

# Primjena modela volatilnosti na izvedenice

---

**Yeoman, Ema Marija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:381764>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-30**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ema Marija Yeoman

**PRIMJENA MODELA VOLATILNOSTI**  
**NA IZVEDENICE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Azra Tafro

Zagreb, svibanj, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovom prilikom zahvaljujem se svojoj mentorici doc. dr. sc. Azri Tafro na pomoći, savjetima i smjernica tijekom pisanja i izrade ovog diplomskog rada. Velika hvala svim kolegama, prijateljima i prijateljicama koji su moj studiji upotpunili te uvijek susretljivo pomagali i dijelili svoja znanja. Posebnu zahvalu iskazujem svojoj obitelji na ukazanoj podršci tijekom studija.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Vremenski nizovi</b>	<b>3</b>
1.1 Stacionarnost . . . . .	4
<b>2 Volatilnost financijske imovine i modeli volatilnosti</b>	<b>9</b>
2.1 Karakteristike volatilnosti na financijskim tržištima . . . . .	9
2.2 Modeli volatilnosti . . . . .	10
<b>3 GARCH(p,q) Model</b>	<b>13</b>
3.1 Uvod . . . . .	13
3.2 Procjena parametara . . . . .	17
3.3 Modifikacije GARCH(p,q) modela . . . . .	18
<b>4 GARCH model u određivanju cijena opcija</b>	<b>23</b>
4.1 Teorem o LRNVR . . . . .	25
4.2 Određivanje cijene opcija . . . . .	29
4.3 Praktični primjer . . . . .	33
<b>Bibliografija</b>	<b>37</b>
<b>A R kod korišten u praktičnom primjeru</b>	<b>39</b>

# Uvod

Razvoj financijskog tržišta i investicijske analize pratio je razvoj proizvoda i instrumenata kojima se trguje. Osim općepoznatih, prisutne su i izvedenice (engl. *derivatives*) čija je vrijednost, kao što samo ime kaže, izvedena iz vrijednosnice na koju je napisana. Povijesno gledano, sredinom 19. stoljeća u Sjedinjenim Američkim Državama je prvi put zabilježeno trgovanje izvedenicama na burzi, iako prema nekim izvorima začeci sežu u daljnju prošlost. Javila se potreba za razumijevanjem složenosti izvedenica kao investicija te teorijski okvir međuovisnosti njihove vrijednosti i vrijednosti vezane imovine. Sukladno tome, i odgovor na pitanje: Koja je pravedna cijena izvedenica? Na to pitanje Fischer Black i Myron Scholes, te Robert Merton, u odvojenim radovima 1973. godine iznose model koji određuje cijenu izvedenica, specifično *europske call* opcije, zasnovan na stohastičkim diferencijalnim jednačbama i Brownovom gibanju. Međutim, umjesto konstantne volatilnosti pretpostavljene u Black–Scholes–Mertonovom modelu, mnoga istraživanja su pokazala da je volatilnost vrijednosnica vremenski promjenjiva. U vidu toga, u ovom radu ćemo upravo pokazati jedan pristup i model određivanja cijena opcija primjenom modela volatilnosti.

Diplomski rad je strukturiran u četiri poglavlja. Započinjemo s prvim poglavljem u kojemu je dana definicija vremenskih nizova te osnovnih pojmova potrebnih za razumijevanje modela volatilnosti i modela određivanja cijena opcija. Definiramo slabo i jako stacionaran proces. Poseban naglasak u poglavlju pridaje se slaboj stacionarnosti jer upravo takav proces daje mogućnost adekvatnog predviđanja budućih kretanja vremenskih nizova. U kontekstu slabe stacionarnosti dajemo odgovor na pitanje zašto promatramo financijske vremenske nizove kroz log-povrate financijske imovine te teorijsku pozadinu iza toga.

U drugom poglavlju razmatramo volatilnost financijske imovine i predstavljamo osnovne modele volatilnosti. Cilj je proučiti i razumjeti karakteristike volatilnosti na financijskim tržištima kao glavne aktere u razvoju i konstrukciji modela volatilnosti, te uvesti pojmove na kojima se zasnivaju ti modeli. Od posebne važnosti su autoregresijski modeli uvjetne heteroskedastičnosti. Stoga, definiramo ARCH(p) model te simuliranim primjerom ilustriramo i same nedostatke modela.

U trećem poglavlju fokusiramo se na GARCH(p,q) model. Definiramo ga i dokazujemo nužan i dovoljan uvjet pri kojem je GARCH(p,q) proces slabo stacionaran. Promatramo neka osnovna svojstva GARCH(1,1) modela te iskazujemo metodu procjena parametra za

GARCH(p,q) model, konkretnije metodu maksimalne vjerodostojnosti.

U četvrtom poglavlju iznosimo i promatramo model za određivanje cijena opcija i odgovarajuću deltu, odnosno osjetljivost cijene opcije na promjenu vrijednosti primarne imovine, korištenjem GARCH modela u kontekstu modeliranja log-povrata financijske imovine. Prvo iznosimo pretpostavke modela. Uvodimo i definiramo *relaciju valuacije lokalno neutralne na rizik*, LRNVR, koju koristimo pri određivanju cijena opcija te koja je uvedena kako bi prilagodili mjeru neutralnu na rizik heteroskedastičnosti povrata. Nadalje, dokazujemo teorem o postojanju LRNVR. Posebno određujemo cijenu *europske call* opcije i za nju odgovarajuću deltu, te na stvarnim podacima, uz određene pretpostavke, ilustriramo pokazano.

# Poglavlje 1

## Vremenski nizovi

Ovo poglavlje bavi se uvođenjem osnovnih pojmova i koncepata potrebnih za razumijevanje modela volatilnosti te kasnije za određivanje cijena opcija. Izložene definicije napisane su po uzoru na [17], [18] i [4]. Prvo definiramo vremenske nizove.

**Definicija 1.0.1.** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjeriv prostor, te neka je  $X_t$  slučajna varijabla na  $(\Omega, \mathcal{F})$  za svaki  $t \in T$ . Familija  $X = (X_t : t \in T)$  naziva se **slučajni proces** (s diskretnim vremenom).*

*Vremenski niz* definiramo kao slučajni proces indeksiran po skupu vremena  $T$ , u oznaci  $(X_t)_{t \in T}$ .

**Definicija 1.0.2.** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjeriv prostor. Familija  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$   $\sigma$  - podalgebri od  $\mathcal{F}$  takvih da za svaki  $t \geq 0$  vrijedi  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$  zove se **filtracija** na  $(\Omega, \mathcal{F})$ .*

**Definicija 1.0.3.** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjeriv prostor i  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  filtracija. Slučajni proces  $X = (X_t : t \geq 0)$  je **adaptiran** na filtraciju  $\mathbb{F}$  ako je za svaki  $t \geq 0$  slučajna varijabla  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -izmjeriva, tj. ako je  $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ .*

Prilikom analize, kao vremenske nizove možemo tretirati razne vremenski ovisne veličine čiji iznos želimo predvidjeti, primjerice prinose dionica, kamatne stope, tečaj valute itd. Između ostalog tu pripadaju i cijene opcija koje ćemo u ovom radu modelirati, pa su nam od interesa i neka svojstva vremenskih nizova koje iznosimo u ostatku poglavlja. **Opcija** je ugovor koji vlasniku ugovora daje pravo, ali ne i obavezu, da kupi ili proda neku imovinu (npr. dionicu) po određenoj cijeni i u određenom vremenskom razdoblju ili na određeni datum.



## 1.1 Stacionarnost

Stacionarnost je temeljno svojstvo vremenskih nizova koje koristimo u njihovoj analizi. Za razliku od nestacionarnih vremenskih nizova, stacionarnost omogućava preciznija predviđanja budućih događaja.

**Definicija 1.1.1.** *Vremenski niz  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  je **slabo stacionaran** ako vrijedi*

$$(i) \mathbb{E} X_t^2 < \infty \text{ za } \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(ii) \mathbb{E} X_t = m \text{ za } \forall t \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) \text{ za } \forall s, t, h \in \mathbb{Z}.$$

*Vremenski niz  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  je **jako (striktno) stacionaran** ako za razdiobu slučajnog vektora vrijedi*

$$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

*Za svaki izbor  $t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N}$ , ne ovisi o  $h \in \mathbb{N}_0$ .*

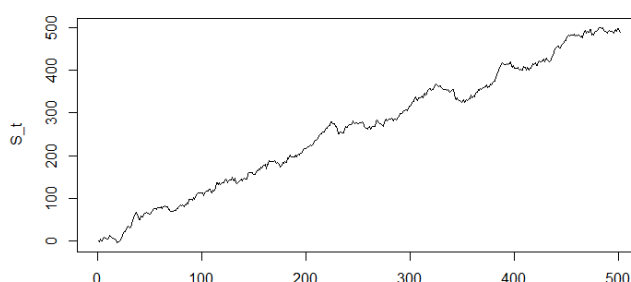
**Napomena 1.1.2.** *Uočimo da smo indeksirali po skupu cijelih brojeva. Analogna definicija vrijedi i za nizove indeksirane po manjem skupu  $T \subseteq \mathbb{Z}$ . Od interesa može biti  $T = \mathbb{N}_0$ .*

Iz definicije se vidi da je vremenski niz slabo stacionaran ako ima konstantno očekivanje, konstantnu i konačnu varijancu te kovarijanca od  $X_t$  i  $X_{t+h}$  ne ovisi o vremenu  $t$  nego je funkcija samo njihove vremenske udaljenosti. Jača stacionarnost je jače svojstvo koje zahtjeva da razdioba slučajnog vektora  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  bude invarijantna na vremenske translacije.

**Napomena 1.1.3.** *Ukoliko je  $\{X_t\}$  jako stacionaran i vrijedi  $\mathbb{E} X_t^2 < \infty$  za  $\forall t$ , tada je i slabo stacionaran. Obrnuta tvrdnja općenito ne vrijedi. Međutim, ako je  $\{X_t\}$  slabo stacionaran i gaussovski vremenski niz tj., ako su sve konačnodimenzionalne razdiobe vremenskog niza višedimenzionalno normalne tada je i  $\{X_t\}$  jako stacionaran.*

Jaku stacionarnost je empirijski teško provjeriti, zbog čega se u analizi vremenskih nizova okreće više slaboj stacionarnosti. Kako bismo utvrdili ima li uopće smisla govoriti o slaboj stacionarnosti, prvo se može promatrati grafički prikaz podataka u ovisnosti o vremenu. Slaba stacionarnost implicira da podaci u vremenskom periodu  $T$  fluktuiraju oko fiksne vrijednosti s konstantnom volatilnošću. Uz grafičku metodu najčešće se koristi test jediničnog korijena (engl. *unit root*), tzv. Dickey-Fullerov test, a u primjeni je i prošireni Dickey-Fullerov test (engl. *Augmented Dickey Fuller test* - ADF) za testiranje stacionarnosti vremenskih nizova.

**Primjer 1.1.4.** Slučajna šetnja je klasičan primjer nestacionarnog vremenskog niza. Na grafu 1.1 je prikazana simulirana slučajna šetnja  $(S_t)_{t \geq 0}$ ,  $S_t = \sum_{i=1}^t X_i$  i  $S_0 = 0$  za  $(X_t) \stackrel{iid}{\sim} N(1, 4)$ . Promatrajući samo grafički prikaz odmah se može uočiti da je narušen (ii) uvjet stacionarnosti, jasno se vidi rastući trend. Ako je očekivanje slučajnog procesa  $(X_t)$  nula tada je zadovoljen (ii) uvjet, ali ne i (iii):  $\text{Cov}(S_t, S_s) = \mathbb{E}[(S_t - \mathbb{E}[S_t])(S_s - \mathbb{E}[S_s])] = \mathbb{E}[S_t S_s] = \sum_{i=1}^{\min\{t, s\}} \mathbb{E}[X_i^2] = \min\{t, s\} \sigma^2$ . Kovarijanca od  $S_t$  i  $S_{t+h}$  ovisi o vremenu  $t$ . Prema tome, slučajna šetnja je slabo stacionarna jedino ako vrijedi  $\mu = \sigma^2 = 0$ .



Slika 1.1: Simulirana slučajna šetnja za korak  $(X_t) \stackrel{iid}{\sim} N(1, 4)$ .

Opisali smo poželjno svojstvo vremenskih nizova, stacionarnost, no što ako ono nije zadovoljeno kao u gornjem primjeru. Budući da metode procjene tipično pretpostavljaju stacionarnost procesa, vremenske nizove koji ne zadovoljavaju tu pretpostavku uobičajeno je u praksi podvrgnuti metodama za uklanjanje trenda i sezonalnosti. Cilj je vremenski niz  $(X_t)$  koji nije stacionaran rastaviti na tri dijela ako je to moguće. Pretpostavimo da vremenski niz  $(X_t)$  možemo rastaviti na tri komponente

$$X_t = m_t + s_t + Y_t, \quad (1.1)$$

gdje su  $m_t$  **trend**,  $s_t$  **sezonalnost** tj. deterministički periodičan niz poznatog perioda  $d \in \mathbb{N}$ ,  $s_t = s_{t-d}$  za svaki  $t$  i  $\sum_{j=1}^d s_j = 0$ , te  $Y_t$  slabo stacionaran vremenski niz. Jednakost (1.1) čini model klasične dekompozicije. Nadalje, navodimo jednu metodu koju možemo primijeniti za uklanjanje trenda i sezonalnosti, druge metode kao što je metoda uklanjanja trenda procjenom izlaze iz opsega ovog diplomskog rada.

**Uklanjanje trenda i sezonalnosti diferenciranjem:** Definiramo operator **diferenciranja**  $\nabla$  relacijom

$$\nabla X_t := (\mathbb{1} - B)X_t = X_t - X_{t-1}, \quad t \in T,$$

gdje je  $\mathbb{1}$  jedinični operator, a  $B$  operator pomaka unatrag. Zatim rekurzivno imamo

$$\nabla^j X_t = \nabla(\nabla^{j-1} X_t).$$

Operator diferenciranja je analogon derivacije u neprekidnoj analizi.

Promotrimo prvo slučaj  $s_t = 0$  za sve  $t$ , tj. odsustvo sezonalnosti. Bez smanjenja općenitosti neka je  $\mathbb{E}[Y_t] = 0$  i neka je  $m_t = \sum_{j=0}^k a_j t^j$  komponenta trenda. Vidimo da ovisno o koeficijentima  $a_j$  imamo rastući, padajući ili kombiniran trend. Sada polinomijalni trend  $k$ -tog stupnja možemo ukloniti  $k$  uzastopnim diferenciranjem, imamo

$$\begin{aligned} \nabla^k X_t &= \nabla^k(m_t + Y_t) \\ &= \nabla^k m_t + \nabla^k Y_t \\ &= k! a_k + \nabla^k Y_t \\ &= k! a_k + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} Y_{t-i}. \end{aligned}$$

Treća jednakost u gornjem izrazu odnosno da je  $\nabla^k m_t = k! a_k$  slijedi indukcijom, za  $m_t = a_0 + a_1 t$ ,  $\nabla m_t = m_t - m_{t-1} = a_0 + a_1 t - (a_0 + a_1(t-1)) = a_1$ . Vremenski niz  $(\nabla^k X_t)$  je slabo stacionaran s očekivanjem  $k! a_k$  kao suma konstante i linearne kombinacije slabo stacionarnog niza. Da je linearna kombinacija slabo stacionarnog niza slabo stacionarna je posljedica sljedeće Propozicije 1.1.5.

**Propozicija 1.1.5.** *Neka je  $(Y_t)$  slabo stacionaran vremenski niz s očekivanjem nula. Ako je  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ , tada je vremenski niz*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}, \quad (1.2)$$

*slabo stacionaran s očekivanjem nula.*

*Dokaz.* Pokažimo prvo da  $X_t$  dobro definiran, odnosno da red (1.2) konvergira

$$\mathbb{E}[|X_t|] \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \mathbb{E}[|Y_t|] \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \mathbb{E}[Y_t^2] < \infty.$$

Nadalje, ako je  $\mathbb{E}[Y_t] = 0$  imamo

$$\mathbb{E}[X_t] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \mathbb{E}[Y_{t-j}] = 0,$$

i

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-i}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_i Y_{t+h-j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_j \text{Cov}[Y_{t-i}, Y_{t+h-j}]. \end{aligned}$$

$(Y_t)$  je slabo stacionaran, pa prema tome  $\text{Cov}[Y_{t-j} Y_{t+h-i}]$  ne ovisi o vremenu  $t$  i posljedično  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$  ne ovisi o vremenu  $t$ . Budući da su zadovoljena sva tri uvjeta da vremenski niz  $(X_t)$  bude slabo stacionaran, slijedi tvrdnja propozicije. Zamjena očekivanja i suma je u gornjem računu opravdana zbog konačne apsolutne sume  $\psi_i$ .  $\square$

U primjeni se često pokaže da je dovoljan mali red diferenciranja, odnosno za  $k = 1$  ili  $k = 2$ .

Ako je prisutna sezonalnost perioda  $d$ , onda se metoda diferenciranjem može primijeniti uvođenjem operatora  $\nabla_d$  definiranog s

$$\nabla_d X_t := (\mathbb{1} - B^d)X_t = X_t - X_{t-d}, \quad t \in T.$$

Primjenom operatora  $\nabla_d$  na vremenski niz  $(X_t)$ , (1.1), imamo

$$\nabla_d X_t = m_t + s_t + Y_t - (m_{t-d} + s_{t-d} + Y_{t-d}) = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d},$$

što je vremenski niz s komponentom trenda  $m_t - m_{t-d}$  i slabo stacionarnim nizom  $Y_t - Y_{t-d}$ . Novodobiveni trend se potom eliminira primjenom gore opisanog postupka uklanjanja trenda diferenciranjem u odsustvu stacionarnosti.

Kao što smo naveli, postoje brojni načini uklanjanja trenda i sezonalnosti kojima je temeljni cilj isti; dobiti stacionaran niz. Međutim, ponekad je potrebno napraviti preliminarnu transformaciju podataka. Vremenske nizove na financijskom tržištu često promatramo preko log-povrata. U sljedećem primjeru upravo pokazujemo razlog iza toga i koju ulogu igra opisana metoda.

**Primjer 1.1.6.** *Neka je  $X_t$  vrijednost financijske imovine, a  $(X_t)$  pripadni vremenski niz, tada kako bi se stabilizirala varijanca kod nizova gdje varijanca nije konstanta niz se može transformirati logaritamskom funkcijom,  $(X_t) \rightarrow (\ln X_t)$ . Prepreka kod primjene logaritamske funkcije može biti negativnost podataka, ali kako se ovdje radi o financijskim podacima to nije slučaj. Potom kako bismo uklonili mogući trend diferenciranjem dobivamo*

$$\nabla(\ln X_t) = \ln X_t - \ln X_{t-1} = \ln \frac{X_t}{X_{t-1}} =: R_t, \quad t \in T. \quad (1.3)$$

Upravo dobiveno nazivamo jednoperiodni log-povrati (u pojedinim literaturama može se naći izraz *prinos*). Često je dovoljna opisana transformacija, te se pretpostavlja da su log-povrati stacionarni. Od interesa mogu biti i relativni povrati koju su definirani kao

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}.$$

Prema Taylorovom razvoju logaritamske funkcije, ako je  $\frac{X_t}{X_{t-1}}$  relativno mali vrijedi

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \approx \ln \frac{X_t}{X_{t-1}}.$$

Osim kako bi zadovoljili pretpostavku stacionarnosti, log-povrati imaju prednost u promatranju jer su neovisni o valuti, te daju jasniju sliku o povratu ulaganja.

## Poglavlje 2

# Volatilnost financijske imovine i modeli volatilnosti

Modeli volatilnosti koriste se kako bi se proširile klasične metode modeliranja koje pretpostavljaju da cijene vrijednosnica imaju konstantnu volatilnost. Razvoj i produbljivanje financijskoga tržišta u posljednjih 30 godina doveli su do razvoja ekonometrije, samim time veliki interes je usmjeren na procjenu volatilnosti kao mjere rizika. Predviđanje volatilnosti ima značajnu ulogu u optimiziranju portfelja otpornih na rizike, određivanju budućih cijena vrijednosnica i hedging portfeljima. Razlikujemo povijesnu od podrazumijevane volatilnosti [15]. Podrazumijevana volatilnost financijske imovine je volatilnost izvedena iz modela kretanja budućih cijena opcije, poput Black-Scholsovog modela. Primjerice, indeks volatilnosti VIX s Chicago burze opcija CBOE (engl. *Chicago Board Options Exchange*) pripada klasi podrazumijevane volatilnosti. VIX CBOE indeks je mjera koja prikazuje koliko tržište predviđa da će dionički indeks S&P 500<sup>1</sup> biti volatilniji. S druge strane, povijesna volatilnost je bazirana na povijesnim podacima cijena financijske imovine. Cilj ovog poglavlja je uvesti i razmotriti karakteristike volatilnosti povrata te proučiti modele volatilnosti.

### 2.1 Karakteristike volatilnosti na financijskim tržištima

Volatilnost je statistička mjera disperzije povrata za pojedini financijski instrument, te jedna od najznačajnijih mjera tržišnog rizika. Uobičajeno se izražava varijancom odnosno standardnom devijacijom povrata ili log-povrata financijskog instrumenta. Lokalna volatilnost ili uvjetna varijanca povrata ne može se dobiti direktno, međutim empirijske analize

---

<sup>1</sup>S&P 500 indeks (Standard & Poor's) je NYSE i NASDAQ burzovni indeks sačinjen od 500 tržišno najvrjednijih kompanija čijim se dionicama trguje u Sjedinjenim Američkim državama.

na financijskim tržištima utvrdile su prisutnost nekoliko zajedničkih karakteristika volatilnosti povrata [[16], str. 110]. Prva karakteristika je grupiranje volatilnosti povrata unutar određenog razdoblja (engl. *volatility clustering*). Ona kaže da su veće promjene obično praćene većima, a manje promjene manjima. Najčešće je prisutna na dioničkom, robnom i deviznom tržištu gdje se podaci evidentiraju na tjednoj ili dnevnoj učestalosti. Prisutnost pojave grupiranja volatilnosti postaje vrlo izražena kod podataka prikupljenih tijekom kraćih vremenskih pomaka [[1], str. 65]. Drugo, ako nisu prisutni šokovi na tržištu, volatilnost rijetko "skače". Treće, volatilnost ne divergira ka beskonačnosti, već fluktuirira unutar nekog fiksnog intervala. Naposljetku, primijećena je također mogućnost postojanja asimetrije volatilnosti (engl. *leverage effect*), odnosno činjenica da volatilnost reagira drugačije na veliki porast cijena i veliki pad cijena. Volatilnost ima tendenciju opadanja kada cijene rastu i tendenciju rasta kada cijene padaju. Drugim riječima, loše informacije na tržištu ili opadajuće tržište (engl. *bear markets*) imaju veći efekt na volatilnost nego dobre informacije ili rastuće tržište (engl. *bull markets*). Promotrimo opisane karakteristike na slici 2.1 gdje je grafički prikazano kretanje dnevnih indeksa i log-povrat indeksa CROBEX<sup>2</sup> na Zagrebačkog burzi u vremenskom periodu od 3. svibnja 2010. do 3. svibnja 2021. godine (izvor ZSE [21], izračun autora). Možemo vidjeti kako loše informacije na tržištu, kao što je slučaj krize u Agrokor koncernu početkom 2017. godine i početak COVID-19 pandemije rane 2020. godine imaju veliki efekt na volatilnost.

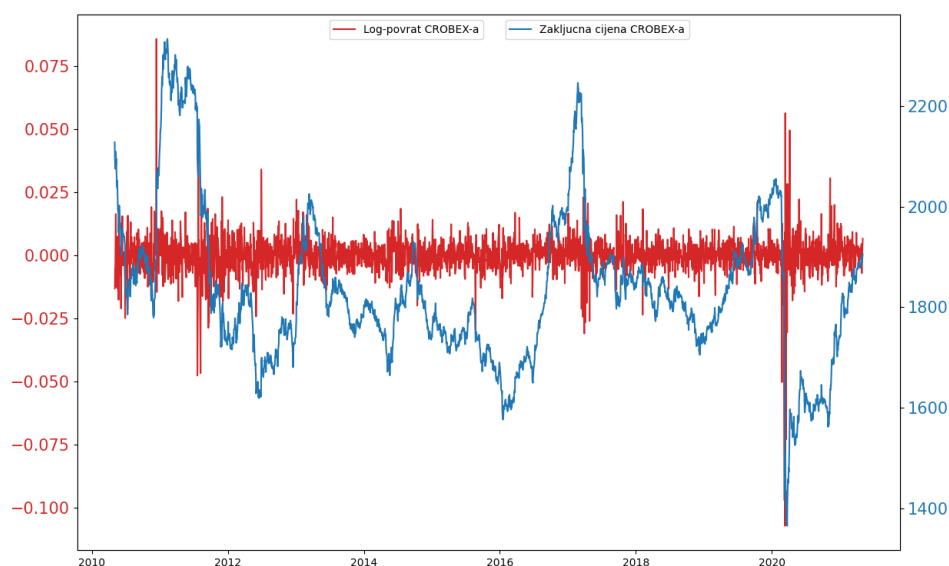
Ove karakteristike igraju važnu ulogu u razvoju modela volatilnosti i ključno ih je istražiti prilikom modeliranja procesa uvjetne varijance. Upravo su se pojedini modeli volatilnosti razvili kako bi taj model uključivao pojedinu karakteristiku volatilnosti.

## 2.2 Modeli volatilnosti

Postoje brojni modeli volatilnosti, a u ovom radu posvetit ćemo se autoregresijskim modelima uvjetne heteroskedastičnosti. Osnovni modeli su ARCH(p) (Definicija 2.2.2) te GARCH(p,q) model koji definiramo u sljedećem poglavlju (Definicija 3.1.1). Osim ARCH i GARCH modela, za analizu i za predviđanje volatilnosti koriste se i druge parametarske i neparametarske metode. Metoda eksponencijalno ponderiranih pomičnih prosjeka (engl. Exponential Weighted Moving Average, EWMA) jedan je primjer parametarske metode. Uvedimo potrebne pojmove i procese promatranja koji su dio modela volatilnosti. Neka je  $(\varepsilon)_{t \in T}$  vremenski niz i  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  filtracija gdje je  $\mathcal{F}_t$  skup informacija dostupnih do i uključujući trenutak  $t$ . Prisjetimo se da su tada uvjetno očekivanje označeno s  $\mu_t$  i **uvjetna varijanca** označena s  $\sigma_t$  obzirom na  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}_{t-1}$  za vremenski trenutak  $t$  definirani kao (preuzeto s [10])

$$\mu_t = \mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}], \quad \sigma_t = \text{Var}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]. \quad (2.1)$$

<sup>2</sup>CROBEX je dionički indeks Zagrebačke burze.



Slika 2.1: Kretanje zaključnih cijena i log-povrata indeksa CROBEX za razdoblje od 3.5.2010. do 3.5.2021. godine.

Ako je uvjetno očekivanje slučajne varijable  $\varepsilon_t$  nula, onda je uvjetna varijanca obzirom na  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}_{t-1}$  od  $\varepsilon_t$  ništa drugo nego  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$ .

**Napomena 2.2.1.** U nastavku rada  $\sigma_t^2$  definiranu s (2.1) nazivamo uvjetnom varijancom te izostavljamo "obzirom na  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{F}_{t-1}$ " s pretpostavkom da se to podrazumijeva.

Za nas od interesa je vremenski niz  $(\varepsilon)_{t \in T}$  normalno distribuiran s uvjetnim očekivanjem nula i uvjetnom varijancom  $\sigma_t^2$ . U terminima modela volatilnosti, također, i u ovom radu, takav vremenski niz označen s  $(\varepsilon)_{t \in T}$  interpretiramo kao *šok, grešku ili rezidual*. Taj  $\varepsilon_t$  obilježava novi set informacija u trenutku  $t$  koji utječe na samu cijenu financijske imovine. Kako utječe i kakvog je prikaza ovisi o izboru i konstrukciji modela. Standardna i početna pretpostavka je da za log-povrat (1.3),  $R_t$ , vrijedi  $R_t = \varepsilon_t$ , odnosno da su log-povrati nekorelirani, normalno distribuirani s očekivanjem nula i promjenjivom uvjetnom varijancom. U nastavku rada ćemo dati druge prikaze za log-povrate financijske imovine s promjenjivom uvjetnom varijancom.

Definirajmo sada autoregresijski model uvjetne heteroskedastičnosti, ARCH model (engl. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) uz pretpostavku normalnosti. Pojam heteroskedastičnost upućuje na to da je uvjetna varijanca promjenjiva kroz vrijeme, a pojam autoregresijski da se uvjetna varijanca mijenja autoregresivno.



**Definicija 2.2.2.** (Robert Engle, 1982 [8]) Neka je  $(\varepsilon_t)_{t \in T}$  vremenski niz i  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in T\}$  filtracija gdje je  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebra generirana s  $\{\varepsilon_u : u \leq t\}$  tj.  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\varepsilon_u : u \leq t\})$ . ARCH( $q$ ) proces je dan:

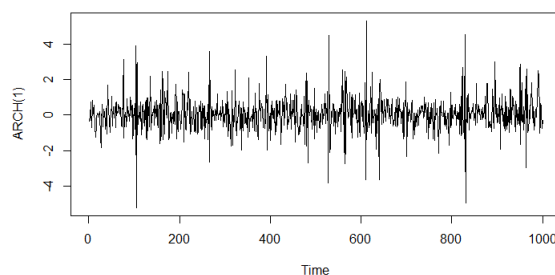
$$\begin{aligned} \varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdje su  $\alpha_0 > 0$  i  $\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$ .

Uvjet za nenegativnost koeficijenta  $\alpha_i$  je upravo kako bi se osigurala pozitivnost varijance.

**Napomena 2.2.3.** Vrijedi i općenitija definicija, prema kojoj za proces  $(\varepsilon_t)$  vrijedi  $\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$  gdje je  $(Z_t) \sim IID(0, 1)$ . U primjeni se umjesto normalne distribucije koristi i Studentova  $t$ -distribucija koja ima teže repove od normalne distribucije.

Iz definicije ARCH( $q$ ) modela vidimo da veliki prošli šokovi  $\{\varepsilon_{t-i}^2\}_{i=1}^q$  impliciraju veliku uvjetnu varijancu. Prema tome, u okviru ARCH( $q$ ) modela, veliki šokovi obično su praćeni također velikim šokom pa možemo reći da ARCH model dobro opisuje karakteristiku grupiranja volatilnosti. Jasno, to ne mora biti slučaj jer velika varijanca ne realizira nužno veliki ishod. Promotrimo simuliran ARCH(1) proces s parametrima  $\alpha_0 = 0.3$  i  $\alpha_1 = 0.8$  prikazan na Slici 2.2. Na grafu su jasno vidljivi šiljci (engl. "burst"). Razlog tomu je ovisnost uvjetne varijance samo o šoku za jedan period unatrag. Kako bi se uklonili šiljci koji nisu poželjni, te postigao bolji prikaz grupiranja volatilnosti potreban je veći broj parametara. Međutim, prema načelu parsimonije velik broj parametara nije preporučljiv i to čini manu ARCH( $q$ ) modela. U sljedećem poglavlju ćemo pokazati koji model je poželjniji i zašto.



Slika 2.2: Simulacija ARCH(1) procesa s parametrima  $\alpha_0 = 0.3$  i  $\alpha_1 = 0.8$ .

## Poglavlje 3

# GARCH(p,q) Model

### 3.1 Uvod

GARCH model je prirodna nadogradnja ARCH modela gdje se za modeliranje uvjetne varijance uzimaju u obzir i varijance prethodnih vremenskih perioda. ARCH(q) model prvi je definirao Robert Engle 1982. godine, a četiri godine nakon 1986. Tim Bollerslev uvodi GARCH(p, q) model. U daljnjem tekstu iznosimo Bollerslevovu definiciju GARCH(p,q) modela. Promatrane definicije i teoremi u ovom poglavlju preuzeti su iz sljedećih izvora: [3], [15] i [9].

**Definicija 3.1.1.** (Tim Bollerslev, 1986 [3])

Neka je  $(\varepsilon)_{t \in T}$  vremenski niz i  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in T\}$  filtracija gdje je  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebra generirana s  $\{\varepsilon_u : u \leq t\}$  tj. koja sadrži sve informacije dostupne u trenutku  $t$ . GARCH(p,q) proces je dan:

$$\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2, \quad (3.2)$$

gdje su  $q > 0$ ,  $p \geq 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i, \beta_j \geq 0$  za  $i = 1, \dots, q$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Prethodnu jednadžbu (3.2) možemo zapisati korištenjem operatora pomaka unatrag  $B$  ( $B^d X_t = X_{t-d}$ ) u obliku:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(B) \varepsilon_t^2 + \beta(B) \sigma_t^2, \quad (3.3)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  polinomi stupnja  $q$ , odnosno  $p$ :

$$\alpha(B) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i, \quad \beta(B) = \sum_{i=1}^p \beta_i B^i.$$

Za  $p = 0$  model se reducira na ARCH(q) proces, a za  $p = q = 0$  imamo bijeli šum.

U Poglavlju 1. definirali smo slabu stacionarnost i opisali zašto je ona bitna. U nastavku dokazujemo pod kojim uvjetima je GARCH(p,q) model slabo stacionara.

**Teorem 3.1.2.** *GARCH(p,q) proces je slabo stacionaran s*

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0,$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} \frac{\alpha_0}{1-\alpha(1)-\beta(1)} & , t = s \\ 0 & , \text{inače,} \end{cases}$$

ako i samo ako je  $\alpha(1) + \beta(1) < 1$ .

*Dokaz.* Iz definicije GARCH(p, q) modela imamo

$$\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t, \quad \eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1). \quad (3.4)$$

Nadalje, uzastopnom supstitucijom imamo

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-j}^2 \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 \sigma_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i-j}^2 \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 \sigma_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i-j}^2 \right) \\ &= \dots \\ &= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k), \end{aligned} \quad (3.5)$$

pri čemu  $M(t, k)$  sadrži sve članove oblika

$$\prod_{i=1}^q \alpha_i^{a_i} \prod_{j=1}^p \beta_j^{b_j} \prod_{l=1}^n \eta_{t-S_l}^2,$$

za

$$\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j = k, \quad \sum_{i=1}^q a_i = n,$$

i

$$1 \leq S_1 < S_2 < \dots < S_n \leq \max\{kq, (k-1)q + p\}.$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned} M(t, 0) &= 1, \\ M(t, 1) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i, \\ M(t, 2) &= \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-j}^2 \left( \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \left( \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right), \end{aligned}$$

pa općenito dobivamo

$$M(t, k+1) = \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 M(t-i, k) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t-i, k). \quad (3.6)$$

Budući da je  $\eta_t^2$  n.j.d. proces, tada očekivanje od  $M(t, k)$  ne ovisi o vremenskom parametru  $t$ . Odavde slijedi

$$\mathbb{E}[M(t, k)] = \mathbb{E}[M(s, k)] \quad \forall k, t, s. \quad (3.7)$$

Iz (3.6) i (3.7), te kako je  $\mathbb{E}[\eta_t^2] = 1$  (3.4) imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M(t, k+1)] &= \left( 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \mathbb{E}[M(t, k)] = \dots \\ &= \left( 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{k+1} \mathbb{E}[M(t, 0)] \\ &= \left( 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Iz (3.4), (3.5), i (3.8) imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] &= \alpha_0 \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \right] \\ &= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[M(t, k)] \\ &= \alpha_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Konačno,  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]$  konvergira u (3.9) ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1.$$

Također, prema (3.5)  $\sigma_t^2 \in \sigma(\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots)$  te kako je  $\varepsilon_t \in \sigma(\eta_t, \eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots)$  imamo  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sigma_t \eta_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbb{E}[\sigma_t \mathbb{E}[\eta_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = 0$ . Iz nezavisnosti procesa  $(\sigma_t)$  i  $(\eta_t)$ , te činjenice da je  $(\eta_t)$  n.j.d. slijedi da je  $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$  za  $t \neq s$ .  $\square$

Teorem nam daje nužan i dovoljan uvjet pri kojem bezuvjetna varijanca od  $\varepsilon_t$ ,  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]$ , postoji, odnosno je konačna.

Promotrimo sada najjednostavniji, ali često korišten u praktičnim primjenama upravo zbog svoje jednostavnosti GARCH(1,1) model. Jednadžba uvjetne varijance GARCH(1,1) modela je

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (3.10)$$

Jednadžba uvjetne varijance (3.10) sastoji se od konstantnog člana  $\alpha_0 > 0$ , člana pomičnog prosjeka prvog reda uz parametar  $\alpha_1 \geq 0$  (ARCH dio modela) i autoregresijskog člana prvog reda uz parametar  $\beta_1 \geq 0$  (GARCH dio modela). Može se pokazati da GARCH(1,1) model ima ARCH(q) reprezentaciju, za svaki  $q$ , s eksponencijalno opadajućim koeficijentima. Rekurzivno rješavajući imamo

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 \sigma_{t-3}^2)) \\ &= \alpha_0 \sum_{j=1}^q \beta_1^j + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \dots + \beta_1^{q-1} \varepsilon_{t-q}^2). \end{aligned}$$

Iako je ARCH model jednostavniji, često je potreban velik broj parametra da adekvatno opiše uvjetnu volatilitnost. Za veći broj vremenskih pomaka  $q$  u ARCH(q) modelu procjena parametra je sve složenija i zahtjevnija. Stoga je GARCH(1,1) model primjenjiviji zbog lakše procijene parametra i specifikacije.

Nadalje, razmotrimo neka svojstva i karakteristike GARCH(1,1) procesa. Izvedimo predviđanu volatilitnost u dugom roku i pokažimo da ona konvergira k bezuvjetnoj varijanci  $\varepsilon_t$  pod uvjetom stacionarnosti GARCH(1,1) procesa [[15], str. 200].

**Definicija 3.1.3.** *Neka je  $\sigma_t^2$  uvjetna varijanca u trenutku  $t$ , tada je predviđanje uvjetne varijance za  $l$ -korak unaprijed s početnim vremenom promatranje  $h$  definirano s*

$$\sigma_h^2(l) = \mathbb{E}[\sigma_{h+l}^2 | \mathcal{F}_h].$$

Prema definiciji  $\sigma_h^2(1)$  je predviđanje uvjetne varijance za 1-korak unaprijed. Neka je  $\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t$ ,  $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$  kao u dokazu Teorema 3.1.2. Supstitucijom  $\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t$  u jednadžbi (3.10) imamo

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1).$$

Za  $t = h + 1$  gornja jednadžba postaje

$$\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{h+1}^2 + \alpha_1\sigma_{h+1}^2(\eta_{h+1}^2 - 1).$$

Kako je  $\mathbb{E}[\eta_{h+1}^2 - 1 \mid \mathcal{F}_h] = 0$ , tada jednadžba za predviđanu uvjetnu varijancu za 2-korak unaprijed i početak promatranja  $h$  izgleda

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(1).$$

Generalno, imamo

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1).$$

Supstitucijom unatrag gornju jednadžbu možemo zapisati kao

$$\sigma_h^2(l) = \frac{\alpha_0[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}]}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}\sigma_h^2(1).$$

Stoga imamo

$$\sigma_h^2(l) \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad \text{za } l \rightarrow \infty,$$

uz pretpostavku stacionarnosti GARCH(1,1).

Pokazali smo ako je zadovoljen nužan i dovoljan uvjet za slabu stacionarnost GARCH(1,1) procesa, tada predviđanje uvjetne varijance konvergira k bezuvjetnoj varijanci slučajnog procesa  $\{\varepsilon_t\}$  jer je prema (3.9)  $Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$ .

## 3.2 Procjena parametara

Za procjenu parametra GARCH(p,q) modela obično se koristi metoda maksimalne vjerodostojnosti (MLE). Ona ovisi o pretpostavci distribucije slučajnog procesa  $(\varepsilon_t)$ . U našem slučaju  $\varepsilon_t$  je uvjetno na  $\mathcal{F}_{t-1}$  normalno distribuirana varijabla (Definicija 3.1.1). Pod tom pretpostavkom MLE parametri modela su oni za koje funkcija **vjerodostojnosti** postiže svoj maksimum.

Neka je  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  uzorak i  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  realizacija uzorka  $\varepsilon$  duljine  $n$  koji slijedi GARCH(p,q) proces,  $p$  i  $q$  su nam poznati. Prema tome, imamo

$$\varepsilon_t \mid \{\varepsilon_1 = a_1, \dots, \varepsilon_{t-1} = a_{t-1}\} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

gdje za  $\sigma_t^2$  vrijedi (3.2). Nadalje, označimo s  $\theta$  vektor parametra

$$\theta := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_p) \in \Theta, \quad \Theta \subseteq (0, +\infty) \times [0, +\infty)^{p+q}.$$

Za zajedničku funkciju gustoće  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  vrijedi

$$f_{\varepsilon}(\mathbf{a}; \theta) = f(a_{n-1}, \dots, a_1; \theta) f(a_n | a_{n-1}, \dots, a_1; \theta),$$

stoga za funkciju vjerodostojnosti,  $L : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu kao

$$L(\theta | \mathbf{a}) := f_{\varepsilon}(\mathbf{a}; \theta),$$

imamo

$$L(\theta | \mathbf{a}) = f_{\varepsilon}(\mathbf{a}; \theta) = \prod_{t=q+1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{y_t}{2\sigma_t^2}\right) \times f(a_1, \dots, a_q; \theta),$$

gdje je  $\sigma_t^2$  definirana, za  $t > q$ , rekurzivno jednažbom (3.2). Za nedostupne  $\sigma_t^2$ ,  $t \leq q$  razumni izbori su bezuvjetna varijanca  $\mathbb{E}[\varepsilon^2]$  ili vrijednost postaviti na nulu. Budući da je prirodni logaritam strogo rastuća diferencijabilna funkcija pronalazak maksimuma funkcije vjerodostojnosti ekvivalentan je ekstremu funkcije  $l(\theta) = \log L(\theta)$ . Prema tome imamo

$$l(\theta) = \sum_{t=q+1}^n \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{y_t}{2\sigma_t^2}\right) \right] + \ln(f(a_1, \dots, a_q; \theta)). \quad (3.11)$$

Za veliku duljinu uzorka  $n$  zajedničku gustoću podataka  $f(a_1, \dots, a_q; \theta)$  često izostavljamo zbog jednostavnosti s obzirom na to da je egzaktan oblik kompliciran, što je opravdano jer u tom slučaju taj član zanemarivo mali sumand u odnosu na ostatak sume u jednažbi (3.11).

### 3.3 Modifikacije GARCH(p,q) modela

Danas imamo brojnu i opsežnu literaturu o GARCH modelu i njegovim primjenama. Za kraj ovog poglavlja u daljnjem tekstu ćemo izložiti i promotriti samo neke inačice i modifikacije GARCH modela kako bismo dobili širu sliku upotrebe GARCH modela i njegovu raznolikost.

#### IGARCH(p,q) model:

Uvjet za slabu stacionarnost GARCH procesa nije uvijek ispunjen. U praktičnoj primjeni, primjerice prilikom modeliranja tečajnih valuta na deviznom tržištu, se pokazalo da često vrijedi  $\alpha(1) + \beta(1) = 1$  [2]. Tada imamo specijalan slučaj GARCH modela kojeg zovemo **Integrirani GARCH model**. Glavno obilježje IGARCH(p,q) modela je upravo to što bezuvjetna varijanca od  $\varepsilon_t$  nije konačna. IGARCH(1,1) model se može zapisati kao

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2, \quad (3.12)$$

gdje je  $\{\varepsilon_t\}$  definiran kao i prije (3.1) te  $0 < \beta_1 < 1$ . Potonje slijedi iz činjenice da su koeficijenti nenegativni, a koeficijent  $\alpha_1$  smo izrazili preko koeficijenta  $\beta_1$ .

U **IGARCH(1,1)** modelu procjena volatilnosti  $l$ -koraka unaprijed za početno stanje  $h$  je afina funkcija s nagibom  $\alpha_0$

$$\begin{aligned}\sigma_h^2(l) &= \sigma_h^2(1) + \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_0(\beta_1 + (1 - \beta_1)) \\ &= \sigma_h^2(1) + (l - 1)\alpha_0, \quad l \geq 1.\end{aligned}$$

Slučaj kada je  $\alpha_0 = 0$  je posebno zanimljiv jer ako je  $\alpha_0 = 0$ , tada je  $\sigma_t^2$  je martingal (Nelson, [13]). Uz  $\alpha_0 = 0$  jednadžba (3.12) poprima oblik jednadžbe eksponencijalno ponderiranih pomičnih prosjeka odnosno EWMA modela koja se koristi za izračun *Value at Risk* (engl. *Value at Risk*, VaR) [[1] str. 328]. Rekurzivno opet imamo

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta_1) \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2.$$

#### **GARCH-M model:**

Motivacija iza ovog modela je sljedeća. Označimo sa  $\{r_t\}$  kretanje log-povrata financijske imovine. Ako je varijanca veća od samog očekivanja log-povrata financijske imovine intuitivno je očekivati da će log-povrati ovisiti i o varijanci. Inkorporiranjem volatilnosti u jednadžbu log-povrata dolazimo GARCH-M modela (engl. *GARCH in the Mean*). Jednostavni **GARCH(1,1)-M** model se može zapisati kao [15]

$$r_t = \mu + \lambda \sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad (3.13)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

gdje je  $\{\varepsilon_t\}$  definiran kao i prije (3.1),  $\alpha_1, \beta_1 > 0$ , te su  $\mu$  i  $\lambda$  konstante. Parametar  $\lambda$  se interpretira kao premija rizika, a parametar  $\mu$  kao očekivana vrijednost ili prosjek log-povrata. Pozitivan  $\lambda$  implicira da su povrati pozitivno korelirani s uvjetnom varijancom. Primijetimo da je jednadžba za uvjetnu varijancu ista kao i kod GARCH(1,1) modela. Prema tome GARCH(1,1)-M je ništa drugo nego proširenje GARCH(1,1) s jednadžbom (3.13). Naziv za model, "In the Mean", slijedi iz toga što je uvjetna varijanca  $\sigma_t^2$  ušla u uvjetno očekivanje od log-povrata tj.  $\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mu + \lambda \sigma_t^2$ .

#### **EGARCH(p,q) model:**

Već smo spomenuli da GARCH model može obuhvatiti karakteristiku grupiranja volatilnosti povrata. S druge strane, ne obuhvaća karakteristiku asimetrije šokova, tj. ne razlikuje



pozitivan od negativnog šoka nego samo njegovu magnitudu. Razlog tomu je kvadrat šoka u jednadžbi uvjetne varijance (3.2). Za tu svrhu definiran i uveden je eksponencijalni GARCH model tj. EGARCH(p,q) [Definicija preuzeta iz literature[12]].

**Definicija 3.3.1.** Neka je  $\varepsilon_t$  vremenski niz, kažemo da slijedi EGARCH(p,q) proces ako je zadovoljeno sljedeće:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \eta_t \sigma_t, \quad \eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1), \\ \ln(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}}{1 - \alpha_1 B + \dots - \alpha_m B^m} g(\eta_{t-1}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdje je

$$g(\eta_t) = \theta \eta_t + \gamma[|\eta_t| - \mathbb{E}(|\eta_t|)], \quad (3.15)$$

za  $\theta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, p.$

Za bolje razumijevanje EGARCH(p,q) modela promotrimo njegov najjednostavniji oblik EGARCH(1,1). Uvrštavanjem  $p = q = 1$  jednadžba (3.14) se svodi na

$$(1 - \alpha_1 B) \ln(\sigma_t^2) = (1 - \alpha_1) \alpha_0 + g(\eta_{t-1}).$$

$\eta_t$  je normalno distribuirana pa je prema tome  $\mathbb{E}[|\eta_t|] = \sqrt{2/\pi}$ . Sada lijevu stranu jednadžbe možemo još raspisati po  $g(\eta_{t-1})$  (3.15) i u tom slučaju imamo

$$(1 - \alpha_1 B) \ln(\sigma_t^2) \begin{cases} \alpha_* + (\gamma + \theta) \eta_{t-1} & \text{za } \eta_{t-1} \geq 0, \\ \alpha_* + (\gamma - \theta)(-\eta_{t-1}) & \text{za } \eta_{t-1} < 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

gdje je  $\alpha_* = (1 - \alpha) \alpha_0 - \sqrt{2/\pi} \gamma$ . Specijalno, kako vrijedi  $B \ln(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_{t-1}^2)$  možemo zapisati uvjetnu varijancu u ovisnosti o šoku  $\varepsilon_{t-1}$

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} \exp(\alpha_*) \begin{cases} \exp\left[(\gamma + \theta) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right] & \text{za } \varepsilon_{t-1} \geq 0, \\ \exp\left[(\gamma - \theta) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right] & \text{za } \varepsilon_{t-1} < 0. \end{cases}$$

Koeficijenti  $(\gamma + \theta)$  i  $(\gamma - \theta)$  pokazuju asimetriju kao rezultat pozitivnog ili negativnog šoka. Kako bi bili u skladu s očekivanjem da negativni šokovi ima veći utjecaj na uvjetnu varijancu pretpostavljamo da je  $\theta$  negativan. Primijetimo da uvjetna varijanca nelinearno ovisi o kvadratu šoka. Za viši red EGARCH model postaje sve kompliciraniji.

### NGARCH(p,q) model:

**Nesimetričan GARCH** (engl. *Nonsymmetric GARCH*, NGARCH) model isto pripada klasi asimetričnih modela. NGARCH(p,q) model se opisuje sljedećom jednadžbom uvjetne varijance.

**Definicija 3.3.2.** Neka je  $\{\varepsilon_t\}$  vremenski niz za koji vrijedi (3.1). NGARCH( $p,q$ ) model je dan s:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i} - \theta \sigma_{t-1})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

za  $\alpha_i, \beta_j \geq 0$  za  $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Uočimo da upravo zbog člana  $2\alpha_i \theta \varepsilon_{t-i} \sigma_{t-1}$  u gornjoj jednadžbi negativni, odnosno pozitivni šokovi djeluju različito na uvjetnu varijancu. S ovim modelom ćemo se još susresti u sljedećem poglavlju.



## Poglavlje 4

# GARCH model u određivanju cijena opcija

U ovom poglavlju promotrit ćemo određivanje cijena opcija korištenjem GARCH modela u kontekstu modeliranja log-povrata financijske imovine. Poglavlje se bazira na članku [7] u kojem je po prvi put Duan 1995. godine predstavio GARCH model određivanja cijena opcija s lokalno neutralnim na rizik odnosom vrednovanja.

Promatramo financijsko tržište na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  u diskretnom vremenu. Na financijskom tržištu promatramo novac kao nerizični financijski instrument koji se ukamaćuje po neprekidnoj kamatnoj stopi  $r$  (jednakoj za posuđivanje i ulaganje). To znači da iznos  $S_0$  uložen u trenutku 0, u trenutku  $t$  vrijedi  $S_0 e^{rt}$ . Neka je  $X_t$  cijena (vrijednost) financijske imovine. Pretpostavljamo da stopa povrata financijske imovine za jedan vremenski period ima log-normalnu distribuciju obzirom na mjeru  $\mathbb{P}$  sa sljedećim prikazom (vidi [7]):

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} = r + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

gdje je  $r \in \mathbb{R}$  konstantna kamatna stopa na nerizičnu imovinu,  $\lambda$  konstantna premija rizika, te  $\{\varepsilon_t\}$  proces s očekivanjem nula i uvjetnom varijancom  $\sigma_t^2$  (uz vjerojatnost  $\mathbb{P}$ ) koji modeliramo pomoću GARCH modela. To znači da proces  $\{\varepsilon_t\}$  zadovoljava uvjete Definicije 3.1.1. pa je uvjetna varijanca linearna kombinacija kvadrata prethodnih grešaka  $\varepsilon_t^2$  i prethodnih vrijednosti varijance  $\sigma_t^2$ , kao što je danom jednadžbom (3.2). Prema GARCH(p, q) specifikaciji, znamo da su  $\sigma_t^2$  i  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -izmjerive slučajne varijable. U trenutku  $t$  imamo sve informacije o cijenama do i uključivo trenutka  $t$ . Također, pretpostavljamo da je  $\mathcal{F}_0$  trivijalna  $\sigma$ -algebra,  $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$ .

Uz pretpostavku log-normalnosti, odnosno (4.1), uvjetno očekivanje sume relativnog

povrata i jedinice iznosi

$$\mathbb{E} \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \mathbb{E} [e^{r+\lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}] = e^{r+\lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2} \mathbb{E}[e^{\varepsilon_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}] = e^{r+\lambda\sigma_t}, \quad (4.2)$$

iz čega slijedi opravdanost naziva za koeficijent  $\lambda$ . Njega interpretiramo kao premiju za rizik investiranjem u rizičnu imovinu. Zadnja jednakost u (4.2) slijedi iz vrijednosti funkcije izvodnice momenta normalno distribuirane varijable.

Kako bi se osigurala stacionarnost GARCH procesa prema Teoremu 3.1.2 pretpostavlja se da vrijedi

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1.$$

Ukoliko su koeficijenti  $\alpha_i$  i  $\beta_j$  u jednadžbi (3.3) nula tj.  $q = p = 0$  tada se GARCH model svodi na standardni Black-Scholes-Mertonov model s konstantnom volatilnosti i normalnom distribucijom log-povrata. Drugim riječima, Black-Scholes model je specijalan slučaj GARCH modela u određivanju cijena opcija.

Kako bi odredili cijenu izvedenih vrijednosnica u GARCH modelu moramo mjeru neutralnu na rizik  $\mathbb{P}^*$  prilagoditi heteroskedastičnosti povrata cijena. Vjerojatnosnu mjeru  $\mathbb{P}^*$  zovemo mjera neutralna na rizik ako je očekivani povrat uz  $\mathbb{P}^*$  jednak nerizičnom povratu. Duan uvodi *relaciju valuacije lokalno neutralne na rizik* (engl. *Locally Risk-Neutral Valuation Relationship*, LRNVR) koju vjerojatnosna mjera mora zadovoljavati kako bi izveli cijenu opcije. Prije nego prijeđemo na definiciju podsjetimo se, za vjerojatnost  $\mathbb{Q}$  kažemo da je **ekvivalentna** s  $\mathbb{P}$  i pišemo  $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$ , ako za svaki  $A \in \mathcal{F}$  vrijedi

$$\mathbb{Q}(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0.$$

Kada su dvije vjerojatnosti ekvivalentne znači da se obje slažu u tome što je moguće, a što nemoguće.

**Definicija 4.0.1.** *Vjerojatnosna mjera  $\mathbb{Q}$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  zadovoljava relaciju valuacije lokalno neutralne na rizik (LRNVR), ako su zadovoljena sljedeća četiri uvjeta:*

- (i)  $\mathbb{Q}$  ekvivalentna mjera s  $\mathbb{P}$ ,
- (ii)  $\frac{X_t}{X_{t-1}}$  uvjetno na  $\mathcal{F}_{t-1}$  ima log-normalnu distribuciju obzirom na  $\mathbb{Q}$ ,

(iii)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = e^r,$$

(iv)

$$\text{Var}^{\mathbb{Q}} \left[ \ln \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \text{Var}^{\mathbb{P}} \left[ \ln \frac{X_t}{X_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \quad \mathbb{P} - g.s. \quad (4.3)$$

Definicija kaže da je očekivana stopa povrata za jedan vremenski pomak uz LRNVR mjeru  $\mathbb{Q}$  jednaka kamatnom faktoru  $e^r$ , a uvjetna varijanca log-povrata u odnosu na mjere jednaka. Jednakost uvjetnih varijanci pod dvjema mjerama, dana jednadžbom (4.3), omogućava nam procjenu uvjetne varijance uz vjerojatnost  $\mathbb{P}$ , bez pozivanja na  $\mathbb{Q}$ . Opravdanost naziva "stopa neutralna na rizik" dolazi iz činjenice da je uz  $\mathbb{Q}$  očekivana stopa povrata rizične imovine jednaka očekivanoj stopi povrata nerizične imovine. Primijetimo da prelaskom s mjere  $\mathbb{P}$  na LRNVR mjeru  $\mathbb{Q}$  imamo promjenu očekivanja, odnosno smanjenje stope povrata s  $r + \lambda\sigma$ , na  $r$  uz nepromijenjenu uvjetnu varijancu.

## 4.1 Teorem o LRNVR

Nakon što smo definirali i uveli LRNVR u ovom potpoglavlju dajemo odgovor na pitanje pod kojim uvjetima i kada je LRNVR zadovoljen. Pokazat ćemo da je LRNVR zadovoljen pod nekim poznatim kombinacijama preferencija i pretpostavkama distribucije. Za razumijevanje teorema o postojanju LRNVR potrebno je uvesti i promotriti pojmove i rezultate iz područja mikroekonomike i makroekonomike. Uvedimo prvo funkciju korisnosti koja se uvelike razmatra u modernoj ekonomiji.

Neka potrošač mora odlučiti o toku potrošnje za  $T$  razdoblja. Potrošačka preferencija prema košarici dobara numeričkim pristupom se može prikazati funkcijom korisnosti

$$U(C_0, C_1, \dots, C_T), \quad C_i \text{ potrošnja u vremenskom periodu } i.$$

Funkcija korisnosti je funkcija koja pojedinačnim tržišnim košarama pridružuje razinu korisnosti. Pojam korisnost odnosi se na brojčanu vrijednost koja prikazuje zadovoljstvo koje potrošaču pruža tržišna košarica ([6], str. 73). Standardna pretpostavka za funkciju korisnosti je da je aditivno separabilna. To znači da vrijedi (vidi [11])

$$U(C_0, C_1, \dots, C_T) = \sum_{t=0}^T \beta^t u(C_t), \quad (4.4)$$

gdje je  $0 < \beta < 1$  koeficijent koji interpretiramo kao težinu koju potrošač (agent) stavlja na budućnost u odnosu na sadašnjost. To je u skladu s ponašanjem potrošača jer se smatra da je potrošnja u ranom razdoblju vrijednija od one u budućnosti. Ekonomisti također interpretiraju  $\beta$  kao mjeru strpljivosti potrošača. Za nas će od interesa biti najjednostavniji model potrošnje od dva vremenska trenutka, "sadašnjosti" ( $C_{t-1}$ ) i "budućnosti" ( $C_t$ ). Razlikujemo ukupnu korisnost dobivenu potrošnjom od zadovoljstva dobivenoga jednom dodatnom jedinicom potrošnje dobra. Granična korisnost odražava dodatno zadovoljstvo ostvareno potrošnjom jedne dodatne jedinice dobra [[6], str. 90]. Granična korisnost se matematički izražava kao parcijalna derivacije funkcije korisnosti  $\frac{\partial U(C_0, C_1, \dots, C_T)}{\partial C_i}$ .

Funkcija korisnosti može se koristiti za konstrukciju mjere za sklonost izbjegavanju rizika. Jedna takva mjera je Arrow-Pratt mjera apsolutne averzije prema riziku (engl. *Absolute Risk-Aversion* [14]) definirana s

$$A(C) := -\frac{u''(C)}{u'(C)}.$$

Osim toga možemo promatrati i Arrow-Pratt mjeru relativne averzije prema riziku (engl. *Relative Risk-Aversion* [14]) definiranu s

$$R(C) := -\frac{Cu''(C)}{u'(C)}.$$

Za funkciju korisnosti oblika  $u(C) = \frac{1 - e^{-\lambda C}}{\lambda}$  vrijedi da je funkcija korisnosti s konstantnom apsolutnom averzijom prema riziku (CARA). To je dobiveno rješavajući diferencijalnu jednadžbu  $A(C) = \lambda$ . Jednako tako, rješavajući diferencijalnu jednadžbu  $R(c) = \gamma$  imamo da za funkciju oblika  $u(C) = \frac{C^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$  vrijedi da je funkcija korisnosti s konstantnom relativnom averzijom prema riziku (CRRA).

Sada kada smo uveli i definirali osnovne pojmove potrebne za iskaz teorema, možemo izvesti i dokazati teorem o postojanju LRNVR.

**Teorem 4.1.1.** *Ako reprezentativan agent (zastupnik) bira svoju potrošnju tako da maksimizira korisnost i funkcija korisnost je aditivna i vremenski separabilna, tada LRNVR vrijedi ako je zadovoljen jedan od sljedeća tri uvjeta*

- (i) *Funkcija korisnosti je funkcija s konstantnim iznosom relativne averzije prema riziku i promjena logaritamske agregatne potrošnje je normalno distribuirana s konstantnim očekivanjem i varijancom uz  $\mathbb{P}$ ,*
- (ii) *Funkcija korisnosti je funkcija s konstantnim iznosom apsolutne averzije prema riziku i promjena agregatne potrošnje je normalno distribuirana s konstantnim očekivanjem i varijancom uz  $\mathbb{P}$ ,*
- (iii) *Funkcija korisnosti je linearna.*

*Dokaz.* Neka je  $u(C_t)$  funkcija korisnosti i  $C_t$  agregatna potrošnja za vrijeme  $t$ . Uz pretpostavku teorema o maksimizaciji funkcije korisnosti agenta sadašnju vrijednost imovine možemo izraziti na sljedeći način:

$$X_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ e^{-\rho} \frac{u'(C_t)}{u'(C_{t-1})} X_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \right]. \quad (4.5)$$

Jednadžba (4.5) slijedi iz jednadžbe za cijenu financijske imovine koja je određena prema modelu koji se temelji na potrošnji (engl. *Basic pricing equation*, vidi [5]). U modelu određivanja cijene iz potrošnje, agentova funkcija korisnosti definirana je u ovisnosti o sadašnjoj i budućoj potrošnji

$$U(C_{t-1}, C_t) = u(C_{t-1}) + e^{-\rho} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[u(C_t) | \mathcal{F}_{t-1}],$$

gdje je  $\rho > 0$  koeficijent strpljivosti agenta (vidi Napomenu 4.1.4).

Nadalje, neka je  $T > 0$  fiksno vrijeme promatranja i  $(Y_t : 0 \leq t \leq T)$  adaptiran slučajni proces obzirom na filtraciju  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$  gdje su  $Y_t$  normalno distribuirane slučajne varijable s konstantnim očekivanjem i konstantnom varijancom uz vjerojatnost  $\mathbb{P}$ . Definiamo mjeru  $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  sljedećom formulom

$$d\mathbb{Q} := e^{(r-\rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s} d\mathbb{P}. \quad (4.6)$$

Kako je  $e^{(r-\rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s}$  nenegativna varijabla s konačnim očekivanjem, pomoću Lebesgueovog teorema o monotonij konvergenciji slijedi da je  $\mathbb{Q}$   $\sigma$ -aditivna mjera na  $\mathcal{F}$ . Očito da vrijedi, ako je  $\mathbb{P} = 0$ , tada je i  $\mathbb{Q} = 0$ . Štoviše, vrijedi i obrat, te znači da su vjerojatnosti  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{Q}$  ekvivalentne. Radi potrebe dokaza iskazati i dokazat ćemo dvije pomoćne leme.

**Lema 4.1.2.** *Ako je  $X_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-\rho+Y_t} X_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ , tada je  $\mathbb{Q}$  vjerojatnosna mjera i za svaku  $\mathcal{F}_t$ -izmjerivu slučajnu varijablu  $W_t$  vrijedi  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[W_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t e^{(r-\rho)+Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}]$ .*

*Dokaz.* Pokažimo da je mjera definirana s (4.6) vjerojatnosna mjera.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1 d\mathbb{Q} &= \int_{\Omega} e^{(r-\rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s} d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{(r-\rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s} | \mathcal{F}_0] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{(r-\rho)(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s} e^r \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^{-\rho+Y_T} | \mathcal{F}_{T-1}) | \mathcal{F}_0] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{(r-\rho)(T-1) + \sum_{s=1}^{T-1} Y_s} | \mathcal{F}_0]. \end{aligned}$$

Zadnja jednakost slijedi iz pretpostavke Leme iz koje znamo da vrijedi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-\rho+Y_T} | \mathcal{F}_{T-1}] = e^{-r}.$$

Ponavljajući isti račun dobivamo

$$\int_{\Omega} 1 d\mathbb{Q} = 1,$$

što ukazuje da je mjera  $\mathbb{Q}$  vjerojatnosna.

Drugi dio leme slijedi direktno iz tvrdnje koju navodimo bez dokaza (za dokaz vidjeti [[19], Lema 4.2]). Za svaku  $\mathcal{F}_t$ -izmjerivu slučajnu varijablu  $W_t$ , te  $0 \leq s \leq t \leq T$  vrijedi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[W_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t Z_t | \mathcal{F}_s],$$



gdje je  $(Z_t : 0 \leq t \leq T)$  proces Radon-Nikodymove derivacije definiran kao

$$Z_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T,$$

te je  $Z$  Radon-Nikodymova derivacija od  $\mathbb{Q}$  s obzirom na  $\mathbb{P}$ . Odnosno,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{(r-\rho)T + \sum_{s=1}^T Y_s}, \\ Z_t &= e^{(r-\rho)t + \sum_{s=1}^t Y_s}. \end{aligned}$$

□

**Lema 4.1.3.** *Ako je  $X_{t-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-\rho+Y_t} X_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ , tada vrijedi*

(i)  $\frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}$  ima log-normalnu distribuciju uz vjerojatnost  $\mathbb{Q}$ ,

(ii)  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = e^r$ ,

(iii)  $\text{Var}^{\mathbb{Q}}\left[\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \text{Var}^{\mathbb{P}}\left[\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right]$ ,  $\mathbb{P}$  g.s.

*Dokaz.* Primjenom Leme 4.1.2 za trivijalan slučaj  $W_t = 1$  pokazujemo tvrdnju (ii).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{X_t}{X_{t-1}} e^{(r-\rho)+Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \frac{e^r}{X_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-\rho+Y_t} X_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= e^r. \end{aligned}$$

Nadalje, kako bismo dokazali tvrdnje (i) i (iii) promatramo uvjetnu funkciju izvodnice momenata slučajne varijable  $W_t := \ln \frac{X_t}{X_{t-1}}$  uz vjerojatnost  $\mathbb{Q}$  za sve realne brojeve  $c$  (za koje očekivanje postoji):

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{cW_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{cW_t + (r-\rho) + Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}].$$

Neka je  $\mu_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right]$ . Tada uz vjerojatnost  $\mathbb{P}$  vrijedi  $W_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$  i  $Y_t$  je  $\mathcal{F}_{t-1}$  - uvjetno normalna. Slučajnu varijablu  $Y_t$  možemo prikazati na sljedeći način  $Y_t = \alpha + \beta W_t + U_t$ , gdje su  $W_t$  i  $U_t$  nezavisne slučajne varijable. Odavde imamo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{cW_t} | \mathcal{F}_{t-1}] &= e^{\alpha + (r-\rho)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(\beta + c)W_t + U_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= e^{\alpha + (r-\rho) + \frac{1}{2} + \mathbb{E}[U_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(\beta + c)W_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= e^{\alpha + (r-\rho) + \frac{1}{2} + \mathbb{E}[U_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] + \beta\mu_t + \frac{\beta^2\sigma_t^2}{2} + (\mu_t + \beta\sigma_t^2)c + \frac{c^2\sigma_t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Korištenjem činjenice da je  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1 | \mathcal{F}_{t-1}] = 1$  uz  $c = 0$  slijedi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{cW_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = e^{(\mu_t + \beta\sigma_t^2)c + \frac{c^2\sigma_t^2}{2}}.$$

Kako niz momenata jednoznačno određuje razdiobu od  $W_t$  iz gore pokazanog slijedi

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu_t + \beta\sigma_t, \sigma_t^2),$$

uz vjerojatnost  $\mathbb{Q}$ . Time su dokazane (i) i (iii) tvrdnja Leme. □

Vratimo se sada na dokaz teorema. Primjenom Leme 4.1.3 dokaz direktno slijedi ako je, uz vjerojatnost  $\mathbb{P}$ , granična stopa supstitucije  $u'(C_t)/u'(C_{t-1})$  log-normalno distribuirana. Odnosno, logaritam granične stope supstitucije možemo izraziti pomoću normalno distribuirane slučajne varijable i konstantnog člana. Provjerimo da to vrijedi za svaki uvjet teorema.

- (i) Ako je funkcija korisnosti konstantne relativne averzije prema riziku tada vrijedi da  $\ln(u'(C_t)/u'(C_{t-1})) = -\gamma \ln(C_t/C_{t-1})$  gdje  $\gamma$  zovemo koeficijent konstantne relativne averzije prema riziku. Budući da je iz uvjeta  $\ln(C_t/C_{t-1})$  ima normalnu distribuciju rezultat slijedi.
- (ii) Ako je funkcija korisnosti konstantne apsolutne averzije prema riziku tada vrijedi da  $\ln(u'(C_t)/u'(C_{t-1})) = -\lambda(C_t/C_{t-1})$  gdje je  $\lambda$  koeficijent konstantne apsolutne averzije prema riziku. Budući da je iz uvjeta  $C_t/C_{t-1}$  ima normalnu distribuciju rezultat slijedi.
- (iii) Iz uvjeta (iii) tvrdnja teorema direktno slijedi budući da je marginalna korisnost jednaka 1. □

**Napomena 4.1.4.** *Primijetimo da se u dokazu Teorema 4.1.1 za koeficijent strpljivosti uzima  $\rho$ . Jasno da za  $\rho > 0$  imamo  $e^{-\rho} \in (0, 1)$ , što je u skladu s (4.4) za  $\beta = e^{-\rho}$ .*

## 4.2 Određivanje cijene opcija

**Teorem 4.2.1.** *Neka  $\mathbb{Q}$  zadovoljava LRNVR uvjete. Tada vrijedi*

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t, \quad (4.7)$$

gdje je

$$\xi_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

i

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \lambda \sigma_{t-i})^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (4.8)$$

*Dokaz.* Iz drugog uvjeta definicije 4.0.1 znamo da je  $\frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}$  log-normalno distribuiran uz vjerojatnost  $\mathbb{Q}$ . Tada možemo log-povrat zapisati kao

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} = \nu_t + \xi_t,$$

gdje je  $\nu_t$  uvjetno očekivanje, a  $\xi_t$   $\mathbb{Q}$ -normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem nula i uvjetnom varijancom  $\sigma_t^2$ . Potonje upravo vrijedi zbog (4.3) i  $\sigma_t^2 = \text{Var}^{\mathbb{P}} \left[ \ln \frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1} \right]$ . Prvo pokažimo da vrijedi  $\nu_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2$ .

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{\nu_t + \xi_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = e^{\nu_t + \frac{\sigma_t^2}{2}}.$$

Kako je  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_t}{X_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = e^r$  po LRNVR slijedi da je  $\nu_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2$ . Potrebno je još pokazati da se uvjetna varijanca može zapisati kao u iskazu teorema. Prema prethodnom rezultatu i (4.1),  $r + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t$  iz čega slijedi da je  $\varepsilon_t = \xi_t - \lambda \sigma_t$ . Odavde zamjenom  $\varepsilon_t$  u jednadžbi uvjetne varijance slijedi tvrdnja teorema.  $\square$

Teorem 4.2.1 implicira da oblik GARCH(p, q) procesa ostaje uglavnom netaknut s obzirom na LRNVR. Međutim, uvjetna varijanca u okviru mjere neutralne na rizik nije u skladu s definicijom GARCH modela. Primijetimo da izlučivanjem  $\sigma_{t-i}^2$  iz zagrade kod drugog člana jednadžbe za uvjetnu varijancu (4.8) imamo  $(\frac{\xi_{t-i}}{\sigma_{t-i}} - \lambda)$  pod zagradom što je normalno distribuirana slučajna varijabla s pomakom  $\lambda$  jer je  $\frac{\xi_{t-i}}{\sigma_{t-i}}$  standardno normalna slučajna varijabla uz  $\mathbb{Q}$ . Nadalje, prema Teoremu 4.2.1 premija za rizik,  $\lambda$ , utječe na proces uvjetne varijance na globalnoj razini iako je rizik lokalno neutraliziran pod mjerom  $\mathbb{Q}$ . Drugim riječima, bitno je primijetiti da lokalna neutralizacija rizika nije ekvivalentna globalnoj neutralizaciji rizika.

Upravo primjenom prethodnog teorema sljedeći rezultat daje nam formulu za cijenu financijske imovine u trenutku  $T$ .

**Korolar 4.2.2.** *Cijena financijske imovine u trenutku  $T$  je*

$$X_T = X_t \exp \left[ (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s \right]. \quad (4.9)$$

*Dokaz.* Dokaz slijedi direktno iz Teorema 4.2.1.

$$\ln X_T = \ln X_{T-1} + r - \frac{1}{2}\sigma_T^2 + \xi_T,$$

ponavljajući raspis do trenutka  $X_t$  dolazimo do tvrdnje Korolaru.  $\square$

Kako je kamatna stopa  $r$  jednaka za posuđivanje i ulaganje, tada da dobijemo sadašnju vrijednost budućeg novčanog izraza buduću vrijednost financijske imovine pomnožimo s  $e^{-rt}$ . Takav proces naziva se *proces diskontiranja* te diskontiranu vrijednost financijskoga instrumenta u trenutku  $t$  označavamo s  $\tilde{X}_t$ . Nadalje, na financijskom tržištu prirodno je pretpostaviti da je diskontirana vrijednost uz mjeru neutralnu na rizik martingal. Martingal je slučajni proces za koji vrijedi da je očekivana sljedeća vrijednost jednaka trenutačnoj u svakom trenutku, gdje su prethodne vrijednosti procesa uključujući trenutnu poznate. Važnost martingala na financijskom tržištu predstavlja sljedeći jednostavni primjer. Neka je  $X_n$  cijena dionice te neka očekujemo porast cijene dionice s danas na sutra. Kako i ostali sudionici na tržištu imaju pristup relevantnim informacijama, odlučili bi isto prisegnuti prema kupnji te dionice. Međutim, sudionici koji posjeduju dionice ne bi bili voljni prodati dionicu po današnjoj nižoj cijeni. Iz ovog primjera vidimo da nije nerazumno tvrditi da je cijena dionica martingal. Upravo sljedeći Korolar dokazuje da je uz vjerojatnost  $\mathbb{Q}$   $\tilde{X}_t$  martingal, a prije samoga Korolaru prisjetimo se formalne definicije martingala u diskretnom vremenu [17].

**Definicija 4.2.3.** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor,  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  filtracija,  $X = (X_t : t \geq 0)$  slučajni proces. Pretpostavimo da je  $X$  adaptiran s obzirom na  $\mathbb{F}$ , te da je  $E|X_t| < \infty$  za sve  $t \geq 0$ .  $X$  se zove martingal (preciznije,  $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ -martingal), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t \text{ g.s., za sve } t \geq 0.$$

**Korolar 4.2.4.** *Diskontirana cijena  $e^{-rt}X_t$  je  $\mathbb{Q}$  - martingal.*

*Dokaz.* Prema Korolaru 4.2.2 imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-rt} X_{t-1} \exp \left( r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t \right) | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= e^{-r(t-1)} X_{t-1} \\ &= \tilde{X}_{t-1}, \end{aligned}$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz činjenice da je  $\xi_t$  uvjetno normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom  $\sigma_t^2$  uz vjerojatnost  $\mathbb{Q}$ . Kako je  $\tilde{X}_t$  adaptiran obzirom na filtraciju  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$  te je  $E|\tilde{X}_t| < \infty$  slijedi tvrdnja korolaru.  $\square$

Jedna od važnih upotreba modela određivanja cijena opcija je i delta *hedge*. Investitoru je od interesa izloženost portfelja riziku, odnosno kako se mijenja vrijednost portfelja u odnosu na promjenu vrijednosti primarne financijske imovine. Promotrimo portfelj koji se sastoji od primarne financijske imovine i njezinih izvedenica. Vrijednost takvog portfelja je  $\chi(t, X_t)$  za neku funkciju  $\chi : [0, T] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Prva parcijalna derivacija funkcije  $\chi$  u ovisnosti o  $X_t$  naziva se delta i pripada skupini "Grka" (engl. *The Greeks*). U sljedećem korolaru izračunata je delta za portfelj koji se sastoji od jedne europske call opcije modelirana GARCH(p,q) procesom,  $\Delta_t^{GH}$ . Europska call opcija je ugovor koji kupcu opcije (vlasniku opcije) daje pravo na kupnju vrijednosnog papira ili neke druge vezane imovine na dan određen u opciji, odnosno na dan istjecanja njihova važenja (engl. *maturity*) po unaprijed dogovorenoj cijeni  $K$  (engl. *strike price*). Ako promatramo portfelj koji se sastoji od jedne prodane izvedenice i primarne imovine na koju je izvedenica napisana tada je delta *hedge* upravo količina primarne imovine koja nam je potrebna kako bismo se zaštitili od proizašlih obaveza i promjena na tržištu. Drugim riječima, kako bi portfelj kojeg imamo bio *delta neutralan* [19]. *Delta hedging* je strategija trgovanja opcijama kojoj je primarni cilj zaštititi ili smanjiti rizik koji proizlazi iz promjene cijena financijske imovine. Prema [18] znamo da je cijena call opcije dana izrazom

$$C_t^{GH} = e^{-(T-t)r} \mathbb{E}^Q[\max(X_T - K, 0) | \mathcal{F}_t]. \quad (4.10)$$

Primijetimo da eksponent "GH" u oznaci  $C_t^{GH}$  označava da se radi o cijeni europske call opcije u terminu GARCH modela. Odnosno,  $X_T$  zadovoljava jednadžbu (4.9).

#### Korolar 4.2.5.

$$\Delta_t^{GH} = e^{-(T-t)r} \mathbb{E}^Q \left[ \frac{X_T}{X_t} \mathbb{1}_{\{X_T \geq K\}} | \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.11)$$

*Dokaz.* Definiramo pomoćnu varijablu.

$$Y_{t,T} \equiv (T-t)r - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s.$$

Prema Korolaru 4.2.2 i (4.10) imamo

$$C_t^{GH}(X_t) = e^{-(T-t)r} \mathbb{E}^Q \left[ \max(X_t e^{Y_{t,T}} - K, 0) | \mathcal{F}_t \right].$$

Primijetimo da je dodan argument  $X_t$  kako bi se naznačilo da je cijena opcije u trenutku  $t$  funkcija u ovisnosti o  $X_t$ . Neka je  $h > 0$ .

$$\begin{aligned} C_t^{GH}(X_t + h) - C_t^{GH}(X_t) &= e^{-(T-t)r} \mathbb{E}^Q \left[ \max[(X_t + h)e^{Y_{t,T}} - K, 0] - \max[X_t e^{Y_{t,T}} - K, 0] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-(T-t)r} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \max[(X_t + h)e^{y} - K, 0] - \max[X_t e^{y} - K, 0] \right] dF(y | \mathcal{F}_t), \end{aligned}$$

gdje je  $F(y | \mathcal{F}_t)$  uvjetna funkcija distribucije od  $Y_{t,T}$  uz vjerojatnost  $\mathbb{Q}$ . Kako je  $h > 0$ , gornji izraz možemo raspisati kao

$$e^{-(T-t)r} \int_{\ln(K/X_t)}^{\infty} h e^y dF(y | \mathcal{F}_t) + e^{-(T-t)r} \int_{\ln(K/(X_t+h))}^{\ln(K/X_t)} [(X_t + h)e^y - K] dF(y | \mathcal{F}_t).$$

Budući da  $\frac{1}{h} \int_{\ln(K/(X_t+h))}^{\ln(K/X_t)} [(X_t + h)e^y - K] dF(y | \mathcal{F}_t) \rightarrow 0$  ako  $h \rightarrow 0$  imamo

$$\frac{1}{h} [C_t^{GH}(X_t + h) - C_t^{GH}(X_t)] \rightarrow e^{-(T-t)r} \int_{\ln(K/X_t)}^{\infty} e^y dF(y | \mathcal{F}_t).$$

Slično se pokaže da isti rezultat vrijedi i za  $h < 0$ . Stoga vrijedi sljedeća formula za delta

$$\begin{aligned} \Delta_t^{GH} &= e^{-(T-t)r} \int_{\ln(K/X_t)}^{\infty} e^y dF(y | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-(T-t)r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_T}{X_t} \mathbb{1}_{\{X_T \geq K\}} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

□

Za Europsku put opciju delta i cijenu opcije se mogu izraziti iz call-put pariteta (vidi [18]):

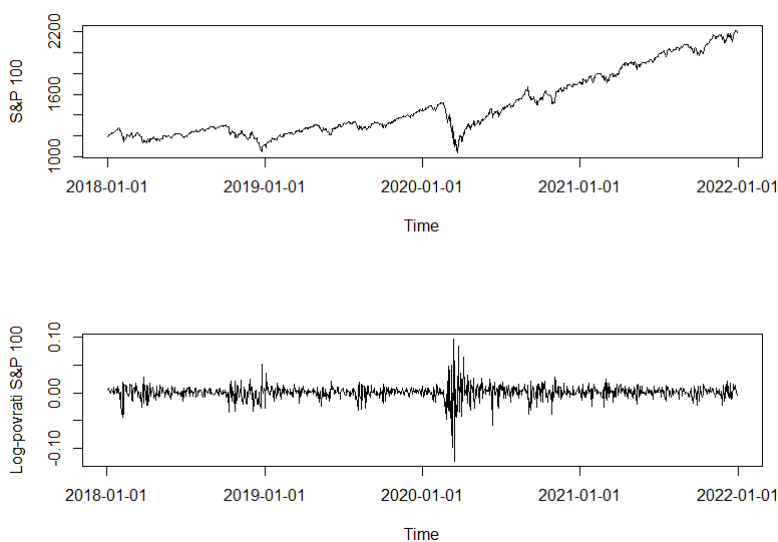
$$C_t^{GH} - P_t^{GH} = X_t - K e^{-(T-t)r}.$$

Pa je prema tome delta za europsku put opciju je  $\Delta_t^{putGH} = \Delta_t^{callGH} - 1$ . Primijetimo da delta hedge ovisi o trenutku  $t$ , to znači da je potrebno provoditi diskretno rebalansiranje delta hedge kako bi se osigurala adekvatna zaštita od rizika promjene cijene.

### 4.3 Praktični primjer

U ovom odjeljku ilustrirat ćemo primjenu gore pokazanih rezultata u programskom jeziku R. R kod korišten za izračun i rezultate ovog odjeljka nalazi se u Dodatku A. Cilj je odrediti cijenu Europske call opcije (4.10) i deltu (4.11) indeksa S&P 100 GARCH(1,1) modelom određivanja cijena opcija. Kako bismo izračunali GARCH cijenu opcije i pripadnu deltu primijenit ćemo Monte Carlo metodu. U praksi su Monte Carlo metode uobičajene kada se određeni problem ne može jednostavno ili ga nije moguće analitički riješiti što je, primjerice, slučaj kod određivanja uvjetne distribucije vremenskog niza cijene imovine kod GARCH modela, zbog čega ih u ovom primjeru koristimo. Primijetimo da kod određivanja cijene opcija, za simulaciju cijene imovine u trenutku  $t+1$  uz mjeru neutralnu na rizik (LR-NVR),  $X_t$  i uvjetna varijanca  $\sigma_{t+1}^2$  čine zajedno skup informacija.

Promotrimo dnevnu zaključnu cijenu S&P 100 indeksa u periodu od 2. siječnja 2018. godine do 31. prosinca 2021. godine što čini 1008 opservacija (izvor [20]). Spomenuli smo u drugom poglavlju S&P 500 indeks, analogno Standard and Poor's 100 je burzovni indeks koji se sastoji od 100 kompanija izlistanih na američkim burzama s najvećom kapitalizacijom. S&P indeksi su dobri pokazatelji situacije u američkom gospodarstvu i dobar odraz tržišta. Nama su od osobite zanimljivosti jer se radi o jednim od indeksa opcija kojima se najviše trguje. Za početak promotrimo kretanje zaključne cijene u promatranom periodu. Na slici 4.1 opet možemo vidjeti utjecaj COVID-19 pandemije na cijenu indeksa te oporavak i linearan rast (denominirano u američkim dolarima \$).



Slika 4.1: Kretanje zaključnih cijena i log-povrata indeksa S&P 100 za razdoblje od 02.01.2018. do 31.12.2021. godine.

Prije nego krenemo s modelom odredimo očekivanje log-povrata. Prema slici 4.1 možemo kao nul-hipotezu postaviti da je očekivanje log-povrata nula, što provjeravamo t-testom. Provodimo dvostrani t-test u R-u uz pretpostavku normalnosti, odnosno testiramo hipotezu

$$H_0 : \mathbb{E} \left[ \ln \frac{X_t}{X_{t-1}} \right] = 0, \quad H_1 : \mathbb{E} \left[ \ln \frac{X_t}{X_{t-1}} \right] \neq 0.$$

P-vrijednost dvostranog t-testa iznosi 0.1548. Prema tome, za standardne razine značajnosti, odnosno 1%, 5% i 10% ne odbacujemo  $H_0$ .

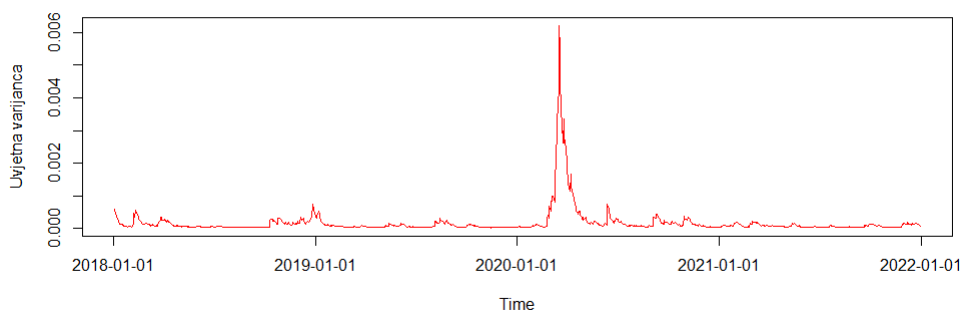
Za određivanje cijena opcija pretpostavljamo i uzimamo da log-povrati slijede GARCH(1,1) model. To znači da log-povrati zadovoljavaju jednadžbu (4.1) te pripadna uvjetna varijanca jednadžbu (3.10). Kamatnu stopu  $r$  u modelu fiksiramo na 0% što je razumna pretpostavka kako su kamatne stope na tržištu vrlo niske. Upravo je u ožujku ove godine (2022.) Sustav Federalnih rezervi u SAD-u, FED (engl. *Federal Reserve System*), proglasio podizanje kamatnih stopa nakon četiri godine ne interveniranja.

Parametre modela procjenjujemo metodom maksimalne vjerodostojnosti i dobivamo sljedeće

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} = 0.026618\sigma_t - 0.5\sigma_t^2 + \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = 5.079 \times 10^{-5} + 0.18803\varepsilon_t^2 + 0.780897\sigma_{t-1}^2.$$

Grafičkim prikazom na slici 4.2 promotrimo kretanje i vrijednost uvjetne varijance u vremenu. Prvo primijetimo da je uvjetna varijanca izrazito mala, to možemo objasniti time da je S&P indeks relativno stabilan i nije jako rizičan. Drugo, primijetimo nagli skok uvjetne varijance upravo u periodu naglog pada vrijednosti indeksa.



Slika 4.2: Uvjetna varijanca modela  $\sigma_t^2$ .

Cijenu Europske call opcije odredit ćemo uz vjerojatnosnu mjeru  $\mathbb{Q}$  koja zadovoljava LRNVR uvjete. Prema Teoremu 4.2.1, uz LRNVR, vrijedi

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\xi_{t-1} - \lambda\sigma_{t-1})^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2,$$

te analognim raspisom kao u Teoremu 3.1.2 imamo da je bezuvjetno očekivanje uvjetne varijance sljedeće

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1(1 + \lambda^2) - \beta_1}.$$



Prema tome, možemo procijeniti da GARCH godišnja (na temelju 365 dana) standardna devijacija iznosi  $\sqrt{365} \mathbb{E}[\sigma_7^2] = 24.48\%$ . To nam je mjerilo rizičnosti i disperzije godišnjeg log-povrata.

Sada kad smo odredili parametre modela, odredimo cijenu Europske call opcije indeksa koja je zadana sa sljedećim specifikacijama: vrijeme dospijeća  $T$  je 107 dana, cijena izvršenja  $K$  iznosi 1800.00\$ i početna cijena  $S_0$  je uzeta kao zaključna cijena za dan 19.01.2022 te iznosi 2090.13. Upravo je ovakva specifikacija uzeta kako bi u nastavku mogli usporediti naše rezultate sa stvarnim podacima. Korištenjem 50 000 Monte Carlo simulacija dobiveni su sljedeći rezultati

$$C_0^{GH} = 304.523 \$ ,$$

$$\Delta_0^{GH} = 0.9068.$$

Pravedna cijena na pouzdanom financijskom tržištu iznosi 13.752, \$, a kako bi se zaštitili od proizašlih obaveza u slučaju da smo mi prodali Europsku call opciju potrebno je imati 0.9068 S&P 100. Također, po definiciji  $\Delta_0^{GH}$  izražava omjer promjene cijene opcije i promjene cijene temeljne imovine. Stoga, u našem slučaju za svaku promjenu od 1\$ primarne imovine imamo promjenu cijene call opcije za 0.9068\$.

S "Yahoo! Finance", [20], preuzeli smo stvarne podatke za jednu kupljenu call opciju S&P 100. U Tablici 4.1 su izlistani preuzeti podaci. Uspoređujući dobivene rezultate s onima u Tablici 4.1 vidimo odstupanje od 65.37\$, odnosno da je cijena call opcije čija je kupnja izvršena 19.01.2022 veća za 21.5% u odnosu na izračunatu cijenu.

Vrijeme dospijeća	17.06.2022
Cijena izvršenja	1800 \$
Zadnji datum trgovanja	19.01.2022 12:43PM EDT
Zadnja cijena opcije	369.89 \$
Volumen	1

Tablica 4.1: Preuzeti podaci za call opciju S&P 100 [20]

Brojni faktori utječu na samo odstupanje podataka. Jedan od mogućih razloga je nepostizanje uvijek savršenog tržišta, odnosno tržište je podložno špekulantima i subjektivnim transakcijama. Međutim, određivanje cijene call opcije s GARCH modelom daje na pristupačan način zadovoljavajući okvir.

# Bibliografija

- [1] C. Alexander. *Market Models - A Guide to Financial Data Analysis*. John Wiley & Sons, 2001.
- [2] J. Arnerić. *Modeliranje volatilnosti na financijskim tržištima*. Matematički modeli u analizi razvoja Hrvatskog financijskoga tržišta (Z. Aljinović i B. Marasović). 2012.
- [3] T. Bollerslev. “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”. *Journal of Econometrics* 31 (1986.), str. 307–327.
- [4] P. J. Brockwell i R. A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, 2002.
- [5] J.H. Cochrane. *Asset Pricing*. Princeton University Press, 2001.
- [6] R.S. Pindyck i D.L. Rubinfeld. *Mikroekonomija*. Zagreb: MATE, 2005.
- [7] J. C. Duan. “The GARCH Option Pricing Model”. *Mathematical Finance*. Vol. 5, No. 1 (1995.), str. 13–32.
- [8] R. F. Engle. “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”. *Econometrica* Vol. 50, No. IV (1982.), str. 987–1007.
- [9] C. Francq i J. M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. John Wiley & Sons, 2019.
- [10] M. Huzak. *Vjerojatnost i matematička statistika, nastavni materijal 2006*. (studeni 2021.) URL: <http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/vms.pdf>.
- [11] P. Krusell. *Lecture notes for Macroeconomics I, 2004*. (studeni 2021.) URL: <http://www.econ.yale.edu/smith/econ510a/book.pdf>.
- [12] D. B. Nelson. “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach”. *Econometrica*, Vol. 59, No. 2 (1991.), str. 347–370.
- [13] D. B. Nelson. “Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model”. *Econometric Theory*, Vol. 6, No. 3 (1990.), str. 318–334.

- [14] A. Rao. *Understanding Risk-Aversion through Utility Theory*. (siječanj 2022.) URL: [http://web.stanford.edu/class/cme241/lecture\\_slides/UtilityTheoryForRisk.pdf](http://web.stanford.edu/class/cme241/lecture_slides/UtilityTheoryForRisk.pdf).
- [15] R. S. Tsay. *An Introduction to Analysis of Financial Data With R*. John Wiley & Sons, 2013.
- [16] R. S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, 2010.
- [17] Z. Vondraček. *Slučajni procesi, nastavni materijali*. 2010.
- [18] V. Wagner. *Financijsko modeliranje 1, nastavni materijali*. (studeni 2021.) URL: [https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm1\\_p11\\_2.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm1_p11_2.pdf).
- [19] V. Wagner. *Financijsko modeliranje 2, nastavni materijali*. 10. ožujak 2021.
- [20] *S&P 100*. (travanj 2022.) URL: <https://finance.yahoo.com/>.
- [21] *ZSE - Zagrebačka burza, CROBEX*. (prosinac 2021.) URL: [https://zse.hr/hr/indeks/365?isin=HRZB00ICBEX6&tab=index\\_history&date\\_from=2010-05-03&date\\_to=2021-05-03](https://zse.hr/hr/indeks/365?isin=HRZB00ICBEX6&tab=index_history&date_from=2010-05-03&date_to=2021-05-03).

# Dodatak A

## R kod korišten u praktičnom primjeru

```
1 library(fGarch)
2
3 # Ucitavanje podataka
4 duan<-read.csv("^OEX (2).csv")
5 y<-duan[,5]
6 log_povrat<-diff(log(y))
7 vrijeme<-duan[,1]
8 rtn<-log_povrat
9
10 par(mfrow=c(2,1))
11 plot(as.timeSeries(y, vrijeme), ylab="S&P 100")
12 plot(as.timeSeries(log_povrat, vrijeme[-1]), ylab="Log-povrati S&P 100")
13 par(mfrow=c(1,1))
14
15 # pomocne funkcije
16 t_test = function(x){
17
18   #Uz pretpostavku da podaci (log-povrati) podvrgavaju normalnoj
19     razdiobi.
20   #Testiramo hipotezu:
21   #H0:mi=0
22   #H1:mi!=0   Nap. dvostrani t-testa
23   #Provodimo t-test, jer su podaci normalno distribuirani s nepoznatom
24     standardnom devijacijom
25   print(t.test(x))
26 }
27
28 garchM_duan<- function(rtn, rf){
29   global_var <<-rtn                               #konstruirana globalna varijabla
30     , potrebna za funkciju
31   if(is.matrix(rtn))rtn=c(rtn[,1])                #Provjera jesu li sad ulazni
```

```

    podaci matrica
30 m1=garchFit(~1+garch(1,1), data=rtn, trace=F, include.mean = F) #
    procjena parametara
31 est=coef(m1)
32 omega=est[1]
33 alpha=est[2]
34 beta=est[3]
35 z<-as.numeric(rtn)
36 Mean=mean(z^2)
37 e=omega+alpha*c((Mean-omega)/alpha,z[-length(z)]^2)
38 v1=filter(e,beta,"r",init=0)
39 z=z+v1/2-rf                                     #Po jednadzbi (4.1)
40 m2=lm(z~sqrt(v1))
41
42 lam=as.numeric(m2$coefficients[2])
43 S=1e-6
44 params=c(lambda=lam, om=omega, alph=alpha, bet=beta)
45 lowBounds=c(lambda=abs(lam)*(-10), ome=0, alph=0+S, bet=0+S)
46 uppBounds=c(lambda=abs(lam)*(10), ome=omega*100 ,alph=1-S,bet=1-S)
47
48 fit=optim(params, glkM, method = "L-BFGS-B",lower = lowBounds, upper =
    uppBounds, hessian = FALSE)
49 pr<-data.frame(fit$par, row.names = c("lambda", "alpha_0", "alpha_1",
    "beta_1"))
50 print("Coefficient(s):")
51 print(pr)
52 cat("Maximized log-likelihood: ",-fit$value,"\n")
53
54 fit$par
55 }
56
57 glkM = function(pars){
58
59   lambda=pars[1]; omega=pars[2]; alpha=pars[3]; beta=pars[4]
60   nT=length(global_var)
61   if((alpha*(1+lambda^2)+beta)>= 1){ return(0)}
62   if((alpha+beta)>=1) {return(0)}
63   ht=mean(global_var^2)
64   et=global_var[1]-lambda*sqrt(ht)+ht/2-rf
65   at=c(et)
66   for (i in 2:nT){
67     sig2t=omega+alpha*at[i-1]^2+beta*ht[i-1]
68     et = global_var[i]-lambda*sqrt(sig2t)+sig2t/2-rf
69     at=c(at,et)
70     ht=c(ht,sig2t)
71   }
72

```

```

73  LL=sum(0.5*log(ht[-(1:2)]) + 0.5*(at[-(1:2)]^2)/ht[-(1:2)])
74  LL
75  }
76
77  t_test(log_povrat)
78  #One Sample t-test
79
80  #data:  x
81  #t = 1.4239, df = 1006, p-value = 0.1548
82  #alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
83  #95 percent confidence interval:
84  #  -0.0002287247  0.0014383744
85  #sample estimates:
86  #  mean of x
87  #0.0006048248
88
89  # Specifikacija:
90  Nsim=50000      #broj simulacija
91  K=1800.00      #cijena izvršenja
92  T=107          #vrijeme dospijeca u danima
93  rf=0           #neprekidna kamatna stopa
94  h=numeric(T)  #GARCH varijanica
95  e=numeric(T)  #GARCH error/rezidual/sok vrijednost
96  SS=numeric(T) #Simulirana traektorija vrijednosti financijske imovine
97  Call=numeric(Nsim) #Simulirana vrijednost European call opcije u
      trenutku T
98  Delta=numeric(Nsim) #Simulirana vrijednost delta
99  LIV=1          #Inicijalna vrijednost uvjetne varijance. U clanku
      Duan promatra sqrt(h1)/sigma in {0.8, 1.0, 1.2}
100
101  S=2090.13      #promptna/pocetna cijena
102
103  # Procjena parametara za GARCH (Dual)
104
105  parametri=as.numeric(garchM_duan(log_povrat, rf))
106  #[1] "Coefficient(s):"
107  #fit.par
108  #lambda  2.661790e-02
109  #alpha_0  5.079286e-06
110  #alpha_1  1.880314e-01
111  #beta_1   7.808974e-01
112  #Maximized log-likelihood:  4144.312
113
114  GARCH_Var=parametri[2]/(1-parametri[3]*(1+parametri[1]^2)- parametri[4])
      #GARCH varijanica
115  GARCH_aVol=sqrt(365*GARCH_Var)
      #GARCH godisnja standardna devijacija

```

```

116
117 GARCH_Var
118 #0.0001641764
119 GARCH_aVol
120 #0.2447946
121
122 h_plot=numeric(length(log_povrat))
123 e_plot=numeric(length(log_povrat))
124 for(t in 1:length(log_povrat)){
125   if(t==1) {h_plot[t] = mean(log_povrat^2)}
126   else {h_plot[t] = parametri[2] + parametri[3]*(e_plot[t-1]^2) +
        parametri[4]*h_plot[t-1]}
127
128   e_plot[t] = log_povrat[t]-parametri[1]*sqrt(h_plot[t])+h_plot[t]/2-rf
129 }
130
131 plot(as.timeSeries(h_plot, vrijeme[-1]), ylab="Uvjetna varijanca", col="
        red")
132
133 # Monte Carlo simulacije
134 for(i in 1:Nsim){
135   SS[1]=S
136   h[1]=GARCH_Var*LIV
137   e[1]=0
138   for(t in 2:T){
139     h[t] = parametri[2] + parametri[3]*((e[t-1] - parametri[1]*sqrt(h[t
        -1]))^2) + parametri[4]*h[t-1]
140     e[t] = sqrt(h[t])*rnorm(1)
141     SS[t]= SS[t-1]*exp(rf - 0.5*h[t] + e[t])
142   }
143   Call[i] = max(SS[T]-K,0)
144   Delta[i]= (if (SS[T]>=K) 1 else 0)*SS[T]
145 }
146
147 GARCH_Call = exp(-T*rf)*mean(Call)
148 GARCH_Delta= exp(-T*rf)*mean(Delta)/S

```

# Sažetak

U ovom diplomskom radu predstavljamo jednu od brojnih primjena modela volatilnosti na izvedenice. U samom središtu je GARCH model koji je jedan od najznačajnijih i često korištenih modela volatilnosti za financijske vremenske nizove. Na početku, iznosimo već poznate rezultate i alate za vremenske nizove i njihovu primjenu u financijama. Dajemo uvid u modele volatilnosti kroz razumijevanje osnovnog koncepta volatilnosti, te motivaciju iza proučavanja takvih modela kao i primjenu istih za određivanje cijena opcija. Također, ukratko uvodimo ARCH model koji je preteča GARCH modelu kojemu smo se detaljnije posvetili. Između ostalog, iskazujemo teorem o nužnom i dovoljnom uvjetu pri kojemu je  $GARCH(p,q)$  model slabo stacionaran, te u nastavku promatramo neke modifikacije samog modela i njegova proširenja. Slijedi okosnica ovog rada u kojoj promatramo model određivanja cijena opcija gdje uvjetna varijanca log-povrata financijske imovine prati  $GARCH(p,q)$  proces. Na kraju rad zaokružujemo praktičnim primjerom ilustriranim u programskom jeziku R gdje teorijske rezultate primjenjujemo na stvarnim podacima s tržišta za određivanja cijene *europske call* opcije i odgovarajuće delte.





# Summary

In this Master's thesis, we present one of the many applications of the volatility model on derivatives. The focus is on the GARCH model as one of the most significant and frequently used volatility models for financial time series. In the beginning, we present the already known results and tools for time series and their application in finance. We provide insight into volatility models through understanding the basic concept of volatility, the motivation behind studying such models, as well as the application in option pricing. Also, we briefly introduce the ARCH model which is the forerunner of the GARCH model that we observe in more detail. Moreover, we present the theorem that gives the necessary and sufficient conditions under which the GARCH (p, q) model is weakly stationary. Furthermore, we observe some modifications of the model itself and its extensions. The following chapter is the backbone of this paper in which we present the option pricing model where the conditional variance of the log-return of financial assets follows the GARCH (p, q) process. Finally, we conclude the thesis with a practical example illustrated in the programming language R, where we apply the theoretical results to actual data for the *European call* option pricing and the corresponding delta.



# Životopis

Dana 27. lipnja 1997. godine rođena u Zagrebu. Pohađala osnovnu školu Miroslava Krležu u Zagrebu te nakon završetka upisujem 2012. godine XV. Prirodoslovnu-matematičku gimnaziju u Zagrebu. Godine 2016. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovnom-matematičkom fakulteta Sveučilišta u Zagrebu te završavam 2019. godine i stečem akademski naziv univ.bacc.math. Iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij smjer Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu.