SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Gojšić

RANGIRANJE SPORTSKIH EKIPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sestrama koje me gnjave kada ću završiti faks

Sadržaj

Sadržaj **iv**

1 Uvod **1**

2 PageRank algoritam **2**
2.1 Originalni algoritam 2

3 Perron-Frobeniusov teorem **8**
3.1 Pozitivne matrice 8
3.2 Nenegativne matrice 20

4 Rangiranje NFL ekipa **26**
4.1 Prilagodba algoritma 26
4.2 Podaci 28
4.3 Rezultati 35

Bibliografija **44**

Poglavlje 1

Uvod

"Ako nije sve u pobjedi zašto broje rezultat?", pitanje je Vincea Lombardija, jednog od najboljih trenera u povijesti američkog nogometa, kojim savršeno sumira cilj sporta: biti bolji od svog suparnika. No što kada nemamo rezultat, kada utakmica još nije odigrana? Rangiranjem svih ekipa od najbolje do najgore intrinzični je dio svake organizirane sportske lige. Ograničenja se javljaju kada dvije ekipe nisu međusobno igrale zbog čega sa sigurnošću ne možemo procijeniti bolju, ili su igrale više puta s različitim rezultatima.
Ukupne oklade kod licenciranih kladionica tokom prethodne sezone najveće svjetske lige američkog nogometa, NFL-a (engl. *National Football League*) procijenjene su na 100 milijardi američkih dolara [2] dok su prava prenošenja istih lige procijenjena na 110 milijardi dolara [7] za iduće desetljeće. Tolika količina uloženog novca sa sobom povlači potrebu za što točnijim projekcijama snaga ekipa s ciljem postavljanja optimalnih koeficijenata od strane kladionica te prenošenja utakmica upravo najboljih ekipa od strane televizijskih kuća.
PageRank algoritam razvijen je od strane Googlea s ciljem optimizacije pretraživanja internetskih stranica. Algoritam se bazira na pretpostavkama da postoji ograničen broj internetskih stranica te da su one međusobno povezane jednosmjernim linkovima. Supstitucijom web stranica s ekipama te linkovima s pobjedama dobijemo algoritam primjenjiv za rangiranje sportskih ekipa u sportskim natjecanjima zatvorenog sustava (kao što je i NFL).
Cilj ovog rada je opisati rad PageRank algoritma te pomoću njega simulirati rangiranje NFL ekipa tokom jedne sezone. Daljnju analizu rezultata generiranih pomoću algoritama provesti ćemo njihovom usporedbom sa službenim rangiranjima od lige, projekcijama pobjednika koje daje najveća američka sportska medijska kuća (ESPN) te sa stvarnim rezultatima.

Poglavlje 2

PageRank algoritam

U ovom poglavlju analizirati ćemo PageRank algoritam. Krenuti ćemo od njegovog nastajanja krajem prošlog tisućljeća te proučiti način na koji on funkcionira. Primarno ću se osvrnuti na njegovu originalnu namjenu rangiranja internetskih stranica, započevši s jednostavnim primjerom s malim brojem stranica.

2.1 Originalni algoritam

Kreatori Googlea, Larry Page (po kojemu je sam algoritam djelomično i dobio ime) te Sergey Brin, kao dio istraživačkog projekta na privatnom sveučilištu Stanford u Californiji 1996. godine razvili su originalni PageRank algoritam. Algoritam se koristio u prototipu prvog Googleovog pretraživača iako je patent originalno bio u vlasništvu sveučilišta Stanford. Google je naknadu za korištenje algoritma platio u vlastitim dionicama koje je Stanford 2005. prodao za 336 milijuna dolara[4] a danas bi vrijedile preko 4 milijarde dolara.
Definirajmo konačan skup internetskih stranica $s_1, s_2, \ldots, s_n, n \in \mathbf{N}$. Ideja na kojoj se algoritam temelji jest da svaka internetska stranica $s_j, j = 1, \ldots, n$ posjeduje inherentnu vrijednost koju ćemo zvati rang $r_j, j = 1, \ldots, n$ koja proizlazi iz njene "popularnosti među poveznicama" (engl. *link popularity*). Pomoću tih vrijednosti internetske stranice moguće je poredati od prve ("najpopularnije") do n-te ("najnepopularnije"). Sukladno njihovom rangu internetske stranice bi bile poredane tijekom google pretraživanja. Kako bismo dobili vrijednost pridruženu internetskoj stranici definirajmo sljedeća dva skupa:

$$B_j = \text{skup stranica koje posjeduju link na stranicu j} \subseteq \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$
$$L_j = \text{skup indeksa stranica koje sadrže link na stranicu j} = \{i \in \{1, 2 \ldots, n\}\} : s_i \in B_j\}.$$

Naspram RankDex algoritma kojega je Larry Page citirao u svome radu, PageRank prilikom nalaženja rang ne gleda jednostavnu sumu broj linkova prema stranici već svakome linku također daje određenu "težinu" ovisno o popularnosti stranice na kojoj se nalazi te broju linkova na toj stranici. Koristiti ćemo notaciju n_i za broj linkova na stranici s_i. Laički rečeno, link s popularne stranice ima veću težinu nego link s nepopularne stranice. Nadalje, link sa stranice koja sadrži dva linka bolji je od linka sa stranice koja sadrži 10 linkova. Stoga definirajmo rang stranice s_j kao:

$$r_j = \sum_{i \in L_j} \frac{r_i}{n_i}, j = 1, \ldots, n.$$

Prethodno analizi algoritma potrebno je definirati pojam usmjerenog grafa, pošto se isti učestalo koristi za vizualizaciju problema kojeg rješavamo.

Definicija 1. Usmjereni graf je uredeni par (V, E) gdje je V skup vrhova, a E je skup uredenih parova elemenata iz V. Elementi skupa E su usmjereni bridovi. ◁

Pogledajmo sljedeći trivijalan primjer kako bismo shvatili kako algoritam funkcionira: Pretpostavimo da postoje četiri internetske stranice: A, B, C i D koje predstavljaju vrhove usmjerenog grafa prikazanog na slici 2.1. Nadalje, pretpostavimo da su stranice međusobno povezane na sljedeći način:

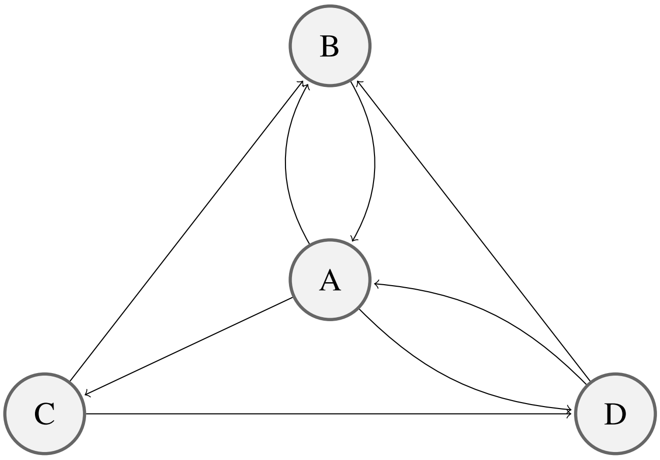
- stranica A sadrži linkove na stranice B, C i D,
- stranica B sadrži link samo na stranicu A,
- stranica C sadrži linkove na stranice B i D te
- stranica D sadrži linkove na stranice A i B.

Linkovi među stranicama prikazani su pomoću usmjerenih bridova koji idu od vrhova korespondirajući stranicama na kojima se linkovi nalaze do u vrhova koji odgovaraju stranicama na koje linkovi vode. Usmjereni graf konstruiran sukladno prethodno opisanim pravilima je priložen ispod.

PageRank se bazira na pretpostavci da će korisnik nasumično prelaziti s jedne internetske stranice na drugu koristeći linkove.
Matrični prikaz ovog grafa konstruiramo pomoću kvadratne matrice:

$$X = [x_{ij}], X \in M_{4x4} \tag{2.1}$$

$$x_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{n_i}, & i \in L_j \\ 0, & i \notin L_j \end{cases} \tag{2.2}$$



Slika 2.1: Usmjeren graf

Na našem konkretnom primjeru dobivamo matricu:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kada bismo zapisali rangove stranica kao

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

dobili bismo jednadžbu:

$$R^t = R^t \times X. \tag{2.3}$$

gdje je R^t transponirana matrica matrice R.

Definicija 2. Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$. Transponirana matrica $B = [b_{ij}] \in M_{mn}$ matrice A je ona za koju vrijedi $b_{ij} = a_{ji}$ za sve $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. Transponiranu matricu matrice A označavamo s A^t. $\triangleleft$

Vidljivo je da se ovdje radi o sustavu od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. On konkretno u ovom slučaju glasi:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= r_2 + \frac{1}{2}r_4 \\
r_2 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}r_4 \\
r_3 &= \frac{1}{3}r_1 \\
r_4 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3
\end{aligned}
$$

Kojemu rješenje glasi za svaki realan broj σ:

$$
R = \begin{bmatrix} \sigma \\ \frac{3}{4}\sigma \\ \frac{1}{4}\sigma \\ \frac{1}{2}\sigma \end{bmatrix}
$$

Najbolja praksa jest izabrati σ takav da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, što u našem primjeru daje:

$$
R = \begin{bmatrix} 0.39 \\ 0.29 \\ 0.13 \\ 0.19 \end{bmatrix}
$$

Sukladno tome zaključujemo da internetske stranice iz našeg primjera možemo rangirati na način da je stranica A najznačajnija, potom B, zatim D te na posljetku stranica C.

Kako bismo bolje razumjeli dobiveno rješenje R pogledajmo sljedeće tri definicije:

Definicija 3. Neka je $A \in M_n$ matrica. Polinom $k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ naziva se karakteristični polinom matrice A.
Nultočke (korijeni karakterističnog polinoma) su svojstvene vrijednosti matrice A. $\triangleleft$

Definicija 4. Vektor $x \neq 0$ koji zadovoljava:

$$Ax = \lambda x$$

naziva se desni svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ, a vektor $y \neq 0$ koji zadovoljava

$$y^t A = \lambda y^t$$

naziva se lijevi svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ. $\triangleleft$

Sada možemo zaključiti da je R^t lijevi svojstveni vektor, odnosno matrica s jednim retkom te n stupaca, matrice X za svojstvenu vrijednost 1. Iz prirode problema je također vidljivo da nam kao rezultat ne odgovara svaki svojstveni vektor već samo pozitivan, tj. svojstveni vektor čije su sve komponente pozitivni brojevi. U poglavlju 3 ovog rada osvrnuti ćemo se na teorem koji dokazuje postojanje takve svojstvene vrijednosti te pripadajućeg pozitivnog svojstvenog vektora.

Kada bismo pak pretpostavili da se korisnik ne koristi isključivo linkovima koji se nalaze na internetskim stranicama, već u određenom postotku $1 - \alpha$ slučajeva u preglednik direktno upisuje adresu neke od stranica, tada bismo jednadžbu 2.3 morali prilagoditi na sljedeći način:

$$R^t = R^t \times Z \tag{2.4}$$

gdje smo matricu Z konstruirali pomoću prethodno korištene matrice X te novo konstruirane matrice koja predstavlja prelaženje s jedne internetske stranice na drugu (ili ponovno istu) slučajnim odabirom umjesto korištenjem linkova:

$$Y = [y_{ij}], Y \in M_n \tag{2.5}$$

$$y_{ij} = \frac{1}{n}, \forall i, j \tag{2.6}$$

Matricu Z definiramo kao:

$$Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y \tag{2.7}$$

Uvedimo u prethodno analizirani primjer pretpostavku da u 50% slučajeva korisnik ne koristi linkove već direktno prelazi sa stranice na stranicu. Tada bismo dobili:

$$\begin{aligned}
Z &= \alpha X + (1 - \alpha)Y \\
&= 0.5 \times \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.5 \times \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 & 3/10 & 3/10 \\ 7/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 1/10 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/10 & 1/10 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Iz čega proizlazi sljedeći sustav jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{10}r_1 + \frac{7}{10}r_2 + \frac{1}{10}r_3 + \frac{2}{5}r_4 \\
r_2 &= \frac{3}{10}r_1 + \frac{1}{10}r_2 + \frac{2}{5}r_3 + \frac{2}{5}r_4 \\
r_3 &= \frac{3}{10}r_1 + \frac{1}{10}r_2 + \frac{1}{10}r_3 + \frac{1}{10}r_4 \\
r_4 &= \frac{3}{10}r_1 + \frac{1}{10}r_2 + \frac{2}{5}r_3 + \frac{1}{10}r_4
\end{aligned}
$$

Rješenje toga sustava glasi:

$$
R = \begin{bmatrix} \sigma \\ \frac{507}{601}\sigma \\ \frac{300}{601}\sigma \\ \frac{390}{601}\sigma \end{bmatrix}
$$

Kada bismo pratili najbolju praksu dobili bismo $\sigma(1 + \frac{507+300+390}{601}) = 1$ odnosno $\sigma = 0.33$ te

$$
R = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.28 \\ 0.17 \\ 0.22 \end{bmatrix}
$$

Sukladno tome zaključujemo da internetske stranice iz našeg prilagođenog primjera možemo rangirati na način da je stranica A najznačajnija, potom B, zatim D te na posljetku stranica C. Vidljivo je da prilagodba algoritma u našem primjeru ne mijenja rezultate rangiranje stranica.

Poglavlje 3

Perron-Frobeniusov teorem

Kako bismo osigurali postojanje jedinstvenog rješenja PageRank algoritma oslanjamo se na Perron-Frobeniusov teorem. Prije iskaza samog teorema potrebno je definirati nekolicinu matematičkih pojmova vezanih uz svojstva matrica koje se primjenjuju u PageRank algoritmu.

3.1 Pozitivne matrice

U ovome poglavlju fokusirati ćemo se na pozitivne matrice te Perronov teorem koji govori o postojanju jedinstvenog rješenja PageRank algoritma gdje koristimo matricu Z koju smo definirali u 2.7 gdje $(1-\alpha) \neq 0$ pošto je time osigurano da je Z pozitivna matrica. Prethodno iskazu i dokazu samoga teorema potrebno je uvesti nekolicinu pojmova iskaza koje ćemo koristiti u samome teoremu te prilikom dokazivanja istoga.

Definicija 5. Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ kažemo da je pozitivna (nenegativna) ako su joj svi elementi pozitivni (nenegativni), odnosno vrijedi $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$) za sve $i = 1, ..., m$ $j = 1, ..., n$. $\triangleleft$

U daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju $A > 0$ ($A \geq 0$) za pozitivne (nenegativne) matrice te notaciju $A > B$ ($A \geq B$) koja je ekvivalentna $A - B > 0$ ($A - B \geq 0$) kada je matrica $A - B$ pozitivna (nenegativna).

Definicija 6. Vektorska norma na vektorskom prostoru V je funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbf{R}$ koja za svaki $x, y \in V$ te skalar α zadovoljava:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ te
- $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$.

◁

Napomenimo posebno sljedeće vektorske norme na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i| \tag{3.1}$$

$$||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{3.2}$$

Definicija 7. Matrična norma na prostoru M_n je funkcija $||\cdot|| : M_n \to \mathbf{R}$ koja za svaki $A, B \in M_n$ te skalar α zadovoljava:

- $||A|| \geq 0$,
- $||A|| = 0 \iff A = 0$,
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ te
- $||\alpha A|| = |\alpha| \, ||A||$.
- $||A \; B|| \leq ||A|| \, ||B||$

◁

Definicija 8. Neka je $||\cdot||$ vektorska norma na n-dimenzionalnom vektorskom prostru V. Prirodna matrična norma inducirana vektorskom normom $||\cdot||$ na prostoru M_n je matrična norma $|||\cdot||| : M_n \to \mathbf{R}$ definirana na sljedeći način:

$$|||A||| = \max_{||x||=1,\; x\in V} ||Ax||.$$

◁

Napomenimo posebno sljedeće prirodne matrične norme inducirane vektorskim normama opisanima u 3.1 i 3.2:

$$|||A|||_1 = \max_{||x||_1=1} ||Ax||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

$$|||A|||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Stoga vidimo da je matrična 1-norma definirana kao maksimalna suma apsolutnih vrijednosti po stupcima matrice A, dok je matrična ∞-norma definirana kao maksimalna suma apsolutnih vrijednosti po redcima matrice A.

Dokaz. Neka je $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ te $a_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i,0} \\ \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n-1} \end{bmatrix}$ za $i = 0, ..., n-1$.

Dokažimo prvo zaključak o matričnoj 1-normi:
Neka je $A \in M_n$ te $A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n - 1 \end{bmatrix}$, gdje su $a_0, ..., a_{n-1}$ te j' takav da $\max_{0 \le j \le n-1} ||a_j||_1 = ||a_{j'}||_1$. Sada imamo:

$$
\begin{aligned}
|||A|||_1 &= \max_{||x||_1=1} ||Ax||_1 \\
&= \max_{||x||_1=1} || \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} ||_1 \\
&= \max_{||x||_1=1} || \sum_{j=0}^{n-1} x_j a_j ||_1 \\
&\le \max_{||x||_1=1} \sum_{j=0}^{n-1} ||x_j a_j||_1 \\
&\le \max_{||x||_1=1} \sum_{j=0}^{n-1} |x_j| ||a_j||_1 \\
&\le \max_{||x||_1=1} \sum_{j=0}^{n-1} |x_j| ||a_{j'}||_1 \\
&= \max_{||x||_1=1} ||a_{j'}||_1 \sum_{j=0}^{n-1} |x_j| \\
&= ||a_{j'}||_1.
\end{aligned}
$$

Neka je e_i n-dimenzionalni vektor koji na i-tom mjestu ima vrijednost 1 dok su mu svi ostali elementi jednaki 0, tada vrijedi:

$$||a_{j'}||_1 = ||Ae_{j'}||_1 \le \max_{||x||_1=1} ||Ax||_1.$$

Stoga imamo

$$||a_{j'}||_1 \leq ||Ax|_1 \leq ||a_{j'}||_1,$$

odnosno,

$$\max_{||x||_1=1} ||Ax||_1 = ||a_{j'}||_1 = \max_{0\leq j\leq n-1} ||a_j||_1.$$

Dokažimo sada da je matrična ∞-norma jednaka maksimumu suma apsolutnih vrijednosti po redcima:

Neka je $A \in M_n$ te $A = \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix}$, sada imamo

$$|||A|||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} || \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix} x||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} || \begin{bmatrix} a_0^t x \\ a_1^t x \\ \vdots \\ a_{n-1}^t x \end{bmatrix} ||_\infty$$

$$= \max_{||x||_\infty=1} (\max_i |a_i^t x|) = \max_{||x||_\infty=1} \max_i |\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{i,p} x_p| \leq \max_{||x||_\infty=1} \max_i \sum_{p=0}^{n-1} |\alpha_{i,p} x_p|$$

$$= \max_{||x||_\infty=1} \max_i \sum_{p=0}^{n-1} |(\alpha_{i,p}||x_p|) \leq \max_{||x||_\infty=1} \max_i \sum_{p=0}^{n-1} (|\alpha_{i,p}| \max_k |x_k|) \leq \max_i \sum_{p=0}^{n-1} (\alpha_{i,p}|||x||_\infty)$$

$$= \max_i \sum_{p=0}^{n-1} |\alpha_{i,p} = \max_i ||a_i||_1.$$

Stoga vrijedi $|||A|||_\infty \leq \max_i ||a_i||_1$.

Neka je k takav da je $\max_i ||a_i||_1 = ||a_k||_1$ te $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$ takav da je

$$a_k^t y = |\alpha_{k,0}| + |\alpha_{k,1}| + ... + |\alpha_{k,n-1}| = ||a_k||_1.$$

Sada imamo:

$$
\begin{aligned}
|||A|||_\infty &= \max_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty \\
&= \max_{||x||_\infty=1} || \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix} x||_\infty \geq || \begin{bmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{n-1}^t \end{bmatrix} y||_\infty \\
&= || \begin{bmatrix} a_0^t y \\ a_1^t y \\ \vdots \\ a_{n-1}^t y \end{bmatrix} ||_\infty \geq |a_k^t y| = a_k^t y = ||a_k||_1 = \max_i ||a_i||_1
\end{aligned}
$$

Stoga imamo

$$\max_i ||a_i||_1 \leq |||A|||_\infty \leq \max_i ||a_i||_1.$$

□

Definicija 9. Neka je $A \in M_n$ matrica i V n-dimenzionalni vektorski prostor. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda se dimenzija svojstvenog podprostora $V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\}$ naziva geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ i označava s $d(\lambda)$. ◁

Definicija 10. Neka je $A \in M_n$ matrica i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je karakteristični polinom oblika $k_A = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda), p(\lambda_0) \neq 0, l \in N$. Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$. ◁

Definicija 11. Spektralni radijus $\rho(A)$ kvadratne matrice A je broj

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

gdje je $\sigma(A)$ skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A. ◁

Lema 12. *Neka je $A \in M_n$ te neka je $|||\cdot|||$ prirodna matrična norma na M_n. Tada vrijedi:*

$$\rho(A) \leq |||A|||$$

Dokaz. Neka je x svojstveni vektor matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ. Konstruirajmo matricu X takvu da joj je svaki stupac jednak vektoru x. Tada očito vrijedi $AX = \lambda X$ iz čega proizlazi:

$$|\lambda| \, |||X||| = |||\lambda X||| = |||AX||| \leq |||A||| \, |||X|||.$$

Iz gornje jednadžbe dobijemo da je $|\lambda| \leq A$, a pošto je λ proizvoljna svojstvena vrijednost vrijedi $\rho(A) \leq |||A|||$. □

Lema 13. *Neka je $A \in M_n$ te $\epsilon > 0$, tada postoji prirodna matrična norma $|||\cdot|||$ takva da:*

$$|||A||| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Dokaz. Jordanova dekompozicija matrice A sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, ..., \lambda_k$ glasi:

$$A = S \begin{bmatrix} J_{n1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{nk}(\lambda_k) \end{bmatrix} S^{-1},$$

gdje je

$$J_{ni}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix},$$

$S \in M_n$ regularna matrica, n_i je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i te je $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$. Nadalje, konstuirajmo matricu:

$$D(\eta) = \begin{bmatrix} D_{n1}(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{n2}(\eta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & D_{nk}(\eta) \end{bmatrix},$$

gdje je

$$D_m(\eta) = \begin{bmatrix} \eta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \eta^m \end{bmatrix}.$$

Tada vrijedi:

$$D(1/\epsilon)S^{-1}ASD(\epsilon) = \begin{bmatrix} B_{n1}(\lambda_1, \epsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{n2}(\lambda_2, \epsilon) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & B_{nk}(\lambda_k, \epsilon) \end{bmatrix},$$

gdje je

$$B_m(\lambda, \epsilon) = \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon & & & \\ & \lambda & \epsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \epsilon \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Definiramo prirodnu matričnu normu $|||\cdot|||$ za svaki $M \in M_n$ kao:

$$|||M||| := |||D(1/\epsilon)S^{-1}ASD(\epsilon)|||_1.$$

Stoga vrijedi,

$$|||A||| = \max_{1\leq l\leq k}(|\lambda_l| + \epsilon) = \rho(A) + \epsilon.$$

□

Lema 14. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz nenegativnih brojeva takvih da*

$$a_{i+j} \leq a_i + a_j, \ \forall i, j \geq 1.$$

Tada postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ *te iznosi* $\inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$.

Dokaz. Neka je $L = \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$. Za svaki $\epsilon > 0$ po definiciji infinuma postoji n takav da $a_n < n(L+\epsilon)$. Neka je $b = \max_{1\leq i\leq n} a_i$. Kada je $m \geq n$, neka je $m = qn + r$ gdje je $0 \leq r < n$. Iz definicije niza vrijedi

$$a_{nq+r} = a_{n+n+\cdots+n+r} \leq a_n + a_n + \cdots + a_n + a_r \leq qa_n + b.$$

Stoga

$$\frac{a_m}{m} \leq \frac{qa_n}{m} + \frac{b}{m} < \frac{qn(L+\epsilon)}{m} + \frac{b}{m} \xrightarrow{m\to\infty} L + \epsilon,$$

pošto $\frac{qn}{m} \xrightarrow{m\to\infty} 1$. □

Teorem 15 (Gelfrandova formula)**.** *Neka je $|||\cdot|||$ prirodna matrična norma na M_n, tada vrijedi:*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}, \ \forall A \in M_n. \tag{3.3}$$

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A takva da $|\lambda| = \rho(A)$ te x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Pošto vrijedi $\lambda x = Ax$ očito vrijedi i $\lambda^n x = A^n x, \forall n \in \mathbf{N}$. Stoga zaključujemo da je λ^n svojstvena vrijednost matrice A^n te $\rho(A)^n$ je njen spektralni radijus.
Za dani $k \geq 0$ po lemi 12 vrijedi:

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq |||A^k|||, \text{ odnosno } \rho(A) \leq |||A^k|||^{1/k}.$$

Iz toga proizlazi $\rho(A) \leq \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}$. Sukladno lemi 14 te nizu $(a_n = \log(|||A^n|||^{1/n})_{n\in\mathbf{N}}$ koji zadovoljava uvjete leme taj limes postoji.
Dokažimo sada da vrijedi i $\rho(A) \geq \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k}$, odnosno da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $K \geq 0$ takav da vrijedi $|||A^k|||^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon, \ \forall k \geq K$. Iz leme 13 znamo da postoji prirodna matrična norma $|||\cdot|||_\alpha$ na M_n takva da vrijedi $|||A|||_\alpha \leq \rho(A)+\epsilon/2$. Nadalje, iz ekvivalentnosti normi na M_n znamo da postoji konstanta $C > 0$ takva da $|||M|||_\alpha \leq C|||M|||,; \ \forall M \in M_n$. Sada, za svaki $k \geq 0$:

$$|||A^k|||_\alpha \leq C|||A^k||| \leq C|||A|||^k \leq C(\rho(A) + \epsilon/2)^k$$
$$|||A^k|||_\alpha^{1/k} \leq C^{1/k}(\rho(A) + \epsilon/2) \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho(A) + \epsilon/2.$$

Iz doljnje jednadžbe zaključujemo da postoji $K \geq 0$ da vrijedi $|||A^k|||^{1/k} \leq \rho(A)+\epsilon, \ \forall k \geq K$ pa je stoga i iskaz teorema dokazan.

□

Lema 16. *Neka je $A > 0 \in M_n$ i neka su θ i ψ dva različita vektora za koje vrijedi $\theta \geq \psi$. Tada vrijedi $A\theta > A\psi$ te postoji $\epsilon > 0$ takav da je $A\theta > (1 + \epsilon)A\psi$.*

Dokaz. Dokažimo prvo da je $A\theta > A\psi$. To vrijedi ako i samo ako je

$$[A\theta - A\psi]_i = [A(\theta - \psi)]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta_j - \psi_j) > 0.$$

Iz pozitivnosti matrice A te pretpostavki o vekotrima θ i ψ pak slijedi:

$$0 < \min_{i,j}(a_{ij}) \sum_{j=1}(\theta_j - \psi_j) < \sum_{j=1} \min_{i,j}(a_{ij})(\theta_j - \psi_j) \leq [A(\theta - \psi)].$$

Time smo dokazali prvi dio iskaza leme.
Drugi dio iskaza leme proizlazi iz činjenice da je vektor $A(\theta - \psi)$ pozitivan, tj. da postoji $\epsilon > 0$ takav da ke vektor $A(\theta - \psi) - \epsilon\psi$ i dalje pozitivan. To povlači $A\theta > (1 + \epsilon)A\psi$. □

Lema 17. *Ako su $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbf{C}$ takvi da $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$, onda postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da je $cz_i > 0, \ i = 1, ..., n$.*

Dokaz. Neka je $z \in \mathbf{C}$ tada za $c = e^{-i\arg(z)}$ vrijedi $cz = |z|$. Dokazali smo da za svaki $z \in \mathbf{C}$ postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da $cz = |z|$. Ako je $z = 0$ za c možemo uzeti bilo koji kompleksni broj. Uzmimo $d = e^{-i\delta}$ takav da vrijedi $d(z_1 + ... + z_n) = |z_1| + ... + |z_n|$, tada imamo

$$\begin{aligned}
|z_1 + ... + z_n| &= Re(|z_1 + ... + z_n|) \\
&= Re(d(z_1 + ... + z_n)) \\
&= Re(d|z_1|) + ... + Re(|z_n|) \\
&\leq |dz_1| + ... + |dz_n| \\
&= |z_1| + ...|z_n|.
\end{aligned}$$

Sukladno pretpostavci leme vrijedi jednakost, odnosno $Re(dz_i) = |dz_i|,\ i = 1, ..., n$. Stoga, za $c = e^{i\delta}$ tvrdnja je zadovoljena. □

Lema 18. *Neka je A pozitivna matrica te neka je ψ vektor i j proizvoljan indeks. Ako vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|\psi_j| = |\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\psi_j|$$

tada postoji kompleksan broj $c \neq 0$ tako da je $c\psi$ nenegativan vektor.

Dokaz. Primjenom leme 17 na vektore $a_{ij}\psi_j$ znamo da postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da $ca_{ij}\psi_j > 0,\ \forall i = 1, ..., n$. Kako je riječ o pozitivnoj matrici imamo nejednakost $c\psi_j > 0$ čime dokazujemo samu lemu. □

Lema 19. *Neka je $A = [a_{ij}]$ nenegativna matrica. Tada je $\rho(A) \leq |||A|||_\infty$ te $\rho(A) \leq |||A|||_1$. Ako su sume po svim redcima matrice A jednake, tada vrijedi $\rho(A) = |||A|||_\infty$. U slučaju da su sve sume po stupcima jednake, tada vrijedi $\rho(A) = |||A|||_1$.*

Dokaz. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A. Tada, po propoziciji 12 znamo da vrijedi

$$|\lambda| \leq \rho(A) \leq |||A|||$$

za svaku prirodnu matričnu normu. U slučaju kada su sume svih redaka jednake znamo da je vektor $[1 \dots 1]^t$ svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = |||A|||_\infty$, što po gore priloženoj nejednadžbi dobijemo iskaz leme.
Kada su pak sume stupaca jednake, dokaz je analogan za matricu A^t. Iz toga proizlazi da je $\lambda = |||A^t|||_\infty = |||A|||_1$, iz čega (uz gore priloženu nejednadžbu) proizlazi iskaz leme. □

Teorem 20. *Neka je $A = [a_{ij}]$ nenegativna matrica. Tada vrijedi:*

$$\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$
$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Dokaz. Kako bi dokaz bio pregledniji uvedimo notaciju $\theta = \min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.
Definirajmo matricu $B = [b_{ij}]$ kao:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \theta = 0, \forall i, j \\ \theta \frac{a_{ij}}{\sum_{l=1}^{n} a_{il}}, \forall i, j \end{cases}$$

Očito vrijedi $A \geq B \geq 0$ te $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \theta$ za sve i od 1 do n. Iz leme 19 proizlazi da je $\rho(B) = \theta$, dok iz teorema 15 proizlazi da vrijedi $\rho(B) = \lim_{k\to\infty} |||B^k|||_1^{1/k} \leq \lim_{k\to\infty} |||A^k|||_1^{1/k} = \rho(A)$ iz čega dobivamo minimum mogućeg spektralnog radijusa dok direktno iz leme 19 dobivamo njegov mogući maksimum.

□

Teorem 21 (Perron)**.** *Neka je $A \in M_n$ pozitivna matrica. Tada vrijedi:*

(i) $\rho(A) > 0$,

(ii) $\rho(A)$ *je svojstvena vrijednost matrice A i njoj pripada pozitivan svojstveni vektor,*

(iii) $\rho(A)$ *je jedinstvena svojstvena vrijednost na kružnici* $|\lambda| = \rho(A)$,

(iv) $\rho(A)$ *ima geometrijsku krajnost 1 te*

(v) $\rho(A)$ *ima algebarsku kratnost 1.*

Dokaz. (i) Primjenom teorema 20 na matricu A dobijemo:

$$0 < \min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A)$$

(ii) Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A takva da $|\lambda| = \rho(A)$. Pretpostavimo da postoji njoj pridružen svojstveni vektor ψ. Neka je Ψ vektor takav da vrijedi $\Psi_j = |\psi_j|, \ \forall\ i = 1, ..., n$ za kojega tada vrijedi:

$$(A\Psi)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\psi_j| \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\psi_j| = |\lambda\psi_i| = \rho\Psi_i$$

Odnosno $A\Psi \geq \rho(A)\Psi$.
U slučaju da u gornjem zapisu vrijedi jednakost dokaz je gotov. Kada vrijedi nejednakost primjenjujemo lemu 16 na nejednadžbu $A^2\Psi > A\rho(A)\Psi$ iz čega proizlazi:

$$\exists\epsilon > 0 \ t.d.\ A^2\Psi > (1+\epsilon)\rho(A)A\Psi.$$

Zato što je matrica A pozitivna, matrica A^m je pozitivna za svaki prirodni broj m. Stoga množenjem obje strane nejednakosti s A^m ne mijenjamo nejednakost:

$$A^{m+2}\Psi \geq (1+\epsilon)\rho(A)A^{m+1}\Psi$$

Pošto to vrijedi za svaki m:

$$\begin{aligned} A^{m+1} &\geq (1+\epsilon)\rho(A)A^m\Psi \\ &\geq (1+\epsilon)^2\rho(A)^2A^{m-1}\Psi \\ &\vdots \\ &\geq (1+\epsilon)^m\rho(A)^mA\Psi \end{aligned}$$

Dobivamo kontradikciju s Gelfandovom formulom $\rho(A) = \lim_{m->\inf} ||A^m||^{1/m} \geq (1+\epsilon)\rho(A)$.
Zaključujemo da vrijedi jednakost vektora $A\Psi = \rho\Psi$. Štoviše, Ψ je svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$ te za njega možemo zaključiti da nije samo nenegativan, već je pozitivan vektor pošto je $A|\psi| = \rho(A)|\psi|$ pozitivan.

(iii) Pretpostavimo da postoji svojstvena vrijednost λ takva da pripada kružnici $|\lambda| = \rho(A)$ no $\lambda \neq \rho(A)$. Neka je Ψ vekor definiran sukladno dijelu (i) dokaza ovog teorema. Iz toga vrijedi $A\Psi = \rho(A)\Psi$, odnosno:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\psi_j| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\psi_j|, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Vidimo da to zadovoljava uvijete leme 18 što znači da postoji kompleksan broj c različit od nule takav da vrijedi $c\psi \geq 0$. Stoga vrijedi:

$$\lambda(c\psi) = c(\lambda\psi) = c(A\psi) = A(c\psi) \geq 0.$$

štp također povlači da su $c\psi$ te λ nenegativni.
Pošto je $\rho(A)$ jedina nenegativna svojstvena vrijednost na kružnici $|\lambda| = \rho(A)$ dolazimo do kontradikcije.

(iv) Neka je ψ pozitivan svojstveni vektor prethodno definirana u ovom dokazu te neka je ψ' linearno nezavisan svojstveni vektor svojstvene vrijednosti $\rho(A)$.
Možemo pretpostaviti da je ψ' realan; u suprotnome bismo mogli razdvojiti realan i imaginarni dio vektora te ih zapisati kao dva zasebna vektora koji bi ponovo bili jedinstveni vektori pošto su A te $\rho(A)$ realni. Jedan od njih mora biti linearno nezavisan o ψ.
Neka je $c > 0$ takav da je $\psi - c\psi'$ nenegativan vektor te je barem jedan njegov element jednak nuli. On ne može biti nulvektor pošto su ψ te ψ' po pretpostavkama linearno nezavisni, no vrijedi:

$$\psi - c\psi' = \frac{A[\psi - c\psi']}{\rho(A)} > 0$$

Kontradikcija proizlazi iz toga da smo odabrali c takav da je barem jedan element jednak nuli. Zaključujemo da su ψ te ψ' linearno zavisni, odnosno $\rho(A)$ ima geometrijsku kratnost 1.

(v) Sukladno prethodnim dijelovima dokaza, neka je ψ desni svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$. Znamo da je on jedinstven i pozitivan.
Neka je π pozitivan lijevi svojstveni vektor od $\rho(A)$. Osiguravamo to primjenom iskaza (i) ovoga teorema za matricu A^t.
Ovaj par vektora omogućuje nam dekompoziciju $\mathbb{R}^n$ na direktnu sumu.
Potprostor $\pi^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi x = 0\}$ je $n-1$ dimenzionalan te mu vektor ψ ne pripada pošto

$$\pi\psi = \sum \pi_j \psi_j > 0.$$

Time smo dokazali da je

$$\mathbb{R}^n = span\{\psi\} \oplus \pi^\perp.$$

Neka je $\{\psi_2, \ldots, \psi_n\}$ baza potprostora $\pi^\perp$ te neka je X matrica takva da:

$$X = \begin{bmatrix} \psi & \psi_2 & \ldots & \psi_n \end{bmatrix}.$$

Tada XAX^{-1} ostavlja invarijatne prostore $X^{-1}span\{\pi\} = span\{e_1\}$ te $X^{-1}\pi^\perp = span\{e_2, \ldots, e_n\}$.
Ova izmjena bazi pretvara A u dijagonalnu blok matricu:

$$X^{-1}AX = \left[\begin{array}{c|c} \rho(A) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Y \end{array}\right]$$

za neku matricu Y.
Neka λ ima algebarsku kratnost veću od 1. Tada ona također mora biti svojstvena vrijednost matrice Y, što povlači činjenicu da Y mora imati svojstveni vektor za $\rho(A)$, što se kosi s iskazom (ii) ovog teorema.
Zaključujemo da $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost 1.

□

Definicija 22. Neka je $A \in M_n$ pozitivna matrica. Jedinstveni vektori ψ i π konstruirani kao u dokazu točke (v) prethodnog teorema nazivaju se desni i lijevi Perronov vektor te za njih vrijedi:

$$A\psi = \rho(A)\psi, \qquad \sum_{i=1}^{n} \psi_i = 1, \qquad \psi_i > 0, \forall i$$

$$\pi^t A = \rho(A)\pi^t, \qquad \sum_{i=1}^{n} \psi_i \pi_i = 1, \qquad \pi_i > 0, \forall i.$$

◁

Iz ovoga je očito da je lijevi Perronov vektor rješenje jednadžbe 2.4 te da on zadovoljava najbolju praksu, tj. da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$.

3.2 Nenegativne matrice

Kako bismo mogli dokazati da postoji jedinstveno rješenje PageRank algoritma u slučajima kada se korisnik koristi isključivo linkovima te ne postoji link između određene dvije stranice, odnosno $\exists x_{ij} = 0$ potrebno je poopćiti Perronov teorem na nenegativne matrice. Prethodno iskazu teorema prođimo kroz leme, propozicije i teoreme koje ćemo koristiti u dokazu Perron-Frobeniusovog teorema:

Lema 23. *Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_n$. Tada su $\lambda_1+1, ..., \lambda_n+1$ svojstvene vrijednosti matrice $I + A$ te vrijedi $\rho(I + A) = \rho(A) + 1$. Ako je A nenegativna matrica tada vrijedi $\rho(I + A) = \rho(A) + 1$.*

Dokaz. Pošto za vektor x koji je svojstveni vektor matrice A s pripadajućom svojstvenom vrijednosti λ vrijedi:

$$(I + A)x = x + Ax = x + \lambda x = x(1 + \lambda)$$

očito vrijedi da je $1 + \lambda$ svojstvena vrijednost matrice $I + A$.
Nadalje, spektralni radijus matrice $I + A$ je $\rho(A) + 1$ jer:

$$\rho(I + A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i + 1| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| + 1 = \rho(A) + 1.$$

Nenegativnost matrice A povlači da su sve njene svojstvene vrijednosti veće od 0, pa je stoga i spektralni radijus veći od 0. Samim time dokazan je zadnji dio leme. □

Propozicija 24. *Ako je $A \in M_n$ nenegativna matrica, tada je $\rho(A)$ svojstvena vrijednost matrice A te postoji nenegativan svojstveni vektor $x \neq 0$ takav da vrijedi $Ax = \rho(A)x$.*

Dokaz. Definiramo niz $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ strogo pozitivnih brojeva koji konvergira prema nuli. Sukladno tome definiramo niz pozitivnih matrica $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ takav da je, za matricu $J_n \in M_n$ koja na svakom mjestu ima jedinicu:

$$B_n = A + b_n J_n.$$

Sukladno Perronovom teoremu raspisujemo:

$$B_n x(b_n) = \rho(B_n) x(b_n), \; x(b_n) > 0, \; \|x(b_n)\|_1 = 1.$$

Niz $x(b_n)$ svojstvenih vektora iz gornje jednadžbe je podskup kompaktnog skupa $\{y : \|y\|_1 = 1\}$, što znači da sadrži konvergentan podniz. Neka je $\lim_{j \to \infty} x(b_{n_j}) = x$ te iz pretpostavki propozicije vrijedi $x \geq 0$ te $\|x\|_1 = 1$. Za odgovarajući podniz $(b_{n_j})_{j \in \mathbf{N}}$ te

vrijedi $(b_{n_j}) > (b_{n_{j+1}}),\ \forall j$ te $\lim_{j\to 0} b_{n_j} = 0$.
Pošto je $B_{k_j} > B_{k_{j+1}}$ vrijedi da je $\rho(B_{k_j}) > \rho(B_{k_{j+1}}) \geq \rho(A)$ vrijedi i $\rho = \lim_{j\to\infty} \rho(B_{k_j}) \geq \rho(A)$. Primijenivši limes na prethodno konstruirani podniz $j \to k_j$ dobijemo $Ax = \rho x$, odakle $\rho \geq \rho(A)$. □

Definicija 25. Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n$ reducibilna ako postoji permutacijska matrica $P \in M_n$ takva da vrijedi:

$$P^T AP = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix},\ B \in M_r,\ D \in M_{n-r},\ 1 \leq r \leq n-1.$$

Kvadratna matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako nije reducibilna. ◁

Definicija 26. Neka je $A \in M_n$. Usmjereni graf $\mathcal{G} = (V, E)$ gdje $V = \{v_1, ..., v_n\}$ te $E = \{\overrightarrow{v_i v_j} : a_{ij} \neq 0\}$ naziva se pripadajući graf matrice A te se označava s $\mathcal{G}(A)$. Put od vrha v_k do vrha v_l je niz usmjerenih bridova $\overrightarrow{v_k v_{r1}}, \overrightarrow{v_{r1} v_{r2}}, ..., \overrightarrow{v_{rj-1} v_l}$ pri čemu je j duljina puta. Graf $\mathcal{G}(A)$ je jako povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem. ◁

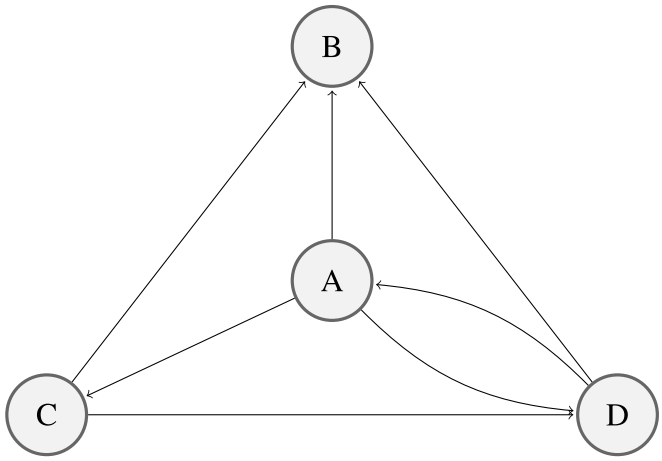
Propozicija 27. *Matrica $A \in M_n$ je ireducibilna ako i samo ako je njen graf $\mathcal{G}(A)$ jako povezan.*

Dokaz. Neka je A' reducibilna matrica te pod definiciji postoji P takav da vrijedi

$$P^t A' P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = A'', B \in M_r, D \in M_n - r, 1 \leq r \leq n-1.$$

Grafovi $\mathcal{G}(A')$ i $\mathcal{G}(A'')$ razlikuju se samo u oznakama čvorova.
Kada bismo tražili put u $\mathcal{G}(A'')$ koji počinje u nekom od čvorova $v''_{r+1}, ..., v''_n$, a završava u nekom od čvorova $v''_1, ..., v''_r$. Na tome putu bi morao postojati brid koji počinje u prvoj te završava u drugoj particiji, što nije moguće pošto su ti elementi matrice A'' jednaki nuli. Stoga zaključujemo da $\mathcal{G}(A')$ nije jako povezan.
Dokažimo sad obrnutu ovisnost. Pretpostavimo da $\mathcal{G}(A)$ nije jako povezan. To bi značilo da postoje dva vrha v_k i v_l između kojih ne postoji put.
Konsturirajno particiju skupa vrhova $\mathcal{V}$ tako da je $\mathcal{V}_l$ skup svih vrhova koji su povezani s vrhom v_l (uključujući i sam vrh v_l) te $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}\,\mathcal{V}_l$. Uvedimo renumeraciju krenuvši od vrhova iz $\mathcal{V}_l$ a potom $\mathcal{V}_k$. Neka je $|\mathcal{V}_l| = r$. Odgovarajućom permutacijom P transformiramo A u $A' = P^t AP$. Kada bi za neki $a'_{ij}, i \in r+1, ..., n, j \in 1, ..., r$ vrijedilo da je različit od nule tada bi se to kosilo s uvjetima konstruirane particije, što znači da je A' reducibilna. □

Ireducibilnost matrice korištene u PageRank algoritmu je ključna za primjenu samog algoritma. Analizirajmo sljedeći primjer kako bismo vidjeli moguće probleme koji se pojavljuju prilikom korištenja reducibilnih matrica u algoritmu:



Slika 3.1: Usmjeren graf ireducibilne matrice X'

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odnosno imamo isti slučaj kao u primjeru iz poglavlja 2 no stranica B ne sadrži linkove niti na jednu drugu stranicu, što je vidljivo iz ispod priloženog grafa. Stoga očito matrica X' nije ireducibilna jer kada bi korisnik linkom došao na stranicu B on bi zaglavio. Analizom pripadajućeg sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{4} r_4 \\ r_2 &= \frac{1}{3} r_1 + \frac{1}{2} r_3 + \frac{1}{2} r_4 \\ r_3 &= \frac{1}{3} r_1 \\ r_4 &= \frac{1}{3} r_1 + \frac{1}{2} r_3 \end{aligned}$$

uviđamo da je jedino rješenje nulvektor. Zaključujemo da u ovom slučaju PageRank algoritam nije primjenjiv.

Propozicija 28. *Nenegativna matrica $A \in M_n$ je ireduciblna ako i samo ako je $(I + A)^{n-1} >$ 0.*

Dokaz. Ekvivalentna tvrdnja gornjoj tvrdnji je: A je reducibilna matrica ako i samo ako matrica $(I + A)^{n-1}$ sadrži barem jednu nulu. Dokažimo tu tvrdnju:
Pretpostavimo da je A nenegativna reducibilna matrica. Tada sukladno definiciji reducibilnosti matrice postoji P takav da vrijedi

$$P^t A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = A', B \in M_r, D \in M_n - r, 1 \le r \le n - 1.$$

Matrice $(A')^k, k \in 2, ..., n - 1$ sadrže nule u donjem lijevom bloku što povlači njihovu reducibilnost.
Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned} P^t(I + A)^{n-1} P &= P^t(I + (n-1)A + \binom{n-1}{2} A^2 + \cdots + A^{n-1})P \\ &= P^t P + (n-1)P^t A P + \binom{n-1}{2} P^t A^2 P + \cdots + P^t A^{n-1} P \\ &= I + (n-1)A' + \binom{n-1}{2}(A')^2 + \cdots + (A')^{n-1} \end{aligned}$$

Pošto svaki element sume ima nulu u donjem lijevom bloku znamo da je matrica $(I+A')^{n-1}$ također reducibilina, odnosno da joj je minimalno jedan od elemenata jednak nuli.
Pretpostavimo pak da za indekse p, q matrica $(I + A)^{n-1}$ na mjestu (p, q) ima nulu. Pošto vrijedi:

$$(I + A)^{n-1} = I + (n-1)A + \binom{n-1}{2}(A')^2 + \cdots + A^{n-1}$$

te znamo da su svi pribrojnici nenegativni, svaki od pribrojnika na mjestu (p, q) mora imati nulu. Pošto je jedan od sumanada I znamo da $p \neq q$. Zaključujemo da ne postoji put u $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ od vrha v_p do vrha v_q jer matrica A^n ima nulu na mjestu (p, q) za svaki $n \in \mathbf{N}$, odnosno graf $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ nije jako povezan. Sukladno propoziciji 27 to povlači reducibilnost matrice A. □

Prijeđimo sada konačno na glavni teorem ove cjeline, pomoću kojega osiguravamo ne samo postojanje rješenja kojega dobijemo pomoću PageRank algoritma, već i njegovu pozitivnost te jedinstvenost.

Teorem 29 (Perron-Frobenius)**.** *Neka je $n \geq 2$ te $A \in M_n$ ireducibilna i nenegativna matrica. Tada je.*

(i) $\rho(A) > 0$,

(ii) $\rho(A)$ *ima algebarsku kratnost 1,*

(iii) postoji jedinstveni desni Perronov vektor te

(iv) poroji jedinstven lijevi Perronov vektor.

Dokaz. (i) Iz ireducibilnost matrice A proizlazi da je svaki njen reda/stupac različit od 0, odnosno vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0, \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0, \quad \forall j$$

Sada iz teorema 20 proizlazi

$$0 < \min_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le \rho(A)$$

$$0 < \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le \rho(A)$$

(ii) Pretpostavimo suprotno, odnosno da $\rho(A)$ ima algebarsku kratnost veću od 1. Tada iz leme 23 proizlazi da svojstvena vrijednost $1 + \rho(A) = \rho(I + A)$ matrice $I + A$ ima algebarsku kratnost veću od 1. Stoga i $(1 + \rho(A))^{n-1} = \rho((I + A)^{n-1})$ ima algebarsku kratnost veću od 1 što je u kontradikciji s iskazom (v) teorema 21 jer je po propoziciji 28 ta matrica pozitivna.

(iii) Propozicija 24 povlači postojanje nenegativnog svojstvenog vektora pridruženog spektralnom radijusu matrice A. Ireducibilnost matrice A po propoziciji 28 daje pozitivnost matrice $(I + A)^{n-1}$ te tada iz leme 23 proizlazi:

$$\begin{aligned}
(I + A)^{n-1} &= (I + (n-1)A + \binom{n-1}{2} A^2 + \cdots + A^{n-1})x \\
&= x + (n-1)Ax + \binom{n-1}{2} A^2 x + \ldots A^{n-1} x \\
&= x + (n-1)\rho(A)x + \binom{n-1}{2} \rho(A)^2 x + \ldots \rho(A)^{n-1} x \\
&= (1 + \rho(A))^{n-1} x \\
&= \rho(I + A)^{n-1} x
\end{aligned}$$

Iz čega vidimo da je x svojstveni vektor matrice $(I + A)^{n-1}$. Po Perronovom teoremu sada znamo da je x jedinstveni pozitivan vektor te postoji α takav da $\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = 1$.

(iv) Dokaz je ekvivalentan dokazu iskaza (*iii*) za matricu A^t.

$\square$

Poglavlje 4

Rangiranje NFL ekipa

U ovom poglavlju analizirati ćemo primjenu PageRank algoritma na sportske ekipe, točnije rangirati ćemo ekipe koje su se natjecale u prošlogodišnju sezonu NFL-a. Rezultate dobivene algoritmom usporediti ćemo sa stvarnim rezultatima utakmica te s prognozama televizijskih kuća koje se bave analizom utakmica kao i s prognozama danih od strane kladionica.

4.1 Prilagodba algoritma

Prije nego što se upustimo u analizu NFL ekipa potrebno je vidjeti način primjene PageRank algoritma s ciljem rangiranja sportskih ekipa u zatvorenom obliku natjecanja. Osvrtom na rad [12], koji se bavi rangiranjem NFL ekipa iz 2005. sezone pomoću PageRank algoritma, vidimo da je algoritam prilagođen tako da je sada $s_1, s_2, ..., s_n$ skup NFL ekipa (u originalnom algoritmu to je bio konačan skup internet stranica) koji je sam po sebi ograničen. Nadalje, skup B_j nije skup stranica koje posjeduju link na stranicu s_j, već su:

$$B_j = \text{skup ekipa koje su izgubile od ekipe j} \subseteq \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

te je L_j skup indeksa ekipa koje su izgubile od ekipe j:

$$L_j = \{i \in \{1, 2 \dots, n\}\} : s_i \in B_j\}.$$

Matrica $X \in M_n$ je također prilagođena tako da reflektira činjenicu da pobijediti ekipu 30 - 0 vrijedi značajno više nego pobijediti ekipu 30 - 29:

$$x_{ij} := \begin{cases} \frac{w_{ij}}{\sum_{i \in L_j} w_{ij}}, & i \in L_j \\ 0, & i \notin L_j \end{cases} \tag{4.1}$$

gdje je w_{ij} gol razlika s kojom je ekipa j pobijedila ekipu i. U slučaju kada ekipe igraju više puta te ista ekipa j pobjedi ekipu i tada je w_{ij} = suma gol razlika tih utakmica, ako pak prvi put pobjedi ekipa i dok drugi put pobjedi ekipa j to interpretiramo kao da stranica i sadrži link na stranicu j te obrnuto. Na primjer imamo pet ekipa: Pittsburg (Pit), Chicago (Chi), Carolina(Car), New Orleans (NO) te Tampa Bay (TB); uzmimo da su tim poretkom one $s_1, s_2, s_3, s_4 tes_5$. Neka su odigrane sljedeće utakmice:

- Pit 30 - 18 Chi,
- Chi 20 - 10 Car,
- Chi 24 - 21 TB,
- Car 30 - 20 TB,
- Car 14 - 34 TB,
- Car 17 -14 NO,
- Car 24 - 27 NO te
- NO 14 - 27 TB.

Tada bi matrica $W = [w_i j] \in M_5$ bila:

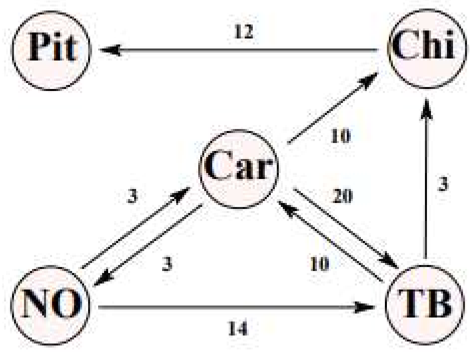
$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dok bi matrica X definirana sukladno 4.1 bila:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10/33 & 0 & 1/11 & 20/33 \\ 0 & 0 & 3/17 & 0 & 14/17 \\ 0 & 3/13 & 10/13 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicija 30. Težinski graf je par $(\mathcal{G}, \omega)$ gdje je $\mathcal{G} = (V, E)$ graf, a $\omega : E \to \mathbf{R}_0^+$ neka funkcija koju nazivamo težinska funkcija. Broj $\omega(e)$ nazivamo težinom grafa. $\triangleleft$

Težinski graf u ovom primjeru izgledao bi:



Slika 4.1: Usmjeren graf za priložene momčadi i odigrane utakmice

4.2 Podaci

NFL je zatvorena liga (ne postoji mogućnost relegacije kao na primjer iz HNL-a u 2. HNL) s 32 tima koja su podijeljena u 2 konferencije: Američku nogometnu konferenciju (engl. *American football conference*, AFC) i Nacionalnu nogometnu konferenciju (engl. *National football conference*, NFC). Svaka konferencija sadrži 16 timova podijeljenih u 4 divizije. Sama podijela, zajedno s kraticama korištenim za timove, prikazana je u slici ispod.

Konferencija	Divizija	Tim	Kratica
AFC	North	Baltimore Ravens	BLT
		Cincinnati Bengals	CIN
		Cleveland Browns	CLV
		Pittsburgh Steelers	PIT
	South	Houston Texans	HST
		Indianapolis Colts	IND
		Jacksonville Jaguars	JAX
		Tennessee Titans	TEN
	East	Buffalo Bills	BUF
		Miami Dolphins	MIA
		New England Patriots	NE
		New York Jets	NYJ
	West	Denver Broncos	DEN
		Kansas City Chiefs	KC
		Las Vegas Raiders	LV
		Los Angeles Chargers	LAC
NFC	North	Chicago Bears	CHI
		Detroit Lions	DET
		Green Bay Packers	GB
		Minnesota Vikings	MIN
	South	Atlanta Falcons	ATL
		Carolina Panthers	CAR
		New Orleans Saints	NO
		Tampa Bay Buccaneers	TB
	East	Dallas Cowboys	DAL
		New York Giants	NYG
		Philadelphia Eagles	PHI
		Washington Football T	WAS
	West	Arizona Cardinals	ARZ
		Los Angeles Rams	LAR
		San Francisco 49ers	SF
		Seattle Seahawks	SEA

Slika 4.2: Podjela NFL ekipa po konferencijam i divizijama

Svaka NFL sezona je također podijeljena na dva dijela: regularna sezona te doigravanje. Regularna sezona traje 18 tjedana tokom kojih svaki tim igra 17 utakmica te ima jedan tjedan odmora. Svaki tim u tih 17 utakmica igra:

- po dvije utakmice (1 na domaćem terenu i 1 u gostima) protiv ostala tri tima u svojoj diviziji (ukupno 6 utakmica),
- utakmicu protiv svakog tima iz predodređene druge divizije (2 na domaćem terenu i 2 u gostima) iz svoje konferencije (ukupno 4 utakmice),
- utakmicu protiv timova koji su prošlu godinu završili na istoj poziciji unutar svojih divizija iz preostale dvije divizije u svojoj konferenciji (ukupno 2 utakmice),
- utakmicu protiv svakog tima iz predodređene druge divizije (2 na domaćem terenu i 2 u gostima) iz druge konferencije (ukupno 4 utakmice) te
- utakmicu protiv tima koji je prošlu sezonu završio na istoj poziciji unutar svoje divizije a nalazi se u drugoj konferenciji (ukupno 1 utakmica).

Radi broja ozljeda tokom utakmica te općenitih fizičkih zahtjeva sporta nije moguće imat dovoljno velik broj utakmica da svaki tim igra protiv svakog drugog tima. Nadalje vidimo da ovakva regularna sezona daje lakše rasporede timovima koji su prošle godine bili lošiji. S matematičke strane, vidljivo je da će ovakav raspored regularne sezone osigurati ireducibilnu matricu koju ćemo koristit prilikom implementacije PageRank algoritma.
Po završetku regularne sezone po 7 timova iz svake konferencije ulazi u doigravanje. Od tih 7 timova prva četiri su pobjednici divizija unutar konferencije te preostala 3 su momčadi s najboljim omjerom iz skupa timova u konferenciji koji nisu osvojili svoju diviziju. Doigravanje ima 4 kola:

1. "Wildcard": Po 3 utakmice u svakoj konferenciji, igraju 2. rangirana momčad s 7., 3. s 6. te 4. s 5., momčad višeg ranga ima domaći teren (najbolje rangirana momčad u svakoj konferenciji preskače ovo kolo),
2. "Divisonal Round": Po 2 utakmice u svakoj konferenciji, 1. rangirana momčad igra s najniže rangiranom momčadi koja je pobjedila u prethodnom kolu te preostale dvije momčadi igraju jedna protiv druge, ponovo momčad višeg ranga ima domaći teren,
3. "Conference Championship": Jedna utakmica po konferenciji, preostale dvije momčadi igraju jedna protiv druge, ponovo momčad višeg ranga ima domaći teren te
4. "SuperBowl": Finale, pobjednici konferencija igraju, nitko nema prednost domaćeg terena pošto se igra na prije sezone određenom stadionu.

S [5] preuzeti su podaci o svih 272 utakmica regularne sezone te 13 utakmica doigravanja.

Tjedan	Pobjednik	Gubitnik	Poeni pobjednik	Poeni gubitnik	Izgubljene lopte pobjednik	Izgubljene lopte gubitnik
1	Tampa Bay Buccaneers	Dallas Cowboys	31	29	4	1
1	Philadelphia Eagles	Atlanta Falcons	32	6	0	0
1	Pittsburgh Steelers	Buffalo Bills	23	16	0	1
1	Carolina Panthers	New York Jets	19	14	1	1
1	Cincinnati Bengals	Minnesota Vikings	27	24	0	1
1	Seattle Seahawks	Indianapolis Colts	28	16	1	1
1	Arizona Cardinals	Tennessee Titans	38	13	1	3
1	San Francisco 49ers	Detroit Lions	41	33	2	1
1	Houston Texans	Jacksonville Jaguars	37	21	0	3
1	Los Angeles Chargers	Washington Football Team	20	16	2	1
1	Kansas City Chiefs	Cleveland Browns	33	29	0	2
1	Denver Broncos	New York Giants	27	13	1	1
1	New Orleans Saints	Green Bay Packers	38	3	0	3
1	Miami Dolphins	New England Patriots	17	16	1	2
1	Los Angeles Rams	Chicago Bears	34	14	0	2
1	Las Vegas Raiders	Baltimore Ravens	33	27	1	2
2	Washington Football Team	New York Giants	30	29	1	0
2	Buffalo Bills	Miami Dolphins	35	0	2	3
2	Carolina Panthers	New Orleans Saints	26	7	1	2
2	Chicago Bears	Cincinnati Bengals	20	17	1	4
2	Cleveland Browns	Houston Texans	31	21	2	2
2	Los Angeles Rams	Indianapolis Colts	27	24	2	2
2	Denver Broncos	Jacksonville Jaguars	23	13	0	2
2	New England Patriots	New York Jets	25	6	0	4
2	San Francisco 49ers	Philadelphia Eagles	17	11	0	0
2	Las Vegas Raiders	Pittsburgh Steelers	26	17	0	1
2	Tampa Bay Buccaneers	Atlanta Falcons	48	25	1	3
2	Arizona Cardinals	Minnesota Vikings	34	33	2	0
2	Dallas Cowboys	Los Angeles Chargers	20	17	1	2
2	Tennessee Titans	Seattle Seahawks	33	30	1	0
2	Baltimore Ravens	Kansas City Chiefs	36	35	2	2
2	Green Bay Packers	Detroit Lions	35	17	0	2
3	Carolina Panthers	Houston Texans	24	9	0	0
3	Atlanta Falcons	New York Giants	17	14	1	1
3	Buffalo Bills	Washington Football Team	43	21	0	3
3	Cleveland Browns	Chicago Bears	26	6	0	0
3	Cincinnati Bengals	Pittsburgh Steelers	24	10	1	2
3	Tennessee Titans	Indianapolis Colts	25	16	3	0
3	Arizona Cardinals	Jacksonville Jaguars	31	19	1	4
3	Baltimore Ravens	Detroit Lions	19	17	1	0
3	Los Angeles Chargers	Kansas City Chiefs	30	24	0	4
3	New Orleans Saints	New England Patriots	28	13	0	3
3	Denver Broncos	New York Jets	26	0	1	2
3	Las Vegas Raiders	Miami Dolphins	31	28	1	0
3	Minnesota Vikings	Seattle Seahawks	30	17	0	0
3	Los Angeles Rams	Tampa Bay Buccaneers	34	24	0	0
3	Green Bay Packers	San Francisco 49ers	30	28	0	2
3	Dallas Cowboys	Philadelphia Eagles	41	21	1	2
4	Cincinnati Bengals	Jacksonville Jaguars	24	21	0	0
4	Washington Football Team	Atlanta Falcons	34	30	0	0
4	Buffalo Bills	Houston Texans	40	0	1	5
4	Dallas Cowboys	Carolina Panthers	36	28	0	2
4	Chicago Bears	Detroit Lions	24	14	1	2
4	Cleveland Browns	Minnesota Vikings	14	7	0	1
4	Indianapolis Colts	Miami Dolphins	27	17	1	2
4	Kansas City Chiefs	Philadelphia Eagles	42	30	1	0
4	New York Giants	New Orleans Saints	27	21	1	1
4	New York Jets	Tennessee Titans	27	24	1	0
4	Arizona Cardinals	Los Angeles Rams	37	20	0	2
4	Seattle Seahawks	San Francisco 49ers	28	21	0	2
4	Baltimore Ravens	Denver Broncos	23	7	0	1
4	Green Bay Packers	Pittsburgh Steelers	27	17	1	2
4	Tampa Bay Buccaneers	New England Patriots	19	17	0	2
4	Los Angeles Chargers	Las Vegas Raiders	28	14	0	1
5	Los Angeles Rams	Seattle Seahawks	26	17	1	2
5	Atlanta Falcons	New York Jets	27	20	2	1
5	Philadelphia Eagles	Carolina Panthers	21	18	2	3
5	Green Bay Packers	Cincinnati Bengals	25	22	1	2
5	Pittsburgh Steelers	Denver Broncos	27	19	1	1
5	Minnesota Vikings	Detroit Lions	19	17	2	2
5	New England Patriots	Houston Texans	25	22	2	1
5	Tennessee Titans	Jacksonville Jaguars	37	19	0	2
5	Tampa Bay Buccaneers	Miami Dolphins	45	17	0	2
5	New Orleans Saints	Washington Football Team	33	22	2	2
5	Chicago Bears	Las Vegas Raiders	20	9	0	1
5	Los Angeles Chargers	Cleveland Browns	47	42	1	0
5	Arizona Cardinals	San Francisco 49ers	17	10	1	1
5	Dallas Cowboys	New York Giants	44	20	2	2
5	Buffalo Bills	Kansas City Chiefs	38	20	0	4
5	Baltimore Ravens	Indianapolis Colts	31	25	1	1
6	Tampa Bay Buccaneers	Philadelphia Eagles	28	22	1	1
6	Jacksonville Jaguars	Miami Dolphins	23	20	1	1
6	Minnesota Vikings	Carolina Panthers	34	28	1	3
6	Green Bay Packers	Chicago Bears	24	14	0	1
6	Cincinnati Bengals	Detroit Lions	34	11	1	1
6	Indianapolis Colts	Houston Texans	31	3	0	3
6	Kansas City Chiefs	Washington Football Team	31	13	3	2
6	Los Angeles Rams	New York Giants	38	11	2	4
6	Baltimore Ravens	Los Angeles Chargers	34	6	2	1
6	Arizona Cardinals	Cleveland Browns	37	14	0	3
6	Dallas Cowboys	New England Patriots	35	29	2	2
6	Las Vegas Raiders	Denver Broncos	34	24	0	4
6	Pittsburgh Steelers	Seattle Seahawks	23	20	1	1
6	Tennessee Titans	Buffalo Bills	34	31	1	1

Slika 4.3: Rezultati utakmica prvih 6 tjedana regularne sezone

Tjedan	Pobjednik	Gubitnik	Poeni pobjednik	Poeni gubitnik	Izgubljene lopte pobjednik	Izgubljene lopte gubitnik
7	Cleveland Browns	Denver Broncos	17	14	0	1
7	Atlanta Falcons	Miami Dolphins	30	28	2	2
7	New York Giants	Carolina Panthers	25	3	0	1
7	Cincinnati Bengals	Baltimore Ravens	41	17	1	0
7	Green Bay Packers	Washington Football Team	24	10	1	2
7	Tennessee Titans	Kansas City Chiefs	27	3	1	3
7	New England Patriots	New York Jets	54	13	0	3
7	Los Angeles Rams	Detroit Lions	28	19	0	2
7	Las Vegas Raiders	Philadelphia Eagles	33	22	1	2
7	Tampa Bay Buccaneers	Chicago Bears	38	3	1	5
7	Arizona Cardinals	Houston Texans	31	5	1	1
7	Indianapolis Colts	San Francisco 49ers	30	18	2	4
7	New Orleans Saints	Seattle Seahawks	13	10	1	0
8	Green Bay Packers	Arizona Cardinals	24	21	0	3
8	Carolina Panthers	Atlanta Falcons	19	13	1	2
8	Buffalo Bills	Miami Dolphins	26	11	0	2
8	San Francisco 49ers	Chicago Bears	33	22	0	1
8	New York Jets	Cincinnati Bengals	34	31	3	1
8	Pittsburgh Steelers	Cleveland Browns	15	10	0	1
8	Tennessee Titans	Indianapolis Colts	34	31	2	3
8	Philadelphia Eagles	Detroit Lions	44	6	0	1
8	Los Angeles Rams	Houston Texans	38	22	0	1
8	Seattle Seahawks	Jacksonville Jaguars	31	7	0	1
8	New England Patriots	Los Angeles Chargers	27	24	1	2
8	New Orleans Saints	Tampa Bay Buccaneers	36	27	0	3
8	Denver Broncos	Washington Football Team	17	10	1	2
8	Dallas Cowboys	Minnesota Vikings	20	16	2	0
8	Kansas City Chiefs	New York Giants	20	17	2	1
9	Indianapolis Colts	New York Jets	45	30	0	2
9	Atlanta Falcons	New Orleans Saints	27	25	0	1
9	Jacksonville Jaguars	Buffalo Bills	9	6	1	3
9	Denver Broncos	Dallas Cowboys	30	16	0	2
9	Baltimore Ravens	Minnesota Vikings	34	31	2	0
9	New England Patriots	Carolina Panthers	24	6	2	3
9	Cleveland Browns	Cincinnati Bengals	41	16	0	3
9	Miami Dolphins	Houston Texans	17	9	5	4
9	New York Giants	Las Vegas Raiders	23	16	1	3
9	Los Angeles Chargers	Philadelphia Eagles	27	24	0	0
9	Arizona Cardinals	San Francisco 49ers	31	17	0	3
9	Kansas City Chiefs	Green Bay Packers	13	7	0	2
9	Tennessee Titans	Los Angeles Rams	28	16	1	2
9	Pittsburgh Steelers	Chicago Bears	29	27	1	2
10	Miami Dolphins	Baltimore Ravens	22	10	0	2
10	Dallas Cowboys	Atlanta Falcons	43	3	1	3
10	Buffalo Bills	New York Jets	45	17	2	5
10	Pittsburgh Steelers	Detroit Lions	16	16	3	0
10	Tennessee Titans	New Orleans Saints	23	21	0	1
10	Washington Football Team	Tampa Bay Buccaneers	29	19	1	2
10	New England Patriots	Cleveland Browns	45	7	0	1
10	Indianapolis Colts	Jacksonville Jaguars	23	17	0	1
10	Minnesota Vikings	Los Angeles Chargers	27	20	1	1
10	Carolina Panthers	Arizona Cardinals	34	10	2	2
10	Philadelphia Eagles	Denver Broncos	30	13	1	1
10	Green Bay Packers	Seattle Seahawks	17	0	1	2
10	Kansas City Chiefs	Las Vegas Raiders	41	14	1	2
10	San Francisco 49ers	Los Angeles Rams	31	10	0	2
11	New England Patriots	Atlanta Falcons	25	0	1	4
11	Indianapolis Colts	Buffalo Bills	41	15	0	4
11	Baltimore Ravens	Chicago Bears	16	13	1	1
11	Houston Texans	Tennessee Titans	22	13	0	5
11	San Francisco 49ers	Jacksonville Jaguars	30	10	0	2
11	Philadelphia Eagles	New Orleans Saints	40	29	1	3
11	Washington Football Team	Carolina Panthers	27	21	1	0
11	Cleveland Browns	Detroit Lions	13	10	2	2
11	Minnesota Vikings	Green Bay Packers	34	31	0	0
11	Miami Dolphins	New York Jets	24	17	1	1
11	Cincinnati Bengals	Las Vegas Raiders	32	13	1	2
11	Kansas City Chiefs	Dallas Cowboys	19	9	2	3
11	Arizona Cardinals	Seattle Seahawks	23	13	0	0
11	Los Angeles Chargers	Pittsburgh Steelers	41	37	1	0
11	Tampa Bay Buccaneers	New York Giants	30	10	1	3
12	Chicago Bears	Detroit Lions	16	14	1	1
12	Las Vegas Raiders	Dallas Cowboys	36	33	0	0
12	Buffalo Bills	New Orleans Saints	31	6	2	1
12	Atlanta Falcons	Jacksonville Jaguars	21	14	1	2
12	Cincinnati Bengals	Pittsburgh Steelers	41	10	1	3
12	New York Jets	Houston Texans	21	14	1	1
12	New York Giants	Philadelphia Eagles	13	7	0	4
12	Miami Dolphins	Carolina Panthers	33	10	1	3
12	Tampa Bay Buccaneers	Indianapolis Colts	38	31	2	5
12	New England Patriots	Tennessee Titans	36	13	0	4
12	Denver Broncos	Los Angeles Chargers	28	13	1	2
12	San Francisco 49ers	Minnesota Vikings	34	26	1	2
12	Green Bay Packers	Los Angeles Rams	36	28	1	3
12	Baltimore Ravens	Cleveland Browns	16	10	4	2
12	Washington Football Team	Seattle Seahawks	17	15	1	1
13	Dallas Cowboys	New Orleans Saints	27	17	1	4
13	Tampa Bay Buccaneers	Atlanta Falcons	30	17	1	1
13	Arizona Cardinals	Chicago Bears	33	22	0	4
13	Los Angeles Chargers	Cincinnati Bengals	41	22	3	4
13	Detroit Lions	Minnesota Vikings	29	27	2	1
13	Philadelphia Eagles	New York Jets	33	18	0	1
13	Indianapolis Colts	Houston Texans	31	0	1	2
13	Miami Dolphins	New York Giants	20	9	0	1
13	Seattle Seahawks	San Francisco 49ers	30	23	3	3
13	Washington Football Team	Las Vegas Raiders	17	15	1	0
13	Los Angeles Rams	Jacksonville Jaguars	37	7	0	2
13	Pittsburgh Steelers	Baltimore Ravens	20	19	0	1
13	Kansas City Chiefs	Denver Broncos	22	9	1	3
13	New England Patriots	Buffalo Bills	14	10	1	1

Slika 4.4: Rezultati utakmica drugih 6 tjedana regularne sezone

Tjedan	Pobjednik	Gubitnik	Poeni pobjednik	Poeni gubitnik	Izgubljene lopte pobjednik	Izgubljene lopte gubitnik
14	Minnesota Vikings	Pittsburgh Steelers	36	28	2	1
14	Atlanta Falcons	Carolina Panthers	29	21	1	3
14	San Francisco 49ers	Cincinnati Bengals	26	23	0	2
14	Cleveland Browns	Baltimore Ravens	24	22	1	2
14	Dallas Cowboys	Washington Football Team	27	20	2	4
14	Seattle Seahawks	Houston Texans	33	13	0	0
14	Tennessee Titans	Jacksonville Jaguars	20	0	0	4
14	Kansas City Chiefs	Las Vegas Raiders	48	9	0	5
14	New Orleans Saints	New York Jets	30	9	0	0
14	Denver Broncos	Detroit Lions	38	10	0	2
14	Los Angeles Chargers	New York Giants	37	21	0	2
14	Tampa Bay Buccaneers	Buffalo Bills	33	27	0	1
14	Green Bay Packers	Chicago Bears	45	30	0	3
14	Los Angeles Rams	Arizona Cardinals	30	23	0	2
15	Kansas City Chiefs	Los Angeles Chargers	34	28	2	2
15	Indianapolis Colts	New England Patriots	27	17	1	2
15	Buffalo Bills	Carolina Panthers	31	14	1	1
15	Detroit Lions	Arizona Cardinals	30	12	1	1
15	Dallas Cowboys	New York Giants	21	6	1	4
15	Green Bay Packers	Baltimore Ravens	31	30	0	0
15	Houston Texans	Jacksonville Jaguars	30	16	1	0
15	Miami Dolphins	New York Jets	31	24	3	1
15	Pittsburgh Steelers	Tennessee Titans	19	13	0	4
15	San Francisco 49ers	Atlanta Falcons	31	13	1	1
15	Cincinnati Bengals	Denver Broncos	15	10	0	1
15	New Orleans Saints	Tampa Bay Buccaneers	9	0	0	2
15	Las Vegas Raiders	Cleveland Browns	16	14	2	0
15	Minnesota Vikings	Chicago Bears	17	9	1	3
15	Philadelphia Eagles	Washington Football Team	27	17	2	0
15	Los Angeles Rams	Seattle Seahawks	20	10	1	1
16	Tennessee Titans	San Francisco 49ers	20	17	0	2
16	Green Bay Packers	Cleveland Browns	24	22	0	4
16	Indianapolis Colts	Arizona Cardinals	22	16	0	0
16	Atlanta Falcons	Detroit Lions	20	16	1	1
16	Buffalo Bills	New England Patriots	33	21	0	2
16	Tampa Bay Buccaneers	Carolina Panthers	32	6	0	1
16	Cincinnati Bengals	Baltimore Ravens	41	21	0	1
16	Houston Texans	Los Angeles Chargers	41	29	0	3
16	New York Jets	Jacksonville Jaguars	26	21	0	1
16	Los Angeles Rams	Minnesota Vikings	30	23	3	1
16	Philadelphia Eagles	New York Giants	34	10	0	2
16	Chicago Bears	Seattle Seahawks	25	24	0	0
16	Las Vegas Raiders	Denver Broncos	17	13	3	0
16	Kansas City Chiefs	Pittsburgh Steelers	36	10	0	3
16	Dallas Cowboys	Washington Football Team	56	14	0	2
16	Miami Dolphins	New Orleans Saints	20	3	1	2
17	Buffalo Bills	Atlanta Falcons	29	15	3	1
17	New Orleans Saints	Carolina Panthers	18	10	0	2
17	Chicago Bears	New York Giants	29	3	2	4
17	Cincinnati Bengals	Kansas City Chiefs	34	31	0	0
17	Las Vegas Raiders	Indianapolis Colts	23	20	2	0
17	Arizona Cardinals	Dallas Cowboys	25	22	0	1
17	New England Patriots	Jacksonville Jaguars	50	10	0	3
17	Tennessee Titans	Miami Dolphins	34	3	0	2
17	Tampa Bay Buccaneers	New York Jets	28	24	1	1
17	Philadelphia Eagles	Washington Football Team	20	16	0	1
17	Los Angeles Chargers	Denver Broncos	34	13	0	1
17	San Francisco 49ers	Houston Texans	23	7	1	1
17	Seattle Seahawks	Detroit Lions	51	29	0	3
17	Los Angeles Rams	Baltimore Ravens	20	19	3	2
17	Green Bay Packers	Minnesota Vikings	37	10	0	0
17	Pittsburgh Steelers	Cleveland Browns	26	14	1	2
18	Kansas City Chiefs	Denver Broncos	28	24	0	1
18	Dallas Cowboys	Philadelphia Eagles	51	26	0	1
18	New Orleans Saints	Atlanta Falcons	30	20	0	3
18	Buffalo Bills	New York Jets	27	10	0	0
18	Tampa Bay Buccaneers	Carolina Panthers	41	17	0	2
18	Minnesota Vikings	Chicago Bears	31	17	0	2
18	Cleveland Browns	Cincinnati Bengals	21	16	2	0
18	Jacksonville Jaguars	Indianapolis Colts	26	11	0	2
18	Detroit Lions	Green Bay Packers	37	30	0	3
18	Tennessee Titans	Houston Texans	28	25	0	0
18	Miami Dolphins	New England Patriots	33	24	0	3
18	Washington Football Team	New York Giants	22	7	0	3
18	Pittsburgh Steelers	Baltimore Ravens	16	13	1	3
18	Seattle Seahawks	Arizona Cardinals	38	30	2	1
18	San Francisco 49ers	Los Angeles Rams	27	24	2	2
18	Las Vegas Raiders	Los Angeles Chargers	35	32	0	2
WildCard	Cincinnati Bengals	Las Vegas Raiders	26	19	0	2
WildCard	Buffalo Bills	New England Patriots	47	17	0	2
WildCard	Tampa Bay Buccaneers	Philadelphia Eagles	31	15	0	3
WildCard	San Francisco 49ers	Dallas Cowboys	23	17	1	1
WildCard	Kansas City Chiefs	Pittsburgh Steelers	42	21	2	1
WildCard	Los Angeles Rams	Arizona Cardinals	34	11	0	2
Division	Cincinnati Bengals	Tennessee Titans	19	16	1	3
Division	San Francisco 49ers	Green Bay Packers	13	10	1	1
Division	Los Angeles Rams	Tampa Bay Buccaneers	30	27	4	2
Division	Kansas City Chiefs	Buffalo Bills	42	36	0	0
ConfChamp	Cincinnati Bengals	Kansas City Chiefs	27	24	1	2
ConfChamp	Los Angeles Rams	San Francisco 49ers	20	17	1	1
SuperBowl	Los Angeles Rams	Cincinnati Bengals	23	20	2	0

Slika 4.5: Rezultati utakmica ostatka regularne sezone te doigravanja

Nadalje, preuzeli smo podatke o točnosti prognoza pobjednika od strane kladionica [6], ESPN-ovih stručnjaka [1] te službenih NFL ”power rankingsa” [3] koji rangiraju ekipe na tjednoj bazi po snazi od 1. do 32. U dolje priloženoj tablici vidljivo je koliku su točnost predviđanja pobjednika imali svaka od stavki kroz tjedne 2021. sezone. Predviđanja ”power rankings” kalkulirali smo tako da smo pretpostavili da će bolje rangirana momčad pobijediti lošije rangiranu momčad.

Tjedan	ESPN	PFF	NFL.com
1	54%	44%	56%
2	62%	69%	63%
3	67%	56%	50%
4	60%	69%	63%
5	72%	75%	69%
6	64%	71%	71%
7	63%	69%	69%
8	58%	47%	67%
9	55%	50%	50%
10	44%	54%	43%
11	64%	67%	53%
12	53%	57%	53%
13	64%	57%	79%
14	72%	86%	71%
15	65%	69%	56%
16	66%	67%	63%
17	79%	81%	75%
18	59%	56%	50%
WildCard	77%	62%	83%
Division	41%	62%	25%
ConfChamp	38%	62%	0%
SuperBowl	63%	62%	100%
Total	62%	65%	61%

Slika 4.6: Postotak točnosti predviđanja pobjednika

4.3 Rezultati

PageRank metodom, nakon svakog tjedna odigranih utakmica, rangirati ćemo sve 32 ekipe u NFL-u. Potom ćemo, kako bismo testirali točnost našeg rangiranja prognozirati utakmice za naredni tjedan na način da ćemo pretpostaviti da ekipa višeg ranga pobjeđuje onu nižeg ranga.

Sukladno metodi opisanoj u poglavlju 4.1 konstruirali smo matrice $W = [w_{ij}] \in M_{32}$ ($n = 32$ je ukupan broj timova u ligi) za 3 različite funkcije w:

1. w_{ij} := broj pobjeda tima j protiv tima i (u daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju w = pobjede),
2. w_{ij} := gol razlika prilikom pobjede tima j protiv tima (u daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju w = razlika) i te
3. w_{ij} := broj oduzetih lopti prilikom pobjede tima j protiv tima i (u daljnjem tekstu koristiti ćemo notaciju w = oduzete).

U slučaju kada timova igraju jedan protiv drugoga te isti tim pobjedi više puta w_{ij} postaje suma pobjeda/gol razlika u pobjedama/oduzetih lopti. Nadalje, konstruiramo matrice $X = [x_{ij}] \in M_{32}$ sukladno jednadžbi 4.1. Kako bismo uzeli u obzir i slučajnost rezultata, odnosno da postoji mogućnost da bilo koji od timova na određen dan bude bolji od bilo kojeg drugog tima potrebno je konstruirati i matricu Y definiranu sukladno 2.5. Sada imamo matricu Z koju smo opisali jednadžbom $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$ gdje $0 < (1-\alpha) < 1$ pretstavlja mogućnost slučajnog rezultata utakmice bilo koja dva tima.
Pomoću ispod priložene funkcije PageRank napravljene u R programskom jeziku pronašli smo rangiramo sve ekipa od najbolje do nagore kroz svih 18 tjedana regularne sezone te doigravanje. Funkcija kao ulazne parametre uzima α te broj "metoda" koji diktira kojoj od funkcija opisanih u 4.3 je w_{ij} jednak.
Funkcija pomoću for petlje prolazi iz podatak o svih utakmicama (set podataka df) filtrira skup onih odigratih za određen tjedan (set podataka *tmp*). Nadalje, za svaki od timova u NFL-u, koji su abecedno poredani u vektoru *ekipe* provjerava da li je izgubio u tom tjednu. U slučaju da je taj tim doista izgubio (pretpostavimo da se radi o timu i-tom mjestu te je izgubio od tima koji je j-tom u vektoru *ekipe*) tada x_{ij} uvećavamo za gol razliku utakmice, broj oduzetih lopti ili jednostavno za 1 ovisno o odabranoj metodi. Kako te kalkulacije ne bismo morali raditi svaki put od početka konstruirana je pomoćna matrica X_2 koja zadovoljava uvjete iz 2.1. Konstruiramo matricu $Z = \alpha X_2 + (1-\alpha)Y$ te pomoću funkcije eigen() nalazimo lijevi Perronov vektor matrice Z. Pomoću njega rangiramo sve ekipe u NFL-u od najbolje do najgore. Taj poredak zatim spremamo u tablicu $final$ koja sadrži sva rangiranja kroz sezonu. Konačni rezultat funkcije je vektor $predictions = [p_1 \dots p_{21}] \in R^{21}$ s postocima točnosti prognoza utakmica po tjednima (izostavljen je prvi tjedan pošto nismo mogli

smisleno primijeniti PageRank algoritam prije nego je ijedna utakmica uopće odigrana), gdje je

$$p_k := \frac{correct}{gp} = \frac{\text{broj točno prognoziranih utakmica u tjednu k}}{\text{broj odigranih utakmica u tjednu k}}.$$

Utakmicu odigranu u tjednu k smatramo točno prognoziranom ako je pobjednik bio bolje rangiran od gubitnika po završetku tjedna $k-1$ (vidljivo u linijama koda 57 do 59).

```
2
3   PageRank<-function(alfa, metoda)
4   {
5     X=matrix(0, 32, 32)
6     Y=matrix(1/32, 32, 32)
7
8
9     for (tj in 1:22)
10    {
11      tmp<-df[df$Week==tj, ]
12      for(i in 1:32)
13      {
14        utakmica<-tmp[tmp$'Loser'==ekipe[i],]
15        w<-numeric(4)
16        w[1]<-1
17        w[2]<-sum(utakmica$'Pts diff')
18        w[3]<-sum(utakmica$'TOL')
19        j<-match(utakmica$Winner, ekipe)
20        X[i,j]<-X[i,j]+w[metoda]
21      }
22
23      X2<-X
24
25      for(k in 1:32)
26      {
27        if(sum(X2[k,])>0)X2[k,]<-X2[k,]/sum(X2[k,])
28      }
29
30      Z<-alfa*X2+(1-alfa)*Y
31      help<-eigen(t(Z))
32
33      rang<-Re(unlist(help$vectors[,1]))
34
35      if(sum(rang)<0)rang<-(-1)*rang
36
37      test<-as.numeric(rang)
38      poredak<-data.frame(rang, ekipe)
39      poredak<-poredak[order(poredak$rang, decreasing = TRUE),]
40
41      final<-cbind(final,poredak$ekipe)
42
43
44    }
45
46    final<-final[,-1]
47
48    predictions<-numeric(21)
49
50    for(tj in 2:22)
51    {
52      tmp<-df[df$Week==tj, ]
53      correct<-0
54      gp<-dim(df[df$Week==tj, ])[1]
55      for(gm in 1:gp)
56      {
57        w<-match(tmp[gm,]$Winner, final[,tj-1])
58        l<-match(tmp[gm,]$Loser, final[,tj-1])
59        if(w < l) correct<-correct+1
60      }
61      predictions[tj-1]<-correct/gp
62    }
63
64    return(predictions)
65  }
```

Slika 4.7: Kod PageRank funkcije

Kako bismo bolje razumjeli sam kod pogledajmo kako smo dobili predikcije za 18. tjedan (posljednji tjedan regularne sezone) za $w = pobjede$ te $\alpha = 0.75$. Sukladno rezultatima prvih 17 tjedana sezone konstruirana je matrica $X \in M_{32}$ priložena ispod gdje je suma retka i jednaka broju izgubljenih utakmica momčadi i, dok je suma stupca j jednaka broju pobjeda momčadi j. Kao notaciju redaka i stupaca koristili smo kratice priložene u 4.2.

	ARZ	ATL	BLT	BUF	CAR	CHI	CIN	CLV	DAL	DEN	DET	GB	HST	IND	JAX	KC	LV	LAC	LAR	MIA	MIN	NE	NO	NYG	NYJ	PHI	PIT	SF	SEA	TB	TEN	WAS
ARZ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ATL	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	2	0	1
BLT	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
BUF	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
CAR	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
CHI	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
CIN	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
CLV	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
DAL	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
DEN	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
DET	0	1	1	0	0	2	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
GB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
HST	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
IND	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0
JAX	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	2	0
KC	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
LV	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
LAC	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
LAR	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
MIA	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
MIN	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
NE	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
NO	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
NYG	0	1	0	0	0	1	0	0	2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
NYJ	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	2	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
PHI	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
PIT	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SF	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0
SEA	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
TB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
TEN	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
WAS	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0

Slika 4.8: Matrica X za $w = pobjede$, $\alpha = 0.75$ te $tjedan = 17$

Pomoću matrice X formiramo matricu $X_2 = [\chi_{ij}]$ gdje

$$\chi_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{32} x_{ij}}.$$

Nadalje pomoću matrice X_2 te na početku definirane matrice

$$Y = [y_{ij}] \in M_{32}$$
$$y_{ij} = \frac{1}{32}, \ \forall i, j$$

konstruiramo matricu

$$Z = \alpha X_2 + (1 - \alpha)Y = 0.75X_2 + 0.25Y.$$

	ARZ	ATL	BLT	BUF	CAR	CHI	CIN	CLV	DAL	DEN	DET	GB	HST	IND	JAX	KC	LV	LAC	LAR	MIA	MIN	NE	NO	NYG	NYJ	PHI	PIT	SF	SEA	TB	TEN	WAS
ARZ	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,16	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
ATL	0,01	0,01	0,01	0,09	0,09	0,01	0,01	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,09	0,01	0,09	0,01	0,17	0,01	0,09
BLT	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,20	0,10	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01	0,10	0,10	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
BUF	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,13	0,13	0,01
CAR	0,01	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,08
CHI	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01
CIN	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01
CLV	0,09	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,09	0,09	0,09	0,01	0,01	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,17	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
DAL	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01
DEN	0,01	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,09	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,09	0,17	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,09	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
DET	0,01	0,06	0,06	0,01	0,01	0,11	0,06	0,06	0,01	0,06	0,01	0,06	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,06	0,01	0,06	0,01	0,01	0,01	0,01	0,06	0,06	0,06	0,06	0,01	0,01	0,01
GB	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,26	0,01	0,01	0,01	0,01	0,26	0,01	0,26	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
HST	0,07	0,01	0,01	0,07	0,07	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,07	0,07	0,01	0,07	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01	0,07	0,07	0,01	0,01	0,01
IND	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,11	0,22	0,01
JAX	0,06	0,06	0,01	0,01	0,01	0,01	0,06	0,01	0,01	0,06	0,01	0,01	0,11	0,06	0,01	0,01	0,01	0,01	0,06	0,01	0,01	0,06	0,01	0,01	0,06	0,01	0,01	0,06	0,06	0,01	0,11	0,01
KC	0,01	0,01	0,16	0,16	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01
LV	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,22	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11
LAC	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,11	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
LAR	0,20	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,20	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,20	0,01	0,01	0,20	0,01
MIA	0,01	0,10	0,01	0,20	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,10	0,10	0,01	0,10	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,10	0,10	0,01
MIN	0,09	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,09	0,09	0,09	0,01	0,09	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,09	0,01	0,01	0,01	0,01
NE	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,01
NO	0,01	0,10	0,01	0,10	0,10	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01	0,10	0,01	0,01	0,01	0,01	0,10	0,01
NYG	0,01	0,07	0,01	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01	0,13	0,07	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,07	0,01	0,07	0,07	0,07	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01	0,01	0,07	0,01	0,07
NYJ	0,01	0,07	0,01	0,07	0,07	0,01	0,01	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,13	0,01	0,13	0,07	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01	0,01	0,07	0,01	0,01
PHI	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,11	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,11	0,01	0,11	0,01	0,01
PIT	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,22	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,11	0,11	0,11	0,01	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
SF	0,22	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,11	0,01	0,11	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,22	0,01	0,11	0,01
SEA	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,08	0,08
TB	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,20	0,01	0,01	0,01	0,38	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,20
TEN	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,16	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
WAS	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,16	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,08	0,01	0,01	0,01	0,01	0,08	0,01	0,01	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Slika 4.9: Matrica Z za $w = pobjede$, $\alpha = 0.75$ te $tjedan = 17$

Očito je matrica Z ireducibilna pozitivna matrica, stoga zadovoljava uvjete teorema 29, što osigurava postojanje lijevog Perronovog vektora. Nadalje, teorem 20 nam osigurava da je $\rho(A)$ upravo 1 pošto je suma svakog retka u matrici Z upravo 1, što nam potvrđuju i dobivene svojstvene vrijednosti matrice Z.

λ	|λ|
1,00+0i	1,00
0,31+0i	0,31
0,1+0,29i	0,30
0,1-0,29i	0,30
0,29+0,04i	0,29
0,29-0,04i	0,29
-0,18+0,22i	0,29
0,18-0,22i	0,29
0+0,26i	0,26
0-0,26i	0,26
-0,02+0,24i	0,24
-0,02-0,24i	0,24
-0,08+0,20i	0,21
-0,08-0,20i	0,21
0,01+0,20i	0,20
0,01+0,20i	0,20
-0,05+0,15i	0,16
-0,05-0,15i	0,16
-0,14+0,06i	0,15
-0,14-0,06i	0,15
-0,07+0,12i	0,14
0,07-0,12i	0,14
0,13+0i	0,13
-0,11+0i	0,11
-0,08+0,07i	0,11
-0,08-0,07	0,11
-0,04+0,07i	0,08
-0,04-0,07i	0,08
-0,01+0,08i	0,08
-0,01-0,08i	0,08
-0,06+0,03i	0,06
-0,06+0,03i	0,06

Slika 4.10: Svojstvene vrijednosti matrice Z s njihovim apsolutnim vrijednostima

Pogledajmo također i svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1. Pridružimo njemu kratice korespondirajućih ekipa, odnosno naziv ekipe čija je kratica ime i-tog retka.

Svojstveni vektor	Ekipa
0,24	Arizona Cardinals
0,11	Atlanta Falcons
0,17	Baltimore Ravens
0,20	Buffalo Bills
0,13	Carolina Panthers
0,11	Chicago Bears
0,21	Cincinnati Bengals
0,13	Cleveland Browns
0,19	Dallas Cowboys
0,13	Denver Broncos
0,09	Detroit Lions
0,27	Green Bay Packers
0,11	Houston Texans
0,18	Indianapolis Colts
0,08	Jacksonville Jaguars
0,27	Kansas City Chiefs
0,18	Las Vegas Raiders
0,20	Los Angeles Chargers
0,22	Los Angeles Rams
0,14	Miami Dolphins
0,18	Minnesota Vikings
0,18	New England Patriots
0,25	New Orleans Saints
0,11	New York Giants
0,12	New York Jets
0,13	Philadelphia Eagles
0,18	Pittsburgh Steelers
0,17	San Francisco 49ers
0,11	Seattle Seahawks
0,21	Tampa Bay Buccaneers
0,26	Tennessee Titans
0,14	Washington Football Team

Slika 4.11: Svojstveni vektor za $\lambda = 1$

Gore prikazani vektor rješenje je jednadžbe $R^t = R^t \times Z$, iz čega zaključujemo da je vrijednost u prvoj koloni te i-tom retku gore prikazane tablice rang ekipe u drugoj koloni te i-tom retku. Skaliramo vektor R tako da ispunjava najbolju praksu da je suma njegovih elemenata jednaka 1 te poredajmo rangove od najvećeg do najmanjeg.

Rang	Ekipa
0,05	Kansas City Chiefs
0,05	Green Bay Packers
0,05	Tennessee Titans
0,05	New Orleans Saints
0,04	Arizona Cardinals
0,04	Los Angeles Rams
0,04	Tampa Bay Buccaneers
0,04	Cincinnati Bengals
0,04	Los Angeles Chargers
0,04	Buffalo Bills
0,04	Dallas Cowboys
0,03	Las Vegas Raiders
0,03	Indianapolis Colts
0,03	New England Patriots
0,03	Minnesota Vikings
0,03	Pittsburgh Steelers
0,03	Baltimore Ravens
0,03	San Francisco 49ers
0,03	Miami Dolphins
0,03	Washington Football Team
0,02	Philadelphia Eagles
0,02	Cleveland Browns
0,02	Denver Broncos
0,02	Carolina Panthers
0,02	New York Jets
0,02	Seattle Seahawks
0,02	Chicago Bears
0,02	Houston Texans
0,02	Atlanta Falcons
0,02	New York Giants
0,02	Detroit Lions
0,01	Jacksonville Jaguars

Slika 4.12: Ekipe i njihovi rangovi

Pomoću gore priloženog rangiranja ekipa nakon 17. tjedna regularne sezone predviđamo rezultate 18. tjedna. Pretpostavljamo da će ekipa koja je bolje rangirana, pa sukladno tome i više pozicionirana na tablici, pobijediti ekipu koja je lošije rangirana. Usporedbom sa stvarnim rezultatima utakmica odigranima u 18. tjednu dobijemo točnost naših predikcija.

Tjedan	Pobjednik	Gubitnik	Rank pobjednika	Rank gubitnika	Rang pobjednika > Rang gubitnika
18	Kansas City Chiefs	Denver Broncos	0,050	0,023	TRUE
18	Dallas Cowboys	Philadelphia Eagles	0,035	0,025	TRUE
18	New Orleans Saints	Atlanta Falcons	0,046	0,020	TRUE
18	Buffalo Bills	New York Jets	0,037	0,022	TRUE
18	Tampa Bay Buccaneers	Carolina Panthers	0,040	0,023	TRUE
18	Minnesota Vikings	Chicago Bears	0,033	0,021	TRUE
18	Cleveland Browns	Cincinnati Bengals	0,024	0,038	FALSE
18	Jacksonville Jaguars	Indianapolis Colts	0,015	0,034	FALSE
18	Detroit Lions	Green Bay Packers	0,017	0,049	FALSE
18	Tennessee Titans	Houston Texans	0,048	0,021	TRUE
18	Miami Dolphins	New England Patriots	0,026	0,034	FALSE
18	Washington Football Team	New York Giants	0,025	0,020	TRUE
18	Pittsburgh Steelers	Baltimore Ravens	0,033	0,032	TRUE
18	Seattle Seahawks	Arizona Cardinals	0,021	0,045	FALSE
18	San Francisco 49ers	Los Angeles Rams	0,032	0,040	FALSE
18	Las Vegas Raiders	Los Angeles Chargers	0,034	0,037	FALSE

Slika 4.13: Točnosti predikcija utakmica odigranih u 18. tjednu

Vidljivo je da smo pomoću PageRank algoritma s ulaznim parametrima $\alpha = 0.75$ te $w = pobjede$ na temelju svih odigranih utakmica u prvih 17 tjedana uspješno prognozirali pobjednike u 9 od 16 (56.25%) odigranih utakmica u 18. tjednu NFL sezone.
U dolje priloženoj tablici možemo vidjeti postotak točno prognoziranih utakmica za cijelu sezonu ovisno o metodama w opisanim u 4.3 te vrijednostima $\alpha = 0.5, 0.75, 0.9$ te 0.95.

	w = pobjede	w = razlika	w = oduzete
α = 0.5	67.75%	67.75%	66.26%
α = 0.75	67.38%	67.38%	66.63%
α = 0.9	68.50%	68.12%	68.87%
α = 0.95	67.38%	67.00%	67.38%

Slika 4.14: Sveukupna točnost PageRank predikicija ovisno o parametrima

Vidljivo je da su svi rezultati PageRank algoritma za definirane funkcije w te vrijednosti α relativno podjednaki, odnosno da nema velikih fluktuacija među rezultatima koji variraju između 66% i 69% točno prognoziranih utakmica. Zaključujemo su najtočnije predikcije, neovisno o funkciji w, za $\alpha = 0.9$. S druge strane od promatranih funkcija w ne postoji ona koja je najtočnija u predikcijama rezultata za svaki promatrani α. Najtočnija metoda je primjenjivala funkciju $w = oduzete$ te $\alpha = 0.9$. Usporedimo sada njene rezultate s predikcijama kladionica, ESPN-ovih stručnjaka te službenih NFL "power rankingsa".

Slika 4.15: Usporedba rezultata metoda predikcija po tjednima

Tjedan	w = oduzete α = 0.9	ESPN	PFF	NFL.com
2	88%	62%	69%	63%
3	81%	67%	56%	50%
4	81%	60%	69%	63%
5	75%	72%	75%	69%
6	64%	64%	71%	71%
7	85%	63%	69%	69%
8	80%	58%	47%	67%
9	29%	55%	50%	50%
10	43%	44%	54%	43%
11	67%	64%	67%	53%
12	67%	53%	57%	53%
13	57%	64%	57%	79%
14	71%	72%	86%	71%
15	75%	65%	69%	56%
16	69%	66%	67%	63%
17	69%	79%	81%	75%
18	63%	59%	56%	50%
WildCard	50%	77%	62%	83%
Division	75%	41%	62%	25%
ConfChamp	100%	38%	62%	0%
SuperBowl	100%	63%	62%	100%
Total	69%	62%	65%	61%

Slika 4.16: Tablični prikaz rezultata metoda predikcija po tjednima

Zaključujemo da je PageRank algoritam najbolja od promatranih metoda predikcije NFL utakmica za priložen set podataka.

Bibliografija

[1] *ESPN prognoze eksperata*, https://www.espn.com/nfl/picks, (2022.).

[2] *How Much Money Do Americans Bet On Sports?*, https://www.legalsportsbetting.com/how-much-money-do-americans-bet-on-sports/, (2022.).

[3] *NFL Power Rankings*, https://www.nfl.com/news/nfl-power-rankings-super-bowl-2021-nfl-season, (2022.).

[4] *PageRank*, https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank, (2022.).

[5] *Pro Football Reference*, https://www.pro-football-reference.com/years/2021/games.htm, (2022).

[6] *Sports odds history*, https://www.sportsoddshistory.com/nfl-game-season/?y=2021#30, (2022.).

[7] *TV rights*, https://sports.yahoo.com/nfl-finalizes-110-billion-television-right html?guccounter=1&guce_referrer=aHR0cHM6Ly93d3cuZ29vZ2xlLmNvbS8&guce_referrer_sig=AQAAAJCV_Q3zUixYS_eYha2Qajs02jF0oxkmNtjqm6YtC4EveKfTMFAXr V_GYzQ-htzTVhSjQccs19udaUn8XiTN4avtjifLZBWwIp-yafiblGkfmb1EyunWgi5, (2021.).

[8] Damir Bakić, *Linearna algebra i primjene*, Školska knjiga, 2021.

[9] Jerika Baldin, *The Perron-Frobenius Theorem and its Application to Population Dynamics*, https://www.lakeheadu.ca/sites/default/files/uploads/77/Baldin.pdf, (2017.).

[10] Hannah Cairns, *A short proof of Perron's theorem*, http://pi.math.cornell.edu/~web6720/Perron-Frobenius_Hannah%20Cairns.pdf, (2014.).

[11] Simon Foucart, *Lecture 6: Matrix Norms and Spectral Radii*, https://www.math.drexel.edu/~foucart/TeachingFiles/F12/M504Lect6.pdf, (2013.).

[12] Anjela Y. Govan i Carl B. Meyer, *Ranking National Football League Teams Using Google' Page Rank*, (2006), http://carlmeyer.com/Presentations/Anjela_Charleston.pdf.

[13] Frank R. Kschischang, *The Subadditivity Lemma*, (2009.).

[14] Maroje Marohnić i Matija Bašić, *Diskretna matematika vježbe*, (2015.).

[15] Saša Singer i Nela Bosner, *Numerička analiza predavanja*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nadpredavanja/, (2010.).

[16] Robert A. van de Geijn, *Notes on Vector and Matrix Norms*, (2014.).

Sažetak

PageRank je algoritam kreiran za rangiranje internetskih stranica koje su međusobno povezane linkovima. Algoritam je baziran na ideji da što više linkova vodi na određenu stranicu to je stranica bolja odnosno njen rang je veći, no ne vrijede svi linkovi jednako. Linkovi s bolje rangiranih stranica vrijede više od onih s loše rangiranih. Također, link sa stranice koja posjeduje linkove na malo stranica (ili samo jednu) vrijedi više od linka sa stranice koja posjeduje puno linkova. Nadalje, potrebno je uračunati i mogućnost da korisnik ne koristi linkove već direktno ide na proizvoljnu stranicu.
Algoritam je moguće izmijeniti tako da umjesto internetskih stranica rangira sportske ekipe; u našem slučaju konkretno timove u NFL-u. Zaključili smo, bazirano na podacima iz 2021. sezone, da je PageRank algoritam predviđao pobjednike točnije nego kladionice, profesionalni prognozeri te službena stranica lige.

Summary

PageRank is an algorithm used to ranking web pages which are interconnected by links. The algorithm is based on the idea that the more links lead to a certain page, the better the page is, that is, its ranking is higher, but not all links are equally valuable. Links from higher-ranking sites are worth more than those from poorly-ranked ones. Also, a link from a page that has links to few pages (or just one) is worth more than a link from a page that contains a lot of links. Furthermore, it is necessary to take into account the possibility that the user does not use link but goes directly to an arbitrary page.
The algorithm can be changed so that it ranks sports teams instead of websites; in our case NFL teams. We concluded, based on data from the 2021 season, that the PageRank algorithm predicted winners more accurately than bookmakers, professional analysts and the league's official website.

Životopis

Rođen sam 26. kolovoza 1997. u Zagrebu. Po završetku Osnovne škole Gustava Krleca, 2012. godine upisao sam Prvu Gimnaziju u Zagrebu. Njenim završetkom, 2016. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje sam 2019. godine stekao titulu sveučilišnog prvostupnika matematike, *univ. bacc. math.*, nakon čega sam upisao Diplomski studij Financijska i poslovna matematika.