

# Steinerove elipse trokuta

---

**Fabijanec, Lucija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:605270>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-14**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Fabijanec

# STEINEROVE ELIPSE TROKUTA

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Fabijanec

# STEINEROVE ELIPSE TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof.dr.sc. Juraj Šiftar

Zagreb, travanj 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom  
u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik

2. \_\_\_\_\_, član

3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se mentoru, prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na velikom trudu, strpljenju i pomoći  
tijekom pisanja ovog rada.*

*Veliko hvala mojoj obitelji i prijateljima koji su mi pružili podršku tijekom cijelog studiranja  
te učinili studentske dane još ljepšima.*

# Sadržaj

Uvod . . . . .	1
<b>1 Osnovni pojmovi i afine transformacije</b>	<b>2</b>
<b>2 Postojanje i jedinstvenost Steinerovih elipsi</b>	<b>12</b>
2.1 Konstrukcija . . . . .	15
2.2 Odnos dviju elipsi . . . . .	15
<b>3 Steinerov teorem</b>	<b>18</b>
3.1 Iskaz teorema . . . . .	20
3.2 Svojstva Steinerove elipse . . . . .	20
<b>4 Ekvicevijane</b>	<b>29</b>
Bibliografija . . . . .	33

# Uvod

Jakob Steiner bio je švicarski matematičar koji je živio od 1796. do 1863. godine. Rođen je u malom gradiću nedaleko Berna, a ubrzo nakon punoljetnosti odlazi u Njemačku gdje se školuje i ostaje predavati dugi niz godina. Najznačajniji utjecaj ima na području projektivne geometrije. Smatrao je da je geometrija grana matematike koja najviše potiče razmišljanje. Jedan od važnih Steinerovih doprinosa geometriji su Steinerove elipse trokuta. To je elipsa upisana trokutu tako da njegove stranice dodiruje u polovištima te elipsa opisana trokutu čije središte je težište trokuta. Važnu ulogu u ovom radu imat će afine transformacije budući da ćemo pokazati kako bilo koji jednakostranični trokut i njemu upisanu, odnosno opisanu kružnicu možemo afinom transformacijom preslikati u općeniti trokut, dok će se upisana i opisana kružnica jednakostraničnog trokuta preslikati u upisanu i opisanu elipsu novog trokuta.

Rad je podijeljen na četiri poglavlja. U prvom poglavlju prisjetit ćemo se afinih i linearnih transformacija te dokazati neka važna svojstva koja će nam koristiti u daljnjem radu. U drugom poglavlju pokazat ćemo jedinstvenost i postojanje obje Steinerove elipse, ispitati u kakvom su međusobnom odnosu te pokazati jedan mogući način njihove konstrukcije. Treće poglavlje obuhvaća vezu između nultočaka kubnog polinoma s kompleksnim koeficijentima i nultočaka njegove derivacije. Vidjet ćemo da ako su nultočke kubnog polinoma vrhovi trokuta u kompleksnoj ravnini, onda će nultočke derivacije tog polinoma biti upravo fokusi Steinerove upisane elipse. Zatim ćemo navesti i dokazati nekoliko zanimljivih svojstava Steinerove elipse među kojima je i Siebeckov teorem koji nam daje nešto drugačiji dokaz Steinerovog teorema. U četvrtom, posljednjem poglavlju, definirat ćemo ekvicevijane točke i dokazati da su fokusi Steinerove opisane elipse ekvicevijane točke.

# Poglavlje 1

## Osnovni pojmovi i afine transformacije

U ovom poglavlju podsjetit ćemo se nekih pojmova i činjenica iz geometrije euklidske ravnine koje će nam kasnije biti potrebne za izlaganje rezultata o Steinerovim elipsama trokuta. Podrazumijevat ćemo poznavanje osnovnih pojmova iz elementarne geometrije.

Promatrana preslikavanja euklidske ravnine  $E^2$  na sebe bit će redovito bijekcije, zadane na skupu točaka ravnine, koje čuvaju svojstvo kolinearnosti pa pravce, kao skupove točaka, preslikavaju u pravce. Pritom će u dokazima postojanja i jedinstvenosti Steinerovih elipsi posebno biti istaknuta grupa afinih transformacija euklidske ravnine, primjenom na jednakostranični trokut i njemu upisanu i opisanu kružnicu. Grupa izometrija, kao njezina podgrupa, također će doći do izražaja kod istraživanja nekih svojstava tih elipsi.

Struktura vektorskog prostora  $V^2$  uvedena je na uobičajeni način u euklidsku ravninu, pomoću realnog unitarnog prostora  $\mathbb{R}^2$ , kao i standardna Kartezijeva koordinatizacija. Značajan će biti i pristup preko kompleksne ravnine, prirodan za dokaz Siebeckovog teorema koji je i iskazan u tom kontekstu, a praktičan će biti i u izvodima još nekih tvrdnji.

Euklidska ravnina  $E^2$  povezana je na uobičajeni način s realnim unitarnim prostorom  $\mathbb{R}^2$ . To znači da su uređenim parovima "točaka" kao elementima osnovnog (nedefiniranog, nepraznog) skupa  $T$  pridruženi vektori iz prostora  $\mathbb{R}^2$  tako da su ispunjena dva aksioma:

(1) za svaku točku  $P$  i svaki vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  postoji točno jedna točka  $Q$  takva da je paru  $(P, Q)$  pridružen vektor  $v$ ; označimo ga s  $\overrightarrow{PQ}$ ;

(2) za svake tri točke  $P, Q, R$  (ne nužno različite) vrijedi  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

Vektorski prostor  $V^2$  uvodi se pomoću klasa uređenih parova točaka, ekvivalentnih u smislu da im je pridružen isti vektor. Prostori  $V^2$  i  $\mathbb{R}^2$  su izomorfni. Prostor radijvektora  $V^2(O)$ ,



izomorfan prostoru  $V^2$ , dobiva se izborom zajedničke početne točke (ishodišta)  $O$  za predstavnike klasa uređenih parova. Točka  $P$  može se tada identificirati s  $\overrightarrow{OP}$ .

Pravci u euklidskoj ravnini  $E^2$  definirani su pomoću linearnih mnogostrukosti dimenzije 1. Dakle, pravac određen točkom  $P$  i vektorom smjera  $\vec{a}$ , odnosno 1-dimenzionalnim potprostorom  $[a] \in \mathbb{R}^2$  sastoji se od svih točaka  $T$  takvih da  $\overrightarrow{PT} \in [a]$ . Dručkije, taj pravac jednak je skupu  $\{T \in E^2 : \overrightarrow{PT} = ta, t \in \mathbb{R}\}$  ili  $\{T \in E^2 : \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + ta, t \in \mathbb{R}\}$ .

Pravci su paralelni ako su im vektori smjera linearno zavisni. Posebno, relacija paralelnosti je refleksivna, a također simetrična i tranzitivna pa je to relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca. Klase paralelnih pravaca su smjerovi.

Odsad ćemo za preslikavanja euklidske ravnine na sebe pisati  $E^2$  kao domenu i kodomenu, misleći zapravo na skup točaka ravnine. Ključno je svojstvo afinih transformacija euklidske ravnine da su to bijekcije  $E^2$  na sebe koje pravce preslikavaju u pravce. Uzme li se to svojstvo za definiciju, nije teško pokazati da su afine transformacije na prirodan način povezane s linearnim transformacijama (linearnim operatorima) prostora  $\mathbb{R}^2$ , odnosno njemu izomorfno prostora  $V^2(O)$  što pokazuje Propozicija 1.2.

**Definicija 1.1.** Neka su  $V$  i  $W$  vektorski prostori nad poljem  $F$ . Preslikavanje  $L : V \rightarrow W$  naziva se linearna transformacija ako vrijedi  $L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$ , za svaki  $x, y \in V$  i  $\alpha, \beta \in F$ .

**Propozicija 1.2.** Neka je  $f : E^2 \rightarrow E^2$  afina transformacija. Tada postoji linearna transformacija  $L$  na prostoru  $V^2(O)$  takva da za svaku točku  $P$  vrijedi  $\overrightarrow{Of(P)} = \overrightarrow{L(OP)} + \overrightarrow{Of(O)}$ .

Iz ove propozicije vidimo da se svaka afina transformacija može prikazati kao kompozicija linearne transformacije i translacije.

Posebno, u slučaju  $f(O) = O$ ,  $f$  je linearna transformacija.

Stoga matricni prikaz affine transformacije u prostoru  $E^2$  ima oblik

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

pritom mora vrijediti  $ad - bc \neq 0$ .

Uočimo da za bilo koje točke  $X_1, X_2 \in E^2$  vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(X_1)f(X_2)} &= \overrightarrow{f(X_1)O} + \overrightarrow{Of(X_2)} = \overrightarrow{Of(X_2)} - \overrightarrow{Of(X_1)} = \\ L(\overrightarrow{OX_2}) + \overrightarrow{Of(O)} - L(\overrightarrow{OX_1}) - \overrightarrow{Of(O)} &= L(\overrightarrow{OX_2} - \overrightarrow{OX_1}) = L(\overrightarrow{X_1X_2}). \end{aligned}$$

Stoga se afino preslikavanje može općenito uvesti na sljedeći način:

**Definicija 1.3.** Neka su  $V$  i  $V'$  vektorski prostori nad istim poljem  $F$ , a  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{A}'$  afini prostori nad  $V$ , odnosno  $V'$ . Za preslikavanje  $f_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  kažemo da je afino, ako je preslikavanje  $f : V \rightarrow V'$  definirano s  $f(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{f_a(X_1)f_a(X_2)}$ , gdje su  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ , linearna transformacija. Preslikavanje  $f$  naziva se linearna transformacija pridružena afinom preslikavanju  $f_a$ .

Neki primjeri afinih transformacija ravnine su preslikavanja koja čuvaju udaljenost, tj. izometrijska preslikavanja kao što su translacija, rotacija, zrcaljenje, itd. Transformacija istezanja, npr.  $(x, y) \rightarrow (cx, y)$  gdje je  $c$  realna konstanta različita od nule, te homotetija također su primjeri afinih transformacija koji pokazuju da afina transformacija općenito ne čuva udaljenosti i kutove.

Napomenimo da linearnu transformaciju  $L$  pridruženu afinom transformaciji  $f$  možemo primijenjivati i na vektore iz  $V^2$  koji nisu nužno radijvektori, to jest elementi  $V^2(O)$ . Za bilo koje točke  $X_1, X_2 \in E^2$  vrijedit će  $L(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{f(X_1)f(X_2)}$ , neovisno o izboru orijentirane dužine  $\overrightarrow{X_1X_2}$  koja predstavlja taj vektor.

**Teorem 1.4.** Dane su točke u ravnini,  $O$  i  $O'$ , te dvije baze vektorskog prostora  $V^2$ ,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  i  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ . Postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava  $O$  u  $O'$  te  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  u  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ .

**Dokaz.** Očito je da traženu afinu transformaciju  $f$  možemo zadati kao kompoziciju translacije koja  $O$  preslika u  $O'$  i linearne transformacije koja vektore  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  preslika redom u  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ . Znamo da je linearna transformacija jednoznačno određena svojim djelovanjem na bilo koju bazu. Iz Propozicije 1.2. jasno je da je afina transformacija s traženim svojstvom jedinstvena.

Pritom umjesto vektorskog prostora  $V^2(O)$  ili  $V^2(O')$  možemo promatrati prostor  $V^2$  budući da prema prethodnoj napomeni linearnu transformaciju  $L$  možemo primijeniti na ekvivalentne vektore s bilo kojim ishodištem.

□

**Korolar 1.5.** Za bilo koja dva trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle A_1B_1C_1$  u ravnini  $E^2$  postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava jedan trokut u drugi tako da se vrhovi  $A, B, C$  preslikavaju redom u  $A_1, B_1, C_1$ .

**Dokaz.**

Tvrđnja slijedi iz Propozicije 1.2. tako da izaberemo točke i vektore na sljedeći način:

$$O = A, O' = A_1, \vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{A_1B_1}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{A_1C_1}$$

□

Spomenimo još neka važna svojstva afinih transformacija.

**Teorem 1.6.** Afine transformacije čuvaju:

- (a) kolinearnost točaka
- (b) konkurentnost pravaca,
- (c) paralelnost pravaca,
- (d) omjer dužina na pravcu,
- (e) omjer površina poligona.

**Dokaz.**

(a) Tvrđnje (a), (b) i (c) slijede iz definicije afinih transformacija i već navedenih svojstava, posebno Propozicije 1.2., budući da su pravci linearne mnogostrukosti dimenzije 1.

(d) Za svojstvo (d) koristimo činjenicu da translacija ne mijenja udaljenost točaka, pa stoga ne mijenja niti omjer dužina, dok linearne transformacije čuvaju omjer modula kolinearnih vektora.

Naime, za linearnu transformaciju  $L$  u prikazu afine transformacije i za kolinearne vektore  $\overrightarrow{P_1P_2}$  i  $\overrightarrow{P_3P_4}$  vrijedi: ako je  $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda \overrightarrow{P_3P_4}$ , onda je  $L(\overrightarrow{P_1P_2}) = \lambda L(\overrightarrow{P_3P_4})$  te  $|L(\overrightarrow{P_1P_2})| : |L(\overrightarrow{P_3P_4})| = |\lambda| = |\overrightarrow{P_1P_2}| : |\overrightarrow{P_3P_4}|$ .

Ako promatramo orijentirane dužine, uzmemo u obzir i predznak skalara  $\lambda$ .

(e) Budući da se svaki poligon može rastaviti na trokute, dovoljno je pokazati da je omjer

površine bilo kojeg trokuta i površine njegove slike pod djelovanjem afine transformacije konstantan, to jest da ovisi samo o toj transformaciji, a ne i o izboru trokuta.

Ponovo se služimo prikazom afine transformacije kao kompozicije linearne transformacije i translacije. Translacija ne mijenja površinu, a iz analitičke geometrije poznato je da površinu trokuta  $\triangle ABC$  s vrhovima  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  možemo izračunati kao  $\frac{1}{2}|D|$  gdje je

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Označimo površinu trokuta  $\triangle ABC$  s  $P$ , a površinu njegove slike, trokut  $\triangle A'B'C'$  određen vrhovima  $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3)$ , sa  $P'$ .

Tada za površine  $P$  i  $P'$  vrijedi sljedeće

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad P' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Točke  $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3)$  dobili smo djelovanjem afine transformacije pa ih možemo prikazati na sljedeći način

$$P' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & cx_1 + dy_1 & 1 \\ ax_2 + by_2 & cx_2 + dy_2 & 1 \\ ax_3 + by_3 & cx_3 + dy_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Raspišimo dobivenu determinantu

$$\frac{1}{2} \left( \begin{vmatrix} ax_1 & cx_1 & 1 \\ ax_2 & cx_2 & 1 \\ ax_3 & cx_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by_1 & cx_1 & 1 \\ by_2 & cx_2 & 1 \\ by_3 & cx_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 & 1 \\ ax_2 & dy_2 & 1 \\ ax_3 & dy_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by_1 & dy_1 & 1 \\ by_2 & dy_2 & 1 \\ by_3 & dy_3 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

Uočimo da su u gornjem zapisu prva i zadnja determinanta jednake 0 jer izlučivanjem koeficijenata  $a, c$  i  $b, d$  ostaju dva jednaka stupca.

Izlučimo koeficijente  $b, c$  i  $a, d$  iz preostale dvije determinante.

$$\frac{1}{2} \left( bc \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (ad - bc)P.$$

Stoga je

$$\frac{P'}{P} = |ad - bc| = |\det D|.$$

□

Euklidsku ravninu možemo promatrati kao Kartezijevu ravninu  $\mathbb{R}^2$  ali i kao kompleksnu ravninu na način da točki s Kartezijevim koordinatama  $(x, y)$ , ili u matričnom zapisu  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , pridružujemo kompleksni broj  $z$  za koji vrijedi  $z = xi + y$ . Spomenutu točku  $z$  u ravnini možemo prikazati radijvektorom sa vrhom u točki  $(x, y)$ .

Realna linearna transformacija  $L$  ima oblik

$$L(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y, \alpha_2 x + \beta_2 y),$$

ili u matričnom zapisu

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

gdje je  $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$

No, realnu linearnu transformaciju  $L$  možemo prikazati i pomoću kompleksnih brojeva.

Neka je dan kompleksan broj  $z = x + iy$  i njegov konjugirano kompleksni broj  $\bar{z} = x - iy$ . Transformacijom danih jednadžbi dobivamo sljedeće

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \tag{1.1}$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\bar{z} - z}{2} i \tag{1.2}$$

Pa vrijedi

$$L(z) = L(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y) + (\alpha_2 x + \beta_2 y)i = (\alpha_1 + \alpha_2 i)x + (\beta_1 + \beta_2 i)y \quad (1.3)$$

Uvrstimo li (1.1) i (1.2) u (1.3), dobivamo  $L(z) = Az + B\bar{z}$  gdje su

$$A = \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} + \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2}i = a_1 + a_2 i$$
$$B = \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} + \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2}i = b_1 + b_2 i$$

Iz ovih jednakosti slijedi

$$\alpha_1 = a_1 + b_1, \alpha_2 = a_2 + b_2, \beta_1 = -a_2 + b_2, \beta_2 = a_1 - b_1$$

pa  $M$  možemo prikazati kao

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}.$$

Stoga se realna linearna transformacija  $L$  prostora  $R^2$  može na očigledan način identificirati s kompleksnom funkcijom  $L : C \rightarrow C$  zadanom s  $L(z) = Az + B\bar{z}$ , pri čemu su kompleksni koeficijenti zadani s  $A = a_1 + a_2 i$  i  $B = b_1 + b_2 i$ .

Linearna transformacija  $L$  vektorskog prostora  $V^n$  je bijektivna ako i samo ako je njezin rang maksimalan, odnosno jednak  $n$ . Takva linearna transformacija naziva se nesingularna ili regularna. Matrica regularne linearne transformacije u bilo kojoj bazi je regularna matrica, dakle invertibilna matrica, što je ekvivalentno svojstvu da je rang matrice maksimalan, odnosno svojstvu da je determinanta  $\det M \neq 0$ . Budući da je za promatranu linearnu transformaciju  $L$  determinanta pripadne matrice  $M$  jednaka  $\det M = |A|^2 - |B|^2$ , zaključujemo da je  $L$  bijekcija ako i samo ako je  $|A| \neq |B|$ . U slučaju kada je  $L$  nesingularna, slika bilo koje kružnice oko ishodišta je elipsa ili specijalno, kružnica sa središtem u ishodištu. Isto tako, za bilo koju danu elipsu  $E$  sa središtem u ishodištu te neku jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu radijusa  $r > 0$ , postoji nesingularna linearna transformacija koja preslikava danu kružnicu u elipsu  $E$ ,

što ćemo sada i pokazati.

Pogledajmo jediničnu kružnicu čija jednadžba glasi  $x^2 + y^2 = 1$ . Ona će se regularnom linearnom transformacijom  $x' = ax, y' = by$ , pri čemu je  $a, b > 0$ , preslikati u elipsu  $(\frac{x'}{a})^2 + (\frac{y'}{b})^2 = 1$  s duljinama poluosi  $a$  i  $b$ . Prema tome, jasno je da se svaka kružnica i elipsa sa središtem u ishodištu mogu preslikati jedna u drugu. Ukoliko središte nije u ishodištu, potrebno je primijeniti i translaciju. Regularna linearna transformacija  $x' = ax, y' = by$  ima inverznu linearnu transformaciju s recipročnim koeficijentima,  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ .

Pokažimo sada da i opća regularna linearna transformacija preslika kružnicu u elipsu. Dovoljno je opet uzeti jediničnu kružnicu.

Neka je linearna transformacija zadana s  $x' = ax + by, y' = cx + dy$ , te  $\det(M) = ad - bc \neq 0$ . Odavde možemo izraziti  $x, y$  pomoću  $x', y'$  koristeći Cramerovo pravilo:

$$x = \frac{dx' - by'}{ad - bc} \quad (1.4)$$

$$y = \frac{ay' - cx'}{ad - bc} \quad (1.5)$$

Jednadžbu slike kružnice dobivamo uvrštavanjem izraza (1.4) i (1.5) u jednadžbu  $x^2 + y^2 = 1$ . Sređivanjem po  $x', y'$  imamo sljedeće:

$$(c^2 + d^2)x'^2 + (a^2 + b^2)y'^2 - 2(ac + bd)x'y' = (ad - bc)^2. \quad (1.6)$$

Ako je uz  $x'y'$  koeficijent 0, očito je to jednadžba elipse. Kako bismo prepoznali da je to i općenito jednadžba elipse, a da se pritom ne služimo cjelovitom diskusijom tipa krivulje 2. reda poznatom iz analitičke geometrije, iskoristit ćemo neka geometrijska svojstva elipse.

Zamjenom  $(x', y')$  s  $(-x', -y')$  jednadžba (1.6) ostaje nepromijenjena. To znači da je krivulja centralno simetrična obzirom na ishodište  $(0, 0)$ . Kako parabola nije centralno simetrična, treba još provjeriti da (1.6) ne predstavlja hiperbolu. (Napomenimo da bi se lako pokazalo da je krivulja jednadžbe (1.6) neraspadnuta, to jest da se ne sastoji od dva pravca).

Za elipsu vrijedi da svaki pravac kroz njezino središte siječe tu krivulju u dvjema različitim točkama, dok hiperbola nema to svojstvo budući da ima asimptote i beskonačno mnogo pravaca

između asimptota koji nemaju (realnih) sjecišta s krivuljom.

Potražimo sjecišta krivulje (1.6) s pravcima  $y' = kx'$  za sve  $k \in \mathbb{R}$

U tu svrhu napišimo (1.6) u sažetom obliku, kao

$$mx'^2 + ny'^2 - 2px'y' = r^2, m, n > 0$$

Za  $x' = 0$  očito imamo dva rješenja  $y' = \pm \frac{r}{\sqrt{n}}$ .

Za  $y' = kx'$  sređivanjem dobivamo  $x'^2(m - 2pk + nk^2) = r^2$ .

Preostaje vidjeti ima li jednadžba za bilo koji  $k$  dva rješenja za  $x'$ .

Kada bi imala, moralo bi vrijediti  $nk^2 - 2pk + m > 0$  za sve  $k \in \mathbb{R}$ .

Nejednakost vrijedi ako i samo ako je diskriminanta kvadratnog polinoma negativna, dakle ako je  $4p^2 - 4mn = 4(p^2 - mn) < 0$ .

Vratimo li pune izraze za  $m, n, p$ , uvjet glasi  $(ac + bd)^2 < (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ .

No, ovo je poznata nejednakost, a sređivanjem ostaje  $0 < (ad - bc)^2$ . Nejednakost je ovdje stroga jer je  $\det M = ad - bc \neq 0$ .

U daljnjem radu koristit ćemo standardnu oznaku  $\mathbb{T}$  koja označava jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu  $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ . Kružnicu sa središtem u ishodištu radijusa  $r > 0$  označimo sa  $r\mathbb{T}$ .

Promatramo li afinu transformaciju u kompleksnom obliku, ona će imati oblik  $f(z) = Az + B\bar{z} + C$ , pri čemu je  $C$  kompleksan broj. Afina transformacija je kompozicija linearne transformacije i translacije. Bitno svojstvo afine transformacije je da za svake  $z, w \in \mathbb{C}$  i svaki  $t \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$f((1-t)z + tw) = (1-t)f(z) + tf(w).$$

**Teorem 1.7.** Ako je  $f(z) = Az + B\bar{z} + C$  bijektivna afina transformacija, onda je slika kružnice  $r\mathbb{T}$  elipsa sa fokusima  $C \pm 2r\sqrt{AB}$ , velikom poluosi duljine  $(|A| + |B|)r$  i malom poluosi duljine  $||A| - |B||r$ .



**Dokaz.** Dovoljno je razmotriti slučaj kada je  $C = 0$ ,  $f(z) = Az + B\bar{z}$  je bijektivna linearna transformacija te je  $r = 1$  zbog  $f(rz) = rf(z)$ . Ako je  $A = 0$  ili  $B = 0$ , onda je  $f$  euklidska sličnost te je slika jedinične kružnice kružnica sa središtem  $O$  i radijusom  $|A|$ , odnosno  $|B|$ . Pretpostavimo sada da je  $A, B \neq 0$ . Slika  $f(\mathbb{T})$  jedinične kružnice je elipsa. Pokažimo da elipsa  $f(\mathbb{T})$  ima fokuse  $\pm 2\sqrt{AB}$ , veliku poluos duljine  $|A| + |B|$  te malu poluos duljine  $||A| - |B||$ . Jediničnu kružnicu možemo parametrizirati;  $t \rightarrow e^{it}$ , pa je slika jedinične kružnice  $f(e^{it}) = Ae^{it} + Be^{-it} = |A|e^{i(\eta+t)} + |B|e^{i(\phi-t)}$ , gdje je  $A = |A|e^{i\eta}$  i  $B = |B|e^{i\phi}$ . Nejednakost

$$||A| - |B|| \leq ||A|e^{i(\eta+t)} + |B|e^{i(\phi-t)}| \leq |A| + |B|,$$

pokazuje da slika elipse sadrži kružnicu  $|z| = ||A| - |B||$  i leži unutar kružnice  $|z| = |A| + |B|$ . Jednakost na kraju gornje nejednadžbe vrijedi ako i samo ako  $e^{i(\eta+t)} = e^{i(\phi-t)}$ , što će vrijediti kada je  $\eta + t = \phi - t + 2n\pi$  ili  $t = \frac{1}{2}(\phi - \eta) + n\pi$  za neki  $n \in \mathbb{Z}$ . Stoga, za  $t = \frac{1}{2}(\phi - \eta)$  i  $t = \frac{1}{2}(\phi - \eta) + \pi$ ,  $|f(e^{it})| = |A| + |B|$ , pa je duljina velike poluosi  $a = |A| + |B|$ . Budući da je  $e^{i\phi/2} = \sqrt{B}/|B|^{1/2}$  i  $e^{i\eta/2} = \sqrt{A}/|A|^{1/2}$ , dobivamo

$$f(e^{i(\phi-\eta)/2}) = \frac{|A| + |B|}{|AB|^{1/2}} \sqrt{AB}.$$

Dakle, vektor smjera velike osi je  $\sqrt{AB}$ . Slično, u lijevoj strani gornje nejednadžbe vrijedit će jednakost kada  $e^{i(\eta+t)} = -e^{i(\phi-t)}$ , tj.  $\eta + t = \phi - t + \pi + 2n\pi$  ili  $t = \frac{1}{2}(\phi - \eta) + \frac{\pi}{2} + n\pi$  za neki  $n \in \mathbb{Z}$ . Stoga, duljina male poluosi iznosi  $b = ||A| - |B||$ . Udaljenost,  $c$ , središta elipse do fokusa određena je sa  $c^2 = a^2 - b^2 = 4|A||B|$ , pa je  $c = 2|A|^{1/2} |B|^{1/2}$ . Prema tome, žarišta elipse su  $\pm 2\sqrt{AB}$ .

□

## Poglavlje 2

# Postojanje i jedinstvenost Steinerovih elipsi

Na početku, definirajmo Steinerove elipse trokuta.

### **Definicija 2.1.**

Steinerova upisana elipsa trokuta je jedinstvena elipsa upisana trokutu koja dodiruje trokut u polovištima njegovih stranica.

### **Definicija 2.2.**

Steinerova opisana elipsa trokuta je jedinstvena elipsa koja prolazi vrhovima trokuta te joj je središte u težištu tog trokuta.

Uočimo da se u definiciji Steinerove upisane elipse ne postavlja uvjet da je središte elipse u težištu trokuta, ali to svojstvo vrijedi jer slijedi iz definicije.

Pokažimo sada postojanje i jedinstvenost spomenutih dviju elipsi.

## Upisana elipsa

Uzmimo sada bilo koji trokut. Kao što smo već rekli, njega možemo promatrati kao sliku jednakostraničnog trokuta pri nekoj afinoj transformaciji  $A$ . Kružnica upisana jednakostranič-

nom trokutu preslikat će se afinom transformacijom  $A$  u elipsu koja prolazi polovištima danog trokuta, a stranice tog trokuta bit će tangente na elipsu. Iz svojstva afine transformacije slijedi da će središte te elipse biti u težištu trokuta, budući da to vrijedi za upisanu kružnicu jednakostraničnog trokuta.

Započet ćemo s utvrđivanjem postojanja takve elipse.

Uzmimo jednakostranični trokut s vrhovima u  $1$ ,  $w = \exp \frac{2i\pi}{3}$  i  $w^2$ . Podsjetimo da vrijedi  $1 + w + w^2 = 0$ . Za bilo koji trokut  $\triangle z_1 z_2 z_3$  u kompleksnoj ravnini postoji jedinstveno afino preslikavanje  $f(z) = Az + B\bar{z} + C$  tako da vrijedi  $f(1) = z_1$ ,  $f(w) = z_2$  i  $f(w^2) = z_3$ . Jednostavnim računom dobivamo

$$A = \frac{1}{3}(z_1 + w^2 z_2 + w z_3)$$

$$B = \frac{1}{3}(z_1 + w z_2 + w^2 z_3)$$

$$C = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = g$$

Budući da točke nisu kolinearne, preslikavanje  $f$  je bijektivno na  $\mathbb{C}$ .

Kružnica upisana početnom trokutu je  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  i dodiruje trokut u polovištima njegovih stranica. Stoga je  $f(\frac{1}{2}\mathbb{T})$  elipsa koja dodiruje trokut  $\triangle z_1 z_2 z_3$  u polovištima njegovih stranica jer smo pokazali da afina transformacija čuva djelišni omjer i svojstvo tangente.

Uočimo, da ponovo zbog  $1 + w + w^2 = 0$  vrijedi

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + (w + w^2)(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\ &= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\ &= \frac{1}{9}((z_1 + z_2 + z_3)^2 - 3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)) \\ &= g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3). \end{aligned}$$

Prema Teoremu 1.7.,  $f$  preslikava kružnicu  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  u elipsu sa fokusima danima sa

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)}.$$

Pokažimo sada jedinstvenost takve elipse.

Pretpostavimo da je  $E$  elipsa upisana trokutu  $\triangle z_1 z_2 z_3$  i da ga dodiruje u polovištima njegovih stranica. Postoji bijektivna afina transformacija  $g$  koja preslikava kružnicu  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  u elipsu  $E$ . Tada je trokut  $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$  prasluka trokuta  $\triangle z_1 z_2 z_3$  s upisanom kružnicom  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  koja dodiruje trokut u polovištima njegovih stranica. Budući da kružnica dira trokut u polovištima njegovih stranica, tj. duljina odsječaka tangente je jednaka, zaključujemo da je trokut  $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$  jednakostraničan. Opisana kružnica jednakostraničnog trokuta ima dvostruko veći radijus od kružnice upisane jednakostraničnom trokutu pa vrhovi trokuta  $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$  leže na kružnici  $\mathbb{T}$ . Prema potrebi možemo komponirati funkciju  $g$  s rotacijom. Na taj način bi osigurali  $Z_1 = 1$ . Zatim  $Z_2, Z_3 = w, w^2$ , a ako je potrebno možemo također komponirati  $g$  s osnom simetrijom preko osi apscise i na taj način postizemo  $Z_2 = w$  i  $Z_3 = w^2$ . Tada slijedi  $g = f$  i  $E$  je elipsa konstruirana u dokazu egzistencije.

□

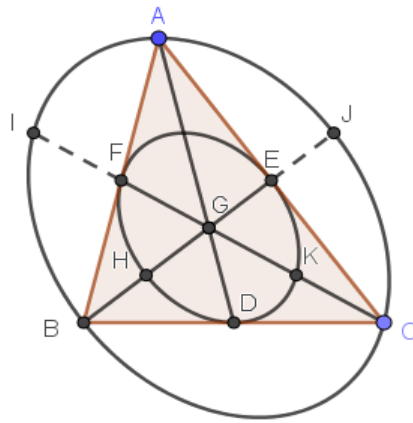
## Opisana elipsa

Neka je dan jednakostraničan trokut. Znamo da jednakostraničnom trokutu možemo opisati kružnicu čije je središte u težištu tog trokuta. No, takvu kružnicu možemo također promatrati kao specijalan slučaj elipse. Tada se središte te elipse podudara sa težištem trokuta. Budući da je središte elipse centar simetrije elipse, zaključujemo da će se točke simetrične vrhovima jednakostraničnog trokuta obzirom na njegovo težište također nalaziti na elipsi. Na taj način dobivamo 6 točaka koje se nalaze na elipsi, a da bi krivulja 2. reda bila jednoznačno određena dovoljno je imati 5 točaka. Tako smo pokazali da je opisana kružnica ujedno i jedina opisana elipsa jednakostraničnog trokuta.

Dani jednakostranični trokut možemo afinom transformacijom preslikati u bilo koji trokut, a da se pritom, zbog svojstava afinih transformacija, težište jednakostraničnog trokuta preslika u težište dobivenog trokuta, te da se opisana kružnica preslika u opisanu elipsu. Kada bi dobivenom trokutu mogli pronaći još neku Steinerovu opisanu elipsu, tada bi prasluka u istoj afinoj transformaciji bila neka elipsa opisana jednakostraničnom trokutu, a pritom različita od opisane kružnice.

## 2.1 Konstrukcija

Jedan od načina na koji možemo konstruirati Steinerove elipse proizlazi iz svojstva jednakostraničnog trokuta kojeg smo preslikali afinom transformacijom  $F$  u neki trokut. Točnije, Steinerove elipse dijele pravce na kojima leže težišnice trokuta na jednake segmente  $BH = HG = GE = EJ, CK = KG = GF = FI$ , itd. Stoga, Steinerove elipse možemo konstruirati pomoću pet točaka koje je lako pronaći.

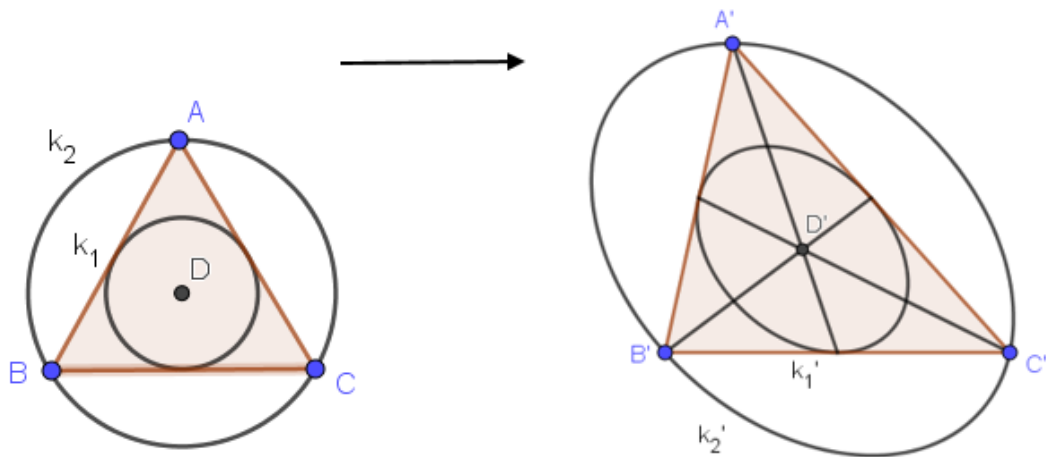


Slika 1.

## 2.2 Odnos dviju elipsi

Sada ćemo pokazati u kojem su odnosu ove dvije elipse.

Steinerove elipse možemo prikazati pomoću affine transformacije  $F$  koja preslikava vrhove jednakostraničnog trokuta  $T := \triangle ABC$  u vrhove nekog trokuta  $T' := \triangle A'B'C'$  te težište  $D$  trokuta  $T$  u težište  $D'$  trokuta  $T'$ . Ovako definirano preslikavanje  $F$  jedinstveno je određeno do na permutaciju vrhova. Neka je  $k_1$  upisana kružnica trokuta  $T$ , a  $k_2$  njemu opisana kružnica. Slike ovih kružnica,  $F(k_1) = k'_1$  i  $F(k_2) = k'_2$  odgovaraju upisanoj i opisanoj elipsi trokuta  $T'$ .



Slika 2.

To slijedi izravno iz već poznatih svojstava  $F$  kao affine transformacije.

Uočimo još neka zanimljiva svojstva.

1) Elipse  $k'_1$  i  $k'_2$  međusobno su homotetične s koeficijentom 2, a središte te homotetije njihovo je zajedničko središte  $D' = F(D)$ .

Naime, ako označimo s  $G$  homotetiju sa središtem u  $D$  koje kružnicu  $k_1$  preslika u  $k_2$ , onda afina transformacija  $F \circ G \circ F^{-1}$  preslika  $k'_1$  u  $k'_2$ :

$$(F \circ G \circ F^{-1})(k'_1) = (F \circ G)(k_1) = F(k_2) = k'_2.$$

Pritom,  $F \circ G \circ F^{-1}$  je homotetija s koeficijentom 2 jer je  $G$  takva.

2) Tangenta na opisanu elipsu trokuta  $T'$  u jednom njegovom vrhu paralelna je s nasuprotnom stranicom tog trokuta. To slijedi odatle što vrijedi odgovarajuća svojstva za jednakostranični trokut i njemu opisanu kružnicu.

3) Budući da afina preslikavanja čuvaju omjer površina, slijedi

$$P_{upisaneelipse} = P_{\Delta A'B'C'} \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$P_{opisaneelipse} = P_{\Delta A'B'C'} \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

4) Steinerova upisana elipsa trokuta ima najveću površinu od svih upisanih elipsi trokuta, a Steinerova opisana elipsa najmanju od svih opisanih.

# Poglavlje 3

## Steinerov teorem

U ovom poglavlju proučit ćemo geometrijsku vezu između trokuta kojemu su vrhovi nultočke kubnog polinoma i nultočaka derivacija polinoma. Osnovna veza je sljedeća: ako su  $z_1, z_2, z_3$  vrhovi trokuta i  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ , onda su nultočke derivacije  $p'(z)$  fokusi Steinerove upisane elipse trokutu.

Postoji mnogo zanimljivih poveznica između nultočaka polinoma  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ , gdje je  $a_n \neq 0$ , i nultočaka njene derivacije  $p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$ , kao što je činjenica da je  $z_0$  nultočka derivacije polinoma ako i samo ako je  $z_0$  nultočka polinoma kratnosti veće od 1.

Jedan od korisnih teorema je Gauss-Lucasov teorem kojeg nećemo dokazivati. Gauss-Lucasov teorem kaže da se nultočke derivacije  $p'(z)$  nalaze unutar konveksne ljuske skupa točaka od  $p(z)$ .

Uzmimo da su nultočke kubnog polinoma  $p(z)$  s kompleksnim koeficijentima sljedeće:  $z_1, z_2$  i  $z_3$ . Također možemo pretpostaviti  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  jer dijeljenjem sa konstantom različitom od nule ne mijenjamo nultočke polinoma niti njegove derivacije. Uočimo,

$$\begin{aligned} p(z) &= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)z - z_1 z_2 z_3, \text{ te} \\ p'(z) &= 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3). \end{aligned}$$

Neka je  $g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$  težište trokuta  $\Delta z_1 z_2 z_3$  određenog nultočkama polinoma  $p(z)$ . Nultočke polinoma  $p'(z)$  su

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)} \quad (3.1)$$



i one su centralno simetrične obzirom na težište. Prema Gauss-Lucasovom teoremu zaključujemo da obje nultočke polinoma  $p'(z)$  leže unutar ili na trokutu  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ . Točnije, nultočke polinoma  $p'(z)$  leže unutar trokuta. Da bismo to mogli zaključiti, pretpostavimo da je  $z'$  jedna nultočka polinoma  $p'(z)$ . Promatrajmo slučaj kada je  $z' \neq z_j, j = 1, 2, 3$  jer  $p(z)$  ima različite nultočke. Tada je

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\overline{p'(z')}}{p(z')} = \frac{3\overline{z'}^2 - 2(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) \cdot \overline{z'} + (\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_1 z_3})}{(z' - z_1)(z' - z_2)(z' - z_3)} \\
&= \frac{(\overline{z'} - \overline{z_2})(\overline{z'} - \overline{z_3}) + (\overline{z'} - \overline{z_1})(\overline{z'} - \overline{z_3}) + (\overline{z'} - \overline{z_1})(\overline{z'} - \overline{z_2})}{(\overline{z'} - \overline{z_1})(\overline{z'} - \overline{z_2})(\overline{z'} - \overline{z_3})} \\
&= \frac{1}{z' - \overline{z_1}} + \frac{1}{z' - \overline{z_2}} + \frac{1}{z' - \overline{z_3}} \\
&= \frac{1}{z' - \overline{z_1}} \cdot \frac{z' - z_1}{z' - z_1} + \frac{1}{z' - \overline{z_2}} \cdot \frac{z' - z_2}{z' - z_2} + \frac{1}{z' - \overline{z_3}} \cdot \frac{z' - z_3}{z' - z_3} \\
&= \frac{z' - z_1}{|z' - z_1|^2} + \frac{z' - z_2}{|z' - z_2|^2} + \frac{z' - z_3}{|z' - z_3|^2}.
\end{aligned}$$

Oдавде slijedi  $z' = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$ , gdje je

$$\alpha_k = \frac{|z' - z_k|^{-2}}{\sum_{j=1}^3 |z' - z_j|^{-2}} > 0, \text{ za } k = 1, 2, 3,$$

te  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ .

Prisjetimo se, konveksne kombinacije  $z_1, z_2, z_3$  su linearne kombinacije u kojima je zbroj koeficijenata jednak 1. Točka  $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$  nalazi se unutar linearne ljuske  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  ako i samo ako vrijedi  $\alpha_k > 0$ , za  $k = 1, 2, 3$ . Prema tome, pokazali smo da nultočke polinoma  $p'(z)$  zaista leže unutar trokuta  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ .

Pokažimo još da  $p'(z)$  ima jednoznačnu nultočku u težištu ako i samo ako je trokut  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  jednakostraničan. Iz (3.1),  $p'(z)$  ima jednoznačnu nultočku ako i samo ako vrijedi

$$3g^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \tag{3.2}$$

to jest  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$ .

Koristeći (3.2), dobivamo  $p(z) = z^3 - 3gz^2 + 3g^2z - z_1 z_2 z_3 = (z - g)^3 - z_1 z_2 z_3 + g^3$ .

Vidimo da su nultočke polinoma  $p(z)$  jednake zbroju  $g$  s trećim korijenima iz kompleksnog broja  $z_1 z_2 z_3 - g^3$ .

Ako jedan treći korijen označimo s  $\zeta$ , onda su nultočke od  $p(z)$  sljedeće:  $g + \zeta, g + \omega\zeta, g + \omega^2\zeta$ , gdje je  $\omega = \exp(2\pi i/3)$ . Ove točke su vrhovi jednakostraničnog trokuta.

### 3.1 Iskaz teorema

**Teorem 3.1.** (Steiner)

Neka je dan trokut. Postoji jedinstvena elipsa upisana trokutu koja prolazi polovištima stranica trokuta i dodiruje stranice trokuta u njegovim polovištima. Ako su  $z_1, z_2, z_3$  vrhovi trokuta, onda su fokusi elipse  $g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)}$ , gdje je  $g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$  težište.

**Napomena 3.2.** Specijalan slučaj Steinerove elipse upisane jednakostraničnom trokutu je kružnica do koje dolazi ako i samo ako  $p'(z)$  ima jednu, to jest dvostruku nultočku.

**Dokaz.** (Steiner) Postojanje i jedinstvenost takve elipse pokazali smo u prvom poglavlju.

### 3.2 Svojstva Steinerove elipse

**Teorem 3.3.** (Siebeck) Neka su zadane nekolinearne točke  $z_1, z_2, z_3$  u kompleksnoj ravnini  $\mathbb{C}$  i polinom  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ . Neka je  $T$  trokut određen nultočkama  $z_1, z_2, z_3$ . Tada su nultočke polinoma  $p'(z)$  fokusi Steinerove elipse.

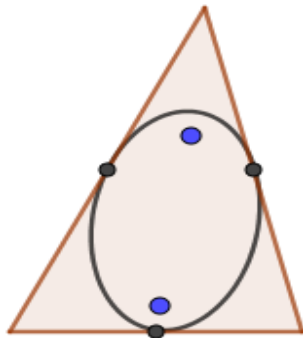
Iako je Siebeckov teorem poznata i ustvari već dokazana tvrdnja iz prethodnog poglavlja, sada ćemo dati još jedan dokaz ove tvrdnje kroz nešto drugačiji pristup. Jorg Siebeck bio je njemački matematičar koji je živio u 19. stoljeću i dokazao je spomenuti teorem 1864. godine. Međutim, Siebeckov teorem postao je šire poznat tek nakon 1949. godine kada je objavljena knjiga američkog matematičara Morrisa Mardena, *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*. Iz tog razloga, Siebeckov teorem često se naziva Mardenovim teoremom.

Da bismo dokazali Siebeckov teorem, potrebno je najprije dokazati nekoliko pomoćnih tvrdnji koje ćemo koristiti u dokazu.

Najprije uočimo da bez smanjenja općenitosti trokut možemo translatirati, rotirati ili skalirati. Također, uočimo da ove transformacije možemo opisati linearnom funkcijom  $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Neka je  $M(z) = \alpha z + \beta$ , pri čemu su  $\alpha \neq 0$  i  $\beta$  fiksni kompleksni brojevi te  $\alpha$  izražena u polarnom zapisu  $re^{i\phi}$ . Tada preslikavanje točke  $z$  u  $M(z)$  ima sljedeću geometrijsku interpretaciju: najprije skaliramo  $z$  u  $r$ , zatim rotiramo oko ishodišta za kut  $\phi$  te na kraju translatiramo za  $\beta$ . Na taj način, primjenom linearne funkcije  $M$ , možemo dobiti bilo koju kombinaciju sklairanja, rotiranja i translatiranja.

Sada možemo opravdati tvrdnju da djelovanjem ovih transformacija nećemo izgubiti općenitost u dokazima. To znači da Siebeckov teorem vrijedi za trojku  $z_1, z_2, z_3$  ako i samo ako vrijedi također za transformiranu trojku  $M(z_1), M(z_2), M(z_3)$ . Zapravo, iz invertibilnosti linearne funkcije slijedi da je dovoljno pokazati jedan smjer ekvivalencije. Stoga, ako znamo da Siebeckov teorem vrijedi za trojku  $z_1, z_2, z_3$ , pokažimo da će također vrijediti za transformiranu trojku  $M(z_1), M(z_2), M(z_3)$ .

Na Slici 3. prikazan je trokut s vrhovima  $z_j$  i upisanom elipsom koja ga dodiruje u polovištima stranica. Također su prikazani fokusi elipse koji moraju biti nultočke polinoma  $p'(z)$ . Promatramo li  $M$  geometrijski, uočavamo da se skaliranjem, rotiranjem i traslatiranjem čuvaju sve komponente. Točnije, slika danog trokuta je njemu sličan trokut, slika elipse je i dalje upisana elipsa koja dodiruje trokut u polovištima stranica, a slika fokusa dane elipse su fokusi transformirane elipse. Za transformiranu konfiguraciju, novi polinom će biti  $p_M(z) = (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3))$ . Želimo pokazati da  $M$  preslikava nultočke od  $p'$  u nultočke od  $p'_M$ .



Slika 3.

Zbog toga, u definiciji od  $p_M$  zamijenimo  $z$  sa  $M(z)$ . To nam daje

$$p_M(M(z)) = (M(z) - M(z_1))(M(z) - M(z_2))(M(z) - M(z_3)). \quad (3.1)$$

Nadalje, primijetimo da je  $M(z) - M(z_j) = \alpha(z - z_j)$ . Stoga, jednadžbu (3.1) možemo pojednostaviti

$$p_M(M(z)) = \alpha^3 p(z).$$

Derivirajući obje strane jednadžbe i pritom uzimajući u obzir  $M'(z) = \alpha$ , dobivamo

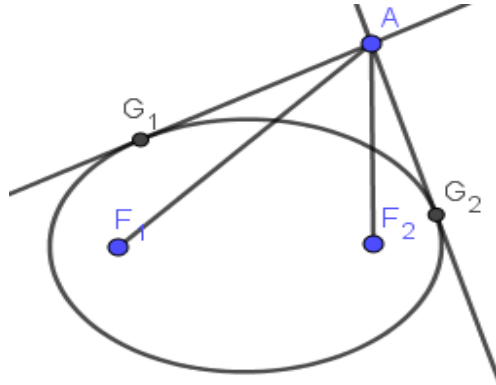
$$\alpha p'_M(M(z)) = \alpha^3 p'(z).$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe sa  $\alpha$  dobivamo

$$p'_M(M(z)) = \alpha^2 p'(z).$$

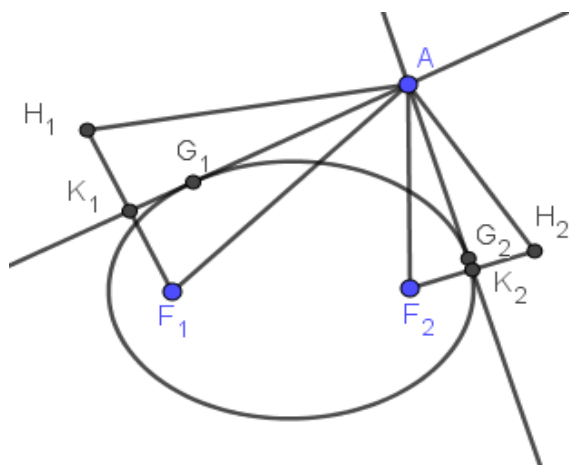
Ovo pokazuje da ako je  $z$  nultočka od  $p'$ , onda je  $M(z)$  nultočka od  $p'_M$  što smo i htjeli pokazati.

**Lema 3.4.** Neka je dana elipsa sa fokusima  $F_1$  i  $F_2$ , te točka  $A$  izvan elipse. Postoje dva pravca koji prolaze točkom  $A$  i dodiruju elipsu. Neka su  $G_1$  i  $G_2$  dirališta tangenti s elipsom. Tada je  $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$ .



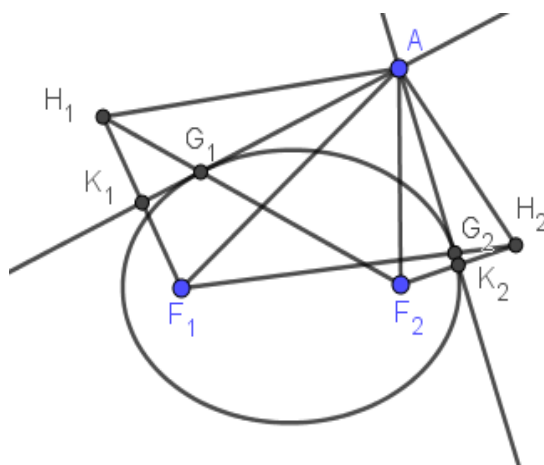
Slika 4.

**Dokaz.** Konfiguracija opisana u lemi je prikazana na Slici 4., bez smanjenja općenitosti prilikom odabira točaka  $G_1$  i  $G_2$ . Neka je  $H_1$  točka simetrična točki  $F_1$  obzirom na pravac  $AG_1$ , te neka je  $K_1$  presjek pravaca  $AG_1$  i  $F_1H_1$  (Slika 5.). Tada su  $\triangle AK_1F_1$  i  $\triangle AK_1H_1$  sukladni pravokutni trokuti, pa vrijedi  $AF_1 = AH_1$  te  $\angle F_1AK_1 = \angle H_1AK_1$ . Analognu konstrukciju možemo primijeniti na točku  $G_2$  te doći do analognog zaključka. Želimo pokazati da je  $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$ . Koristeći spomenute sukladnosti, preostaje pokazati  $\angle F_1AH_1 = \angle F_2AH_2$ .



Slika 5.

Sada povucimo pravce  $F_1G_1$  i  $F_2G_1$ . Pravac  $F_2G_1$  prolazi točkom  $H_1$  zbog optičkog svojstva elipse koje kaže da tangenta u bilo kojoj točki elipse zatvara jednaki kut sa spojnicama do oba fokusa. Zbog toga slijedi  $\angle F_1G_1K_1 = \angle F_2G_1A$ . Budući da je pravac  $AK_1$  simetrala dužine  $F_1H_1$ , vidimo da vrijedi  $\angle F_1G_1K_1 = \angle H_1G_1K_1$ . Prema tome, vrijedi  $\angle F_2G_1A = \angle H_1G_1K_1$  što pokazuje da su točke  $F_2, G_1, H_1$  kolinearne. Kao i prije, za točku  $G_2$  primjenjujemo analognu konstrukciju.



Slika 6.

Sada ćemo pokazati da su trokuti  $\triangle AH_1F_2$  i  $\triangle AF_1H_2$  sukladni tako što ćemo pokazati da su im odgovarajuće stranice jednake duljine. Već smo uočili da vrijedi  $AH_1 = AF_1$  te  $AF_2 = AH_2$ . Za preostale dvije stranice imamo  $H_1F_2 = F_1G_1 + G_1F_2 = F_1G_2 + G_2F_2 = F_1H_2$ , pri čemu smo koristili činjenicu da je zbroj udaljenosti od fokusa do bilo koje točke elipse konstantan.

Konačno, sukladnost trokuta  $\triangle AH_1F_2$  i  $\triangle AF_1H_2$  povlači jednakost kutova  $\angle H_1AF_2 = \angle F_1AH_2$ . Budući da im je kut  $\angle F_1AF_2$  zajednički, zaključujemo da vrijedi  $\angle H_1AF_1 = \angle F_2AH_2$ . Kao što smo ranije uočili, ovo je dovoljno da bi pokazali  $\angle G_1AF_1 = \angle F_2AG_2$ , što smo i htjeli.

□

**Lema 3.5.** Neka su dani polinom  $p(z)$  s nultočkama  $z_1, z_2, z_3$  i trokut  $T$  kao u iskazu Siebeckovog teorema. Tada elipsa s fokusima u nultočkama polinoma  $p'$ , koja prolazi polovištem jedne stranice trokuta  $T$  dodiruje tu stranicu trokuta u polovištu.

**Dokaz.** Kao što smo već uočili, bez smanjenja općenitosti trokut možemo rotirati, translirati i skalirati kako god želimo. Sukladno tome, postavimo trokut tako da se jedna stranica trokuta nalazi na  $x$ -osi tako da se polovište nalazi u ishodištu, duljina te stranice neka iznosi 2, a vrh nasuprotne stranice leži u gornjoj poluravnini. Na taj način, vrhovi trokuta (koji su ujedno i nultočke polinoma  $p$ ) su  $1, -1$  te  $w = a + bi$  gdje je  $b > 0$ . Promatrat ćemo elipsu koja prolazi ishodištem koje je ujedno i polovište stranice koja leži na  $x$ -osi. Kako bi pokazali da elipsa dodiruje tu stranicu, pokazat ćemo da pravci koji prolaze ishodištem i jednim fokusom zatvaraju jednake kutove sa  $x$ -osi.

Sada znamo nultočke polinoma  $p$ , pa dobivamo

$$p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - w) = z^3 - wz^2 - z + w.$$

Deriviranjem dobivamo

$$p'(z) = 3z^2 - 2wz - 1 = 3\left(z^2 - \frac{2w}{3}z - \frac{1}{3}\right).$$

Stoga, ako su nultočke polinoma  $p'$   $z_4 = r_4 e^{i\phi_4}$  i  $z_5 = r_5 e^{i\phi_5}$ , pri čemu je  $0 \leq \phi_4, \phi_5 < 2\pi$ , onda zaključujemo da je  $z_4 + z_5 = \frac{2w}{3}$ ,  $z_4 z_5 = -\frac{1}{3}$ . Prva nultočka nam pokazuje da barem jedna nultočka polinoma  $p'$  mora ležati u gornjoj poluravnini, dok druga pokazuje da je  $\phi_4 + \phi_5 = \pi$ . Zapravo, vidimo da se obje nultočke moraju nalaziti u gornjoj poluravnini. Štoviše, promatramo li radijvektore tih nultočaka, kutovi koje oni zatvaraju sa pozitivnim dijelom  $x$ -osi su suplementarni. Prema tome, ili se obje nultočke nalaze na  $y$ -osi ili jedna nultočka zatvara šiljasti kut s pozitivnim dijelom  $x$ -osi, a druga nultočka zatvara jednak kut sa negativnim dijelom  $x$ -osi. U bilo kojem slučaju, pravci koji prolaze fokusom naše elipse i ishodištem zatvaraju jednake kutove sa  $x$ -osi, pa je  $x$ -os zaista tangenta elipse.

□

**Lema 3.6.** Neka su dani polinom  $p(z)$  s nultočkama  $z_1, z_2, z_3$  i trokut  $T$  kao u iskazu Siebeckovog teorema. Promotrimo elipsu s fokusima u nultočkama polinoma  $p'$  koja dodiruje jednu

stranicu trokuta  $T$  u polovištu. Tada ta elipsa dodiruje druge dvije stranice trokuta.

**Dokaz.** Kao i do sada, možemo pozicionirati trokut kako god želimo. Elipsa  $E$  dodiruje jednu stranicu trokuta pa kao i u prethodnoj lemi, smjestimo tu stranicu trokuta na  $x$ -os. Međutim, sada ćemo jedan vrh trokuta smjestiti u ishodište, a drugi u točku 1. Preostali vrh trokuta ponovno smjestimo u točku  $w = a + bi$ , pri čemu je  $b > 0$ . Ovakvom pozicijom, vidjet ćemo da elipsa dodiruje stranicu  $0w$ .

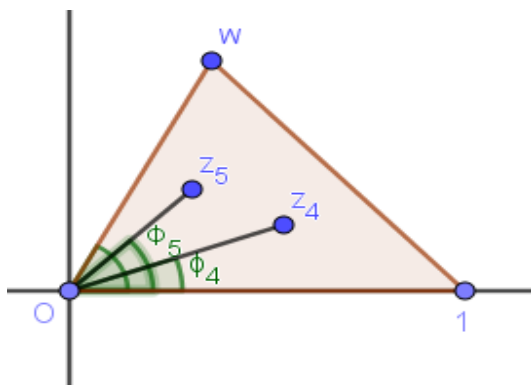
S obzirom na vrhove u točkama  $0, 1, w$ , polinom  $p(z)$  može biti zadan sa  $z(z - 1)(z - w)$ . Množenjem dobivamo

$$p(z) = z^3 - (1 + w)z^2 + wz.$$

Deriviranjem dobivamo

$$p'(z) = 3z^2 - 2(1 + w)z + w.$$

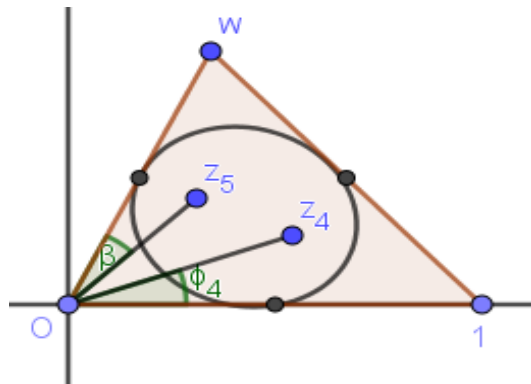
Sličnim zapažanjem kao u prethodnoj lemi, primijetimo da  $z_4 + z_5 = \frac{2}{3}(1 + w)$ . Ovo pokazuje da se barem jedna nultočka polinoma  $p'$  mora nalaziti u gornjoj poluravnini. Također, znamo da su nultočke zapravo fokusi elipse koja dodiruje  $x$ -os. Zbog toga, obje nultočke nalaze se u gornjoj poluravnini što nam omogućuje prikaz nultočaka polinoma  $p'$  u obliku  $z_4 = r_4 e^{i\phi_4}$  i  $z_5 = r_5 e^{i\phi_5}$ , gdje je  $0 < \phi_4 \leq \phi_5 < \pi$ . Slijedi,  $z_4 z_5 = \frac{w}{3}$ . To nam pokazuje da je  $\phi_4 + \phi_5$  jednako kutu između pozitivnog dijela  $x$ -osi i  $0w$ . Zbog toga, kut između  $0z_5$  i  $0w$  jednak je  $\phi_4$ .



Slika 7.

Sada primijenimo Lemu 3.4., tako da ishodište ima ulogu vanjske točke  $A$  (Slika 8.). Mogli bismo se zapitati kako znamo da je ishodište vanjska točka. No, to je očito zbog toga što elipsa  $E$  dodiruje  $x$ -os u točki  $x = \frac{1}{2}$ . Zaista,  $x$ -os je jedna od dvije tangente na elipsu  $E$  koje prolaze

ishodištem. Označimo drugu tangentu sa  $L$ . Prema Lemi 3.4., kut  $\beta$  između  $0z_5$  i  $L$  jednak je kutu između  $x$ -osi i  $0z_4$ , a taj kut jednak je  $\phi_4$ . No, to je jednako kutu između  $0z_5$  i  $0w$ , pa zaključujemo da se  $L$  podudara sa  $0w$ , a to onda znači da je  $0w$  tangenta na elipsu  $E$ .



Slika 8.

Preostalo je pokazati da je stranica  $1w$  također tangenta na elipsu  $E$ . Tvrdnju možemo dokazati na isti način, promatrajući trokut kojeg smo translatali horizontalno tako da su mu vrhovi u točkama  $-1, 0$  umjesto  $0, 1$ .

□

Nakon što smo dokazali pomoćne tvrdnje koje su nam potrebne za dokaz Siebeckovog teorema, možemo prijeći na sami dokaz.

**Dokaz.**(Siebeck) Kao i do sada, pretpostavimo da su polinom  $p(z)$ , njegove nultočke  $z_j$  te trokut  $T$  dani kao u iskazu teorema. Koristeći nultočke polinoma  $p'$  kao fokuse elipse, konstruiramo elipsu  $E$  tako da prolazi polovištem jedne stranice trokuta. Prema Lemi 3.5., elipsa  $E$  dodiruje tu stranicu trokuta. Prema Lemi 3.6., elipsa također dodiruje druge dvije stranice tog trokuta. Sada tvrdimo da točke u kojima elipsa dodiruje druge dvije stranice trokuta moraju biti polovišta tih stranica. Kad te točke ne bi bile polovišta, ponovimo gornju konstrukciju sa novom stranicom i na taj način dobivamo elipsu  $E'$ . Budući da elipse  $E$  i  $E'$  imaju jednake fokuse, te obje dodiruju istu stranicu trokuta, zaključujemo da se one moraju podudarati. No, to nam pokazuje da obje elipse  $E$  i  $E'$  dodiruju novu stranicu u istoj točki, polovištu. Zbog simetrije, isti zaključak vrijedi i za preostalu stranicu trokuta. Dakle, početna elipsa  $E$  dodiruje sve tri stranice trokuta u njihovim polovištima i time smo dokazali Siebeckov teorem.

□



**Teorem 3.7.** Neka je  $C$  bilo koja kružnica sadržana u  $\triangle z_1 z_2 z_3$ . Tada vrijedi

$$\frac{P_c}{P_{\triangle z_1 z_2 z_3}} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

pri čemu je  $P$  oznaka za površinu. Jednakost tvrdnje vrijedi ako i samo ako je trokut  $\triangle z_1 z_2 z_3$  jednakostraničan, a  $C$  je njemu upisana kružnica.

**Dokaz.** Neka je  $r$  oznaka za radijus upisane kružnice trokutu  $\triangle z_1 z_2 z_3$ . Tada je očito  $P_C \leq \pi r^2$ . Jednakost će vrijediti ako i samo ako je  $C$  upisana kružnica.

Zato je dovoljno pokazati

$$\frac{\pi r^2}{P_{\triangle z_1 z_2 z_3}} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je trokut  $\triangle z_1 z_2 z_3$  jednakostraničan.

Označimo sa  $a, b$  i  $c$  duljine stranica trokuta  $\triangle z_1 z_2 z_3$ , a sa  $s$  njegov poluopseg  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ .

Pomoću Heronove formule znamo da je površina trokuta  $\triangle z_1 z_2 z_3$  jednaka  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

No, produkt  $rs$  također određuje površinu tog trokuta. Zato dobivamo

$$r^2 s = \frac{P_{\triangle z_1 z_2 z_3}^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c).$$

Sada nam AG nejednakost daje

$$((s-a)(s-b)(s-c))^{1/3} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{s}{3}$$

pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako  $a = b = c$ . Stoga dobivamo

$$r^2 \leq \frac{s^2}{27}, \text{ tj. } r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut  $\triangle z_1 z_2 z_3$  jednakostraničan.

Konačno, dobili smo

$$\frac{\pi r^2}{P_{\triangle z_1 z_2 z_3}} = \frac{\pi r}{s} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut  $\triangle z_1 z_2 z_3$  jednakostraničan.

□

**Korolar 3.8.** Od svih elipsa sadržanih u trokutu, elipsa upisana tom trokutu ima najveću površinu. Točnije, za neku elipsu  $E$  sadržanu u trokutu  $\Delta z_1 z_2 z_3$  vrijedi

$$\frac{P_E}{P_{\Delta z_1 z_2 z_3}} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je  $E$  upisana elipsa.

**Dokaz.** Neka je  $f$  afina transformacija zadana sa  $f(1) = z_1$ ,  $f(w) = z_2$  i  $f(w^2) = z_3$ . Tada je  $f(\frac{1}{2}\mathbb{T}) = E_0$  upisana elipsa. Pokazali smo da afine transformacije čuvaju omjer površina, stoga sada dobivamo

$$\frac{P_{E_0}}{P_{\Delta z_1 z_2 z_3}} = \frac{P_1}{\frac{1}{2}\mathbb{T}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Uzmimo bilo koju elipsu  $E$  sadržanu u trokutu  $\Delta z_1 z_2 z_3$ . Postoji afina transformacija  $g$  koja preslikava kružnicu  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$  u elipsu  $E$ . Neka je preslika trokuta  $\Delta z_1 z_2 z_3$  trokut  $\Delta Z_1 Z_2 Z_3$  koji sadrži  $\frac{1}{2}\mathbb{T}$ . Prema prethodnom teoremu dobivamo

$$\frac{P_E}{P_{\Delta z_1 z_2 z_3}} = \frac{P_1}{\frac{1}{2}\mathbb{T}} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut  $\Delta Z_1 Z_2 Z_3$  jednakostraničan i  $f(\frac{1}{2}\mathbb{T})$  mu je upisana kružnica. Kao i u dokazu Steinerovog teorema, uvjet jednakosti povlači da je  $E$  upisana elipsa trokuta.

□

# Poglavlje 4

## Ekvicevijane

**Definicija 4.1.** (Cevijane) Dužine omeđene jednim vrhom trokuta  $\triangle ABC$  i nekom točkom na nasuprotnoj stranici tog trokuta zovemo cevijanama. Cevin teorem daje nam poznati uvjet za postojanje sjecišta tri pravca na kojima leže cevijane trokuta.

Prema Siebeckovom teoremu, za bilo koji trokut  $\triangle ABC$  u Euklidskoj ravnini fokusi Steinerove upisane elipse  $F'_1$  i  $F'_2$  određeni su ovim svojstvom: ako su  $A, B, C$  nultočke kubnog polinoma  $p(z)$  u kompleksnoj ravnini, onda su  $F'_1$  i  $F'_2$  nultočke prve derivacije polinoma,  $p'(z)$ .

Točku  $P$  u ravnini trokuta  $\triangle ABC$  zovemo ekvicevijanom točkom ako su dužine cevijana  $AA_p$ ,  $BB_p$  i  $CC_p$  kroz točku  $P$  jednake.

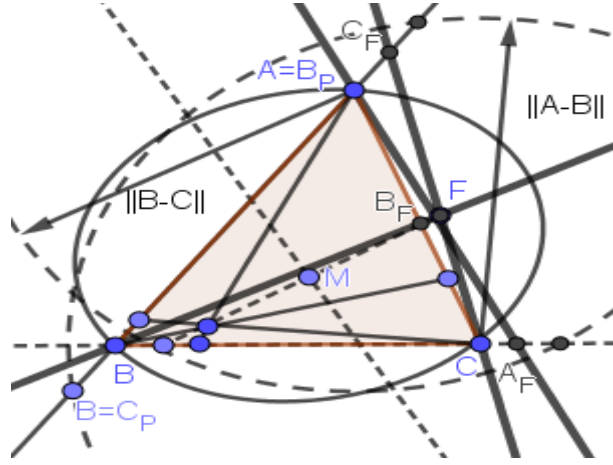
**Definicija 4.2.**(Ekvicevijane) Neka je dan trokut  $ABC$ . Točku  $P$  u ravnini trokuta  $\triangle ABC$  zovemo ekvicevijanom točkom ako duljine cevijana zadovoljavaju

$$\|A - A_p\| = \|B - B_p\| = \|C - C_p\|.$$

Ekvicevijanu točku na stranici trokuta  $\triangle ABC$  zovemo nepravom, inače pravom.

Točka  $P \neq B, C$  na stranici  $BC$  je ekvicevijana točka ako i samo ako vrijedi  $\|A - P\| = \|B - C\|$ .

Prema tome, nepravne ekvicevijane točke npr. na stranici  $BC$  su sjecišta te stranice s kružnicom polumjera duljine  $\|B - C\|$  sa središtem u vrhu  $A$ . (Slika 9.)



Slika 9.

Sljedeći teorem povezuje ekvicevijane točke trokuta s fokusima Steinerove opisane elipse.

**Teorem 4.3.** Neka je dan trokut  $\triangle ABC$ . Dvije točke fokusa Steinerove opisane elipse  $S$  su ekvicevijane točke. Duljine pripadajućih cevijana su  $\frac{3a}{2}$ , pri čemu su  $a, b$  poluosi Steinerove opisane elipse  $S$  i vrijedi  $a \geq b$ .

**Dokaz.** Koristit ćemo Kartezijev koordinatni sustav gdje će se osi apscisa i ordinata podudarati sa velikom i malom osi Steinerove opisane elipse  $S$ . Označimo s  $a$  i  $b$  poluosi elipse  $S$  pri čemu vrijedi  $a \geq b$ . Fokusi imaju koordinate  $F_{1,2} = (\pm e, 0)$ , gdje je  $e^2 = a^2 - b^2$ .

Bilo koja afina transformacija koja preslikava trokut  $\triangle ABC$  u jednakostraničan trokut ujedno preslikava elipsu  $S$  u kružnicu. Stoga, možemo izabrati koordinate

$$\begin{aligned}
 A &= (a, \cos \phi, b \sin \phi), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\
 B &= (a, \cos \phi_+, b \sin \phi_+), \quad \phi_+ := \phi + \frac{2\pi}{3}, \\
 C &= (a, \cos \phi_-, b \sin \phi_-), \quad \phi_- := \phi - \frac{2\pi}{3}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

tako da je ispunjeno  $A + B + C = 0$ , jer je težište  $M$  ishodište koordinatnog sustava.

Iz (4.1) pravac  $BC$  ima jednadžbu

$$l_a(X) := (2b \cos \phi)x + (2a \sin \phi)y + ab = 0. \tag{4.2}$$

Pretpostavimo da se taj pravac siječe sa cevijanom  $AP$  u točki  $A_P$ . Tada  $A_P$  možemo prikazati kao afinu kombinaciju  $A_P = (1 - \lambda)A + \lambda P$ , gdje parametar  $\lambda$  zadovoljava

$$l_a[(1 - \lambda)A + \lambda P] = (1 - \lambda)l_A(A) + \lambda l_A(P) = 0.$$

Kako je  $A - A_P = \lambda(A - P)$ , dobivamo

$$\|A - A_P\|^2 = \frac{l_A(A)^2}{[l_a(A) - l_A(P)]^2} \|A - P\|^2. \quad (4.3)$$

Primijetimo da je

$$l_A(A) = 2ab(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + ab$$

to jest,

$$l_A(A) = 3ab \quad (4.4)$$

što ne ovisi o  $\phi$  i  $l_A(B) = l_A(C) = 0$ .

Kada zamijenimo  $\phi$  sa  $\phi_+$  ili  $\phi_-$ , dobivamo linearne funkcije  $l_B(X)$  i  $l_C(X)$  koje određuju pravce  $AC$  i  $AB$  te također zadovoljavaju  $l_B(B) = l_C(C) = 3ab$ .

Uzmemo li sada za točku  $P$  fokus  $F = (e, 0)$ , proizlazi sljedeće

$$l_A(F) = ab + 2be \cos \phi$$

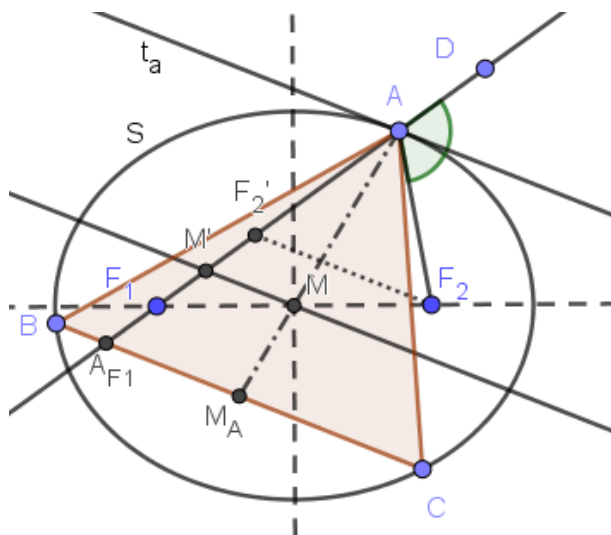
$$i \quad (4.5)$$

$$\|A - F\| = a - e \cos \phi.$$

Iz (4.3) dobivamo duljinu cevijane

$$\|A - A_F\| = \frac{3ab}{2b(a - e \cos \phi)} (a - e \cos \phi) = \frac{3a}{2}. \quad (4.6)$$

što ne ovisi o  $\phi$ . Analogno, preostale dvije cevijane  $BB_F$  i  $CC_F$  imaju jednake duljine. Budući da (4.6) također ne ovisi o  $e$ , oba fokusa  $F_1$  i  $F_2$  imaju cevijane jednakih duljina. Posljednja tvrdnja je također posljedica činjenice da je pravac  $BC$  paralelan s tangentom  $t_a$  elipse  $S$  kroz vrh  $A$  (Slika 10.), a normala na tangentu raspolavlja kut  $\angle F_1 A F_2$ .



Slika 10.

Ovime smo dokazali teorem. Istim zapisom, iz (4.5) slijedi da  $\|A-F\| + \|B-F\| + \|C-F\| = 3a$  također ne ovisi o  $\phi$ .

□

**Napomena 4.4.** Ako Kartezijeve kooordinate  $(x, y)$  vrhova trokuta zapišemo kao kompleksni broj  $x + yi$  te vrhove i dalje označavamo s  $A, B, C$ , tada fokusi  $F_1$  i  $F_2$  Steinerove opisane elipse imaju kompleksne koordinate

$$F_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}(A^2 + B^2 + C^2)}.$$

Ovo je posljedica Siebeckovog teorema. Primijetimo da je Steinerova opisana elipsa  $S$  trokuta  $\triangle ABC$  ujedno i Steinerova upisana elipsa antikomplementarnog trokuta kojeg dobijemo zrcaljenjem vrhova  $A, B, C$  preko polovišta pripadajućih suprotnih stranica.

Ovo poglavlje završit ćemo sintetičkim dokazom za Teorem 4.3., (Slika 10.). Tangenta  $t_a$  Steinerove elipse  $S$  u točki  $A$  je simetrala kuta  $\angle DAF_2$ . Zbog toga, projekcija paralelna s  $t_a$  na pravac  $AF_1$  čuva udaljenost  $AF_2$  dok se međusobno jednako udaljene točke  $F_1, M, F_2$  ponovo preslikaju u jednako udaljene točke  $F_1, M', F_2'$ . Udaljenost  $AM'$  je stoga aritmetička sredina udaljenosti  $AF_1$  i  $AF_2$  te samim time jednaka velikoj poluosi  $a$  elipse  $S$ . Dilatacija sa centrom u točki  $A$  i koeficijentom  $\frac{3}{2}$  preslikava težište trokuta  $ABC$ ,  $M$ , u polovište  $M_A$  dužine  $\overline{BC}$ , a točku  $M'$  u krajnju točku cevijane kroz  $A$  i  $F_1$ , točku  $A_{F_1}$ .

# Bibliografija

- [1] D. Kalman, *An elementary proof of Marden's theorem*, The American Mathematical Monthly 115 (8) (2008), 330. - 338., dostupno na [https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload\\_library/22/Ford/Kalman.pdf](https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Kalman.pdf) (siječanj 2022.)
- [2] D. Minda, S. Phelps, Triangles, *Ellipses and Cubic Polynomials*, The American Mathematical Monthly 115 (8) (2008), 680. - 688., dostupno na [file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/Triangles\\_Ellipses\\_and\\_Cubic\\_Polynomials.pdf](file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/Triangles_Ellipses_and_Cubic_Polynomials.pdf) (prosinac 2021.)
- [3] H. Šiljak, *Afine transformacije ravnine*, Hrvatski matematički elektronski časopis math.e, 12 (2007), dostupno na <file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/SiljakVol12.pdf> (prosinac 2021.)
- [4] J.J. O'Connor, E.F. Robertson, Jakob Steiner, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steiner/> (travanj 2022.)
- [5] M. Polonijo, D. Crnković, T. Ban Kirigin, M. Bombardelli, Z. Franušić, R. Sušanj, Euklidski prostori, dostupno na <file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/463743.FEP%20.pdf> (veljača 2022.)
- [6] S. Abu-Saymeh, M. Hajja, H. Stachel, *Equicevian points of triangle*, The American Mathematical Monthly 122 (10) (2015), 995. - 999., dostupno na <file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/Equicevianpoints.pdf> (veljača 2022.)
- [7] Steiner Ellipses, dostupno na [http://users.math.uoc.gr/pamfilos/eGallery/problems/Steiner\\_Ellipse.html](http://users.math.uoc.gr/pamfilos/eGallery/problems/Steiner_Ellipse.html) (prosinac 2021.)
- [8] Slike su rađene u programu Geogebra

# Sažetak

Afine transformacije djeluju na jednakostranični trokut i njemu opisanu odnosno upisanu kružnicu na način da jednakostranični trokut preslikaju u općeniti trokut i tom trokutu upisanu elipsu odnosno opisanu elipsu. Upravo te elipse nazivaju se Steinerovom upisanom i opisanom elipsom trokuta. Jedinstvene su sa svojstvima da upisana elipsa dodiruje stranice trokuta u njegovim polovištima, a da opisana elipsa ima središte u težištu trokuta. Nakon dokaza postojanja i jedinstvenosti Steinerovih elipsi, pokazano je da su te elipse povezane homotetijom s koeficijentom 2. Steinerova opisana elipsa ima najmanju površinu od svih opisanih elipsa, a Steinerova upisana elipsa ima najveću površinu među svim upisanim elipsama trokuta.

Nadalje, dokazan je Siebeckov teorem i njegova veza sa Steinerovim elipsama. Ako su nultočke kubnog polinoma s kompleksnim koeficijentima vrhovi trokuta u kompleksnoj ravnini, nultočke derivacije tog polinoma su fokusi Steinerove upisane elipse tog trokuta.

Fokusi Steinerove opisane elipse imaju svojstvo da su to ekvicivijane točke trokuta, što znači da su to točke koje određuju tri cevijane jednakih duljina. Ovo svojstvo dokazano je analitičkom i sintetičkom metodom u zadnjem dijelu rada.



# Summary

Affine transformations map an equilateral triangle and its incircle resp. circumcircle onto a general triangle and its inscribed ellipse resp. circumscribed ellipse. These ellipses are called Steiner's inellipse and circumellipse. They are unique with the property that the inellipse is tangent to the sides at their midpoints, and that the circumellipse is centered at the center of gravity of the triangle. After establishing the existence and uniqueness of Steiner's ellipses, it is shown that these ellipses are related by a homothety with coefficient 2. Steiner's circumellipse has the smallest area of all circumscribed ellipses, and the Steiner inellipse has the largest area among all inscribed ellipses.

Furthermore, Siebeck's theorem and its connection with Steiner ellipses is proven. If zeros of a cubic polynomial with complex coefficients determine the vertices of a triangle in the complex plane, zeros of the derivative of that polynomial are the foci of Steiner's inellipse to that triangle.

The foci of Steiner's circumellipse have the property that they are equicevian points of a triangle, which means that these are the points defining three cevians of equal length. This property is proven by analytical and synthetic methods in the last part of the paper.

# Životopis

Zovem se Lucija Fabijanec. Rođena sam 14. lipnja 1995. godine u Zagrebu. Završila sam Osnovnu školu Kustošija te 2010. godine upisala V. gimnaziju u Zagrebu. Nakon završetka srednje škole, 2014. godine upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu, Pred-diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Preddiplomski studij završila sam 2018. godine te iste godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.