1 \rho^p \theta \partial_x v \cdot \partial_{xx} \theta dx \right| \leq \alpha ||\partial_{xx}\theta(t)||^2 + \frac{C}{\alpha} M_\theta^2(t), \tag{4.240}$$

$$\left| \int_0^1 \rho (\partial_x v)^2 \partial_{xx} \theta dx \right| \leq \alpha ||\partial_{xx}\theta(t)||^2 + \frac{C}{\alpha} ||\partial_{xx} v(t)||^2, \tag{4.241}$$

$$\left| \int_0^1 \rho (\partial_x \omega)^2 \partial_{xx} \theta dx \right| \leq \alpha ||\partial_{xx}\theta(t)||^2 + \frac{C}{\alpha} ||\partial_{xx} \omega(t)||^2, \tag{4.242}$$

$$\left| \int_0^1 \frac{\omega^2}{\rho} \partial_{xx} \theta dx \right| \leq \alpha ||\partial_{xx}\theta(t)||^2 + \frac{C}{\alpha}, \tag{4.243}$$

Integral na lijevoj strani u (4.237) ocjenjujemo korištenjem (4.208) pri čemu u obzir uzimamo oznake (3.334) i dobivamo

$$\int_0^1 \rho (\partial_{xx}\theta)^2 dx \geq C ||\partial_{xx}\theta(t)||^2. \tag{4.244}$$

Primjenom dobivenih ocjena na (4.237) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(||\partial_x \theta(t)||^2 \right) + ||\partial_{xx}\theta(t)||^2 \leq C_1 \alpha ||\partial_{xx}\theta(t)||^2 \\ + \frac{C_1}{\alpha^3} \left(1 + M_\theta^2(t) + ||\partial_x \theta(t)||^2 + ||\partial_{xx} v(t)||^2 + ||\partial_{xx}\omega(t)||^2 \right). \end{aligned} \tag{4.245}$$

Za $\alpha < \frac{1}{C_1}$, nakon integriranja relacije (4.245) po $[0,t]$, za $t \in]0,T[$, dobivamo

$$\begin{aligned} ||\partial_x \theta(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_{xx}\theta(\tau)||^2 d\tau \leq ||\partial_x \theta_0||^2 + C ||M_\theta||^2_{L^2(0,T)} \\ + C \int_0^t \left(1 + ||\partial_x \theta(\tau)||^2 + ||\partial_{xx} v(\tau)||^2 + ||\partial_{xx}\omega(\tau)||^2 \right) d\tau. \end{aligned} \tag{4.246}$$

Tvrdnja leme slijedi iz (4.246) nakon uvažavanja pretpostavke (4.6) i ocjena (4.230), (4.232)–(4.234). ■

Lema 4.4.12. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t \in]0,T[$ vrijedi

$$||\partial_x z(t)||^2 + \int_0^t ||\partial_{xx} z(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{4.247}$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe (2.129) s $\partial_{xx} z$, nakon integriranja po $[0,1]$, primjene parcijalne integracije i rubnih uvjeta (2.131) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 (\partial_x z)^2 dx + \frac{\sigma}{L^2} \int_0^1 \rho^2 (\partial_{xx} z)^2 dx = -\frac{2\sigma}{L^2} \int_0^1 \rho \partial_x \rho \partial_x z \partial_{xx} z dx \\ + \int_0^1 r(\rho, \theta, z) \partial_{xx} z dx. \end{aligned} \tag{4.248}$$

Integral na lijevoj strani relacije (4.248) ocjenjujemo koristeći (4.208) i dobivamo

$$\frac{\sigma}{L^2}\int_0^1 \rho^2(\partial_{xx}z)^2dx \geq C||\partial_{xx}z||^2. \tag{4.249}$$

Integrale na desnoj strani relacije (4.248) ocjenjujemo koristeći (4.204), (4.198), (1.10), (4.231) i Hölderovu i Youngovu nejednakost, te za bilo koji $0<\alpha<1$ dobivamo

$$\left|\int_0^1 \rho\partial_x\rho\partial_x z\partial_{xx}zdx\right| \leq C||\partial_x\rho||\cdot||\partial_{xx}z||^{\frac{3}{2}}||\partial_x z||^{\frac{1}{2}} \leq \alpha||\partial_{xx}z||^2+\frac{C}{\alpha^3}||\partial_x z||^2, \tag{4.250}$$

$$\left|\int_0^1 r(\rho,\theta,z)\partial_{xx}zdx\right| \leq C||\partial_{xx}z|| \leq \alpha||\partial_{xx}z||^2+\frac{C}{\alpha}. \tag{4.251}$$

Primjenom ocjena (4.249)–(4.251) u (4.248) dobivamo

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (\partial_x z)^2dx+||\partial_{xx}z||^2 \leq C_1||\partial_{xx}z||^2+\frac{C_1}{\alpha^3}\left(1+||\partial_x z||^2\right). \tag{4.252}$$

Za $\alpha<\frac{1}{C_1}$, nakon integracije po $[0,t]$ te uvažavanja pretpostavke (4.6) i ocjene (4.235) dobivamo

$$||\partial_x z||^2+\int_0^t ||\partial_{xx}z||^2d\tau \leq ||\partial_x z_0||^2+C\int_0^t\left(1+||\partial_x z||^2\right)d\tau \leq C. \tag{4.253}$$

■

Ocjene za vremenske derivacije

Ocjene za vremenske derivacije od ρ, v i ω izvode se na isti način kao i u osnovnom modelu budući da se jednadžbe (2.84)–(2.86) i (2.125)–(2.127) podudaraju.

Lema 4.4.13 (Leme 3.4.24–3.4.26)**.** Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^t ||\partial_t\rho(\tau)||^2d\tau \leq C, \tag{4.254}$$

$$\int_0^t ||\partial_t v(\tau)||^2d\tau \leq C, \tag{4.255}$$

$$\int_0^t ||\partial_t\omega(\tau)||^2d\tau \leq C. \tag{4.256}$$

Ocjene za vremenske derivacije od θ i z dokazane su u sljedeće dvije leme.

Lema 4.4.14. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^t ||\partial_t\theta(\tau)||^2d\tau \leq C. \tag{4.257}$$

Dokaz. Kvadriranjem jednadžbe (2.128), integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$ i primjenom Youngove nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}||\partial_t\theta(t)||^2 \leq C\int_0^1 \Big((\partial_x\rho)^2(\partial_x\theta)^2+\rho^2(\partial_{xx}\omega)^2+\rho^{2p}\theta^2(\partial_x v)^2 \\ +\rho^2(\partial_x v)^4+\rho^2(\partial_x\omega)^4+\frac{\omega^4}{\rho^2}+r^2(\rho,\theta,z)\Big)dx.\end{aligned} \tag{4.258}$$

Uzimanjem u obzir oznaka uvedenih u (3.334), primjenom ocjena (4.204), (4.208), (4.231)–(4.233), (4.198) te nejednakosti (1.9)–(1.10) ocjenjujemo desnu stranu od (4.258) odozgo i dobivamo

$$\begin{aligned}||\partial_t\theta(t)||^2 &\leq C\Big(||\partial_{xx}\theta(t)||^2||\partial_x\rho(t)||^2+||\partial_{xx}\theta(t)||^2+M_\theta^2(t)||\partial_x v(t)||^2 \\ &\quad +||\partial_{xx}v(t)||^2||\partial_x v(t)||^2+||\partial_{xx}\omega(t)||^2||\partial_x\omega(t)||^2+||\partial_x\omega(t)||^2||\omega(t)||^2+1\Big) \\ &\leq C\Big(1+M_\theta^2(t)+||\partial_{xx}v(t)||^2+||\partial_{xx}\omega(t)||^2+||\partial_{xx}\theta(t)||^2\Big).\end{aligned} \tag{4.259}$$

Nakon integriranja (4.259) po $[0,t]$, za $t\in]0,T[$, te primjene ocjena (4.230), (4.232)–(4.233) i (4.236) slijedi tvrdnja leme. ■

Lema 4.4.15. Postoji pozitivna konstanta C takva da za sve $t\in]0,T[$ vrijedi

$$\int_0^t ||\partial_t z(\tau)||^2 d\tau \leq C. \tag{4.260}$$

Dokaz. Kvadriranjem jednadžbe (2.129), integriranjem dobivenog izraza po $[0,1]$ te primjenom Youngove nejednakosti i ocjena (4.198), (4.204) dobivamo

$$\begin{aligned}||\partial_t z||^2 = \int_0^1(\partial_t z)^2dx &\leq C\int_0^1\Big[(\rho\partial_x\rho\partial_x z)^2+(\rho^2\partial_{xx}z)^2+r^2(\rho,\theta,z)\Big]dx \\ &\leq C\left[\int_0^1(\partial_x\rho)^2(\partial_x z)^2dx+||\partial_{xx}z||^2+1\right].\end{aligned} \tag{4.261}$$

Nakon integriranja relacije (4.261) po $[0,t]$ i uvažavanja ocjene (4.247) dobivamo

$$\int_0^t ||\partial_t z(\tau)||^2 d\tau \leq C\left(1+\int_0^t\int_0^1(\partial_x z)^2(\partial_x\rho)^2dxd\tau\right). \tag{4.262}$$

Primjenom nejednakosti (1.10) te Youngove nejednakosti ocjenjujemo integral na desnoj strani od (4.262) i dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^1(\partial_x z)^2(\partial_x\rho)^2dxd\tau &\leq \int_0^t \max_{x\in[0,1]}(\partial_x z)^2\int_0^1(\partial_x\rho)^2dxd\tau \\ &\leq C\int_0^t\Big(||\partial_x z||^2+||\partial_{xx}z||^2\Big)||\partial_x\rho||^2d\tau.\end{aligned} \tag{4.263}$$

Primjenom ocjena (4.231) i (4.247) na desnoj strani od (4.263) slijedi

$$\int_0^t\int_0^1(\partial_x z)^2(\partial_x\rho)^2dxd\tau \leq C\int_0^t\Big(1+||\partial_{xx}z||^2\Big)d\tau \leq C. \tag{4.264}$$

Tvrdnja leme slijedi nakon primjene ocjene (4.264) u (4.262). ■

Dokaz Propozicije 4.4.2 i Teorema 4.4.1

Prethodno dobivene ocjene omogućavaju nam da dokažemo tvrdnju Propozicije 4.4.2.

Dokaz Propozicije 4.4.2. Neka vrijede pretpostavke propozicije.

- Iz (3.334), (4.204) i Lema 4.4.10 i 4.4.13 slijedi

$$\rho \in L^\infty(0,T;H^1(0,1)) \cap H^1(Q_T), \tag{4.265}$$

$$v, \omega \in L^\infty(0,T;H^1(0,1)) \cap H^1(Q_T) \cap L^2(0,T;H^2(0,1)) \tag{4.266}$$

- Iz Lema 4.4.10, 4.4.11 i 4.4.14 slijedi

$$\theta \in L^\infty(0,T;H^1(0,1)) \cap H^1(Q_T) \cap L^2(0,T;H^2(0,1)). \tag{4.267}$$

- Iz Lema 4.4.10, 4.4.12 i 4.4.15 slijedi

$$z \in L^\infty(0,T;H^1(0,1)) \cap H^1(Q_T) \cap L^2(0,T;H^2(0,1)). \tag{4.268}$$

- Koristeći (3.334), iz Lema 4.4.6, 4.4.7 i 4.2.29 dobivamo da vrijedi

$$\inf_{Q_T} \rho > 0 \tag{4.269}$$

  i (4.195).

Ovime je pokazano da je $(\rho, v, \omega, \theta, z)$ iz pretpostavke propozicije generalizirano rješenje početno-problema (2.125)–(2.131) na Q_T čime je dokaz Propozicije 4.4.2 završen. ■

Konačno, tvrdnja Teorema 4.4.1 slijedi iz Teorema 4.2.1 i Teorema 4.3.1 te Propozicije 4.4.2 primjenom principa proširenja analogno kao u dokazu Teorema 3.4.1.

5. NUMERIČKO RJEŠENJE

U ovom poglavlju opisujemo numeričku metodu za rješavanje početno-rubnih problema (2.84)–(2.89) i (2.125)–(2.131) baziranu na Faedo-Galerkinovoj metodi. Naime, u Odjeljcima 3.2.1 i 4.2.1 primjenom Faedo-Galerkinove projekcije već su izvedeni semidiskretizirani početni problemi (3.34), (3.38)–(3.43) i (4.27)–(4.32) čija su rješenja nepoznate funkcije iz definicija (3.16)–(3.18), (3.32), (4.18) aproksimativnih rješenja $(\rho^n, v^n, \omega^n, \theta^n)$, odnosno $(\rho^n, v^n, \omega^n, \theta^n, z^n)$ za promatrane početno-rubne probleme. Navedeni početni problemi sastoje se od sustava $4n+1$, odnosno $5n+2$ obične diferencijalne jednadžbe i odgovarajućeg broja početnih uvjeta. Napomenimo da je u sklopu dokaza teorema o lokalnoj egzistenciji (Teorem 3.2.1 i Teorem 4.2.1) dokazano da tako definirani nizovi aproksimativnih rješenja (na podnizu) konvergiraju ka generaliziranom rješenju odgovarajućeg problema. Potpuna diskretizacija problema dobiva se primjenom neke od metoda za numeričko rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.

Opisani pristup već je primijenjen za numeričko rješavanje početno-rubnog problema za osnovni model jednodimenzionalnog toka realnog mikropolarnog fluida u [10], a ranije je korišten za numeričko rješavanje sličnih problema, primjerice u [23, 26, 31, 61]. Osim toga, metoda konačnih razlika (vidjeti [23, 58, 59, 62]) i upwind shema (vidjeti [42]) su također primijenjene na sličnim problemima.

Implementacija metode za numeričko rješavanje problema u ovom radu napravljena je u programskom jeziku Python, pri čemu su korišteni objekti i funkcije dostupne u njegovoj standardnoj biblioteci, kao i bibliotekama NumPy, SciPy i Matplotlib.

Prvi korak u dobivanju potpuno diskretiziranog sustava je aproksimacija integrala na desnoj strani jednadžbi sustava (3.38)–(3.43) i (4.27)–(4.32). Kao u radu [61], u tu svrhu koristimo Gauss-Legenderovu kvadraturnu formulu reda 20 danu s

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{20} w_i f(x_i), \tag{5.1}$$

pri čemu su w_i, $i = 1, \dots, 20$ težine, a x_i, $i = 1, \dots, 20$ čvorovi kvadraturne formule ([6]). Nakon primjene odabrane kvadraturne formule, nepoznate funkcije određujemo primjenom funkcije za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi implementirane u sklopu Python biblioteke SciPy. U primjeru prezentiranom u nastavku korištena je višekoračna implicitna metoda bazirana na numeričkim formulama za aproksimaciju derivacija podijeljenim razlikama unazad (engl. Backward Differentiation Formula, skraćeno BDF).

5.1. NUMERIČKI TESTOVI

U nastavku primjenjujemo opisanu numeričku metodu na jednom primjeru i pritom eksperimentalno potvrđujemo njezinu valjanost te ispitujemo utjecaj pojedinih komponenti sustava, primjerice mikropolarnosti i eksponenta tlaka, na rješenja. Budući da je ovaj model još nedovoljno istražen s praktične strane, nisu poznate vrijednosti parametara mikroinercije i mikroviskoznosti koje predstavljaju stvarnu fizikalnu pojavu. U svrhu provođenja numeričkih testova odabrane su neke vrijednosti parametara sustava koje su u skladu sa zadanim ograničenjima uvedenim prilikom opisivanja općeg modela u Odjeljcima 3.2.1 i 4.2.1.

Numerički rješavamo početno-rubni problem (2.125)–(2.131) sa sljedećim početnim uvjetima

$$\rho_0(x) = 1,\ v_0(x) = \sin(\pi x),\ \omega_0(x) = \sin(2\pi x),\ \theta_0(x) = 2 + \cos(\pi x),\ z_0(x) = 1, \tag{5.2}$$

koji u preuzeti su iz [61, 70], a odabrani su zbog jednostavnosti. Naime, uz ovakav odabir početnih funkcija Fourierovi koeficijenti se mogu očitati direktno iz njihovog zapisa te oni glase

$$\begin{aligned} v_{01} = 1, \quad v_{0i} = 0, \quad i = 2, \ldots, n, \\ \omega_{02} = 1, \quad \omega_{0i} = 0, \quad i = 1, 3, \ldots, n, \\ \theta_{00} = 2, \quad \theta_{01} = 1, \quad \theta_{0i} = 0, \quad i = 2, \ldots, n, \\ z_{00} = 1, \quad z_{0i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pretpostavljamo da vrijedi Arrheniusov zakon, odnosno da funkcija intenziteta kemijske reakcije r ima oblik (2.92). Za parametre sustava, kao u [31] uzimamo

$$L = 1, c_d = 1, c_0 = 1, c_v = 1, R = 1, j_I = 1, \lambda = -2, \mu_r = 1, \mu = 3, \kappa = 0.024, \tag{5.4}$$

za eksponent tlaka uzimamo $p = 4$, a za parametre vezane za reaktivne karakteristike plina

$$\sigma = 1, \delta = 1, \varepsilon = 0.2, m = 2. \tag{5.5}$$

Stabilizacija

U prvom testu želimo eksperimentalno potvrditi da izračunata numerička rješenja imaju neka očekivana svojstva, specijalno, svojstvo eksponencijalne stabilizacije ka stacionarnom rješenju. Pod pojmom stabilizacija ovdje se podrazumijeva dugoročno ponašanje rješenja, odnosno granično ponašanje kad $t \to \infty$.

U [46] je pokazano da stabilizacija za model klasičnog reaktivnog realnog fluida (slučaj kada je mikropolarnost zanemarena, odnosno $\omega = 0$) ne ovisi o eksponentu tlaka p, odnosno da za svaki $p \geq 1$ rješenje (ρ, v, θ, z) uniformno konvergira ka stacionarnom rješenju oblika

$$\left(\frac{1}{\alpha}, 0, E_1^z, 0\right), \tag{5.6}$$

kad $t \to \infty$, pri čemu je

$$\alpha = \int_0^1 \frac{1}{\rho_0(x)} dx, \quad E_1^z = \int_0^1 \left(\frac{v_0^2}{2c_v} + \theta_0 + \frac{\delta z}{c_v}\right) dx. \tag{5.7}$$

S druge strane u [41, 60] je pokazano da rješenje $(\rho, v, \omega, \theta)$ za model mikropolarnog idealnog plina ($p = 1$) u normi prostora $H^1(0,1)$ konvergira ka stacionarnom rješenju oblika

$$\left(\frac{1}{\alpha}, 0, 0, E_1^\omega\right), \tag{5.8}$$

kad $t \to \infty$, pri čemu je

$$\alpha = \int_0^1 \frac{1}{\rho_0(x)} dx, \quad E_1^\omega = \int_0^1 \left(\frac{v_0^2}{2c_v} + \frac{j_I \omega_0^2}{2c_v} + \theta_0\right) dx. \tag{5.9}$$

U oba navedena slučaja stabilizacija je eksponencijalnog karaktera.

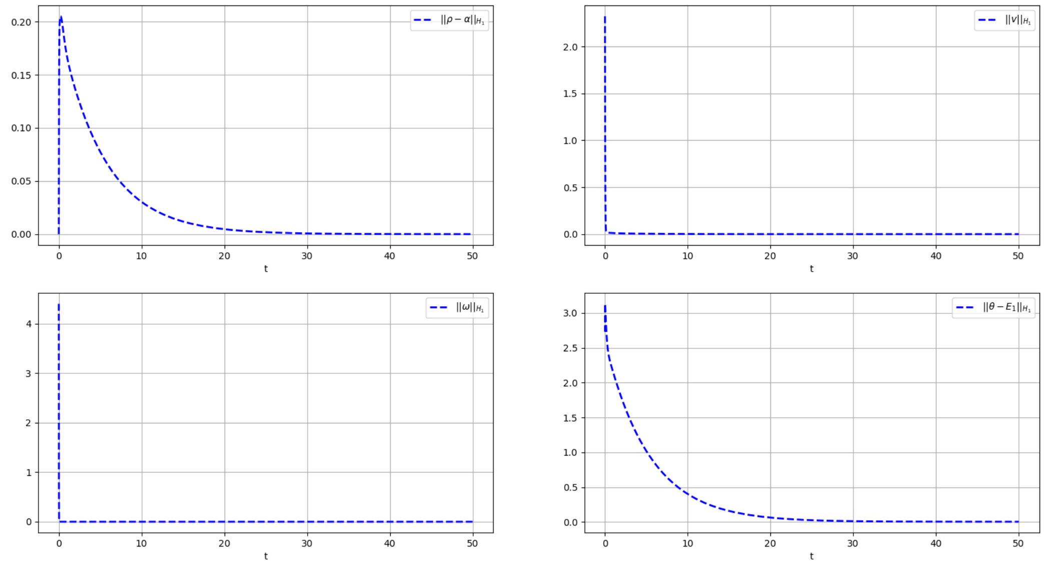
S obzirom na prethodnu diskusiju, očekujemo da će rješenje $(\rho, v, \omega, \theta, z)$ i u slučaju reaktivnog mikropolarnog realnog plina za $p > 1$ imati svojstvo eksponencijalne stabilizacije u normi prostora $H^1(0,1)$ ka stacionarnom rješenju oblika

$$\left(\frac{1}{\alpha}, 0, 0, E_1^{\omega,z}, 0\right), \tag{5.10}$$

kad $t \to \infty$, pri čemu je

$$\alpha = \int_0^1 \frac{1}{\rho_0(x)} dx, \quad E_1^{\omega,z} = \int_0^1 \left(\frac{v_0^2}{2c_v} + \frac{j_I \omega_0^2}{2c_v} + \theta_0 + \frac{\delta z}{c_v}\right) dx. \tag{5.11}$$

U našem primjeru iz (5.2), (5.4)–(5.5) slijedi $\alpha = 1$ i $E_1 = 3.5$. Na Slikama 5.1–5.2 prikazan je iznos norme prostora $H^1(0,1)$ za razlike izračunatih aproksimativnih numeričkih rješenja za $n = 8$ i stacionarnog rješenja (5.10). Sa slika je vidljivo da izračunata rješenja u ovom primjeru zaista imaju svojstvo eksponencijalne stabilizacije.



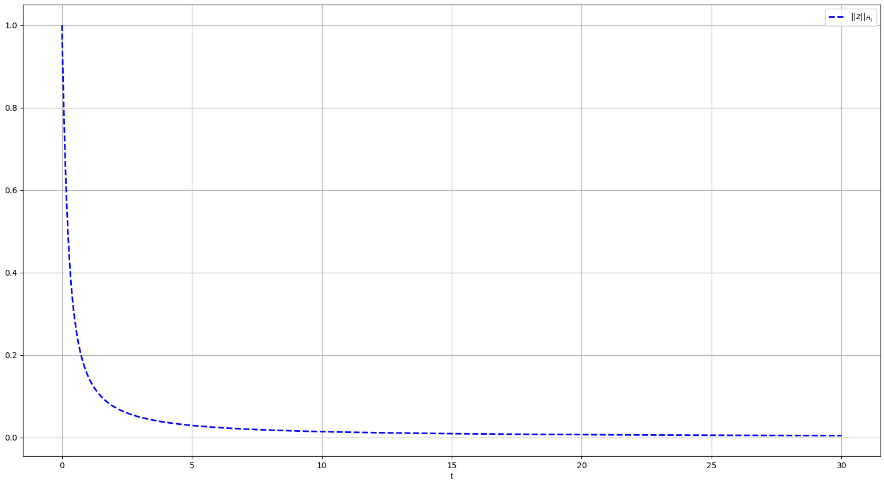
Slika 5.1: Stabilizacija gustoće mase ρ, brzine v, brzine mikrorotacije ω i apsolutne temperature θ

Utjecaj mikropolarnosti

U nastavku ispitujemo na koji način i koliko značajno uvođenje mikropolarnosti u model klasičnog fluida utječe na rješenja problema. Na Slikama 5.3–5.5 je prikazana grafička usporedba numeričkih aproksimacija nekih komponenti rješenja za reaktivni klasični realni plin ($\omega = 0$) i reaktivni mikropolarni realni plin za $n = 8$.

Na Slici 5.3 uočavamo da su vrijednosti koje poprima θ na prikazanom vremenskom intervalu općenito manjeg iznosa u slučaju klasičnog nego u slučaju mikropolarnog plina. Razlika je uočljiva i na Slici 5.4 gdje možemo primijetiti da je za velike vrijednosti t temperatura značajno viša u slučaju mikropolarnog plina, što sugerira da mikropolarnost utječe na stacionarno rješenje prema kojem očekujemo da rješenje konvergira kad t teži u beskonačno. To je u skladu s prethodnom diskusijom gdje je izračunato da bi se vrijednosti od θ u modelu reaktivnog mikropolarnog realnog plina trebale stabilizirati oko vrijednosti $E_1^{\omega,z}$ definiranoj u (5.11) i koja u ovom primjeru iznosi 3.5 za velike t, a poznato je da se u slučaju reaktivnog klasičnog realnog plina vrijednosti od θ stabiliziraju ka vrijednosti E_1^z definiranoj u (5.6), a koja u ovom primjeru iznosi 3.25.

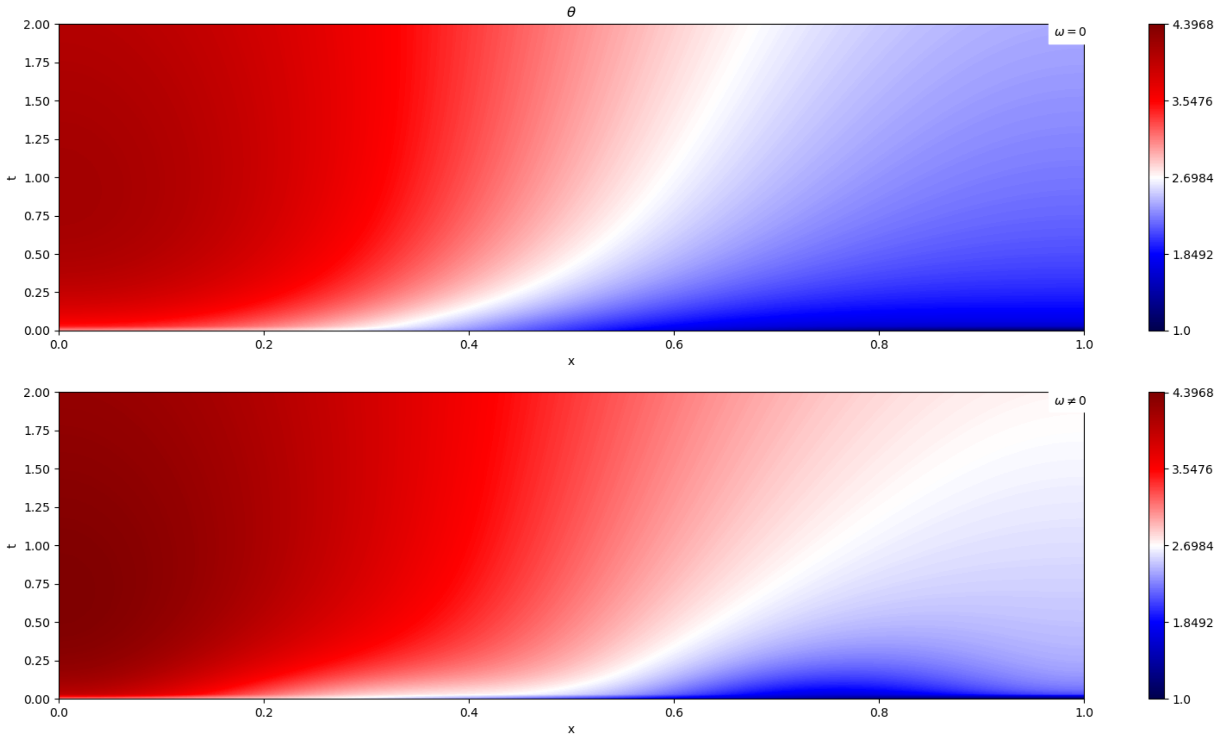
Na Slici 5.5 može se uočiti da je sagorijevanje goriva brže u modelu reaktivnog klasičnog realnog plina nego u mikropolarnom.



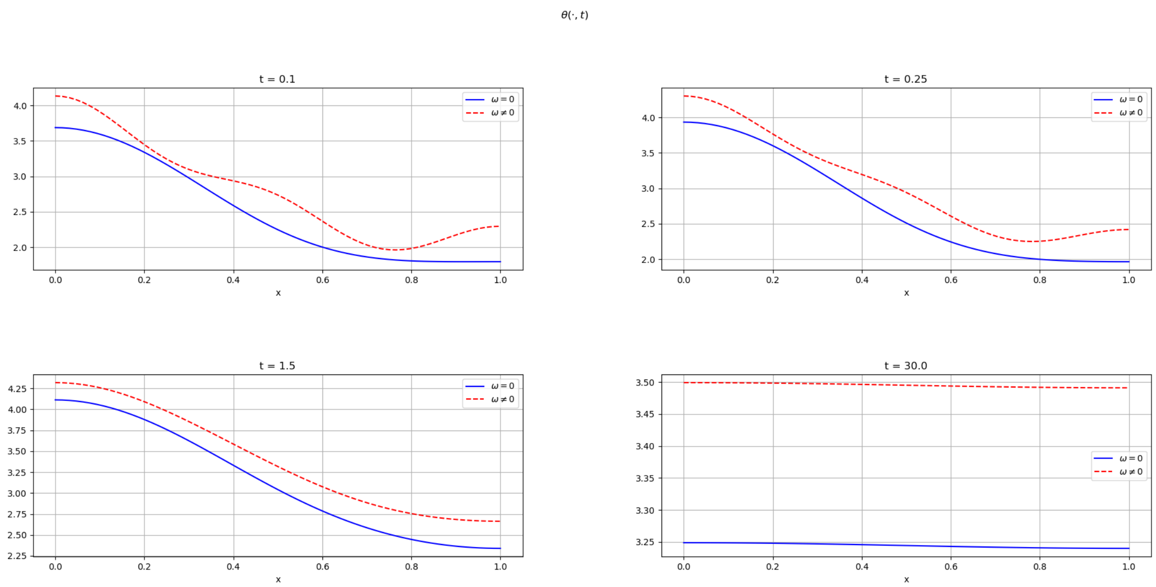
Slika 5.2: Stabilizacija udjela neizgorenog goriva z

Utjecaj generalizirane jednadžbe stanja

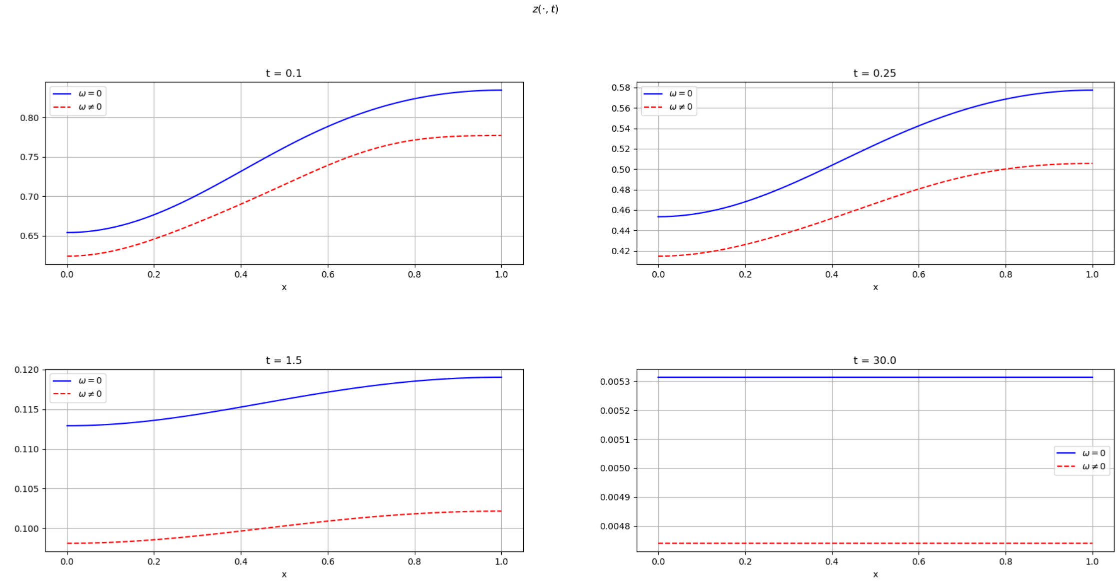
Važna inovacija u mikropolarnom modelu proučavanom u ovom radu je generalizirana jednadžba stanja. Na Slikama 5.6–5.11 je prikazana grafička usporedba numeričkih aproksimacija rješenja za reaktivni mikropolarni realni plin za različite vrijednosti eksponenta tlaka p i $n = 8$. Kao u ranijoj diskusiji očekujemo da stabilizacija rješenja ne ovisi o p budući da je to slučaj u modelu klasičnog fluida ([46]). To je potvrđeno u ovom primjeru jer na Slikama 5.6–5.11 vidimo da se vrijednosti rješenja $(\rho, v, \omega, \theta, z)$ približavaju ka stacionarnom rješenju oblika (5.10) koje u ovom primjeru iznosi $(1, 0, 0, 3.5, 0)$. Iz slika se također može uočiti da iako različite vrijednosti eksponenta tlaka p ne uzrokuju promjenu stacionarnog rješenja kojem očekujemo da rješenje problema konvergira, on utječe na brzinu konvergencije. Specijalno, konvergencija ka stacionarnom rješenju brža je za veće vrijednosti parametra p.



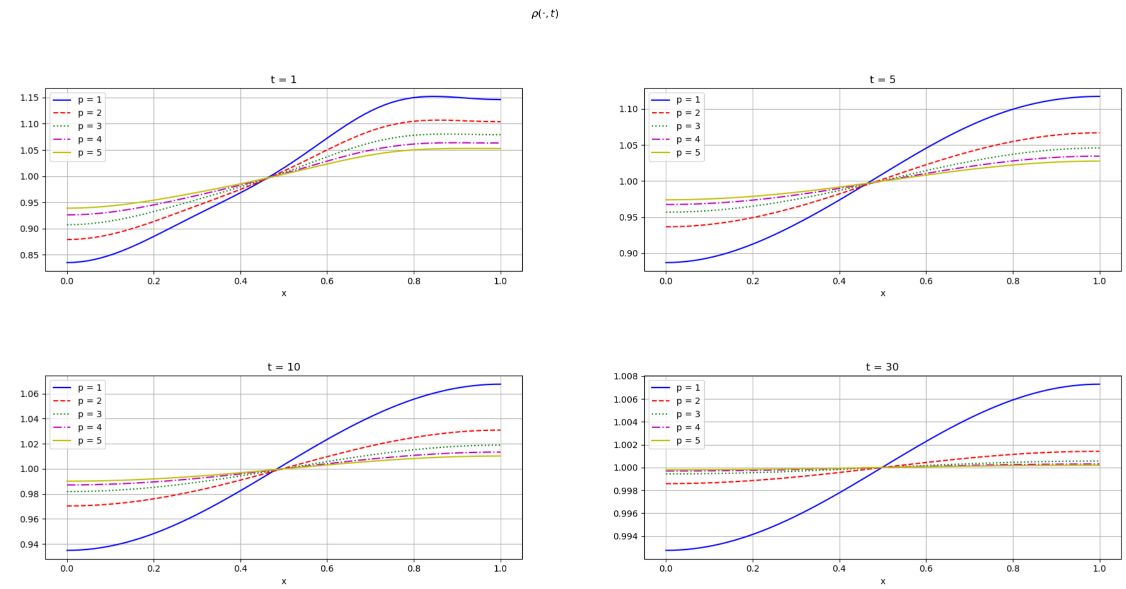
Slika 5.3: Apsolutna temperatura θ za reaktivni klasični realni plin (gore) i reaktivni mikropolarni realni plin (dolje)



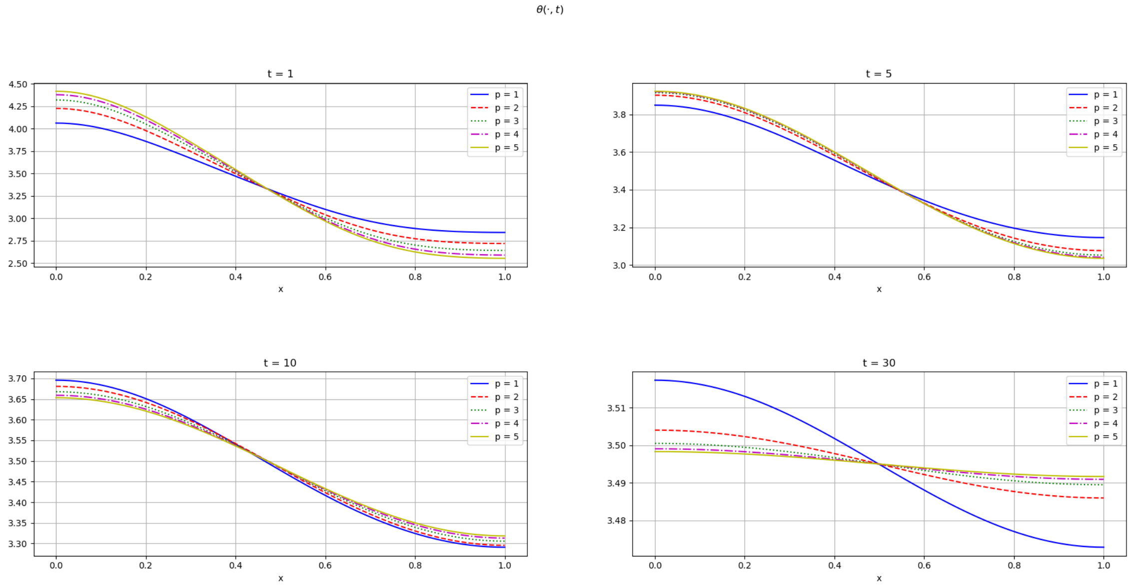
Slika 5.4: Apsolutna temperatura θ za reaktivni klasični realni plin ($\omega = 0$) i reaktivni mikropolarni realni plin ($\omega \neq 0$) u nekoliko vremenskih trenutaka



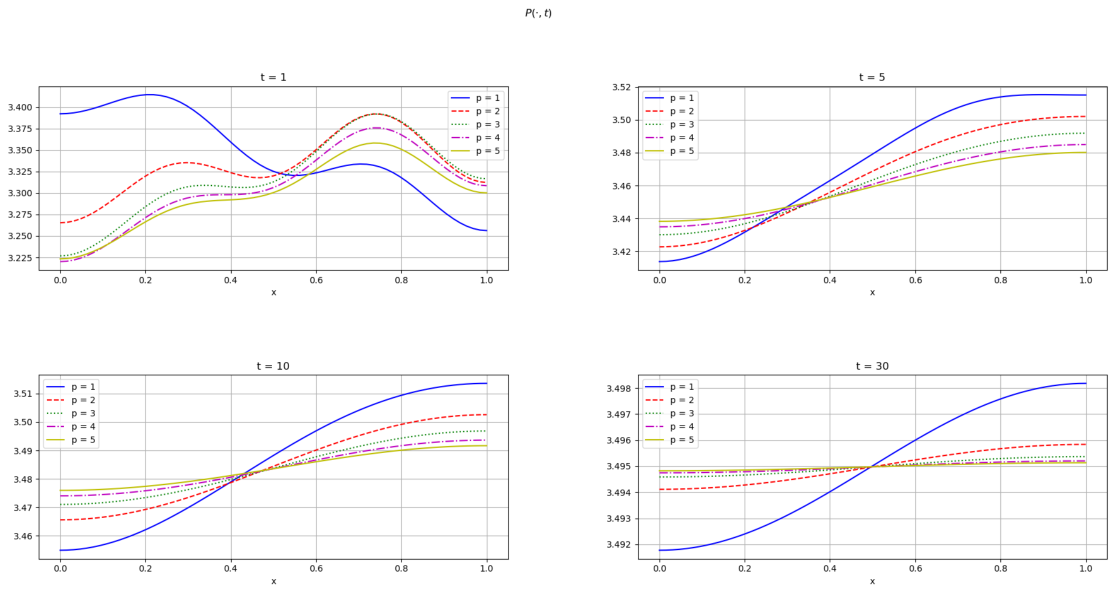
Slika 5.5: Udio neizgorenog goriva z za reaktivni klasični realni plin ($\omega = 0$) i reaktivni mikropolarni realni plin ($\omega \neq 0$)) u nekoliko vremenskih trenutaka



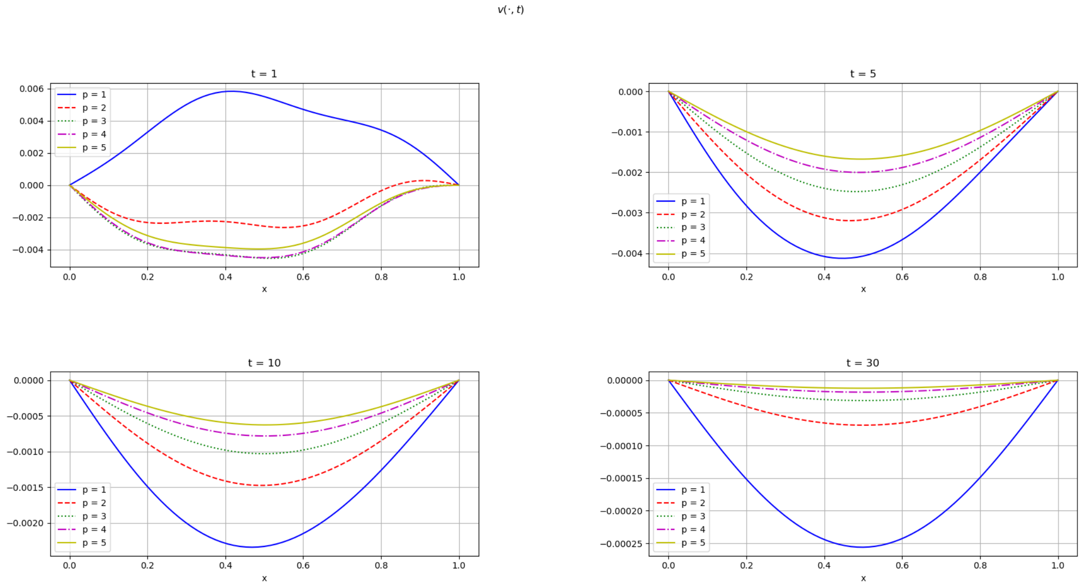
Slika 5.6: Gustoća mase ρ za reaktivni mikropolarni realni plin za različite vrijednosti eksponenta tlaka p i $n = 8$ u nekoliko vremenskih trenutaka



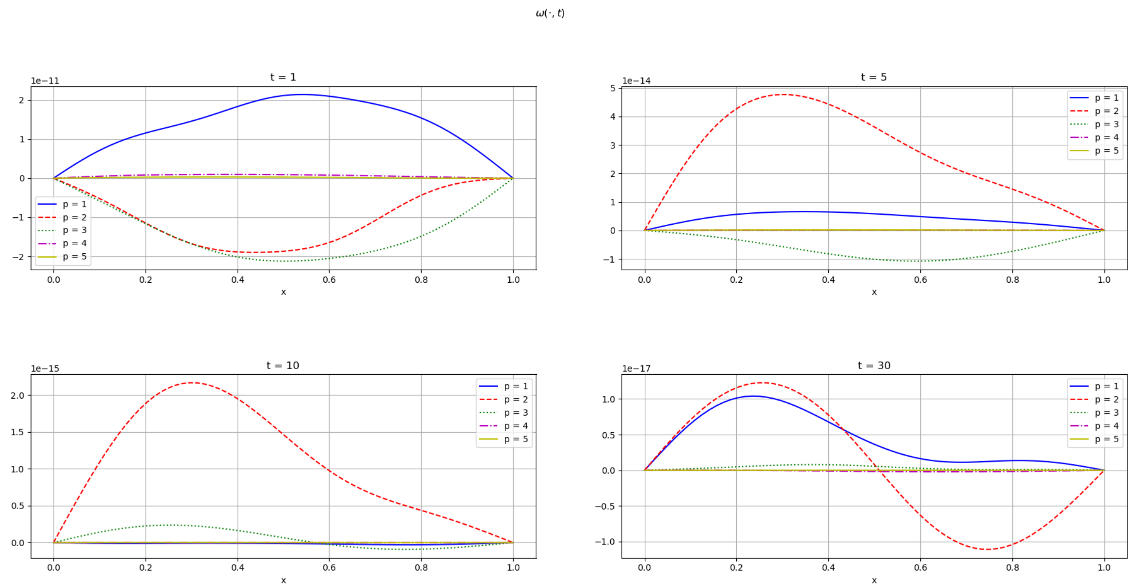
Slika 5.7: Apsolutna temperatura θ za reaktivni mikropolarni realni plin za različite vrijednosti eksponenta tlaka p i $n = 8$ u nekoliko vremenskih trenutaka



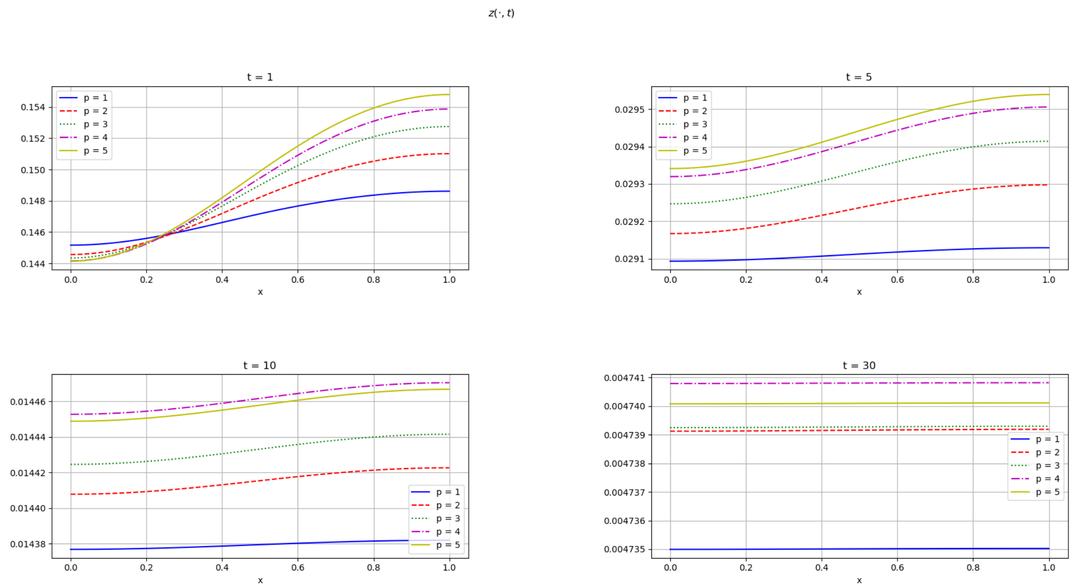
Slika 5.8: Tlak $P = R\rho^p\theta$ za reaktivni mikropolarni realni plin za različite vrijednosti eksponenta tlaka p i $n = 8$ u nekoliko vremenskih trenutaka



Slika 5.9: Brzina v za reaktivni mikropolarni realni plin za različite vrijednosti eksponenta tlaka p i $n = 8$ u nekoliko vremenskih trenutaka



Slika 5.10: Brzina mikrorotacije ω za reaktivni mikropolarni realni plin za različite vrijednosti eksponenta tlaka p i $n = 8$ u nekoliko vremenskih trenutaka



Slika 5.11: Udio neizgorenog goriva z za reaktivni mikropolarni realni plin za različite vrijednosti eksponenta tlaka p i $n = 8$ u nekoliko vremenskih trenutaka

Zaključak

U ovoj disertaciji je izveden model jednodimenzionalnog toka realnog viskoznog i toplinski provodljivog mikropolarnog plina te je dokazano da pripadni početno-rubni problem ima jedinstveno rješenje lokalno i globalno po vremenu. Model je zatim primijenjen u slučaju reaktivnog plina te su dokazani rezultati lokalne i globalne egzistencije te jedinstvenosti rješenja za pripadni prošireni početno-rubni problem. Time je dokazana egzistencija rješenja lokalno po vremenu i za model toka klasičnog reaktivnog realnog plina što nije ranije nikada eksplicitno napravljeno. Formirana je i testirana metoda za numeričko rješavanje navedenih modela bazirana na Faedo-Galerkinovoj projekciji te je dokazana konvergencija (na podnizu) semidiskretizirane sheme. Testovi su pokazali da izračunata rješenja imaju očekivana svojstva stabilizacije ka stacionarnom rješenju. Numeričkim testovima je pokazano da mikropolarnost i generalizirana jednadžba stanja primjetno utječu na ponašanje fluida.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Abreu, Rafael, Jochen Kamm i Anne Sophie Reiss: *Micropolar modelling of rotational waves in seismology*. Geophysical Journal International, 210, svibanj 2017. ↑ 2.

[2] Adams, R.A. i J.J.F. Fournier: *Sobolev Spaces*. ISSN. Elsevier Science, Vancouver, Canada, 2003, ISBN 9780080541297. ↑ 6, 9, 10.

[3] Aganović, Ibrahim: *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*. Element, Zagreb, Hrvatska, 2003. ↑ 18.

[4] Ames, W.F. i B.G. Pachpatte: *Inequalities for Differential and Integral Equations*. Mathematics in Science and Technology. Elsevier Science, 1997, ISBN 9780080534640. ↑ 12.

[5] Antontsev, S. N., A. V. Kazhikhov i V. N. Monakhov: *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, svezak 22 iz *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. ↑ 24, 26, 35, 37, 66, 75, 77, 79, 80, 83, 98, 127.

[6] Atkinson, Kendall: *An Introduction to Numerical Analysis*. Wiley, 2. izdanje, 1989. ↑ 138.

[7] Bašić-Šiško, Angela i Ivan Dražić: *Global solution to a one-dimensional model of viscous and heat-conducting micropolar real gas flow*. Journal of mathematical analysis and applications, 495(124690), ožujak 2021. ↑ 4, 75.

[8] Bašić-Šiško, Angela i Ivan Dražić: *Uniqueness of generalized solution to micropolar viscous real gas flow with homogeneous boundary conditions*. Mathematical methods in the applied sciences, 44(6):4330–4341, travanj 2021. ↑ 4, 66.

[9] Bašić-Šiško, Angela i Ivan Dražić: *Local existence for viscous reactive micropolar real gas flow and thermal explosion with homogeneous boundary conditions*. Journal of mathematical analysis and applications, 509:125988, 2022. ↑ 4, 101.

[10] Bašić-Šiško, Angela, Ivan Dražić i Loredana Simčić: *One-dimensional model and numerical solution to the viscous and heat-conducting micropolar real gas flow with homogeneous boundary conditions*. Mathematics and computers in simulation, 195:71–87, svibanj 2022. ↑ 4, 27, 138.

[11] Baidya, Ujjal, Sanjoy Das i Santanu Das: *Analysis of misaligned hydrodynamic porous journal bearings in the steady- state condition with micropolar lubricant*. ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part J Journal of Engineering Tribology 1994-1996 (vols 208-210), studeni 2020. ↑ 2.

[12] Bebernes, J. i A. Bressan: *Global a priori estimates for a viscous reactive gas*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 101:321–333, 1985. ↑ 3.

[13] Beesack, Paul R.: *On some Gronwall-type integral inequalities in n independent variables*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 100:393–408, svibanj 1984. ↑ 13.

[14] Benes, Michal, Igor Pažanin i Marko Radulović: *Leray's Problem for the Nonstationary Micropolar Fluid Flow*. Mediterranean Journal of Mathematics, 17, veljača 2020. ↑ 22.

[15] Bhattacharjee, Biplab, Prasun Chakraborti i Kishan Choudhuri: *Evaluation of the performance characteristics of double-layered porous micropolar fluid lubricated journal bearing*. Tribology International, 138:415–423, listopad 2019. ↑ 2.

[16] Bonnivard, Matthieu, Igor Pažanin i Francisco Javier Suárez-Grau: *Effects of rough boundary and nonzero boundary conditions on the lubrication process with micropolar fluid*. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 72:501–518, 2018, ISSN 0997-7546. ↑ 22.

[17] Borgnakke, Claus i Richard E. Sonntag: *Fundamentals of Thermodynamics*. Wiley, si version, tenth edition izdanje, 2019, ISBN 978-1-119-49496-6. ↑ 2.

[18] Chen, Mingtao: *Global existence of strong solutions to the micro-polar, compressible flow with density-dependent viscosities*. Boundary Value Problems, 2011, kolovoz 2011. ↑ 22.

[19] Chen, Zhengzheng i Di Wang: *Global stability of rarefaction waves for the 1D compressible micropolar fluid model with density-dependent viscosity and microviscosity coefficients*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 58:103226, travanj 2021. ↑ 3.

[20] Clapeyron, Émile: *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur*. Journal de l'École Polytechnique, 1834. ↑ 2.

[21] Cosserat, Eugéne i François Cosserat: *A. Hermann et forie des Corps déformables*. A. Hermann et fils, Paris, 1909. ↑ 1.

[22] Cowin, S.C.: *The Theory of Polar Fluids*. Svezak 14 iz *Advances in Applied Mechanics*, stranice 279–347. Elsevier, 1974. ↑ 20.

[23] Črnjarić-Žic, Nelida i Nermina Mujaković: *Numerical analysis of the solutions for 1d compressible viscous micropolar fluid flow with different boundary conditions*. Mathematics and Computers in Simulation, 126:45–62, 2016, ISSN 0378-4754. ↑ 3, 138.

[24] Cui, Haibo i Zheng an Yao: *Asymptotic behavior of compressible p-th power Newtonian fluid with large initial data*. Journal of Differential Equations, 258(3):919–953, 2015, ISSN 0022-0396. ↑ 3.

[25] Diestel, J. i J.J. Uhl: *Vector Measures*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977, ISBN 9780821815151. ↑ 8.

[26] Dražić, Ivan, Nelida Črnjarić Žic i Loredana Simčić: *A shear flow problem for compressible viscous micropolar fluid: Derivation of the model and numerical solution*. Mathematics and Computers in Simulation, 162:249–267, 2019. ↑ 3, 138.

[27] Dražić, Ivan i Nermina Mujaković: *3-D flow of a compressible viscous micropolar fluid with spherical symmetry: A local existence theorem*. Boundary Value Problems, 2012, siječanj 2012. ↑ 3.

[28] Dražić, Ivan i Nermina Mujaković: *3-D flow of a compressible viscous micropolar fluid with spherical symmetry: a global existence theorem*. Boundary Value Problems, 2015(98), 2015. ↑ 3, 14, 22, 75, 78, 80, 87, 127.

[29] Dražić, Ivan i Nermina Mujaković: *3-D flow of a compressible viscous micropolar fluid with spherical symmetry: Large time behavior of the solution*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 431, lipanj 2015. ↑ 3.

[30] Dražić, Ivan i Nermina Mujaković: *Local existence of the generalized solution for three-dimensional compressible viscous flow of micropolar fluid with cylindrical symmetry*. Boundary Value Problems, 2019, prosinac 2019. ↑ 3.

[31] Dražić, Ivan, Nermina Mujaković i Nelida Črnjarić Žic: *Three-dimensional compressible viscous micropolar fluid with cylindrical symmetry: Derivation of the model and a numerical solution*. Mathematics and Computers in Simulation, 140:107–124, 2017, ISSN 0378-4754. ↑ 3, 138, 139.

[32] Dražić, Ivan: *Three-dimensional flow of a compressible viscous micropolar fluid with cylindrical symmetry: a global existence theorem*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(13):4785–4801, 2017. ↑ 3, 75, 127.

[33] Dražić, Ivan, Nermina Mujaković i Loredana Simčić: *3-D flow of a compressible viscous micropolar fluid with spherical symmetry: regularity of the solution*. Mathematical Analysis and Applications, 438(1):162–183, 2016. ↑ 3.

[34] Çengel, Yunus A. i Robert H. Turner: *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*. McGraw-Hill Companies, 2004, ISBN 0072976756. ↑ 2.

[35] Eringen, Cemal A.: *Simple microfluids*. International Journal of Engineering Science, 2(2):205–217, 1964, ISSN 0020-7225. ↑ 1.

[36] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, USA, 2010, ISBN 9780821849743. ↑ 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17.

[37] Feireisl, Eduard i Antonín Novotný: *Large time behaviour of flows of compressible, viscous, and heat conducting fluids*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 29:1237–1260, srpanj 2006. ↑ 2, 21.

[38] Folland, G.B.: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, USA, 2013, ISBN 9781118626399. ↑ 6, 7, 10, 11, 12, 14.

[39] Giga, Y., T. Miyakawa i H. Osada: *Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity*. Arch. Rational Mech. Anal, 104:223–250, 1988. ↑ 75.

[40] Huang, Lan i Ivan Dražić: *Exponential stability for the compressible micropolar fluid with cylinder symmetry in R^3*. Journal of Mathematical Physics, 60:021507, veljača 2019. ↑ 3.

[41] Huang, Lan i Dayong Nie: *Exponential stability for a one-dimensional compressible viscous micropolar fluid*. Math. Methods Appl. Sci., 38(18):5197–5206, 2015. ↑ 140.

[42] Žic, Nelida Črnjarić: *Upwind numerical approximations of a compressible 1d micropolar fluid flow*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 303:81–92, rujan 2016. ↑ 138.

[43] Karvelas, E. G., A. Tsiantis i T. D. Papathanasiou: *Effect of micropolar fluid properties on the hydraulic permeability of fibrous biomaterials*. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 185:105135, ožujak 2020. ↑ 2.

[44] Khanukaeva, Daria i Anatoly Filippov: *Isothermal Flows of Micropolar Liquids: Formulation of Problems and Analytical Solutions*. Colloid Journal, 80:14–36, veljača 2018. ↑ 1.

[45] Ladyzhenskaya, O. A., V. A. Solonnikov i N. N. Ural'tseva: *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. American Mathematical Society, translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, USA, 1968, ISBN 978-0-8218-1573-1. ↑ 7.

[46] Lewicka, Marta i Piotr Mucha: *On temporal asymptotics for the pth power viscous reactive gas*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 57:951–969, lipanj 2004. ↑ 3, 28, 29, 98, 100, 101, 119, 140, 142.

[47] Liang, Zhilei i Shanqiu Wu: *Classical solution to 1D viscous polytropic perfect fluids with constant diffusion coefficients and vacuum*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 68, siječanj 2017. ↑ 22.

[48] Lukaszewicz, Grzegorz: *Micropolar Fluids: Theory and Applications*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser, Boston, 1999. ↑ 1, 2, 3, 18, 22, 24.

[49] Lukaszewicz, Grzegorz, Igor Pažanin i Marko Radulović: *Asymptotic analysis of the thermomicropolar fluid flow through a thin channel with cooling*. Applicable Analysis, 0(0):1–29, 2020. ↑ 22.

[50] Maltese, David, Martin Michálek, Piotr B. Mucha, Antonin Novotný, Milan Pokorný i Ewelina Zatorska: *Existence of weak solutions for compressible Navier–Stokes equations with entropy transport*, 2016. ISSN 0022-0396. ↑ 3.

[51] Mekheimer, Kh, Thanaa Elnaqeeb, Mahmoud El Kot i Felwah Alghamdi: *Simultaneous effect of magnetic field and metallic nanoparticles on a micropolar fluid through an overlapping stenotic artery: Blood flow model*. Physics Essays, 29:272–283, lipanj 2016. ↑ 2.

[52] Mitrinovic, D. S., J. E. Pecaric i A. M. Fink: *Classical and New Inequalities in Analysis (Mathematics and its Applications)*. Kluwer Academic, 1993. ↑ 12.

[53] Mujaković, Nermina: *One-dimensional flow of a compressible viscous micropolar fluid: a global existence theorem*. Glasnik matematički, 33(53):199–208, 1998. ↑ 3, 35, 75, 77, 78, 93, 96, 98, 127.

[54] Mujaković, Nermina: *One-dimensional flow of a compressible viscous micropolar fluid: a local existence theorem*. Glas. Mat., III. Ser., 33(1):71–91, 1998. ↑ 3, 35, 37, 42, 43, 58, 65, 98.

[55] Mujaković, Nermina: *One-dimensional flow of a compressible viscous micropolar fluid regularity of the solution*. Radovi Matematički, 10:181–193, 2001. ↑ 3.

[56] Mujaković, Nermina i Ivan Dražić: *The Cauchy problem for one-dimensional flow of a compressible viscous fluid: Stabilization of the solution*. Glasnik Matematički. Serija III, 46, lipanj 2011. ↑ 3.

[57] Mujaković, Nermina i Ivan Dražić: *3-D flow of a compressible viscous micropolar fluid with spherical symmetry: A local existence theorem*. Boundary Value Problems, 226:1–17, 2014. ↑ 3.

[58] Mujaković, Nermina i Nelida Črnjarić Žic: *Convergence of a finite difference scheme for 3D flow of a compressible viscous micropolar heat-conducting fluid with spherical symmetry*. International Journal Of Numerical Analysis And Modeling, 13:705–738, siječanj 2016. ↑ 3, 138.

[59] Mujaković, Nermina i Nelida Črnjarić Žic: *Finite Difference Formulation for the Model of a Compressible Viscous and Heat-Conducting Micropolar Fluid with Spherical Symmetry*. Svezak 164, stranice 293–301, rujan 2016, ISBN 978-3-319-32855-3. ↑ 3, 138.

[60] Mujaković, Nermina: *One-Dimensional Flow of a Compressible Viscous Micropolar Fluid: Stabilization of the Solution*. Drmač Z., Marušić M., Tutek Z. (eds) Proceedings of the Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing. Springer, Dordrecht, 2005. ↑ 3, 140.

[61] Mujaković, Nermina i Ivan Dražić: *Numerical approximations of the solution for one-dimensional compressible viscous micropolar fluid model*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 38:285–296, 2007. ↑ 3, 138, 139.

[62] Mujaković, Nermina i Nelida Črnjarić-ˇZic: *Convergent finite difference scheme for 1D flow of compressible micropolar fluid*. Int. J. Numer. Anal. Model., 12(1):94–124, 2015. ↑ 3, 138.

[63] Mujekaović, Nermina, Ivan Dražić i Loredana Simčić: *3-D flow of a compressible viscous micropolar fluid with cylindrical symmetry: uniqueness of a generalized solution*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(7):2686–2701, 2017. ↑ 3.

[64] Nermina, Mujaković: *One-dimensional flow of a compressible viscous micropolar fluid: The Cauchy problem*. Mathematical Communications, 10:1–14, 2005. ↑ 3.

[65] Nermina, Mujaković: *Uniqueness Of A Solution Of The Cauchy Problem For One-Dimensional Compressible Viscous Micropolar Fluid Model*. Applied Mathematics E-Notes, 6:113–118, 2006. ↑ 3.

[66] Nermina, Mujaković: *One-Dimensional Compressible Viscous Micropolar Fluid Model: Stabilization of the Solution for the Cauchy Problem*. Boundary Value Problems, 2010, siječanj 2010. ↑ 3.

[67] Papautsky, Ian, John Brazzle, Timothy Ameel i A.Bruno Frazier: *Laminar fluid behavior in microchannels using micropolar fluid theory*. Sensors and Actuators A: Physical, 73(1):101–108, 1999, ISSN 0924-4247. ↑ 2.

[68] Piccinini, Livio C., Guido. Stampacchia i G. Vidossich: *Ordinary differential equations in R^n : problems and methods*. Springer-Verlag New York, New York, 1984, ISBN 3540907238. ↑ 16.

[69] Pimputkar, Siddha i Shuji Nakamura: *Decomposition of supercritical ammonia and modeling of supercritical ammonia–nitrogen–hydrogen solutions with applicability toward ammonothermal conditions*. The Journal of Supercritical Fluids, 107:17–30, siječanj 2016. ↑ 2.

[70] Poland, J. i D.R. Kassoy: *The induction period of a thermal explosion in a gas between infinite parallel plates*. Combustion and Flame, 50:259–274, 1983, ISSN 0010-2180. ↑ 3, 28, 29, 139.

[71] Qin, Yuming i Lan Huang: *Global Existence and Exponential Stability for the pth Power Viscous Reactive Gas*. Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications, 73:2800–2818, studeni 2010. ↑ 3.

[72] Qin, Yuming i Lan Huang: *Regularity and exponential stability of the pth Newtonian fluid in one space dimension*. Mathematical Models & Methods in Applied Sciences - M3AS, 20, travanj 2010. ↑ 3.

[73] Qin, Yuming i Lan Huang: *Global Well-posedness of Nonlinear Parabolic-Hyperbolic Coupled Systems*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser, Basel, 1. izdanje, 2012. ↑ 3, 28.

[74] Qin, Yuming, Jiianlin Zhang, Xing Su i Jie Cao: *Global Existence and Exponential Stability of Spherically Symmetric Solutions to a Compressible Combustion Radiative and Reactive Gas*. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 18, siječanj 2016. ↑ 3, 28, 29.

[75] Renardy, M. i R.C. Rogers: *An Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, New York, 2004, ISBN 9780387004440. ↑ 10, 11.

[76] Simčić, Loredana: *A shear flow problem for compressible viscous micropolar fluid: Uniqueness of a generalized solution*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42(5):6358–6368, srpanj 2019. ↑ 66.

[77] Stachurska, B: *On a nonlinear integral inequality*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego. Prace Matematyczne, 15:151–157, 1971. ↑ 13.

[78] Vardoulakis, Ioannis: *Cosserat Continuum Mechanics: With Applications to Granular Media*, svezak 87 iz *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer International Publishing, 2019. ↑ 1.

[79] Wan, Ling i Tao Wang: *Asymptotic behavior for the one-dimensional pth power Newtonian fluid in unbounded domains*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39, svibanj 2015. ↑ 3.

[80] Wang, Tao: *One dimensional p-th power Newtonian fluid with temperature-dependent thermal conductivity*. Communications on Pure and Applied Analysis, 15:477–494, ožujak 2016. ↑ 3.

[81] Watson, Stephen, Marta Lewicka i J. Watson: *Temporal Asymptotics for the P'th Power Newtonian Fluid in One Space Dimension*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 54:633–651, srpanj 2003. ↑ 3.

[82] Watson, Stephen, Marta Lewicka i J. Watson: *Temporal Asymptotics for the P'th Power Newtonian Fluid in One Space Dimension*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 54:633–651, srpanj 2003.

[83] Yanagi, Shigenori: *Asymptotic stability of the spherically symmetric solutions for a viscous polytropic gas in a field of external forces*. Transport Theory and Statistical Physics, 29:333–353, travanj 2000. ↑ 3.

[84] Ye, Shangjun, Keqin Zhu i Wen Wang: *Laminar flow of micropolar fluid in rectangular microchannels*. Acta Mechanica Sinica, 22:403–408, listopad 2006. ↑ 2.

[85] Zhang, Peixin i Mingxuan Zhu: *Global regularity of 3D nonhomogeneous incompressible magneto-micropolar system with the density-dependent viscosity*. Computers & Mathematics with Applications, 76, rujan 2018. ↑ 3.

Životopis

Angela Bašić-Šiško je rođena 1992. godine u Splitu. Pohađala je Osnovnu školu kneza Mislava u Kaštel Sućurcu. Završila je III. gimnaziju u Splitu. Pohađala je Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu i 2014. godine stekla akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike. Zatim upisuje Diplomski sveučilišni studij primijenjene matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirala je 2016. godine summa cum laude i stekla akademski naziv magistre matematike. Godine 2017. upisuje Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike Sveučilišta u Osijeku, Rijeci, Splitu i Zagrebu čiji je nositelj Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Početkom 2017. godine zapošljava se kao asistentica na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Od početka akademske godine 2017./2018. zaposlena je kao asistentica na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.

Objavila je četiri znanstvena i jedan stručni rad te sudjelovala na nekoliko međunarodnih i domaćih znanstvenih konferencija (4th My First Conference, ApplMath20, Simpozij studenata doktorskih studija PMF-a 2021, ICNAAM 2021) te na jednom domaćem stručnom skupu (Stručno-metodički skup Pula 2021). Bila je suradnik na nekoliko znanstvenih i stručnih projekata Sveučilišta u Rijeci.

Popis objavljenih znanstvenih radova:

1. Bašić-Šiško, Angela i Ivan Dražić: *Global solution to a one-dimensional model of viscous and heat-conducting micropolar real gas flow*. Journal of mathematical analysis and applications, 495(1):124690, 2021.

2. Bašić-Šiško, Angela i Ivan Dražić: *Uniqueness of generalized solution to micropolar viscous real gas flow with homogeneous boundary conditions*. Mathematical methods in

the applied sciences, 44(6):4330-4341, 2021.

3. Bašić-Šiško, Angela, Ivan Dražić i Loredana Simčić: *One-dimensional model and numerical solution to the viscous and heat-conducting micropolar real gas flow with homogeneous boundary conditions*. Mathematics and computers in simulation, 195:71-87, 2022.

4. Bašić-Šiško, Angela i Ivan Dražić: *Local existence for viscous reactive micropolar real gas flow and thermal explosion with homogeneous boundary conditions*. Journal of mathematical analysis and applications, 509(2):125988, 2022.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, ________________________________, student/ica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi ____,OIB ______________________, JMBAG _____________________________, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj završni/diplomski/doktorski rad pod naslovom: ____

____

____, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, _______________________

____

Potpis