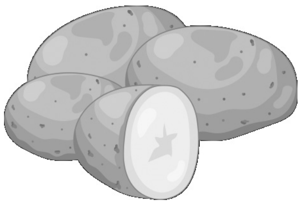
Paradoks krumpira

Petar Žugec[1]



Pretpostavimo, za potrebe priče, da se tek ubrani krumpiri sastoje od 99 % vode. Ostatak mase čini suha tvar (minerali, proteini, ugljikohidrati...). Ubrali smo 100 kg svježih krumpira te ih ostavili preko noći na otvorenom, nakon čega su sušenjem izgubili dio vode. Ako se do jutra relativni udio vode smanjio na 98 %, kolika nam je masa krumpira ostala?

Rješenje

Svakako pozivamo čitatelja da samostalno pokuša odgovoriti na ovo pitanje. Pri tome imajmo na umu da kad bi odgovor bio sasvim očit i nezanimljiv u svojoj jednostavnosti, problem ne bismo mogli nazvati paradoksalnim. Počet ćemo s formalnim pristupom, tek toliko da vam se konačan odgovor ne nađe "na dohvat oka", čime bismo vam uskratili zadovoljstvo samostalnog otkrića. Dakle, sada je posljednja prilika za "pauzirati" članak.

⋆ ⋆ ⋆

Označimo s $x_0 = 0.99$ početni relativni udio vode u ukupnoj masi krumpira, a s y_0 početni relativni udio suhe tvari: $y_0 = 1 - x_0 = 0.01$. Neka je M ukupna masa krumpira, a m masa suhe tvari u nekom trenutku. Početne vrijednosti označit ćemo dodatnim indeksom: M_0 i m_0. Očito, za relativne udjele x i y vode i suhe tvari u bilo kojem trenutku vrijedi: $x + y = 1$. No kako se suha tvar ne gubi sušenjem, njena masa cijelo vrijeme ostaje ista ($m = m_0$). Stoga prema definiciji relativnog udjela $y = m/M$ uvijek vrijedi:

$$y_0 M_0 = yM \implies (1 - x_0)M_0 = (1 - x)M. \tag{1}$$

Zadani su nam početni i konačni udio vode: $x_0 = 0.99$ i $x = 0.98$, te početna ukupna masa: $M_0 = 100$ kg. Jedino nam preostaje izrazili ukupnu masu krumpira nakon sušenja preko početne mase M_0:

$$M = \frac{1 - x_0}{1 - x} M_0. \tag{2}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobivamo $M = M_0/2 = 50$ kg! Dok se relativni udio vode smanjio s 99 % na 98 %, ukupna masa krumpira se prepolovila!

Kako ovo razumjeti? Srž problema, tj. srž *prividnog* paradoksa je u tome što se promjenom udjela vode mijenja i ukupna masa s obzirom na koju je taj isti relativni udio definiran. Označimo li s μ trenutnu masu vode, definicija njenog relativnog udjela

[1] Autor je docent na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `pzugec@phy.hr`

$x = \mu/M$ – uz očit rastav ukupne mase $M = m_0 + \mu$, gdje smo već uzeli u obzir da masa suhe tvari m_0 sve vrijeme ostaje ista – vodi na:

$$x = \frac{\mu}{m_0 + \mu}, \tag{3}$$

što je jednadžba koju nije jednostavno brzim intuitivnim procesuiranjem riješiti po μ, u svrhu određivanja konačne mase vode. Umjesto toga, neizoštreno intuitivno razmišljanje lažno nam sugerira sljedeću pogrešnu relaciju:

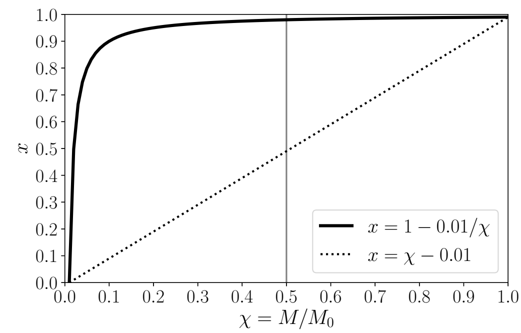
$$x \overset{\text{krivo}}{=} \frac{\mu}{m_0 + \mu_0} \tag{4}$$

koju jest jednostavno napamet riješiti po μ, no u kojoj ukupna masa iz nazivnika sve vrijeme ostaje ista početnoj vrijednosti M_0. Sad vidimo zašto je čak i uz dobar postupak iz (3) teško pogađanjem napamet (iterativnim postupkom pokušaja i pogreške) odrediti μ: zato jer nam sa svakom promjenom probne vrijednosti μ ukupna masa iz nazivnika uporno "bježi".

Nasuprot tome, u pokušaju pravilnog rješavanja napamet moramo se "uhvatiti" za neku referentnu točku koja sve vrijeme ostaje ista. A to je, umjesto nepromišljeno uzete ukupne mase, upravo masa suhe tvari. Izražen preko udjela suhe tvari, početni problem glasi: kolika je promjena mase krumpira ako je udio suhe tvari porastao s 1 % na 2 %? U ovom slučaju i formalno ispravna i intuitivna relacija se podudaraju:

$$y = \frac{m_0}{M} \tag{5}$$

te je njena predost u tome što od triju bitnih članova – brojnika, nazivnika te lijeve strane jednadžbe – jedan doista jest stalan, za razliku od slučaja s (3). Tada je iz $yM = y_0M_0$ čak i napamet lako provesti skaliranje $M = (y_0/y)M_0$ te brzo odrediti točno rješenje. I to je upravo razlog zašto početni problem *nije* postavljen na taj način!



Priloženi graf ilustrira funkciju duž koje bismo se iterativnim podešavanjem rješenja napamet morali kretati dok ne bismo pogodili točno onu vrijednost omjera $\chi = M/M_0$ za koju se ostvaruje zadani udio vode x u sastavu krumpira nakon njihova sušenja (već znamo da je tražena vrijednost tog omjera $\chi = 1/2$.) Ta funkcija, koju bismo napamet ispitivali, nije ništa drugo nego inverz rješenja (2):

$$x = 1 - \frac{1 - x_0}{\chi} = 1 - \frac{0.01}{\chi}. \tag{6}$$

U kontekstu priče ova funkcija ima smisla samo na intervalu $\chi \in [1 - x_0, 1]$, gdje poprima vrijednosti $x \in [0, x_0]$. Postupak iterativnog podešavanja konačne mase krumpira ekvivalentan je kretanju ulijevo po grafu prikazanom punom zadebljanom linijom, počevši s krajnje desne strane (od početnoga stanja krumpira $\chi = 1$ kad je udio vode 99 %). Kao što vidimo, funkcija koju ispitujemo u početku se iznimno sporo mijenja i to je upravo izvor težine problema! Ta sporost posljedica je ranije spomenutog "bježanja" nazivnika iz (3) sa svakim pokušajem dodatnog podešavanja konačnog rješenja. Tek kad se pomaknemo sve do $\chi = 0.5$, funkcija se smanji s početnih 99 % na traženih 98 %. Točkastom linijom dodatno je prikazana linearna ovisnost:

$$x \overset{\text{krivo}}{=} \chi - (1 - x_0) = \chi - 0.01 \tag{7}$$

koju predviđa pogrešan, intuitivan postupak iz (4). Misao vodilja iza tog pogrešnog postupka može se iskazati i na sljedeći način: tijekom sušenja krumpira izgubi se $x_0 - x = 1$ % početne mase krumpira. Greška u takvom, na prvi pogled prihvatljivom razmišljanju jest u tome što sugerira da se izgubilo 1 % *ukupne* početne mase, dok se zapravo gubi samo onaj dio mase koji odgovara početnom sadržaju vode. Ovo je instruktivno razumjeti jer, čini se, naša intuicija priznaje samo linearne ovisnosti (hvata ih se "ko pijan plota"), dok je ispravna funkcija za ispitivanje (6) izrazito nelinearna. Sada razumijemo da priloženi graf vizualno prikazuje neintuitivnost rješenja kroz odstupanje relevantne funkcije od pravca te da je upravo to izvor prividne paradoksalnosti početnoga problema.

⋆ ⋆ ⋆

Za kraj ostavljamo čitatelju zadatak u kojem je paradoks krumpira "zamotan" u drukčiju priču, iz nuklearne fizike. Nakon zadatka ponuđena su konačna rješenja, a čitatelju ostavljamo zadovoljstvo samostalnog rješavanja.

Zadatak. Nuklearni fizičar želi pripremiti što čišći uzorak radioaktivnog izotopa joda ^{131}I. Međutim, u uzorku se potkrala primjesa stabilnog izotopa ^{127}I. Nestabilni ^{131}I raspada se β-raspadom u izotop ^{131}Xe plemenitog plina ksenona, koji po nastanku ishlapi iz uzorka. Početna masa uzorka je $m_0 = 1\ \mu$g. Uzmite da su molarne mase dvaju izotopa joda $M_{127} = 127$ g/mol i $M_{131} = 131$ g/mol.

a) U početnome uzorku nestabilni izotop joda čini $p_0 = 99$ % ukupnog broja atoma. Izračunajte početni broj svih atoma joda u uzorku.

Rj. $N_0 = \dfrac{m_0}{(1-p_0)M_{127} + p_0 M_{131}} N_A = 4.6 \cdot 10^{15}$

b) Nakon nekog vremena, zbog raspada ^{131}I i bijega ^{131}Xe, broj atoma u uzorku se smanji, a udio nestabilnog izotopa smanji se na $p = 90$ %. Koliko je *nestabilnih* atoma joda u uzorku u tom trenutku?

Rj. $N_{131}(p) = \dfrac{1-p_0}{1-p} p N_0 = 4.14 \cdot 10^{14}$

c) Ako je vrijeme poluživota ^{131}I jednako $T_{1/2} = 8.02$ dana, koliko je vremena proteklo do prethodnog trenutka?

Rj. $t(p) = T_{1/2} \log_2 \dfrac{p_0(1-p)}{p(1-p_0)} = 27.74$ dana

d) Kolika je masa uzorka u tom trenutku? Izrazite rješenje preko početne mase m_0.

Rj. $m(p) = \dfrac{M_{127} + [p/(1-p)]M_{131}}{M_{127} + [p_0/(1-p_0)]M_{131}} m_0 = 0.0997\ \mu$g

It's not about the destination; it's about the journey.
In fact, the journey is the destination.

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Potato_paradox

[2] https://www.youtube.com/watch?v=RAGrBikLtTA