Cramer-Castillonov problem

Posavec, Anja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anja Posavec

CRAMER-CASTILLONOV PROBLEM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Jurju Šiftaru na strpljivosti i pomoći prilikom pisanja diplomskog rada.

Hvala mojim roditeljima, bratu i sestri te bakama i djedovima na neizmjernoj podršci, pomoći i vjeri u mene.

Posebno hvala mom zaručniku koji je uvijek bio uz mene.

Zahvaljujem i svojim prijateljima koji su mi uvijek bili potpora. Bez njih bi moj put studiranja bio mnogo teži.

Sadržaj

Uvod

Dana je kružnica i tri točke u ravnini. Zadatak glasi: kako upisati trokut zadanoj kružnici, tako da svaka točka leži na pravcu koji prolazi stranicom trokuta? Problem se zatim poopćava na n točaka u ravnini. U ovom diplomskom radu obrađujemo analitičko i geometrijsko rješenje Cramer-Castillonova problema. Najprije ćemo proći kroz kratku povijest.
U drugom poglavlju - analitičko rješenje problema, koristimo prikladnu parametrizaciju kružnice i Möbiusove transformacije. Metoda rješavanja ilustrirana je numeričkim primjerom.
U trećem poglavlju izložen je geometrijski pristup problemu, baziran na inverzijama s obzirom na kružnicu. Pokazuje se da rješivost problema ovisi o postojanju fiksnih točaka jedne transformacije koja zadanu kružnicu ostavlja invarijantnom. I ovdje se koriste Möbiusove transformacije, ali na kompleksnoj ravnini, za dokaz nekih svojstava i analizu rješenja. Također se primjenjuje Pascalov teorem, kao jedan od najvažnijih teorema projektivne geometrije. Ovim pristupom, ako rješenja postoje, mogu se efektivno konstruirati i ta je konstrukcija prikazana na kraju rada.

Poglavlje 1

Povijest

Promatramo kružnicu i tri zadane točke. Problem glasi: kako upisati trokut toj kružnici, a da pravci njegovih stranica prolaze kroz tri zadane točke? Već je Pappus iz Aleksandrije (290.-250. godine) riješio slučaj kad su tri zadane točke kolinearne. Švicarski matematičar Gabriel Cramer čuo je za navedeni problem te ga je 1742. prenio talijanskom matematičaru Jeanu de Castillonu. Castillon je riješio problem tek 1776. geometrijski, a već sljedeći dan mu je Lagrange poslao svoje analitičko rješenje. Također, još jedno geometrijsko rješenje dao je Euler 1783. godine te Ottaiano, i to kad je imao 16 godina. Lagrangeovo rješenje je Carnot 1803. godine pojednostavio te ga je generalizirao za n-terokut.

Poglavlje 2

Analitički pristup problemu

2.1 Cramer-Castillonov problem

U ravnini je dana kružnica K i n točaka $A_1, A_2, ..., A_n \notin K$. Pretpostavimo da je n-terokut $B_1B_2...B_n$ upisan kružnici K takav da na pravcu B_iB_{i+1} leži točka A_i, $i \in 1, 2, ..., n$, a $B_{n+1} = B_1$. Odsad ćemo u radu taj problem kratko navoditi kao CPP (Cramer-Castillonov problem).

Pristup rješavanju problema možemo bez smanjenja općenitosti pojednostaviti tako da za kružnicu k uzmemo jediničnu kužnicu sa središtem u ishodištu Kartezijevog koordinatnog sustava. Nadalje, točke kružnice k prikladno je prikazati pomoću tzv. Pitagorejskih koordinata, to jest točki $T = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ kružnice k pridružiti parametar $u = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, pri čemu je α kut između radijvektora $\overrightarrow{OT}$ i x-osi. Pomoću poznatih trigonometrijskih relacija imamo

$$x = \cos\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ y = \sin\alpha = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Uočimo da se formiranje skupa vrhova traženog n-terokuta može shvatiti kao niz centralnih projekcija skupa točaka kružnice na sama sebe. Točke $A_1, ..., A_n$ pritom su centri projiciranja.

Za varijabilnu točku $B_1 \in K$ njezina projekcija iz centra A_1 na kružnicu je točka B_2, zatim se B_2 iz centra A_2 projicira u B_3 i tako dalje. Svaki takav niz projekcija jedno je preslikavanje kružnice na samu sebe, a za rješenje CCP tražimo fiksne točke takvih preslikavanja. Ovakva preslikavanja na kružnicama, odnosno općenito na krivuljama 2. reda (konikama) proučavaju se u projektivnoj geometriji.

2.2 Möbiusova transformacija

Definicija 2.2.1. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takvi da je $ad \neq bc$. Möbiusova transformacija je funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$ oblika*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

U ovom dijelu rada zapravo ćemo promatrati samo realne Möbiusove transformacije. Kad se primjenom Möbiusove transformacije dobije

$$u_2 = \frac{au_1 + b}{cu_1 + d},$$

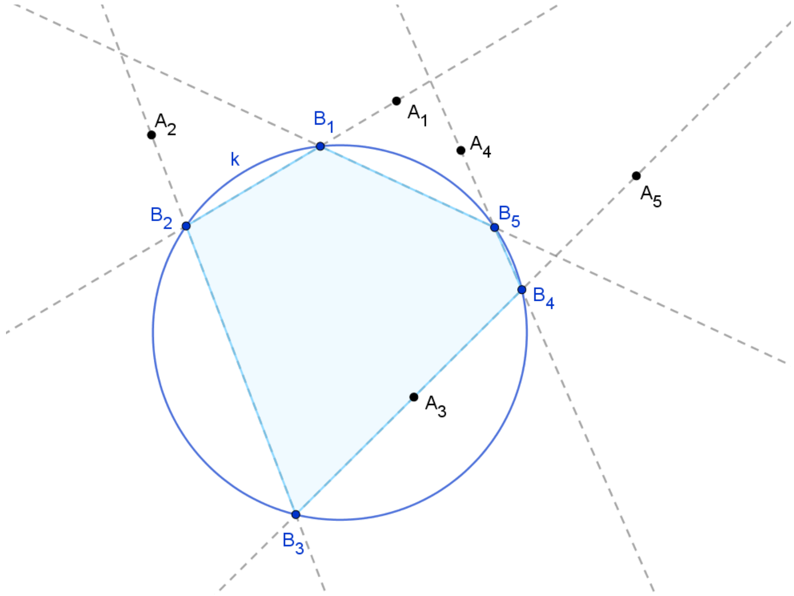
možemo to matrično zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na taj način možemo kompoziciju Möbiusovih transformacija izraziti množenjem odgovarajućih matrica.

2.3 Ideja rješenja

Krenut ćemo s proizvoljnom točkom $B_1 \in K$. Neka je njezina koordinata u_1. Neka točka A_1 ima koordinate (a_1, b_1). Presjek pravca A_1B_1 s K su dvije točke - jedna je B_1 jer smo tu točku definirali na K, a drugu ćemo nazvati B_2 i njezinu koordinatu u_2. Na isti način pomoću pravca A_2B_2 dolazimo do točke B_3 i tako dalje, sve do B_{n+1}. Točka B_{n+1} mora zadovoljavati uvjet $B_{n+1} = B_1$ kako bi $B_1B_2...B_n$ bio mnogokut upisan kružnici K.



Slika 2.1: Prikaz ideje rješenja

2.4 Račun

Kako bi točke B_1, B_2 i A_1 bile kolinearne, mora vrijediti uvjet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Uvrstimo u x_1, y_1, x_2, y_2 koordinate.

$$\begin{vmatrix} \frac{1-u_1^2}{1+u_1^2} & \frac{2u_1}{1+u_1^2} & 1 \\ \frac{1-u_2^2}{1+u_2^2} & \frac{2u_2}{1+u_2^2} & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Zatim transformiramo matricu množenjem prvog reda s $1 + u_1^2$ i drugog s $1 + u_2^2$.

$$\begin{vmatrix} 1 - u_1^2 & 2u_1 & 1 + u_1^2 \\ 1 - u_2^2 & 2u_2 & 1 + u_2^2 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned}a_1[2u_1(1+u_2^2) - 2u_2(1+u_1^2)] \\ - b_1[(1-u_1^2)(1+u_2^2) - (1+u_1^2)(1-u_2^2)] \\ + [2u_2(1-u_1^2) - 2u_1(1-u_2^2)] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a_1u_1 + 2a_1u_1u_2^2 - 2a_1u_2 - 2a_1u_1^2u_2 \\ - b_1 - b_1u_2^2 + b_1u_1^2 + b_1u_1^2u_2^2 + b_1 + b_1u_1^2 - b_1u_2^2 - b_1u_1^2u_2^2 \\ + 2u_2 - 2u_1^2u_2 - 2u_1 + 2u_1u_2^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a_1(u_1 - u_2) - 2a_1u_1u_2(u_1 - u_2) \\ + 2b_1(u_1 + u_2)(u_1 - u_2) \\ - 2(u_1 - u_2) - 2u_1u_2(u_1 - u_2) = 0\end{aligned}$$

Podijelimo ovu jednadžbu s $(u_1 - u_2) \neq 0$ jer $u_1 \neq u_2$ (u suprotnom bi točke B_1 i B_2 bile jednake i u tom slučaju nema smisla uopće govoriti o kolinearnosti dviju točaka).

$$\begin{aligned}2a_1 - 2a_1u_1u_2 + 2b_1u_1 + 2b_1u_2 - 2 - 2u_1u_2 &= 0 \\ -2a_1u_1u_2 + 2b_1u_2 - 2u_1u_2 &= -2a_1 - 2b_1u_1 + 2 \\ u_2 &= \frac{-b_1u_1 + 1 - a_1}{-(a_1+1)u_1 + b_1}\end{aligned}$$

Ovo je Möbiusova transformacija te ju možemo zapisati kao:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ 1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -b_1 & 1-a_1 \\ -a_1-1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \end{bmatrix}, C \in \mathbb{R}.$$

Analogno, vrijedi:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ 1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -b_2 & 1-a_2 \\ -a_2-1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ 1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -b_2 & 1-a_2 \\ -a_2-1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 & 1-a_1 \\ -a_1-1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \end{bmatrix}, C \in \mathbb{R}.$$

Primjenom ovog postupka i pomoću uvjeta $u_{n+1} = u_1$ dolazimo do: $u_{n+1} = u_1 = \frac{au_1+b}{cu_1+d}$, gdje je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_n & 1-a_n \\ -a_n-1 & b_n \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -b_1 & 1-a_1 \\ -a_1-1 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Ovime dobivamo kvadratnu jednadžbu $cu_1^2 + (d-a)u_1 - b = 0$ pomoću koje dobivamo 0, 1 ili 2 rješenja za u_1.

2.5 Primjer

Zadana je kružnica K sa središtem u $O(0,0)$ i radijusom 1. Zadane su točke $A_1(\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$, $A_2(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-3+\sqrt{3}}{3})$, $A_3(1, \frac{-4}{7})$, $A_4(1, 1+\sqrt{3})$. Želimo pronaći točke $B_1, B_2, B_3, B_4 \in K$ tako da pravci na kojima se nalaze stranice četverokuta $B_1B_2B_3B_4$ prolaze točakama A_1, A_2, A_3, A_4.

Rješenje. Želimo doći do $u_{n+1} = u_1 = \frac{au_1+b}{cu_1+d}$. U primjeru je $n = 4$, pa uvrštavamo vrijednosti u izraz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_4 & 1-a_4 \\ -a_4-1 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_3 & 1-a_3 \\ -a_3-1 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_2 & 1-a_2 \\ -a_2-1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 & 1-a_1 \\ -a_1-1 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Nakon što uvrstimo vrijednosti, dobivamo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} & 1-1 \\ -1-1 & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & 1-1 \\ -1-1 & \frac{-4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{3} & 1+\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}-1 & \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-1 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Množenjem ove 4 matrice dobije se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{56\sqrt{3}+48}{21} & \frac{-16\sqrt{3}+24}{21} \\ \frac{164\sqrt{3}+288}{21} & \frac{8\sqrt{3}-36}{21}. \end{bmatrix}$$

Uvrstimo ove vrijednosti u kvadratnu jednadžbu $cu_1^2 + (d-a)u_1 - b = 0$.

$$\frac{164\sqrt{3}+288}{21}u_1^2 + (\frac{8\sqrt{3}-36}{21} - \frac{56\sqrt{3}+48}{21})u_1 - \frac{-16\sqrt{3}+24}{21} = 0$$

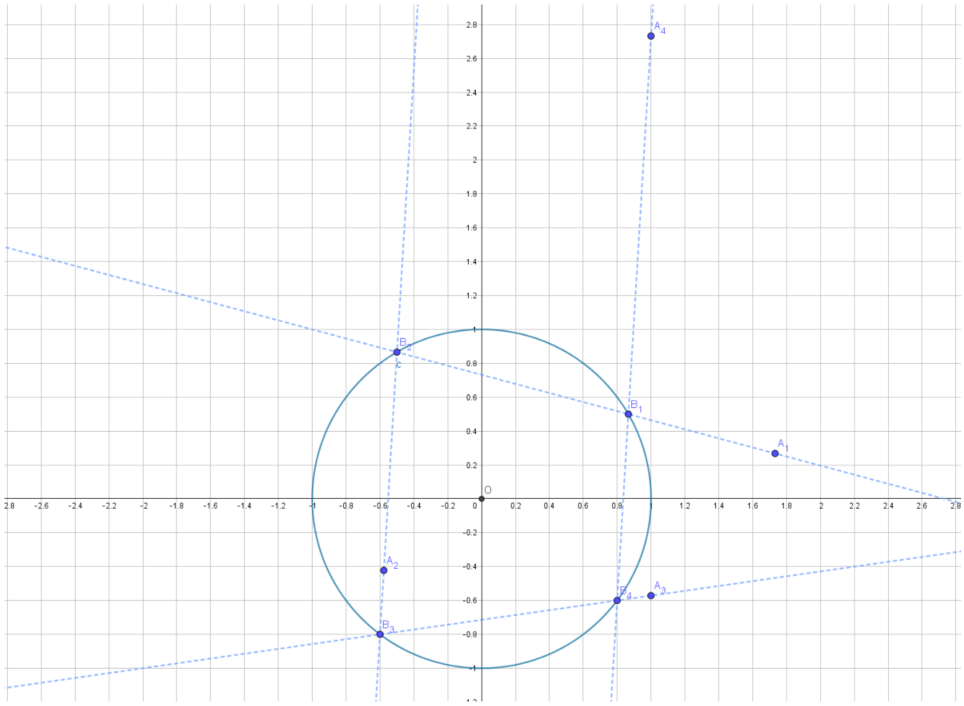
Množenjem ovog izraza s $\frac{21}{4}$ dobivamo:

$$(4\sqrt{3}+71)u_1^2 + (-12\sqrt{3}-21)u_1 + (4\sqrt{3}-6) = 0.$$

Ova kvadratna jednadžba ima dva rješenja:

$$u_{11} = 2-\sqrt{3},\ u_{12} = \frac{2}{47}(24\sqrt{3}-41).$$

Oba rješenja su dobra, ali s obzirom da drugo rješenje nije lako pregledno prikazati (npr. točke B_3 i B_4 su vrlo blizu jedna drugoj), rezultate i grafički prikaz navodimo samo za prvo rješenje. Uvrštavanjem $u_1 = 2-\sqrt{3}$ u Pitagorejske koordinate dobivamo $B_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Drugo sjecište pravca A_1B_1 s kružnicom je $B_2 = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Istim postupkom dobivamo $B_3 = (\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5})$ i $B_4 = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ kao što je prikazano na slici 2.5.

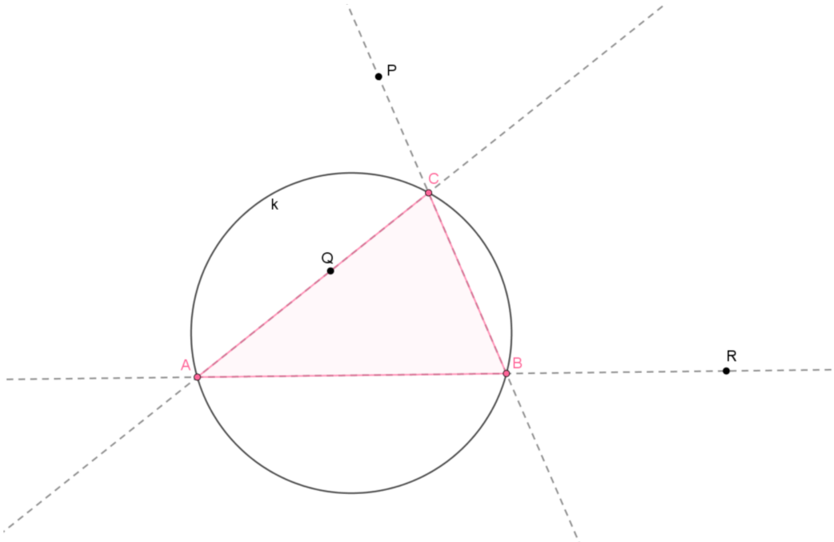


Slika 2.2: Primjer

Poglavlje 3

Geometrijski pristup problemu

Dana je kružnica K i tri točke P, Q, R izvan kružnice. Želimo konstruirati trokut $\triangle ABC$ upisan u K tako da je $R \in AB$, $P \in BC$ i $Q \in CA$.



Slika 3.1: Prikaz problema

Inverzija

Bitnu ulogu u geometrijskom pristupu rješavanju problema imat će neke transformacije ravnine, a posebno inverzija. Definirat ćemo inverziju s obzirom na kružnicu i navesti neka njezina svojstva.

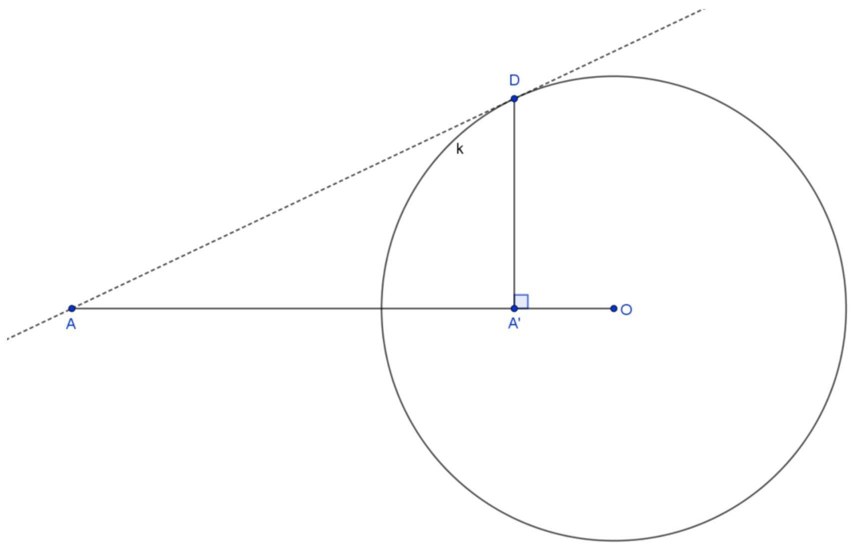
Definicija 3.0.1. *Neka je $k(O, r)$ kružnica u euklidskoj ravnini E^2 sa središtem u točki O i radijusom $r > 0$. Preslikavanje i koje svakoj točki $T \neq 0$ pridružuje T' naziva se inverzija s obzirom na kružnicu k ako vrijedi:*

1. *O, T i T' su kolinearne točke,*
2. *T i T' leže s iste strane točke O,*
3. *$|OT| \cdot |OT'| = r^2$.*

Inverziju ćemo kadkad označavati s $i[O, r^2]$.

Primijetimo da je inverzija involutorno preslikavanje, tj. $i(A) = A' \Leftrightarrow i(A') = A$. Drukčije, $i \circ i$ je identiteta pa je $i = i^{-1}$ te je inverzija bijektivno preslikavanje. Elementranim geometrijskim razmatranjem vidi se položaj točaka A i A' koji se uzajamno preslikavaju inverzijom. Ako je A točka koja leži izvan kružnice k, onda je A' nožište dužine na pravac AO iz dirališta D tangente iz točke A na kružnicu k.

Definicija 3.0.2. *Kružnicu sa središtem O i radijusom r zovemo kružnicom inverzije i.*

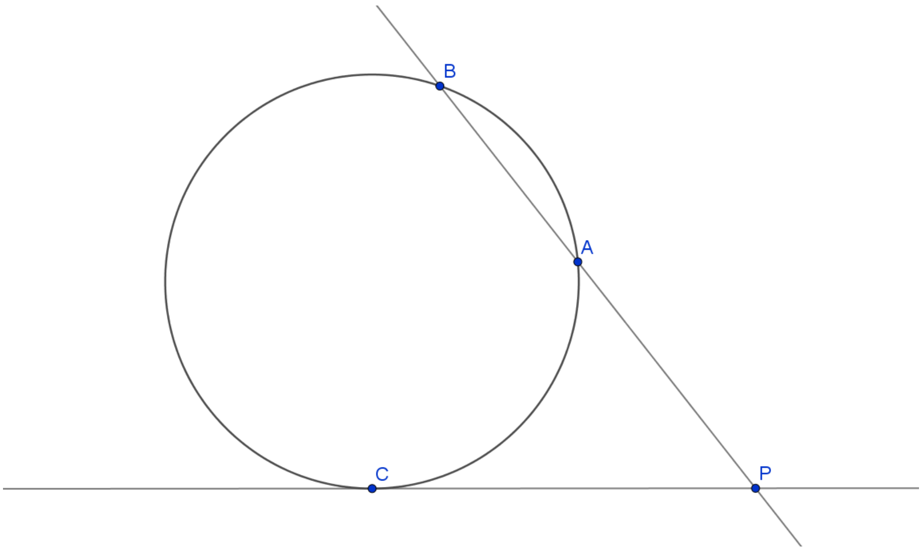


Slika 3.2: Primjer konstrukcije inverzne točke

Navest ćemo nekoliko teorema o inverziji koje ćemo koristiti u rješavanju problema. U tu svrhu definiramo i pojam potencije točke s obzirom na kružnicu jer se primijenjuje u dokazima nekih svojstava.

Definicija 3.0.3. *Ako pravac kroz točku P siječe kružnicu $k(S, r)$ u točkama A i B, onda umnožak usmjerenih dužina $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ ima konstantnu vrijednost, to jest ne ovisi o izboru pravca kroz točku P. Ta kostantna vrijednost naziva se potencijom točke P s obzirom na kružnicu.*

Potencija točke ima vrijednost $||PS|^2 - r^2|$ te predznak ovisi o tome nalazi li se točka P izvan kružnice ili unutar nje.



Slika 3.3: Potencija točke P

Teorem 3.0.4. *Točka T je fiksna točka inverzije ako i samo ako leži na kružnici inverzije.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je T fiksna točka inverzije, tj. $i(T) = T$. Tada vrijedi

$$|OT| \cdot |OT| = r^2 \Rightarrow |OT|^2 = r^2.$$

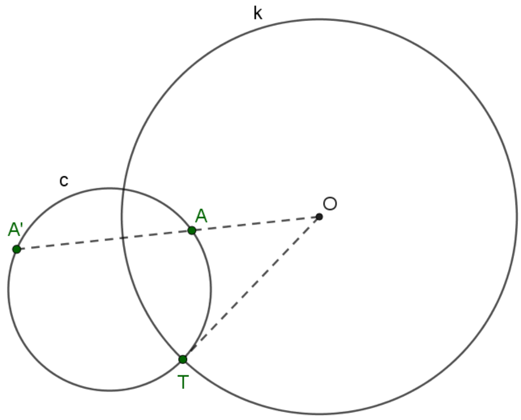
Kako je $|OT| > 0$ i $r > 0$, slijedi da je $|OT| = r$, pa se točka T nužno nalazi na kružnici.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo suprotno, tj. T nije fiksna točka inverzije, a leži na kružnici inverzije. Tada je

$$|OT| \cdot |OT'| = r^2 \Rightarrow r \cdot |OT'| = r^2 \Rightarrow |OT'| = r.$$

To bi značilo da je T' na kružnici i nalazi se na pravcu OT s iste strane točke O kao i T. Zbog toga je $T = T'$, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, ako se točka nalazi na kružnici inverzije, tada je ona fiksna. □

Teorem 3.0.5. *Ako je kružnica c ortogonalna na kružnicu inverzije k, onda je $i(c) = c$.*

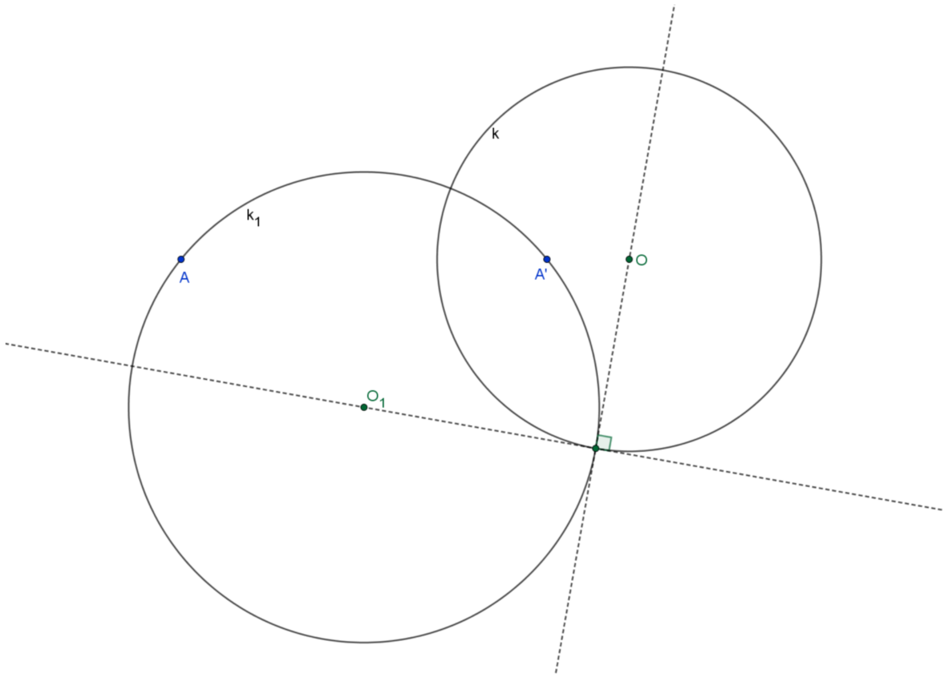
Dokaz. Neka su k i c međusobno ortogonalne kružnice, O središte kružnice k te se k i c sijeku u točki T. Neka bilo koja sekanta od c kroz O siječe c u A i A'. Zbog ortogonalnosti k i c, OT je tangenta od c. Zbog potencije točke O s obzirom na kružnicu c vrijedi $|OA| \cdot |OA'| = |OT|^2 = r_k^2$, pa su A i A' par inverznih točaka s obzirom na kružnicu. □



Slika 3.4: Dokaz 3

Teorem 3.0.6. *Ako je c bilo koja kružnica kroz par pridruženih točaka A, A' inverzije $i[O, r^2]$, onda je c ortogonalna na kružnicu inverzije $k(O, r)$.*

Dokaz. Neka je k kružnica inverzije i, a O središte kružnice k. Neka je c kružnica kroz A' i A i OT tangenta iz O na c. Zbog potencije točke O s obzirom na kružnicu c vrijedi da je $OT^2 = OA \cdot OA'$, a zbog toga što su A i A' inverzne točke, vrijedi da je $OA \cdot OA' = r_k$. Zato je $OT = r_k$, što znači da se T nalazi na kružnici k. Dakle, $T = k \cap c$ pa je c ortogonalna na k. □



Slika 3.5: Ortogonalne kružnice

Rješenje

Vratimo se na postavljeni problem za kružnicu k i točke P, Q i R zadanje izvan kružnice. Uočimo da postoje inverzije p, q, r sa centrima P, Q, R redom takve da svaka ostavlja k invarijantnom. Iz teorema 3.0.5 znamo da to svojstvo imaju kružnice ortogonalne na k. Stoga polumjere traženih kružnica dobivamo kao odsječke na k iz točaka P, Q i R.
Budući da svaka od inverzija p, q, r ostavlja k invarijatnom, isto vrijedi i za njihovu kompoziciju $phi = p \circ q \circ r$. Sad možemo iskazati teorem ključan za rješenje problema.

Teorem 3.0.7. *Neka su p, q, r inverzije sa centrima P, Q, R koje ostavljaju kružnicu k invarijatnom. Označimo s $\phi = p \circ q \circ r$ transformaciju ravnine, a $\varphi = \phi|_k$ njezinu restrikciju na skup točaka kružnice k. Tada vrijedi: $\triangle ABC$ je rješenje Cramer-Castillonovog problema ako i samo ako je B fiksna točka za preslikavanje φ, tj.*

$$\varphi(B) = p \circ q \circ r(B) = B.$$

Dokaz. $\Rightarrow$ Ako je $\triangle ABC$ rješenje problema, tada su točke A, B i C vrhovi trokuta upisanog kružnici k i pravci na stranicama tog trokuta prolaze kroz točke P, Q i R. Zbog definicije inverzija p, q i r vrijedi:

$$r(B) = q(C) = A$$
$$q(A) = p(B) = C$$
$$p(C) = r(A) = B$$

Tada je:

$$\begin{aligned} q(A) = C \Rightarrow q(r(B)) &= p(B) \\ \Rightarrow p(q(r(B))) &= p(p(B)) \\ \Rightarrow p \circ q \circ r(B) &= B. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Neka je B fiksna točka za φ. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \varphi(B) = p \circ q \circ r(B) = B \Rightarrow p(p(q(r(B)))) &= p(B) \\ \Rightarrow q(r(B)) &= p(B) \end{aligned}$$

Označimo $r(B) = A$, $p(B) = C$. Vrijedi $r(k) = k$ i $p(k) = k$ te mora biti $A = k \cap RB$ i $C = k \cap PB$. Sada je

$$q(A) = q(r(B)) = p(B) = C.$$

Dakle, Q, A i C su kolinearne točke i stoga je $\triangle ABC$ rješenje problema. $\square$

Istaknimo da se iz ovog teorema vidi kako je preostalo pitanje o tome postoje li fiksne točke preslikavanja φ i kako ih odrediti.
U daljenjem toku rješavanja bit će potrebno promijeniti neke od najvažnijih teorema iz afine i projektivne geometrije ravnine pa ćemo radi potpunosti izlaganja dokazati i te rezultate (Menelajev teorem, Pascalov teorem). Također, iako želimo izvesti geometrijsko rješenje problema, za analizu postojanja rješenja rješenja ponovno ćemo se poslužiti Möbiusovim transformacijama. U tom slučaju promatrat ćemo transformacije proširene kompleksne ravnine, budući da se pomoću Möbiusovih transformacija prikazuju rotacija, translacija, homotetija i druga preslikavanja ravnine, a uz kompleksno konjugiranje također i inverzija.

3.1 Möbiusove transformacije na $\mathbb{C}$

Svaku točku euklidske ravnine E^2 možemo prikazati kompleksnim brojem. Korisno je proširiti $\mathbb{C}$ još jednom točkom, uobičajeno označeno s ∞ tako da Möbiusove transformacije proširenjem domene postanu bijekcije. Geometrijski, svaki pravac euklidske ravnine proširi se točkom ∞.

Definicija 3.1.1. *Označimo* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Neka je* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *pri čemu su* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. *Definiramo* $f(\infty)=\frac{a}{c}$ *i* $f(\frac{-d}{c})=\infty$, *ako je* $c \neq 0$. *Posebno, za* $c = 0$ *stavljamo* $f(\infty) = \infty$.

Primjerice, preslikavanje $f(z) = z + b$ predstavlja translaciju, $f(z) = az$ uz $|a| = 1$ rotaciju, a $f(z) = kz$ za $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ homotetiju.

Propozicija 3.1.2. *Inverzija s obzirom na jediničnu kružnicu* $|z| = 1$ *zadana je s* $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Dokaz. Neka su T i T' pridružene točke u inverziji $i[0, 1]$, a z i z' odgovarajući kompleksni brojevi.
Zbog kolinearnosti O, z i z' mora biti $arg(z) = arg(z')$, dok za apsolutne vrijednosti imamo $|z| \cdot |z'| = 1$.
Vidimo da upravo $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ ispunjava tražene uvjete jer —$\frac{1}{\bar{z}}| = \frac{q}{|z|}$ i $arg\frac{1}{\bar{z}} = argz$.
(Ako je $z = e^{i\varphi}$, onda $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, $\frac{1}{\bar{z}} = e^{i\varphi}$). $\square$

Primijetimo da kompozicija inverzije i bilo koje Möbiusove transformacije općenito ima oblik

$$g(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

3.2 Fiksne točke transformacija

Zaključili smo da je trokut $\triangle ABC$ rješenje problema ako i samo ako je točka B fiksna za transformaciju φ. Za diskusiju postojanja rješenja važno je stoga poznavanje svih mogućnosti za broj i raspored fiksnih točaka promatranih transformacija. Može se pokazati da ako neka transformacija fiksira tri kolinearne točke, onda fiksira svaku točku tog pravca. Odatle slijedi da ako su fiksne četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne, onda je promatrana transformacija nužno identiteta na cijeloj ravnini. Znamo da transformacija različita od identitete može fiksirati svaku točku nekog pravca (zrcaljenje s obzirom na pravac) i svaku točku neke kružnice (inverzija), a također da postoje transformacije bez fiksnih točaka (translacija) i s točno jednom fiksnom točkom (homotetija).
Sve slučajeve možemo obuhvatiti izračunom fiksnih točaka transformacija oblika $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, odnosno $g(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, uz $ad - bc \neq 0$.
Pretpostavimo najprije $c = 0$. Možemo pisati $f(z) = az + b$, odnosno $g(z) = a\bar{z} + b$, pri čemu je $a \neq 0$.
$f(z) = z$ očito ima jedno ili nijedno rješenje, uz pretpostavku da f nije identiteta. $g(z) = z = a\bar{z} + b$ rastavljanjem na realni i imaginarni dio daje dvije linearne jednadžbe, dakle dva pravca. Ti pravci mogu se podudarati, sjeći u jednoj točki ili biti paralelni, što znači cijeli pravac fiksnih točaka ili jedna fiksna točka ili nema fiksnih točaka.
Neka je $c \neq 0$ pa možemo uzeti $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, odnosno $g(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$. $f(z) = z$ daje kvadratnu

jednadžbu $z^2 + (d - a)z - b = 0$ u skupu $\mathbb{C}$, koja ima jedno ili dva različita rješenja. Napokon, $g(z) = z$ ekvivalentno je sa $z\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0$. Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela dobivamo jednadžbe

$$z\bar{z} + Re(dz - a\bar{z} - b) = 0$$

$$Im(dz - a\bar{z} - b) = 0$$

.

Dakle, $dz - a\bar{z} - b \in \mathbb{R}$. Ako je to 0 onda je $z = 0$ jedino rješenje, ako je $dz - a\bar{z} - b > 0$ onda nema fiksnih točaka, a ako je $dz - a\bar{z} - b < 0$ onda je skup fiksnih točaka kružnica $x^2 + y^2 = -dz + a\bar{z} + b$.

3.3 Menelajev i Pascalov teorem

Teorem 3.3.1 (Menelajev teorem)**.** *Neka je $\triangle ABC$ takav da je $R \in AB$, $P \in BC$ i $Q \in CA$. Tada vrijedi: P, Q i R su kolinearni ako i samo ako* $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

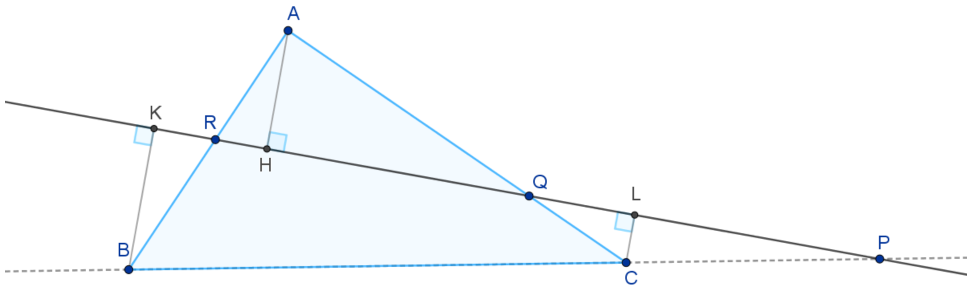
Dokaz. $\Rightarrow$ Neka su H, K i L ortogonalne projekcije redom točaka A, B, C.
Trokuti $\triangle PLC$ i $\triangle PKB$ su slični pa vrijedi:

$$\frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|KB|}{|LC|}.$$

Također, $\triangle QHA \sim \triangle QLC$ i $\triangle RHA \sim \triangle RKB$ pa vrijedi:

$$\frac{|QC|}{|QA|} = \frac{|LC|}{|HA|} \text{ i } \frac{|RA|}{|RB|} = \frac{|HA|}{|HB|}.$$

Tada vrijedi da je $\frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|QC|}{|QA|} = \cdot \frac{|RA|}{|RB|} = 1$. Ovo vrijedi za duljine dužina. Promotrimo što se događa s orijentiranim dužinama, tj. je li moguće da umnožak orijentiranih dužina bude negativan. Ako $\triangle ABC$ leži s jedne strane pravca PQ, onda su sva tri omjera pozitivna te je rezultat 1. Ako taj pravac siječe trokut, onda su dva omjera negativna, a jedan pozitivan, pa je rezultat opet 1.
$\Leftarrow$ Neka vrijedi $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Neka $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \neq 1$. Tada $\frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} \neq \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QC}}$, tj. QR nije paralelno s BC. Neka je P' sjecište pravaca QR i BC. Koristeći prvi dio dokaza na pravcu QR na kojem je i P' zaključujemo $\frac{|P'B|}{|P'C|} = \frac{|PB|}{|PC|}$ te je $P = P'$. □



Slika 3.6: Prikaz Menelajeva teorema

Teorem 3.3.2 (Pascalov teorem)**.** *Ako je $ABCDEF$ šesterokut upisan kružnici k, tada su točke $L = AB \cap DE$, $M = BC \cap EF$ i $N = CD \cap FA$ kolinearne.*

Dokaz. Koristit ćemo Menelajev teorem (3.3.1). Promatramo trokut $\triangle PQR$, gdje je $P = AB \cap CD$, $Q = CD \cap EF$, a $R = AB \cap EF$. Točke L, D, i E su kolinearne pa po Menelajevu teoremu vrijedi:

$$\frac{\overrightarrow{LR}}{\overrightarrow{LP}} \cdot \frac{\overrightarrow{EQ}}{\overrightarrow{ER}} \cdot \frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{DQ}} = 1.$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{MR}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{BP}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CQ}} = 1.$$

$$\frac{\overrightarrow{NP}}{\overrightarrow{NQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{FQ}}{\overrightarrow{FR}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AP}} = 1.$$

Potencija točke P s obzirom na kružnicu je

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}.$$

Potencija točke Q s obzirom na kružnicu je

$$\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = \overrightarrow{QE} \cdot \overrightarrow{QF}.$$

Potencija točke R s obzirom na kružnicu je

$$\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RE} \cdot \overrightarrow{RF}.$$

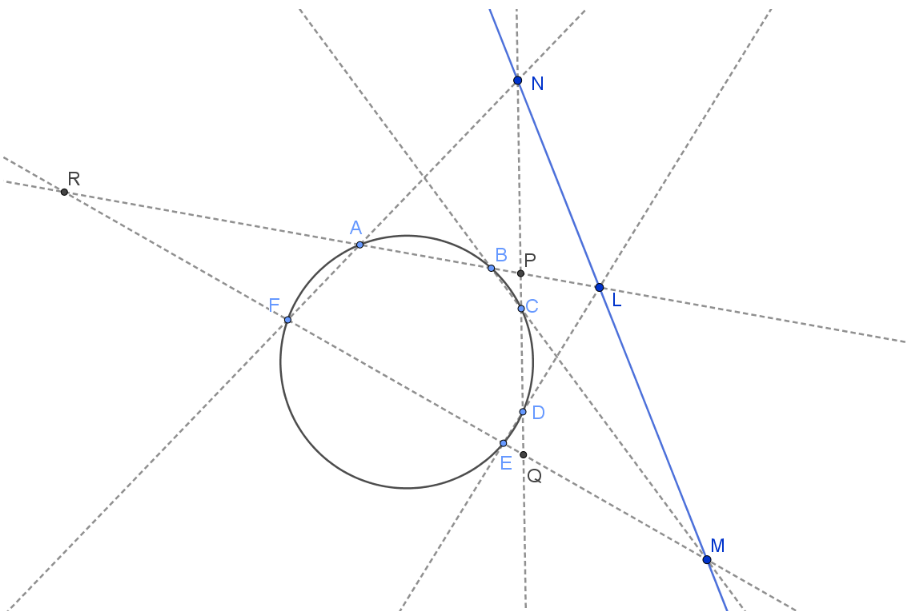
Pomnožimo početne tri jednadžbe i dobijemo:

$$\frac{\overrightarrow{LR}}{\overrightarrow{LP}} \cdot \frac{\overrightarrow{EQ}}{\overrightarrow{ER}} \cdot \frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{DQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{MR}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{BP}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{NP}}{\overrightarrow{NQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{FQ}}{\overrightarrow{FR}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AP}} = 1.$$

Pomoću potencija točaka P, Q i R sređivanjem ovog izraza dolazimo do

$$\frac{\overrightarrow{LR}}{\overrightarrow{LP}} \cdot \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{MR}} \cdot \frac{\overrightarrow{NP}}{\overrightarrow{NQ}} = 1.$$

Dakle, po Menelajevom teoremu (3.3.1) točke L, M i N su kolinearne. □



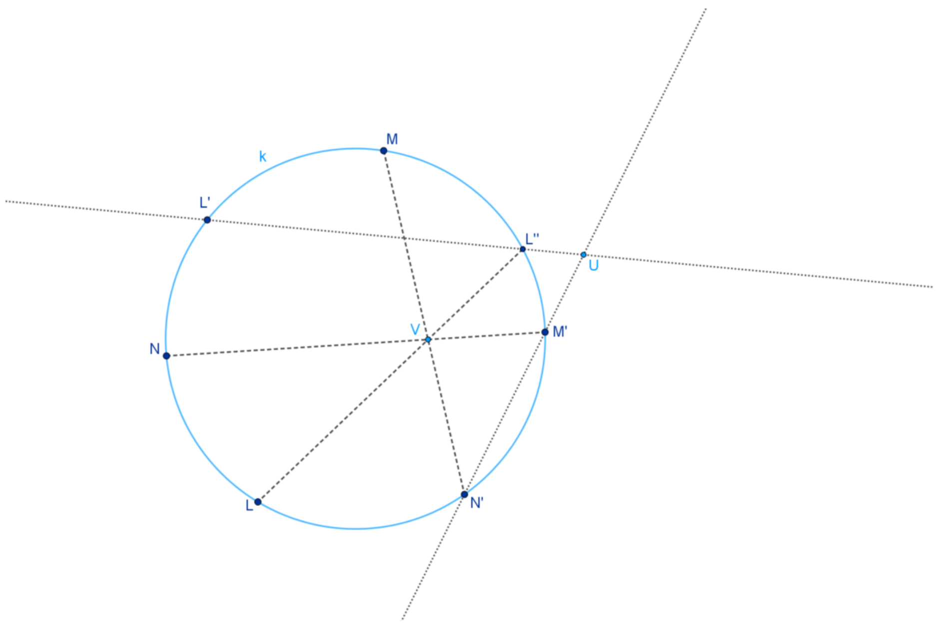
Slika 3.7: Pascalov teorem

3.4 Rješenje

Lema 3.4.1. *Ako φ nije identiteta na k, tada postoje dvije involucije u i v takve da čuvaju k i vrijedi $(u \circ v)|_k = \varphi = \phi|_k$.*

Dokaz. Neka su M, N i L tri različite točke kružnice k, koje nisu fiksne za φ te $\varphi(M) = M'$, $\varphi(N) = N'$ i $\varphi(L) = L'$.

Znamo da takve točke postoje, jer φ ne djeluje na k kao identično preslikavanje pa primijenimo zaključke o mogućem broju i položaju fiksnih točaka iz 3.2. Također, možemo pretpostaviti da nema podudaranja nekih točaka iz navedena tri para.
Prvo želimo zadati involuciju na k koja će uzajamno preslikavati točke M i N' te M' i N. Označimo s V sjecište pravaca MN' i $M'N$. (Poseban slučaj kad su MN' i $M'N$ paralelni zasad ne razmatramo). Postoji inverzija v, moguće negativna (ovisno o položaju točke V) takva da $v(M) = N'$ i $v(N) = M'$, jer $\overrightarrow{VM} \cdot \overrightarrow{VN'} = \overrightarrow{VN} \cdot \overrightarrow{VM'}$.
Iz uvjeta $u \circ v = \varphi$ dobivamo $u(v(M)) = u(N') = M'$ i $u(v(N)) = u(M') = N'$ pa bi za inverziju u, ako postoji, centar U trebao biti na pravcu $M'N'$. Za određivanje te točke poslužimo se točkom L. Označimo $v(L) = L''$. Tada je $(u \circ v)(L) = u(L'') = L'$ pa U pripada još i pravcu $L'L''$.
Ovakvim izborom U i V odnosno involucija u i v imamo podudaranje djelovanja φ i kompozicije $u \circ v$ na točkama M, N i L, a obje transformacije preslikavaju kružnicu k na sebe. Stoga kompozicija $\varphi^{-1} \circ u \circ v$ preslikava k na sebe i fiksira tri različite točke na toj kružnici. Zato $\varphi^{-1} \circ u \circ v$ mora biti identiteta na k, dakle $\varphi = u \circ v$.
Primijetimo još da bi u slučaju paralelnosti MN' i $M'N$ φ mogla biti rotacija koja nema fiksnih točaka. Ako su $M'N'$ i $L'L''$ paralelni onda je u zrcaljenje s obzirom na os kroz centar kružnice k.



Slika 3.8: Skica dokaza

□

Lema 3.4.2. *Ako su S i T različite točke kružnice k i $\varphi(S) = S'$, $\varphi(T) = T'$, onda se pravci ST' i $S'T$ sijeku na spojnici točaka U i V.*

Vidimo da je pravac UV određen preslikavanjem φ i njegovim prikazom kao kompozicije dviju involucija te ne ovisi o izboru varijabilnih točaka S i T na kružnici.

Dokaz. Stavimo $v(S) = S''$ i $v(T) = T''$. Sad imamo $\varphi(S) = u(v(S)) = u(S'') = S'$ i $\varphi(T) = u(v(T)) = u(T'') = T'$.
Razmotrimo šesterokut $SS''S'TT''T'$. SS'' i TT'' sijeku se u točki V, a $S''S'$ i $T''T'$ u točki U. Po Pascalovom teoremu (3.3.2) tada se i treći par suprotnih stranica, $S'T$ i $T'S$ siječe u nekoj točki pravca UV. Pravac na kojem se sijeku svi parovi pravaca $S\varphi(T)$ i $T\varphi(S)$ nazvat ćemo os preslikavanja φ i označiti s ζ. □

Teorem 3.4.3. *Fiksne točke od φ su točke presjeka kružnice k i osi ζ od φ.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Promatramo pravac $UV = \zeta$. Pretpostavimo da je M fiksna točka od φ i da se ne nalazi na ζ. Neka je N točka koja nije fiksna za φ. Tada vrijedi da je $\varphi(M) = M' = M$, a $\varphi(N) = N' \neq N$, a $MN' \cap M'N = M \notin \zeta$, što je nemoguće. Dakle, fiksna točka od φ mora biti na ζ.
$\Leftarrow$ Neka je M točka na ζ i $N \neq M'$. Vrijedi da se MN' i ζ sijeku u M. Kako se MN' i $M'N$ sijeku na ζ, to mora biti u M pa je $\varphi(M) = M' = M$ tj. M je fiksna točka. □

3.5 Što ako je φ identiteta na k?

Teorem 3.5.1. *φ je identiteta na k ako i samo ako problem ima beskonačno mnogo rješenja.*

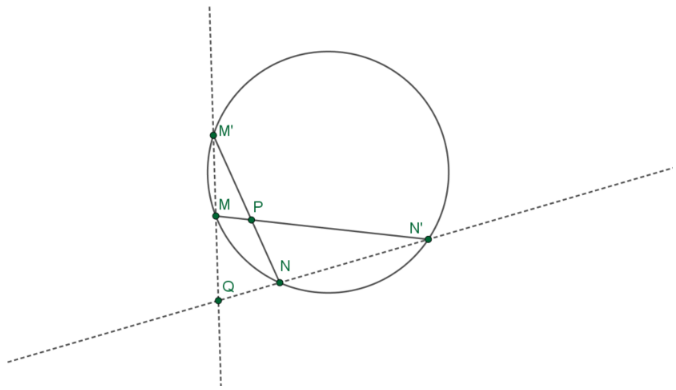
Dokaz. Dokaz provodimo kroz sljedeću lemu i teorem.

Lema 3.5.2. *Za inverzije p i q koje ostavljaju k invarijatnom vrijede međusobno ekvivalentna svojstva:*

1. *p i q komutiraju*
2. *p leži na osi od q*
3. *q leži na osi od p*
4. *kružnica čiji je promjer dužina PQ okomita je na k*

Dokaz. 1. $\Leftrightarrow$ 2. Neka je M točka na k i $p \circ q(M) = N$. Neka je $q(M) = M'$ i $p(M) = q(N) = N'$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} p \circ q(M) = q \circ p(M) &\Leftrightarrow p(M') = q(N') \\ &\Leftrightarrow p(M') = N \\ &\Leftrightarrow P = M'N \cap MN' \text{ i } P \text{ leži na osi od } q \end{aligned}$$



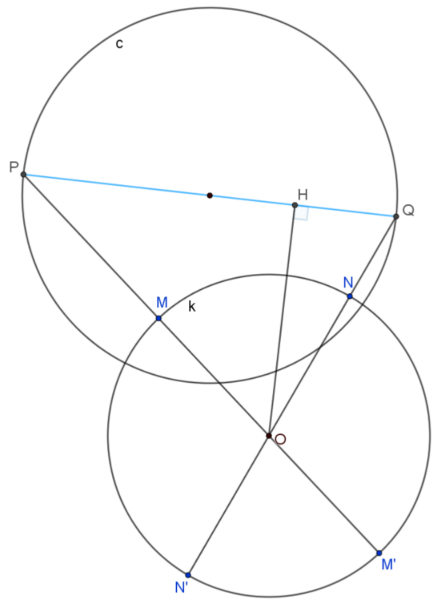
Slika 3.9: Prikaz dokaza 1. $\Leftrightarrow$ 2.

1. $\Leftrightarrow$ 3. Analogno se dobije da Q leži na osi od p.
1. $\Leftrightarrow$ 4.
$\Rightarrow$ Neka su p i q inverzije koje komutiraju i čuvaju k. Neka je c kružnica promjera $\overline{PQ}$, r radijus kružnice k. Tada $p \circ q(Q) = p(\infty) = p$ i $q \circ p(P) = q(\infty) = Q$.
Također, vrijedi $p \circ q(c) = q \circ p(c) = c$, pa je $p(c) = q(c) = \zeta$ i to je pravac ortogonalan na PQ u točki $H = p(Q) = q(P)$. Zbog inverzije točaka P i Q s obzirom na kružnicu k vrijedi:

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PO}^2 - r^2, \ \overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{QO}^2 - r^2.$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{QH}) \cdot \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{QO}^2 \\ &= (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{QH}) \cdot (\overrightarrow{HQ} - \overrightarrow{HP}) \\ &= (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{QH}) \cdot (\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{QH}) \\ &= \overrightarrow{PH}^2 - \overrightarrow{QH}^2 \end{aligned}$$

Kako je $\overrightarrow{OP}^2 - \overrightarrow{OQ}^2 = \overrightarrow{HP}^2 - \overrightarrow{HQ}^2$, vrijedi da je $OH \perp PQ$ i $OH = \zeta \perp k$. Iz toga slijedi da je $p(\zeta) = c \perp p(k) = k$, tj. p čuva ortogonalnost.



Slika 3.10: Prikaz dokaza 1. $\Rightarrow$ 4.

$\Leftarrow$ Neka su $c \perp k$ i sijeku se u točkama M i N. Neka je $M' = p(M)$ i $N' = p(N)$. $M'N' = p(c)$, a c je ortogonalan na k, pa je $M'N'$ ortogonalno na $p(k) = k$. Zato je $\overline{M'N'}$ promjer kružnice k te je $PQ \perp M'N'$ u $H = p(Q)$.

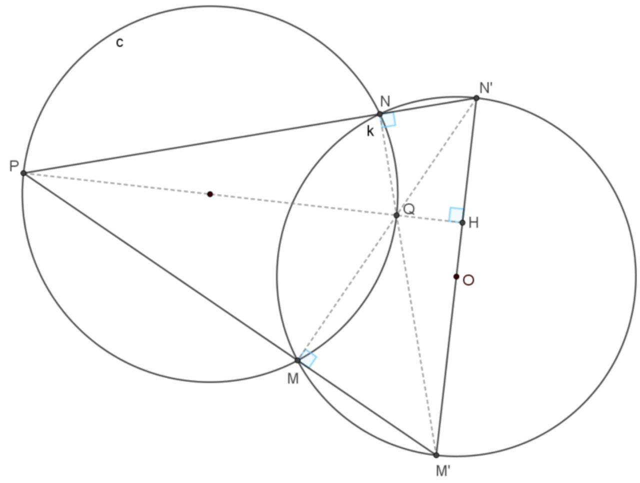
$$MP \perp MQ, MM' \perp MN' \Rightarrow Q \in MN' \Rightarrow N' = q(M), M' = q(N).$$

$$p \circ q(M') = p(N) = N', p \circ q(N') = p(M) = M', p \circ q(\infty) = p(Q) = H'$$

$$q \circ p(M') = q(M) = N', q \circ p(N') = q(N) = M', q \circ p(\infty) = q(P) = H'$$

$p \circ q$ i $p \circ q$ su dva preslikavanja ravnine koje se podudaraju u tri točke, pa vrijedi:

$$(p \circ q) \circ (q \circ p)^{-1} = (p \circ q) \circ (p \circ q) = Id.$$



Slika 3.11: Prikaz dokaza 4. ⇒ 1.

□

Teorem 3.5.3. *Neka je $p \circ q \circ r = \gamma$ inverzija čiji je skup fiksnih točaka kružnica k. Za inverziju γ vrijede međusobno ekvivalentna svojstva:*

1. *p, q i r međusobno komutiraju u parovima,*
2. *kružnice s promjerima $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ i $\overline{RP}$ su ortogonalne na k.*

Dokaz. 2. slijedi iz 1. i 3.5.1. Dokažimo $p \circ q \circ r = \gamma$ inverzija čiji je skup fiksnih točaka kružnica $k \Leftrightarrow p$, q i r međusobno komutiraju u parovima.
$\Rightarrow p \circ q \circ r = \gamma$ pa p, q i r komutiraju s γ zato što svaka od njih ostavlja k invarijantnom.

$$p \circ q = r \circ \gamma = (\gamma \circ r)^{-1} = (p \circ q)^{-1} = q \circ p.$$

Analogno vrijedi $q \circ r = r \circ q$.

$$\gamma = (p \circ q) \circ r = (q \circ p) \circ r = q \circ (p \circ r) \Rightarrow p \circ r = q \circ \gamma$$

Na isti način dobivamo i da vrijedi $p \circ r = r \circ p$.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da p, q i r komutiraju u parovima. Tada je točka P sjecište osi od q i osi od r po 3.5.1.
Neka je $M \in k$, $N = q \circ r(M)$ i $N'' = q(M)$. Tada je $r(N'') = N$ i neka $r(M) = M''$. Tada $P' = MN \cap M''N''$ leži na osi od r.
Isto tako, $q(M) = N''$ i $q(M'') = N$ pa P' leži na osi od q.
Dakle, $P = P'$ i te za svaki $M \in k$ vrijedi $p \circ q \circ r(M) = M$. □

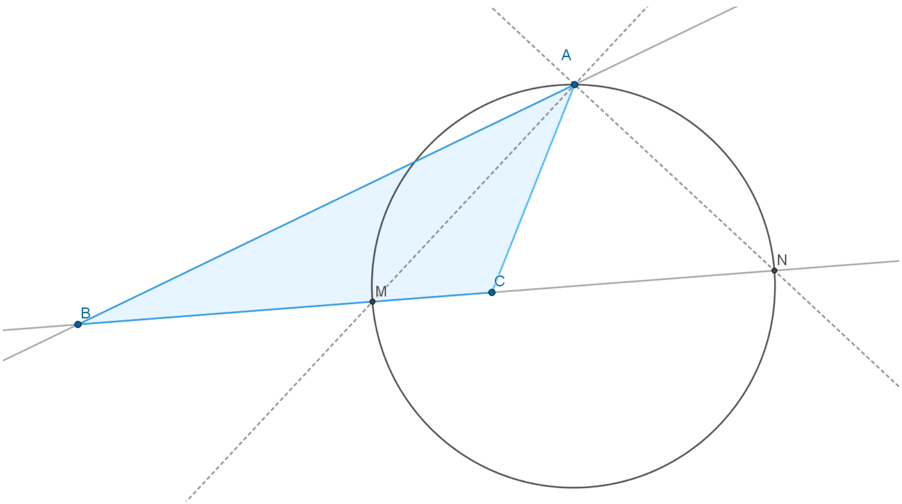
Ovim dokazom pokazali smo da je svaka točka na kružnici k fiksna, što znači da ako je $p \circ q \circ r$ identiteta, tada imamo beskonačno mnogo rješenja jer za B možemo uzeti bilo koju točku kružnice. □

3.6 Slučaj kad su P, Q i R kolinearne

Već smo spomenuli da je Pappus prvi riješio CCP u slučaju kada su zadane točke kolinearne. Neka je pravac na kojem leže točke P, Q i R označen s γ. Problem nema rješenje ako pravac γ siječe k i barem jedna od tri zadane točke leži unutar kružnice. Ako γ ne siječe k, tada je $\varphi = p \circ q \circ r$ inverzija koja čuva k i središte te inverzije leži na pravcu PQ na kojem leži i R. Neka je središte inverzije φ točka H. Može se pokazati da su dirališta tangenti iz H na k fiksne točke inverzije φ. Također, u slučaju da se kružnice inverzija p, q i r međusobno sijeku pod kutom od 60°, vrijedi da su te kružnice Apolonijeve kružnice trokuta (3.6.1) $\triangle ABC$ te je $\varphi = q$, a $Q = H$.

Definicija 3.6.1. *Apolonijeva kružnica trokuta $\triangle ABC$ kroz točku A je kružnica promjera $\overline{MN}$, gdje su M i N dva sjecišta simetrala unutarnjeg i vanjskog kuta s pravcem BC.*

Vrijedi da se Apolonijeve kružnice trokuta $\triangle ABC$ sijeku pod kutem od 60°.

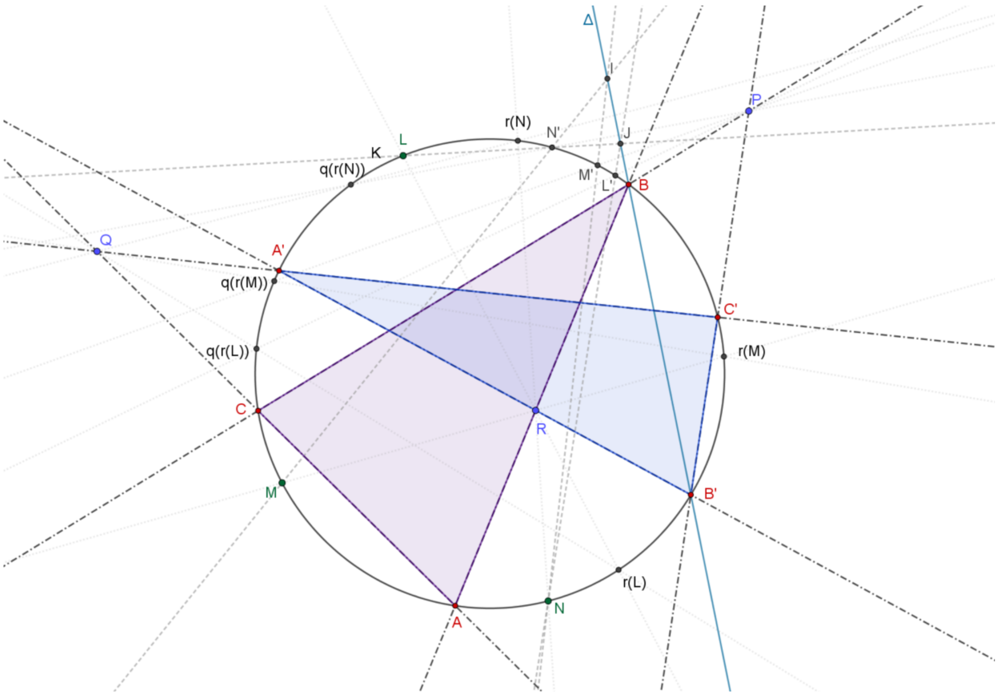


Slika 3.12: Apolonijeva kružnica trokuta $\triangle ABC$ kroz točku A

3.7 Kako konstruirati trokut $\triangle ABC$?

Dane su točke P, Q i R te je dana kružnica K.

1. Odaberemo tri proizvoljne točke M, N i L na k.
2. Konstruiramo M', N' i L' pomoću φ.
3. $MN' \cap M'N = I$, $NL' \cap N'L = J$, $IJ = \zeta$ i to je os od φ.
4. $\zeta \cap K$ su dvije točke, nazovimo ih B i B' (presjek mogu biti i samo jedna točka, tada ju nazovemo B ili nijedna).
5. Ako točka B (i B') postoji, tada je $RB \cap k = A$ i $PB \cap k = C$.
6. Posljedično vrijedi da je $Q \in AC$.



Slika 3.13: Provedena konstrukcija trokuta $\triangle ABC$ - dva rješenja

3.8 Cramer-Castillonov problem danas

Na kraju napominjemo da se Cramer-Castillonov problem i dalje proučava, s gledišta poopćavanja odnosno posebnih slučajeva koji dovode do novih rezultata. Primjerice, u članku [2] promatra se CCP s n=3 za slučajeve kad je zadana kružnica upisana ili pripisana trokutu sa zadanim vrhovima A, B i C. Pokazuje se, između ostalog, da za svaki trokut postoje točno dva rješenja, dakle ukupno 4 para rješenja uzimajući u obzir sve četiri navedene kružnice. Po dva rješenja za isti trokut i kružnicu imaju mnogo zajednčkih svojstava poznatih iz geometrije trokuta, osobito takozvane Brocardove objekte (Brocardov kut, Brocardove točke itd). Za ukupno 24 točke (po 3 u 8 rješenja) postoji jednostavna ciklička supstitucija kojom se iz bilo koje od njih dobivaju ostalih 23. Također, u izrazima za baricentričke koordinate rješenja ističe se pojavljivanje ”zlatnog reza”, broja $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bibliografija

[1] G. Wanner A. Ostermann, *Geometry by Its History*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[2] D. Reznik D. Laurain, P. Moses, *Cramer-Castillon on a triangle's incircle and excircles*, (2021.), https://arxiv.org/pdf/2110.13615.pdf.

[3] I. Grubišić, *Möbiusove transformacije*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet (2021.), https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf:9663.

[4] M. Starck, *Castillon's problem*, (2002.), http://web.archive.org/web/20110706232612/http:/wwwedu.ge.ch/cptic/clubs/cabri/download/lettre96/Preuve_Starck.pdf.

[5] V. Volenec, *Konstruktivne metode u geometriji*, (2020.), https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/kmg_predavanja.pdf.

[6] G. Wanner, *The Cramer-Castillon problem and Urquhart's 'most elementary' theorem*, Elemente der Mathematik (2006.), br. 61, 58–64, https://ems.press/content/serial-article-files/1130.

Sažetak

Cramer-Castillonov problem je geometrijski zadatak koji potječe još iz antičke Grčke. Promatramo kružnicu i tri zadane točke. Problem glasi: kako upisati trokut toj kružnici tako da pravci na kojima leže stranice trokuta prolaze kroz tri zadane točke? Problem se zatim poopćava na n točaka i konstruira se upisani n-terokut. Ovom problemu moguće je pristupiti analitički i geometrijski. Analitički pristup koristi takozvane Pitagorejske koordinate i Möbiusove transformacije. Do rješenja se dolazi pronalaskom prve točke na kružnici, a potom se preslikavanjima dolazi do ostalih točaka. U geometrijskom pristupu promatramo slučaj $n = 3$. Do rješenja se dolazi primjenom kompozicije triju inverzija. Koristimo Menelajev i Pascalov teorem te proširujemo Möbiusove transformacije na skup $\mathbb{C}$ kako bismo mogli analizirati postojanje rješenja. U slučaju da je kompozicija triju promatranih inverzija identiteta, CCP ima beskonačno mnogo rješenja. Za kraj, uz prikaz efektivne konstrukcije u tipičnom slučaju s dva rješenja, komentiramo relevantnost problema koji i danas potiče zanimanje.

Summary

Cramer-Castillon's problem is a geometric task dating from ancient Greece. A circle and three points are given. The problem states: how to inscribe a triangle in the given circle so that the sides of the triangle lie on the lines passing though the given points? The problem is then generalized to an n-polygon. We can approach this problem analytically and geometrically. The analytic approach uses the so-called Pythagorean coordinates and Möbius transformations. We arrive at the solution by finding the first point on the circle, and then use a chain of mappings to arrive at other points. In the geometric approach, we focus on case $n = 3$. We find the solution by using a composition of three inversions. We use Menelaus and Pascal's theorem, and expand the definition of Möbius transformation to the set $\mathbb{C}$, so that we can analyse the existance of the solution. In the case that the composition is an identity, the problem has infinitely many solutions. In the end, along with an effective construction in a typical case with two solutions, we are commenting the relevancy of the problem which is still interesting today.

Životopis

Rođena sam 6. veljače 1999. godine u Čakovcu. Osim osnovne škole, završila sam i osnovnu glazbenu školu, smjer gitare, a potom sam upisala opću gimnaziju u Gimnaziji Josipa Slavenskog u Čakovcu. U 3. razredu srednje škole upisala sam i pripremnu glazbenu školu za smjer solo-pjevanja. Završila sam obje škole 2017. godine te sam iste godine upisala nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon tri godine upisala sam diplomski studij na istom fakultetu, smjer Matematika-informatika, nastavnički.