Četverokuti u hiperboličkoj ravnini

Kuterovac, Doris

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Doris Kuterovac

Četverokuti u hiperboličkoj ravnini

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, srpanj 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Vedranu Krčadincu na pomoći u izradi ovoga rada. Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji, ocu Ivicu, majci Jasni i sestri Martini. Zahvaljujem im se na podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom mojih studentskih dana.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom diplomskom radu ponovit ćemo osnovne činjenice o dvije vrste četverokuta u euklidskoj ravnini, pravokutnicima i paralelogramima, te obraditi analogone tih četverokuta u hiperboličkoj ravnini. Četverokuti euklidske geometrije su sveprisutni u našoj okolini i svakom matematičaru veoma poznati, no njihovi analogoni u hiperboličkoj geometriji su manje zastupljena matematička tema.

Kako bi rezultati ovoga rada bili što bolje prikazani i jasniji, u drugom poglavlju obradit ćemo aksiome ravninske geometrije i dokazati pomoćne tvrdnje. Drugo poglavlje nam je važno jer prvih šest aksioma vrijedi i u euklidskoj i u hiperboličkoj geometriji, a sedmi aksiom nam otkriva glavnu razliku između dviju navedenih geometrija. U ovom radu koristit ćemo verziju aksioma matematičara Georgea Davida Birkhoffa.

Treće poglavlje posvećeno je definiciji i osnovnim svojstvima te vrstama poligona. Definirat ćemo slabi poligon, te općeniti poligon uz pomoć aksioma neutralne geometrije. Zatim ćemo definirati konveksni poligon koji će se koristiti kroz daljnje rezultate diplomskog rada, te nekoliko vrsta poligona. Četverokuti su specijalni slučaj poligona s četiri vrha.

U četvrtom poglavlju dat ćemo osnovnu definiciju i neka svojstva pravokutnika u euklidskoj ravnini. Ponovit ćemo kriterij sukladnosti četverokuta te dokazati da u euklidskoj ravnini pravokutnici postoje koristeći aksiom o paralelama. U hiperboličkoj geometriji pravokutnici na kakve smo navikli ne postoje, no postoje analogni četverokuti, a to su Saccherijevi četverokuti, Lambertovi četverokuti te pseudopravokutnici. Definirati ćemo svaki od ovih četverokuta, dokazati neka svojstva, te izvesti formule za računanje površine tih četverokuta.

U zadnjem, petom poglavlju ovoga rada ponovit ćemo definiciju i karakterizacije paralelograma u euklidskoj geometriji. Svojstvo paralelnosti u euklidskoj ravnini je relacija ekvivalecije. U hiperboličkoj ravnini morat ćemo koristiti drugačiju relaciju ekvivalencije, svojstvo asimptotičnosti kako bismo definirali paralelne pravce. Nakon definicije i svojstava paralelnih i ultraparalelnih pravaca u hiperboličkoj ravnini, dat ćemo definiciju paralelograma u hiperboličkoj geometriji, te dokazati osnovna svojstva hiperboličkog paralelograma koristeći aksiome neutralne geometrije.

2 Aksiomi ravninske geometrije

Euklidov originalni sustav aksioma i postulata bio je nepotpun. Euklid nije aksiomatizirao pojam *između*, iako ga je koristio u dokazima. Prvi potpuni sustav aksioma euklidske ravnine dao je matematičar David Hilbert 1899. godine. U ovom radu koristimo varijantu Birkhoffovih aksioma iz knjige [5], koji uzimaju kao poznat pojam realnog broja. Nedefinirani pojmovi su točka, pravac, incidencija, udaljenost točaka i mjera kutova. Navedimo sada aksiome:

Aksiom 1. *Za svake dvije točke A i B postoji jedinstveni pravac koji ih sadrži. Nazivamo ga spojnicom od A i B te označavamo AB.*

Aksiom 2. *Na skupu točaka zadana je metrika. Udaljenost točaka A i B označavamo $|AB|$.*

Aksiom 3. *Za svaki pravac p postoji bijekcija $x : p \to \mathbb{R}$ takva da za sve točke $A, B \in p$ vrijedi $|AB| = |x(A) - x(B)|$.*

Bijekciju x s tim svojstvom nazivamo koordinatizacijom pravca. Neka su dane točke A i B s koordinatama $a = x(A)$, $b = x(B)$ i pretpostavimo da je $a \leq b$, inače zamijenimo koordinatizaciju x s kordinatizacijom $-x$. Dužina s krajevima A i B je skup točaka $\overline{AB} = \{T \in AB \mid a \leq x(T) \leq b\}$. Kažemo da točka C leži između točaka A i B ako leži na pravcu AB i njezina koordinata $c = x(C)$ zadovoljava $a < x(C) < b$. Time smo definirali relaciju "biti između" za kolinearne točke.

Aksiom 4. *Za svaki pravac p postoje dva skupa točaka $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ (poluravnine) takvi da $\{p, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ čini particiju skupa svih točaka i vrijedi:*

(a) za svake dvije točke A i B iz iste poluravnine dužina $\overline{AB}$ ne siječe p,

(b) za svake dvije točke A i B iz različitih poluravnina dužina $\overline{AB}$ siječe p.

Neka je u ravnini dan pravac p koji sadrži točku A. Polupravac s vrhom u točki A nazivamo skup točaka $\overrightarrow{p} = \{T \in p \mid x(A) < x(T)\}$. Pritom suprotni polupravac $-\overrightarrow{p}$ dobivamo zamjenom koordinatizacije x s $-x$. Ako su A i B dvije točke na pravcu p, polupravac s vrhom A koji sadrži točku B označavamo $\overrightarrow{AB}$.

Kut je neuređen par dvaju polupravaca s istim vrhom. Te polupravce nazivamo krakovima kuta. Kut s krakovima $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ označavamo $\angle ABC$. Sukutima nazivamo dva kuta kojima je jedan krak zajednički, a ostali kraci su suprotni polupravci.

Unutrašnjost kuta $\angle ABC$ je presjek poluravnine određene pravcem AB koja sadrži točku C i poluravnine određene pravcem BC koja sadrži točku A. Unutrašnjost kuta nije definirana za nulkut, kojem se krakovi podudaraju, te za ispruženi kut, kojemu su krakovi suprotni polupravci.

Aksiom 5. *Svakom kutu $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$ pridružen je broj iz intervala $[0, \pi]$ koji nazivamo mjerom kuta i označavamo $\measuredangle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$ tako da vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) Ako se krakovi $\overrightarrow{h}$ i $\overrightarrow{k}$ podudaraju, mjera kuta je 0. Ako su krakovi $\overrightarrow{h}$ i $\overrightarrow{k}$ suprotni, mjera kuta je π.

(b) Zbroj mjera sukuta je π.

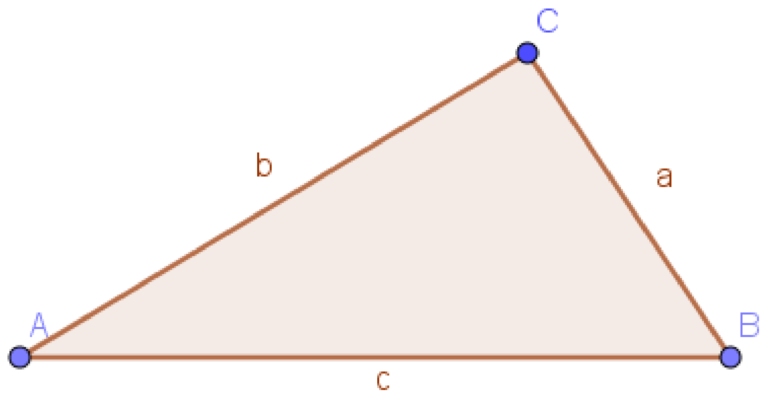
(c) Ako je $\overrightarrow{j}$ polupravac s istim vrhom kao $\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$ koji se nalazi u unutrašnjosti kuta $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$, onda je mjera toga kuta jednaka zbroju mjera kutova $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{j}$ i $\angle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

(d) Neka je $\overrightarrow{k}$ polupravac na pravcu k s vrhom T i $\mathcal{P}$ jedna od poluravnina određena s k. Skup svih polupravaca $\overrightarrow{j}$ u $\mathcal{P}$ s vrhom T je u bijektivnoj korespondenciji s brojevima iz $\langle 0, \pi \rangle$, tako da je polupravcu $\overrightarrow{j}$ pridružena mjera kuta $\angle \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}$.

(e) Ako je polupravac $\overrightarrow{j}$ iz (d) određen kao $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{TP}$, onda mjera kuta $\angle \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}$ ovisi neprekidno o izboru točke P poluravnine $\mathcal{P}$.

Trokut je skup $\{A, B, C\}$ od tri nekolinearne točke koje nazivamo vrhovima trokuta. Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ nazivamo stranicama trokuta, a njihove duljine označavamo s $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Kutove $\angle ABC$, $\angle CAB$ i $\angle BCA$ nazivamo unutrašnjim kutovima trokuta i njihove mjere označavamo redom β, α i γ. Za točku koja se nalazi u unutrašnjosti sva tri kuta kažemo da je unutrašnja točka trokuta $\triangle ABC$, a skup svih točaka s tim svojstvom nazivamo unutrašnjost trokuta $\triangle ABC$. Dio ravnine koji je komplement unutrašnjosti trokuta nazivamo vanjski dio trokuta. U njemu se nalaze sukuti unutrašnjih kutova trokuta koje nazivamo vanjskim kutovima trokuta.

Kažemo da su dva trokuta sukladna ukoliko imaju jednake duljine odgovarajućih stranica i jednake odgovarajuće mjere sva tri unutrašnja kuta. Kriteriji sukladnosti trokuta nam govore da je dovoljno provjeriti samo neka od podudaranja šest elemenata. Euklid je dokazivao sve kriterije sukladnosti trokuta, ali je pri tome koristio pojam gibanja koji nije pokrio aksiomima. U modernim aksiomatikama jedan od kriterija uzima se kao aksiom, a ostali se dokazuju.



Slika 1: Trokut $\triangle ABC$ s vrhovima A, B i C i stranicama a, b i c.

Aksiom 6 (Kriterij sukladnosti SKS)**.** *Ako su dvije stranice i kut među njima dvaju trokuta sukladni, tada su ta dva trokuta sukladna.*

Uz SKS kriterij postoje i drugi kriteriji sukladnosti trokuta:

Teorem 2.1 (Kriterij sukladnosti SSS)**.** *Ako su tri stranice dvaju trokuta sukladne, tada su ta dva trokuta sukladna.*

Teorem 2.2 (Kriterij sukladnosti KSK)**.** *Ako su dva kuta i stranica među njima dvaju trokuta sukladni, tada su ta dva trokuta sukladna.*

Teorem 2.3 (Kriterij sukladnosti SKK)**.** *Ako su dva kuta i stranica koja nije među njima dvaju trokuta sukladni, tada su ta dva trokuta sukladna.*

Teorem 2.4 (Kriterij sukladnosti SSK$^{>}$)**.** *Ako su dvije stranice i kut nasuprot veće stranice dvaju trokuta sukladni, tada su ta dva trokuta sukladna.*

Dokaze tih kriterija čitatelj može pronaći u [1], [2], [3] i [5].

Aksiom 7E. *Za svaki pravac p i točku $T \notin p$ postoji najviše jedan pravac kroz točku T koji ne siječe p.*

Proučavanjem Euklidovog petog postulata, to jest aksiomom 7E o paralelama bavili su se brojni matematičari, no tek krajem 19. stoljeća pojavili su se formalni zaključci. Matematičar Carl Friedrich Gauss bio je svjestan da je peti postulat neovisan od ostalih i da je geometrija koja nastaje negiranjem istog moguća, no svoje rezultate nije objavio. Matematičari Janos Bolyai i neovisno o njemu Nikolaj Ivanovič Lobačevski zaključili su da ako aksiom o paralelama zamijenimo njegovom negacijom, dobivamo novu geometriju. Tu novu geometriju danas nazivamo hiperboličkom geometrijom.

Aksiom 7H. *Postoje pravac p i točka $T \notin p$ takvi da bar dva pravca kroz točku T ne sijeku p.*

Neutralna ili apsolutna geometrija ravnine je geometrija u kojoj vrijede svi aksiomi euklidske geometrije, osim aksioma o paralelama kojeg ostavljamo nespecifiranim. Zbog toga teoremi neutralne geometrije vrijede u euklidskoj i hiperboličkoj ravnini. Primjeri neutralnih teorema su kriteriji sukladnosti trokuta 2.1. - 2.4. Primjer pravog hiperboličkog teorema koji ne vrijedi u euklidskoj geometriji je KKK kriterij sukladnosti trokuta.

Teorem 2.5 (Kriterij sukladnosti KKK)**.** *Ako su sva tri kuta dvaju trokuta sukladna, tada su ta dva trokuta sukladna.*

3 Definicija poligona

Neka su $\pi = \begin{pmatrix}1 & ... & n\end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix}1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & n-2\end{pmatrix}...\begin{pmatrix}\frac{n}{2} & \frac{n+2}{2}\end{pmatrix}$ za n paran broj ili $\tau = \begin{pmatrix}2 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & n-1\end{pmatrix}...\begin{pmatrix}\frac{n+1}{2} & \frac{n+3}{2}\end{pmatrix}$ za n neparan broj permutacije stupnja n i neka je $D_n = \langle \pi, \tau \rangle$ diedralna grupa reda $2n$. Ta grupa djeluje na skupu uređenih n-torki točaka ravnine na sljedeći način:

$$\alpha(P_1, P_2, ..., P_n) = (P_{\alpha(1)}, P_{\alpha(2)}, ..., P_{\alpha(n)}), \forall \alpha \in D_n.$$

Kažemo da su uređene n-torke točaka $(P_1, P_2, P_3, ..., P_n)$ i $(Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n)$ ekvivalentne ako postoji permutacija $\alpha \in D_n$ takva da je

$$(Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n) = \alpha(P_1, P_2, P_3, ..., P_n).$$

Na taj način definirali smo relaciju ekvivalencije na skupu svih uređenih n-torki točaka.

Definicija 3.1 (Slabi poligon)**.** *Klasu ekvivalencije na skupu uređenih n-torki različitih točaka ravnine zovemo slabim poligonom, u oznaci $P_1P_2...P_n$, s vrhovima $P_1, P_2, ..., P_n$ i stranicama $\overline{P_iP_{i+1}}$ gdje je $1 \leq i \leq n$. Pritom podrazumijevamo da je $P_{n+1} = P_1$.*

Postavlja se pitanje koliko slabih poligona čini n različitih točaka? Taj broj iznosi $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$. Opseg slabog poligona je suma duljina njegovih stranica: $\sum_{i=1}^{n} |P_iP_{i+1}|$.

Definicija 3.1 je najopćenitija definicija poligona iz koje možemo isključiti mnogo toga. Možemo zahtijevati da se stranice međusobno ne sijeku, osim susjednih stranica u zajedničkim vrhovima. Ono što u suštini želimo je da poligon dijeli ravninu na unutrašnji i vanjski dio, kao i trokut. Svi navedeni zahtjevi navode nas na novu definiciju poligona.

Definicija 3.2 (Poligon)**.** *Neka je $P_1P_2...P_n$ slabi poligon u kojem vrijedi: ako je $i \neq j$ i $\overline{P_iP_{i+1}}$ siječe $\overline{P_jP_{j+1}}$, tada je $i = j+1$ i stranice se sijeku samo u točki $P_i = P_{j+1}$ ili $j = i+1$ i stranice se sijeku samo u točki $P_{i+1} = P_j$. Tada kažemo da je $P_1P_2...P_n$ poligon.*

Promotrimo specijalni slučaj $n = 3$. Po definiciji 3.2, trokut je klasa ekvivalencije triju različitih točaka P_1, P_2, P_3. Iz zahtjeva da se dužine $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ i $\overline{P_3P_1}$ sijeku samo u vrhovima slijedi su da točke P_1, P_2 i P_3 nekolinearne. Klasa ekvivalencije iz definicije 3.1 povlači da je svih šest permutacija triju točaka ekvivalentno, pa trokut možemo identificirati kao skup $\{P_1, P_2, P_3\}$.

Poznato je da trokut u ravnini zatvara dva područja: unutrašnji i vanjski dio trokuta. Definicija poligona inspirirana je ovime, no potrebno je dokazati da je to zbilja istinito. O unutrašnjem i vanjskom dijelu poligona više govori poseban slučaj Jordanovog teorema o jednostavno zakrivljenoj krivulji.

Teorem 3.3 (Poligonalna separacija ravnine)**.** *Svaki poligon razdvaja točke ravnine u kojoj leži na dva povezana područja. Jedno od ta dva područja je omeđeno, a drugo nije.*

Unutrašnjost poligona definiramo kao omeđeno od ta dva područja. Promotrimo sada unutrašnje kutove poligona. Kod trokuta, cijelo područje trokuta obuhvaćeno je u jednom kutu trokuta, dok kod poligona ne mora biti tako. Nas će zanimati samo poligoni koji zadovoljaju ovaj zahtjev, a nazivamo ih konveksnim poligonima.

Definicija 3.4. *Za skup S kažemo da je konveksan ako za svake dvije točke $A, B \in S$ vrijedi $\overline{AB} \subseteq S$. Konveksni poligon je poligon čija unutrašnjost je konveksan skup.*

Definirajmo sada još neke vrste poligona.

Definicija 3.5. *Jednakostranični poligon je poligon čije su sve stranice sukladne. Ciklički poligon je poligon čiji svi vrhovi leže na jednakoj udaljenosti od jedne fiksne točke (vrhovi leže na kružnici). Pravilni poligon je poligon čije su sve stranice i unutrašnji kutovi sukladni.*

Teorem 3.6. *Ako je poligon jednakostraničan i ciklički, tada je taj poligon pravilan.*

Dokaz. Neka je zadani poligon jednakostaničan i ciklički. To znači da su mu sve stranice sukladne, te da vrhovi poligona leže na kružnici. Kako vrhovi leže na kružnici na jednakim udaljenostima (jer su stranice jednakih duljina) to stranice poligona čine tetive na kružnici jednakih duljina koje sve međusobno zatvaraju jednake središnje kutove. Iz toga slijedi da zadani poligon ima sukladne sve unutrašnje kutove, odnosno da je pravilan. □

Četverokut je poligon za $n = 4$, to jest poligon s četiri vrha. Zbog toga četverokut nasljeđuje sva ostala svojstva poligona, odnosno četverokuti mogu i ne moraju biti konveksni, postoje jednakostranični, ciklički i pravilni četverokuti. U ostatku ovoga rada baviti ćemo se isključivo konveksnim četverokutima.

4 Pravokutnici

4.1 Pravokutnici u euklidskoj ravnini

Definicija 4.1. *Pravokutnik je četverokut s četiri prava kuta.*

Slika 2: Pravokutnik $ABCD$

Važno svojstvo pravokutnika dano je u sljedećoj lemi.

Lema 4.2. *Nasuprotne stranice pravokutnika su sukladne.*

Pomoć u dokazu leme dat će nam sljedeći neutralni teorem:

Teorem 4.3. *[Saccheri-Legendre] Suma mjera kutova u trokutu ne može biti veća od* $180°$.

Korolar 4.4. *Suma mjera kutova u četverokutu ne može biti veća od* $360°$.

Dokaz. Dijagonala četverokuta četverokut dijeli na dva trokuta. Prema teoremu 4.3, suma kutova u ta dva trokuta ne može biti veća od $180°$. Kako će suma kutova u četverokutu biti jednaka sumi kutova tih dvaju trokuta, vidimo da suma kutova u četverokutu neće biti veća od $2 \cdot 180°$, odnosno $360°$. $\square$

Ranije smo definirali trokut $\triangle ABC$ i njegove unutrašnje kutove α, β i γ. Njihove sukutove nazivamo vanjskim kutovima trokuta, pa su tako sukuti unutašnjeg kuta γ vanjski kutovi γ' i γ''. Za njih kažemo da su vanjski kutovi nasuprotni unutrašnjim kutovima α i β.

Teorem 4.5 (O vanjskom kutu)**.** *Vanjski kut trokuta veći je od nasuprotnih unutarnjih kutova.*

Teorem o vanjskom kutu trokuta je neutralni teorem, te će svi dalje navedeni teoremi i propozicije do teorema 4.9 vrijediti u neutralnoj geometriji. Dokažimo sada lemu 4.2.

Dokaz. Neka je dan pravokutnik $ABCD$ i pretpostavimo suprotno, neka je $|BC| > |AD|$. Tada postoji točka E na stranici $\overline{BC}$ takva da $|AD| = |BE|$ i označimo kut $\measuredangle BED = \varphi$. Želimo pokazati da su u četverokutu $ABED$ kutovi pri vrhovima E i D sukladni. Po kriteriju SKS slijedi da su trokuti $\triangle BAD$ i $\triangle ABE$ sukladni. Nadalje, po kriteriju SKS sukladni su i trokuti $\triangle DAE$ i $\triangle EBD$, pa je mjera kuta $\measuredangle ADE = \varphi$. Kako je suma kutova u četverokutu $ABED$ manja ili jednaka 2π, slijedi da je $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$. To je kontradikacija jer po teoremu o vanjskom kutu trokuta $\triangle DEC$ vrijedi $\varphi > \frac{\pi}{2}$. □

Prije iskaza i dokaza sljedeće propozicije, definirajmo sukladnost četverokuta. Dva četverokuta su sukladna ako su im sukladni odgovarajući kutovi te odgovarajuće stranice. U dokazima idućih teorema koristit ćemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 4.6 (Kriterij SKSKS sukladnosti četverokuta)**.** *Neka su dani četverokuti $ABCD$ i $A'B'C'D'$ takvi da vrijedi $|AB| = |A'B'|$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $|BC| = |B'C'|$, $\measuredangle BCD = \measuredangle B'C'D'$ i $|CD| = |C'D'|$. Tada su četverokuti $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sukladni.*

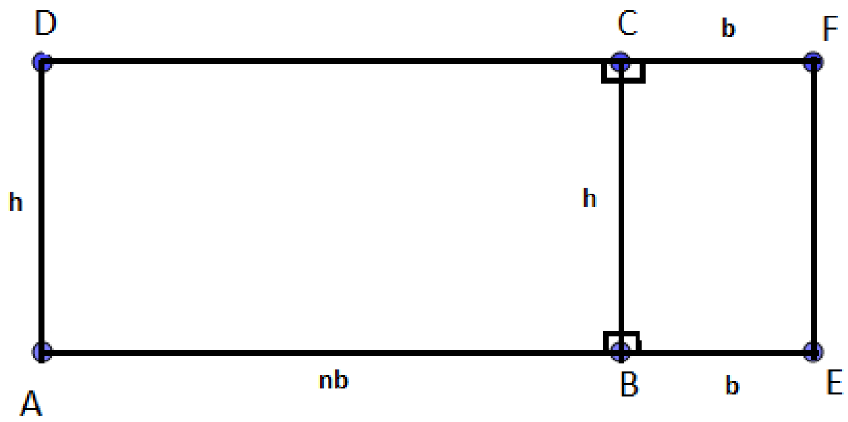
Dokaz. Konstruirajmo dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{A'C'}$ dvaju četverokuta. Po SKS kriteriju su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ sukladni. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{A'C'}$ se nalaze unutar četverokuta $ABCD$, odnosno $A'B'C'D'$, pa je kut $\measuredangle BCA$ manji od kuta $\measuredangle BCD$ i analogno u četverokutu $A'B'C'D'$ je $\measuredangle B'C'A' < \measuredangle B'C'D'$. Oduzimanjem kutova dobivamo sukladnost kutova $\measuredangle ACD = \measuredangle A'C'D'$. Znamo da je $|CD| = |C'D'|$ i $|AC| = |A'C'|$, pa opet, koristeći SKS kriterij možemo zaključiti da su sukladni trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle A'C'D'$. To znači da su stranice $\overline{AD}$ i $\overline{A'D'}$ sukladne i kutovi $\measuredangle CDA$ i $\measuredangle C'D'A'$ sukladni. Zbrajanjem kutova možemo zaključiti $\measuredangle DAB = \measuredangle D'A'B'$. Kako su sada sve odgovarajuće stranice i unutrašnji kutovi četverokuta $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sukladni, zaključujemo da su četverokuti $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sukladni.

□

Sada pretpostavimo da postoji pravokutnik, nazovimo ga R i neka taj pravokutnik ima bazu b i visinu h. Vrijedi sljedeće:

Teorem 4.7. *Za svaki prirodan broj $n \geq 1$ postoji pravokutnik čija je baza nb i visina h.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za bazu indukcije uzmemo $n = 1$, pa dobivamo upravo pravokutnik R s bazom b i visinom h. Dokažimo sada tvrdnju za $n + 1$. Pretpostavimo da postoji pravokutnik $ABCD$ čija je baza $\overline{AB}$ duljine nb. Trebamo konstruirati pravokutnik s bazom $(n+1)b$ i visinom h. Dva vrha toga četverokuta su A i D, a druga dva E i F takva da točke A, B, E i točke D, C, F leže na istom pravcu na način da je točka B između točaka A i E, te točka C između točaka D i F, te vrijedi $|BE| = |CF| = b$. Po propoziciji 4.6, četverokut $BEFC$ sukladan je pravokutniku R, stoga su $\angle E$ i $\angle F$ pravi kutovi. Unutrašnji kutovi četverokuta $AEFD$ su pravi tako da je on pravokutnik. Njegova visina je $|AD| = h$, a baza je $|AE| = |AB| + |BE| = bn + b = (n + 1)b$. Koristeći princip matematičke indukcije zaključujemo da je moguće konstrurati pravokutnik visine h s bazom nb za svaki prirodan broj $n \geq 1$. $\square$



Slika 3: Dokaz teorema 4.7

Teorem 4.8. *Pretpostavimo da postoji pravokutnik R visine h i s bazom b. Tada za svaki pozitivan realan broj x postoji pravokutnik visine h čija je baza x.*

Dokaz. Postoji prirodan broj n takav da vrijedi $nb > x$. Prema teoremu 4.7 postoji pravokutnik $ABCD$ s bazom $|AB| = nb$ visine $|AD| = h$. Tada postoji točka E sa svojstvom da su točke A, E i B kolinearne, E leži između A i B, te $|AE| = x$ i točka F takva da su točke D, F i C kolinearne, F

leži između D i C, te $|DF| = x$. Pravac koji prolazi točkama E i F dijeli četverokut $ABCD$ na dva četverokuta. Pokažimo da su ta dva četverokuta pravokutnici. Prema korolaru 4.4, suma kutova u četverokutu je manja ili jednaka $360°$. Iz toga slijedi:

$$\angle A + \angle D + \angle AEF + \angle DFE \leq 360°,$$
$$\angle B + \angle C + \angle BEF + \angle CFE \leq 360°.$$

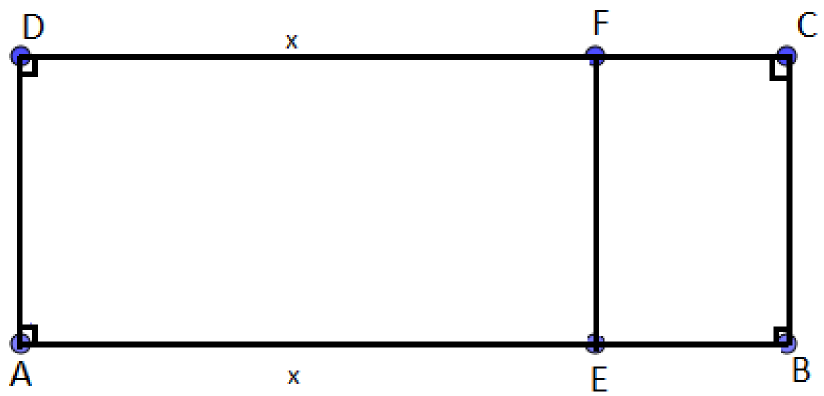
Obzirom da su sva četiri kuta pravokutnika $ABCD$ jednaka $90°$ imamo:

$$\angle AEF + \angle DFE \leq 180°,$$
$$\angle BEF + \angle CFE \leq 180°.$$

No, vrijedi da $\overline{EA} \cong \overline{FD}$, $\angle A \cong \angle D$, $|AD| = |DA|$, $\angle D \cong \angle A$ i $\overline{DF} \cong \overline{AE}$. Po propoziciji 4.6, četverokut $EADF$ sukladan je četverokutu s vrhovima u drugom redoslijedu $FDAE$, pa su odgovarajući kutovi sukladni $\angle DFE \cong \angle AEF$. Jednakost $\angle CFE \cong \angle BEF$ slijedi iz suplementarnih kutova. Uvrštavanjem ovih informacija u prethodne nejednakosti dobivamo:

$$2(\angle AEF) \leq 180° \implies \angle AEF \leq 90°,$$
$$2(\angle BEF) \leq 180° \implies \angle BEF \leq 90°.$$

Kutovi $\angle AEF$ i $\angle BEF$ su suplementarni, pa je njihova suma jednaka $180°$. Jedini slučaj kada to vrijedi je upravo kada je $\angle AEF = \angle BEF = 90°$. Ako su ti kutovi pravi, tada su pravi i $\angle DFE$ i $\angle CFE$ i četverokuti $AEFD$ i $BEFC$ su pravokutnici. Specijalno, četverokut $AEFD$ je pravokutnik s bazom duljine x i visinom duljine h iz tvrdnje teorema. □



Slika 4: Dokaz teorema 4.8

Teorem 4.9. *Pretpostavimo da postoji pravokutnik R visine h s bazom b. Tada za sve pozitivne realne brojeve x i y postoji pravokutnik s bazom x i visine y.*

Dokaz. Iz teorema 4.8 slijedi da postoji pravokutnik R' s bazom x visine h. Bazu i visinu pravokutnika možemo međusobno zamijeniti tako da govorimo o pravokutniku R' s bazom h visine x. Koristeći teorem 4.8 znamo da postoji pravokutnik R'' s bazom y visine x. Ako opet međusobno zamijenimo bazu i visinu pravokutnika imamo pravokutnik R'' s bazom x i visinom y iz tvrdnje teorema. □

Ova tri teorema govore nam da ukoliko postoji jedan pravokutnik R, onda postoje pravokutnici sa svim mogućim duljinama baze $b > 0$ i visine $h > 0$. Pogledajmo na što upućuju takvi pravokutnici.

Teorem 4.10. *Ako postoje pravokutnici svih veličina, tada je suma kutova u trokutu jednaka* $180°$.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ bilo koji trokut. Tvrdimo da mu je suma mjera kutova jednaka $180°$. Dokaz ćemo provesti u dva slučaja. Prvi slučaj je kada je trokut $\triangle ABC$ pravokutan, a drugi slučaj je kada je trokut $\triangle ABC$ različit od pravokutnoga.

1. slučaj: Pretpostavimo da je trokut $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Postoji pravokutnik s bazom $|AC|$ i visinom $|BC|$. Nazovimo ga $A'B'C'D'$ i neka mu je $\overline{A'C'}$ baza i $\overline{C'B'}$ visina. Dijagonala $\overline{A'B'}$ dijeli pravokutnik na dva pravokutna trokuta koja su oba sukladna trokutu $\triangle ABC$. Tada je suma mjera kutova u trokutima $\triangle A'C'B'$ i $\triangle B'D'A'$ jednaka polovini sume mjera kutova četverokuta, odnosno jednaka $180°$. Kako su ti trokuti sukladni trokutu $\triangle ABC$, suma kutova u $\triangle ABC$ također iznosi $180°$.

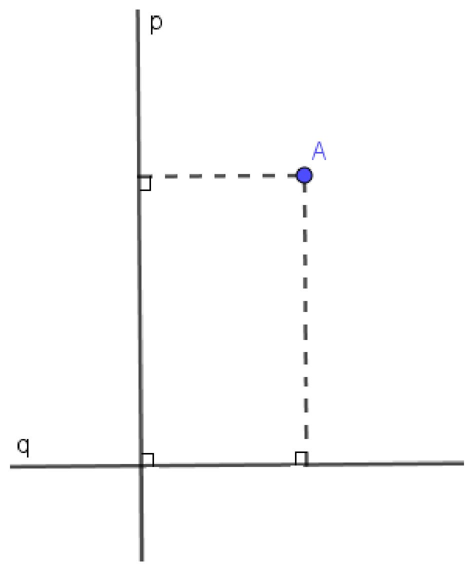
2. slučaj: Neka trokut $\triangle ABC$ nije pravokutan trokut i neka mu je kut u vrhu C najveći. Tada visina spuštena iz vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ između A i B. Označimo to sjecište točkom D. Tada dužina $\overline{CD}$ dijeli trokut $\triangle ABC$ na dva manja pravokutna trokuta $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$. Iz prvog slučaja slijedi da je suma kutova u manjim pravokutnim trokutima jednaka $180°$. Kako oba imaju pravi kut u vrhu D, mjera druga dva kuta jednaka je $90°$, pa $\angle A + \angle ACD = 90°$ i $\angle BCD + \angle B = 90°$. Zbrajanjem jednadžbi dobivamo:

$$\angle A + \angle ACD + \angle BCD + \angle B = 90° + 90°$$
$$\iff \angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

□

Teorem 4.11. *U euklidskoj ravnini postoji pravokutnik.*

Dokaz. Kako u euklidskoj geometriji vrijedi aksiom 7E koristimo se njime i konstruiramo pravokutnik. Neka su u ravnini dana dva okomita pravca p i q, te točka A koja ne leži ni na jednom od pravaca p i q. Povucimo iz točke A okomice na pravce p i q. Pravci p i q, te dva pravca kroz točku A u ravnini omeđuju četverokut s tri prava kuta. Pokažimo još da je i četvrti kut u vrhu A pravi. Suma kutova četverokuta u eukliskoj ravnini jednaka je 2π, pa oduzimanjem tri prava kuta od sume dobivamo da je kut pri vrhu A dobivenog četverokuta pravi. Kako su sva četiri kuta dobivenog četverokuta prava, četverokut je pravokutnik. □



Slika 5: U euklidskoj ravnini postoji pravokutnik

Već smo spomenuli da je hiperbolička geometrija u kojoj vrijede aksiomi neutralne geometrije te dodatno sedmi aksiom za hiperboličku geometriju. Pitanje koje si postavljamo je postoji li pravokutnik u hiperboličkoj ravnini? U pokušaju dokaza aksioma o paralelama mnogi matematičari koristili su se pravokutnicima. U euklidskoj geometriji pravokutnici su sveprisutni, no s hiperboličkom verzijom aksioma o paralelama 7H situacija se bitno mijenja.

Teorem 4.12. *Ako je suma kutova u trokutu jednaka* $180°$ *tada za pravac* l *i točku* $P \notin l$ *postoji jedinstven pravac paralelan s* l *koji prolazi točkom* P*.*

Ukoliko pretpostavka teorema 4.12 vrijedi, aksiom o paralelama 7E je istinit i ne mora se uzimati kao aksiom. Nadalje, pretpostavimo da aksiom o paralelama 7E nije istinit. To znači da geometrija u kojoj se nalazimo nije euklidska, da je suma kutova u trokutu manja od 180°, te da u takvoj geometriji pravokutnici ne postoje. No, u toj geometriji ipak postoje četverokuti. Neki od četverokuta u hiperboličkoj geometriji koji podsjećaju na pravokutnike su Saccherijevi četverokuti, Lambertovi četverokuti i pseudopravokutnici.

4.2 Analogoni pravokutnika u hiperboličkoj ravnini

4.2.1 Saccherijevi četverokuti

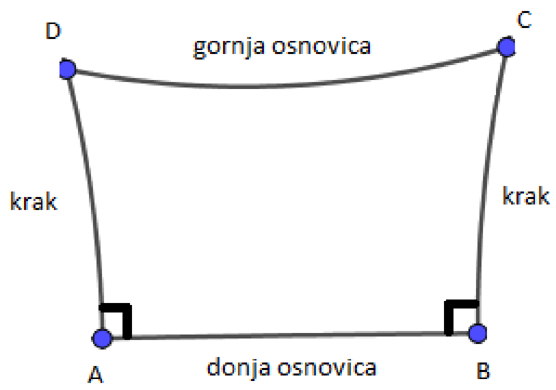
Prije otkrića neeuklidske geometrije, matematičari su pokušavali dokazati aksiom o paralelama koristeći aksiome neutralne geometrije. Jedan od pokušaja dokaza bio je da se konstruira pravokutnik koristeći samo aksiome neutralne geometrije. Na taj način bilo je nemoguće doći do četiri prava kuta u pravokutniku, no ideja je bila konstruirati četverokut s nekim svojstvima pravokutnika. Jedan od takvih kvazi-pravokutnika bio je četverokut matematičara Saccherija. Giovanni Girolamo Saccheri bio je talijanski svećenik, filozof i matematičar koji je živio na prijelazu 16. i 17. stoljeća. Njegov matematički rad najviše je bio usmjeren geometriji, odnosno pokušaju dokaza Euklidovog petog aksioma o paralelama. Njegova ideja dokaza je bila pretpostaviti da aksiom ne vrijedi i doći do kontradikcije. Obzirom da je aksiom o paralelama ekvivalentan tvrdnji da je suma kutova u trokutu jednaka 180°, kako bi tvrdnja bila istinita, Saccheri je pokušao dokazati neistinitost tvrdnji da je suma kutova u trokutu manja ili veća od 180°. Rezultati koje je dobio pokušajem dokaza neistinitosti tvrdnje da je suma kutova u trokutu manja od 180° danas smatramo teoremima hiperboličke geometrije. Pogledajmo sada što je Saccherijev četverokut.

Definicija 4.13. *Konveksni četverokut $ABCD$ nazivamo Saccherijevim četverokutom s donjom osnovicom $\overline{AB}$ i krakovima $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ ako su:*
- kutovi u vrhovima A i B pravi
- krakovi $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ su sukladni.
Stranicu $\overline{CD}$ nazivamo gornjom osnovicom.

Teorem 4.14. *Neka je četverokut $ABCD$ Saccherijev četverkut s donjom osnovicom $\overline{AB}$. Tada su kutovi u vrhovima C i D sukladni.*

Dokaz. Vrijedi: $\overline{DA} \cong \overline{CB}$, $\angle A \cong \angle B$, $|AB| = |BA|$, $\angle B \cong \angle A$ i $\overline{BC} \cong \overline{AB}$. Po propoziciji 4.6 četverkuti $DABC$ i $CBAD$ su sukladni. Tada su i odgovarajući kutovi $\angle C$ i $\angle D$ sukladni. □

Teorem 4.15. *Neka je četverokut $ABCD$ Saccherijev četverkut s donjom osnovicom $\overline{AB}$. Tada su mjere kutova u vrhovima C i D manje od 90°.*



Slika 6: Saccherijev četverokut

Dokaz. Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli Saccherijev četverokut $ABCD$ na dva trokuta i znamo da je suma kutova u trokutu manja od $180°$. Stoga je prema korolaru 4.4 suma kutova u četverokutu $ABCD$ manja od $360°$. Imamo:

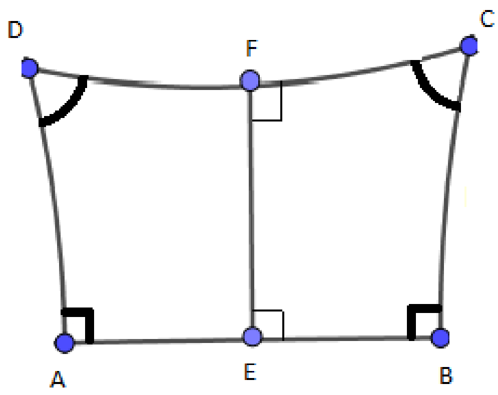
$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < 360°$$
$$\iff 90° + 90° + \angle C + \angle D < 360°$$
$$\iff \angle C + \angle D < 180°$$

Kako smo u prijašnjem teoremu dokazali da su kutovi $\angle C$ i $\angle D$ sukladni, zaključujemo da su mjere kutova u vrhovima C i D manje od $90°$. □

Definicija 4.16. *Visinu Saccherijeva četverokuta definiramo kao dužinu koja spaja polovište donje osnovice $\overline{AB}$ i polovište gornje osnovice $\overline{CD}$.*

Teorem 4.17. *Neka je četverokut $ABCD$ Saccherijev četverokut s donjom osnovicom $\overline{AB}$ i visinom $\overline{EF}$. Tada je visina $\overline{EF}$ okomita na donju osnovicu $\overline{AB}$ i gornju osnovicu $\overline{CD}$.*

Dokaz. Usporedimo dva četverokuta $AEFD$ i $BEFC$. Kako je $ABCD$ Saccherijev četverokut, vrijedi $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle B$, te ranije dokazano $\angle C \cong \angle D$. Po definiciji polovišta vrijedi $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ i $\overline{CF} \cong \overline{DF}$. Po propoziciji 4.6 su četverokuti $EADF$ i $EBCF$ sukladni, pa su odgovarajući kutovi sukladni: $\angle AEF \cong \angle BEF$, $\angle DFE \cong \angle CFE$. Budući da je riječ o sukutima, svi ti kutovi su pravi i visina $\overline{EF}$ je okomita na donju osnovicu $\overline{AB}$ i gornju osnovicu $\overline{CD}$. □



Slika 7: Visina $\overline{EF}$ okomita je na donju osnovicu $\overline{AB}$ i gornju osnovicu $\overline{CD}$.

Teorem 4.18. *Neka je četverokut $ABCD$ Saccherijev četverkut s donjom osnovicom $\overline{AB}$ i gornjom osnovicom $\overline{CD}$. Tada vrijedi $|CD| > |AB|$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da vrijedi $|AB| \geq |CD|$. Označimo točke E i F na polovištima osnovica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom, tako da je $\overline{EF}$ visina. Tada je $|EB| \geq |FC|$ i možemo naći točku G koja se nalazi između E i B ili se podudara s točkom B, takvu da vrijedi $|EG| = |FC|$. To znači da je četverokut $EGCF$ Saccherijev četverokut s donjom osnovicom $\overline{EF}$ i gornjom osnovicom $\overline{GC}$. Prema teoremu 4.3 kut $\angle EGC$ je manji od $90°$, pa je kut $180° - \angle EGC$ veći od $90°$. Promotrimo dva slučaja:

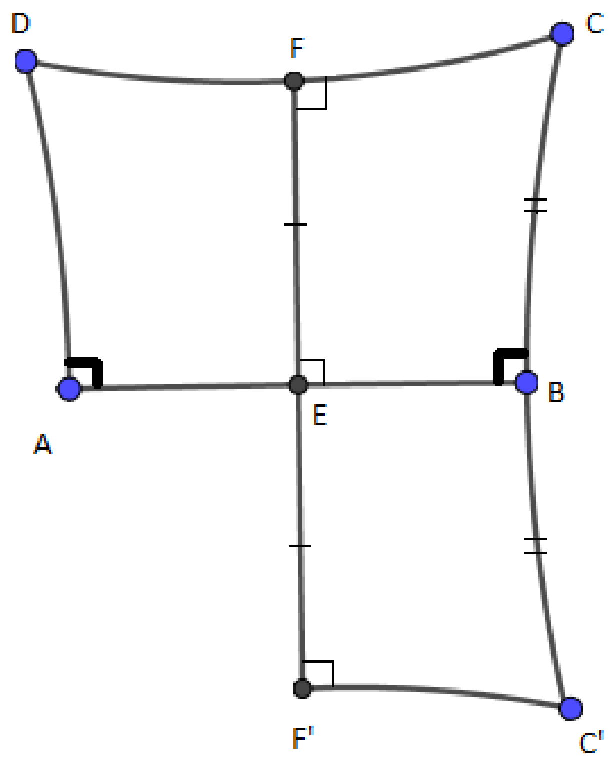
1. slučaj: $|EB| = |FC|$, pa je u tom slučaju $G = B$ i $\measuredangle EGC = \measuredangle EBC$. Po pretpostavci teorema da je $ABCD$ Saccherijev četverokut taj kut je pravi, što je u kontradikciji s upravo dokazanim $\angle EGC < 90°$.

2. slučaj: $|EB| > |FC|$, pa je u tom slučaju točka G različita od točke B. Promatrajmo trokut $\triangle BGC$ koji ima pravi kut u vrhu B i tupi kut $\angle G$. Suma kutova u trokutu $\triangle BGC$ veća je od $180°$, što je kontradikcija.

□

Teorem 4.19. *Neka je četverokut $ABCD$ Saccherijev četverkut s osnovicom $\overline{AB}$ i visinom $\overline{EF}$. Tada je duljina visine $\overline{EF}$ manja od duljine krakova $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$.*

Dokaz. Konstruirajmo drugi Saccherijev četverokut. Označimo točku F' na pravcu EF tako da je E između F i F', te $\overline{EF'} \cong \overline{EF}$. Označimo točku



Slika 8: Duljina visine $\overline{EF}$ manja je od duljine krakova $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$.

C' na pravcu CB tako da je B između C i C', te $\overline{BC'} \cong \overline{BC}$. Sada imamo sukladnosti:

$$\overline{CB} \cong \overline{C'B},\ |BE| = |BE|,\ \overline{EF} \cong \overline{EF'},\ \angle CBE \cong \angle C'BE \text{ i}$$
$$\angle BEF \cong \angle BEF'$$

Po propoziciji 4.6 su četverokuti $CBEF$ i $C'BEF'$ sukladni. Promatrajući odgovarajuće kutove i stranice, vidimo da su kutovi $\angle F'$ i $\angle F$ sukladni i pravi, te vrijedi $\overline{F'C'} \cong \overline{FC}$. Tada je četverokut $FF'CC'$ Saccherijev četverokut s donjom osnovicom $\overline{FF'}$ i gornjom osnovicom $\overline{CC'}$. Iz teorema 4.18 znamo da je $|CC'| > |FF'|$, pa vrijedi $|EF| = \frac{1}{2}|FF'| < \frac{1}{2}|CC'| = |CB|$. Vidimo da je duljina visine $\overline{EF}$ četverokuta $ABCD$ manja od duljine krakova $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$. □

Ako promotrimo ostale okomice koje se nalaze između visine i jednog kraka Saccherijeva četverokuta, generalizacijom teorema 4.19 dolazimo do sljedećeg teorema.

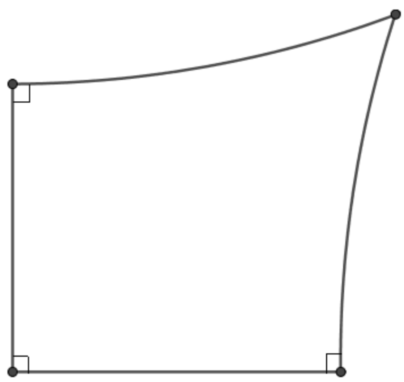
Teorem 4.20. *Neka je četverokut $ABCD$ Saccherijev četverkut s donjom osnovicom $\overline{AB}$ i visinom $\overline{EF}$. Neka dužina $\overline{GH}$ spaja gornju i donju osnovicu, tako da se G nalazi na $\overline{AB}$, a H na $\overline{CD}$ i okomita je na donju osnovicu. Tada je $|EF| < |GH| < |BC|$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da vrijedi nejednakost $|EF| < |GH|$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $|EF| \geq |GH|$. Tada postoji točka K između E i F takva da vrijedi $\overline{EK} \cong \overline{GH}$. Tada je četverokut $EGHK$ Saccherijev četverokut s donjom osnovicom $\overline{EG}$. Pogledajmo kutove trokuta $\triangle KFH$. Kut $\angle HFK$ je pravi jer je visina Saccherijeva četverokuta okomita na gornju osnovicu $\overline{CD}$ na kojoj leže točke F i H. Kut $\angle FKH$ je tupi jer je suplementaran kutu $\measuredangle EKH$, a to je kut uz gornju osnovicu Saccherijevog četverokuta i mjera mu je manja od $90°$. Tada je suma kutova u trokutu $\triangle FKH$ veća od $180°$ što je u kontradikciji sa Saccheri-Legendreovim teoremom. Dakle, vrijedi da je $|EF| < |GH|$. Analogno se pokaže da vrijedi $|GH| < |BC|$. □

4.2.2 Lambertovi četverokuti

Sljedeći analogon pravokutnika u hiperboličkoj ravnini je Lambertov četverokut. Johann Heinrich Lambert bio je švicarski matematičar, fizičar, filozof i astronom koji je živio u 18. stoljeću. Prvi je matematičar koji je trigonometriju dopunio hiperboličkim funkcijama. Važni su njegovi rezultati o hiperboličkom trokutu u kojima je pokazao je da se površina hiperboličkog trokuta može prikazati pomoću kutova, a ne samo pomoću duljina stranica kao u euklidskoj geometriji.

Definicija 4.21. *Lambertov četverokut je četverokut s tri prava kuta.*



Slika 9: Lambertov četverokut

U euklidskoj geometriji smo vidjeli da je moguće konstruirati pravokutnik na način da spustimo okomice iz točke D na krakove pravog kuta $\measuredangle ABC$. Na isti način pokazujemo egzistenciju Lambertovog četverokuta u hiperboličkoj geometriji. U euklidskoj geometriji četvrti kut je pravi, pa je četverokut zbilja pravokutnik, dok je u hiperboličkoj geometriji taj kut manji od $90°$.

Teorem 4.22. *U Lambertovom četverokutu mjera četvrtog kuta manja je od* $90°$ *i svaka stranica oko toga kuta je veća od duljine nasuprotne stranice.*

Dokaz. Neka su vrhovi četverokuta redom A, B, C, D s pravim kutom u vrhovima A, B i C. Trebamo dokazati da je kut u vrhu D manji od $90°$, te da vrijedi $|AB| < |DC|$ i $|BC| < |AD|$. Nacrtamo dijagonalu $\overline{BD}$. Time smo podijelili četverokut na dva trokuta $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ za koje znamo da im je suma kutova manja od $180°$. Stoga je suma mjera kutova četverokuta manja od $360°$, pa je mjera kuta u vrhu D manja od $90°$.

Dokažimo sada nejednakosti u tvrdnji teorema. Neka je C' točka na pravcu BC takva da je B između C i C' i $|BC| = |BC'|$. Neka je D' točka na pravcu AD takva da je A između D i D' i $|AD| = |AD'|$. Po propoziciji 4.6 je četverokut $CBAD$ sukladan četverokutu $C'BAD'$. Zato je $|CD| = |C'D'|$ i $\measuredangle BC'D' = \measuredangle BCD = 90°$, pa je četverokut $CC'DD'$ Saccherijev četverokut, a dužina $\overline{AB}$ mu je visina. Po teoremu 4.19 je $|AB| < |DC|$. Analogno bi dokazali nejednakost $|BC| < |AD|$. $\square$

Pokazuje se da je površina poligona u hiperboličkoj ravnini jednaka kutnom defektu. To je razlika između sume mjera kutova odgovarajućeg poligona u euklidskoj ravnini i sume mjera kutova poligona u hiperboličkoj ravnini. Na primjer, površina hiperboličkog trokuta $\triangle ABC$ s kutovima mjera α, β i γ jednaka je $P(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, a četverokuta s mjerama kutova α, β, γ i δ je $P(ABCD) = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma - \delta$. Površinu Lambertovog četverokuta možemo izraziti i preko duljina njegovih stranica.

Teorem 4.23. *Površina Lambertova četverokuta sa stranicama* $a = |AB|$ *i* $b = |BC|$ *nasuprot vrhu u kojemu nije pravi kut je* $P = \frac{\pi}{2} - \arccos(\sinh a \sinh b)$.

Dokaz. Površinu Lambertovog četverokuta $ABCD$ dobit ćemo tako da od 2π oduzemo sve kutove četverokuta. Tako dolazimo do formule $P(ABCD) = \frac{\pi}{2} - \delta$, pri čemu je δ četvrti kut Lambertova četverokuta koji nije pravi. U hiperboličkoj geometriji vrijedi da je $\cos\delta = \sinh a \sinh b$ iz čega dobivamo jednakost iz tvrdnje teorema. $\square$

Ako postoji Lambertov četverokut kao u teoremu 4.21, tada stranice $a, b > 0$ ne mogu biti proizvoljno velike. To proizlazi iz uvjeta $\cos\delta =$

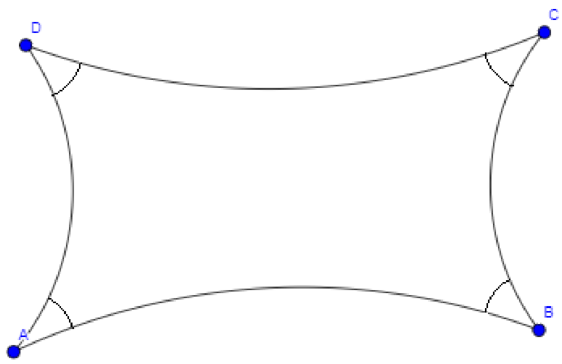
$\sinh a \sin h < 1$, pa možemo zaključiti da što veću uzmemo stranicu a, moramo uzeti to manju stranicu b i obratno.

Saccherijev četverokut visina dijeli na dva sukladna Lambertova četverokuta, pa površinu Saccherijevog četverokuta možemo izvesti pomoću površine za Lambertov četverokut. Neka je dan Saccherijev četverokut $ABCD$ s donjom osnovicom duljine a i visinom duljine v. Duljina stranice a jednaka je dvostrukoj duljini stranice pripadnog jednog Lamberotovog četverokuta, pa je površina Saccherijevog četverokuta jednaka $P(ABCD) = \pi - 2\delta$, pri čemu je δ četvrti kut Lambertova četverokuta. Iz toga slijedi da je $P(ABCD) = \pi - 2 \arccos(\sinh \frac{a}{2} \sinh v)$.

4.2.3 Pseudopravokutnici

Još jedna vrsta četverokuta analognih pravokutniku u hiperboličkoj ravnini su pseudopravokutnici.

Definicija 4.24. *Pseudopravokutnik je četverokut koji ima sva četiri kuta jednakih mjera.*



Slika 10: Pseudopravokutnik $ABCD$

Propozicija 4.25. *Mjera pojedinog kuta pseudopravokutnika manja je od $\frac{\pi}{2}$.*

Dokaz. Kako je suma kutova u hiperboličkom četverokutu manja od 2π, a pseudopravokutnik ima četiri kuta mjere α, slijedi da je $\alpha < \frac{\pi}{2}$. □

Teorem 4.26. *Nasuprotne stranice pseudopravoktnika su sukladne. Spojnica polovišta nasuprotnih stranica pseudopravokutnika okomita je na te stranice.*

Dokaz. Neka je četverokut $ABCD$ pseudopravokutnik i neka je točka P polovište stranice $\overline{AB}$. Neka pravac kroz P okomit na stranicu $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki Q. Tada su po SKS kriteriju sukladni trokuti $\triangle APQ$ i $\triangle PBQ$. Stoga je $|AQ| = |BQ|$ i $\measuredangle PAQ = \measuredangle PBQ$, iz čega slijedi da je $\measuredangle QAD = \measuredangle QBC$. Sada iz SKK kriterija dobivamo sukladnost $\triangle QAD \cong \triangle QBC$, pa je $|AD| = |BC|$ i $|QD| = |QC|$, odnosno točka Q je polovište stranice $\overline{CD}$. Istim zaključivanjem počevši od stranice $\overline{AD}$ dobijemo da je $|AB| = |CD|$. Iz sukladnosti $\triangle APQ \cong \triangle PBQ$ i $\triangle QAD \cong \triangle QBC$ slijedi $\measuredangle AQP = \measuredangle PQB$ i $\measuredangle AQD = \measuredangle BQC$. Zbrajanjem slijedi da je $\measuredangle PQD = \measuredangle PQC$, a to su sukuti, pa im je mjera $90°$. Zato je spojnica polovišta PQ okomita na stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$. Analogno bismo dokazali da je spojnica polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$ okomita na njih. □

Teorem 4.27. *Spojnice polovišta nasuprotnih stranica pseudopravokutnika međusobno su okomite i raspolavljaju se.*

Dokaz. Spojnice polovišta nasuprotnih stranica pseudopravokutnika dijele pseudopravokutnik na dva sukladna Saccherijeva četverokuta. Spojnice su tada visine Saccherijevog četverokuta koje su okomite na gornju i donju osnovicu, a kako su visine tako dobivenih Saccherijevih četverokuta sukladne slijedi tvrdnja teorema. □

Visina v_1 dijeli pseudopravokutnik na dva Saccherijeva četverokuta, a druga visina v_2 na četiri Lambertova četverokuta. Površinu pseudopravokutnika tada ćemo dobiti kao $P = 2\pi - 4\delta$, to jest iz formule iz površinu Lambertovog četverokuta $P = 2\pi - 4\arccos(\sinh\frac{v_1}{2}\sinh\frac{v_2}{2})$.

5 Paralelogrami

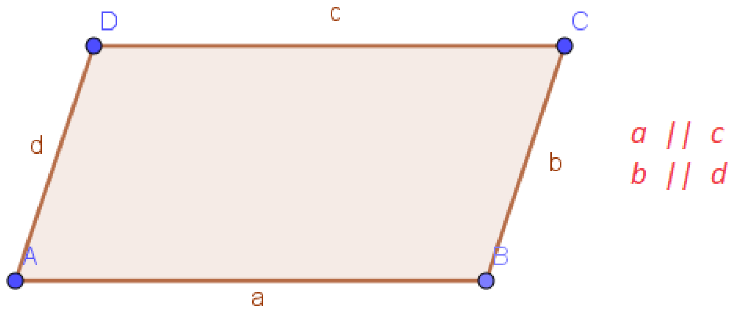
Posljednji četverokut koji ćemo proučiti u ovome diplomskom radu je paralelogram. Navedimo prvo definiciju paralelograma u euklidskoj ravnini.

Definicija 5.1. *Paralelogram je četverokut koji ima dva para paralelnih stranica.*

Paralelne pravce u euklidskoj geometriji definiramo na sljedeći način:

Definicija 5.2. *Za pravce u euklidskoj ravnini kažemo da su paralelni ako se ne sijeku ili se podudaraju.*

U euklidskoj geometriji možemo jednostavno konstruirati paralelogram jer je svojstvo paralelnosti relacija ekvivalencije, te dijeli skup svih pravaca na klase međusobno paralelnih (klase ekvivalencije). Svojstva refleksivnosti



Slika 11: Paralelogram u euklidskoj ravnini

i simetričnosti su trivijalna za paralelne pravce, no dokažimo svojstvo tranzitivnosti.

Teorem 5.3. *Neka su u euklidskoj ravnini dana tri pravca a, b i c. Ako vrijedi $a \parallel b$ i $b \parallel c$, tada vrijedi $c \parallel a$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $a \parallel b$ i $b \parallel c$ i $c \nparallel a$. Kako pravci a i c nisu paralelni međusobno se sijeku u jednoj točki. Sada vidimo da u ravnini postoje pravac b i točka kroz koju prolaze dva pravca paralelna s pravcem b. To je kontradikcija s tvrdnjom aksioma 7E. $\square$

U hiperboličkoj geometriji aksiom 7E ne vrijedi, no vrijedi aksiom 7H. To znači da ako u hiperboličkoj ravnini imamo zadan pravac i točku koja ne leži na tom pravcu, kroz zadanu točku možemo povući barem dva pravca koja ne sijeku početni pravac, što znači da je relacija paralelnosti u hiperboličkoj geometriji mnogo kompliciranija nego u euklidskoj geometriji. U hiperboličkoj geometriji ne vrijedi tranzitivnost, no možemo definirati analognu relaciju ekvivalencije na skupu svih usmjerenih pravaca.

Za neki proizvoljan pravac l možemo najprije definirati relaciju ekvivalecije $\sim$ na skupu svih njegovih koordinatizacija iz aksioma 3. Pišemo $x_1 \sim x_2$ ako postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $x_2(T) = x_1(T) + b$ za svaki $T \in l$. Postoje točno dvije klase ekvivalencije $[x]$ i $[-x]$ koje nazivamo orijentacijama pravca l.

Definicija 5.4 (Orijentirani ili usmjereni pravac)**.** *Uređeni par $(l, [x])$ pravca l i jedne njegove orijentacije nazivamo orijentiranim ili usmjerenim pravcem.*

Neka je u hiperboličkoj ravnini dan pravac l i točka T, te neka je točka N nožište okomice iz točke T na pravac l. Izaberimo točku Q na pravcu l različitu od N. Izborom točke Q odredili smo jednu od dvije poluravnine pravca TN. Po aksiomu 5 vrijedi da su polupravci $\overrightarrow{k}$ u toj poluravnini s početkom u točki T u bijektivnoj korespondenciji s brojevima $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ tako da vrijedi $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \overrightarrow{k}) = \alpha$. Polupravac koji odgovara broju α označimo s $\overrightarrow{k_\alpha}$. Presječni skup od T i l obzirom na poluravninu kojoj pripada točka Q je skup svih $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ za koje polupravac $\overrightarrow{k_\alpha}$ siječe l: $\mathcal{P}(T, l, Q) = \{\alpha \in \langle 0, \pi \rangle \mid \overrightarrow{k_\alpha} \cap l \neq \emptyset\}$.

Propozicija 5.5. *Ako je $\alpha_1 \in \mathcal{P}(T, l, Q)$, onda je $\alpha_2 \in \mathcal{P}(T, l, Q)$ za svaki $\alpha_2 < \alpha_1$.*

Propozicija 5.6. *Vrijedi $\frac{\pi}{2} \neq \mathcal{P}(T, l, Q)$.*

Iz propozicije 5.5 i 5.6 možemo zaključiti da $\alpha \neq \mathcal{P}(T, l, Q)$ za svaki $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Označimo s α_0 supremum presječnog skupa $\mathcal{P}(T, l, Q)$. Znamo da je $\alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Propozicija 5.7. *α_0 se ne nalazi u presječnom skupu, to jest $\alpha_0 \neq \mathcal{P}(T, l, Q)$.*

Iz gornje propozicije slijedi da je presječni skup otvoreni interval $\mathcal{P}(T, l, Q) = \langle 0, \alpha_0 \rangle$.

Propozicija 5.8. *Gornja granica α_0 ovisi samo o udaljenosti točke T od pravca l.*

Za svaki realni broj $x > 0$ možemo izabrati pravac l i točku T na udaljenosti x od l, tako da za nožište N okomice iz T na l vrijedi $|TN| = x$. Odgovarajući presječni skup označimo s $\mathcal{P}(x)$, a njegov supremum $\Pi(x) = \sup \mathcal{P}(x)$. $\Pi(x)$ je najmanji kut α za koji polupravac $\overrightarrow{k_\alpha}$ ne siječe l. Taj kut nazivamo kut paralelnosti.

Definiranjem kuta paralelosti dobili smo funkciju $\Pi : \langle 0, +\infty \rangle \longrightarrow \langle 0, \frac{\pi}{2}]$. Navedimo još neka svojstva funkcije kuta paralelnosti.

Propozicija 5.9. *Funkcija Π je strogo padajuća, to jest za svaki $x_1 < x_2$ slijedi $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$.*

Propozicija 5.10. *Za svaki $x > 0$ je $\Pi(x) < \frac{\pi}{2}$. Vrijedi $\lim_{x \to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ i $\lim_{x \to \infty} \Pi(x) = \infty$.*

Definicija 5.11 (Asimptotski usmjereni pravci)**.** *Neka su $(l, [x])$ i $(m, [y])$ usmjereni pravci i točka $T \in l$. Označimo s $\overrightarrow{l} = \{P \in l \mid x(P) > x(T)\}$*

polupravac s vrhom T u smjeru orijentiacije $[x]$ i neka je N nožište okomice iz točke $T \in l$ na pravac m. Kažemo da je usmjereni pravac l asimptotski na usmjereni pravac m obzirom na točku T ako je kut $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \overrightarrow{l})$ kut paralelnosti za udaljenost $|TN|$.

Gornja definicija govori nam da polupravac $\overrightarrow{l}$ ne siječe m, no svaki polupravac s početkom u T u unutrašnjosti kuta $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \overrightarrow{l})$ siječe m. Relacija asimptotičnosti je dobro definirana relacija jer ne ovisi o izboru točke $T \in l$, pa možemo reći da je usmjereni pravac l asimptotski na m bez spominjanja točke. Ako je usmjereni pravac l asimptotski na m, onda je i usmjereni pravac m asimptotski na l. Relacija asimptotičnosti je simetrična, pa možemo reći samo da su usmjereni pravci l i m asimptotski. Neka su k i m dva usmjerena pravca asimptotska na usmjereni pravac l. Tada je jedan od tri pravca leži između druga dva, to jest dva pravca leže u u različitim poluravninama određenim pravcem koji je između. Također, pravci k i m međusobno su asimptotski, pa je relacija asimptotičnosti tranzitivna. Time su zadovoljena sva tri zahtjeva relacije ekvivalencije. Dokazi ovih tvrdnji nalaze se u [5]. Klase ekvivalencije zovemo pramenovima asimptotskih pravaca. U jednoj klasi su svi usmjereni pravci koji su asimptotski na zadani usmjereni pravac i oni su svi međusobno asimptotski. Sada možemo definirati paralelnost i ultraparalelnost u hiperboličkoj ravnini.

Definicija 5.12 (Paralelni i ultraparalelni pravci). *Ako dva pravca a i b koji se međusobno ne sijeku možemo orijentirati tako da su asimptotski, kažemo da su a i b paralelni. U suprotnom kažemo da su a i b ultraparalelni.*

Idući teoremi govore nam više o svojstvima paralelnih i ultraparalelnih pravaca, čiji se dokazi mogu se naći u [4] i [5].

Teorem 5.13. *Za svaki pravac l i točku T u hiperboličkoj ravnini koji nisu incidentni postoji točno dva pravca kroz T paralelna s l i beskonačno mnogo pravaca kroz T ultraparalelnih s l.*

Teorem 5.14. *Dva pravca u hiperboličkoj ravnini imaju zajedničku normalu ako i samo ako su ultraparalelni. U tom slučaju zajednička normala je jedinstvena.*

Teorem 5.15. *Ako transverzala siječe dva pravca tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni, tada su ti pravci ultraparalelni.*

Teorem 5.16. *Ako su dva pravca l i m paralelni, tada za svaki $t > 0$ postoji točka $T \in l$ takva da $d(T, m) = t$.*

Neka su u hiperboličkoj ravnini dana dva različita ultraparalelna pravca, te neka zajednička normala tih pravaca siječe pravce u dvije točke. Udaljenost ultraparalelnih pravaca tada definiramo kao udaljenost te dvije točke.

Definicija 5.1 paralelograma u euklidskoj ravnini ne vrijedi u hiperboličkoj ravnini zbog drugačije prirode paralelnosti. Pogledajmo karakterizacije paralelograma u euklidskoj ravnini.

Teorem 5.17. *Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) četverokut $ABCD$ je paralelogram.

(ii) postoje dvije nasuprostne stranice četverokuta $ABCD$ koje su sukladne i paralelne,

(iii) svake dvije nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ su sukladne,

(iv) dijagonale četverokuta $ABCD$ se međusobno raspolavljaju,

(v) oba para nasuprotnih kutova četverokuta $ABCD$ su sukladna.

Tvrdnje (iii), (iv) i (v) teorema 5.17 su ekvivalentne u apsolutnoj geometriji, to jest ekvivalenciju možemo dokazati bez pozivanja na aksiom o paralelama.

Dokaz. $(iii) \implies (iv)$ Neka u četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AB| = |DC|$ i $|AD| = |BC|$ i neka se dijagonale sijeku u točki P. Po SSS kriteriju o sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, pa su sukladni kutovi $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD =: \alpha$. Na isti način, po SSS kriteriju sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle DAB \cong \triangle BCD$, te $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD =: \beta$. Sada po KSK kriteriju sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle ADP \cong \triangle CBP$ što povlači da je $|AP| = |CP|$, odnosno točka P je polovište dijagonale $\overline{AC}$, i $|BP| = |DP|$, odnosno točka P je polovište dijagonale $\overline{BD}$. Iz toga možemo zaključiti da se dijagonale raspolavljaju.

$(iv) \implies (iii)$ Neka je $ABCD$ četverokut u kojemu se dijagonale sijeku u točki P i neka je P polovište obiju dijagonala. Pokažimo da su nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ sukladne. Vršni kutovi koje zatvaraju dijagonale su sukladni: $\measuredangle APB = \measuredangle CPD$ i $\measuredangle BPC = \measuredangle APD$. Po SKS aksiomu o sukladnosti trokuta, $\triangle APB \cong \triangle CPD$, pa je $|AB| = |CD|$. Na isti način dobivamo $\triangle BPC \cong \triangle DPA$, pa je $|BC| = |AD|$. Dakle, suprotne stranice četverokuta $ABCD$ su sukladne.

$(iii) \implies (v)$ Neka je $ABCD$ četverokut kojemu su svake dvije nasuprotne stranice sukladne i neka su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ dijagonale toga četverokuta. Tada su po SSS kriteriju sukladni trokuti $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ te vrijedi $\measuredangle CAB =$

$\measuredangle ACD = \alpha$ i $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC = \beta$. Također su sukladni trokuti $\triangle ABD \cong \triangle CDB$, iz čega slijedi $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB = \gamma$ i $\measuredangle BDA = \measuredangle DBC = \delta$. Vidimo da su kutovi u vrhovima A i C jednaki $\alpha + \beta$, a u vrhovima B i D jednaki $\gamma + \delta$. Iz toga slijedi da su oba para nasuprotnih kutova četverokuta $ABCD$ sukladna.

U euklidskoj ravnini možemo lako dokazati implikaciju $(v) \implies (iii)$. Neka je $ABCD$ četverokut u euklidskoj ravnini kojemu su oba para nasuprotnih kutova sukladna, to jest $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = \beta$ i $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = \alpha$. Vrijedi da je $2\alpha + 2\beta = 2\pi$ odnosno $\alpha + \beta = \pi$ jer je suma kutova četverokuta u euklidskoj ravnini jednaka 2π. Tada je vanjski kut pri vrhu A četverokuta jednak β i vanjski kut pri vrhu D jednak je α, odnosno pravac AD je transverzala pravaca AB i DC, koja ih siječe tako da su nasuprotni unutrašnji kutovi sukladni. Zato su pravci AB i DC paralelni. Analogno bi zaključili da su pravci AD i BC paralelni. Kako se dva para nasuprotnih stranica nalaze na paralelnim pravcima, četverokut $ABCD$ je paralelogram. Kako je $ABCD$ paralelogram, slijedi da su nasuprotne stranice jednakih duljina.

Dokažimo sada zadnju implikaciju $(v) \implies (iii)$ kao neutralni teorem. Taj dokaz je kompliciraniji.

$(v) \implies (iii)$ Neka je $ABCD$ četverokut kojemu su dva para nasuprotnih kutova sukladna, to jest $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = \beta$ i $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = \alpha$. Neka su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ dijagonale tog četverokuta. Želimo pokazati da je $|AB| = |DC|$ i $|AD| = |BC|$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je jedan par nasupotnih stranica različitih duljina ili neka su oba para nasuprotnih stranica paralelograma različitih duljina. Time dobivamo dva slučaja.

1. slučaj: Jedan par nasuprotnih stranica paralelograma nije sukladan i bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $|BC| < |AD|$. Neka je točka E na stranici $\overline{AD}$ takva da je $|DE| = |BC|$. Sada po SKS kriteriju vrijedi $\triangle CDE \cong \triangle ABC$, pa su sukladni kutovi $\measuredangle ACB = \measuredangle CED$ i $\measuredangle CAB = \measuredangle ECD$, te $|AC| = |CE|$. Po teoremu o vanjskom kutu u trokutu $\triangle EAC$ vrijedi $\measuredangle CED > \measuredangle CAE$, pa je $\measuredangle CED + \measuredangle CAB > \measuredangle CAE + \measuredangle CAB = \alpha$. Dobivamo da je $\measuredangle ACB + \measuredangle ECD > \alpha$ što je u kontradikciji s tim da je $\alpha = \measuredangle BCA + \measuredangle ACE + \measuredangle ECD$. Dakle, 1. slučaj nije moguć.

2. slučaj: Niti jedan par nasuprotnih stranica paralelograma nije sukladan i bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $|BC| < |AD|$ i $|CD| < |AB|$. Neka je točka E na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|EB| = |CD|$ i točka F na stranici $\overline{AD}$ takva da je $|FD| = |BC|$. Po SKS kriteriju vrijedi $\triangle EBC \cong \triangle CDF$, pa su sukladni kutovi $\measuredangle BCE = \measuredangle DFC$ i $\measuredangle CEB = \measuredangle FCD$. Po teoremu o vanjskom kutu u trokutu $\triangle FAC$ je $\measuredangle DFC > \measuredangle FAC + \measuredangle ACF$ i u trokutu $\triangle AEC$ je $\measuredangle CEB > \measuredangle CAE + \measuredangle ECA$. Tada je $\measuredangle CEB + \measuredangle BCE > \measuredangle CAE + \measuredangle FAC + \measuredangle ECA + \measuredangle ACF$ i $\measuredangle CAE + \measuredangle FAC = \alpha$. Očito je $\alpha > \measuredangle CEB + \measuredangle BCE > \alpha + \measuredangle ECA + \measuredangle ACF$, gdje dolazimo do kontradik-

cije. Dakle, niti 2. slučaj nije moguć, pa su oba para nasuprotnih stranica paralelograma sukladna. □

Sada možemo uzeti bilo koje od svojstava (iii), (iv) ili (v) kao definiciju paralelograma u apsolutnoj geometriji, posebno i u hiperboličkoj ravnini.

Definicija 5.18. *Paralelogram je četverokut kojemu su dijagonale raspolavljaju.*

Iduća dva teorema su karakterizacije paralelograma koje smo već dokazali.

Teorem 5.19. *Četverokut $ABCD$ je paralelogram ako i samo ako su mu nasuprotne stranice sukladne.*

Teorem 5.20. *Četverokut $ABCD$ je paralelogram ako i samo ako su mu nasuprotni kutovi sukladni.*

Nasuprotne stranice paralelograma u hiperboličkoj ravnini leže na ultraparalelnim pravcima. Ovo svojstvo nije dovoljno da bi hiperbolički četverokut bio paralelogram, no dokažimo da to zbilja vrijedi.

Teorem 5.21. *U hiperboličkoj ravnini nasuprotne stranice paralelograma leže na ultraparalelnim pravcima.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ paralelogram. Po SSS kriteriju o sukladnosti trokuta vrijedi da su sukladni trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle CDA$. Stoga su sukladni kutovi $\measuredangle BCA = \measuredangle DCA$, pa je AC transverzala pravaca AB i CD koja ih siječe tako da su nasuprotni unutrašnji kutovi sukladni. Po teoremu 5.15 su pravci AB i CD ultraparalelni, a analogno se pokazuje za pravce AD i BC. □

Teorem 5.22. *Za svaka dva ultraparalelna pravca p i q i za svaki $a > 0$ postoji paralelogram sa stranicama duljine a na ta dva pravca. Takav paralelogram nije jedinstven.*

Dokaz. Neka je $\overline{MN}$ zajednička normala ultraparalelnih pravaca p i q s nožištima M i N. Neka je P polovište dužine $\overline{MN}$ i neka su $A, B \in p$ bilo koje dvije točke na udaljenosti $|AB| = a$. Neka je točka $A' \in q$ takva da su točke A i A' sa suprotne strane normale $\overline{MN}$ i da vrijedi $|AM| = |A'N|$. Tada su po SKS aksiomu $\triangle AMP \cong \triangle A'NP$, pa je $\measuredangle APM = \measuredangle A'PN$, odnosno točke A, P i A' su kolinearne. Na isti način konstruiramo točku B' na q i dokažemo da su točke B, P i B' kolinearne. $ABA'B'$ je paralelogram, jer točka P raspolavlja dijagonale $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$. Takav paralelogram nije jedinstven jer smo točke A i B odabrali po volji. □

Postavlja se pitanje mogu li stranice četverokuta ležati na ultraparalelnim pravcima, a da taj četverokuta nije paralelogram. Primjer takvog četverokuta je Lambertov četverokut $ABCD$ kojemu je kut manji od $\frac{\pi}{2}$ u vrhu D. Naime, pravci AB i CD su ultraparalelni sa zajedničkom normalom BC, te su pravci AD i BC ultraparalelni sa zajedničkom normalom AB. Znamo da je $|AB| < |CD|$ i $|BC| < |AD|$, to jest nasuprotne stranice nisu sukladne, pa $ABCD$ nije paralelogram. Primijetimo još da su pseudopravokutnici paralelogrami u hiperboličkoj ravnini, dok Saccherijevi i Lambertovi četverokuti nisu paralelogrami.

Literatura

[1] F. M. Brückler, Povijest matematike 2. Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2010.

[2] M. Harvey, Geometry illuminated. An illustrated introduction to Euclidean and hyperbolic plane geometry, MAA Press, 2015.

[3] D. Ilišević, M. Bombardelli, Elementarna geometrija - skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[4] V. Krčadinac, Neeuklidska geometrija, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2022.

[5] A. Ramsay, R. D. Richtmyer, Introduction to hyperbolic geometry, Springer, 1995.

[6] P. J. Ryan, Euclidean and non-Euclidean geometry. An analytic approach, Cambridge University Press, 2006.

Sažetak

U ovom diplomskom radu prisjetili smo se osnovnih činjenica o dvije vrste četverokuta u euklidskoj ravnini, pravokutnicima i paralelogramima, te obradili njihove analogone u hiperboličkoj ravnini. U drugom poglavlju nabrojali smo sedam aksioma ravninske geometrije pomoću kojih smo dokazivali teoreme u diplomskom radu. U trećem poglavlju definirali smo poligon i prikazali osnovne rezultate o poligonima. U četvrtom poglavlju diplomskog rada bavimo se pravokutnicima u euklidskoj ravnini te analogonima u hiperboličkoj ravnini: Saccherijevim četverokutima, Lambertovim četverokutima i pseudopravokutnicima. U zadnjem poglavlju ovog diplomskog rada bavimo se paralelogramima u euklidskoj ravnini, definiramo paralelne i ultraparalelne pravce u hiperboličkoj ravnini te uz pomoć njih dokazujemo egzistenciju paralelograma u hiperboličkoj geometriji.

Summary

In this thesis, we have recalled basic facts about two types of quadrilaterals in the Euclidean plane, rectangles and parallelograms, and we studied their analogues in the hyperbolic plane. In the second chapter, we listed seven axioms of plane geometry used to prove theorems in this thesis. In the third chapter, we defined polygons and showed basic results about them. In the fourth chapter, we study rectangles in the Euclidean plane and their analogues in the hyperbolic plane: Saccheri quadrilaterals, Lambert quadrilaterals, and pseudo-rectangles. In the last chapter, we defined parallelograms in the Euclidean plane and parallel and ultraparallel lines in the hyperbolic plane. We proved that parallelograms exist in the hyperbolic plane.

Životopis

Rođena sam u Vinkovcima 26. ožujka 1997. godine. U istom gradu pohađala sam Osnovnu školu Ivana Mažuranića, Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića, te paralelno Osnovnu i Srednju glazbenu školu Josipa Runjanina gdje sam svirala instrument klavir. Nakon što je ljubav prema matematici pobjedila ljubav prema glazbi, 2015. godine započela sam fakultetsko obrazovanje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, na preddiplomskom studiju Matematika; smjer: nastavnički. Godine 2019. na istom fakultetu upisala sam diplomski studij Matematika; smjer: nastavnički.