SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Šainović

LOV NA MEDVJEDE NA ROTACIJSKIM PLOHAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Tomislav Došlić

Zagreb, travanj 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Tomislavu Došliću na uloženom vremenu, strpljenju i pomoći pri izradi ovog rada.

Zahvaljujem svojoj obitelji i Luki koji su mi bili bezuvjetna podrška tijekom cijelog studija, a posebice na njihovom strpljenju tijekom pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

> *"What is mathematics? It is only a systematic effort of solving puzzles posed by nature."*
>
> — Shakuntala Devi

U današnjem se društvu teški zahtjevi stavljaju pred pojedince, koji se suočavaju s problemima u mnogim aspektima svog života. Da bi uspješno odgovorili na zahtjeve i pristupili problemima, pojedinci bi trebali usvojiti ključne životne kompetencije, među kojima je i matematička kompetencija. Radi se o sposobnosti razvoja i primjene matematičkog mišljenja kako bi se riješio niz problema u svakodnevnim situacijama.

Iako mnogi ljudi zauzimaju stav da se matematika niti matematičko mišljenje ne primjenjuju niti mogu primijeniti u svakodnevnom životu, s druge strane nalaze se ljudi koji iznimno cijene matematičke kompetencije. Jedan od njih je i Elon Musk, jedan od utjecajnijih ljudi današnjice, koji navodno na razgovoru za posao ispitaniku postavlja inačicu jednog poznatog zadatka.

Zadatak glasi: "Lovac kreće iz svog šatora i hoda 10 km prema jugu. Nakon toga skreće i hoda 10 km prema zapadu. Onda skreće prema sjeveru i hoda 10 km. Nakon prehodanih 30 km nalazi se na mjestu s kojeg je krenuo, pred svojim šatorom, no ne može ući jer je unutra medvjed. Koje je boje medvjed?"

Svi znamo rješenje ovog zadatka - medvjed je bijele boje, jer se lovac nalazi na Sjevernom polu. No, ukoliko bi ispitanik odgovorio da je početno mjesto lovca Sjeverni pol, dočekalo bi ga pitanje: „I od kuda još lovac može krenuti?". Ovim zadnjim pitanjem bavim se u ovom diplomskom radu.

Naš planet Zemlja izgledom nas podsjeća na kuglu, iako ne skroz pravilnu, no njezina se površina može aproksimirati sferom. U tom je slučaju zapravo zadatak pronaći sve točke na sferi s kojih se može krenuti i hodati određenu udaljenost prema jugu, zatim istu udaljenost prema zapadu te prema sjeveru i doći u istu točku. Takvih točaka na sferi ima beskonačno mnogo.

U prvom poglavlju opisani su osnovni pojmovi sferne geometrije te su navedeni osnovni teoremi i definicije toga područja. U drugom su poglavlju opisana rješenja navedenog zadatka, prvo na sferi, a zatim i na kružnom valjku i kružnom stošcu. Na samom kraju drugog poglavlja navedena su zapažanja o postojanju takvih točaka na općenitoj rotacijskoj plohi.

Poglavlje 1

Sferna geometrija

1.1 Sfera

Definicija 1.1.1. ***Sfera*** *je skup svih točaka prostora koje su na jednakoj euklidskoj udaljenosti od čvrste točke O koja se zove* ***središte*** *ili* ***centar sfere****, a ta udaljenost R naziva se* ***polumjer sfere****.*
Dakle, sfera je skup

$$S^2(O;R) = \{T \in R^3 | d(O,T) = R\}.$$

Sfera s centrom u ishodištu O koordinatnog sustava i jediničnim polumjerom zove se **standardna sfera** i bilježi sa S^2. Dakle $S^2 = S^2(O;1)$. Svaka sfera je rubna ploha kugle. Ima polumjer i središte koji se poklapaju s polumjerom i središtem pripadne kugle.

Teorem 1.1.2. *Svaki presjek sfere s ravninom je ili kružnica ili prazan skup.*

Dakako, presjek sfere i ravnine može biti i točka, no točku možemo smatrati kružnicom polumjera 0.

Korolar 1.1.3. *Ako ravnina koja presjeca sferu prolazi središtem, tada je presjek sfere i ravnine kružnica čiji je polumjer jednak polumjeru sfere.*

Definicija 1.1.4. *Ravnina koja siječe sferu u kružnici koja ima jednak polumjer kao i sfera naziva se* ***glavna kružnica*** *ili* ***ortodroma*** *sfere. Sve ostale kružnice nastale presjecanjem sfere i ravnine nazivaju se* ***sporedne kružnice*** *sfere.*

Definicija 1.1.5. ***Antipodalne točke*** *sfere su točke koje su jedna drugoj centralno simetrične s obzirom na središte sfere.*

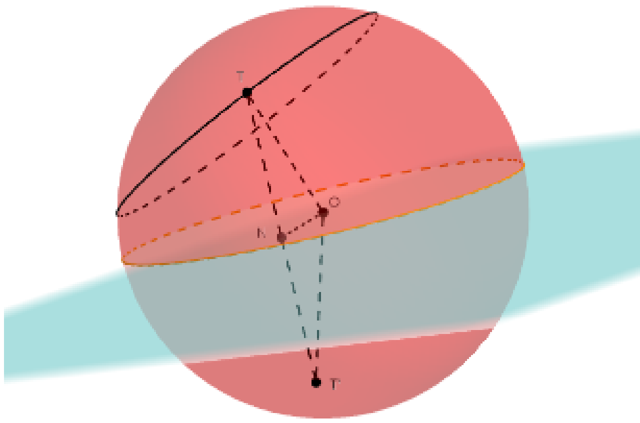
Najpoznatiji primjer glavnih kružnica na kugli zemaljskoj su ekvator i meridijani, dok su najpoznatije antipodalne točke sjeverni i južni pol. Kružnice paralelne s ekvatorom nazivamo paralele. Sve paralele osim ekvatora su sporedne kružnice.

Korolar 1.1.6. *Dvije glavne kružnice sfere uvijek se međusobno raspolavljaju.*

Dokaz. Neka su Π_1 i Π_2 ravnine u kojima leže zadane glavne kružnice. Znamo da je presjek tih dviju ravnina pravac. Budući da obje zadane ravnine prolaze središtem sfere, pravac presjeka ravnina sadrži jedan promjer sfere. Krajnje točke svakog promjera rapolavljaju kružnicu, pa krajnje točke promjera na presjeku ravnina također pripadaju glavnim kružnicama i raspolavljaju ih. □

Propozicija 1.1.7. *Svaka glavna kružnica sfere raspolavlja sferu.*

Dokaz. Neka je R polumjer sfere, a Π ravnina kojoj pripada zadana glavna kružnica. Po definiciji, ravnina Π prolazi središtem sfere. Neka je T proizvoljna točka sfere, a T' njezina osnosimetrična slika s obzirom na Π, te neka je N nožište okomice iz T na Π. Promotrimo sliku 1.1.



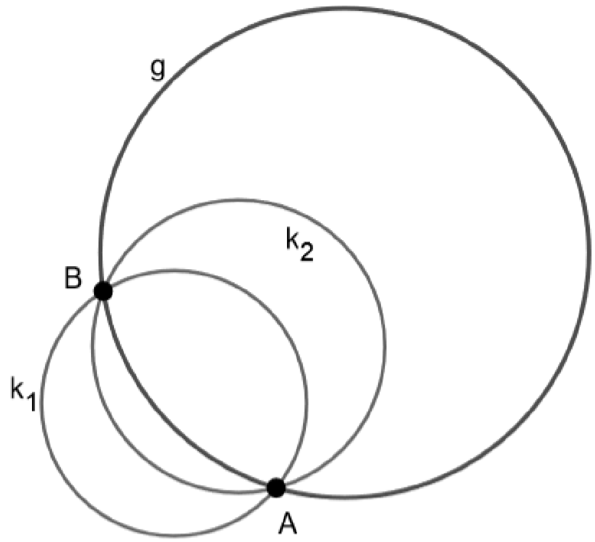
Slika 1.1: Glavna kružnica sfere raspolavlja sferu

Trokuti $\triangle NOT$ i $\triangle NOT'$ imaju zajedničku stranicu $\overline{ON}$, kutovi $\angle ONT$ i $\angle ONT'$ su pravi, a stranice $\overline{NT}$ i $\overline{NT'}$ su sukladne. Prema tome, navedeni trokuti su sukladni po $S-K-S$ poučku o sukladnosti te vrijedi $|OT| = |OT'| = R$. Dakle, točka T' nalazi se na sferi, i vidljiva je bijekcija dijelova sfere koje dobivamo presijecanjem ravninom Π. Prema tome, ravnina Π raspolavlja sferu.

□

1.2 Sferna udaljenost

Kroz dvije točke A i B na sferi koje nisu antipodalne prolazi beskonačno mnogo sporednih kružnica, no samo jedna glavna kružnica. Neka su k_1 i k_2 dvije sporedne kružnice kroz A i B, te g glavna kružnica kroz A i B (slika 1.2).

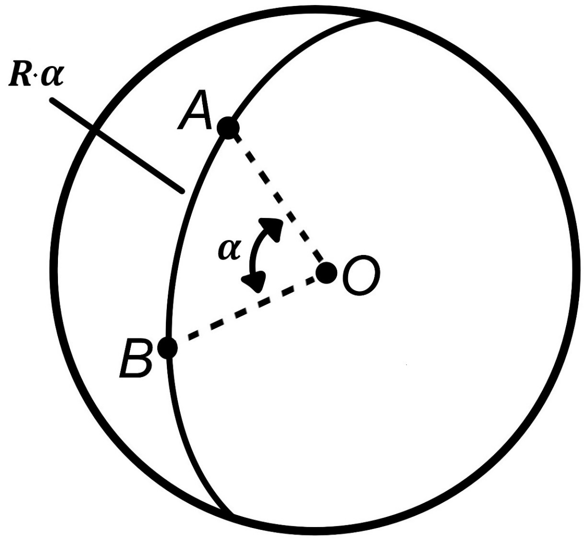


Slika 1.2: Glavna i sporedne kružnice kroz točke A i B

Glavna kružnica ima najveći polumjer, pa tako i najmanju zakrivljenost. Usporedimo li veličine lukova $\overset{\frown}{AB}$ malih kružnica k_1 i k_2 s istim lukom kružnice g, vidimo da je luk $\overset{\frown}{AB}$ kružnice g najkraća spojnica tih dviju točaka na sferi (slika 1.2), pa nju uzimamo kao udaljenost tih dviju točaka.

Definicija 1.2.1. *Neka su dane dvije točke na sferi.* ***Sferna udaljenost*** *tih dviju točaka je duljina manjeg luka između tih točaka koji pripada glavnoj kružnici sfere koju zadane dvije točke određuju.*

Sfernu udaljenost dviju točaka možemo izraziti mjerom za duljinu ili mjerom za kut (slika 1.3).
Kutna mjera sferne udaljenosti je kut između polumjera $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ mjeren u središtu kugle. Tim kutom sferna udaljenost je jednoznačno određena. **Dužinska mjera** sferne udaljenosti je duljina luka velike kružnice između točaka A i B, a označava se s $\overset{\frown}{AB} = R \cdot \alpha$. Dužinska i kutna mjera su ravnopravne, iako se u sfernoj geometriji uobičajno upotrebljava kutna mjera.



Slika 1.3: Sferna udaljenost

1.3 Sferni koordinatni sustav

Neka je zadan pravokutni koordinatni sustav $(O; x, y, z)$. Sferni koordinatni sustav $(O; r, \theta, \varphi)$ uvodimo tako da središte O sfernog sustava postavimo u središte O pravokutnog koordinatnog sustava (slika 1.4).

Tada r predstavlja udaljenost zadane točke od ishodišta O koordinatnog sustava, θ predstavlja kut između pozitivnog dijela z-osi i pravca koji spaja ishodište i zadanu točku, a φ predstavlja kut između projekcije pravca koji spaja zadanu točku s ishodištem na xy-ravninu, i pozitivnog dijela x-osi. Veza između pravokutnih i polarnih koordinata dana je sljedećim izrazima:

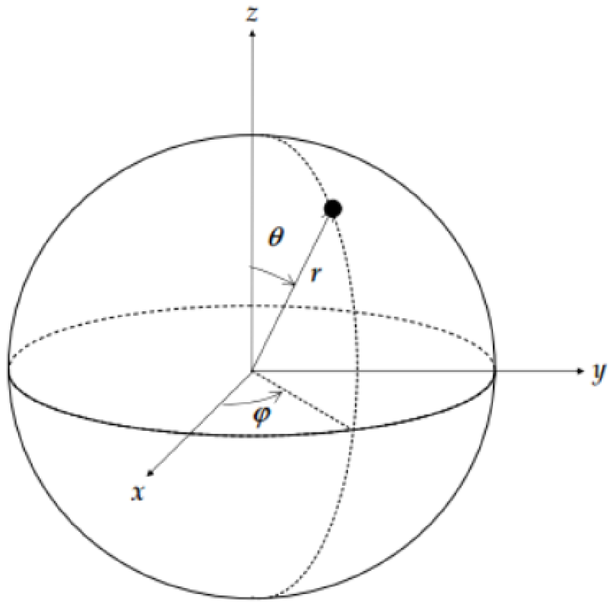
$$x(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z(r, \theta, \varphi) = r \cos\theta$$

Prethodne izraze koristimo za prelazak iz sfernih u pravokutne koordinate, a sljedeće za prelazak iz pravokutnih u sferne koordinate:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$



Slika 1.4: Veza sfernog i Kartezijevog koordinatnog sustava

Ako promatramo točku na Zemljinoj površini, r će predstavljati udaljenost te točke od središta Zemlje, φ će predstavljati zemljopisnu dužinu, koju mjerimo istočno, odnosno zapadno od nultog meridijana Greenwicha, a pomoću kuta θ lako možemo doći do zemljopisne širine, koju mjerimo sjeverno, odnosno južno od ekvatora. Naime, zemljopisna širina i dužina obično se označavaju u stupnjevima, minutama i sekundama. Tako ćemo, ukoliko se nalazimo na sjevernoj polutki, zemljopisnu širinu dobiti oduzimanjem kuta θ od 90°, a ako se nalazimo na južnoj polutki, dobit ćemo ju oduzimanjem 90°od kuta θ.

1.4 Sferni trokut

Definicija 1.4.1. *Sferni trokut je dio sfere određen s tri točke na sferi od kojih nikoje dvije nisu dijametralne. Omeđen je s tri luka glavnih kružnica.*

Dakle, njegove stranice su lukovi, a njihove duljine jednake su veličinama pripadajućih kutova. Tri točke na sferi određuju dva različita sferna trokuta, no podrazumijevamo da se radi o onom trokutu koji je manji od polovine sfere.

Definicija 1.4.2. ***Kut sfernog trokuta*** *je kut između tangenata glavnih kružnica stranica trokuta, koje se sastaju u vrhu kuta.*

Definicija 1.4.3. ***Sferna kružnica*** *je svaka sporedna kružnica sfere.* ***Sferno središte*** *jest ona točka sfere koja je jednako udaljena od svih točaka te kružnice. Sferno središte neke glavne kružnice je također točka sfere koja je jednako udaljena od svih točaka te kružnice. Takve točke se još zovu i* **polovi** *glavne kružnice. Svaka glavna kružnica ima dva pola i njihova je polara.*

Definicija 1.4.4. *Neka je ABC sferni trokut, A', B', C' redom polovi stranica $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ i $\overset{\frown}{AB}$ takvi da su A i A' na istoj strani glavne kružnice kroz $\overset{\frown}{BC}$, B i B' na istoj strani glavne kružnice kroz $\overset{\frown}{CA}$, a C i C' na istoj strani od $\overset{\frown}{AB}$. Tada $A'B'C'$ nazivamo* ***polarnim trokutom*** *od ABC.*

Teorem 1.4.5. *Zbroj duljina stranica sfernog trokuta manji je od 2π.*

Teorem 1.4.6. *U dva međusobna polarna trokuta svaki kut jednog trokuta suplementaran je duljini stranice drugog trokuta koja je nasuprotna odgovarajućem vrhu.*

Teorem 1.4.7. *U svakom sfernom trokutu zbroj veličina kutova veći je od π i manji od 3π.*

Dokaz. Neka su α, β, γ kutovi sfernog trokuta te a', b', c' nasuprotne stranice polarnog trokuta. Tada po teoremu 1.4.6 vrijedi:

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = \pi.$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$\alpha + \beta + \gamma + a' + b' + c' = 3\pi,$$

pa iz toga možemo zaključiti da je

$$\alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Po teoremu 1.4.5 vrijedi

$$a' + b' + c' < 2\pi,$$

pa slijedi da je

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

□

Poglavlje 2

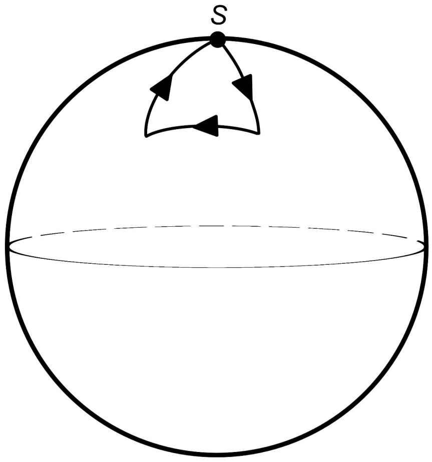
Rješenja na različitim rotacijskim plohama

Ponovimo još jednom zadatak: ”Lovac kreće iz svog šatora i hoda 10 km prema jugu. Nakon toga skreće i hoda 10 km prema zapadu. Onda skreće prema sjeveru i hoda 10 km. Nakon prehodanih 30 km nalazi se na mjestu s kojeg je krenuo, pred svojim šatorom, no ne može ući jer je unutra medvjed. Koje je boje medvjed?”
Svi bismo pomislili - medvjed je bijele boje, jer se nalazi na Sjevernom polu. No, to nije jedina točka na Zemlji s ovim svojstvom - njih ima beskonačno mnogo. U ovom dijelu rada tražimo sve točke s tim svojstvom na različitim rotacijskim plohama. Nema ništa posebno ni u udaljenosti od 10 km - rješenja postoje i za druge udaljenosti α.

2.1 Sfera

Trivijalno rješenje

Trivijalno rješenje je dakako Sjeverni pol (slika 2.1). Naime, kamo god krenuli iz Sjevernog pola, krenuli smo na jug. Kada lovac promijeni smjer kretanja prema zapadu, kreće se okomito od smjera prema jugu, što znači da je skrenuo za 90°. Analogno, kada promijeni smjer kretanja od zapada prema sjeveru, također se zakrenuo za 90°. Budući da se radi o istim udaljenostima od 10 km, trokut je jednakostraničan, pa su mu i kutovi jednaki. To znači da sferni trokut kojeg je propješačio lovac ima tri prava kuta.



Slika 2.1: Trivijalno rješenje

Netrivijalna rješenja

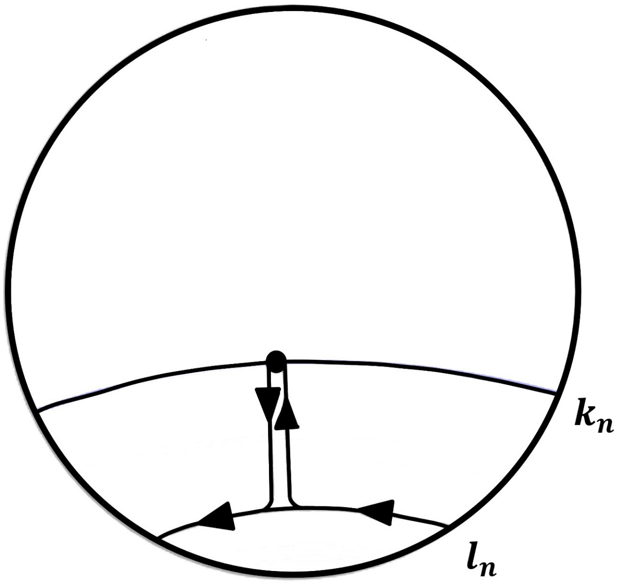
Na sferi imamo beskonačno mnogo takvih točaka koje opisuju kretanja u zadatku. Neka je α udaljenost koju lovac treba prijeći u jednom smjeru.
Zamislimo kružnicu l_1 paralelnu ekvatoru kojoj je opseg α. Tada početna pozicija lovca može biti bilo koja točka na kružnici k_1 koja je također paralelna ekvatoru, a nalazi se na sfernoj udaljenosti α sjeverno od kružnice l_1.
Također, neka je kružnica l_2 paralelna ekvatoru kojoj je opseg $\frac{\alpha}{2}$. Tada početna pozicija lovca može biti bilo koja točka na kružnici k_2 koja je također paralelna ekvatoru, a nalazi se na sfernoj udaljenosti α sjeverno od kružnice l_2, jer se lovac kreće α prema jugu, dolazi do kružnice l_2 koju obilazi dvaput (odnosno prelazi udaljenost $2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$) te se istim putem vraća sjeverno do kružnice k_2. Analogno, ako je l_n kružnica paralelna s ekvatorom opsega $\frac{\alpha}{n}$, rješenja su tada sve točke koje se nalaze na kružnici k_n paralelnoj s ekvatorom, a udaljenoj od kružnice l_n za α (slika 2.2)

Opišimo sada te kružnice.

Želimo naći sve točke

$$T = (x, y, z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

na jediničnoj sferi koje zadovoljavaju zadatak. Budući da se takve točke nalaze na paraleli (kružnici paralelnoj s ekvatorom), znamo da $\varphi \in [-\pi, \pi]$.



Slika 2.2: Opće rješenje zadatka na sferi

Tada tražimo sve θ za koje vrijedi zadatak.
Presječemo li sferu ravninom koja sadrži točke A, B i O, dobivamo glavnu kružnicu sfere (slika 2.3).
Neka je α udaljenost koju lovac treba prijeći u jednom smjeru, $\alpha \in [0, \pi]$, a $n \in N$.
Neka je l_n paralela kojoj je opseg $O_{l_n} = \frac{\alpha}{n}$ i točka $A \in l_n$. Tada je radijus kružnice l_n jednak

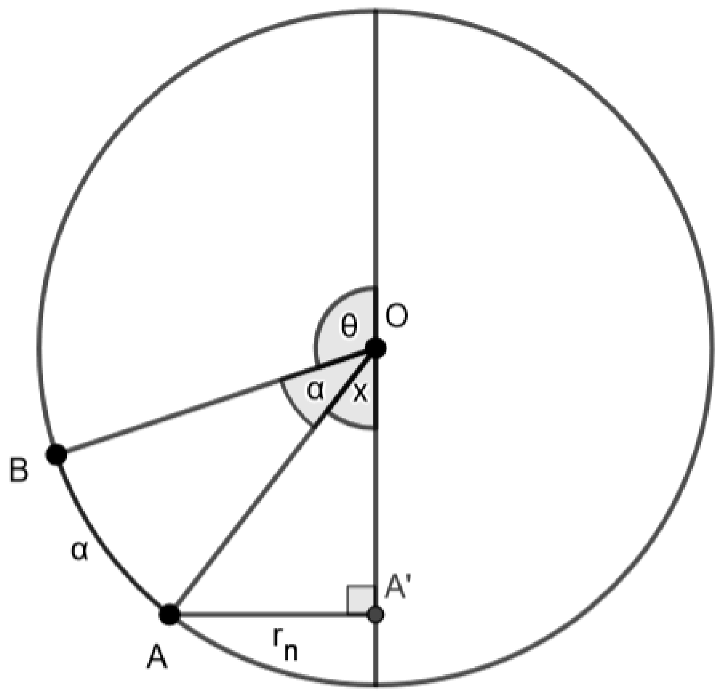
$$r_n = \frac{\alpha}{2n\pi}. \tag{2.1}$$

Neka je k_n paralela i točka $B \in k_n$ takva da je $\overset{\frown}{AB} = \alpha$.
Na slici 2.3 nalazi se presjek sfere po glavnoj kružnici koja sadrži točke A i B.
Iz $\Delta AA'O$ i dobivenog radijusa (2.1) slijedi

$$\sin x = \frac{r_n}{1} = \frac{\alpha}{2n\pi}. \tag{2.2}$$

Također, $\theta + \alpha + x = \pi$, odnosno

$$x = \pi - \theta - \alpha. \tag{2.3}$$



Slika 2.3: Glavna kružnica kroz točke A i B

Iz (2.2) i (2.3) dobivamo

$$\sin(\pi - \theta - \alpha) = \frac{\alpha}{2n\pi}. \tag{2.4}$$

Na cijelu jednakost djelujemo funkcijom arcsin i dobivamo

$$\pi - \theta - \alpha = \arcsin\left(\frac{\alpha}{2n\pi}\right), \tag{2.5}$$

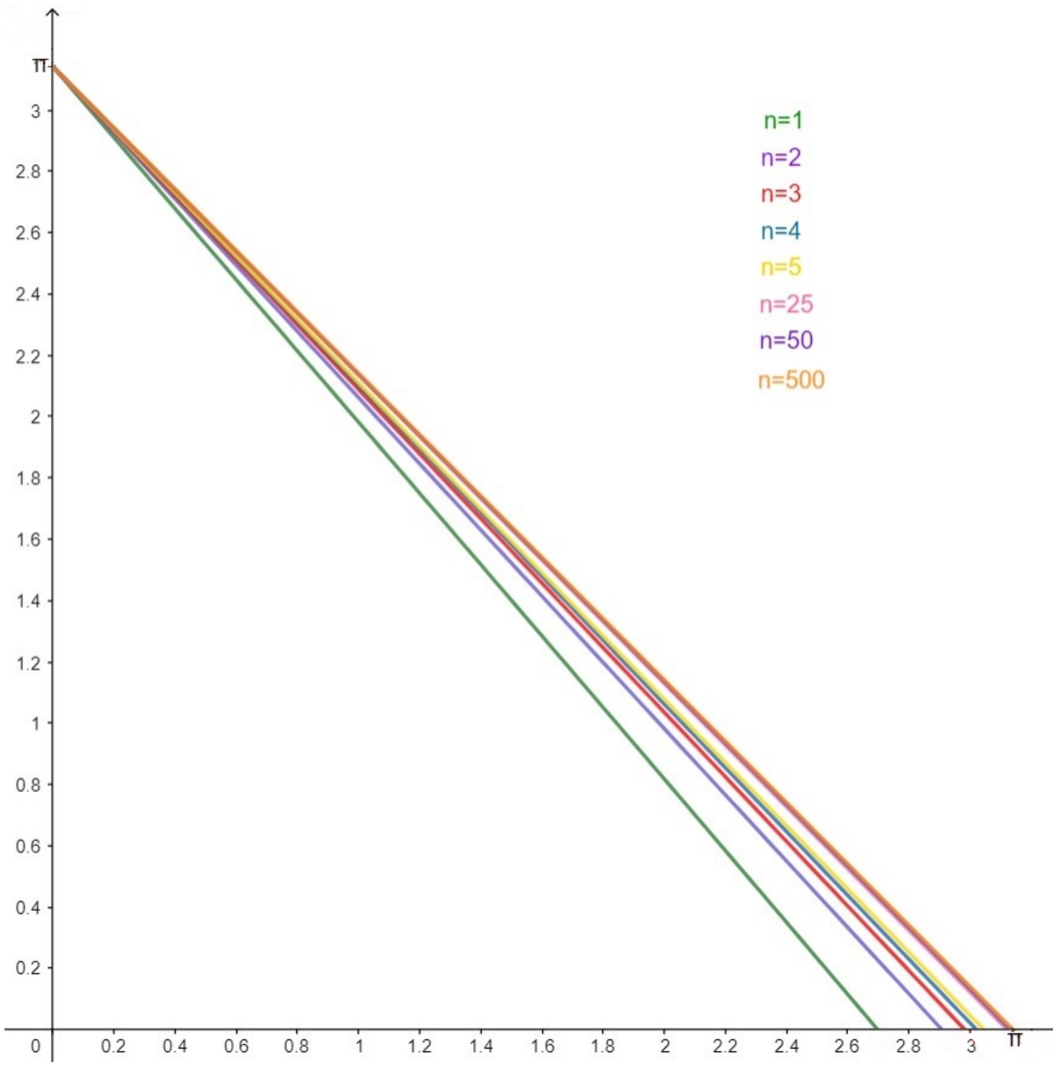
odnosno, nakon sređivanja

$$\theta = \pi - \alpha - \arcsin\left(\frac{\alpha}{2n\pi}\right). \tag{2.6}$$

Dobili smo vrijednosti svih θ koji ovise o α. Dakle, tu ovisnost gledamo kao funkciju

$$\theta(\alpha) = \pi - \alpha - \arcsin\left(\frac{\alpha}{2n\pi}\right). \tag{2.7}$$

Uvrstimo li u $\theta(\alpha)$ različite vrijednosti prirodnog broja n, dobivamo familiju skupova rješenja zadatka, prikazanu na slici 2.4. Funkcija $\theta(\alpha)$ konvergira u pravac $\pi - \alpha$ kada n konvergira u 0.



Slika 2.4: Graf funkcije $\theta(\alpha)$

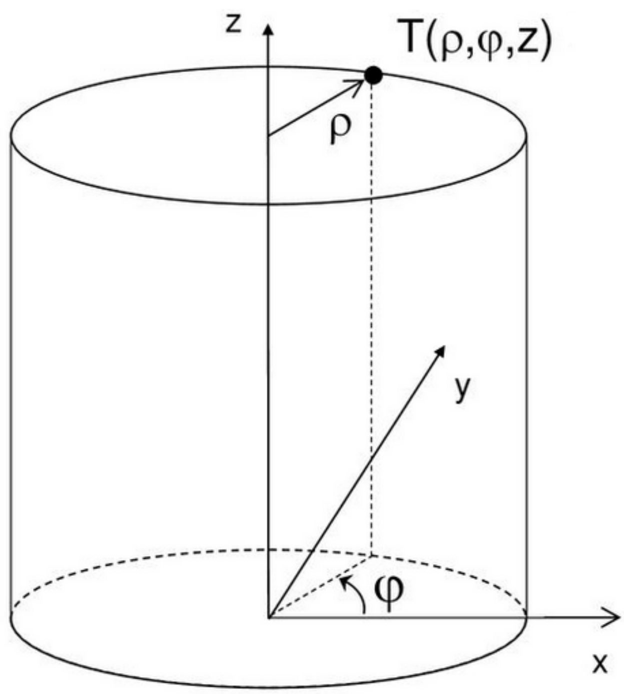
2.2 Kružni valjak

Ako svakom točkom ravninske krivulje povučemo pravac paralelan s nekim pravcem prostora, dobit ćemo skup točaka koji zovemo valjkastom ili cilindričnom plohom. Ti se pravci zovu *izvodnice valjkaste plohe*, a krivulja njezinom *ravnalicom* ili *direktrisom*.
Ploha kojoj je direktrisa kružnica $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ u xy-ravnini, a izvodnice paralelne s osi z naziva se **kružni valjak**.

Uvedimo za početak cilindrički koordinatni sustav.

Cilindrički koordinatni sustav

Neka je zadan pravokutni koordinatni sustav $(O; x, y, z)$. Cilindrički koordinatni sustav $(O; \rho, \varphi, z)$ uvodimo tako da središte O cilindričkog sustava postavimo u središte O pravokutnog koordinatnog sustava (slika 2.5).



Slika 2.5: Veza cilindričnog i Kartezijevog koordinatnog sustava

Tada ρ predstavlja euklidsku udaljenost zadane točke od z-osi O koordinatnog sustava, φ predstavlja kut kojeg projekcija pravca koji spaja zadanu točku s ishodištem na xy-ravninu zatvara s pozitivnim dijelom x-osi, a z je euklidska udaljenost točke od njezine projekcije na xy-ravninu.

Veza između pravokutnih i cilindričkih koordinata dana je sljedećim izrazima:

$$x(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi$$
$$y(\rho, \varphi, z) = \rho \sin \varphi$$
$$z(\rho, \varphi, z) = z$$

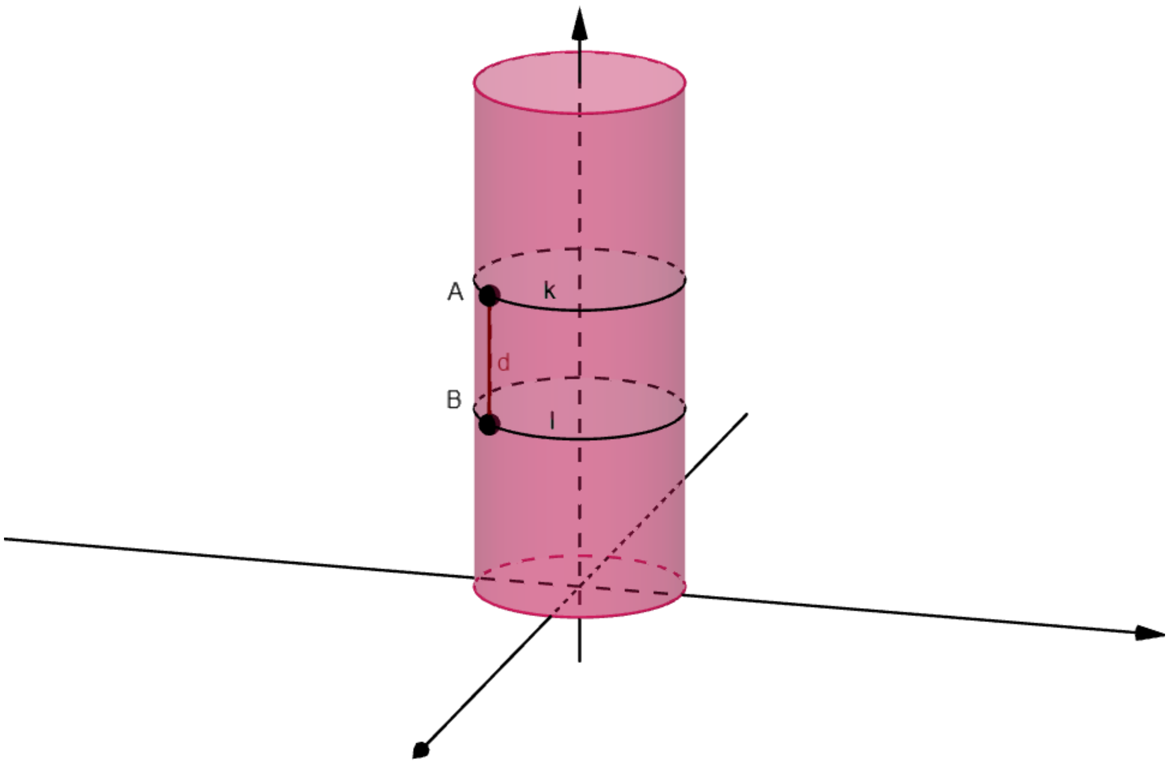
Za prelazak iz pravokutnih u cilindričke koordinate koristimo sljedeće izraze:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Rješenje zadatka za kružni valjak

Kružni je valjak u cilindričkom koordinatnom sustavu dan kao $\rho = R$, gdje je R radijus valjka.
Neka je d prijeđena udaljenost iz danog zadatka, te neka su kružnice k i l dobivene presjekom valjka i ravnina paralelnih xy-ravnini. Neka je B proizvoljna točka na kružnici l i A točka na kružnici k tako da se A i B nalaze na istoj izvodnici valjka. Neka je udaljenost točaka A i B jednaka d (slika 2.6).
Opseg valjka, kao i kružnica k i l je konstantan i iznosi $O = 2R\pi$.
Budući da je opseg valjka konstantan, ako uzmemo u obzir da valjak smijemo obići više puta, problem ima smisla promatrati samo za one udaljenosti d koje su jednake cjelobrojnom višekratniku opsega valjka, odnosno

$$d = 2nR\pi, \quad n \in N$$

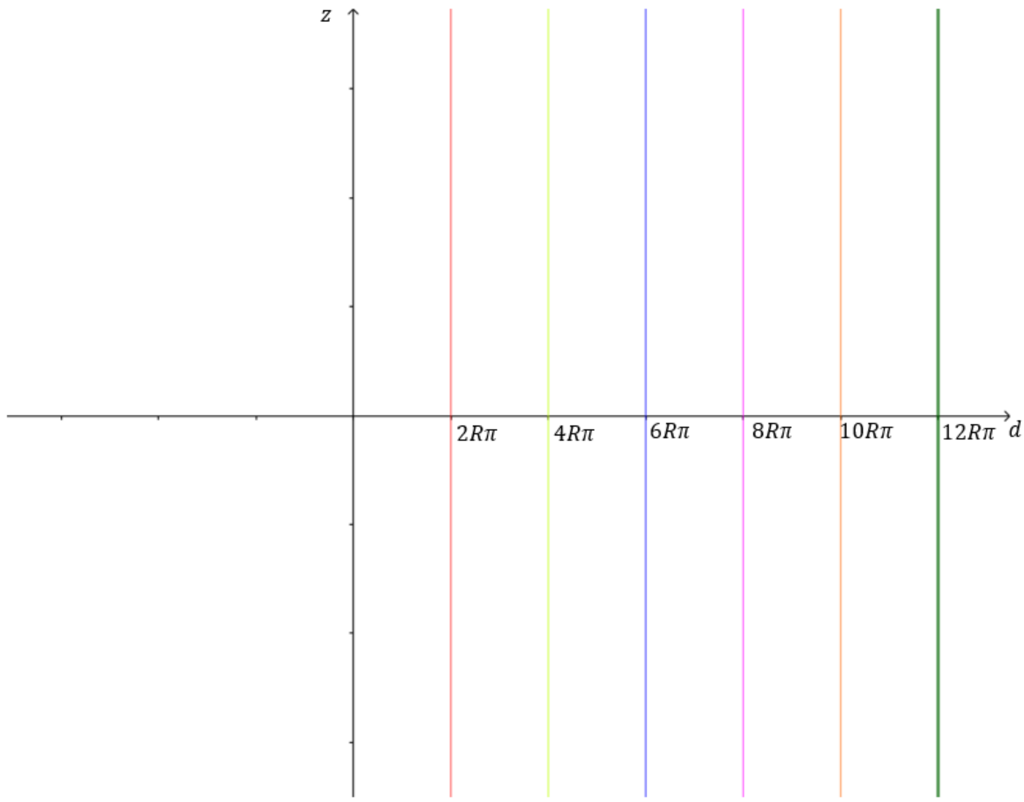


Slika 2.6: Kružni valjak

Želimo naći sve točke

$$A = (x, y, z) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z)$$

za koje vrijede uvjeti zadatka. Za sve točke na kružnom valjku vrijedi $\rho = R$, a budući da se svaka točka nalazi na kružnici nastaloj kao presjek valjka i ravnine paralelne xy-ravnini, vrijedi $\varphi \in [-\pi, \pi]$.
Tada tražimo sve uređene parove (d, z) za koje vrijede uvjeti zadatka.
Budući da je $d = 2nR\pi$, udaljenost koju bi trebalo preći ne ovisi o z.
U koordinatnom sustavu, traženi parovi bit će vertikalni pravci za različite vrijednosti n (slika 2.7).



Slika 2.7: Grafički prikaz rješenja za kružni valjak

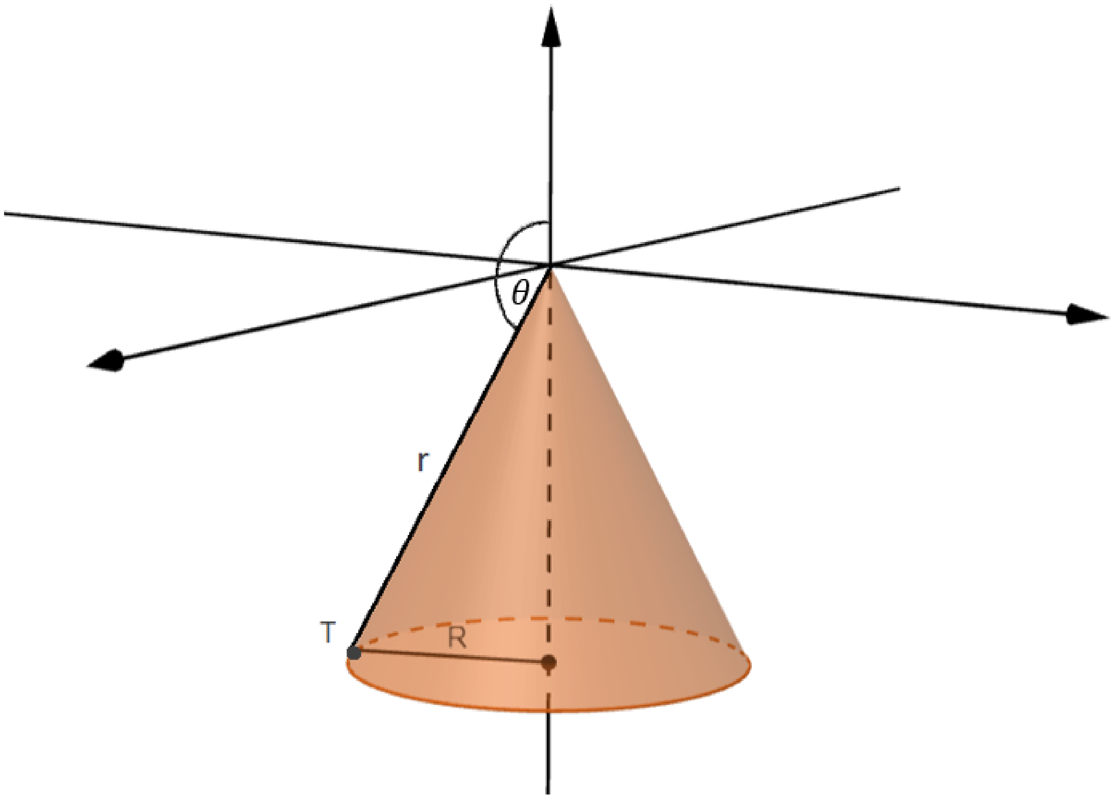
2.3 Kružni stožac

Ako svakom točkom ravninske krivulje povučemo pravce tako da se oni sijeku u jednoj fiksnoj točki prostora, dobit ćemo skup točaka kojeg nazivamo **stožasta** ili **konusna ploha.** Fiksna točka zove se *vrh stožaste plohe*, pravce nazivamo *izvodnicama stožaste plohe,* a zadanu ravninsku krivulju *ravnalica* ili *direktrisa stožaste plohe.*
Stožasta se ploha sastoji od dvaju dijelova spojenih vrhom, *plašta* koji tvore zrake s jedne strane vrha i plašta koji tvore zrake s druge strane vrha.

Ploha kojoj je direktrisa kružnica $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ u xy-ravnini, a izvodnice se sijeku u točki kojoj ortogonalna projekcija pada u središte direktrise, naziva se **uspravni kružni stožac**.

Rješenje zadatka za kružni stožac

Promotrimo dio kružnog stošca u sfernom koordinatnom sustavu koji se nalazi ispod xy-ravnine. Vrh stošca V postavljen je u ishodište koordinatnog sustava O.



Slika 2.8: Promatrani dio stošca u sfernom koordinatnom sustavu

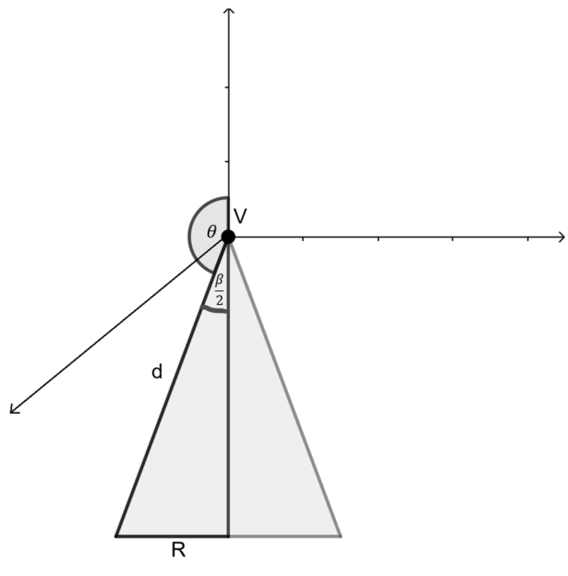
Tada je proizvoljna točka na stošcu dana s

$$T(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

Tada je r udaljenost točke od ishodišta koordinatnog sustava, θ je kut kojeg z-os zatvara s pravcem koji spaja ishodište i gledanu točku, a φ predstavlja kut između projekcije pravca koji spaja gledanu točku s ishodištem na xy-ravninu, i pozitivnog dijela x-osi (slika 2.8).

Označimo kut pri vrhu stošca s β. Neka je d udaljenost koja odgovara uvjetima zadatka. Pomaknemo li se iz vrha stošca duž izvodnice za d, doći ćemo do paralele čiji opseg mora biti jednak cjelobrojnom višekratniku dužine d.
Ukoliko krenemo s proizvoljne točke stošca, vrijedi sljedeće: slično kao i na sferi, zamislimo kružnicu l dobivenu presjekom stošca i ravnine paralelne bazi, kojoj je opseg jednak cjelobrojnom višekratniku dužine d. Tada se rješenja nalaze na kružnici k koja se nalazi sjeverno od kružnice l na udaljenosti d, a koja se također nalazi na ravnini paralelnoj bazi stošca.

Ukoliko je kut pri vrhu stošca β prevelik, tada ćemo, spuštajući se po nekoj izvodnici stošca za d naići na paralelu prevelikog opsega, većeg od d. Dakle, postojanje rješenja na kružnom stošcu ovisi o kutu β pri vrhu stošca, odnosno kutu θ. Da bismo uvidjeli postojanje rješenja, moramo pronaći sve θ za koje možemo krenuti iz vrha V i obaviti uvjete zadatka.



Slika 2.9: Osni presjek stošca

Neka je k kružnica paralelna s bazom stošca na udaljenosti d od vrha V. Polumjer kružnice k označimo s R, kao na slici 2.9. Tada rješenje postoji ukoliko je zadana udaljenost d cjelobrojni višekratnik opsega kružnice k, odnosno ako je $d = n \cdot O_k$. Budući da je $O_k = 2R\pi$, vrijedi

$$d = n \cdot 2R\pi. \tag{2.8}$$

Iz osnog presjeka stošca (slika 2.9) vidimo da vrijedi

$$R = d \cdot \sin\frac{\beta}{2}, \tag{2.9}$$

pa iz 2.8 i 2.9 slijedi

$$d = n \cdot 2 \cdot d \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \pi,$$

odnosno, nakon sređivanja

$$\begin{aligned} 1 &= 2n\pi \cdot \sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} &= \frac{1}{2n\pi} \\ \frac{\beta}{2} &= \arcsin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \\ \beta &= 2\arcsin\left(\frac{1}{2n\pi}\right). \end{aligned}$$

Za rubni slučaj $n = 1$ kut pri vrhu iznosi $\beta \approx 18°9'29''$.

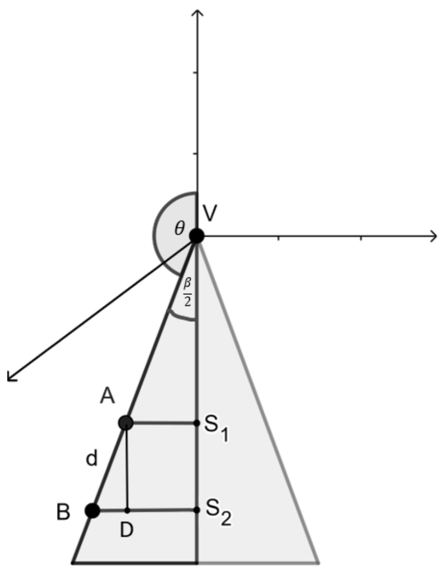
Dakle, za kut pri vrhu stošca $\beta \geq 2\arcsin\left(\frac{1}{2\pi}\right)$ problem nema netrivijalnih rješenja na stošcu. Ako želimo imati netrivijalna rješenja iz vrha, kut β mora biti manji od $2\arcsin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$, odnosno u vidu sfernih koordinata, budući da je $\frac{\beta}{2} = \pi - \theta$ (po slici 2.9), uvjet da postoje netrivijalna rješenja je

$$\theta > \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2n\pi}\right). \tag{2.10}$$

Netrivijalna rješenja

Neka je $\theta > \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$.
Tada zadatak na stošcu ima konačno mnogo rješenja, koja su točke oblika (d, z). Izračunajmo z za zadanu udaljenost d.

Promotrimo osni presjek stošca (slika 2.10).



Slika 2.10: Osni presjek stošca

Iz skice vrijedi:
A je početna točka, B se nalazi na paraleli čiji je opseg jednak višekratniku dužine d, $\overline{AB} = d$. Točke S_1 i S_2 su redom ordinate točaka A i B, a točka D je visina iz A na $\overline{BS_2}$.
$|AV| = r$ je udaljenost početne točke od ishodišta,
$|VS_1| = z$ je ordinata točke A,
$|BS_2| = R$ je radijus kružnice kojoj je opseg jednak višekratniku dužine d.
Kutovi $\angle BAD$ i $\angle AVS_1$ su kutovi uz presječnicu, pa su isti i iznose $\frac{\beta}{2}$.

Iz $\triangle AS_1V$ vrijedi:

$$|AS_1| = z \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right). \tag{2.11}$$

Iz $\triangle BDA$ vrijedi:

$$|AD| = d \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \tag{2.12}$$

$$|AD| = |S_1S_2|. \tag{2.13}$$

Sada iz osjenčanog trokuta, koristeći 2.11, 2.12 i 2.13 vrijedi:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R}{z + d \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$z + d \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot R$$

$$z = \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot R - d \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Naposlijetku, koristeći $R = \frac{d}{2n\pi}$, dobivamo

$$z = d \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2n\pi} - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right). \tag{2.14}$$

Koristeći termine sfernih koordinata, dobili smo

$$z = d \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \theta)\left(\frac{1}{2n\pi} - \sin(\pi - \theta)\right), \tag{2.15}$$

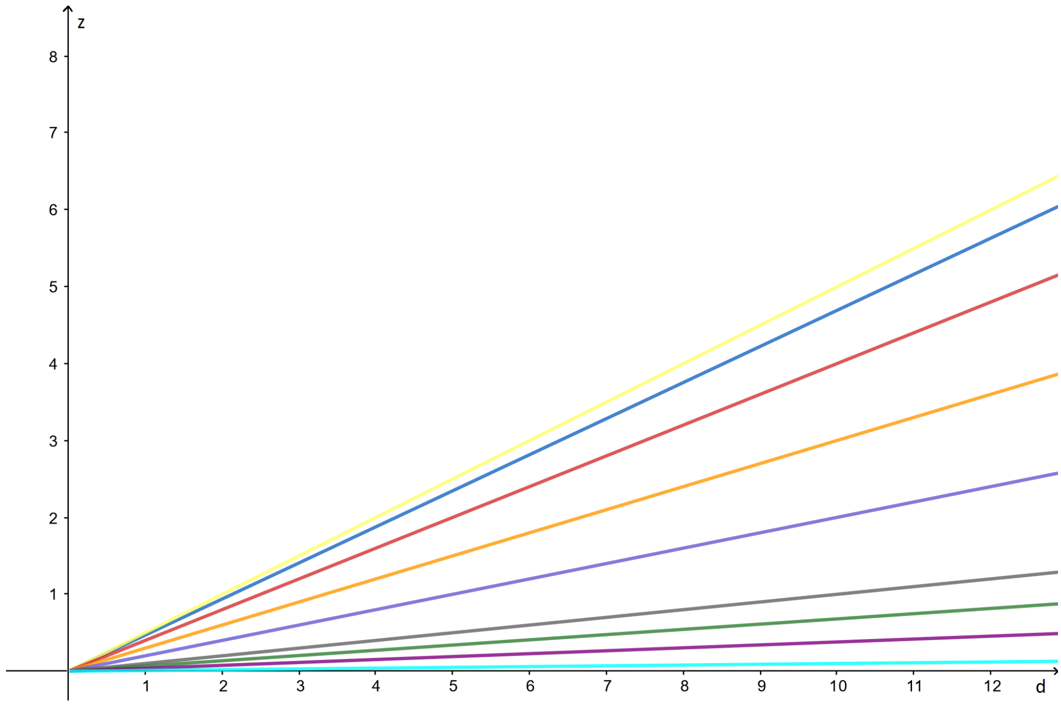
gdje je $\theta > \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$.

Za fiksni kut θ, izraz u zagradi postane negativan za dovoljno veliki $n \in N$, pa imamo konačno mnogo rješenja.

Ovisnost

$$z(d) = d \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2i\pi} - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \quad i = 1, ..., k$$

je unija polupravaca i pozitivne poluosi $d > 0$. Prikažimo tu ovisnost grafički (slika 2.11).



Slika 2.11: Grafički prikaz ovisnosti $z(d)$

2.4 Općenita rotacijska ploha

Definicija 2.4.1. *Skup točaka koji nastaje rotacijom neke ravninske krivulje oko pravca u toj ravnini (koji ne siječe krivulju) nazivamo **rotacijskom plohom**. Krivulju koja rotira nazivamo izvodnicom ili generatrisom plohe, a pravac oko kojeg krivulja rotira os rotacije.*

Svaka točka na krivulji rotacijom opisuje kružnicu. Ravnina u kojoj leži ta kružnica okomita je na os rotacije.

Neka je c krivulja. Točke krivulje c prilikom rotacije opisuju kružnice koje zovemo paralelama. Dakle, paralele pripadaju ravninama koje su okomite na os rotacije, a središta su im na rotacijskoj osi.

Ako rotacijsku plohu pak presječemo ravninom koja sadrži os rotacije, dobivamo krivulju koju zovemo meridijanom. Svi meridijani su međusobno sukladni, pa rotacijska ploha može nastati rotacijom bilo kojeg meridijana (čak i polumeridijana) oko rotacijske osi.
Krivulja c koju rotiramo može biti dana implicitno ili parametarski. Za implicitno zadanu krivulju vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4.2. *Neka je zadana krivulja $f(y,z) = c$ u xy-ravnini i neka ona rotira oko z-osi. Neka je $T = (x,y,z)$ bilo koja točka rotacijske plohe. Ona je dobivena rotacijom točke T_1 krivulje f oko z-osi. Koordinate točke T_1 su*

$$T_1 = \left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right).$$

Tada je

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = c.$$

Za parametarski zadanu krivulju vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4.3. *Neka je zadana krivulja $c(v) = (x(u), 0, z(u))$, gdje je u kut rotacije. Krivulju rotiramo oko z-osi u $xy-$ravnini. Parametarska reprezentacija rotacijske plohe je tada*

$$x(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)).$$

Da bi problem medvjeda riješili za općenitu rotacijsku krivulju, moramo znati računati duljinu luka krivulje.
Duljinu luka krivulje $y = f(x)$ od točke $x = a$ do točke $x = b$ računamo kao beskonačnu integralnu sumu beskonačno malih elemenata duljine ds. Formula za duljinu luka krivulje glasi:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

no nije uvijek jednostavno izračunati ju. Za većinu krivulja, integral se ne može izračunati eksplicitno.

Bibliografija

[1] I. N. Bronštejn i sur., *Matematički priručnik*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[2] "Hrvatska enciklopedija", mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., dostupno na `https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=70257` (ožujak 2022.)

[3] B. Khesin, S. Tabachnikov *Fun problems in Geometry and Beyond*, Sigma 15 (2019), `arXiv:1912.05740v1`

[4] R. Korać, *Geometrija kugle i sfere*, dostupno na `https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf3A5533/datastream/PDF/view` (studeni 2021.)

[5] *Plohe*, dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/fvv/plohe.pdf` (travanj 2022.)

[6] S. Gorjanc, *Stošci i valjci*, dostupno na `http://www.grad.hr/sgorjanc/udzbenik/3/3-1-3.html` (travanj 2022.)

[7] B. Vukić, *Plohe drugog reda i primjene*, dostupno na `https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf:9454/datastream/PDF/view` (travanj 2022.)

[8] O. Witt-Hansen *Spherical Geometry*, dostupno na `http://olewitthansen.dk/Mathematics/Spherical_geometry.pdf` (studeni 2021.)

Sve slike napravljene su u programima GeoGebra i Sketchbook

Sažetak

Ovaj rad bavi se poznatim problemom: ”Lovac kreće iz svog šatora i hoda 10 km prema jugu. Nakon toga skreće i hoda 10 km prema zapadu. Onda skreće prema sjeveru i hoda 10 km. Nakon prehodanih 30 km nalazi se na mjestu s kojeg je krenuo, pred svojim šatorom, no ne može ući jer je unutra medvjed. Koje je boje medvjed?” U prvom poglavlju opisani su osnovni pojmovi sferne geometrije te su navedeni osnovni teoremi i definicije toga područja. U drugom su poglavlju opisana rješenja navedenog zadatka na različitim rotacijskim plohama: sferi, kružnom valjku i kružnom stošcu. Na kraju se spominje postojanost rješenja na općenitoj rotacijskoj plohi.

Summary

This paper presents a well-known problem: ”A hunter started from his tent and went 10 km strictly south. After that he turns and walks 10 km strictly west. Then he turns to the north and walks 10 km. After walking 30 km he is in front of his tent, but he can’t enter because there is a bear inside. What color is the bear? ” The first chapter presents the basic concepts, definitions and theorems of spherical geometry. The second chapter describes the answers of this problem on different rotational surfaces: a sphere, a cylinder and a cone, and in the end, on general rotational surfaces.

Životopis

Rođena sam 13.1.1995. godine. Osnovnu školu Brezovica završila sam 2010. godine, kada upisujem V. gimnaziju u Zagrebu. Nakon završetka srednje škole, 2014. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2016. prebacujem se na nastavnički smjer preddiplomskog studija na istom fakultetu. Preddiplomski studij završila sam 2019. godine. Iste godine upisujem diplomski studij matematika, smjer nastavnički.
Trenutno radim u OŠ Trnjanska u Zagrebu, gdje predajem matematiku. Tijekom studija bila sam član pjevačkog zbora PMF-a ”Cantus Naturae”.