

Aproksimativna master jednadžba i njena upotreba u kontaktnim procesima

Bandalo, Marko

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:892344>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Marko Bandalo

Aproksimativna master jednadžba i upotreba u
kontaktnim procesima

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Marko Bandalo

Diplomski rad

**Aproksimativna master jednadžba i
upotreba u kontaktnim procesima**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Vinko Zlatić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2022.

Zahvaljujem svojim roditeljima na bezuvjetnoj podršci tijekom cijelog mog obrazovanja i života. Posebno bih zahvalio mentoru, dr. sc. Vinku Zlatiću, bez čije pomoći i usmjeravanja ovaj rad ne bi bio moguć.

Sažetak

Cilj ovog rada je, kroz različite modele promotriti širenje zaraze na kompleksnim mrežama te kasnije proširiti tu logiku na financijske sustave. Rad počinje s binarnom dinamikom na mrežama, poput SIS modela, koji se mogu opisati pomoću stopa tranzicije koje ovise o broju susjeda u jednom od dva moguća stanja. Dinamika će se aproksimirati s aproksimativnom master jednadžbom, aproksimacijom parova i aproksimacijom srednjeg polja, pa će se usporediti njihova rješenja. Zatim promatramo analitički model širenja zaraze na mreži. Istražuje se kako vjerojatnost i potencijalni utjecaj zaraze ovise o agregatnim i idiosinkratskim šokovima, promjenama u mrežnim strukturama i likvidnosti tržišta. Za kraj će se razviti model širenja zaraze, odnosno insolventnosti, u ovisnosti o kapitalu pojedine banke, te se usporediti s modelom praga.

Ključne riječi: kompleksne mreže, sistematski rizici, aproksimativna master jednadžba

Approximate master equation and its application in contact processes

Abstract

The goal of this paper is to observe the spread of contagion on complex networks through different models and to extend this logic later to financial systems. The paper starts with binary dynamics on networks, such as the SIS model, which can be described by transition rates that depend on the number of neighbors in one of two possible states. The dynamics will be approximated with the approximate master equation, pair approximation and mean field approximation and their solutions will be compared. After that what will be observed is an analytical model of contagion in financial networks with arbitrary structure. The paper explores how the probability and potential impact of contagion are influenced by aggregate and idiosyncratic shocks, changes in network structure, and asset market liquidity. Finally, a model of the spread of contagion, i.e. insolvency, will be developed, depending on the capital of an individual bank, and that model will be compared with the threshold model.

Keywords:

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Grafovi	3
2.1	Statistika mreža	7
2.2	Težinske mreže	8
3	Modeli mreža	10
3.1	Nasumične mreže	10
3.2	”Scale-free” mreže	12
3.3	k-regularne mreže	13
4	Dinamika na mrežama	15
4.1	Kontaktni procesi	15
4.2	Epidemiološki procesi	16
4.2.1	SI model	16
4.2.2	SIS model	17
4.3	Dinamika mišljenja	17
4.3.1	Model glasača	18
4.4	Model praga	19
4.4.1	Grannoveter model	19
4.5	Watts model	20
5	Aproksimativna master jednadžba	22
5.1	Binarna dinamika na mrežama	22
5.2	Aproksimacija parova i aproksimacija srednjeg polja	25
5.3	Monotona dinamika	26
5.4	Generalna dinamika	29
5.5	Modeli sa ”UP-DOWN” simetrijom	30
6	Sistemske rizici	33
6.1	Erdos-Renyi	35
6.2	”Scale-free”	35
6.3	Analiza rezultata	37

7	Usporedba sistematskih rizika sa aproksimativnom master jednadžbom	40
7.1	Model stresa	42
7.2	Mrežna topologija	42
7.3	Simulacija procesa	43
8	Zaključak	45
	Dodaci	46
A	Networkx	46
B	Bassov difuzijski model	46
C	Glauberova dinamika	48
D	Eisenberg-Noe model	49
	Literatura	52

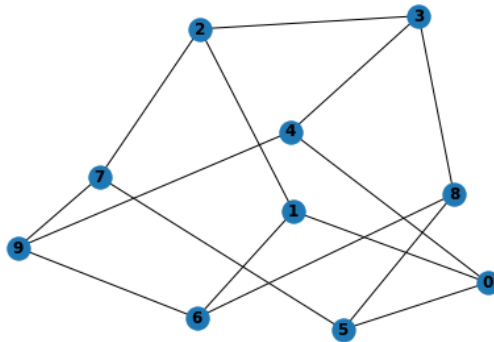
1 Uvod

Mnogi sustavi u stvarnom svijetu, primjerice internet, ispitani su u kontekstu preslikavanja na kompleksne mreže, koje se sastoje od međusobno povezanih komponenti koje međudjeluju na različite načine. Primjerice "World Wide Web" je zapravo skup web stranica koje međudjeluju putem poveznica. Fizički internet sastoji se od routera i računala međusobno povezanih žicama. Mrežne strukture mogu se prepoznati svugdje, bilo u prirodnim strukturama ili u strukturama koje je napravio čovjek. Prve se kreću od mikroskopskih, primjerice neuronske arhitekture, do kozmičkih, primjerice galaktički filamenti, dok potonje uključuju kritičke infrastrukture, primjerice električne mreže i međudržavne sustave, kao i virtualne mreže kao što su Facebook i LinkedIn. Razumijevanje njihovih karakteristika i ponašanja očito je važno. Istraživanje ovih složenih sustava zahtijeva pristup velikim podacima i snažnim metodama analize. Zahvaljujući brzom tempu razvoja informacijske tehnologije, postoji mogućnost prikupljanja i analize značajnih količina podataka kako bi se opisale različite karakteristike ovih sustava. U isto vrijeme, interdisciplinarno akademsko polje mrežne znanosti brzo se razvija za proučavanje mrežne reprezentacije fizičkih, bioloških i infrastrukturnih sustava, pružajući važne koncepte i alate za karakterizaciju i razumijevanje kompleksnih mreža. Veliki napredak u razumijevanju dinamike povezane s kompleksnim mrežama postiglo se u okviru statističke fizike. Mreža se sastoji od skupa čvorova povezanih vezama, pri čemu čvorovi predstavljaju elementarne komponente, a veze predstavljaju neku vrstu interakcije između parova komponenti. Primjerice, u hranidbenoj mreži, čvorovi su vrste, a veze predstavljaju odnose grabežljivaca i plijena. Topologija mreže određena je uzorkom veza. Studije o mrežama počinju od ispitivanja svojstava statičkih mreža, a zatim se fokus prebacuje na dinamiku povezanu s mrežom. Ovisno o fokusu mrežnog modela, dinamika se često može klasificirati na dva načina, dinamika mreža (npr. rast World Wide Web-a) i dinamika na mrežama (npr. širenje bolesti). Prema različitim obrascima dinamike, studije o kompleksnim mrežama često su raspoređene u tri kategorije: (1) Mrežna topologija (statičke mreže i dinamika mreža): Najranije istraživanje mreža usredotočeno je na topološka svojstva statičkih mreža, npr. studija Leonharda Eulera o problemu Sedam mostova Königsberga. U novije vrijeme, fokus se pomiče na topologiju dinamičkih mreža, tj. promjenu topološke strukture mreže izazvanu temelj-

nim, lokalnim zakonima. Istraživanja u ovom području pokazala su da se određene mrežne topologije pozivaju na određena pravila evolucije. Osobito su značajni primjeri mreže malog svijeta i "scale-free" mreže. (2) Dinamički procesi na mrežama: Ovaj aspekt istraživanja mreže usredotočen je na stupnjeve slobode na čvorovima (ili vezama), a razmatraju se samo mreže sa statičkom topologijom. U takvoj mreži svaki čvor može postojati u različitim stanjima, a njegovo se stanje može dinamički mijenjati. Primjerice, u modelu glasača, bilo koji dati čvor (glasač) može uzeti jednu od dvije vrijednosti o nekom pitanju, a njegova se vrijednost može promijeniti pod utjecajem mišljenja susjednih čvorova. (3) Prilagodljive koevoluirajuće mreže: prethodna dva pravca istraživanja tretiraju dinamiku mreža različito od dinamike na mrežama. Međutim, u stvarnom svijetu, dinamika mreža ovisi o topološkim svojstvima mreža. Kao rezultat toga, pozornost je privuklo spajanje (1) i (2), što je dovelo do nove grane proučavanja, dinamike adaptivne mreže. Kao primjer se može uzeti širenje epidemije među stanovništvom. Topologija mreže (ljudski kontakti) utječe na dinamička stanja čvorova (pojedinaca), tj. osjetljivih, zaraženih i oporavljenih. S druge strane, stanje čvora utječe na njegove veze, npr. vjerojatno je da će osjetljiv izbjegavati kontakt sa zaraženim, a to rezultira smanjenjem poveznica u mreži. U tom smislu uspostavlja se međusobna interakcija između topološke evolucije mreže i dinamike čvorova. Predmet ovog istraživanja fokusira se na dinamičke procese na mrežama. Za početak će se promotriti binarna dinamika na mrežama koje se mogu opisati pomoću stope tranzicije, koja ovisi o broju susjeda u jednom od dva moguća stanja. U početku će fokus biti samo na epidemiološkim i socijalnim modelima širenja zaraze ili mišljenja, dok će se kasnije ove metode pokušati primijeniti na financijske sustave.

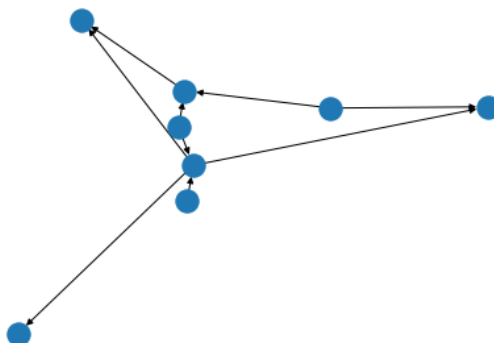
2 Grafovi

Neusmjereni graf G definiran je parom skupova $G = (\nu, \varepsilon)$, gdje je ν neprazan skup elemenata, koji se nazivaju čvorovima ili vrhovima, dok je ε skup neuređenih parova različitih čvorova koji se nazivaju bridovima ili vezama. Brid (i, j) spaja čvorove i i j koji se nazivaju susjednima ili povezanima. Često se spojene čvorove naziva susjednima. Ukupan broj čvorova u grafu označava se s N i on definira red grafa. Za graf veličine N , maksimalan broj bridova iznosi $\binom{N}{2}$. Graf s $E = \binom{N}{2}$, tj. graf u kojem su svi parovi čvorova spojeni bridovima zove se kompletan N -graf. Primjer neusmjerenog grafa prikazan je na slici 2.1.



Slika 2.1: Primjer neusmjerenog grafa. Generirano paketom NetworkX

Usmjereni graf D ili digraf definiran je nepraznim skupom čvorova (vrhova) ν i skupom uređenih parova različitih čvorova ε koji se nazivaju usmjerenim bridovima (vezama). U grafičkoj reprezentaciji, usmjereni bridovi prikazani su pomoću strelice koja ukazuje na usmjerenost brida. Primjer usmjerenog grafa prikazan je na slici 2.2.



Slika 2.2: Primjer usmjerenog grafa. Generirano paketom NetworkX

S matematičkog pogleda, poželjno je definirati graf preko matrice susjedstva $A =$

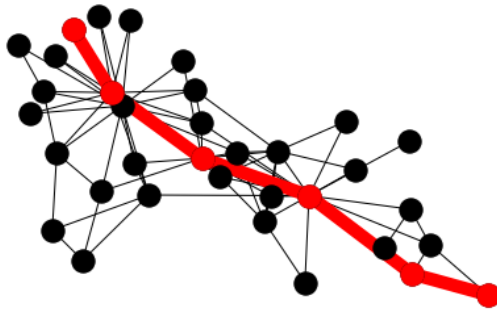
a_{ij} . To je $N \times N$ matrica definirana kao:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i, j) \in \varepsilon. \\ 0, & \text{if } (i, j) \notin \varepsilon. \end{cases} \quad (2.1)$$

Za neusmjerene grafove, matrica susjedstva je simetrična $a_{ij} = a_{ji}$. Za usmjerene grafove, matrica susjedstva nije simetrična. Važna značajka mnogih grafova koja pomaže u ispitivanju strukture je rijetkost (eng. sparseness). Broj bridova E za povezani graf je u rasponu od $N - 1$ do $\binom{N}{2}$. Rijetkost se definira tako da ako za broj bridova vrijedi $E \sim N^\alpha$, gdje je $\alpha < 2$, tada se za graf kaže da je rijedak. U slučaju kada vrijedi $E \sim N^2$, za graf se kaže da je gust. Definiranjem povezanosti ili gustoće grafa kao broja postojećih bridova podijeljenih s maksimalnim mogućim brojem bridova $D = E/[N(N - 1)/2]$, graf je rijedak ako vrijedi $D \ll 1$. Ovo ukazuje da je u slučaju velikih grafova matrica susjedstva većinom definirana s nulama. Velike grafove je tada poželjnije zapisati u obliku liste susjedstava $l(i, \nu \in \mathcal{V}(i))$, gdje se skup svih susjeda čvora naziva susjedstvom, i označava se s $\mathcal{V}(i)$. Poželjno je definirati podskupove grafa. Za graf $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$, kaže se da je podgraf grafa $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ako vrijedi $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ i $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. Jedno je od ključnih problema u strukturi grafova dostupnost čvorova, tj. mogućnost da se iz jednog čvora dođe do drugog čvora putem bridova. U povezanom grafu do svakog se čvora može doći ako se polazi iz nekog drugog čvora. Da bi se analizirala svojstva povezanosti, definira se put P_{i_0, i_n} u grafu $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ kao skup $n + 1$ čvorova $\mathcal{V}_P = i_0, i_1, \dots, i_n$ i n bridova $\mathcal{E}_P = (i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{n-1}, i_n)$. Za put P_{i_0, i_n} kaže se da povezuje čvorove i_0 i i_n , ako je dužina puta n . Broj puteva \mathcal{N}_{ij} duljine n između dva čvora i i j dan je kao $\mathcal{N}_{ij} = (\mathbf{A}^n)_{ij}$. Definira se i duljina najkraćeg puta između dva čvora koji se označava sa l_{ij} . Kada dva čvora pripadaju nespojenim komponentama grafa, tada vrijedi l_{ij} . Iako je simetrična komponenta za neusmjerene grafove, duljina najkraćeg puta l_{ij} općenito se ne podudara s l_{ji} za usmjerene grafove. Grafički primjer najkraćeg puta na Karate klub grafu[1] prikazan je na slici 2.3. Koristeći duljinu najkraćeg puta kao mjeru udaljenosti između čvorova, mogu se definirati dijametar i veličina grafa. Dijametar se definira kao:

$$d_G = \max_{i,j} l_{ij} \quad (2.2)$$

Uvodi se i prosječna duljina najkraćeg puta definirana kao prosječna vrijednost l_{ij} po



Slika 2.3: Najkraći put u Karate klub grafu. Generirano pomoću paketa Networkx.

svi mogućim parovima čvorova u mreži:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{ij} l_{ij} \quad (2.3)$$

Po definiciji vrijedi $\langle l \rangle \leq d_G$

Stupanj k_i čvora i definira se kao broj bridova u grafu koji ulaze u čvor i . Iako je definicija jasna za neusmjerene grafove, ipak ju je potrebno malo prilagoditi za usmjerene grafove. Ulazni stupanj $k_{in,i}$ čvora i definira se kao broj bridova koji ulaze u čvor i , dok je izlazni stupanj $k_{out,i}$ definiran kao broj bridova koji izlaze iz čvora i . Stupanj čvora u usmjerenom grafu definiran je kao suma ulaznog i izlaznog stupnja $k_i = k_{in,i} + k_{out,i}$. U prikazu preko matrice susjedstva je sljedeće:

$$\begin{aligned} k_{in,i} &= \sum_j a_{ji} \\ k_{out,i} &= \sum_j a_{ij} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Za neusmjerene grafove sa simetričnom matricom susjedstva vrijedi $k_{in,i} = k_{out,i}$. Ako se želi opisati koliko su ostali vrhovi blizu vrhu i , definira se centralnost blizine kao recipročna vrijednost sume duljina najkraćih puteva koje povezuju čvor i s ostalim čvorovima:

$$g_i = \frac{1}{\sum_{j \neq i} l_{ij}} \quad (2.5)$$

Ova mjera daje veliku centralnost čvorovima koji imaju malu duljinu najkraćeg puta prema drugim čvorovima.

Dok prijašnje mjere uzimaju u obzir čvorove koji su topološki bolje povezani sa

ostatkom mreže, one zanemaruju čvorove koji mogu biti važni za spajanje različitih područja mreže tako da se ponašaju kao mostovi. Kako bi se objasnili ti čvorovi, definira se centralnost blizine [2] kao broj najkraćih puteva između parova čvorova koji prolaze kroz dani čvor. Ako nam je σ_{hj} ukupni broj najkraćih puteva između h i j , a $\sigma_{hj}(i)$ broj tih najkraćih puteva koji prolaze kroz čvor i , tada se centralnost blizine definira kao:

$$b_i = \sum_{h \neq j \neq i} \frac{\sigma_{hj}(i)}{\sigma_{hj}} \quad (2.6)$$

Uz mjere centralnosti, čvorovi su karakterizirani sa strukturom svog susjedstva. Uvodi se koncept klasteriranja grafa koji se temelji na tendenciji formiranja veza u prvom susjedstvu danog čvora. Klasteriranje se odnosi na sljedeće svojstvo: ako je čvor i spojen s čvorom j i u isto je vrijeme čvor j spojen s čvorom l , tada je s velikom vjerojatnošću čvor i spojen s čvorom l . Klasteriranje neusmjerenog grafa može biti izmjereno pomoću koeficijenta klasteriranja[3]. Ako je dan čvor i , koeficijent klasteriranja $C(i)$ čvora i definiran je kao omjer broja bridova e_i između čvorova susjednih čvoru i s ukupnim brojem bridova između njegovih susjeda. Ako je stupanj čvora i k_i i ako ti čvorovi imaju e_i bridova između njih, tada vrijedi sljedeće:

$$C(i) = \frac{e_i}{k_i(k_i - 1)/2} \quad (2.7)$$

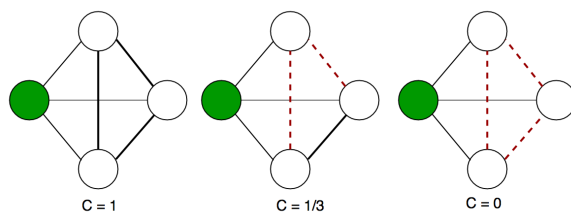
Klasteriranje ima smisla samo za $k_i > 1$, inače vrijedi $C(i) = 0$. Broj bridova e_i između čvorova susjednih čvoru i može se izračunati pomoću matrice susjedstva:

$$e_i = \frac{1}{2} \sum_{j,l} x_{ij}x_{jl}x_{li} \quad (2.8)$$

Usrednjeni koeficijent klasteriranja grafa dan je s:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_i C(i) \quad (2.9)$$

Na slici 2.4. ilustriran je primjer klasteriranja čvorova u danom susjedstvu.



Slika 2.4: Koeficijent klasteriranja čvora izračunava se kao udio veza među njegovim susjedima koje su doista ostvarene u usporedbi s brojem svih mogućih veza. Na slici, zeleni čvor ima tri susjeda, koji mogu imati najviše tri veze među sobom. Na lijevoj slici ostvarene su sve tri veze (podebljani crni segmenti) te je koeficijent klasteriranja jednak 1. Na srednjoj slici ostvarena je samo jedna veza od 3 moguće pa je ukupni koeficijent klasteriranja jednak $1/3$. Na zadnjoj slici nije ostvarena ni jedna veza pa je koeficijent klasteriranja jednak 0.

2.1 Statistika mreža

Distribucija stupnjeva $P(k)$ neusmjerenog grafa definirana je kao vjerojatnost da nasumično odabran čvor ima stupanj k . U slučaju usmjerenih grafova treba promatrati dvije distribucije: ulaznu $P(k_{in})$ i izlaznu $P(k_{out})$ distribuciju stupnjeva, definiranu kao vjerojatnost da nasumično odabran čvor ima ulazni k_{in} ili izlazni stupanj k_{out} . Prosječni stupanj neusmjerenog grafa definiran je kao prosječna vrijednost k po svim čvorovima u mreži:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i = \sum_k k P(k) = \frac{2E}{N} \quad (2.10)$$

Za usmjereni graf, prosječni ulazni i izlazni stupanj mora biti jednak:

$$\langle k_{in} \rangle = \sum_{k_{in}} k_{in} P(k_{in}) = \langle k_{out} \rangle = \sum_{k_{out}} k_{out} P(k_{out}) = \frac{\langle k \rangle}{2} \quad (2.11)$$

jer brid koji izlazi iz čvora mora ući u neki drugi čvor. Analogno prosječnom stupnju može se definirati n -ti moment distribucije stupnjeva:

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k) \quad (2.12)$$

Za rijetke grafove vrijedi da je prosječan stupanj puno manji od veličine grafa $\langle k \rangle \ll N$. Analognom se stupnju može uvesti i distribucija vjerojatnosti $P_b(b)$ da čvor ima blizinu b te je tada prosječna blizina definirana kao:

$$\langle b \rangle = \sum_b b P_b(b) = \frac{1}{N} \sum_i b_i. \quad (2.13)$$

Ova se vrijednost može povezati s prosječnom duljinom najkraćeg puta $\langle l \rangle$. Pomjeranjem suma u definiciji blizine dobije se:

$$\sum_i b_i = \sum_i \sum_{h,j \neq i} \frac{\sigma_{hj}(i)}{\sigma_{hj}} = \sum_{h \neq j} \frac{1}{\sigma_{hj}} \sum_{i \neq h,j} \sigma_{hj}(i) \quad (2.14)$$

Iz topoloških razloga vrijedi $\sum_{i \neq h,j} \sigma_{hj}(i) = \sigma_{hj}(l_{hj} - 1)$. Uvrštavajući ovo u prethodnu jednadžbu dobije se:

$$\sum_i b_i = N(N - 1)(\langle l \rangle - 1) \quad (2.15)$$

što vodi na:

$$\langle b \rangle = (N - 1)(\langle l \rangle - 1) \quad (2.16)$$

U većini slučajeva, što je veći stupanj k_i , čvora veća će biti centralnost blizine b_i . Uočeno je [4] da za velike mreže i velike stupnjeve postoji veza u obliku:

$$b_i \sim k_i^\eta, \quad (2.17)$$

gdje je η pozitivni eksponent koji ovisi o mreži.

2.2 Težinske mreže

Zajedno s kompleksnom topološkom strukturom, stvarne mreže pokazuju veliku heterogenost u kapacitetu i intenzitetu svojih veza. Dok su topološka svojstva grafa sadržana u matrici susjedstva a_{ij} , težinske su mreže slično opisane matricom w_{ij} koja označava težinu brida koji spaja čvorove i i j . Jačina čvora [5] definira se kao:

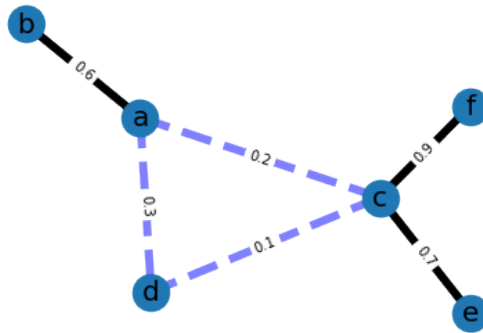
$$s_i = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} w_{ij}, \quad (2.18)$$

gdje suma ide po skupu $\mathcal{V}(i)$ susjeda od i . Kada su težine neovisne o topologiji, jačina uobičajeno raste linearno sa stupnjem: $s \approx \langle w \rangle k$, gdje je $\langle w \rangle$ prosječna težina. Generalno, topološke mjere ne uzimaju u obzir da su neki bridovi važniji od drugih. Ovo se može lagano shvatiti primjerom mreže u kojoj su težine svih bridova koji formiraju triplete male. I za velike koeficijente klasteriranja jasno je da će ovi tripleti imati malu ulogu u dinamici mreže, i mrežna svojstva klasteriranja definitivno su precijenjena jednostavnom topološkom analizom. Kako bi se taj problem riješio, može se uvesti

definicija koja bi uzimala u obzir težine bridova i kombinirala topološke informacije s distribucijom težina. Uvodi se težinski koeficijent klasteriranja[6] kao:

$$C^W(i) = \frac{1}{s_i(k_i - 1)} \sum_{j,h} \frac{(w_{ij} + w_{ih})}{2} a_{ij}a_{ih}a_{jh}. \quad (2.19)$$

Primjer mreže s težinama prikazan je na slici 2.5.



Slika 2.5: Mreža s prikazanim težinama. Generirano pomoću paketa Networkx.

3 Modeli mreža

3.1 Nasumične mreže

Statični nasumični modeli grafova poput Erdos-Renyi modela[7] najjednostavniji su modeli mreža koji uključuju stohastiku kao osnovni element. Mreže su karakterizirane nedostatkom znanja o kreiranju bridova između čvorova. Zbog nedostatka informacija, najjednostavnija pretpostavka koja se može iskoristiti je da se nasumično povežu čvorovi s vjerojatnošću p . U originalnoj formulaciji, Erdos-Renyi graf $G_{N,E}$ konstruiran je polazeći od skupa N različitih čvorova koji su povezani s E bridova čiji su krajevi izabrani nasumično između N čvorova. Varijacija ovog modela[8] je graf $G_{N,p}$ koji je konstruiran iz skupa N različitih čvorova u kojem je svaki od $N(N-1)/2$ mogućih bridova prisutan s vjerojatnošću p i odsutan s vjerojatnošću $1-p$. Vjerojatnost konstrukcije grafa $G_{N,E}$ sa N čvorova i E bridova je:

$$P(G_{N,E}) = p^E (1-p)^{\frac{1}{2}N(N-1)-E}. \quad (3.20)$$

Da bi se izračunao prosječan stupanj, potrebno je prvo izračunati prosječan broj bridova koji sudjeluju u konstrukciji grafova i koji iznosi:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}N(N-1)p. \quad (3.21)$$

Kako svaki brid doprinosi stupnju dvaju čvorova, vrijedi:

$$\langle k \rangle = \frac{2\langle E \rangle}{N} = (N-1)p \approx Np, \quad (3.22)$$

gdje posljednja jednakost vrijedi za veliki N . Dva ansambla grafova $G_{N,p}$ i $G_{N,E}$ kada N ide u beskonačnost s:

$$\frac{1}{2}pN(N-1) = E. \quad (3.23)$$

Da bi se dobila distribucija stupnjeva $P(k)$, treba primijetiti da je u grafu s vjerojatnošću spajanja p , vjerojatnost stvaranja čvora sa stupnjem k jednaka vjerojatnošću da je spojen sa k drugih čvorova i da nije spojen sa preostalim $N-1-k$ čvorova. Kako je uspostavljanje svakog brida neovisan događaj, vjerojatnost je tada dana s

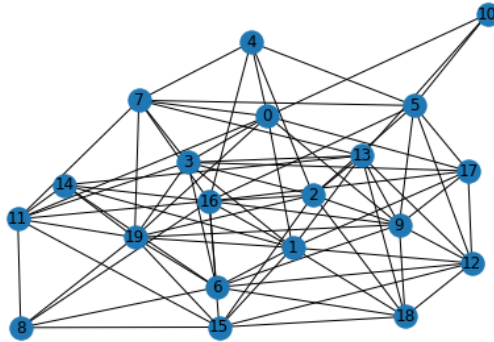
binomnom distribucijom:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (3.24)$$

U limesu velikog broja čvorova N i za $pN = \langle k \rangle$ konstantno, binomna distribucija može se aproksimirati s Poissonovom distribucijom[8]

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (3.25)$$

Karakteristična značajka distribucije stupnjeva Erdos-Renyi modela je da ona opada eksponencijalno za veliki k , dozvoljavajući samo male fluktuacije stupnjeva. Primjer Erdos-Renyi mreže vidljiv je na slici 2.6. Koeficijent klasteriranja $\langle C \rangle$ Erdos-Renyi



Slika 3.6: Erdos-Renyi mreža sa $N = 20$ i $p = 0.4$. Generirano pomoću paketa Networkx.

modela slijedi iz neovisnosti njegovih konekcija. Za svaki čvor, vjerojatnost da je bilo koji od njegovih susjeda isto spojen s jednim drugim dana je s vjerojatnošću spajanja p . Iz toga slijedi da je prosječni koeficijent klasteriranja jednak:

$$\langle C \rangle = p = \frac{\langle k \rangle}{N}. \quad (3.26)$$

Iz ovog je izraza vidljivo da koeficijent klasteriranja Erdos-Renyi modela uz fiksni $\langle C \rangle$ opada, tj. smanjuje se s veličinom grafa i u limesu beskonačno velike mreže, približava se nuli. Za spojenu mrežu prosječnog stupnja $\langle k \rangle$, prosječan broj susjeda na udaljenosti 1 od bilo kojeg čvora i je $\langle k \rangle$. Ako je pozicija bridova u potpunosti nasumična i efekt ciklusa zanemariv, broj susjeda na udaljenosti d može se aproksimirati s $\langle k \rangle^d$. Neka se definira d_c tako da je $\langle k \rangle^{d_c} \approx N$. Kako veličina $\langle k \rangle^d$ raste eksponencijalno s d , većina čvorova je na udaljenosti reda d_c od čvora i . Posljedično

se može aproksimirati prosječna duljina najkraćeg puta s [9]:

$$\langle l \rangle \approx \frac{\log N}{\log \langle k \rangle} \quad (3.27)$$

3.2 "Scale-free" mreže

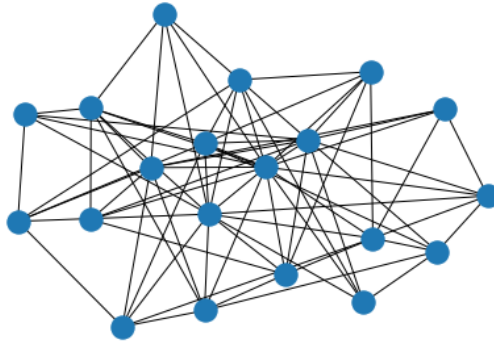
Mnoge promatrane mreže spadaju u klasu "scale-free" mreža, što znači da imaju distribuciju stupnjeva koja slijedi zakon potencija (eng. power-law), dok modeli nasumičnih grafova poput Erdos-Renyi modela i Watts-Strogatz modela ne pokazuju svojstvo zakona potencija. Barabasi-Albert model [10] jedan je od modela generiranja "scale-free" mreža. Model uključuje dva važna koncepta: rast i povlašteno spajanje. Oba navedena koncepta postoje u realnim mrežama. Rast znači da broj čvorova u mreži raste s vremenom. Povlašteno spajanje znači da što je više čvor povezan, veća je vjerojatnost da će primiti nove bridove. Da bi se stvorila mreža, potrebno je krenuti od početne povezane mreže od m_0 čvorova. Novi se čvorovi dodaju u mrežu jedan po jedan. Svaki novi čvor povezan je s $m \leq m_0$ postojećih čvorova s vjerojatnošću koja je proporcionalna broju bridova koje čvorovi trenutačno imaju. Vjerojatnost p_i da je novi čvor povezan s čvorom i je dana s:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (3.28)$$

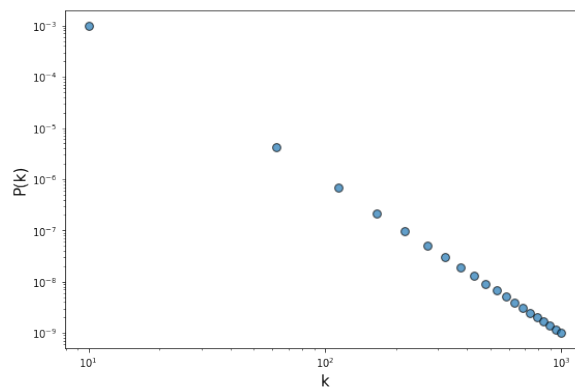
gdje je k_i stupanj čvora i i suma je napravljena po svim dostupnim čvorovima j . Mnogostruko povezani čvorovi koje nazivamo i čvorišta (eng. hubs) teže bržoj akumulaciji više bridova, dok su čvorovi s malim brojem čvorova malo vjerojatni da postanu destinacija za novi brid. Novi čvorovi imaju preferenciju spajati se sa čvorištima. Distribucija stupnjeva koja slijedi iz Barabasi Albert modela slijedi zakon potencija i dana je u obliku:

$$P(k) \sim k^{-3}. \quad (3.29)$$

Na slici 3.7. prikazana je "scale-free" mreža generirana pomoću Barabasi-Albert modela, dok je na slici 3.8. dana distribucija stupnjeva.



Slika 3.7: Scale-free mreža generirana pomoću Barabasi-Albert modela s $N = 20$ i $m_0 = 5$. Generirano pomoću paketa Networkx.



Slika 3.8: Distribucija stupnjeva Scale-free mreže. Generirano pomoću paketa Networkx.

3.3 *k*-regularne mreže

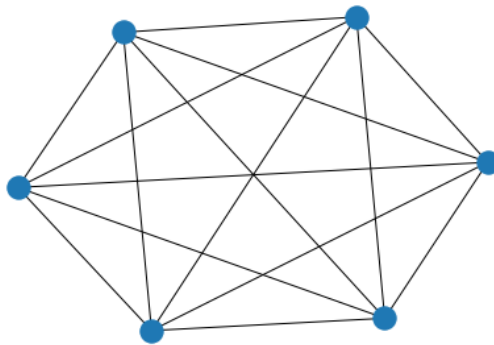
Nasumični *k*-regularni graf je skup *n* čvorova nasumično povezanih s *k* bridova. Ovakva je specifikacija prilično jednostavna, kao i pristup generiranja takvog grafa. U teoriji bi trebalo razmotriti sve moguće grafove s *n* čvorova i *k* stupnjeva i zatim odabrati jedan od njih nasumično. Tu nastaje problem jer je prostor mogućih *k*-regularnih grafova toliko velik da ovakav pristup nikako ne bi mogao funkcionirati u praksi. Kako bi se riješio ovaj problem, generirani su različiti algoritmi, a jedan od poznatijih je predložio Bollobas [11] te se zove model sparivanja. Algoritam slijedi pravila:

1. Počinje se sa skupom *n* čvorova.
2. Kreira se novi skup od *nk* točaka distribuiranih kroz *n* podskupova takvih da svaki podskup sadrži *k* točaka.
3. Uzima se svaka točka i povezuje se nasumično s drugim točkama sve dok se ne

stvori $\frac{1}{2}nk$ parova.

4. Sažima se svaka točka tako da se svaki podskup (a time i točke koje sadrži) preslikava na jedan čvor izvornog grafa. Zadržavaju se svi bridovi između točaka kao bridovi odgovarajućih čvorova.
5. Provjerava se je li graf jednostavan, tj. da ni jedan od vrhova nema petlje ili mnogostruke bridove. Ako graf nije jednostavan, proces se ponavlja.

Postoji nekoliko ograničenja ovog algoritma. Prvi je da nk mora biti paran broj. Drugo ograničenje je da se moraju zadržati samo jednostavni grafovi. Razlog tome je da ako se dozvole petlje i mnogostruki bridovi, grafovi se više ne generiraju nasumično[11] te proces postaje pristran. Primjer k -regularnog grafa vidljiv je na sljedećoj slici:



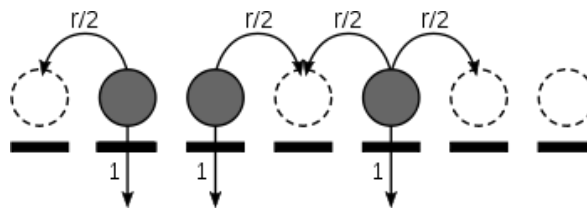
Slika 3.9: 5-regularni nasumični graf. Generirano pomoću paketa Networkx.

4 Dinamika na mrežama

4.1 Kontaktni procesi

Kontaktni proces je stohastički proces koji se koristi za modeliranje rasta populacije na skupu pozicija S grafa u kojem popunjene pozicije postaju prazne nekom konstantnom brzinom, dok prazne pozicije postaju popunjene brzinom proporcionalnom broju zauzetih susjednih mjesta. Svi procesi neovisni su jedni o drugima. Kontaktni se procesi također mogu objasniti kao model širenja infekcije tako da se čestice smatra bolešću koja se širi preko pojedinaca koji su na pozicijama unutar S , gdje zauzete pozicije odgovaraju zaraženim pojedincima, a prazne pozicije odgovaraju zdravim pojedincima.

Glavna veličina od interesa je broj čestica u procesu N_t koja bi odgovarala broju zaraženih pojedinaca u drugoj interpretaciji kontaktnog procesa koja je gore spomenuta. Proces preživljava ako je broj čestica pozitivan cijelo vrijeme ili, u drugoj interpretaciji, ako su kroz cijeli proces prisutni zaraženi pojedinci. Za beskonačan graf S postoji neka pozitivna i konačna kritična vrijednost λ_C tako da, ako je $\lambda > \lambda_C$ proces koji počinje s konačnim brojem čestica, nastavlja se s pozitivnom vjerojatnošću, dok je u slučaju $\lambda < \lambda_C$ odumiranje procesa sasvim sigurno. Kontaktni proces na 1D rešetci prikazan je na slici 4.1.



Slika 4.1: Kontaktni proces na 1D rešetci. Popunjene pozicije (zaraženi pojedinci) su označene sivim krugovima, dok su prazne pozicije (zdravi pojedinci) označene iscrtanim krugovima. Popunjene pozicije mogu aktivirati prazne susjedne pozicije vjerojatnošću $r/2$ ili postati neaktivne vjerojatnošću 1. Preuzeto iz [12].

4.2 Epidemiološki procesi

Kada se govori o epidemijama, misli se na zarazne bolesti uzrokovane biološkim uzročnicima poput gripe, ospica, ebole, koje se šire s osobe na osobu. Međutim, i drugi se fenomeni mogu povezati s konceptom epidemije, primjerice računalni virus, gdje je uzročnik zlonamjerni softver koji može prenijeti svoju kopiju s računala na računalo. Nekoliko elemenata određuje obrasce po kojima se epidemija širi kroz skupine ljudi: svojstva nositelja patogena (njegova zaraznost, duljina razdoblja zaraze i ozbiljnost zaraze), struktura mreže, kao i obrasci mobilnosti ljudi koji su uključeni. Iako se često tretiraju kao slični procesi, difuziju informacija i širenje epidemije lako je razlikovati po jednoj značajki: stupnju aktivnosti subjekta na kojeg utječu [12]. Uistinu, proces širenja virusa ne zahtijeva aktivno sudjelovanje ljudi koji ga dobiju (iako neka ponašanja djeluju kao ubrzivači zaraze, na primjer loša higijena, vlažno i gusto okruženje, ali može se pretpostaviti da se nitko ne odluči namjerno zaraziti). Obrnuto, može se reći da širenje ideje, inovacije ili trenda ovisi ne samo o društvenom pritisku, već i o individualnim izborima.

4.2.1 SI model

U tipičnoj matematičkoj reprezentaciji epidemije dinamika bolesti svodi se na promjene između nekoliko stanja. U najjednostavnijem slučaju postoje samo dva stanja: podložni zarazi i zaraženi. Pojedinač koji je u stanju podložnom zarazi trenutno je zdrav, ali može pokupiti zarazu u slučaju kontakta sa zaraženim. Pojedinač koji je u zaraženom stanju je zaražen i može prenijeti zarazu u kontaktu s osobom koja je podložna zarazi. Neka je $S(t)$ [13] broj pojedinaca koji su podložni zarazi u trenutku t , dok je $X(t)$ broj pojedinaca koji su zaraženi. Kako je proces širenja bolesti stohastički, ovi brojevi nisu jedinstveno određeni. Stoga je potrebno definirati S i X kao očekivani broj pojedinaca podložnim zarazama, odnosno kao broj pojedinaca koji su zaraženi. Broj zaraženih pojedinaca raste kada pojedinci koji su podložni zarazi ulaze u kontakt sa zaraženim pojedincima. Sada je moguće definirati stopu širenja zaraze pojedinca β koja znači da svaki pojedinac u trenutku t u prosjeku ima β kontakata s nasumično drugim odabranim. Ako ukupna populacija broji N jedinki, tada je vjerojatnost da se susretne jedinka koja je podložna zarazi jednaka $\frac{S}{N}$. Iz toga slijedi da zaražena jedinka prosječno ima kontakt s $\frac{\beta S}{N}$ podložnim zarazi po jedinici vremena.

Kako je ukupno I zaraženih jedinki, stopa novih infekcija bit će $\frac{\beta SI}{N}$. Diferencijalna jednadžba za promjenu I glasi:

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} \quad (4.1)$$

S druge strane broj jedinki koje su podložne zarazi pada s:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} \quad (4.2)$$

Konvencijalno se definiraju varijable koje predstavljaju omjere jedinki podložnih zarazama i zaražene jedinice $s = \frac{S}{N}$, odnosno $i = \frac{I}{N}$ tako da jednadžbe (4.1) i (4.2) postaju:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\beta si \\ \frac{di}{dt} &= \beta si \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2.2 SIS model

SI model može se nadopuniti tako da se dozvoli reinfekcija, pa jedinka može biti zaražena više puta. Najjednostavniji takav model je SIS model koji isto ima dva stanja, podložan zarazi i zaražen, ali zaražena jedinka može prijeći u stanje podložno zarazi nakon oporavka. Diferencijalne jednadžbe za ovaj model glase:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \gamma i - \beta si \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i \end{aligned} \quad (4.4)$$

uz uvjet $s + i = 1$. γ označava stopu oporavka jedinice.

4.3 Dinamika mišljenja

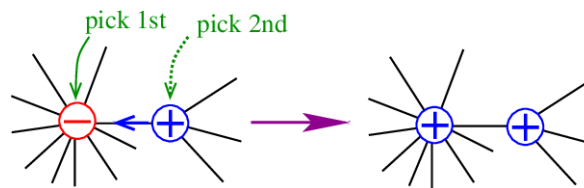
Različito područje vezano uz modeliranje društvenog ponašanja je ono o dinamici mišljenja. Posljednih je godina uveden širok spektar modela koji pokušavaju objasniti kako se formiraju mišljenja u populaciji uzimajući u obzir različite društvene teorije. Ovi modeli imaju puno toga zajedničkog s onima u epidemiologiji. Općenito, pojedinci su modelirani kao agenti sa stanjem i povezani društvenom mrežom. Društvene veze mogu se prikazati potpunim grafom ili realističnijim kompleksnim mrežama. Stanje čvora obično se predstavlja varijablama koje mogu biti diskretne, ali i kontinuirane, predstavljajući, primjerice, vjerojatnost odabira jednog mišljenja nad dru-

gim. Stanje pojedinca mijenja se u vremenu ovisno o skupu pravila, većinom kroz interakciju sa susjedima. Iako je u mnogim epidemiološkim modelima ova promjena ireverzibilna (podložan zarazi prema zaraženom), u dinamici mišljenja stanje može oscilirati između mogućih vrijednosti, simulirajući kako se mišljenja mijenjaju u stvarnosti. Drugi važan aspekt u dinamici mišljenja predstavljaju vanjske informacije koje se mogu protumačiti kao učinak masovnih medija. Općenito, vanjska je informacija predstavljena kao statički pojedinac s kojim svi pojedinci mogu interagirati.

4.3.1 Model glasača

Jedno od pitanja koja se postavljaju je kako grupe ljudi dolaze do nekog zaključka. Iako je teško pojmiti kako bi se velika skupina ljudi složila oko ičega, u nekim je situacijama jednoglasnost potrebna, na primjer sudska porota. Model glasača (eng. Voter model)[14] predstavlja idealizaciju evolucije mišljenja u kojoj je svaki pojedinac pod utjecajem drugih ljudi unutar grupe. U modelu glasača nema pojma pogrešnog mišljenja ili ideje te nema vanjskih utjecaja poput medija. U modelu glasača, svaki pojedinac ili glasač može poprimiti dva stanja koja se označavaju s 0 ili 1. Dinamika modela glasača [14] je sljedeća (slika 4.2):

- Nasumično se izabere čvor (glasača).
- Čvor (glasač) usvoji stanje nasumično odabranog susjeda.



Slika 4.2: Dinamika modela glasača: nasumično odabrani čvor (glasač) usvoji stanje nasumično odabranog susjeda. Preuzeto s [15]

Ključna značajka dinamike modela glasača na proizvoljnoj mreži je da zadovoljavaju zakone očuvanja koji definiraju njihova ponašanja u budućnosti. Definiran je η kao stanje čitave mreže i $\eta(i)$, koje može biti 0 ili 1, kao stanje čvora i . Stanje čvora mijenja se od 0 do 1 ili obrnuto. Neka η_i označava stanje mreže kada čvor i promijeni stanje. Tada je moguće definirati vjerojatnost tranzicije da čvor i promijeni stanje kao [15]:

$$P[\eta \rightarrow \eta_i] = \sum_j \frac{A_{ij}}{Nk_i} [\Phi(i, j) + \Phi(j, i)], \quad (4.5)$$

gdje je

$$\Phi(i, j) = \eta(i)[1 - \eta(j)] = 1 \quad (4.6)$$

ako se stanja i i j razlikuju, i $\Phi(i, j) = 0$ ako se stanja slažu. A_{ij} je matrica susjedstva. U jednadžbi (4.5.) $A_{ij}[\Phi(i, j) + \Phi(j, i)]$ je različit od nula samo kad su čvorovi i i j povezani i u suprotnim stanjima. Za model glasača, faktor $(Nk_i)^{-1}$ označava prvo odabiranje bilo kojeg čvora i sa vjerojatnošću $1/N$, a zatim jednog od njegovih susjeda j s vjerojatnošću $1/k_i$, gdje je k_i stupanj čvora i . Ključna veličina za evoluciju populacije je prosječna promjena stanja čvora $\langle \Delta\eta(i) \rangle$. Ova je promjena jednaka vjerojatnosti da se $\eta(i)$ mijenja od 0 do 1 minus vjerojatnost mijenjanja od 1 do 0:

$$\langle \Delta\eta(i) \rangle = [1 - 2\eta(i)]P[\eta \rightarrow \eta_i]. \quad (4.7)$$

Sumiranjem ove tranzicijske vjerojatnosti može se dobiti prosječna gustoća čvorova u stanju 1:

$$\langle \Delta\rho \rangle = \sum_i \langle \Delta\eta(i) \rangle = \sum_{i,j} \frac{A_{ij}}{Nk_i} [\eta(j) - \eta(i)] \quad (4.8)$$

4.4 Model praga

U dinamici modela praga (eng. threshold model), stanje nekog entiteta se mijenja kada koncentracija dolazećih promjena dosegne određeni prag. Neki tipični primjeri su neuronski sustavi [16], potresi [17] i slično. Prag igra ulogu i u nekim epidemiološkim bolestima, primjerice tuberkulozi i dizenteriji [18], gdje je potrebna određena koncentracija patogena kod pojedinca da bi se nadmašio prag. Nadalje, modeli praga često se koriste u socijalnim znanostima, gdje utjecaj grupe ljudi može promijeniti mišljenje pojedinca nakon dosega nekog kognitivnog praga.

4.4.1 Grannoveter model

Pionirski model praga za opis kolektivnog ponašanja uveo je Granovetter [19]. U svom je radu definirao binarne odluke kao one gdje glumac ima dvije različite i međusobno isključive alternative ponašanja. Granovetter je adaptirao ideju praga ponašanja iz Schellingova modela [20] rezidencijalne segregacije, gdje neki prag određuje odluku glumca da napusti svoje susjedstvo. Granovetter je raspravljao o pojmu stanja ravnoteže, ili broju ljudi koji sudjeluju u ponašanju na temelju početne

raspodjele pragova. Pretpostavio je da je stanovništvo malo i potpuno pomiješano.

4.5 Watts model

Model koji je predložio Granovetter potpuno je mješovit, što znači da se može pretpostaviti da svaki pojedinac stupa u interakciju sa svakim drugim pojedincem u sustavu. Takve se interakcije mogu predstaviti kao graf, čak i ako je njihova mrežna struktura trivijalna - to je jednostavno potpuni graf. Watts je u svom modelu [21] generalizirao Granovetterov rad, uklanjajući potpuno miješanu pretpostavku. To je vodilo na umreženu verziju Granovetterovog modela. U Wattsovom modelu, mreža veličine N generirana je prema konfiguracijskom modelu, s distribucijom stupnjeva p_k . Tipični eksperimenti za ovaj model mijenjaju kontrolni parametar z , tj. prosječni stupanj mreže. Prag čvora ϕ izvlači se nasumično iz neke distribucije p_ϕ . U trenutku $t = 0$, nasumično odabrani čvor postavljen je u aktivno stanje i njegovo ažurirano stanje vidljivo je njegovim susjedima. Ovo se naziva pravilom asinkronog ažuriranja budući da je proces ažuriranja različitih čvorova neovisan. Pravilo asinkronog ažuriranja prirodno odgovara rješenju diferencijalne jednadžbe. To je zato što ako se vrijeme povećava pri svakom ažuriranju čvora, tada se vremenski korak normalizira na veličinu sustava. To jest, za mrežu veličine N , imamo

$$\Delta t = \frac{1}{N}, \quad (4.9)$$

što znači da je vrijeme kvazi-kontinuirano u granici velike mreže, s $\Delta t \rightarrow 0$ kako $N \rightarrow \infty$. Budući da se čvorovi odabiru za ažuriranje nasumično prema pravilu asinkronog ažuriranja [21], vrijeme potrošeno između uzastopnih ažuriranja čvorova je eksponencijalno distribuirano. Budući da vjerojatnost da će čvor biti nasumično odbran u trenutku t jednaka $\Delta t = 1/N$, vjerojatnost da će se čvor zaraziti ili oporaviti jednaka je $F\Delta t$ odnosno $R\Delta t$, gdje je F stopa transmisije, a R stopa oporavka. Pretpostavlja se da je čvor u stanju podložnom zarazi i da je upravo prošao kroz proces ažuriranja, pri čemu nije zabilježena promjena stanja. Ono što nas zanima je vjerojatnost da čvor nije ažuriran nakon vremena τ . Ovo je jednako $(1 - F\Delta t)^{\tau/\Delta t} = e^{-F\tau}$, budući da postoji $\tau/\Delta t$ inkremenata trajanja Δt tijekom intervala τ . Limes $\Delta t \rightarrow \infty$ daje:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - F\Delta t)^{\tau/\Delta t} = e^{-F\tau} \quad (4.10)$$

tako da vrijeme zaraze reziduala prati eksponencijalnu distribuciju. Kumulativna funkcija distribucije je tada $1 - e^{-F\tau}$ iz čega slijedi funkcija gustoće vjerojatnosti:

$$\frac{d}{d\tau}(1 - e^{-F\tau}) = Fe^{-F\tau}. \quad (4.11)$$

Ovo odgovara Poissonovom procesu, gdje je F stopa transmisije zaraze. Rezultat je da se i samo za jedan aktivni čvor u trenutku $t = 0$ može postići pozitivan udio zaraženih u beskonačnoj mreži kroz širenje infekcije. Pravilo praga je zadano kao:

$$F_{k,m} = \begin{cases} 1, & m \geq \phi k \text{ i } k > 0 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (4.12)$$

gdje je k stupanj čvora, m broj zaraženih susjeda te se prag čvora ϕ izvlači nasumično iz "krnje" normalne distribucije sa srednjom vrijednošću $\mu = 0$ i standardnom devijacijom $\sigma = 2$ kako bi se dobile vrijednosti između 0 i 1. Iz pravila praga vidi se da ako je udio broja zaraženih susjeda veći od nasumično odabranog praga, čvor mijenja stanje. Pretpostavlja se $k > 0$ za ovo pravilo i da čvorovi stupnja $k = 0$ ne mogu biti zaraženi jer na njima nitko ne utječe.

5 Aproksimativna master jednađžba

5.1 Binarna dinamika na mrežama

Promatra se binarna dinamika na statičnoj, neusmjerenoj, povezanoj mreži u limesu beskonačno velike mreže, tj. gleda se slučaj kada $N \rightarrow \infty$, gdje je N broj čvorova u mreži. Dva moguća stanja čvora u mreži nazvat će se "zaraženim" i "zdravima" što je uobičajena klasifikacija. Mreže imaju distribuciju stupnjeva P_k i generirane su konfiguracijskim modelima. Dinamika je stohastička i definirana je vjerojatnostima zaraze i ozdravljenja $F_{k,m}$ i $R_{k,m}$ koji ovise o stupnju k čvora i trenutnom broju m zaraženih susjeda čvora. Da bi se izvela aproksimativna master jednađžba [22] koristit će se SIS dinamika koja je ukratko opisana u poglavlju 4. Neka je $S_{k,m}$ ($I_{k,m}$) skup čvorova koji su zdravi(zaraženi), imaju stupanj k i m zaraženih susjeda. Definiramo $s_{k,m}(t)$ ($i_{k,m}(t)$) kao udio čvorova stupnja k koji su zdravi (zaraženi) u trenutku t i imaju m zaraženih susjeda. Tada je udio $\rho_k(t)$ čvorova stupnja k koji su zaraženi u trenutku t dan s:

$$\rho_k(t) = \sum_{m=0}^k i_{k,m} = 1 - \sum_{m=0}^k s_{k,m} \quad (5.1)$$

Udio zaraženih čvorova u cijeloj mreži dobije se sumirajući po svim k klasama:

$$\rho(t) = \sum_k P_k \rho_k(t) \quad (5.2)$$

Ako je inicijalno udio zaraženih čvorova jednak $\rho(0)$, tada su početni uvjeti za $s_{k,m}$ i $i_{k,m}$ jednaki:

$$\begin{aligned} s_{k,m}(0) &= [1 - \rho(0)] B_{k,m}[\rho(0)] \\ i_{k,m}(0) &= \rho(0) B_{k,m}[\rho(0)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdje je $B_{k,m}(q)$ binomna distribucija zadana s:

$$B_{k,m}(q) = \binom{k}{m} q^m (1 - q)^{k-m} \quad (5.4)$$

Također, koristeći ovaj formalizam može se izračunati broj bridova različitih vrsta. Broj bridova koji spajaju zdravi čvor sa zaraženim (kratica S-I) mogu se dobiti na dva

načina:

$$\begin{aligned}
 N \sum_k P_k \sum_{m=0}^k m s_{k,m} \\
 N \sum_k P_k \sum_{m=0}^k (k-m) i_{k,m}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Prvi od ovih izraza slijedi iz činjenice da u dovoljno velikoj mreži postoji NP_k čvorova stupnja k , od kojih je udio $s_{k,m}$ zdrav i ima m zaraženih susjeda. Svaki taj čvor pridonosi m bridova ukupnom broju S-I bridova. Izrazi u jednadžbi (5.5) u potpunosti su ekvivalentni. Sljedeća stvar od interesa je kako se veličina $S_{k,m}$ mijenja u vremenu. Za početak se piše generalni izraz:

$$\begin{aligned}
 s_{k,m}(t + dt) = s_{k,m}(t) - W(S_{k,m} \rightarrow I_{k,m})s_{k,m}dt + W(I_{k,m} \rightarrow S_{k,m})i_{k,m}dt \\
 - W(S_{k,m} \rightarrow S_{k,m+1})s_{k,m}dt + W(S_{k,m-1} \rightarrow S_{k,m})s_{k,m-1}dt \\
 - W(S_{k,m} \rightarrow S_{k,m-1})s_{k,m}dt + W(S_{k,m+1} \rightarrow S_{k,m})s_{k,m+1}dt
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

kako bi se reflektirale sve tranzicije čije su promjene linearne u dt . Primjerice, $W(S_{k,m} \rightarrow I_{k,m}dt)$ je vjerojatnost da čvor koji se nalazi u skupu $S_{k,m}$ u vremenu t prijeđe u skup $I_{k,m}$ u vremenu $t + dt$. Iz ovoga slijedi:

$$\begin{aligned}
 W(S_{k,m} \rightarrow I_{k,m}) &= F_{k,m} \\
 W(I_{k,m} \rightarrow S_{k,m}) &= R_{k,m}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Čvor koji se kreće iz $S_{k,m-1}$ skupa u $S_{k,m}$ skup ostaje zdrav dok jedan od njegovih zdravih susjeda postaje zaražen. Ovo znači da S-S brid prelazi u S-I brid. Ako je pretpostavka da S-S brid prelazi u S-I brid brzinom β^s , može se pisati:

$$\begin{aligned}
 W(S_{k,m} \rightarrow S_{k,m+1}) &= \beta^s(k-m) \\
 W(S_{k,m-1} \rightarrow S_{k,m}) &= \beta^s(k-m+1)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

S obzirom da čvorovi u $S_{k,m}$ skupu imaju $k-m$ zdravih susjeda, dok čvorovi u $S_{k,m-1}$ skupu imaju $k-m+1$ zdravih susjeda. Da bi se izračunao β^s , potrebno je izračunati broj S-S bridova u mreži u trenutku t , a zatim izračunati broj bridova koji prijeđu iz S-S u S-I u vremenskom intervalu dt . Vjerojatnost $\beta^s dt$ tada je dana kao njihov

omjer:

$$\beta^s dt = \frac{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k (k-m) F_{k,m} s_{k,m} dt}{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k (k-m) s_{k,m}} \quad (5.9)$$

Sličan izraz može se izvesti da se definira γ^s , tj. brzina kojom S-I bridovi prelaze u S-S bridove zbog oporavka zaraženog čvora:

$$\gamma^s dt = \frac{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k (k-m) R_{k,m} i_{k,m} dt}{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k (k-m) i_{k,m}} \quad (5.10)$$

Tada se piše:

$$\begin{aligned} W(S_{k,m} \rightarrow S_{k,m-1}) &= \gamma^s m \\ W(S_{k,m+1} \rightarrow S_{k,m}) &= \gamma^s (m+1) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Kada se uzme limes $dt \rightarrow 0$ jednadžbe (5.6) dobije se aproksimativna master jednadžba za evoluciju $s_{k,m}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_{k,m} &= -F_{k,m} s_{k,m} + R_{k,m} i_{k,m} - \beta^s (k-m) s_{k,m} + \beta^s (k-m+1) s_{k,m-1} \\ &\quad - \gamma^s m s_{k,m} + \gamma^s (m+1) s_{k,m+1} \end{aligned} \quad (5.12)$$

gdje je m u rasponu od 0, ..., k za svaku klasu k u mreži. Na sličan način možemo izvesti sustav jednadžbi za $i_{k,m}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_{k,m} &= -R_{k,m} i_{k,m} + F_{k,m} s_{k,m} - \beta^i (k-m) i_{k,m} + \beta^i (k-m+1) i_{k,m-1} \\ &\quad - \gamma^i m i_{k,m} + \gamma^i (m+1) i_{k,m+1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

za $m = 0, \dots, k$ i za svaku klasu k u mreži. Vremenski ovisne brzine β^i i γ^i definirane preko $s_{k,m}$ i $i_{k,m}$ su:

$$\begin{aligned} \beta^i &= \frac{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k m F_{k,m} s_{k,m}}{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k m s_{k,m}} \\ \gamma^i &= \frac{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k m R_{k,m} i_{k,m}}{\sum_k P_k \sum_{m=0}^k m i_{k,m}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Aproksimativne master jednadžbe (5.12) i (5.13) s stopama β^s , γ^s , β^i i γ^i tvore zatvoren sustav determinističkih jednadžbi koje zajedno s početnim uvjetima (5.3) mogu biti riješeni numerički standardnim metodama. Kako su jednadžbe u potpunosti opi-

sane funkcijama $F_{k,m}$ i $R_{k,m}$, ova se metoda može primijeniti na bilo koji stohastički dinamički proces za koji su zadani $F_{k,m}$ i $R_{k,m}$. Primjeri veličina za odgovarajuće modele dani su u tablici 5.1.

Tablica 5.1: Stope infekcije i oporavka za neke primjere binarne dinamike na mrežama. k je stupanj čvora, dok je m .

Model	Stopa infekcije $F_{k,m}$	Stopa oporavka $R_{k,m}$
SI	λm	0
SIS	λm	μ
Bass	$c + dm$	0
Voter	$\frac{m}{k}$	$\frac{k-m}{k}$
Model većine glasova	$\begin{cases} Q & m < k/2 \\ 1/2 & m = k/2 \\ 1 - Q & m > k/2 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - Q & m < k/2 \\ 1/2 & m = k/2 \\ Q & m > k/2 \end{cases}$
Ising Glauber	$\frac{1}{1 + \exp[\frac{2J}{T}(k-2m)]}$	$\frac{\exp[\frac{2J}{T}(k-2m)]}{1 + \exp[\frac{2J}{T}(k-2m)]}$
Model praga	$\begin{cases} 0 & m < M_k \\ 1 & m \geq M_k \end{cases}$	0

5.2 Aproksimacija parova i aproksimacija srednjeg polja

Za dinamiku na općenitoj mreži, s klasama stupnjeva od k do k_{max} , broj diferencijalnih jednadžbi u sustavima (5.12) i (5.13) iznosi $(k_{max} + 1)(k_{max} + 2)$ i raste s kvadratom najvećeg stupnja. Zato je potrebna neka aproksimacija da bi se reduciralo AME na niže dimenzionalan sustav. Jedna od mogućnosti je da se pogledaju parametri $p_k(t)[q_k(t)]$ definirani kao vjerojatnost da je nasumično izabran susjed zdravog (zaraženog) čvora k stupnja zaražen u trenutku t . Sada se $p_k(t)$ može izraziti preko $s_{k,m}$ kao:

$$p_k(t) = \frac{\sum_{m=0}^k m s_{k,m}}{\sum_{m=0}^k k s_{k,m}} \quad (5.15)$$

Evolucijska jednadžba za p_k može se dobiti množenjem jednadžbe (5.12) s m i sumiranjem po svakom m . Desna strana te jednadžbe rezultirala bi višim momentima $s_{k,m}$, stoga je potrebna neka aproksimacija. Ako se uvede ansatz da su $s_{k,m}$ i $i_{k,m}$ proporcionalni binomnoj distribuciji, tj. $s_{k,m} \approx (1 - \rho_k) B_{k,m}(p_k)$ i $i_{k,m} \approx \rho_k B_{k,m}(q_k)$, dobije se PA aproksimacija koja se sastoji od $3k_{max} + 1$ diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_k &= -\rho_k \sum_{m=0}^k R_{k,m} B_{k,m}(q_k) + (1 - \rho_k) \sum_{m=0}^k F_{k,m} B_{k,m}(p_k) \\
\frac{d}{dt}p_k &= \sum_{m=0}^k \left[p_k - \frac{m}{k} \right] \left[F_{k,m} B_{k,m}(p_k) - \frac{\rho_k}{1 - \rho_k} R_{k,m} B_{k,m}(q_k) \right] + \beta^s (1 - p_k) - \gamma^s p_k \\
\frac{d}{dt}q_k &= \sum_{m=0}^k \left[q_k - \frac{m}{k} \right] \left[R_{k,m} B_{k,m}(q_k) - \frac{1 - \rho_k}{\rho_k} F_{k,m} B_{k,m}(p_k) \right] + \beta^i (1 - q_k) - \gamma^i q_k
\end{aligned} \tag{5.16}$$

za svaku klasu k . Brzine su dane ubacivanjem binomnog ansatza u generalne formule tako da, primjerice, za β^s vrijedi:

$$\beta^s = \frac{\sum_k P_k (1 - \rho_k) \sum_{m=0}^k (k - m) F_{k,m} B_{k,m}(p_k)}{\sum_k P_k (1 - \rho_k) k (1 - p_k)} \tag{5.17}$$

Druga aproksimacija koja se naziva aproksimacijom srednjeg polja (MF aproksimacija), dobiva se zamjenom p_k i q_k sa ω : $s_{k,m} \approx (1 - \rho_k) B_{k,m}(\omega)$ i $i_{k,m} \approx \rho_k B_{k,m}(\omega)$, gdje je $\omega = \langle \frac{k}{z} \rho_k \rangle$ vjerojatnost da je jedan kraj od nasumičnog odabranog brida zaražen, dok je $\langle z \rangle$ srednji stupanj mreže. Koristeći ovaj ansatz u master jednadžbi, dobije se zatvoren sustav $k_{max} + 1$ diferencijalnih jednadžbi za udio ρ_k zaraženih čvorova stupnja k :

$$\frac{d}{dt}\rho_k = -\rho_k \sum_{m=0}^k R_{k,m} B_{k,m}(\omega) + (1 - \rho_k) \sum_{m=0}^k F_{k,m} B_{k,m}(\omega) \tag{5.18}$$

$$s \rho_k(0) = \rho(0)$$

5.3 Monotona dinamika

Za početak ćemo promotriti slučaj gdje je $R_{k,m}$ za sve k i m , dok je $F_{k,m}$ ne negativan bar za neke segmente. Nulti oporavak znači da je nemoguće da se čvor prebaci iz zaraženog stanja u stanje podložnom zarazi i zbog toga se ova dinamika naziva monotonom. Kako je $R_{k,m} = 0$, $s_{k,m}$, jednadžbe za AME sustav su odvojene od $i_{k,m}$ jednadžbi, te se jednadžba (5.12) reducira na jednadžbu:

$$\frac{d}{dt}s_{k,m} = -F_{k,m} s_{k,m} - \beta^s (k - m) s_{k,m} + \beta^s (k - m + 1) s_{k,m-1}, \tag{5.19}$$

a udio zaraženih čvorova je dan s:

$$\rho(t) = 1 - \sum_k P_k \sum_{m=0}^k s_{k,m}(t). \quad (5.20)$$

Postavlja se pitanje bi li ansatz za aproksimaciju parova definiran u prethodnom poglavlju za izvod jednadžbi (5.16) mogao biti egzaktno rješenje jednadžbe (5.19). Ubacivanjem ansatza u jednadžbu (5.16) i dijeljenjem s $(1 - \rho_k)B_{k,m}(p_k)$ dobije se uvjet:

$$-\frac{1}{1 - \rho_k} \frac{d\rho_k}{dt} + \left(\frac{m}{p_k} - \frac{k - m}{1 - p_k} \right) \frac{dp_k}{dt} = -F_{k,m} - \beta^s(k - m) + \beta^s \frac{1 - p_k}{p_k} m. \quad (5.21)$$

Jednadžba (5.21) se može promatrati kao uvjet na oblike stope infekcije $F_{k,m}$ za koje je PA ansatz za $s_{k,m}$ jednadžbu egzaktno rješenje za odgovarajuću aproksimativnu master jednadžbu. Članovi u jednadžbi (5.21) su linearni u m , stoga je $F_{k,m}$ oblika:

$$F_{k,m} = c_k + d_k m, \quad (5.22)$$

gdje su c_k i d_k konstante. S obzirom da je PA ansatz egzaktno rješenje aproksimativne master jednadžbe za $s_{k,m}$, moguće je napisati reduciranu verziju sustava jednadžbi (5.16) za ρ_k i p_k :

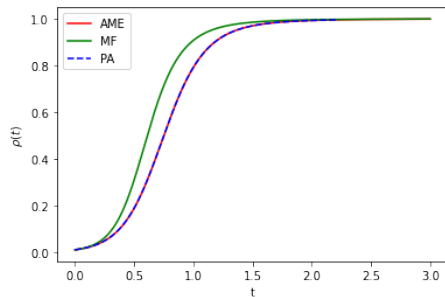
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_k &= (1 - \rho_k)(c_k + k p_k d_k) \\ \frac{d}{dt} p_k &= -d_k p_k (1 - p_k) + \bar{\beta}^s (1 - p_k), \end{aligned} \quad (5.23)$$

gdje je:

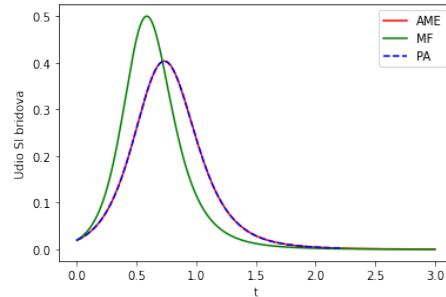
$$\bar{\beta}^s = \frac{\sum_k P_k (1 - \rho_k) k (1 - p_k) [c_k + (k - 1) p_k d_k]}{\sum_k P_k (1 - \rho_k) k (1 - p_k)} \quad (5.24)$$

Na slici 5.1. su prikazani rezultati za SI dinamiku na Erdős–Rényi mreži s prosječnim stupnjem $z = 7$. Dinamika je monotona i s parametrima $c_k = 0$ i $d_k = \lambda$ za sve k u jednadžbi (5.22). Zanimljiva stvar koja se ovdje može primjetiti je slaganje rezultata za AME i PA rješenje udjela zaraženih $\rho(t)$ i za udio SI bridova.

Parametar d_k u jednadžbi (5.22) može biti negativan, ali uz uvjet da su sve vrijednosti stope transmisije $F_{k,m}$ ne negativne. Kao primjer će se promotriti Bassov difuzijski model na k -regularnom grafu s vrijednostima $c = 1$ i $d = -1/z$. Rezultati su prikazani na slici 5.2. i ovdje se još jednom može vidjeti slaganje rezultata za AME i PA.

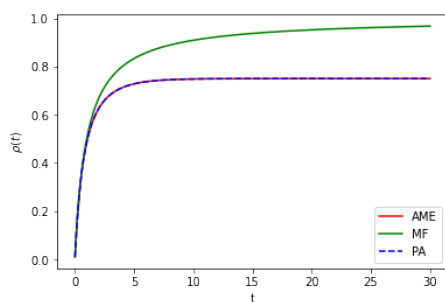


(a) Ovisnost udjela zaraženih čvorova ρ o vremenu

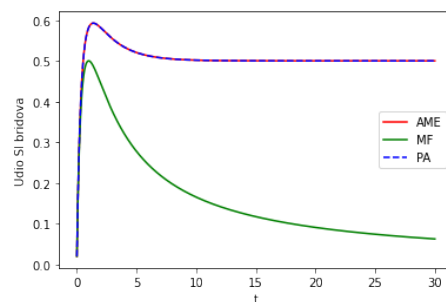


(b) Udio SI bridova u ovisnosti o vremenu

Slika 5.1: SI dinamika sa stopom transmisije $\lambda = 1$ na Erdős-Rényi mreži s prosječnim stupnjem $z = 7$. Početni udio zaraženih čvorova iznosi $\rho(0) = 10^{-2}$. Mreža je veličine $N = 10^5$.



(a) Ovisnost udjela zaraženih čvorova ρ o vremenu



(b) Udio SI bridova u ovisnosti o vremenu

Slika 5.2: Bassova dinamika na 4-regularnom nasumičnom grafu sa parametrima $c = 1$ i $d = -1/4$. Početni udio zaraženih čvorova iznosi $\rho(0) = 10^{-2}$. Mreža je veličine $N = 10^5$.

5.4 Generalna dinamika

Promotrit će se generalni slučaj nemonotone dinamike, gdje nijedna od stopa $F_{k,m}$ i $R_{k,m}$ nije jednaka nuli. Umetanjem PA ansatza za $s_{k,m}$ u aproksimativnu master jednadžbu (5.12) te dijeljenjem s $(1 - \rho_k)B_{k,m}(p_k)$ dobije se uvjet:

$$-F_{k,m} + R_{k,m} \frac{\rho_k}{1 - \rho_k} \frac{B_{k,m}(q_k)}{B_{k,m}(p_k)} = c_k^{(1)} + c_k^{(2)} m, \quad (5.25)$$

gdje $c_k^{(1)}$ i $c_k^{(2)}$ predstavljaju kombinaciju članova koji ovise o t i k , ali su neovisni o m . Na sličan se način ubacivanjem PA ansatza za $i_{k,m}$ u aproksimativnu master jednadžbu (5.13) dobije uvjet:

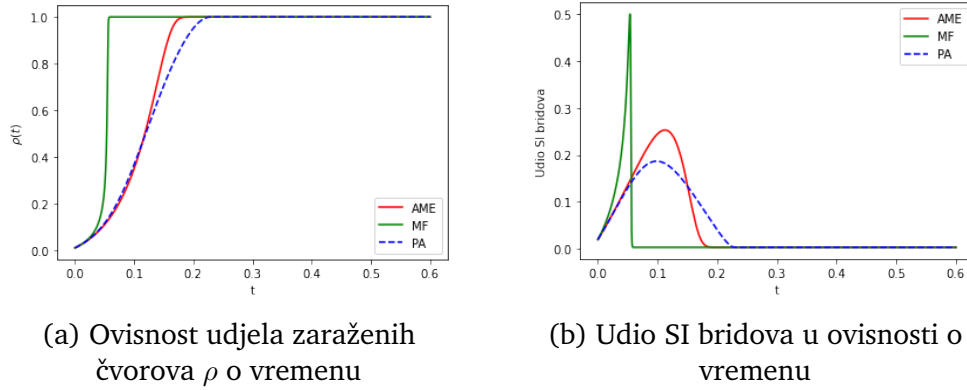
$$F_{k,m} \frac{1 - \rho_k}{\rho_k} \frac{B_{k,m}(p_k)}{B_{k,m}(q_k)} - R_{k,m} = c_k^{(3)} + c_k^{(4)} m. \quad (5.26)$$

Iz jednadžbi (5.25) i (5.26) može se primjetiti da je lijeva strana jednadžbe eksponencijalna funkcija od m , zbog prisustva $B_{k,m}$ funkcije definirane u (5.4), dok je desna strana linearna u m . Uzimajući u obzir da su stope transmisije $F_{k,m}$ i $R_{k,m}$ vremenski neovisne, nije moguće simultano riješiti jednadžbe (5.25) i (5.26) da bi se dobile konstantne stope transmisije. Može se zaključiti da, u generalnom slučaju, AME rješenja nisu u potpunosti jednaka odgovarajućim PA rješenjima. Zatim se promatra limes stabilnog stanja u $t \rightarrow \infty$. AME i PA rješenja mogu biti zadovoljena u limesu $t \rightarrow \infty$ ako su jednadžbe (5.25) i (5.26) zadovoljene u stabilnom stanju. Ovisnost o m na lijevoj i desnoj strani jednadžbe tada zahtijeva da vrijedi:

$$\frac{F_{k,m}}{R_{k,m}} = \frac{\bar{\rho}_k}{1 - \bar{\rho}_k} \frac{B_{k,m}(\bar{q}_k)}{B_{k,m}(\bar{p}_k)}, \quad (5.27)$$

gdje $\bar{p}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$ označava limes stabilnog stanja te vrijedi $\bar{c}_k^{(1)} = \bar{c}_k^{(2)} = \bar{c}_k^{(3)} = \bar{c}_k^{(4)} = 0$. Uvjeti $\bar{c}_k^{(1)} = \bar{c}_k^{(2)}$ impliciraju da vrijedi $\bar{p}_k / (1 - \bar{p}_k) = \bar{\beta}^s / \bar{\gamma}^s$, i ovisnost o k na desnoj strani implicira da je \bar{p}_k neovisno o k , tj. vrijedi $\bar{p}_k = \bar{p}$. Slična bi analiza za uvjete $\bar{c}_k^{(3)} = \bar{c}_k^{(4)}$ pokazala da vrijedi $\bar{q}_k = \bar{q}$. Sada se, mijenjajući \bar{p}_k i \bar{q}_k u jednadžbi (5.27) s ovim pojednostavljenjem dobije:

$$\frac{F_{k,m}}{R_{k,m}} = b_k a^m, \quad (5.28)$$



Slika 5.3: SIS dinamika s parametrima $\lambda = 7$ i $\mu = 4$ na 4-regularnoj mreži. Početni udio zaraženih čvorova iznosi $\rho(0) = 10^{-2}$. Mreža je veličine $N = 10^5$.

gdje je:

$$b_k = \frac{\bar{\rho}_k}{1 - \bar{\rho}_k} \left(\frac{1 - \bar{q}}{1 - \bar{p}} \right)^k \quad (5.29)$$

i

$$a = \frac{\bar{q}(1 - \bar{p})}{\bar{p}(1 - \bar{q})}. \quad (5.30)$$

Primjer dinamike koja poštuje jednadžbu (5.28) je SIS model koji je uveden u poglavlju 4. Ovdje su stope transmisije dane s:

$$\begin{aligned} F_{k,m} &= \lambda^m, \\ R_{k,m} &= \mu, \end{aligned} \quad (5.31)$$

gdje su λ i μ pozitivne konstante. Na slici 5.3 vidljiva je SIS dinamika na 4-regularnoj mreži i iz se može ustanoviti da se AME i PA rješenja slažu u limesu $t \rightarrow \infty$ iako su rješenja različita za konačni t .

5.5 Modeli sa "UP-DOWN" simetrijom

Modeli s "up-down" simetrijom imaju dinamiku koja je invarijantna na promjenu stanja za sve čvorove. To je karakteristika modela dinamike mišljenja poput modela glasača. Uvjet simetrije vodi na sljedeće stope transmisije:

$$R_{k,m} = F_{k,k-m}, \quad \text{za } m = 0, \dots, k \text{ i za svaki } k. \quad (5.32)$$

Za ovakvu dinamiku, AME sustav (5.12) i (5.13) je invarijantan na promjenu varijabli $s_{k,m} \rightarrow i_{k,k-m}$ i $i_{k,m} \rightarrow s_{k,k-m}$. Kako je udio zaraženih čvorova k-tog stupnja jednak

$\rho_k = \sum_{m=0}^k i_{k,m} = 1 - \sum_{m=0}^k s_{k,m}$, uvjet simetrije povlači da rješenje postoji za AME s $\rho_k(t) = 1/2$ za sve t . Ovisno o početnom uvjetu $\rho(0)$ i drugim parametrima mogu se naći i druga rješenja za AME. Za početak će se promotriti ekvilibrijski modeli koji su dani Glauberovom i Metropolis dinamikom za Isingov spin model i imaju parametre $a = e^{4J/T}$ i $b_k = e^{-(2J/T)k}$. Ovi modeli zadovoljavaju uvjet (5.28) zajedno s uvjetom (5.32) te se zatim istražuje stabilnost rješenja za $\bar{\rho}_k = 1/2$. Ovdje postoji samo jedan parametar: stavljanjem $m = (k+1)/2$ u jednadžbu (5.28) i nametanjem uvjeta (5.32) dobije se sljedeće:

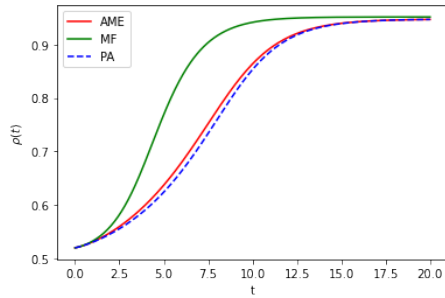
$$b_k = a^{-k/2} \quad (5.33)$$

za parametre ekvilibrijskog spin modela. Za parametar a može se definirati kritična vrijednost a_c koja bi imala značenje bifurkacijske točke. Za vrijednosti parametra $a < a_c$ simetrično je rješenje $\rho = 1/2$ stabilno, što znači da će, ako je $\rho(0)$ blizu $1/2$, rješenje stabilnog stanja biti $\bar{\rho} = 1/2$. U spin modelima, ovo je područje paramagnetska faza, dok u modelima mišljenja odgovara dvama mišljenjima koji jednako egzistiraju na mreži. Ako parametar a nadmaši kritičnu vrijednost a_c , tada je simetrično rješenje $\rho = 1/2$ nestabilno i tada postoje dva druga stabilna rješenja koja su simetrična oko $\rho = 1/2$. U modelima spina ovo područje odgovara feromagnetskoj fazi, dok u modelima mišljenja, jedno mišljenje dominira drugim. Kritična vrijednost a_c zapravo daje točku faznog prijalaza. Ako distribucija stupnjeva P_k posjeduje četvrti moment $\langle k^4 \rangle$, tada je kritični parametar a_c jednak [22]:

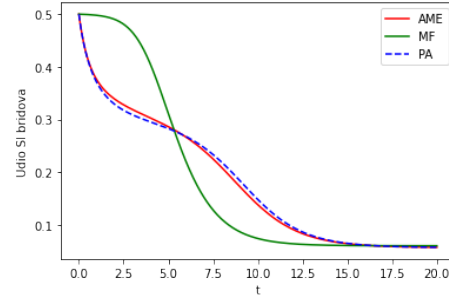
$$a_c = \left(\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle} \right) \quad (5.34)$$

s $\bar{\rho} - 1/2 \sim \pm(a - a_c)^{1/2}$ kako $a \rightarrow a_c$. Ako mreža ima "scale-free" distribuciju stupnjeva $P_k \sim k^{-\gamma}$, tada je za eksponente γ u rasponu $2 < \gamma < 3$ kritična točka $a_c = 1$, sa $\bar{\rho} - 1/2 \sim \pm(a - a_c)^{1/(3-\gamma)}$ kako $a \rightarrow a_c$, dok je za eksponente u rasponu od $3 < \gamma < 5$, a_c dan jednadžbom (5.34) sa $\bar{\rho} - 1/2 \sim \pm(a - a_c)^{1/(\gamma-3)}$.

Isingov model koji prati Glauberovu dinamiku je tipa (5.32) sa temperaturom T koja je povezana s parametrom a kroz $T = 2J/\ln a$, tako da bi $a = 1$ odgovaralo beskonačnoj temperaturi. Na slici 5.4. prikazana je Glauberova dinamika na Isingovu spin modelu na "scale-free" mreži s parametrom a daleko od kritičnog $a_c = 1$. I ovdje se može vidjeti da se rješenja razlikuju za konačni t , dok se u $t \rightarrow \infty$ rješenja za AME i PA poklapaju.

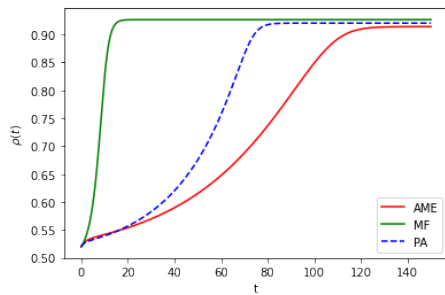


(a) Ovisnost udjela zaraženih čvorova ρ o vremenu

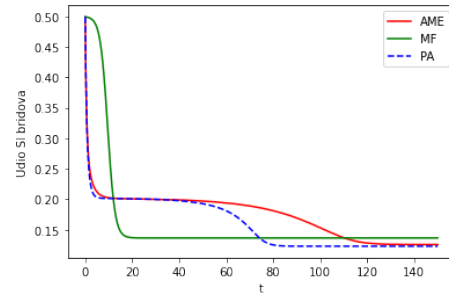


(b) Udio SI bridova u ovisnosti o vremenu

Slika 5.4: Glauberova dinamika na Isingovu spin modelu na "scale free" mreži s distribucijom stupnjeva $P_k \approx k^{-2.5}$ za stupnjeve u rasponu od $3 \leq k \leq 20$. Parametar vezanja iznosi $J = 1$, dok je temperatura postavljena na $T = \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \approx 2.26$. Početni udio spinova prema gore je 0.52.



(a) Ovisnost udjela zaraženih čvorova ρ o vremenu



(b) Udio SI bridova u ovisnosti o vremenu

Slika 5.5: Model većine glasova na 3-regularnom grafu s $\rho(0) = 0.52$ i s parametrom smetnje $Q = 0.06$

Za simetrične modele koji ne poštuju uvjet (5.28), PA i AME rješenja su različita čak i kad $t \rightarrow \infty$. Na slici 5.5. je dan primjer modela većine glasova za koje su PA i AME rješenja različita za svaki t .

6 Sistemski rizici

Promatraju se mreže financijskih institucija koje su međusobno povezane s potraživanjima između jednih i drugih te ih se modelira s usmjerenim i težinskim grafom u kojem svaki čvor predstavlja banku dok rubovi predstavljaju izloženost između banaka. Dva su stupnja povezana sa svakim čvorom: unutarnji stupanj, tj. broj bridova koji su usmjereni prema čvoru i vanjski stupanj, tj. broj bridova koji su usmjereni van čvora. Ulazni bridovi predstavljaju imovinu banke koju duguju ostale banke, dok, s druge strane, izlazeći bridovi predstavljaju obveze banke prema svojim kreditorima. Pretpostavlja se da je ukupna međubankovna aktiva svake banke jednoliko distribuirana duž ulaznih bridova i da je neovisna o broju bridova koje banka ima. Kako je svaka međubankovna aktiva pasiva neke druge banke, međubankovne pasive su endogeno određene bridovima mreže i međubankovnim aktivama. Osim međubankovnih bridova, svaka financijska institucija ima i nelikvidnu vanjsku aktivu kao što su primjere hipoteke i depoziti. Tako se i čvor i grafa ili mreže može karakterizirati sljedećim vrijednostima:

- A_i^{IB} = međubankovna aktiva (vrijednost je jednaka 0 ako nema ulaznih bridova)
- A_i^M = nelikvidna vanjska aktiva
- L_i^{IB} = međubankovna pasiva
- D_i = depoziti klijenata
- $j_{i,1}, \dots, j_{i,n_i}$ skup n_i ulaznih bridova
- $k_{i,1}, \dots, k_{i,m_i}$ skup m_i izlaznih bridova.

Ako se pretpostavi nemogućnost otplate, odnosno kada povezana banka uđe u stanje insolventnosti (eng. default), banka i gubi svu međubankovnu aktivu koju je imala kod te banke, tada je uvjet da banka i bude solventna i da se kolaps ne širi dalje dan uvjetom [23]:

$$(1 - \phi_i)A_i^{IB} + qA_i^M - L_i^{IB} - D_i > 0, \quad (6.35)$$

gdje je ϕ_i udio banaka s obavezama prema banci i koji su postali insolventni, dok je q faktor, koji može biti manji od 1 u slučaju prodaje aktive banke, u stanju insolvent-

nosti. Uvjet solventnosti može se zapisati kao:

$$\phi_i < \frac{K_i - (1 - q)A_i^M}{A_i^{IB}} \text{ gdje je } A_i^{IB} \neq 0 \quad (6.36)$$

gdje $K_i = A_i^{IB} + A_i^M - L_i^{IB} - D_i$ predstavlja kapitalne rezerve banke, odnosno razliku između vrijednosti aktive i pasive. Inicijalno, sve banke u mreži smatraju se solventnim i perturbacija mreže počinje sa insolventnošću jedne banke. Kako banke gube udio $\frac{1}{n_i}$ međubankovne aktive kada povezana banka uđe u stanje insolventnosti, iz jednadžbe (6.36) slijedi da je jedini način da se insolventnost proširi na susjedne banke ako vrijedi:

$$\frac{K_i - (1 - q)A_i^M}{A_i^{IB}} < \frac{1}{n_i}. \quad (6.37)$$

Širenje insolventnosti nastavlja se sve dok banke koje su direktno povezane s klasterom insolventnosti ne postanu sigurne.

Da bi se simuliralo širenje financijske zaraze, počinje se sa stvaranjem međubankovne mreže. Za početak će se koristiti Erdos-Renyi graf u kojem je svaki brid prisutan s vjerojatnošću p , a odsutan sa vjerojatnošću $1 - p$. Ako je N ukupni broj čvorova, projektni stupanj je $z = (N - 1)p$. Grafovi se konstruiraju algoritmom koji je objašnjen u potpoglavlju 3.1. Kasnije će se napraviti simulacija na "scale-free" mreži, tj. onoj u kojoj distribucija stupnjeva slijedi zakon potencije. "Scale-free" graf se simulira s algoritmom opisanim u potpoglavlju 3.3. Obje mreže imaju iste usrednjene stupnjeve zbog mogućnosti usporedbe. Prethodno je spomenuto da je međubankovna aktiva A_i^{IB} neovisna o stupnju čvora i . Da bi se ispunila ta pretpostavka generirat će se međubankovna aktive svake banke iz iste distribucije. Odabire se Gaussova distribucija sa srednjom vrijednošću 10 i jedinstvenom svojstvenom vrijednošću. Vanjska će se aktiva postaviti da bude jednaka četiri puta međubankovnoj aktivni $A_i^M = 4A_i^{IB}$, tako da predstavlja 80% ukupne aktive. Naposljetku treba fiksirati omjer između kapitalnog zahtjeva i ukupne aktive na neki određeni postotak c . Posjedično se postavlja depozit D_i koji je jednak toj vrijednosti. U svakoj simulaciji broj banaka N je postavljen na 1000 i, zbog jednostavnosti, odabrat će se faktor $q = 1$ u jednadžbi (6.37.). Nakon što se generira mreža, simulacija se pokreće tako da se perturbira jedna nasumična banka, tako da se izbriše sva njezina vanjska aktiva i postavlja se da bude u stanju insolventnosti za sve međubankovne pasive. Kao rezultat, susjedne banke također mogu ući u stanje insolventnosti u slučaju da kapitalne rezerve nisu

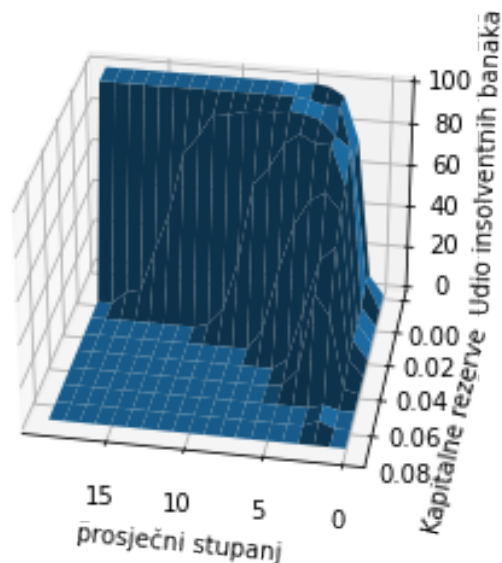
dovoljne da pokriju gubitke na međubankovnim aktivama. Zatim se gleda uvjet solventnosti (6.37.) za sve susjede i nastavlja se ova propagacija zaraze sve dok nema novih čvorova koji mogu ući u stanje insolventnosti. Vrijednost prosječnog stupnja z postavlja se u rasponu od 0 do 19, dok se kapitalne rezerve c stavlja u raspon od 0% do 9% s korakom 1. Kod širenja zaraze na mreži promatrat će se dva slučaja. U prvom slučaju prva je banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana nasumično, dok se u drugom slučaju izabere banka koja ima najveći izlazni stupanj.

6.1 Erdos-Renyi

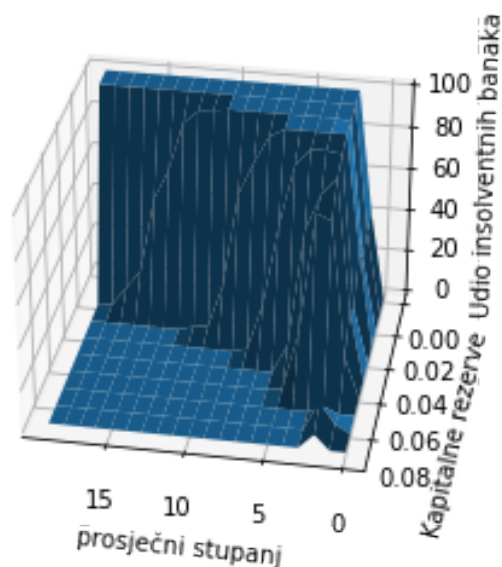
U ovom su poglavlju prezentirani rezultati Erdos-Renyi mreže, gdje se analiziraju situacije u kojima je prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana nasumično, i slučaj gdje je prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana kao ona koja ima najviši izlazni stupanj. Na slici 6.6. nalazi se prikaz ovisnosti ukupnog udjela banaka u stanju insolventnosti o ovisnosti o kapitalnim rezervama i prosječnom stupnju za slučaj perturbiranja nasumično odabrane banke. S druge strane, na slici 6.7. vidljiv je prikaz ovisnosti ukupnog udjela banaka u stanju insolventnosti o ovisnosti o kapitalnim rezervama i prosječnom stupnju za slučaj perturbiranja banke s najvećim izlaznim stupnjem. Očekuje se da će ponašanje biti isto kao i sa slučajem nasumično izabrane banke zbog male razlike između maksimalnog i prosječnog izlaznog stupnja za nasumične grafove.

6.2 "Scale-free"

U ovom su poglavlju prezentirani rezultati "scale-free" mreže, gdje su analizirane situacije u kojima je prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana nasumično, i slučaj gdje je prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana kao ona koja ima najviši izlazni stupanj. Karakteristična osobina "scale-free" mreže je postojanost čvorova sa vrlo različitim stupnjevima i prisutnost čvorišta s velikim brojem konekcija. Mreža koja je generirana na ovaj način bolje prezentira stvarnu financijsku mrežu, jer istovremeno postoje veoma centralne banke i rubne banke s malim brojem veza. Raspon kapitalnih rezervi i prosječnih stupnjeva ostaje isti kao u prethodnoj simulaciji zbog mogućnosti usporedbe. Na slici 6.8. vidljiv je prikaz ovisnosti ukupnog udjela banaka u stanju insolventnosti o ovisnosti o kapitalnim rezervama



Slika 6.6: Ovisnost udjela insolventnih banaka o prosječnom stupnju i kapitalnim rezervama za Erdos-Renyi mrežu. Prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana je nasumično.



Slika 6.7: Ovisnost udjela insolventnih banaka o prosječnom stupnju i kapitalnim rezervama za Erdos-Renyi mrežu. Prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana je s najvećim izlaznim stupnjem.

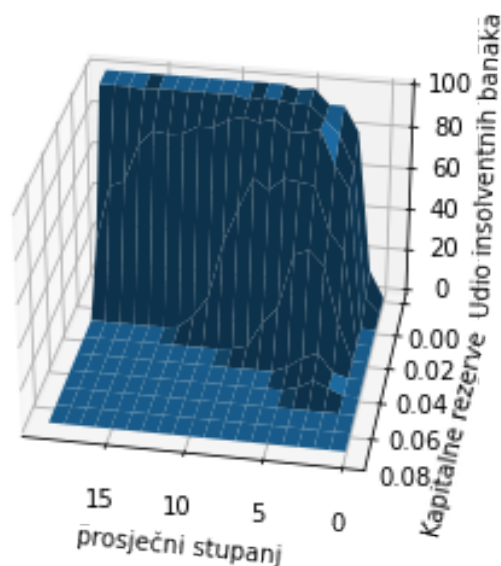
i prosječnom stupnju za slučaj perturbiranja nasumično odabrane banke. Sada pod pretpostavkom distribucije stupnjeva "scale-free" mreže, ova nasumično odabrana banka može biti rubna banka s gotovo nikakvim utjecajem na sustav, dok, naravno, može biti i jedna od centralnih banaka. S druge strane na slici 6.9. imamo prikaz ovisnosti ukupnog udjela banaka u stanju insolventnosti o ovisnosti o kapitalnim rezervama i prosječnom stupnju za slučaj perturbiranja banke s najvećim izlaznim

stupnjem. U ovom slučaju, suprotno simulaciji sa Erdos-Renyi mrežom, očekujemo dosta različito ponašanje prema slučaju sa nasumično odabranom bankom s obzirom na to da je razlika između banke s najvećim stupnjem i drugih banaka puno veća nego u Erdos-Renyi slučaju, gdje je prosječni stupanj svih čvorova isti.

6.3 Analiza rezultata

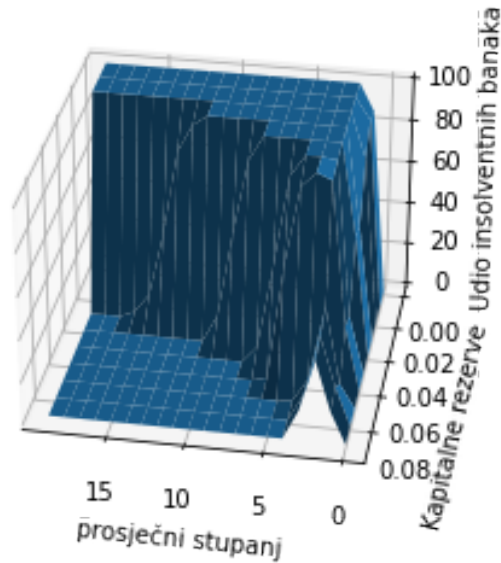
Mogu se primijetiti neke zajedničke značajke svih navedenih simulacija:

- Fiksiranjem prosječnog stupnja z , erozija kapitalnih rezervi pospješuje mogućnost ulaska u stanje insolventnosti.
- Fiksiranjem vrijednosti kapitalnih rezervi c , doseg "zaraze" je ne-monoton u ovisnosti o prosječnom stupnju.
- Smanjenjem kapitalnih rezervi, "zaraznost" se može ekstremno brzo širiti, dosežući vrlo visoke vrijednosti duž krivulje u (z, c) ravnini.



Slika 6.8: Ovisnost udjela insolventnih banaka o prosječnom stupnju i kapitalnim rezervama za "scale-free" mrežu. Prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana je nasumično.

Na slici 6.10. uspoređena su navdena 4 slučaja uz pomoć toplinskih karti (eng. heat map). Na ovaj se način može bolje uočiti granica koja odvaja relativno sigurne konfiguracije od rizičnih. Od posebnog je interesa usporedba između grafova (a) i (c) te grafova (b) i (d).



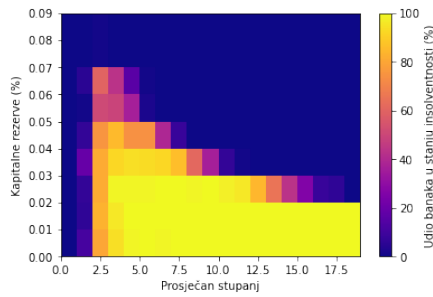
Slika 6.9: Ovisnost udjela insolventnih banaka o prosječnom stupnju i kapitalnim rezervama za "scale-free" mrežu. Prva banka koja ulazi u stanje insolventnosti izabrana je sa najvećim izlaznim stupnjem.

Gledajući (a) i (c) vidljivo je da je doseg sistemskog rizika reduciran u regijama izvan vrijednosti prosječnog stupnja od 2 i 6 i kapitalnih rezervi izvan 5. U "scale-free" mreži, ova vrijednost kapitalnih rezervi pruža bolju zaštitu u slučaju ako nasumična banka uđe u stanje insolventnosti. Gledajući (b) i (d), može se primijetiti da u "scale-free" mreži vjerojatnost zaraze drastično raste za slučaj ulaska u stanje insolventnosti najviše povezane banke. To je zbog činjenice da je sustav sa "scale-free" topologijom karakteriziran s manje čvorišta i manje povezanih čvorova, i propast jednog od tih čvorova potencijalno ima utjecaj na druge čvorove. Kao što je vidljivo u slučaju insolventnosti nasumične banke, vjerojatnost da je odabrana banka jako povezana je mala. To se može bolje vizualizirati ako se uzme razlika između dvije toplinske karte prikazana na slici 6.11.

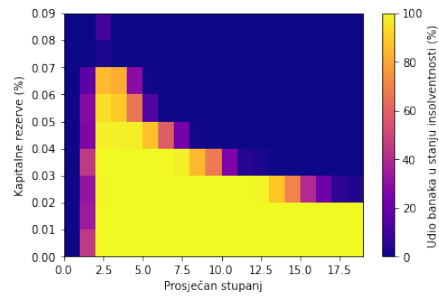
Uzimajući u obzir poprečni presjek koji odgovara kapitalnim rezervama od 4%, može se vidjeti da generalno "scale-free" mreža predstavlja manju vjerojatnost širenja insolventnosti (slika 6.12.).

Za kraj se može pogledati jednadžba solventnosti koja je napisana u obliku jednadžbe (6.37). Iz te jednadžbe može se predvidjeti ponašanje granice faznog prijelaza. Ako se postavi $q = 1$ i $A_i^{IB} = (A_i^{IB} + A_i^M)/4$, uvjet (6.37) će biti zadovoljen ako vrijedi:

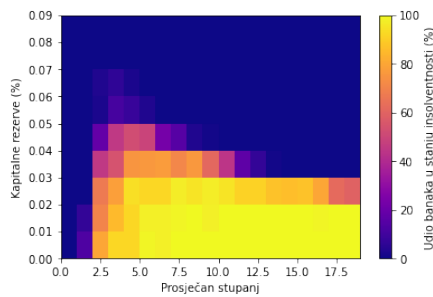
$$c = \frac{K}{4A_i^{IB}} > \frac{1}{4z} \quad (6.38)$$



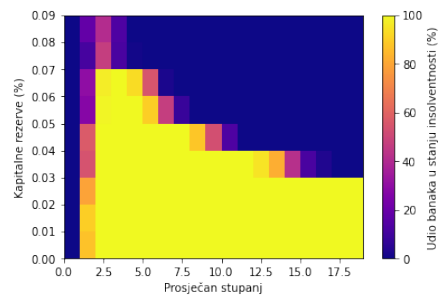
(a) Nasumično odabrana banka, Erdős–Rényi mreža



(b) Banka s najvećim izlaznim stupnjem, Erdős–Rényi mreža

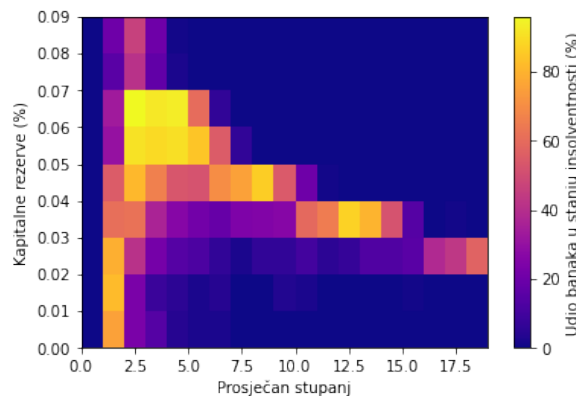


(c) Nasumično odabrana banka, "Scale-free" mreža



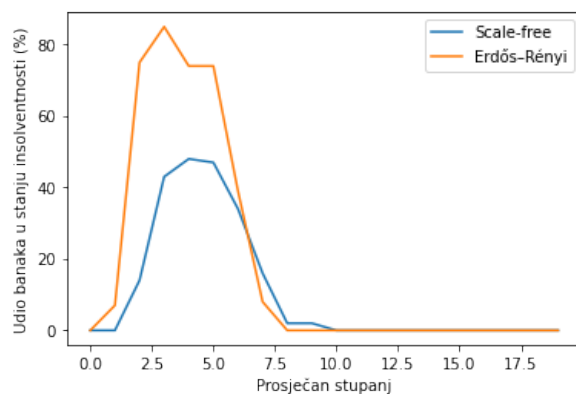
(d) Banka s najvećim izlaznim stupnjem, "Scale-free" mreža

Slika 6.10: Toplinska karta (eng. heat map) udjela banaka u stanju insolventnosti. Na slici a) nalazi se slučaj nasumično perturbirane banke za Erdős–Rényi mrežu, dok je na skici b) prikazan slučaj perturbirane banke s najvećim izlaznim stupnjem Erdős–Rényi mrežu. Na slici c) se nalazi slučaj nasumično perturbirane banke za "Scale-free" mrežu, dok je na skici b) prikazan slučaj perturbirane banke s najvećim izlaznim stupnjem za "Scale-free" mrežu.

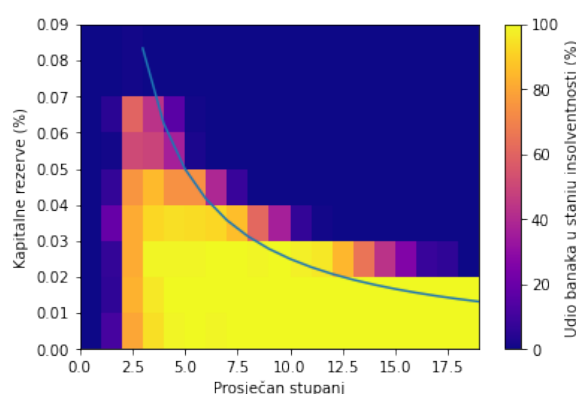


Slika 6.11: Toplinska karta razlike između slučaja ulaska u stanje insolventnosti banke s najvećim izlaznim stupnjem te stanja nasumično odabrane banke.

Ovo ponašanje može se pogotovo vidjeti u Erdős–Rényi grafu gdje su velike fluktuacije stupnjeva malo vjerojatne, što je prikazano na slici (6.13).



Slika 6.12: Usporedba između Erdős–Rényi i "Scale-free" mreže za očekivani udio banaka u stanju insolventnosti za 4% kapitalnih rezervi.



Slika 6.13: Ponašanje granice faznog prijelaza za Erdős–Rényi mrežu.

7 Usporedba sistematskih rizika sa aproksimativnom master jednačbom

Promatra se sustav N banaka s financijskom mrežom dužnika. Uz ugovore između banaka, uzet će se i u obzir i ugovori između imovine koji su izvan sustava banaka. U trenutku t sve su investicije napravljene, i za svaku banku i mogu se predstaviti kao bilanca stanja (eng.balance sheet) koja se sastoji od međubankovne imovine $A_i^b = \sum_j A_{ij}^b$, međubankovnih obveza $L_i^b = \sum_j L_{ij}^b = \sum_j A_{ij}^{bT}$, vanjske imovine $A_i^e = \sum_j A_{ij}^e$ i vanjskih obveza L_i^e . Razlika između imovine i obveza (ili razlika između aktive i pasive) zove se kapital $E_i(t)$ i u trenutku t je definirana kao:

$$\begin{aligned}
 E_i(t) &= A_i^e(t) + A_i^b(t) - L_i^e(t) - L_i^b(t) \\
 &= \Lambda^e \sum_k E_{ik} x_k^e(t) + \Lambda^b \sum_j B_{ij} x_j^b(t) - L_i^e - L_i^b.
 \end{aligned}
 \tag{7.39}$$

Vanjska i međubankovna financijska poluga (eng.leverage), $\Lambda_i^e = A_i^e/E_i$ i $\Lambda_i^b = A_i^b/E_i$ postaviti će se jednako za svaku banku: $\Lambda_i^e = \Lambda^e$, $\Lambda_i^b = \Lambda^b$. Matrica E_{ik} predstavlja strukturu vanjskih investicija banke, dok matrica B_{ij} predstavlja matricu susjedstva međubankovne mreže. Elementi E_{ik} i B_{ij} normalizirani su kao udio ukupne imovine. Jedinstvene vrijednosti ulaganja $x_k^e(t)$ i $x_j^b(t)$ inicijalno su jednake 1.

Definirat će se indikatorska varijabla $\chi_i(t)$ koja ukazuje na stanje insolventnosti ovisno o kapitalu: $\chi_j(t) = \Theta(-E_j(t))$ i može biti 0 ili 1. Vrijednosti međubankovnih investicija ovise o stanju protustranke i mogu poprimiti dvije vrijednosti: $x_i^b(\chi_i = 0) = 1$ i $x_i^b(\chi_i = 1) = R_i$. U slučaju da protustranka još nije ušla u stanje insolventnosti, jedinstvena vrijednost ostaje jednaka 1 kao što je inicijalno postavljena, dok se u slučaju ulaska u stanje insolventnosti reducira na $R_i \in [0, 1]$. R_i predstavlja stopu opravka i odgovara mogućnosti da banka koja je ušla u stanje insolventnosti može djelomično vratiti dugove.

Zbog jednostavnosti, odbacit će se struktura vanjskih kapitalnih ulaganja i kombinirat će se vanjski faktori iz jednadžbe (7.40) u veličinu koja će se nazvati vanjski kapital $E_i^e = \Lambda^e \sum_k E_{ik} x_k^e(t) - L_i^e$. Tada za jednadžbu bilance stanja vrijedi:

$$E_i(t) = E_i^e(t) + \Lambda^b \sum_j B_{ij} x_j^b(t) - L_i^b. \quad (7.40)$$

Kako su ukupna međubankovna imovina i obveze postavljene da budu ista za svaku banku i , one također moraju imati iste vrijednosti zbog relacije $L_{ij}^b = A_{ij}^{bT}$. Ukupni kapital postaviti će se tako da bude jednak $E_i(t) = 1$, za svaku banku i , tako da se postavi svaki vanjski kapital da bude jednak 1. Nakon što proces počne, za banku i smatra se da je ušla u stanje insolventnosti ako joj vrijednost kapitala padne ispod nule, odnosno $E_i < 0$. U trenutku T stresira se vanjski kapital E_i^e banke i sa stresom s_i , $E_i^e(T) = E_i^e(t)(1 + s_i)$, koja se odmah propagira na međubankovnoj mreži i proizvodi jednadžbu:

$$E_i(T) = E_i^e(t)(1 + s_i) + \Lambda^b \sum_j B_{ij} x_j^b(T) - L_i^b. \quad (7.41)$$

Proces prati Eisenberg-Noe proces koji je detaljnije objašnjen u dodatku D.

7.1 Model stresa

Za skup N banaka, uzorkuje se vektor šoka \vec{s} dimenzije N čiji elementi s_i predstavljaju vrijednost šoka koju je banka i primila. Moguće vrijednosti šoka modeliraju se diskretno, tako da svaki šok s_i može primiti jednu od n_σ vrijednosti σ_μ , $\mu = 1, \dots, n_\mu$ s vjerojatnošću p_μ . Za σ_1 će se odabrati veličina dovoljno velika da odmah izazove insolventnost institucije na koju naleti, tj. mora biti $\sigma_1 < -1$. Vrijednosti drugih šokova σ_μ , $\mu = 2, \dots, n_\sigma$ dovoljno su velike da naškode bankama, ali ne dovoljno da uđu u stanje insolventnosti, tj. vrijedi $\sigma_{m\mu} \in [-1, 0)$. Zadnja vrijednost σ_{n_σ} iznosi 0 te predstavlja slučaj kada nema štete prema kapitalu. Zbog jednostavnosti će se izabrati $n_\sigma = 3$, i to je minimalan izbor koji pokriva sva tri šoka: izravan ulazak u stanje insolventnosti, šteta i bez štete prema kapitalu. Definira se nasumična varijabla vrijednosti šoka kao S , koja realizira vrijednost šoka σ_μ s vjerojatnošću p_μ . Kumulativna distributivna funkcija nasumične varijable S je oblika:

$$F_S(S = \sigma_x) = \sum_{\mu=1}^x p_\mu, \mathbf{x} = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_\sigma}. \quad (7.42)$$

Uzorkovanje nasumične varijable vrijednosti šoka S je tada izvršeno korištenjem inverza ove kumulativne distributivne funkcije na uniformnoj nasumičnoj varijabli: $F_S^{-1}(U)$.

7.2 Mrežna topologija

Da bi se mogla modelirati propagacija šoka koristit će se k -regularni graf. Ova topologija uvodi nasumičnost u parove čvorova, dok drži fiksirane stupnjeve čvorova. Zbog ograničenja postavljenih na kapital i na međubankovne financijske poluge, nasumičnost u stupnjevima čvorova bi znatno produžila vrijeme potrebno za simulaciju. Naravno, osim smanjenja vremena potrebnog za simulaciju, jednostavna mrežna topologija omogućava lakšu kontrolu nad parametrima. Jednaka međubankovna financijska poluga Λ_b pridružena je svakoj banci i podijeljena sa međubankovnom imovinom. Uvjet da je kapital i međubankovna financijska poluga uniformna duž svih banaka, $E_i = E, \Lambda_i^b = \Lambda^b$, može se prikazati kao da sve imovine i obveze imaju istu vrijednost, $A_i^b = A^b, L_i^b = L^b$. Kako se imovina i obveze mogu predstaviti kao mreža, iz $L_{ij}^b = A_{ij}^{bT}$ dobije se $A^b = L^b$. Na k -regularnoj mreži, gdje svi čvorovi imaju isti

stupanj k , ova ograničenja vode na rješenje gdje sve pojedinačne imovine i obveze imaju jednaku vrijednost, tj. $A_{ij}^b = L_{ij}^b = \frac{A^b}{k/2}$.

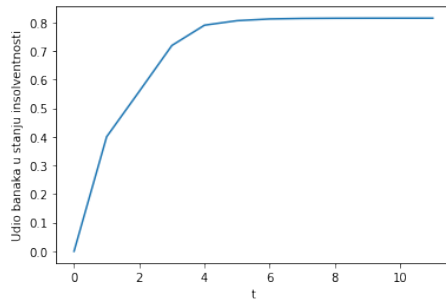
7.3 Simulacija procesa

U prvom koraku primjenjuje se šok na vanjsku imovinu. Ako to vodi banku na stanje insolventnosti, tada se insolventnost dalje propagira sa Eisenberg-Noe algoritmom, dok se uvjet koji kaže da su sve promjene kapitala manje od 3% od originalnog kapitala ne ispuni. U slučaju da se uvjet ne može ispuniti, simulacija se prekida nakon d koraka. Stopa oporavka za sve banke stavlja se $R_i = 0$. Šokovi su uzorkovani 1000 puta i primijenjeni na vanjsku imovinu čvorova u mreži. Za svaki stupanj mreže k , 5 različitih instanci mreže je generirano. Za svaku instancu mreže dobije se 1000 realizacija ξ koristeći uzorkovanje šokova, što onda rezultira s ukupno $N_\xi = 5000$ realizacija. Za svaku realizaciju procesa dobije se vektor indikatora insolventnosti za banke. Udio insolventnih čvorova unutar realizacije ξ , $q(\xi)$, izračunat je kao očekivana vrijednost vektora indikatora insolventnosti. Očekivana se vrijednost broja čvorova u stanju insolventnosti $\langle q \rangle = \frac{1}{N_\xi} \sum_\xi q(\xi)$ zatim koristi kao vjerojatnost stanja insolventnosti. Na slici 7.14(a). prikazan je rezultat simulacije i iz njega može se vidjeti da udio banaka u stanju insolventnosti konvergira prema nekoj vrijednosti koja je manja od 1, što znači da širenje šoka na mreži neće prouzročiti da sve banke uđu u stanje insolventnosti.

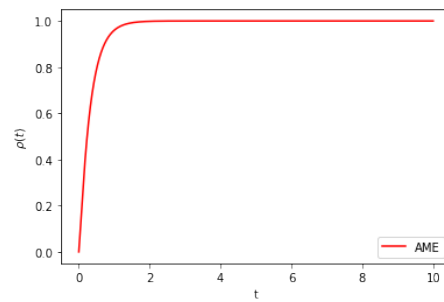
Sada ćemo usporediti ovo rješenja sa AME rješenjem Wattsovog modela praga definiranog u poglavlju 4. Za Wattsov model praga stopa oporavka je jednaka nuli: $R_{k,m} = 0$, dok stopa transmisije je dana kao:

$$F_{\mathbf{k},\mathbf{m}} = \begin{cases} 1, & m \geq \phi k \text{ i } k > 0 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (7.43)$$

gdje je $k = \sum_j k_j$ i $m = \sum_j m_j$. Pretpostavlja se $k > 0$ za ovo pravilo i da čvorovi stupnja $k = 0$ ne mogu biti zaraženi jer na njih nitko ne utječe. Prag će se vući iz "krnje" normalne distribucije sa srednjom vrijednošću $\mu = 0$ i standardnom devijacijom $\sigma = 2$ kako bi se dobile vrijednosti između 0 i 1. AME sustav je dan jednadžbom 5.19. Rezultati su prikazani na slici 7.14(b). Uspoređujući ovaj graf sa prijašnjim vidljivo je da u slučaju AME rješenja broj zaraženih čvorova ili banaka u stanju insolventnosti



(a) Ovisnost udjela broja banaka u stanju insolventnosti o vremenu t .



(b) Ovisnost udjela zaraženih čvorova ρ o vremenu

Slika 7.14: Na lijevoj slici je prikazana ovisnost udjela broja banaka u stanju insolventnosti o vremenu t za k -regularnu mrežu. Distribucija stupnjeva je dana u rasponu $3 \leq k \leq 11$. Vrijednosti šokova su jednaki $\vec{\sigma} = (-1.1, -0.9, 0)$, dok su vjerojatnosti za te šokove jednake $\vec{p} = (0.01, 0.39, 0.6)$. Na desnoj slici je prikazano AME rješenje ovisnosti udjela zaraženih čvorova ρ o vremenu za model praga na k -regularnoj mreži sa rasponom stupnjeva od $3 \leq k \leq 11$.

znatno brže konvergira prema nekoj konačnoj vrijednosti, u ovom slučaju konvergira prema 1, što odgovara slučaju da su svi čvorovi zaraženi odnosno sve banke su u stanju insolventnosti.

8 Zaključak

Cilj ovog rada bilo je proučavanje širenja zaraze s financijske strane insolventnosti na kompleksnim mrežama. U poglavlju 5., gdje se promatra binarna dinamika na mrežama je istraženo slaganje rješenja za aproksimativnu master jednadžbu, aproksimaciju parova te aproksimaciju srednjeg polja. U modelima sa monotonom dinamikom (SI dinamika i Bass dinamika) gdje je stopa oporavka $R_{k,m} = 0$ rješenja za aproksimativnu master jednadžbu(AME) i aproksimaciju parova(PA) slažu se za konačni t kao i za $t \rightarrow \infty$. U modelima s generalnom dinamikom, gdje je stopa opravka $R_{k,m}$ različita od nule, rješenja za AME i PA se razlikuju za konačni t , dok u limesu $t \rightarrow \infty$ postoji slaganje rješenja. Za kraj su proučeni modeli s "up-down" simetrijom koji imaju dinamiku koja je invarijantna na promjenu stanja za sve čvorove. Za modele za koje vrijedi da je omjer stopa transmisije i stope oporavka jednak $\frac{F_{k,m}}{R_{k,m}} = b_k a^m$, poput Glauberove dinamike na Isingovu spin modelu. rješenja se poklapaju u limesu $t \rightarrow \infty$, dok se za konačni t razlikuju. Kod modela za koje ne vrijedi navedeni omjer, poput modela većine glasova, rješenja se razlikuju i u limesu $t \rightarrow \infty$. Zatim se promatraju mreže financijskih institucija u poglavlju 6., koje su međusobno povezane sa potraživanjem između jednih i drugih. Iz rezultata se može očitati da u područjima niske povezanosti, tj. niskog prosječnog stupnja i niskih kapitalnih rezervi, vjerojatnost sistematskog rizika je veća. Povećanjem prosječnog stupnja ili kapitalnih rezervi, smanjuje se vjerojatnost broja banaka koje bi mogle postati insolventne. Također, rezultati pokazuju da je za iste uvjete vjerojatnost broja banaka u stanju insolventnosti manja za "scale-free" mreže. Za kraj, u poglavlju 7. je definiran financijski sustav banaka gdje na svaku banku se primjenjuje jedna od tri vrste šoka i gleda se širenje insolventnosti na mreži. Rezultat se usporedilo s AME rješenjem Wattsovog modela praga i može se primjetiti da u limesu $t \rightarrow \infty$ grafovi ne konvergiraju prema istim vrijednostima.

Dodaci

Dodatak A Networkx

NetworkX je Python program za istraživanje i analizu mreža i mrežnih algoritama. Osnovni paket pruža strukture podataka za predstavljanje mnogih vrsta mreža ili grafova, uključujući jednostavne grafove, usmjerene grafove i grafove s paralelnim bridovima i petljama. Čvorovi u NetworkX grafovima mogu biti bilo koji Python objekt, a bridovi mogu sadržavati proizvoljne podatke. Ova fleksibilnost čini NetworkX idealnim za predstavljanje mreža koje se nalaze u mnogim različitim znanstvenim područjima. Uz osnovne podatkovne strukture implementirani su mnogi algoritmi za izračunavanja mrežnih svojstava i strukturnih mjera: najkraći put, centralnost, klasteriranje, distribucija stupnjeva i još mnogo toga. NetworkX može prepoznati različite formate grafova za jednostavnu razmjenu s postojećim podacima i pruža generatore za mnoge klasične grafove i popularne modele grafova, kao što su Erdős–Rényi, Barabasi-Albert, mreže malog svijeta i druge. Primjeri tih grafova dani su na slici A.1.

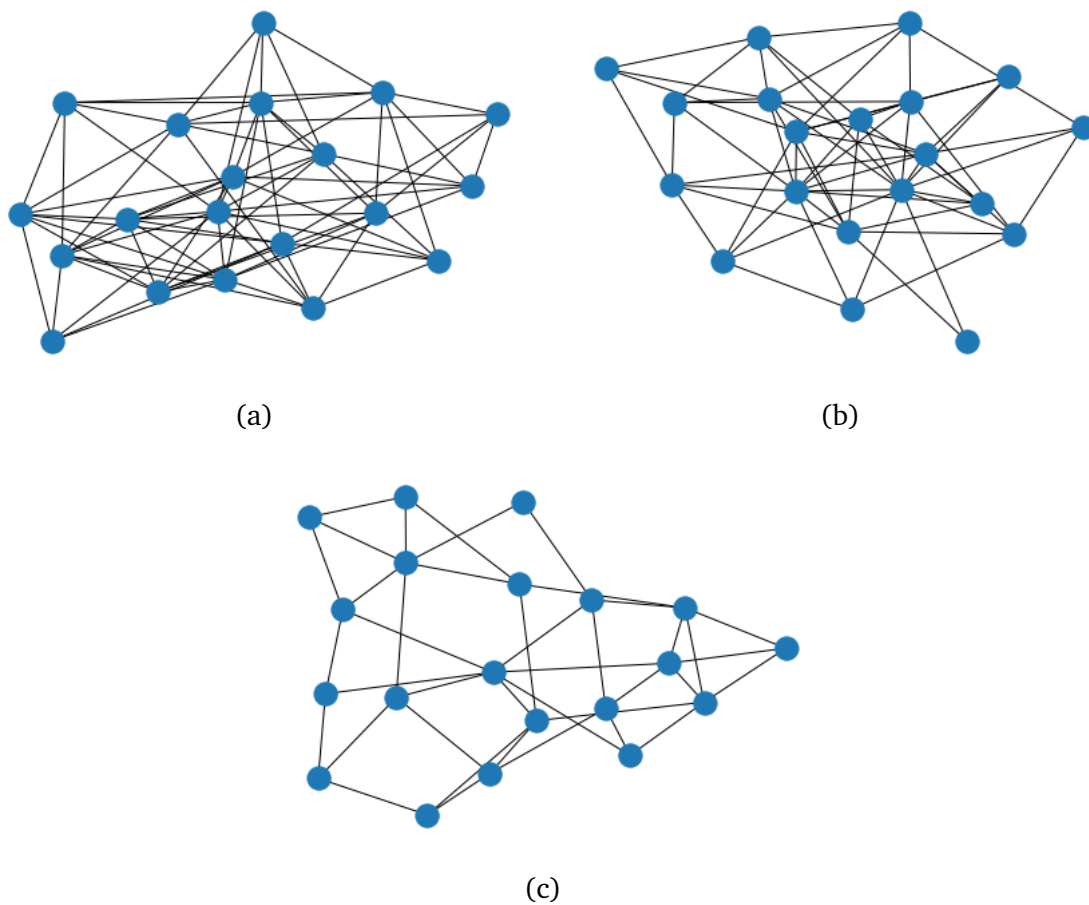
Dodatak B Bassov difuzijski model

Bassov difuzijski model [24] sastoji se od jednostavne diferencijalne jednadžbe koja opisuje proces usvajanja novih proizvoda u populaciji. Model predstavlja obrazloženje interakcije trenutnih i potencijalnih korisnika novog proizvoda. Osnovna pretpostavka je da se usvojitelj može klasificirati kao inovator ili kao imitator, a brzina i vrijeme usvajanja ovise o njihovu stupnju inovativnosti i stupnju oponašanja među usvojiteljima. Bassov model naširoko se koristi u predviđanju, posebice u predviđanju prodaje novih proizvoda i predviđanju tehnologije. Model se definira na sljedeći način:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = p + qF(t) \quad (\text{B.1})$$

gdje je:

- $F(t)$ udio broja proizvoda ili usluga koji su trenutno u upotrebi,
- $f(t)$ promjena udjela broja proizvoda ili usluga koji su trenutno u upotrebi, tj.



Slika A.1: Grafovi generirani pomoću NetworkX paketa: (a) Erdős-Rényi graf, (b) Barabasi-Albert graf, (c) Watts-Strogatz graf

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t).$$

- p je koeficijent inovativnosti.
- q je koeficijent imitacije.

U obliku obične diferencijalne jednačine:

$$\frac{dF}{dt} = p(1 - F) + q(1 - F)F. \quad (\text{B.2})$$

Prodaja (ili novi usvojitelji) $s(t)$ u trenutku t je stopa promjene broja proizvoda, tj. $f(t)$ podijeljen s tržišnim potencijalom m . Pod uvjetom $F(0) = 0$ vrijedi[20]:

$$s(t) = mf(t) = m \frac{(p+q)^2}{p} \frac{e^{-(p+q)t}}{(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2}. \quad (\text{B.3})$$

Postoji dekompozicija $s(t) = s_n(t) + s_i(t)$, gdje je $s_n(t) = mp(1 - F(t))$ broj inovatora u trenutku t , a $s_i(t) = mq(1 - F(t))F(t)$ broj imitatora u trenutku t . Vrijeme vrhunca prodaja t^* dano je kao:

$$t^* = \frac{\ln q - \ln p}{p + q}. \quad (\text{B.4})$$

Dodatak C Glauberova dinamika

U statističkoj fizici, Glauberova dinamika [25] jedan je od načina simuliranja Isingova modela. Uz pretpostavku da je u Isingovu modelu N čestica koje mogu imati spin gore (+1) ili spin dolje (-1) i da su čestice na 2D mreži. Svaka se čestica može označiti s x i y koordinatama. Glauberov algoritam je tada:

- Izabere se nasumično čestica $\sigma_{x,y}$.
- Sumiraju se njezina 4 susjedna spina: $S = \sigma_{x+1,y} + \sigma_{x-1,y} + \sigma_{x,y+1} + \sigma_{x,y-1}$.
- Izračuna se promjena energije ako se okrene spin. To je $\Delta E = 2\sigma_{x,y}S$.
- Okreće se spin s vjerojatnošću $e^{-\Delta E/T} / (1 + e^{-\Delta E/T})$ gdje je T temperatura.
- Prikazuje se nova rešetka. Ponavlja se proces N puta.

Dodatak D Eisenberg-Noe model

Promotrimo ekonomiju koja se sastoji od n čvorova. Svaki od tih čvorova smatra se različitim ekonomskim entitetom ili financijskim čvorom koji sudjeluje u mreži izvršenja obveza. Svaki taj entitet ima nominalne obveze prema drugim entitetima u sustavu. Predstavlja se struktura tih obveza s $n \times n$ nominalnom matricom obveza L , gdje L_{ij} predstavlja nominalne obveze čvora i prema čvoru j . Pretpostavlja se da su sva nominalna potraživanja nenegativna i da nijedan čvor nema potraživanja prema sebi. Da bi se reflektirala ova ekonomska interpretacija, specificira se da je nominalna matrica potraživanja nenegativna i da su svi dijagonalni elementi matrice jednaki 0, tj. pretpostavljamo da $\forall i, j \in N, L_{ij} \geq 0$ i da za $\forall i, L_{ii} = 0$. Neka je $e_i \geq 0$ egzogeni operativni tok novca koji prima čvor i . Ovaj su operativni tok novca injekcije novca koje prima čvor od izvora izvan financijskog sustava. Financijski se sustav onda može definirati kao par (L, e) koji se sastoji od matrice nominalnih obveza L i operativnog toka novca e koji zadovoljavaju gornje uvjete. Neka p_i predstavlja ukupno plaćanje čvora i prema ostalima čvorovima u mreži. Tada se može definirati $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ kao vektor ukupnih plaćanja koje su izvršili čvorovi. Neka \bar{p}_i predstavlja ukupne nominalne obveze čvora i prema drugim čvorovima [26]:

$$\bar{p}_i = \sum_{j=1}^n L_{ij}. \quad (\text{D.5})$$

Tada se može definirati $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$ kao vektor ukupnih obveza. Neka:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{L_{ij}}{\bar{p}_i}, & \text{ako je } \bar{p}_i > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

predstavlja matricu relativnih obveza. Ova matrica zapravo predstavlja nominalnu obvezu jednog čvora prema drugom u sustavu kao udio ukupnih obveza tog čvora. Pretpostavlja se da svi dugovi imaju jednak prioritet. Jednakost prioriteta u tom slučaju implicira da plaćanje koje je čvor i izvršio prema čvoru j iznosi $p_i \Pi_{ij}$. Iz ovoga slijedi da su ukupne uplate koje je čvor j primio jednake $\sum_{i=1}^n \Pi_{ij}^T p_j$. Nadalje,

sve su uplate napravljene prema nekom čvoru u sustavu i posljedično se dobije:

$$\forall i, \sum_{j=1}^n \Pi_{ij} = 1, \quad (\text{D.7})$$

ili u matričnoj notaciji:

$$\mathbf{\Pi} \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (\text{D.8})$$

Ukupni tok novca prema vlasnicima kapitala čvora i jednak je sumi uplata koje je čvor i primio od drugih čvorova plus operativni tok novca. Ovo implicira da je ukupni tok novca prema čvoru i jednak:

$$\sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j + e_i. \quad (\text{D.9})$$

Vrijednost kapitala čvora i je tada dan kao ukupni tok novca manje obveze prema kreditorima:

$$\sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j + e_i - p_i. \quad (\text{D.10})$$

Koristeći (B.1) i (B.2) financijski sustav (L, e) , gdje je L matrica nominalnih obveza, a e vektor operativnog toka novca, može se ekvivalentno zapisati kao (Π, \bar{p}, e) , gdje je Π matrica relativnih obveza, \bar{p} vektor ukupnih plaćanja, a e vektor operativnog toka novca.

Vektor izvršenja obveza za financijski sustav trebao bi predstavljati specifikaciju plaćanja izvršenih od strane svakog od čvorova u financijskom sustavu koja je u skladu s pravilima raspodjele vrijednosti među čvorovima i među vlasnicima duga i kapitala. Tada se može definirati vektor izvršenja obveza za financijski sustav (Π, \bar{p}, e) kao vektor $p^* \in [0, \bar{p}]$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:

- Ograničene obveze, koje zahtijevaju da ukupne uplate koje je izvršio čvor ne nadmašuju tok novca koji je dostupan čvoru, tj. $\forall i \in N$:

$$p_i^* \leq \sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j^* + e_i \quad (\text{D.11})$$

- Apsolutni prioritet. $\forall i \in N$, ili su obveze u potpunosti plaćene, tj. $p_i^* = \bar{p}_i$ ili je

sve isplaćeno kreditorima, tj:

$$p_i^* = \sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j^* + e_i \quad (\text{D.12})$$

- Proporcionalnost, koja ako dođe do stanja insolventnosti, zahtijeva da su svi potraživački čvorovi plaćeni proporcionalno veličini nominalnih potraživanja u imovini tog čvora.

Da bi se utvrdilo postojanje vektora klirinškog plaćanja, potrebna je karakterizacija fiksne točke vektora plaćanja. Da bi se uspostavila ova karakterizacija fiksne točke, treba napomenuti da ograničene obveze i apsolutni prioritet impliciraju da je $p^* \in [\mathbf{0}, \bar{p}]$ vektor klirinškog plaćanja samo ako vrijedi sljedeći uvjet:

$$p_i^* = \min \left[e_i + \sum_{j=1}^n \Pi_{ij}^T p_j^*, \bar{p}_i \right]. \quad (\text{D.13})$$

Prvi izraz s desne strane u jednadžbi za minimum predstavlja što čvor ima, tj. ukupni dotok prema čvoru i . Drugi član u izrazu za minimum predstavlja što čvor duguje, tj. ukupne obveze čvora i prema ostalim čvorovima u mreži. Klirinški vektor je vektor u kojem svaki čvor plaća minimum onoga što ima i onoga što duguje. Iz gornje diskusije, vidljivo je da je klirinški vektor fiksna točka, p^* , mape $\Phi(\cdot; \Pi, \bar{p}, e) : [\mathbf{0}, \bar{p}] \rightarrow [\mathbf{0}, \bar{p}]$ definiran s:

$$\Phi(p; \Pi, \bar{p}, e) = (\Pi^T p + e) \wedge \bar{p}. \quad (\text{D.14})$$

Ekonomska interpretacija Φ je da $\Phi(p)$ predstavlja ukupna sredstva koja će se primjeniti da se zadovolje dugovanja, pretpostavljajući da čvorovi primaju priljeve označene s p iz potraživanja prema drugim čvorovima.

Bibliography

- [1] Zachary, W. W. (1977). "An Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups". *Journal of Anthropological Research*. 33 (4): 452–473
- [2] Newman, M.E.J. 2010. *Networks: An Introduction*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- [3] D. J. Watts & Steven Strogatz (1998). "Collective dynamics of 'small-world' networks". *Nature*. 393 (6684): 440–442.
- [4] K.-I. Goh, B. Kahng, D. Kim (2001). "Universal Behavior of Load Distribution in Scale-Free Networks" *Phys. Rev. Lett.* 87, 278701
- [5] A. Barrat, M. Barthelemy, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, The architecture of complex weighted networks., *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 101 (2004) 3747–3752. doi:10.1073/pnas.0400087101.
- [6] Saramaki, J., Kivela, M., Onnela, J.P., Kaski, K., Kertesz, J., 2007. Generalizations of the clustering coefficient to weighted complex networks. *Phys. Rev., E Stat. Nonlinear Soft Matter Phys.* 75, 027105.
- [7] Erdős, P.; Rényi, A. (1959). "On Random Graphs. I". *Publicationes Mathematicae*. 6: 290–297.
- [8] Gilbert, E.N. (1959). "Random Graphs". *Annals of Mathematical Statistics*. 30 (4): 1141–1144. doi:10.1214/aoms/1177706098.
- [9] B. V. Gnedenko, *The theory of probability*, 4th edition, "Nauka", Moscow, 1988; English transl. of 3rd edition, Chelsea, New York, 1984. MR 25:2622
- [10] Albert, Réka; Barabási, Albert-László (2002). "Statistical mechanics of complex networks". *Reviews of Modern Physics*. 74 (1): 47–97.
- [11] B. Bollobás, A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combin.* 1 (1980),
- [12] Durrett, Richard. "The contact process, 1974–1989". Cornell University, Mathematical Sciences Institute.

- [13] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem, and A. Vespignani, Epidemic processes in complex networks, *Rev. Mod. Phys.* 87, 925 (2015).
- [14] Liggett, Thomas M. (1985). *Interacting Particle Systems*. New York: Springer Verlag. ISBN 0-387-96069-4.
- [15] Redner S. 2017 Dynamics of voter models on simple and complex networks. (<http://arxiv.org/abs/1705.02249>)
- [16] Koch, C. and Segev, I. *Methods in neuronal modeling: from ions to networks* (MIT press, 1998).
- [17] Herz, A. V. M. and Hopfield, J. J. Earthquake Cycles and Neural Reverberations: Collective Oscillations in Systems with Pulse-Coupled Threshold Elements. *Phys. Rev. Lett.* 75, 1222–1225. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1222> (6 1995).
- [18] Joh, R. I., Wang, H., Weiss, H. and Weitz, J. S. Dynamics of indirectly transmitted infectious diseases with immunological threshold. *Bulletin of mathematical biology* 71, 845–862 (2009).
- [19] Granovetter, M. Threshold models of collective behavior. *American journal of sociology* 83, 1420–1443 (1978)
- [20] Schelling, Thomas C. (1971). "Dynamic models of segregation". *The Journal of Mathematical Sociology*. Informa UK Limited. 1 (2): 143–186.
- [21] Watts DJ, Strogatz SH (June 1998). "Collective dynamics of 'small-world' networks". *Nature*. 393 (6684): 440–2. Bibcode:1998Natur.393..440W. doi:10.1038/30918. PMID 9623998. S2CID 4429113.
- [22] J. P. Gleeson, Binary-State Dynamics on Complex Networks: Pair Approximation and Beyond, *Phys. Rev. X* 3, 021004 (2013).
- [23] Gai P. and S. Kapadia (2010) "Contagion in Financial Networks", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 466(2120), 2401-2423
- [24] Bass, Frank (1969). "A new product growth for model consumer durables". *Management Science*. 15 (5): 215–227. doi:10.1287/mnsc.15.5.215.

- [25] Roy J. Glauber Time-Dependent Statistics of the Ising Mo. J. Math. Phys. 4, 294 (1963); <https://doi.org/10.1063/1.1703954>
- [26] Eisenberg L. and T. H. Noe (2001) “Systemic Risk in Financial Systems”, *Management Science*, 47(2), 236-249.