

# Apolonijev problem

---

Hanževački, Martina

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:473127>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Martina Hanževački

**APOLONIJEV PROBLEM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem svojoj mentorici Mei Bombardelli na ogromnom strpljenu i silnom trudu. Također, veliko hvala kolegama koji su ovaj put dijelili sa mnom, a i mnogo ga olakšali. Posebno hvala Magdaleni, Veroniki i Ivanu. Zahvaljujem i svim svojim prijateljima koji su bili cijelo ovo vrijeme uz mene i velika podrška. Hvala mom suprugu Ivanu koji je najviše ispaštao. Najveće hvala mojoj mami koja je slavila svaki moj položen ispit, bila neosporivo najveća podrška tijekom studija i u životu općenito te sigurno bez nje ništa od ovog ne bi bilo moguće. Hvala vam od srca.*

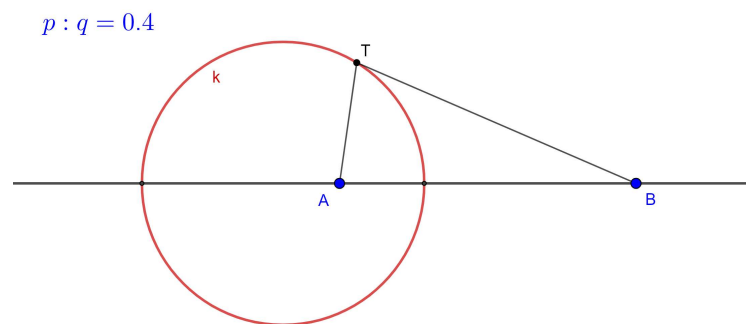
# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Predgovor</b>	<b>3</b>
<b>Uvod</b>	<b>15</b>
<b>1 Rješenja problema 1 - 4</b>	<b>17</b>
1.1 Problem TTT . . . . .	17
1.2 Problem TTp . . . . .	19
1.3 Problem Tpp . . . . .	25
1.4 Problem ppp . . . . .	33
<b>2 Rješenja problema 5-9</b>	<b>39</b>
2.1 Problem TTk . . . . .	39
2.2 Problem Tpk . . . . .	51
2.3 Problem Tkk . . . . .	69
2.4 Problem ppk . . . . .	79
2.5 Problem pkk . . . . .	93
<b>3 Rješenje izvornog Apolonijevog problema</b>	<b>99</b>
3.1 Problem kkk . . . . .	99
<b>Bibliografija</b>	<b>111</b>

# Predgovor

Apolonijev problem je konstruktivni geometrijski zadatak što ga je prvi postavio i riješio Apolonije u djelu *O dodirima*. Apolonije iz Perge (262.pr.n.e. - 190.pr.n.e.) grčki je matematičar. Studirao je u Aleksandriji, gdje su ga podučavali Euklidovi sljedbenici. U djelu *Elementi konika* u 15 knjiga, od kojih je sačuvano sedam, obradio je teoriju presjeka stošca i ravnine geometrijskim pristupom. Današnja euklidska geometrija nije se mnogo odmakla od Apolonijevih spoznaja. On je prvi za konike upotrebio naziv elipsa i hiperbola te ustanovio je da se presijecanjem stošca ravninom mogu dobiti sve tri vrste presjeka. Apolonije je poznat po pojmovima Apolonijeva kružnica, Apolonijeva mreža i Apolonijev problem. [6]

Apolonijeva kružnica je skup svih točaka  $T$  ravnine za koje je omjer udaljenosti od dviju zadanih točaka  $A$  i  $B$  konstantan i iznosi  $p : q$ , tj. vrijedi  $|AT| : |BT| = p : q$ .

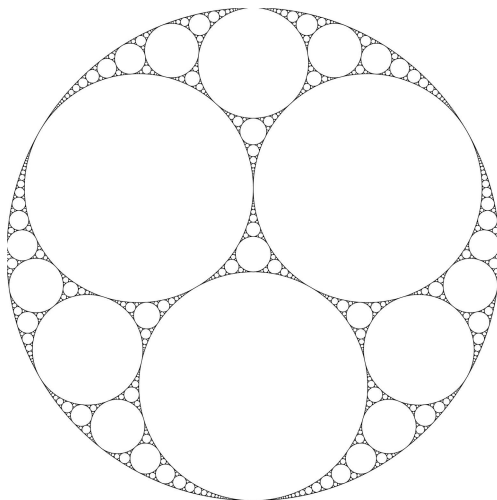


Slika 1: Apolonijeva kružnica

Ako je omjer jednak jedinici, Apolonijeva kružnica postaje simetrala dužine koja spaja zadane točke.

U kombinatorici, Apolonijeva mreža je fraktal sastavljen od kružnica. Može se geometrijski realizirati i to tako da se započne s tri kružnice koje se međusobno dodiruju, zatim

upisati u prazninu koju čine još jednu koja dodiruje sve tri (Apolonijev problem), dalje se nastavlja rekurzivno za nove praznine koje kružnice čine. (Slika 2)



Slika 2: Apolonijeva mreža (preuzeto iz: [8])

U ovom radu proučavat ćemo Apolonijev problem koji glasi:

Dani su tri objekta, krug, pravac ili točka. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje sva tri dana objekta.

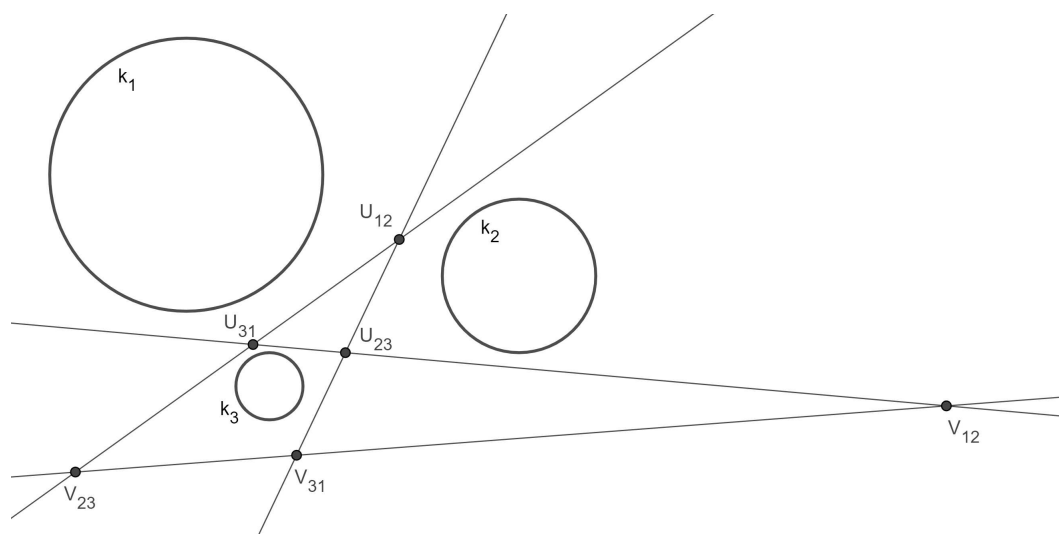
Apolonijev problem proučavali i riješili su, među ostalim, François Viète<sup>1</sup>, Isaac Newton<sup>2</sup>, Joseph-Diaz Gergonne<sup>3</sup>. Svaki od njih imao je drugačiji pristup problemu. Viète se držao osnova geometrije. Riješio je svih deset slučajeva od jednostavnijih do složenijih slučajeva. Započeo je s tri točke i jednu po jednu mijenjao ih pravcima ili kružnicama da bi na kraju došao do slučaja s tri kružnice. Newton je proučavao konike. U svom djelu *Principia mathematica* (1687.) rješavao je problem gdje su zadane tri točke te treba konstruirati četvrtu, a poznata je razlika udaljenosti tražene točke i danih točaka te to opisuje presjek triju hiperbola. U svome djelu ne spominje kružnice, ali se njegovo rješenje može primijeniti na tri kružnice pošto su centri triju kružnica i razlike udaljenosti među njihovim radijusima ekvivalentni Newtonovim uvjetima. Gergonne je problem riješio tako da je kružnice promatrao u parovima i konstruirao njihove centre sličnosti. (Slika 3) [2]

---

<sup>1</sup>François Viète (1540. – 1603.), francuski matematičar

<sup>2</sup>Isaac Newton (1642. – 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom

<sup>3</sup>Joseph-Diaz Gergonne (1771. - 1859.) francuski matematičar i logičar



Slika 3: Centri sličnosti triju kružnica





# Uvod

Apolonijev problem konstruktivni je zadatak gdje su zadana tri objekta, krug, pravac ili točka te treba konstruirati kružnicu koja dodiruje sve troje. Promatranjem svih slučajeva Apolonijev problem može se podijeliti u deset zasebnih problema:

**Problem 1** (TTT). *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz tri zadane točke.*

**Problem 2** (TTp). *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz dvije zadane točke i dodiruje zadani pravac.*

**Problem 3** (Tpp). *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz zadanu točku i dodiruje dva zadana pravca.*

**Problem 4** (ppp). *Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri zadana pravca.*

**Problem 5** (TTk). *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz dvije zadane točke i dodiruje zadanu kružnicu.*

**Problem 6** (Tpk). *Konstrukcija kružnice koja prolazi zadanom točkom i dira dani pravac i danu kružnicu.*

**Problem 7** (Tkk). *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz zadanu točku i dira dvije zadane kružnice.*

**Problem 8** (ppk). *Konstrukcija kružnice koja dira dva zadana pravca i danu kružnicu.*

**Problem 9** (pkk). *Konstrukcija kružnice koja dira zadani pravac i dvije dane kružnice*

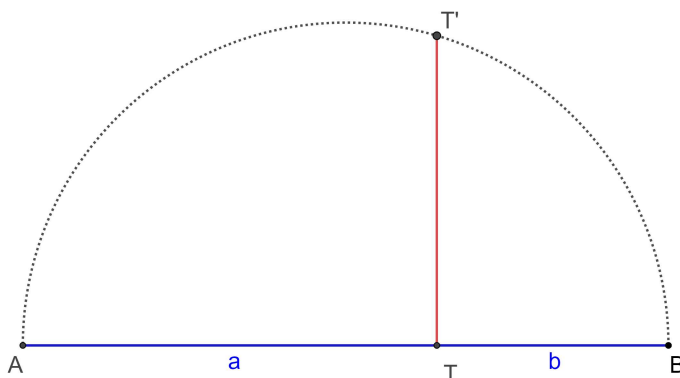
**Problem 10** (kkk). *Konstrukcija kružnice koja dira tri zadane kružnice.*

Rješenja ovih problema podijelit ćemo na tri poglavlja. Odabrat ćemo po jedan ili dva načina rješavanja pojedinog slučaja. U prvom poglavlju konstruirat ćemo rješenja jednostavnijih problema (prva četiri), u drugom poglavlju od petog do devetog problema te zatim posvetiti treće poglavlje konstrukciji kružnice koja dira tri dane kružnice. Sve konstrukcije popratit ćemo slikama. Na slici će crvenom bojom biti označena tražena kružnica, a plavom bojom zadani objekti.

Navedimo neke osnovne definicije, teoreme i konstrukcije.

**Konstrukcija 1.** *Zadane su duljine  $a$  i  $b$ . Konstruirajmo dužinu duljine  $d = \sqrt{ab}$ .*

Neka je  $\overline{AB}$  dužina te neka je točka  $T$  na toj dužini tako da je  $|AT| = a$  i  $|BT| = b$ . Konstruiramo u točki  $T$  okomicu na pravac  $AB$  te njen presjek s polukružnicom promjera  $|AB|$  označimo s  $T'$ . Tada je  $|TT'| = \sqrt{|AT| \cdot |BT|} = \sqrt{ab} = d$  pa je  $\overline{TT'}$  tražena dužina.



Slika 4: Konstrukcija dužine duljine  $d = \sqrt{ab}$

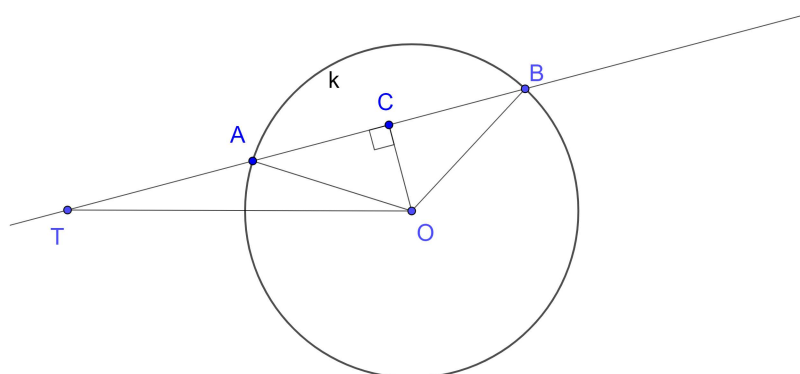
**Teorem 1** (Teorem o potenciji točke). *Dana je kružnica  $k(O, r)$  i točka  $T$ . Ako je  $p$  bilo koji pravac kroz  $T$  koji siječe  $k$  u točkama  $A, B$  tada za orijentirane duljine vrijedi  $TA \cdot TB = OT^2 - r^2 = konst.$*

Konstantni umnožak  $p(k, T) = TA \cdot TB = OT^2 - r^2$  zove se potencija točke  $T$  s obzirom na kružnicu  $k$ .

*Dokaz.* Neka je  $C$  polovište tetive  $\overline{AB}$ . Tada imamo:

$$\begin{aligned} TA \cdot TB &= (TC + CA) \cdot (TC + CB) = (TC + CA)(TC - CA) = |TC|^2 - |CA|^2 \\ &= (|TO|^2 - |OC|^2) - (|OA|^2 - |OC|^2) = |TO|^2 - |OA|^2 = |OT|^2 - r^2. \end{aligned}$$

□



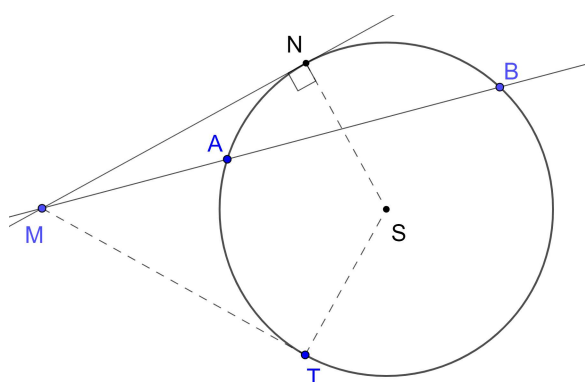
Slika 5: Teorem 1

**Napomena.** Ako pravac  $p$  dira kružnicu u samo jednoj točki  $D$  tada potencija točke  $T$  u odnosu na tu kružnicu iznosi  $|TD|^2$ .

**Teorem 2** (Obrat teorema o potenciji točke). Neka je  $k$  kružnica,  $M$  točka izvan kružnice te  $A, B$  i  $T$  točke na kružnici  $k$ . Ako su točke  $A, B$  i  $M$  kolinearne te vrijedi  $MA \cdot MB = MT^2$ , onda je pravac  $MT$  tangenta kružnice  $k$ .

*Dokaz.* Neka je  $S$  središte kružnice  $k$ . Neka je  $N$  diralište tangente iz točke  $M$  na kružnicu  $k$ . Kut  $\angle SNM$  je pravi. Po teoremu o potenciji točke vrijedi  $MA \cdot MB = MN^2$ .

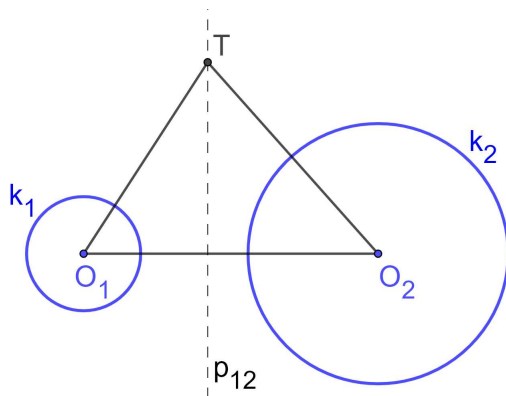
Iz uvjeta teorema znamo:  $MA \cdot MB = MT^2$ . Dakle  $|MT| = |MN|$ . Pošto vrijedi  $|MT| = |MN|$  i  $|SN| = |ST|$  trokuti  $\triangle MTS$  i  $\triangle MNS$  su sukladni po  $SSS$  poučku o sukkladnosti trokuta pa vrijedi  $\angle MTS = \angle SNM = 90^\circ$  pa je  $MT$  tangenta na kružnicu. [Slika 6]  $\square$



Slika 6: Teorem 2

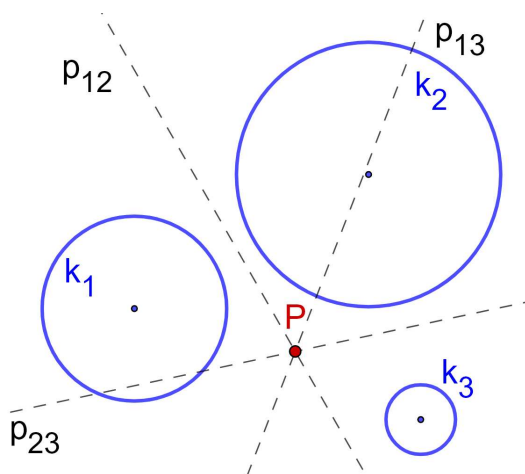
**Teorem 3.** *Dane su kružnice  $k_1(O_1, r_1)$  i  $k_2(O_2, r_2)$ . Skup svih točaka s jednakim potencijama s obzirom na kružnice  $k_1, k_2$  je pravac  $p_{12}$  okomit na pravac  $O_1O_2$ , koji prolazi kroz zajedničke točke kružnica  $k_1, k_2$  ako ih one imaju.*

Pravac  $p_{12}$  zovemo *potencijalom* ili *radikalnom osi* kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .



Slika 7: Teorem 3

**Teorem 4.** *Dane su kružnice  $k_1, k_2, k_3$  čija središta nisu kolinearna. Neka su redom  $p_{12}, p_{13}, p_{23}$  potencijale parova kružnica  $k_1, k_2; k_1, k_3; k_2, k_3$ . Tada se pravci  $p_{12}, p_{13}, p_{23}$  sijeku u jednoj točki  $P$ .*



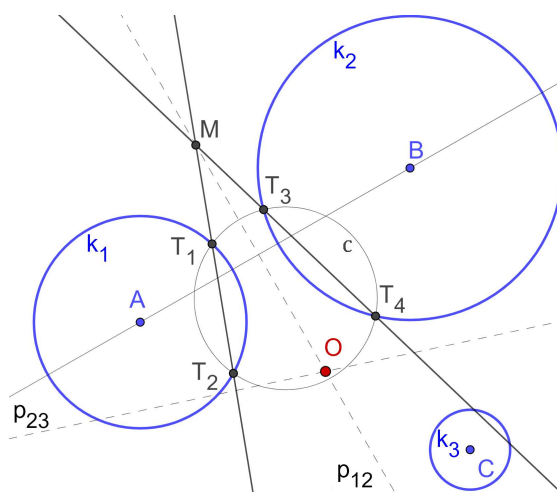
Slika 8: Teorem 4

**Konstrukcija 2.** Zadane su kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$ . Nikoje dvije kružnice se ne sijeku. Konstruirajmo njihovo radikalno središte.

Neka je  $A$  središte kružnice  $k_1$ ,  $B$  središte kružnice  $k_2$  i  $C$  središte kružnice  $k_3$ .

1. konstruiramo proizvoljnu kružnicu  $c$ , proizvoljnog radijusa, takvu da siječe kružnicu  $k_1$  u točkama  $T_1$  i  $T_2$  te kružnicu  $k_2$  u točkama  $T_3$  i  $T_4$ .
2.  $T_1T_2 \cap T_3T_4 = \{M\}$ ,  $M$  je radikalno središte kružnica  $k_1, k_2$  i  $c$
3. okomica iz  $M$  na pravac  $AB$  je potencijala kružnica  $k_1$  i  $k_2$ , označimo ju s  $p_{12}$
4. analogno konstruiramo potencijalu  $p_{23}$  kružnica  $k_2$  i  $k_3$
5.  $p_{12} \cap p_{23} = \{O\}$

$O$  je radikalno središte zadanih kružnica.

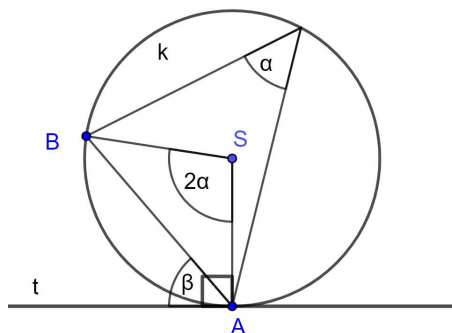


Slika 9: Konstrukcija radikalnog središtav triju kružnica

**Teorem 5** (Kut između tetive i tangente). *Kut između tangente kružnice kojoj je diralište u krajnjoj točki tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

*Dokaz.* Neka je  $\overline{AB}$  tetiva kružnice  $k$  sa središtem u točki  $S$ , a  $t$  tangenta na kružnicu  $k$  koja je dira u točki  $A$ . Označimo s  $\alpha$  mjeru obodnog kuta nad tetivom  $\overline{AB}$ , a s  $\beta$  mjeru kuta između tetive i tangente. Mjera središnjeg kuta nad tom tetivom jednaka je  $2\alpha$ . Kako je trokut  $\triangle ABS$  jednakokrčan s osnovicom  $\overline{AB}$ , vrijedi  $\angle SAB = \angle SBA = 90^\circ - \alpha$ . S obzirom

na to da je tangenta na kružnicu u točki  $A$  okomita na polumjer koji sadrži točku  $A$  imamo  $\beta = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$  što je i trebalo dokazati.  $\square$



Slika 10: Teorem 5

**Teorem 6.** *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*

**Teorem 7.** *Simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutarnjeg kuta trokuta sijeku se u jednoj točki.*

**Definicija 1.** *Dana je točka  $O$  i realni broj  $k \neq 0$ . **Homotetijom**  $h(O, k)$  s centrom  $O$  i koeficijentom  $k$  zovemo preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe koje točki  $T$  pridružuje točku  $T'$  takvu da su točke  $T, T', O$  kolinearne te vrijedi  $\frac{OT'}{OT} = k$ .*

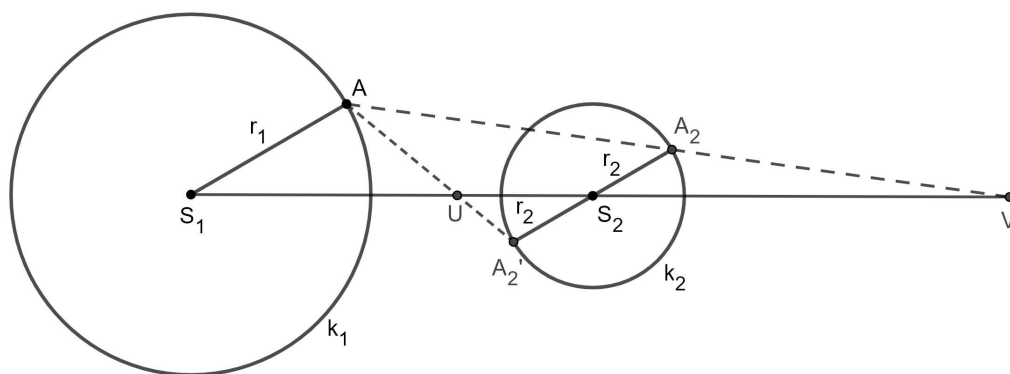
Za  $k > 0$ ,  $T'$  leži na polupravcu  $OT$ , a za  $k < 0$ ,  $T'$  ne leži na polupravcu  $OT$ .

### Svojstva homotetije:

1. Homotetija s koeficijentom  $k = 1$  preslikava svaku točku ravnine u tu istu točku, pa je takvo preslikavanje identiteta.
2. Homotetija  $h$  ravnine  $R$  je bijekcija.
3. Neka je  $h : R \rightarrow R$  homotetija ravnine  $R$ , tada vrijedi:
  - (i)  $h$  preslikava svaku dužinu  $\overline{AB}$  na njoj paralelnu dužinu  $\overline{A'B'}$ ,
  - (ii)  $h$  preslikava svaki pravac  $p \subset R$  na pravac  $p' \subset R$  paralelan sa  $p$ ,
  - (iii) ako  $p$  sadrži središte homotetije, onda je  $h(p) = p$ .
4. Neka su dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{A'B'}$  paralelne, tada postoje točno dvije homotetije koje dužinu  $\overline{AB}$  preslikavaju na dužinu  $\overline{A'B'}$ .

5. Ako trokuti  $ABC$  i  $DEF$  nisu sukladni i ako im odgovarajuće stranice leže na paralelnim pravcima, tada postoji tačno jedna homotetija koja preslikava jedan u drugi.
6. Ako trokuti  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  i  $A_2B_2C_2$  nisu u parovima sukladni i ako im odgovarajuće stranice leže na paralelnim pravcima, tada za svaki par trokuta postoji tačno jedna homotetija koja preslikava jedan u drugi i središta tih homotetija su kolinearne točke.
7. Ako je  $k_1k_2 = 1$ , tada je kompozicija dvije homotetije  $h_1(O_1, k_1)$  i  $h_2(O_2, k_2)$  translacija.
8. Kompozicija dviju homotetija s istim središtem je homotetija s istim središtem i koeficijentom koji je jednak umnošku koeficijenata danih homotetija.
9. Homotetija  $h(O, a) : R \rightarrow R$  preslikava kružnicu  $k(S, r)$  u kružnicu  $k'(S', |a|r)$ . Ako je  $O = S$ , tada su kružnice  $k$  i  $k'$  koncentrične kružnice.
10. Ako su  $k_1(S_1, r_1)$  i  $k_2(S_2, r_2)$  dvije kružnice s različitim središtima i različitim polumjerima, tada postoje tačno dvije homotetije sa središtima  $O_1, O_2 \in S_1S_2$  koje preslikavaju kružnicu  $k_1$  u kružnicu  $k_2$ .

**Teorem 8.** *Dane su dvije kružnice  $k_1(S_1, r_1)$  i  $k_2(S_2, r_2)$ . Neka je  $\overline{S_1A}$  bilo koji polumjer kružnice  $k_1$  i  $\overline{A_2A'_2}$  njemu paralelan promjer kružnice  $k_2$ , pri čemu točke  $A$  i  $A_2$  leže s iste strane pravca  $S_1S_2$ . Tada svi pravci  $AA_2$  prolaze jednom čvrstom točkom  $V$ , a svi pravci  $AA'_2$  jednom čvrstom točkom  $U$ . Točke  $V$  i  $U$  su tzv. vanjski i unutrašnji centar sličnosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$  te leže na pravcu  $S_1S_2$ .*



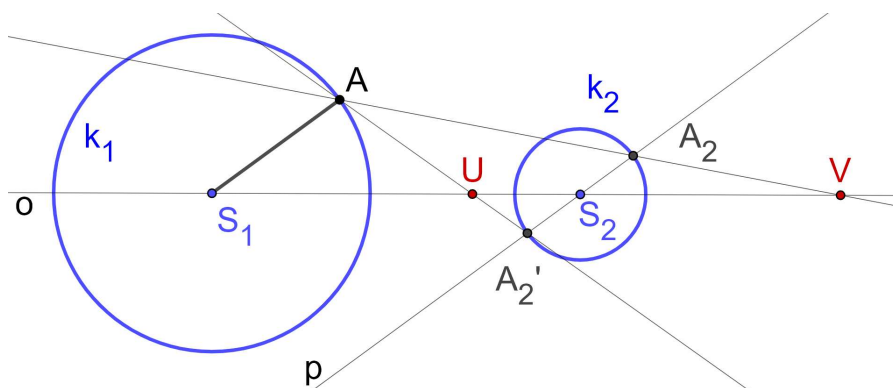
Slika 11: Teorem 8



**Konstrukcija 3.** Zadane su kružnice  $k_1(S_1, r_1)$  i  $k_2(S_2, r_2)$ . Konstruirajmo njihov unutarnji i vanjski centar sličnosti.

1.  $\overline{S_1A}$  polumjer kružnice  $k_1$
2.  $p$  = pravac paralelan s  $S_1A$  kroz  $S_2$
3.  $p \cap k_2 = \{A_2, A'_2\}$
4.  $o = S_1S_2$
5.  $AA_2 \cap o = \{V\}$
6.  $AA'_2 \cap o = \{U\}$

Vanjski centar sličnosti je točka  $V$ , a unutarnji centar sličnosti točka  $U$ .



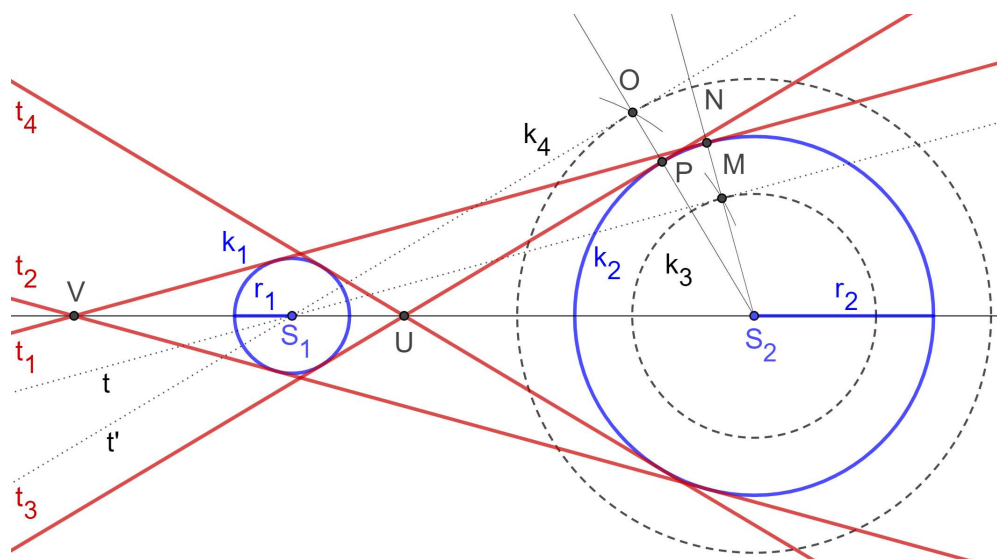
Slika 12: Konstrukcija unutarnjeg i vanjskog središta dviju kružnica

**Konstrukcija 4.** Zadane su kružnice  $k_1(S_1, r_1)$  i  $k_2(S_2, r_2)$ . Konstruirajmo njihove zajedničke tangente.

Bez smanjenja općenitosti neka je  $r_1 < r_2$ .

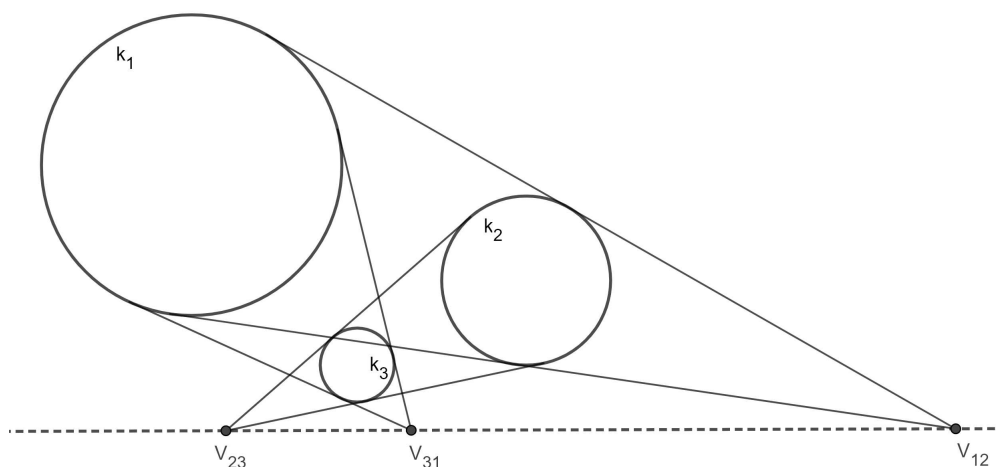
1.  $k_3 = k(S_2, r_2 - r_1)$
2. konstruirajmo tangentu  $t$  iz  $S_1$  na kružnicu  $k_3$  te njihovo diralište označimo s  $M$
3. povucimo polupravac  $S_2M$
4.  $S_2M \cap k_2 = \{N\}$

5. paralela s  $t$  u  $N$  je tangenta  $t_1$  kružnica  $k_1$  i  $k_2$
6. druga tangenta  $t_2$  je pravac simetričan pravcu  $t_1$  obzirom na  $S_1S_2$
7.  $k_4 = k(S_2, r_2 + r_1)$
8. konstruirajmo tangentu  $t$  iz  $S_1$  na kružnicu  $k_4$  te njihovo diralište označimo s  $O$
9. povucimo polupravac  $S_2O$
10.  $S_2O \cap k_2 = \{P\}$
11. paralela s  $t'$  u  $P$  je tangenta  $t_3$  kružnica  $k_1$  i  $k_2$
12. druga tangenta  $t_4$  je pravac simetričan pravcu  $t_3$  obzirom na  $S_1S_2$



Slika 13: Zajedničke tanegente dviju kružnica

**Teorem 9.** *Dane su kružnice  $k_1(O_1, r_1)$ ,  $k_2(O_2, r_2)$  i  $k_3(O_3, r_3)$ . Neka su  $V_{23}, U_{23}; V_{31}, U_{31}; V_{12}, U_{12}$  vanjski i unutarnji centri sličnosti parova kružnica  $k_2, k_3; k_3, k_1; k_1, k_2$ . Tada točke  $V_{23}, V_{31}, V_{12}; V_{23}, U_{31}, U_{12}, U_{23}, V_{31}, U_{12}; U_{23}, U_{31}, V_{12}$  leže na po jednom pravcu. Ta četiri pravca zovu se osi sličnosti kružnica  $k_1, k_2, k_3$ .*



Slika 14: Teorem 9

**Definicija 2.** Dana je kružnica  $k(O, r)$ . **Inverzija** ravnine  $R$  u odnosu na kružnicu  $k$  je preslikavanje koje svaku točku  $A$  te ravnine različitu od  $O$  preslikava u točku  $A'$  na polupravcu  $OA$  tako da vrijedi  $OA \cdot OA' = r^2$ . Kružnicu  $k(O, r)$  zovemo kružnicom inverzije, točku  $O$  zovemo središtem inverzije, duljinu  $r$  polumjer inverzije, a veličinu  $r^2$  potencijom inverzije.

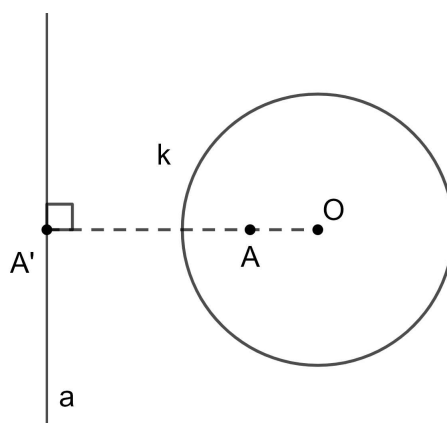
### Svojstva inverzije:

1. Neka su  $A, A'$  i  $B, B'$  dva para pridruženih točaka inverzije s centrom  $O$ . Tada je  $AA'B'B$  tetivni četverokut i  $\angle OAB = \angle OB'A', \angle OBA = \angle OA'B'$ .
2. Ako su  $A, A'$  i  $B, B'$  dva para pridruženih točaka inverzije, onda vrijedi  $|A'B'| = \frac{r^2}{|OA| \cdot |OB|} \cdot |AB|$ .
3. Ako je  $c$  kružnica koja sadrži par pridruženih točaka  $A, A'$  inverzije, onda je  $c$  ortogonalna na kružnicu te inverzije.
4. Pravac  $p$  koji prolazi središtem  $O$  kružnice  $k$  inverzije pri toj inverziji preslikava se u samog sebe.
5. Pravac  $p$  koji ne prolazi središtem  $O$  inverzije pri toj inverziji preslikava se u kružnicu koja prolazi točkom  $O$  i u toj točki ima tangentu paralelnu s pravcem  $p$ .
6. Ako je  $O$  centar inverzije, a točke  $A$  i  $B$  tom su inverzijom preslikane u  $A'$  i  $B'$ , tada su trokuti  $\triangle OAB$  i  $\triangle OA'B'$  slični.

7. Slika kružnice koja prolazi centrom  $O$  inverzije pri toj inverziji je pravac paralelan s tangentom te kružnice u točki  $O$ .
8. Slika kružnice  $c$  koja ne prolazi kroz centar  $O$  inverzije i pri toj inverziji je kružnica  $c'$  takva da je  $O$  centar sličnosti kružnica  $c, c'$  i to vanjski ako je  $O$  izvan  $c$ , a unutrašnji ako je  $O$  unutar kružnice  $c$ .
9. Inverzija je konformno preslikavanje, tj. čuva kutove među krivuljama.

Dokazi navedenih svojstava homotetije i inverzije nalaze se u [1].

**Definicija 3.** Neka je dana kružnica  $k(O, r)$ . Polaritet s obzirom na kružnicu  $k$  je bijekcija između skupa točaka i skupa pravaca takva da za pridružene elemente  $A, a$  vrijedi  $OA \cdot OA' = r^2$  i  $OA \perp a$ , gdje je  $A' \in OA \cap a$ , tj.  $A, A'$  su inverzne točke za inverziju  $[O, r^2]$ . Točki  $O$  pridružujemo beskonačno daleki pravac, a pravcu  $a$  kroz  $O$  pridružujemo beskonačno daleku točku pravca okomitog na  $a$ . Pridružene elemente  $A, a$  zovemo pol, odnosno polara jedno drugome s obzirom na kružnicu  $k$ .



Slika 15: Definicija 3, Pol i polara



# Poglavlje 1

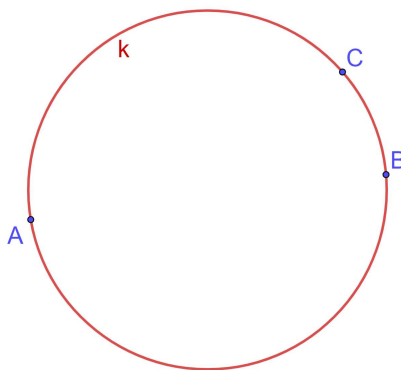
## Rješenja problema 1 - 4

U ovom ćemo poglavlju opisati konstrukciju Apolonijevih problema u kojima nema kružnice, tj. u kojima su svi zadani elementi ili točke ili pravci. To su problemi TTT, TTp, ppT i ppp.

### 1.1 Problem TTT

**Problem.** U ravnini zadane su tri različite točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Konstruirati kružnicu  $k$  koja prolazi kroz sve tri točke.

**Analiza:**

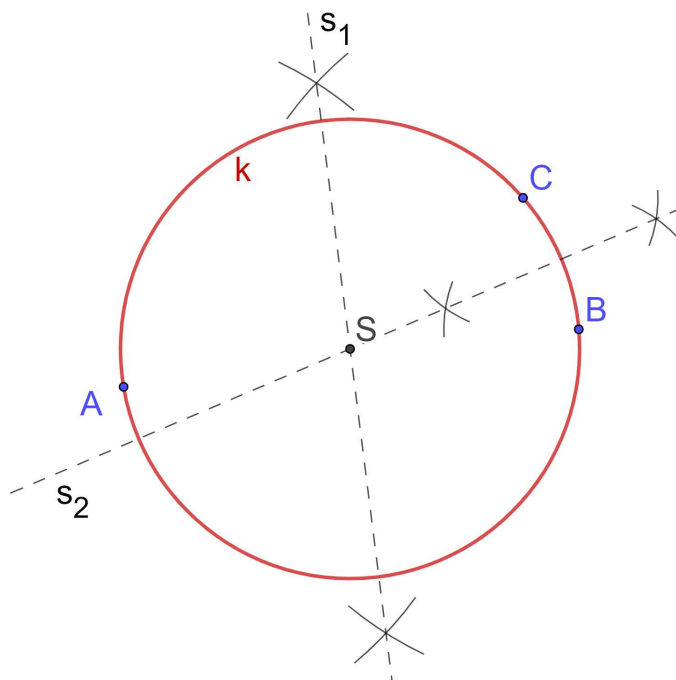


Slika 1.1: Analiza slučaja TTT

Uočavamo da je kružnica  $k$  opisana kružnica trokutu  $ABC$  što znači da ćemo njeno središte lagano naći.

**Konstrukcija:**

1.  $s_1 =$  simetrala dužine  $\overline{AB}$
2.  $s_2 =$  simetrala dužine  $\overline{AC}$
3.  $s_1 \cap s_2 = \{S\}$
4.  $k = k(S, |SA|)$



Slika 1.2: Konstrukcija slučaja TTT

**Dokaz:**

Treba dokazati da točke  $A, B, C$  pripadaju dobivenoj kružnici.  $A$  očitno leži na kružnici. Dokažimo da točke  $B$  i  $C$  također leže na kružnici.

Znamo da točka  $S$  leži na simetrali  $s_1$  pa vrijedi  $|SA| = |SB|$ . Točka  $B$  leži na kružnici. Također,  $S$  leži na simetrali  $s_2$  pa vrijedi  $|SA| = |SC|$ . Točka  $C$  leži na kružnici.  $\square$

**Rasprava:**

Analizirajmo pojedine korake konstrukcije te primijetimo da u 3. koraku nema sjecišta ako je  $s_1 \parallel s_2$ , a to će se dogoditi samo ako su  $A, B$  i  $C$  kolinearne. Dakle, ako su  $A, B$  i  $C$  kolinearne ne postoji kružnica koja prolazi kroz sve tri točke. Ako točke nisu kolinearne, onda uvijek postoji takva kružnica i ona je jedinstvena.

## 1.2 Problem TTP

**Problem.** U ravnini zadane su dvije različite točke  $A$  i  $B$  te pravac  $p$ . Konstruirati kružnicu koja prolazi točkama  $A$  i  $B$  i dira pravac  $p$ .

Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih objekata.

1. Točke  $A$  i  $B$  nalaze na pravcu  $p$ .  
Tada nema rješenja.



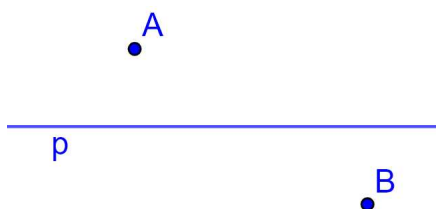
Slika 1.3: TTP,  $A, B \in p$

2. Točka  $A$  nalazi se na pravcu  $p$ .  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)



Slika 1.4: TTP,  $A \in p$

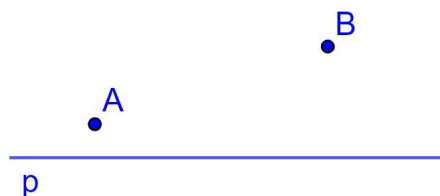
3. Točke  $A$  i  $B$  nalaze s različitih strana pravca  $p$ .  
Tada nema rješenja.



Slika 1.5: TTP,  $A, B$  s različitih strana pravca  $p$



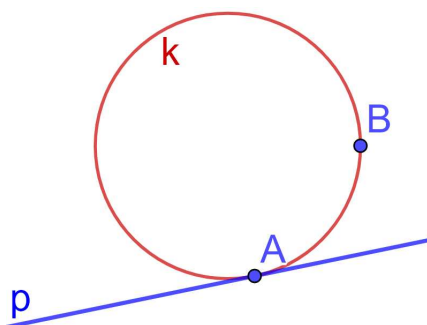
4. Točke  $A$  i  $B$  su s iste strane pravca  $p$  te mu ne pripadaju. Ovaj slučaj ćemo detaljno analizirati. (Slučaj B)



Slika 1.6:  $TT_p$ ,  $A, B$  s istih strana pravca  $p$

**Slučaj A.** Apolonijev problem  $TT_p$  u situaciji kada je točka  $A$  na pravcu  $p$ . Trebamo konstruirati kružnicu kroz dvije zadane točke koja dodiruje zadani pravac.

**Analiza:**

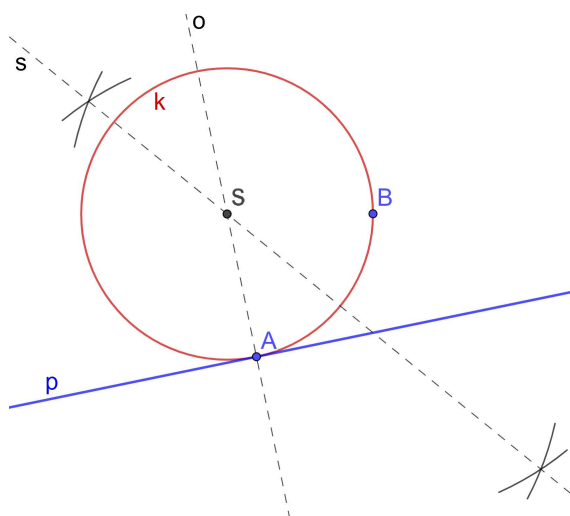


Slika 1.7: Analiza problema  $TT_p$ , slučaj A

Želimo najprije odrediti središte tražene kružnice  $k$ . Kako je  $\overline{AB}$  tetiva tražene kružnice, njeno središte leži na simetrali dužine  $\overline{AB}$ . Znamo i da je pravac  $p$  tangenta kružnice  $k$  u točki  $A$  pa je  $SA \perp p$ , tj. točka  $S$  leži na okomici na  $p$  kroz  $A$ .

**Konstrukcija:**

Konstruiramo li simetralu  $s$  dužine  $\overline{AB}$  i okomicu  $o$  iz točke  $A$  na pravac  $p$ , sjecište pravaca  $p$  i  $o$  je središte tražene kružnice. Preostaje samo opisati kružnicu  $k = k(S, |SA|)$ .  $k$  je tražena kružnica. [Slika 1.8]



Slika 1.8: Konstrukcija problema TTP, slučaj A

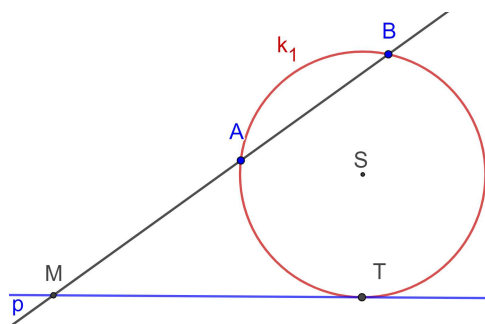
**Dokaz:**

Znamo da  $k$  prolazi kroz točku  $A$ . Prolazi i kroz točku  $B$  jer je  $s$  pripada simetrali dužnine  $\overline{AB}$  pa je  $|SA| = |SB|$ . Kružnica  $k$  dira pravac  $p$  jer je  $SA \perp p$ .  $\square$

**Rasprava:**

Okomica na  $p$  i simetrala od  $\overline{AB}$  neće se sjeći samo ako  $B \in p$ .

**Slučaj B.** Apolonijev problem TTP u situaciji kada su točke  $A$  i  $B$  s iste strane pravca  $p$  i ne nalaze se na njemu. Trebamo konstruirati kružnicu kroz dvije zadane točke koja dodiruje zadani pravac.

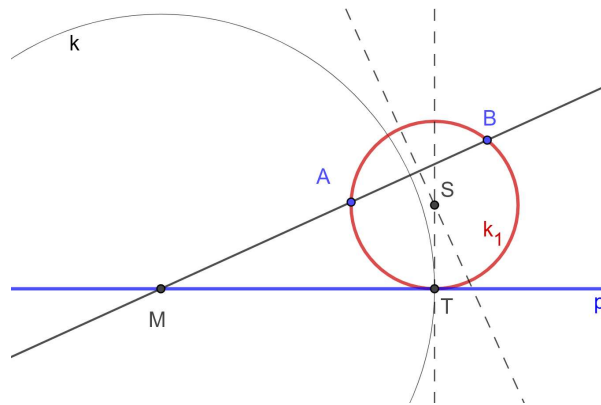
**Analiza:**

Slika 1.9: Analiza problema TTP, slučaj B

Neka je sjecište pravca  $AB$  s pravcem  $p$  točka  $M$ , a diralište pravca  $p$  i tražene kružnice točka  $T$ . Po teoremu o potenciji točke [Teorem 1] vrijedi  $|AM| \cdot |BM| = |MT|^2$ . Prema konstrukciji [1] možemo konstruirati duljinu  $|MT|$  i odrediti točku  $T$ . Nakon toga nije teško konstruirati središte tražene kružnice i samu kružnicu.

### Konstrukcija:

1.  $p \cap AB = \{M\}$
2. konstruirajmo dužinu duljine  $d = \sqrt{|MA| \cdot |MB|}$  [Konstrukcija 1]
3.  $k = k(M, d)$
4.  $k \cap p = \{T\}$
5. okomica na  $p$  u  $T$
6. simetrala dužine  $\overline{AB}$
7.  $S$  sjecište okomice na  $p$  u  $T$  i simetrale dužine  $\overline{AB}$
8.  $k_1 = k(S, |SA|)$  tražena kružnica



Slika 1.10: Konstrukcija problema TTp, slučaj B

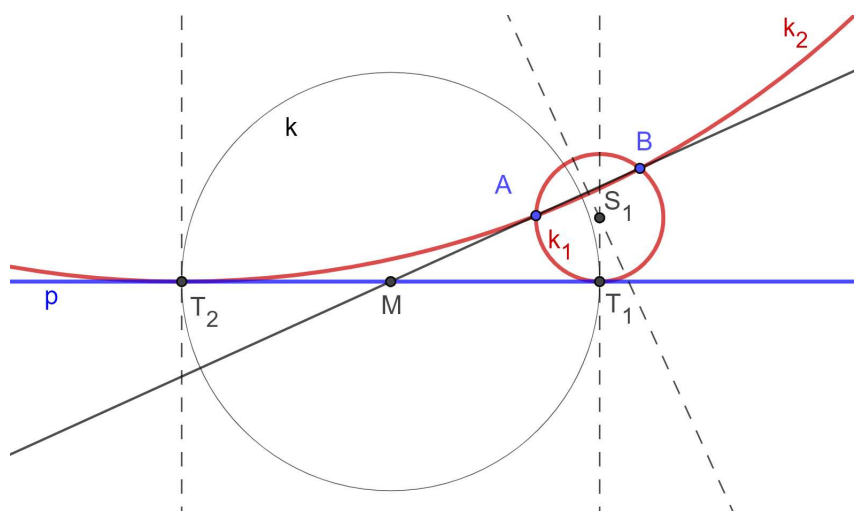
### Dokaz:

Treba dokazati da  $k_1$  prolazi kroz točke  $A$  i  $B$  te dira pravac  $p$  u točki  $T$ . Iz konstrukcije je jasno da prolazi kroz točke  $A$  i  $B$ , a da dira pravac  $p$  slijedi iz Teorema 2.  $\square$

**Rasprava:**

U prvom koraku konstrukcije može doći do problema kada su  $p \parallel AB$ . Tada u 6. koraku okomica iz  $T$  paralelna je sa simetralom dužine  $\overline{AB}$  što bi značilo da je  $AB \parallel p$ , ali u tom slučaju nema ni točke  $M$ . To ćemo analizirati kasnije (Slučaj C).

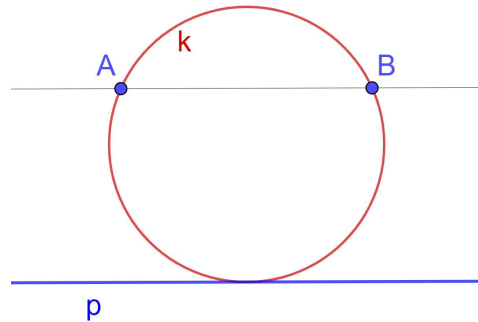
U koraku 3. kružnica  $k(M, d)$  uvijek siječe  $p$  u dvije točke jer je  $M$  na  $p$  pa postoje dva rješenja [Slika 1.11].



Slika 1.11: Konstrukcija problema TTP, slučaj B - 2 rješenja

**Slučaj C.** Apolonijev problem  $TTp$  u situaciji kada su točke  $A$  i  $B$  s iste strane pravca  $p$  i ne nalaze se na njemu, a  $AB \parallel p$ . Trebamo konstruirati kružnicu kroz dvije zadane točke koja dodiruje zadani pravac.

**Analiza:**

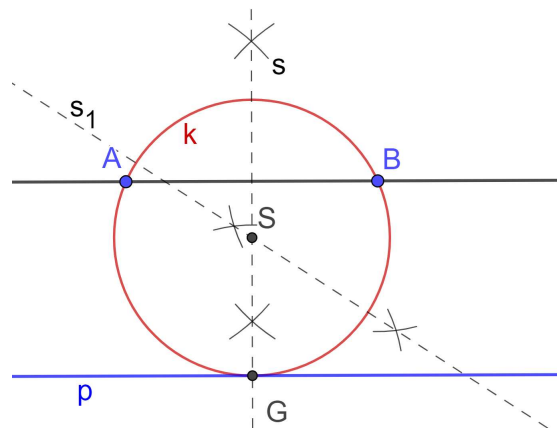


Slika 1.12: Analiza problema  $TTp$ , slučaj C

Neka je  $G$  nožište simetrale dužine  $AB$  na pravac  $p$ . Središte tražene kružnice nalazi se na presjeku simetrala dužine  $\overline{AB}$  i dužine  $\overline{BG}$

**Konstrukcija:**

Konstruiramo simetralu  $s$  dužine  $\overline{AB}$  i označimo  $s \cap p = \{G\}$ . Konstruiramo simetralu  $s_1$  dužine  $\overline{GB}$ . Označimo  $s \cap s_1 = \{S\}$  tada je tražena kružnica  $k = k(S, |SA|)$ . (Slika 1.13)



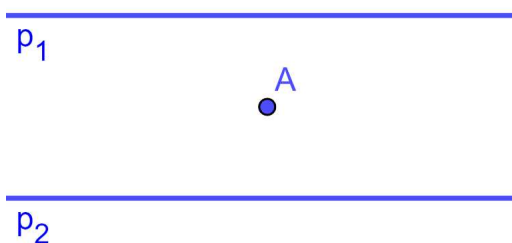
Slika 1.13: Konstrukcija problema  $TTp$ , slučaj C

### 1.3 Problem Tpp

**Problem.** U ravnini zadani su različiti pravci  $p_1$  i  $p_2$  te točka  $A$ . Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz  $A$  i dira pravce  $p_1$  i  $p_2$ .

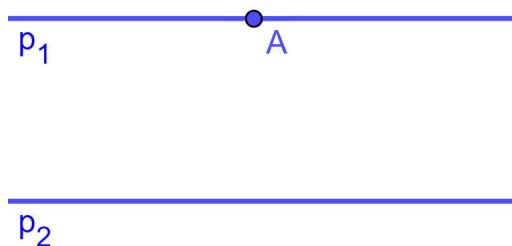
Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih objekata.

1. Pravci  $p_1$  i  $p_2$  su paralelni te se točka  $A$  nalazi između njih.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)



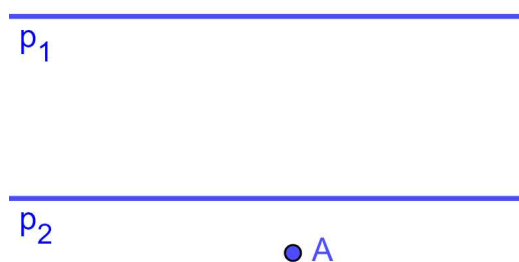
Slika 1.14: Tpp,  $p_1 \parallel p_2, A \notin p_1, A \notin p_2, A$  između  $p_1$  i  $p_2$

2. Pravci  $p_1$  i  $p_2$  su paralelni te se točka  $A$  nalazi na jednom od njih.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)



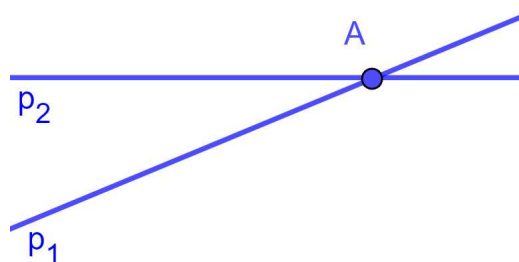
Slika 1.15: Tpp,  $p_1 \parallel p_2, A \in p_1, A \notin p_2$

3. Pravci  $p_1$  i  $p_2$  su paralelni te se točka  $A$  ne nalazi ni na jednom od njih niti između njih.  
Tada nema rješenja.



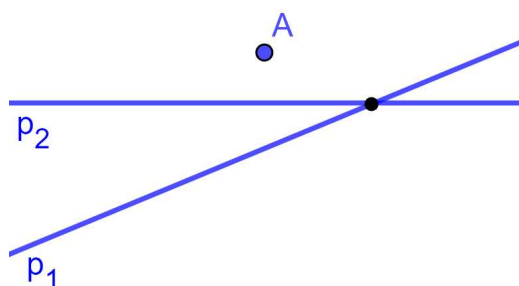
Slika 1.16:  $T_{pp}, p_1 \parallel p_2, A \notin p_1, A \notin p_2, A$  nije između  $p_1$  i  $p_2$

4. Pravci  $p_1$  i  $p_2$  se sijeku u točki  $A$ .  
Tada nema rješenja.



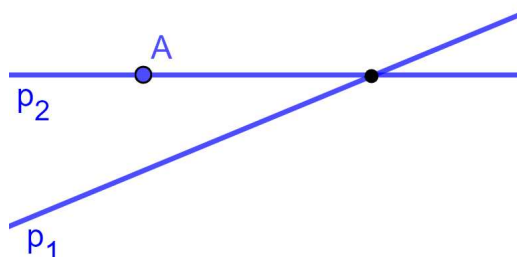
Slika 1.17:  $T_{pp}, \{A\} = p_1 \cap p_2$

5. Pravci  $p_1$  i  $p_2$  se sijeku te točka  $A$  se ne nalazi ni na jednom od njih.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj C)



Slika 1.18:  $T_{pp}, p_1$  i  $p_2$  se sijeku,  $A \notin p_1, A \notin p_2$

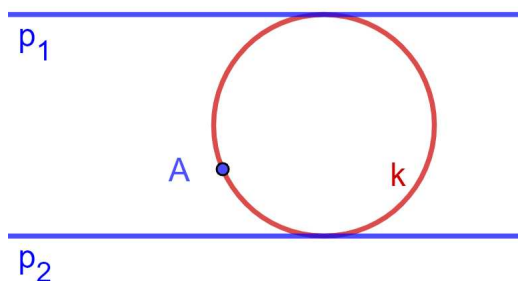
6. Pravci  $p_1$  i  $p_2$  se sijeku te se točka  $A$  nalazi na jednom od njih.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj D)



Slika 1.19: Tpp,  $p_1$  i  $p_2$  se sijeku,  $A \notin p_1, A \in p_2$

**Slučaj A.** Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su pravci  $p_1$  i  $p_2$  paralelni te se točka  $A$  nalazi između njih. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.

**Analiza:**

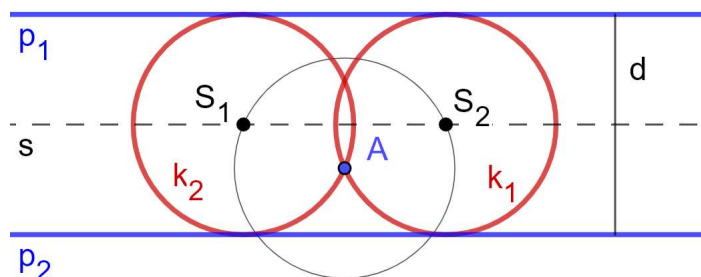


Slika 1.20: Analiza problema Tpp, slučaj A

Želimo odrediti središte tražene kružnice  $k$ . Kako tražena kružnica dira pravce  $p_1$  i  $p_2$  radijus joj mora biti pola njihove udaljenosti, a središte se mora nalaziti na pravcu jednako udaljenom od danih pravaca.

**Konstrukcija:** Neka je  $d$  udaljenost pravaca  $p_1$  i  $p_2$ , a  $s$  pravac koji je paralelan zadanima i jednako udaljen od  $p_1$  i  $p_2$ . Središte tražene kružnice konstruiramo kao sjecište pravca  $s$  i kružnice  $k(A, \frac{1}{2}d)$ . Pošto kružnica  $k$  siječe pravac  $s$  u dvije točke,  $k_1$  i  $k_2$  tražene su kružnice [Slika 1.21].



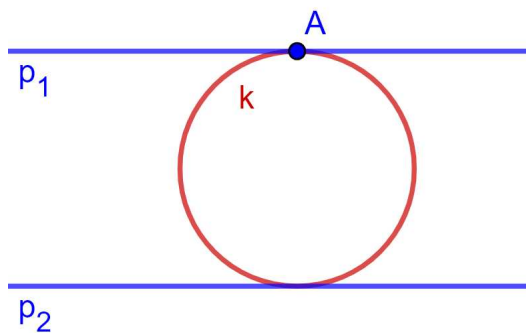


Slika 1.21: Konstrukcija problema Tpp, slučaj A

**Rasprava:**

Kako je  $A$  između  $p_1$  i  $p_2$ ,  $k(A, \frac{d}{2})$  mora sjeći  $s$  u dvije točke pa uvijek postoje dva rješenja.

**Slučaj B.** Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su pravci  $p_1$  i  $p_2$  paralelni te se točka  $A$  nalazi na jednom od njih. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.

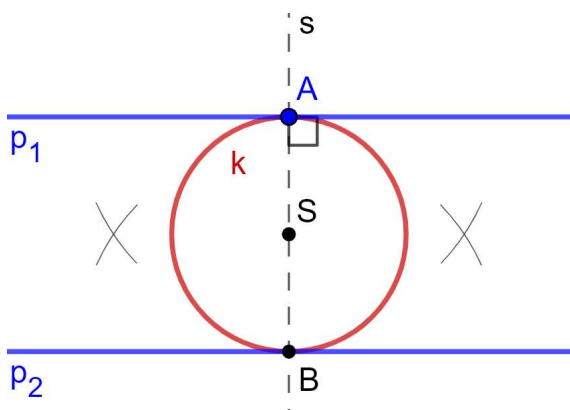
**Analiza:**

Slika 1.22: Analiza problema Tpp, slučaj B

Želimo odrediti središte tražene kružnice  $k$ . Pošto se  $A$  nalazi na pravcu  $p_1$ , središte  $S$  tražene kružnice  $k$  polovište je dužine kojoj je jedna krajnja točka točka  $A$ , a druga krajnja točka sjecište okomice iz  $A$  na pravac  $p_2$ . Radijus joj je duljine  $|SA|$ .

**Konstrukcija:**

Konstruiramo okomicu iz  $A$  na  $p_1$  i njeno sjecište s  $p_2$  označimo s  $B$ .  $S$  je polovište dužine  $\overline{AB}$ . Tražena je kružnica  $k(S, |SA|)$  [Slika 1.23].



Slika 1.23: Konstrukcija problema Tpp, slučaj B

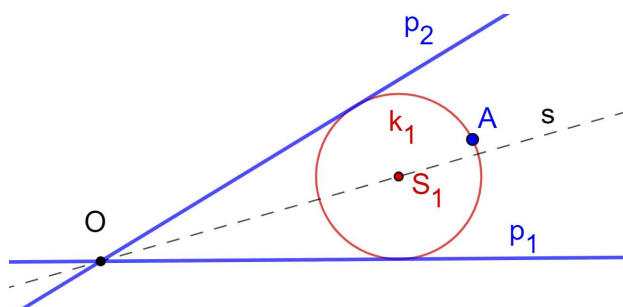
**Raprava:**

Rješenje je uvijek jedinstveno.

**Slučaj C.** Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su zadana dva neparalelna pravca  $p_1$  i  $p_2$  i točka  $A$  koja ne pripada ni jednom od danih pravaca. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.

**Analiza:**

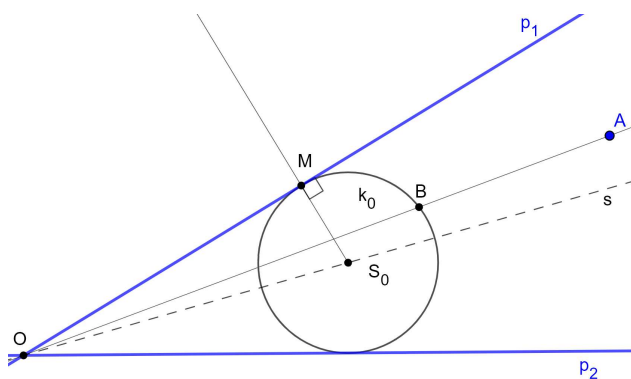
Kako je točka  $S$  jednako udaljena od pravaca  $p_1$  i  $p_2$ , ona leži na simetrali kuta  $\angle p_1 O p_2$ . [Slika 1.24]



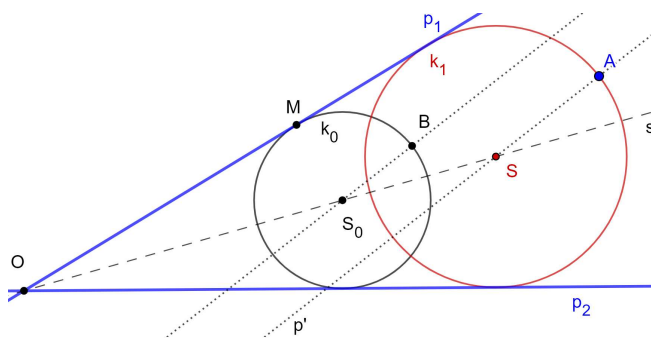
Slika 1.24: Analiza problema Tpp, slučaj C

**Konstrukcija:**

1.  $p_1 \cap p_2 = \{O\}$
2.  $s =$  simetrala kuta  $\angle p_1 O p_2$
3. proizvoljna točka  $S_0 \in s$
4. nožište okomice iz  $S_0$  na  $p_2 = \{M\}$
5. kružnica  $k_0 = k(S_0, |S_0 M|)$
6.  $OA \cap k_0 = \{B\}$
7. paralela s  $BS_0$  siječe  $s$  u  $S$
8. tražena kružnica je  $k = k(S, |SA|)$



Slika 1.25: Početak konstrukcije problema Tpp, slučaj C



Slika 1.26: Nastavak konstrukcije problema Tpp, slučaj C

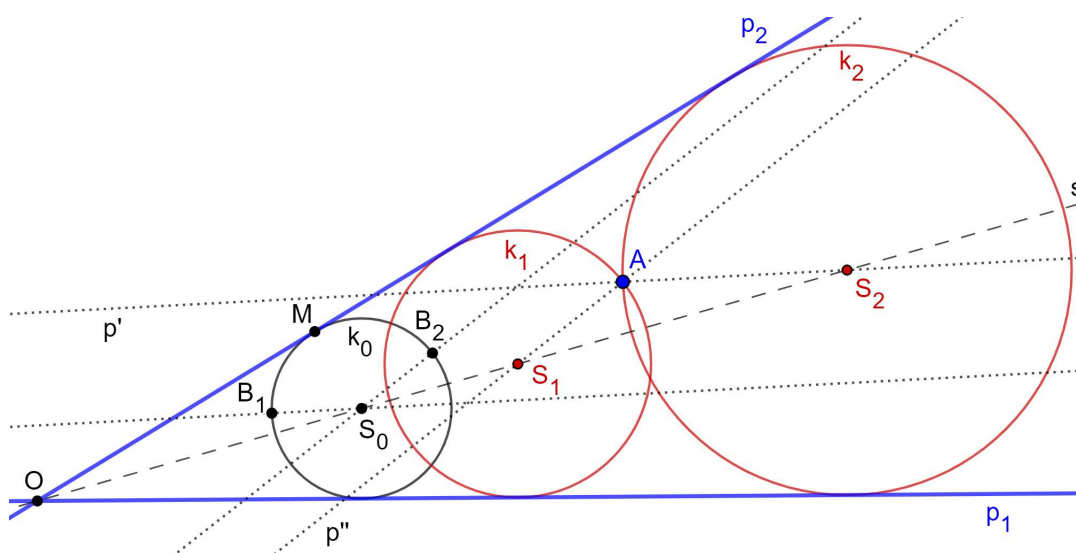
**Dokaz:**

Treba dokazati da kružnica  $k = k(S, |SA|)$  prolazi kroz točku  $A$  te da su joj pravci  $p_1$  i  $p_2$  tangente. Iz konstrukcije jasno je da prolazi kroz  $A$ , dokažimo još da su pravci  $p_1$  i  $p_2$  tangente dobivene kružnice.

Promotrimo homotetiju  $h$  sa središtem  $O$  koja preslikava točku  $B \mapsto A$ . Ta homotetija sigurno postoji jer su točke  $A, B$  i  $O$  kolinearne te je ta homotetija jedinstveno određena. Kako je  $BS_0 \parallel AS$ ,  $O, S$  i  $S_0$  kolinearne, kružnica  $k(S_0, |S_0B|)$  preslikava se homotetijom  $h$  u kružnicu  $k(S, |SA|)$ . Uočimo da se pravci  $p_1$  i  $p_2$  preslikaju u sebe (jer prolaze centrom homotetije). Kako su ti pravci tangente kružnice  $k(S_0, |S_0B|)$ , oni moraju biti i tangente njene slike po homotetiji, što znači da diraju kružnicu  $k(S, |SA|)$ .  $\square$

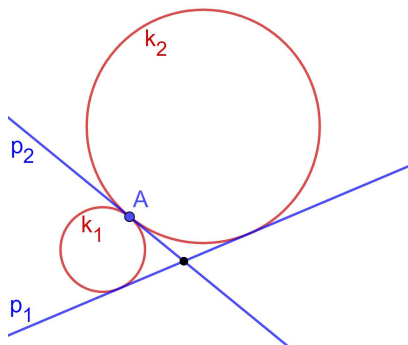
**Rasprava:**

U 2. koraku možemo povući i drugu simetralu, ali nećemo dobiti rješenja. Primijetimo da u 6. koraku pravac  $OA$  ima dva sjecišta s kružnicom  $k$  pa postoje dva rješenja. [Slika 1.27]



Slika 1.27: Konstrukcije svih rješenja problema Tpp, slučaj C

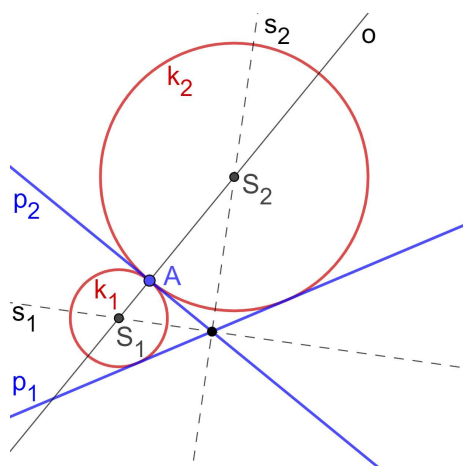
**Slučaj D.** Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su zadana dva neparalelna pravca  $p_1$  i  $p_2$  i točka  $A$  koja pripada jednom od danih pravaca. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.

**Analiza:**Slika 1.28: Analiza problema Tpp, slučaj  $D$ 

Središta traženih kružnica nalaze se na presjeku simetrala kutova i okomice u točki  $A$ . [Slika 1.28]

**Konstrukcija:**

Neka je točka  $A$  na pravcu  $p_2$ . Konstruiramo okomicu  $o$  iz  $A$  na  $p_2$ . Konstruiramo simetrale,  $s_1$  i  $s_2$ , kutova između pravaca  $p_1$  i  $p_2$ .  $S_1$  i  $S_2$  sjecišta su simetrala  $s_1$  i  $s_2$  s pravcem  $o$ . Tražene su kružnice  $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$  i  $k_2 = k(S_2, |S_2A|)$ . [Slika 1.29]

Slika 1.29: Konstrukcija problema Tpp, slučaj  $D$ **Raprava:**

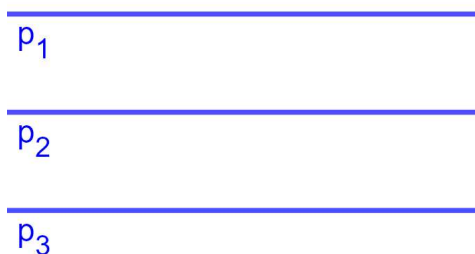
Uvijek postoje dva rješenja.

## 1.4 Problem ppp

**Problem.** U ravnini zadani su različiti pravci  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$ . Konstruirati kružnicu koja dira sva tri pravca.

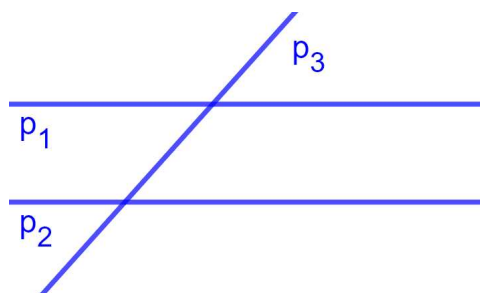
Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje triju pravaca.

1. Sva tri pravca međusobno su paralelna.  
Tada nema rješenja.



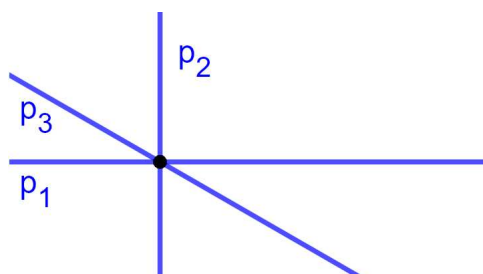
Slika 1.30: ppp,  $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$

2. Dva pravca su paralelna, treći ih siječe.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)

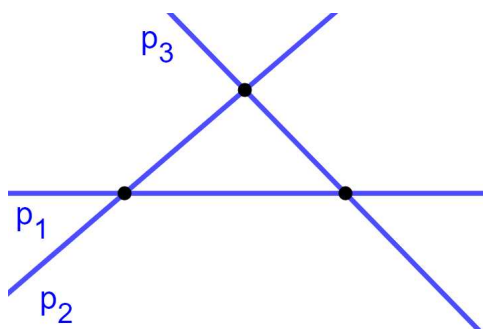


Slika 1.31: ppp,  $p_1 \parallel p_2$

3. Sva tri pravca prolaze kroz istu točku.  
Tada nema rješenja.

Slika 1.32:  $ppp$ , nikoja dva pravca nisu paralelna

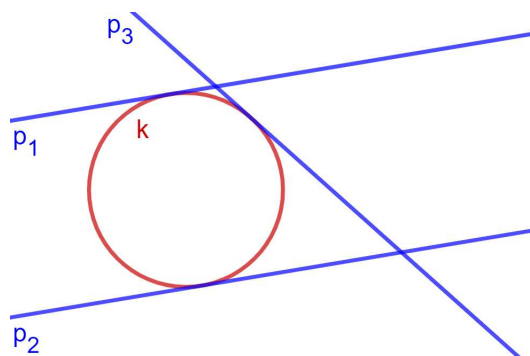
4. Nikoja dva pravca nisu paralelna, a svaka dva se sijeku u različitim točkama. Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)

Slika 1.33:  $ppp$ ,  $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$ 

**Slučaj A.** *Apolonijev problem  $ppp$  u situaciji kada su dva od zadanih pravaca paralelni, a treći ih siječe. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira sva tri pravca.*

**Analiza:**

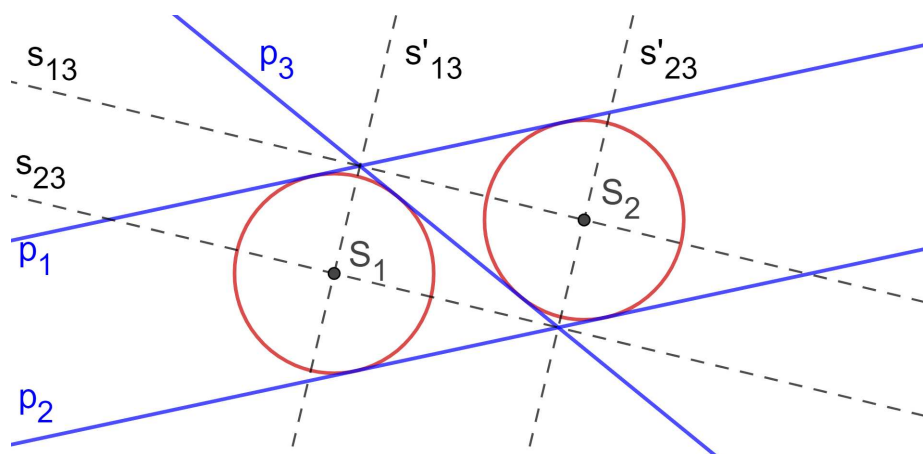
Neka su  $p_1$  i  $p_2$  paralelni pravci, te  $p_3$  pravac koji ih siječe. Središte kružnice koja dira dva pravca leži na simetrali kuta između tih pravaca (tj. jednoj od njih). Kako bi kružnica dirala pravce  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$  njeno središte treba biti na simetrali  $\sphericalangle p_1 p_3$  i  $\sphericalangle p_2 p_3$ .



Slika 1.34: Analiza problema ppp, slučaj A

**Konstrukcija:**

Neka su  $s_{13}$  i  $s'_{13}$  simetrale kutova koje zatvaraju pravci  $p_1$  i  $p_3$ , a  $s_{23}$  i  $s'_{23}$  simetrale kutova koje zatvaraju pravci  $p_2$  i  $p_3$ . Simetrale kutova uz presječnicu paralelnih pravaca sijeku se u dvije točke  $\{S_1\} = s'_{13} \cap s_{23}$  i  $\{S_2\} = s'_{23} \cap s_{13}$  i te su točke središta traženih kružnica. Neka je  $d$  udaljenost pravaca  $p_1$  i  $p_2$  tada su tražene kružnice  $k_1 = k(S_1, \frac{1}{2}d)$  i  $k_2 = k(S_2, \frac{1}{2}d)$ . (Slika 1.35)



Slika 1.35: Konstrukcija problema ppp, slučaj A

**Rasprava:**

Simetrale kutova između pravaca  $p_1$  i  $p_3$ , odnosno  $p_2$  i  $p_3$  uvijek određuju dva sjecišta (različita od sjecišta danih pravaca).



**Dokaz:**

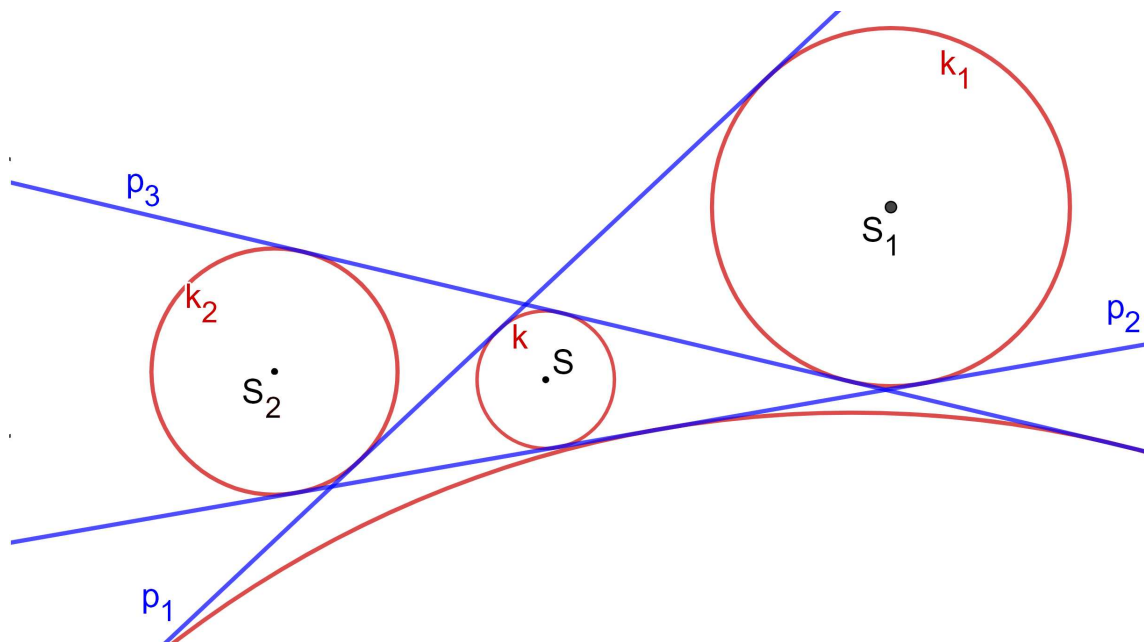
Želimo dokazati da kružnice  $k_1$  i  $k_2$  diraju sva tri zadana pravca.

Kako je  $S_1 \in s_{23}$  tada  $d(S_1, p_2) = d(S_1, p_3)$ . Također,  $S_1 \in s'_{13}$  tada  $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_3)$ .

Slijedi  $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_2)$ .

Pošto je  $d(S_1, p_1) + d(S_1, p_2) = d(p_1, p_2) = d$  slijedi da je  $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_2) = d(S_1, p_3) = \frac{d}{2}$ . Kružnica  $k_1$  dira sva tri pravca. Analogno dokazujemo za kružnicu  $k_2$ .  $\square$

**Slučaj B.** Apolonijev problem ppp u situaciji kada nikoja dva pravca nisu paralelna. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira sva tri pravca.

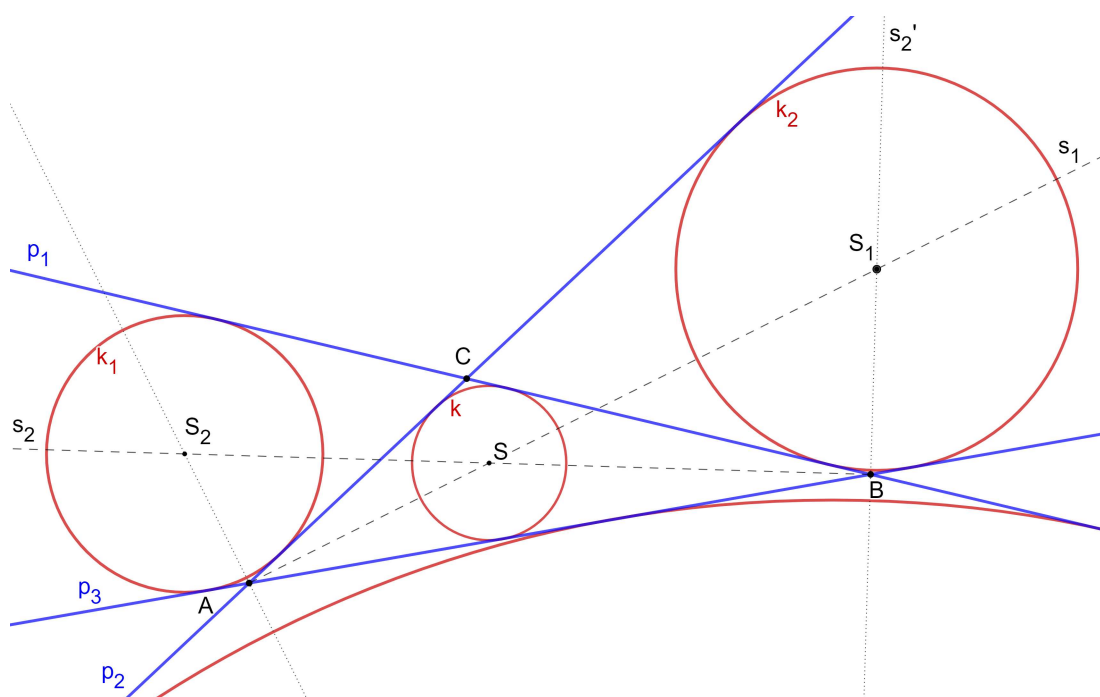
**Analiza:**

Slika 1.36: Analiza problema ppp, slučaj B

Središta traženih kružnica nalaze se na simetralama kutova trokuta što ga zatvaraju dani pravci. Simetrale svih triju unutrašnjih kutova sijeku se u središtu upisane kružnice tog trokuta, a simetrale po dvaju vanjskih kutova i jednog unutarnjeg kuta sijeku se u središtima pripisanih kružnica tog trokuta.

**Konstrukcija:**

1.  $p_2 \cap p_3 = \{A\}$ ,  $p_3 \cap p_1 = \{B\}$  te  $p_1 \cap p_2 = \{C\}$
2.  $s_1$  simetrala kuta  $\sphericalangle BAC$  i  $s_2$  simetrala kuta  $\sphericalangle CBA$
3.  $\{S\} = s_1 \cap s_2$
4. kružnica sa središtem u točki  $S$  radijusa  $d(S, p_2)$



Slika 1.37: Konstrukcija problema ppp, slučaj B

**Dokaz:** Središte kružnice  $S$ , nalazi se na simetrali  $s_1$  i na simetrali  $s_2$  što znači da je  $S$  jednako udaljena od pravaca  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$ . Kako po konstrukciji kružnica dira pravac  $p_2$ , dira sva tri pravca. □

**Rasprava:**

$s_1$  i  $s_2$  mogu biti unutarnje i vanjske simetrale kuta  $\sphericalangle BAC$ , odnosno  $\sphericalangle CBA$  pa dobijemo četiri središta i četiri kružnice.

Svaki se korak konstrukcije može provesti jer imamo tri neparalelna pravca od kojih se svaka dva sijeku u jednoj točki. Te tri točke tvore trokut kojemu zapravo konstruiramo upisanu i pripisane kružnice [Teorem 6, 8]



## Poglavlje 2

### Rješenja problema 5-9

U ovom ćemo poglavlju opisati konstrukcije Apolonijevih problema u kojima su jedan ili dva dana elementa kružnice, a preostali točke i/ili pravci. To su problemi TTk, Tpk, ppk, Tkk, pkk i kkk.

#### 2.1 Problem TTk

**Problem.** U ravnini zadani su kružnica  $k$  te točke  $A$  i  $B$ . Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke  $A$  i  $B$  te dira zadanu kružnicu.

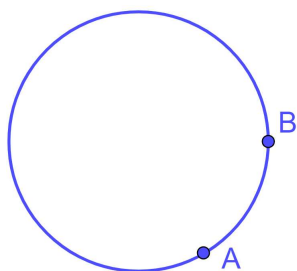
Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih objekata.

1. Jedna točka nalazi na kružnici a druga izvan (odnosno unutar) nje.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)

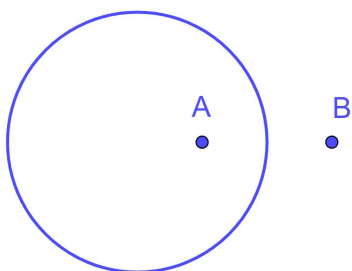


Slika 2.1: TTk,  $B \in k$   $A$  izvan/unutar  $k$

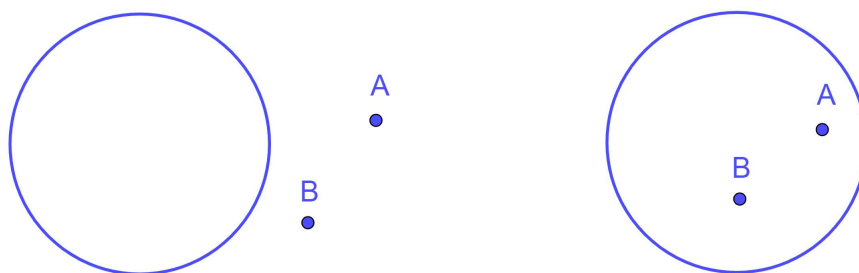
2. Obje točke su na kružnici.  
Tada nema rješenja.

Slika 2.2:  $TTk, A, B \in k$ 

3. Jedna točka je unutar, a druga izvan kružnice.  
Tada nema rješenja.

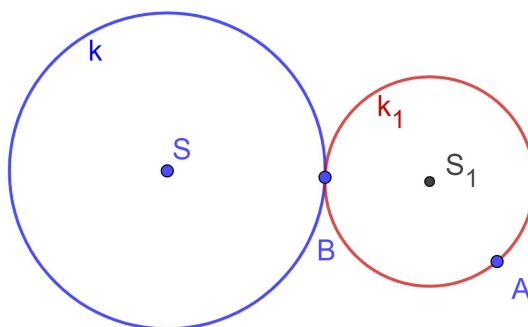
Slika 2.3:  $TTk, B$  izvan  $k, A$  unutar  $k$ 

4. Obje točke su izvan (odnosno unutar) kružnice.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)

Slika 2.4:  $TTk, A, B$  izvan/unutar  $k$

**Slučaj A.** Apolonijev problem TTK u situaciji kada su zadani kružnica  $k$ , točka  $A$  koja ne leži na kružnici i točka  $B$  na kružnici. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke  $A$  i  $B$  te dira zadanu kružnicu.

**Analiza:**



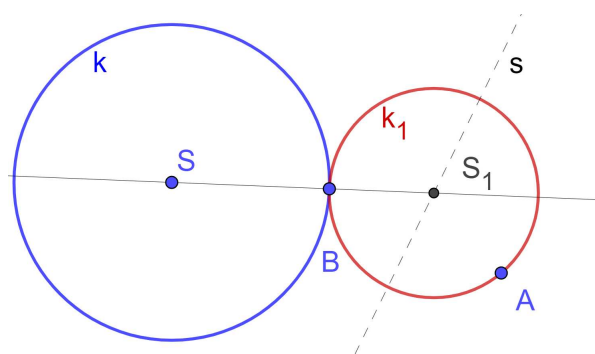
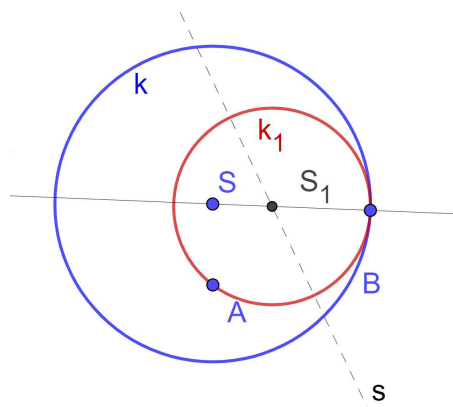
Slika 2.5: Analiza problema TTK, slučaj A

Neka je  $S$  središte zadane, a  $S_1$  središte tražene kružnice. Pošto je točka  $B$  diralište kružnica  $k$  i  $k_1$  točka  $S_1$  mora ležati na pravcu  $SB$ . Također, pošto je  $\overline{AB}$  tetiva kružnice  $k_1$ , točka  $S_1$  mora ležati simetrali dužine  $\overline{AB}$ .

**Konstrukcija:**

1. povučemo pravac  $SB$
2.  $s$  = simetrala dužine  $\overline{AB}$
3.  $SB \cap s = \{S_1\}$
4.  $k_1 = k(S_1, |S_1B|)$

Konstrukcija se provodi na isti način neovisno o tome je li  $A$  unutar ili izvan kružnice  $k$ .

Slika 2.6: Konstrukcija problema TTK, slučaj A, A izvan  $k$ Slika 2.7: Konstrukcija problema TTK, slučaj A, A unutar  $k$ **Rasprava:**

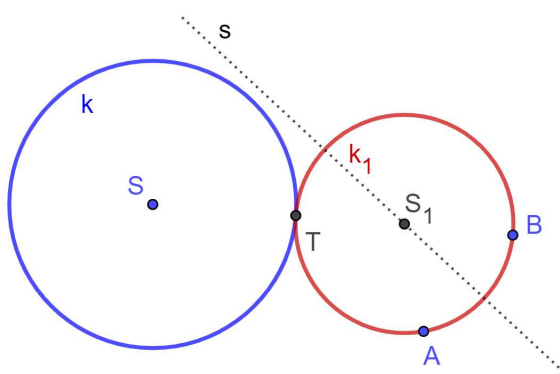
Ako je  $SB \parallel s$  nema rješenja, a to će se dogoditi ako je A na tangenti kružnice  $k$  u točki  $B$ .

**Dokaz:**

Trebamo dokazati da kružnica  $k_1 = k(S_1, |S_1B|)$  dira kružnicu  $k$  te prolazi točkama A i B. Točka B se nalazi na kružnici  $k_1$ . Točka  $S_1$  nalazi se na simetrali dužine  $\overline{AB}$  pa je  $|S_1A| = |S_1B|$ . Dakle i točka A se nalazi na kružnici  $k_1$ . Kako su točke  $S_1, S$  i B kolinearne, kružnice  $k$  i  $k_1$  diraju se u točki B.  $\square$

**Slučaj B.** Apolonijev problem TTK u situaciji kada su zadani kružnica  $k$  te točke A i B koje ne leže na toj kružnici. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke A i B te dira zadanu kružnicu.

Ovaj slučaj ćemo riješiti na dva načina.

**1. način****Analiza:**

Slika 2.8: Analiza problema TTK, slučaj B

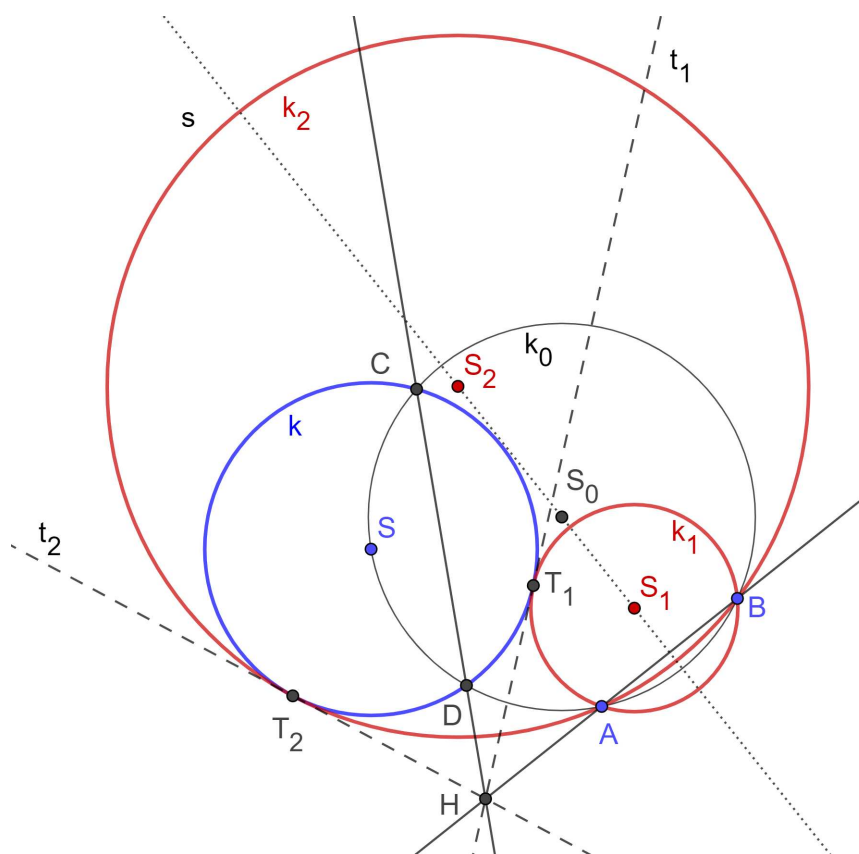
Geometrijsko mjesto središta kružnica koje prolaze točkama  $A$  i  $B$  nalazi se na simetrali dužine  $\overline{AB}$ . Zadana kružnica  $k$  i tražena kružnica  $k_1$  diraju se. Označimo diralište sa  $T$ . Označimo središte zadane kružnice sa  $S$ . Središte tražene kružnice mora se nalaziti i na pravcu  $ST$ . Trebamo konstruirati diralište  $T$ , odnosno zajedničku tangentu  $t$  kružnica  $k$  i  $k_1$ . Neka je  $H$  sjecište tangente  $t$  i pravca  $AB$ . Uočimo da je  $t$  potencijala kružnica  $k$  i  $k_1$ . Neka je  $k_0$  bilo koja kružnica kroz  $A$  i  $B$  koja siječe  $k$  u dvije točke  $C$  i  $D$ . Potencijala  $k_1$  i  $k_0$  je  $AB$  pa je  $H$  potencijalno središte svih triju kružnica. Zato pravac  $CD$ , koji je potencijala  $k$  i  $k_0$  prolazi kroz  $H$ . To nam omogućava konstrukciju točke  $H$ , a zatim i tangente  $t$  te točke  $T$ .

**Konstrukcija:**

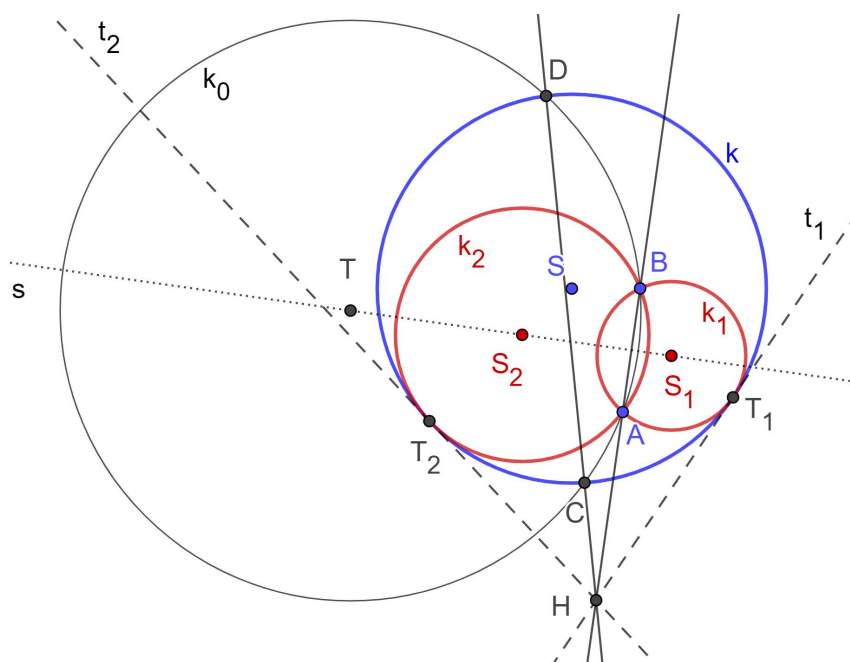
1. neka je  $s$  simetrala dužine  $\overline{AB}$
2. neka je  $k_0$  kružnica koja prolazi točkama  $A, B$  i  $S$
3.  $k_0 \cap k = \{C, D\}$
4.  $AB \cap CD = \{H\}$
5. konstruirajmo tangente  $t_1$  i  $t_2$  iz  $H$  na kružnicu  $k$
6.  $T_1, T_2$  su dirališta kružnice  $k$  i tangenata  $t_1$  i  $t_2$
7.  $k_1 = k(A, B, T_1), k_2 = k(A, B, T_2)$



Ukoliko se točke  $A$  i  $B$  nalaze unutar kružnice  $k$ , onda se u 3. koraku može dogoditi da se  $k_0$  i  $k$  ne sijeku. U tom slučaju modificiramo 2. korak te za središte kružnice  $k_0$  biramo neku točku  $T$  simetrale dužine  $\overline{AB}$  koja leži izvan kružnice  $k$ .



Slika 2.9: Konstrukcija problema TTK, slučaj B



Slika 2.10: Konstrukcija problema TTK, slučaj B (A i B unutar k)

**Dokaz:**

Trebamo dokazati da kružnica  $k_1 = k(A, B, T_1)$  prolazi kroz A i B te dira zadanu kružnicu  $k$ . Iz konstrukcije jasno je da  $k_1$  prolazi kroz A i B, dokažimo još da dira zadanu kružnicu  $k$ .

Znamo da je  $HT_1$  tangenta kružnice  $k$  i  $H \in AB, H \in CD, \{A, B, C, D\} \in k_0$ .

Potencija točke H u odnosu na  $k_0$ :  $HA \cdot HB = HC \cdot HD$

Potencija točke H u odnosu na  $k$ :  $HC \cdot HD = HT_1^2$

$\Rightarrow HA \cdot HB = HT_1^2 \Rightarrow HT_1$  je tangenta na  $k(A, B, T_1)$

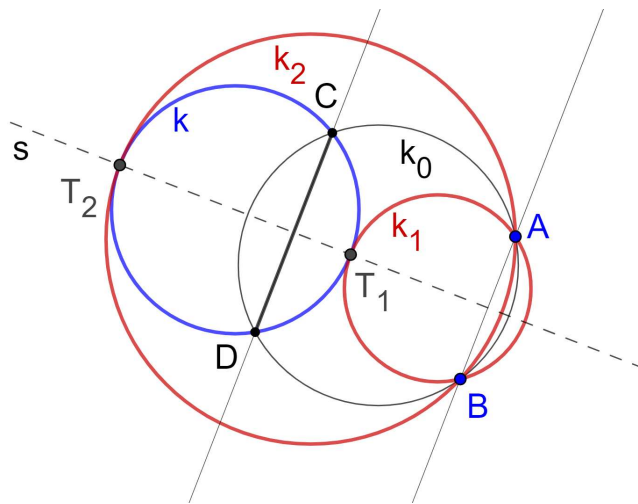
$\Rightarrow HT_1$  je zajednička tangenta kružnica  $k(A, B, T_1)$  i  $k$ , a točka  $T_1$  njihovo je diralište.

Analogno dokazujemo za kružnicu  $k_2$ . □

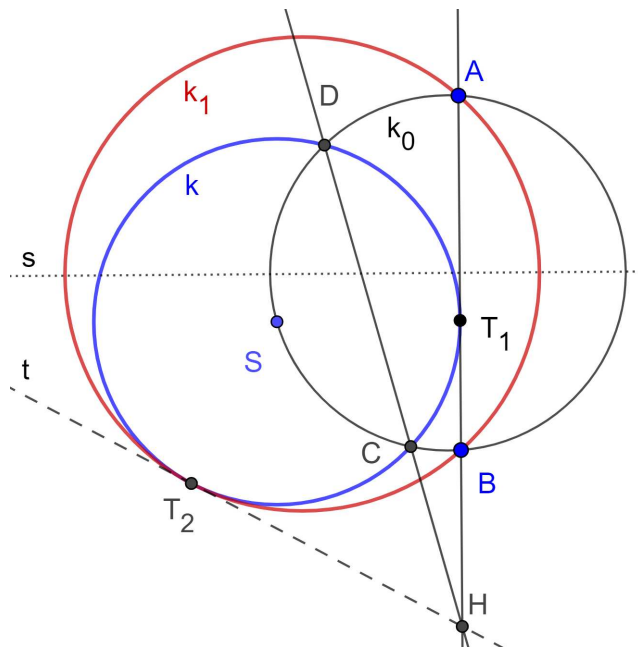
**Rasprava:**

Na prvi problem tijekom konstrukcije dolazimo u trećem koraku. Hoće li  $k_0$  uvijek sijeći  $k$ ? Pošto smo precizirali da je  $k_0$  kružnica kroz A, B i središte dane kružnice  $k$ . U slučaju kada su A i B izvan  $k$ , sigurno će postojati dva sjecišta C i D. Ukoliko se točke A i B nalaze unutar kružnice  $k$ , onda je dovoljno za središte odabrati neku točku T simetrale dužine  $\overline{AB}$  koja leži izvan kružnice  $k$  (konstrukcija riješena po napomeni iz opisa konstrukcije).

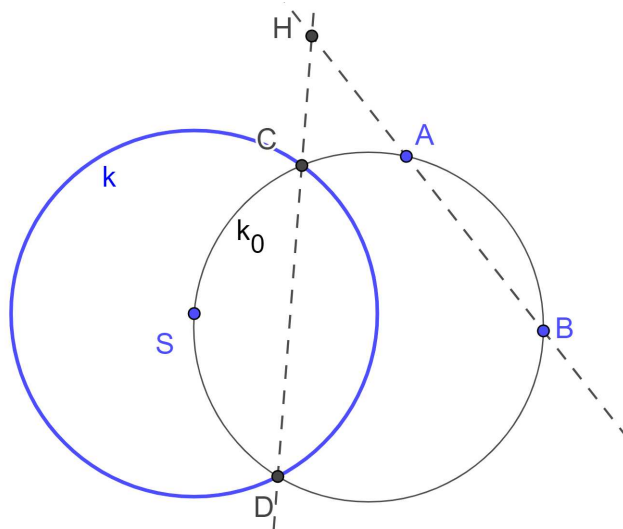
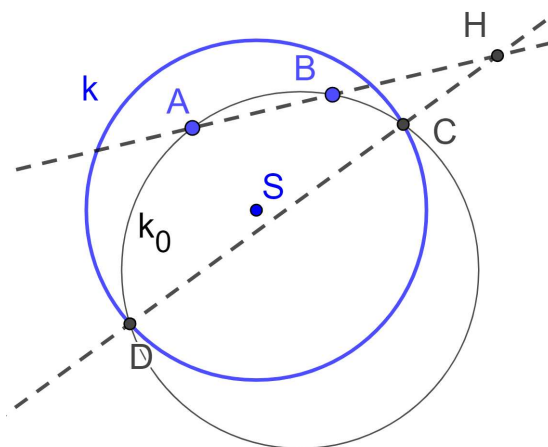
U četvrtom koraku jedini je problem ako simetrala dužine  $\overline{AB}$  prolazi točkom S, jer je tada  $AB \parallel CD$ . No, tada je konstrukcija jednostavnija.

Slika 2.11: TTK, slučaj  $B$ ,  $AB \parallel CD$ 

Ako pravac  $AB$  dira kružnicu  $k$  tada postoji samo jedno rješenje. S obzirom da je pravac  $AB$  tangenta kružnice i njegovo diralište je točka  $T_1$  koja se nalazi između točaka  $A$  i  $B$  nemoguće je konstruirati kružnicu tim točkama pa je jedino rješenje  $k_2 = k(A, B, T_2)$ .

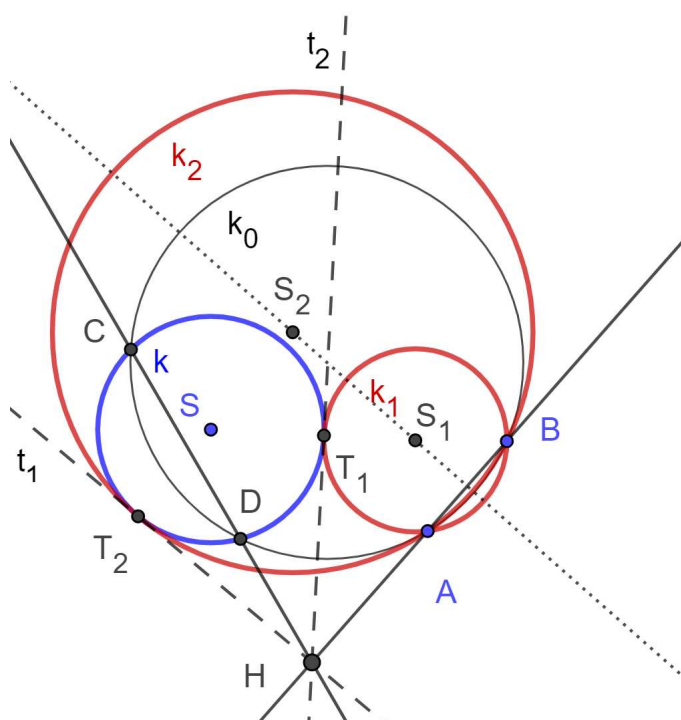
Slika 2.12: TTK, slučaj  $B$ ,  $AB$  tangenta

Kako bi u 5. koraku postojale tangente, točka  $H$  mora biti izvan kružnice  $k$ . Pretpostavimo da se točka  $H$  (sjecište pravaca  $AB$  i  $CD$ ) nalazi unutar kružnice  $k$ , dakle na dužini  $\overline{CD}$ . Kako su dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  tetive kružnice  $k_0$ , one se sijeku u točki  $H$ . Ali, to znači da je jedna od točaka  $A$  i  $B$  unutar kružnice  $k$ , a druga izvan, jer se nalaze s različitih strana pravca  $CD$ . Jasno je da u tom slučaju ne postoji kružnica koja prolazi kroz točke  $A$  i  $B$  te dira kružnicu  $k$ .

Slika 2.13: Položaj točke  $H$ Slika 2.14: Položaj točke  $H$

Rezimirajmo zaključke o broju rješenja:

- Ako je jedna od zadanih točaka  $A$  ili  $B$  unutar kružnice  $k$ , a druga izvan nema rješenja.
- Ako je jedna od zadanih točaka  $A$  ili  $B$  na kružnici  $k$ , a druga unutar ili izvan postoji jedno rješenje.
- Ako je pravac  $AB$  tangenta na kružnicu  $k$  postoji jedno rješenje.
- Kada su točke  $A$  i  $B$  obje unutar ili izvan kružnice  $k$  postoje dva rješenja.



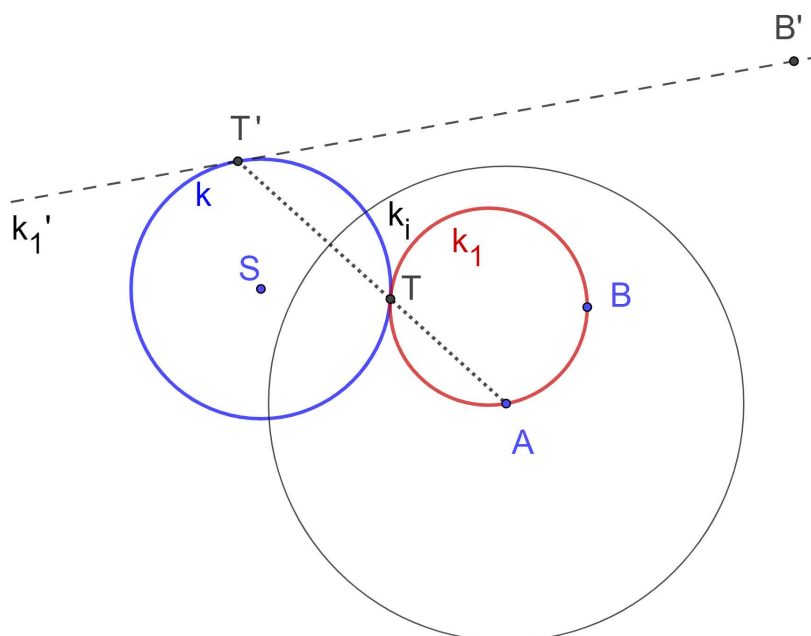
Slika 2.15: Konstrukcija problema TTK, slučaj B, oba rješenja

## 2. način - konstrukcija inverzijom

**Problem.** U ravnini zadani su kružnica  $k$  te točke  $A$  i  $B$  koje nisu na kružnici. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke  $A$  i  $B$  te dira zadanu kružnicu.

### Analiza:

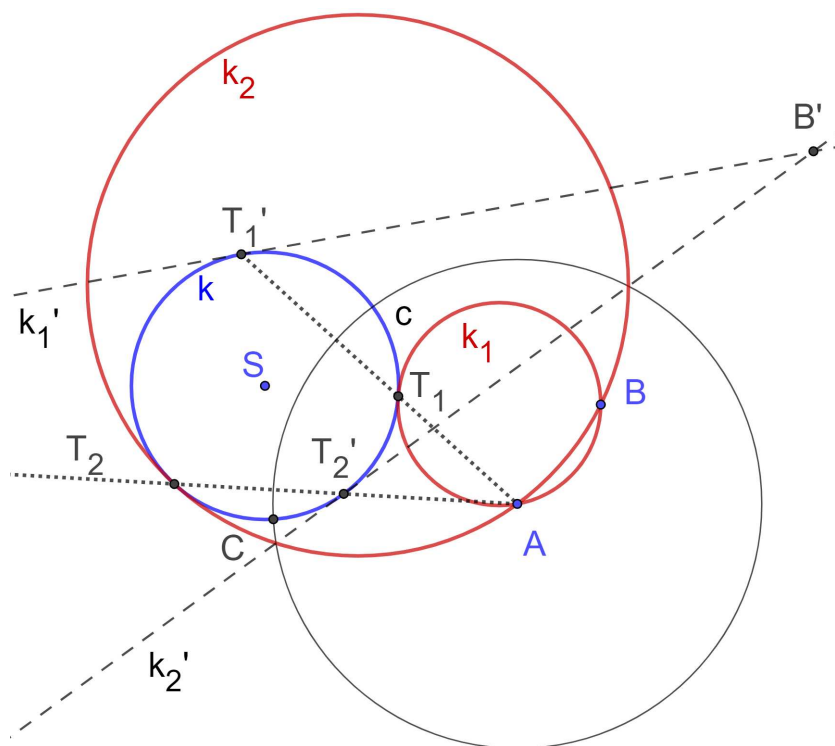
Promotrimo inverziju sa središtem  $A$ . Kako bi konstrukcija bila što jednostavnija, za kružnicu inverzije odabiremo kružnicu  $k_i$  koja je ortogonalna na kružnicu  $k$ . Tada se kružnica  $k$  preslika sama u sebe. Označimo s  $T$  diralište tražene kružnice i zadane. Točka  $B$  preslikat će se inverzijom u točku  $B'$ . Tražena kružnica  $k_1$  koja prolazi točkama  $A$  i  $B$  te dira kružnicu  $k$  preslikat će se u pravac koji prolazi točkama  $B'$  i  $T'$  te dira kružnicu  $k$  pa ćemo tražiti tangentu na  $k$  iz  $B'$  te će ona biti slika tražene kružnice. [Slika 2.16].



Slika 2.16: Analiza problema TTK, slučaj B (konstrukcija inverzijom)

**Konstrukcija:**

1. konstruiramo kružnicu inverzije  $k_i$  sa središtem u  $A$  koja je ortogonalna na  $k$
2. preslikamo  $B$  u točku  $B'$  inverzijom
3.  $k'_1, k'_2 =$  tangente iz  $B'$  na  $k$
4.  $k'_1 \cap k = \{T'_1\}, k'_2 \cap k = \{T'_2\}$
5.  $T'_1 A \cap k = \{T_1, T'_1\}, T'_2 A \cap k = \{T_2, T'_2\}$
6.  $k_1 = k(A, B, T_1), k_2 = k(A, B, T_2)$



Slika 2.17: Konstrukcija problema TTK, slučaj B (konstrukcija inverzijom)

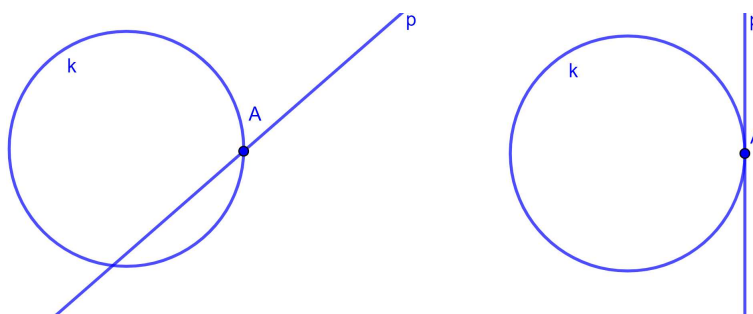
Rasprava ispuštena jer je provedena ranije. Broj rješenja ovisi o položaju točke  $B'$  u odnosu na kružnicu  $k$ , te o tome prolaze li tangente  $k'_1$  i  $k'_2$  točkom  $A$ . Dokaz je jasan iz analize.

## 2.2 Problem Tpk

**Problem.** U ravnini zadani su kružnica  $k$ , pravac  $p$  i točka  $A$ . Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku  $A$  te dira zadanu kružnicu  $k$  i pravac  $p$ .

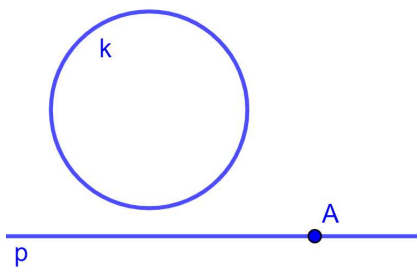
Promotrimo prvo moguće položaje zadanih objekata.

1. Točka  $A$  sjecište je zadanog pravca  $p$  i kružnice  $k$ .  
Ako je pravac  $p$  tangenta na kružnicu  $k$  taj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije (Slučaj A), a u slučaju da pravac  $p$  nije tangenta nema rješenja.



Slika 2.18:  $Tpk, \{A\} = p \cap k$

2. Točka  $A$  nalazi se na pravcu  $p$ , ali ne i na kružnici  $k$ .  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)  
Mogući su različiti međusobni položaji pravca  $p$  i kružnice  $k$ .



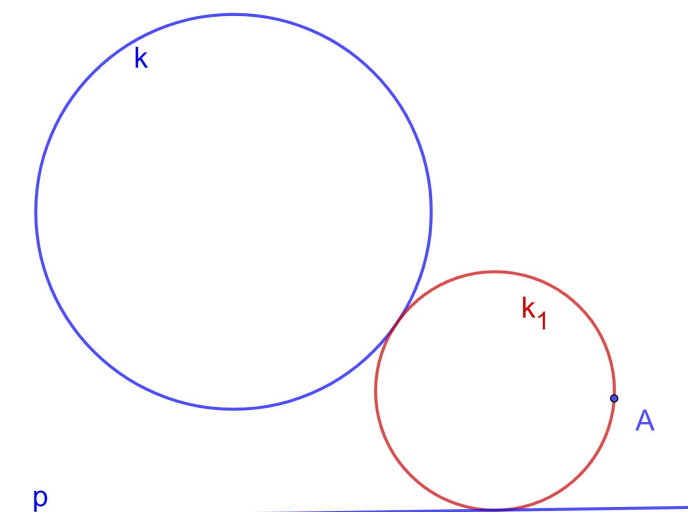
Slika 2.19:  $Tpk, A \in p$

3. Točka  $A$  nalazi se na kružnici  $k$ , ali ne na pravcu  $p$ .  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj C)  
Mogući su različiti međusobni položaji pravca  $p$  i kružnice  $k$ .



4. Točka  $A$  se ne nalazi na kružnici  $k$  niti na pravcu  $p$ .  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj D)

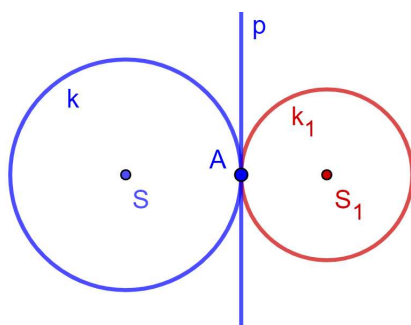
[Slika 2.33].



Slika 2.20: Kružnica koja dodiruje zadanu kružnicu, pravac i točku

**Slučaj A.** Apolonijev problem  $Tpk$  u situaciji kada je točka  $A$  sjecište zadanog pravca  $p$  i kružnice  $k$ , a pravac  $p$  tangenta je na kružnicu  $k$ . Trebamo konstruirati kružnicu kroz zadanu točku koja dodiruje zadani pravac i zadanu kružnicu.

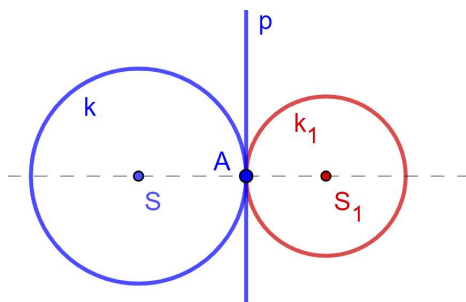
**Analiza:**



Slika 2.21: Analiza problema  $Tpk$ , slučaj A

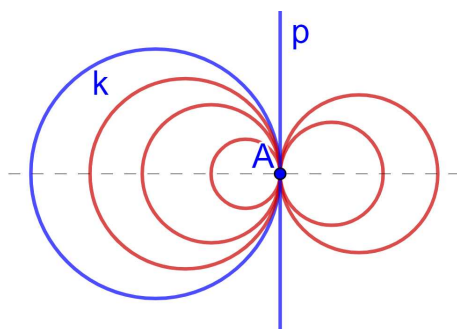
Neka je  $S$  središte zadane, a  $S_1$  središte tražene kružnice. Uočavamo da središte tražene kružnice može biti bilo koja točka na pravcu  $SA$ .

**Konstrukcija:** Povučemo pravac  $AS$ . Tražena kružnica je  $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$  gdje je  $S_1 \in p$ .



Slika 2.22: Konstrukcija problema Tpk, slučaj A

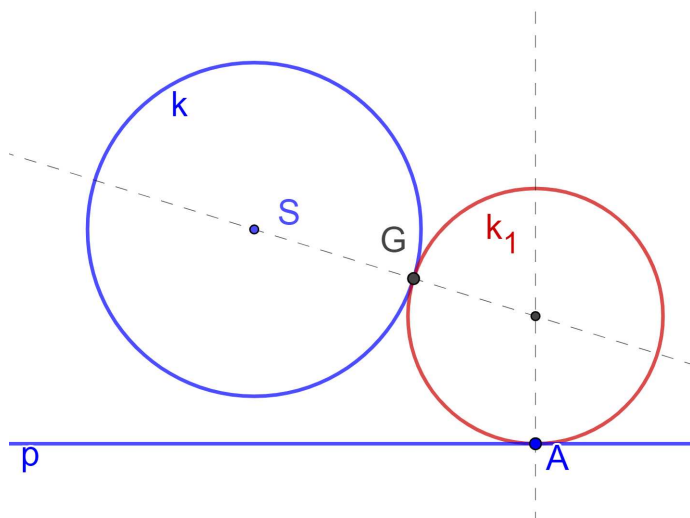
**Rasprava:** Pošto je  $S_1$  proizvoljna točka na pravcu  $SA$  ovaj slučaj ima beskonačno rješenja.



Slika 2.23: Konstrukcija problema Tpk, slučaj A, neka rješenja

**Slučaj B.** Apolonijev problem Tpk u situaciji kada se točka  $A$  nalazi na pravcu  $p$  a ne nalazi se na kružnici  $k$ . Trebamo konstruirati kružnicu kroz zadanu točku koja dodiruje zadani pravac i zadanu kružnicu.

**Analiza:**

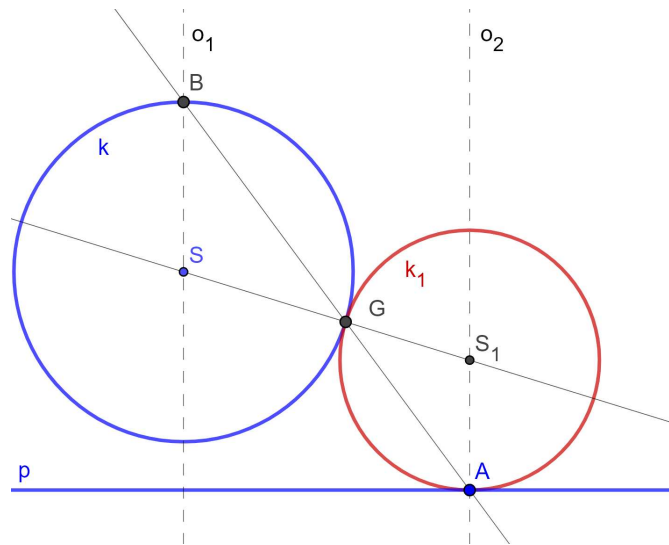


Slika 2.24: Analiza problema Tpk, slučaj B

Neka je  $S$  središte zadane kružnice. Želimo odrediti središte tražene kružnice  $k_1$ . Neka je  $G$  diralište zadane i tražene kružnice. Točka  $G$  ujedno je centar sličnosti zadane i tražene kružnice, središte kružnice  $k_1$  nalazi se na pravcu  $SG$ . Pravac  $p$  je tangenta tražene kružnice i  $A \in p$ , njeno se središte nalazi na okomici iz  $A$  na  $p$ .

**Konstrukcija:**

1. okomica  $o_1$  iz  $S$  na  $p$
2.  $B$  je sjecište  $o_1$  i  $k$ .
3.  $G$  je drugo sjecište  $AB$  i  $k$  (različito od  $B$ )
4. okomica  $o_2$  iz  $A$  na  $p$
5.  $SG \cap o_2 = \{S_1\}$
6.  $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$

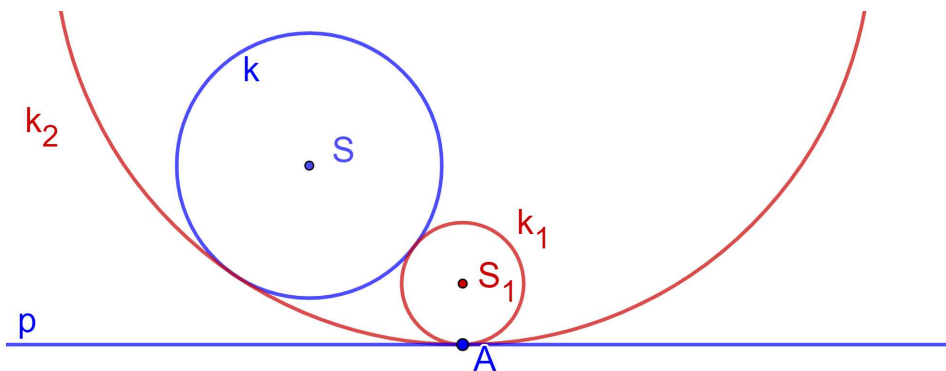


Slika 2.25: Konstrukcija problema Tpk, slučaj B

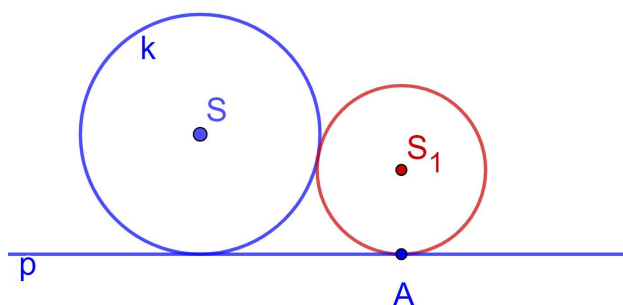
Ista konstrukcija vrijedi neovisno o tome sijeku li se  $p$  i  $k$  te je li  $A$  izvan ili unutar  $k$ .

### Rasprava:

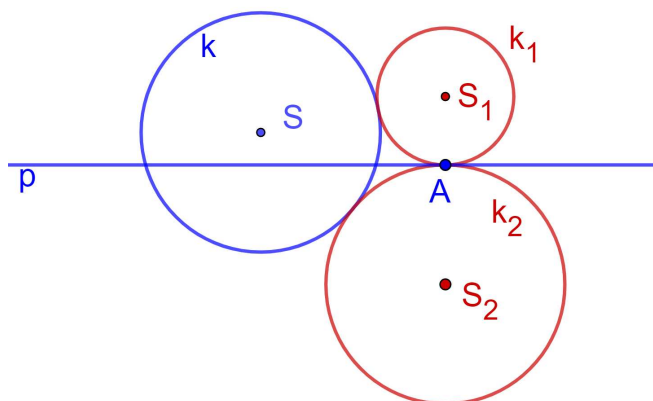
U 2. koraku konstrukcije okomica  $o_1$  uvijek siječe kružnicu  $k$  u dvije točke ( $\{B, C\} = o_1 \cap k$ ) pa postoje dva rješenja, osim ako  $C \in p$  tj. kružnica  $k$  dira pravac  $p$ , tada postoji samo jedno rješenje te je pravac  $p$  tangenta kružnice  $k$ .



Slika 2.26: Konstrukcija problema Tpk, slučaj B, sva rješenja

Slika 2.27: Konstrukcija problema Tpk, slučaj  $B$ ,  $k$  dira  $p$ 

Ako kružnica  $k$  siječe pravac  $p$ , postoje dva rješenja.

Slika 2.28: Konstrukcija problema Tpk, slučaj  $B$ ,  $k$  siječe  $p$ 

Problem nastaje u 5. koraku ako  $G \in o$  tj. ako je  $A \in o_1$ . Tada su  $A, B, S, G$  kolinearne i nije određen  $S_1$ . Ali, u tom slučaju jednostavno konstruiramo kružnice s promjerima  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ .

**Dokaz:**

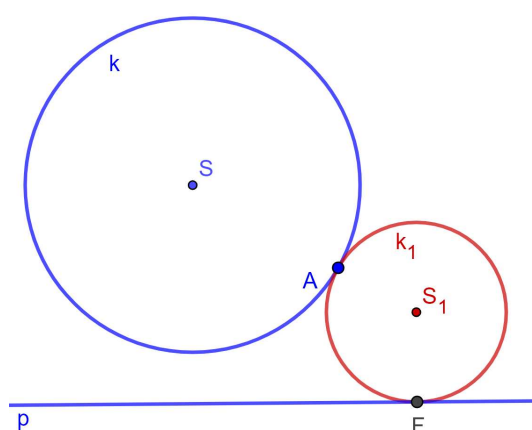
Trebamo dokazati da kružnica  $k(S_1, |S_1A|)$  prolazi kroz  $A$ , dira pravac  $p$  te dira kružnicu  $k$ . Očito je da  $k_1$  prolazi kroz  $A$ , a dira pravac  $p$  jer je  $S_1$  na  $o_2$ . Trebamo još dokazati da  $k_1$  dira  $k$ .

Točke  $S, G$  i  $S_1$  su kolinearne,  $G \in k$ . Trokuti  $\triangle AS_1G$  i  $\triangle BSG$  su slični jer su im sve stranice paralelne pa  $|BS| = |GS| \Rightarrow |AS_1| = |GS_1|$ , pa je  $G \in k_1$ , a to znači zbog kolinearnosti  $S, G$  i  $S_1$  da se  $k_1$  i  $k$  diraju u  $G$ .

□

**Slučaj C.** Apolonijev problem Tpk u situaciji kada se točka  $A$  nalazi na kružnici  $k$ , a ne nalazi se na pravcu  $p$ . Trebamo konstruirati kružnicu kroz zadanu točku koja dodiruje zadani pravac i zadanu kružnicu.

**Analiza:**

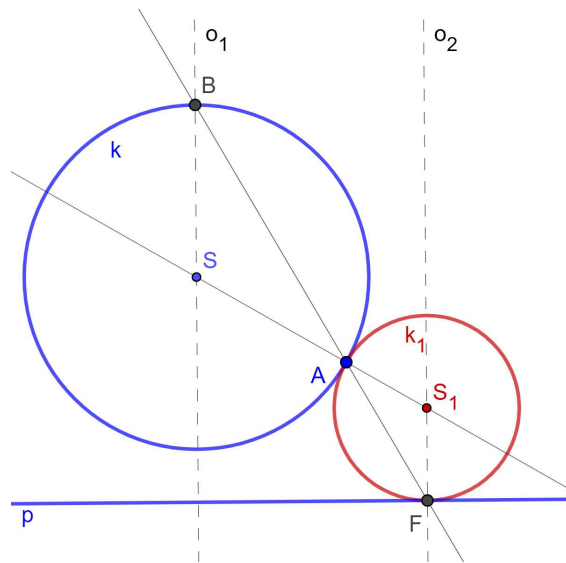


Slika 2.29: Analiza problema Tpk, slučaj C

Neka je  $S$  središte zadane kružnice, a  $F$  točka u kojoj tražena kružnica  $k_1$  dira pravac  $p$ . Želimo odrediti središte tražene kružnice  $k_1$ . Pošto je  $A$  diralište tražene i zadane kružnice, središte kružnice  $k_1$  mora se nalaziti na pravcu  $SA$ , također mora se nalaziti na okomici iz  $F$  na pravac  $p$ , jer je  $p$  tangenta tražene kružnice. Kao u slučaju B - ovdje je  $A$  centar sličnosti, što nam omogućiti da odredimo točku  $F$ .

**Konstrukcija:**

1. okomica  $o_1$  iz  $S$  na  $p$
2.  $o_1 \cap k = \{B\}$
3.  $AB \cap p = \{F\}$
4. okomica  $o_2$  iz  $F$  na  $p$
5.  $SA \cap o_2 = S_1$
6.  $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$

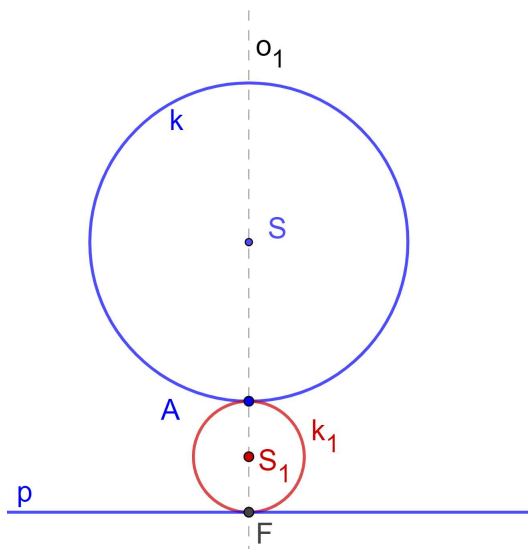


Slika 2.30: Konstrukcija problema Tpk, slučaj C

**Rasprava:**

U 2. koraku konstrukcije okomica  $o_1$  siječe kružnicu  $k$  u dvije točke pa ovaj slučaj ima dva rješenja.

U 3. koraku ako je  $AB \parallel p$  tada je  $A = B$  te postoji samo jedno rješenje.

Slika 2.31: Problema Tpk, slučaj C,  $A \in o_1$

U 5. koraku ako je  $SA \parallel o_2$  tj.  $A \in o_1$  tada  $SA \perp p$  te postoji samo jedno rješenje. Također, u slučaju da  $k$  dira  $p$ , zadatak ima samo jedno rješenje.

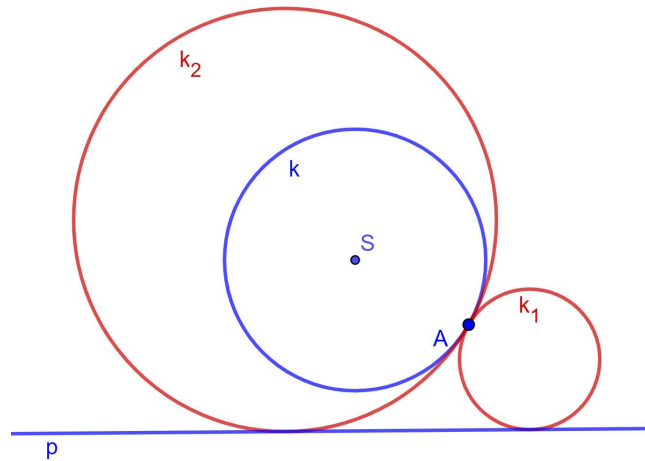
**Dokaz:**

Trebamo dokazati da kružnica  $k(S_1, |S_1A|)$  prolazi kroz  $A$ , dira pravac  $p$  u točki  $F$  te dira kružnicu  $k$ . Očito je da  $k_1$  prolazi kroz  $A$ , a kako su  $A, S$  i  $S_1$  kolinearne,  $k_1$  dira  $k$ .

Trebamo još dokazati da  $k_1$  dira pravac  $p$ .

Točke  $S, A$  i  $S_1$  su kolinearne. Trokuti  $\triangle AS_1F$  i  $\triangle BSA$  su slični jer su im sve stranice paralelne pa  $|BS| = |AS| \Rightarrow |AS_1| = |FS_1|$ , pa je  $F \in k_1$ . Kako je  $S_1F \perp p$ , kružnica  $k_1$  dira pravac  $p$ .

□

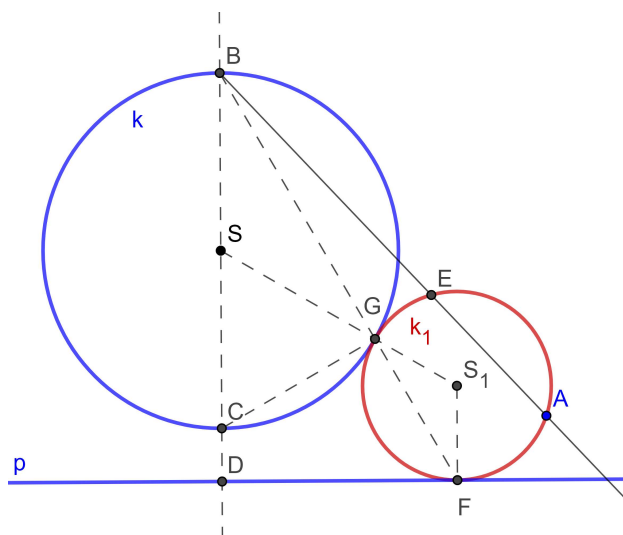


Slika 2.32: Konstrukcija problema Tpk, slučaj C, sva rješenja



**Slučaj D.** Zadani su kružnica  $k$ , pravac  $p$  i točka  $A$  takvi da  $A \notin p, A \notin k$ . Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku  $A$  te dira zadanu kružnicu  $k$  i pravac  $p$ .

**Analiza:**



Slika 2.33: Analiza slučaja Tpk, slučaj D

Kako bismo si olakšali problem, konstrukciju želimo svesti na konstrukciju problema  $TTk$  [Poglavlje 2.1]. Dakle, želimo pronaći još jednu točku na traženoj kružnici. Označimo traženu kružnicu s  $k_1$ , a njeno središte  $S_1$ . Označimo s  $S$  središte zadane kružnice  $k$ . Neka su  $\{B, C\}$  sjecišta kružnice  $k$  s okomicom iz  $S$  na  $p$  te neka je sjecište iste okomice s pravcem  $p$  točka  $D$ . Neka je  $F$  diralište pravca  $p$  i kružnice  $k_1$ , a  $G$  diralište kružnica  $k_1$  i  $k$ . Točka  $G$  je ujedno i unutarnji ili vanjski centar sličnosti tih dviju kružnica pa leži i na pravcu  $BF$ .

Povucimo pravac  $AB$  te drugo sjecište s traženom kružnicom označimo s  $E$ .

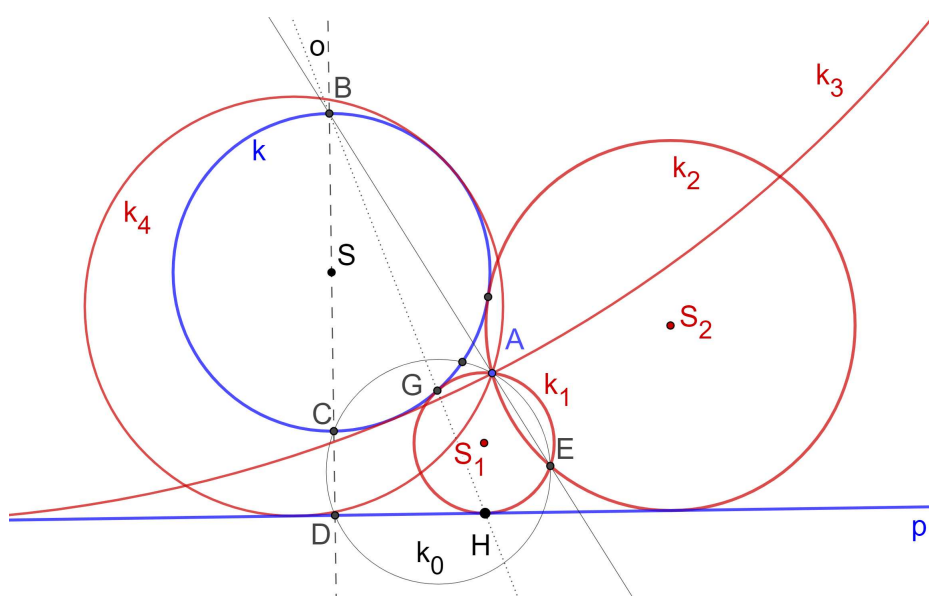
Promotrimo sada sliku 2.33. Pošto je  $\overline{BC}$  promjer kružnice kut  $\angle BGC$  je pravi. Također, i kut  $\angle FDB$  je pravi. Možemo zaključiti da je četverokut  $DFGC$  tetivan.

Po teoremu o potenciji točke [Teorem 1] tada vrijedi:  $BC \cdot BD = \{\text{potencija u odnosu na kružnicu opisanu četverokutu } DFGC\} = BG \cdot BF = \{\text{potencija u odnosu na traženu kružnicu}\} = BA \cdot BE$ . Slijedi, četverokut  $DAEC$  je tetivan, odnosno točke  $D, A, E$  i  $C$  pripadaju istoj kružnici. Zaključujemo, točka  $E$  je sjecište kružnice  $k(DAC)$  i pravca  $BA$ .

**Konstrukcija:**

1. okomica  $o$  iz  $S$  na  $p$

2.  $o \cap k = \{B, C\}, o \cap p = \{D\}$
3.  $k_0 = k(ACD)$
4.  $AB \cap k_0 = \{E\}$  (različito od  $A$ )
5. konstruiramo, primjenom konstrukcije TTK iz cjeline 2.1, kružnicu  $k_1$  koja dira kružnicu  $k$  i prolazi točkama  $A$  i  $E$ .



Slika 2.34: Konstrukcija problema Tpk, slučaj D

**Dokaz:**

Kružnica  $k_1$  prolazi kroz točke  $A$  i  $E$  te dira zadanu kružnicu  $k$ . Trebamo dokazati da dira pravac  $p$ .

Znamo da je  $G$  diralište  $k_1$  i  $k$ . Neka je  $H$  sjecište pravaca  $BG$  i  $p$ .

Kut  $\sphericalangle BGC = 90^\circ$  po Talesovom teoremu,  $\sphericalangle CDH = 90^\circ$  po konstrukciji.

Zato je  $CDHG$  tetivni četverokut te mu možemo opisati kružnicu  $\tilde{k}$ . Potencijala od  $k_0$  i  $\tilde{k}$  je pravac  $CD$ . Kako je potencijala kružnica  $k_1$  i  $k_0$  pravac  $AE$ , a  $CD \cap AE = \{B\}$  slijedi da je  $B$  radikalno središte kružnica  $k_0$ ,  $k_1$  i  $\tilde{k}$  pa potencijala od  $k_1$  i  $\tilde{k}$  prolazi kroz  $B$ . Kako se  $G$  nalazi na  $k_1$  i na  $\tilde{k}$ , potencijala tih dviju kružnica je pravac  $BG$ , a to zapravo znači da točka  $H$  leži na kružnici  $k_1$  jer je  $H$  drugo sjecište pravca  $BG$  s kružnicom  $\tilde{k}$ .  $\square$

**Rasprava:**

Važno je napomenuti da se sva četiri rješenja konstrukcije dobiju zamjenom uloga točke  $B$  i  $C$ .

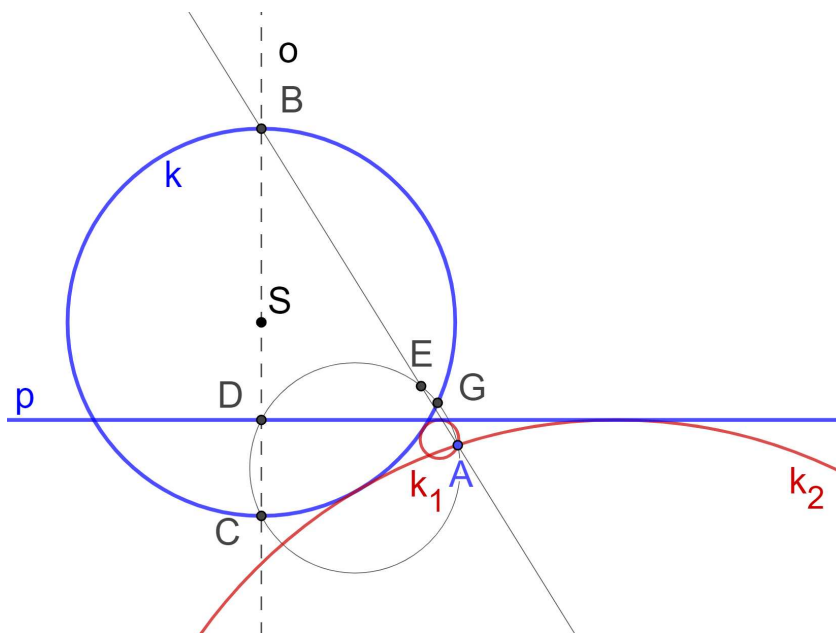
U drugom koraku ako je  $C = D$  postoje tri rješenja.

Problem postoji u 3. koraku ako su točke  $A, C$  i  $D$  kolinearne. Taj ćemo slučaj posebno razmotriti (Slučaj E)

U 5. koraku dobijemo po najviše dva rješenja, ali zamjenom uloga točaka  $B$  i  $C$  dobijemo još dva rješenja.

Ako pravac  $AB$  dira kružnicu  $k(ACD)$  u  $A$ . Tada se točke  $A$  i  $E$  podudaraju te tada postoje tri rješenja.

Ako pravac  $p$  siječe kružnicu  $k$ , sjecište  $D$  pravca  $p$  i okomice  $o$  nalazi se unutar kružnice  $k$  pa nam otpadaju dva rješenja.



Slika 2.35: Konstrukcija problema  $Tp_k$ , slučaj  $D, p \cap k \neq \emptyset$

Rezimirajmo još brojnost rješenja u ovisnosti o položaju pravca  $p$  i kružnice  $k$ :

1.  $p$  i  $k$  se ne sijeku

- Ako je  $A$  unutar  $k$  nema rješenja.
- Ako je  $A$  na pravcima koji diraju  $k$ , a paralelni su s  $p$  postoje tri rješenja.
- Ako je  $A$  izvan  $k$  postoje 4 rješenja.

2.  $p$  i  $k$  se diraju

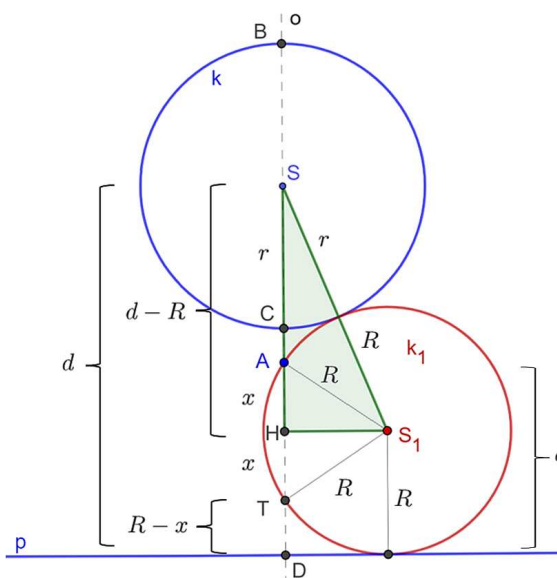
- Ako je  $A$  unutar  $k$  jedno rješenje.
- Ako je  $A$  na paralelnim pravcima s  $p$  koji diraju  $k$  postoji jedno rješenje.
- Ako je  $A$  na pravcima okomitim na  $p$  koji diraju  $k$  postoje tri rješenja, inače postoje dva rješenja.

3.  $p$  i  $k$  se sijeku

- Ako je  $A$  unutar  $k$  postoje dva rješenja.
- Ako je  $A$  na paralelnim pravcima s  $p$  koji diraju  $k$  postoji jedno rješenje, inače postoje dva rješenja.

**Slučaj E.** Zadani su kružnica  $k = k(S, r)$ , pravac  $p$  i točka  $A$  takvi da se točka  $A$  nalazi na okomnici iz  $S$  na  $p$ . Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku  $A$  te dira zadanu kružnicu  $k$  i pravac  $p$ .

Ovaj problem ćemo riješiti na dva načina.

**1. način****Analiza:**

Slika 2.36: Analiza problema Tpk, slučaj E, primjena Pitagorina poučka

Neka je  $o$  okomica iz  $S$  na  $p$ . Neka je  $k_1 = k(S_1, R)$  tražena kružnica. Neka je  $H$  sjecište okomice iz  $S_1$  na  $o$ .  $T$  i  $A$  neka su sjecišta kružnice  $k_1$  sa  $o$ . Pošto je trokut  $ATS_1$  jednakokratan a  $H$  mu je nožište visine na stranicu  $AT$ , udaljenosti  $|AH|$  i  $|TH|$  su jednake. Označimo udaljenost točke  $S$  do točke  $D$  sa  $d$ , a udaljenost  $A$  do  $D$  sa  $a$ . Primjenimo Pitagorin poučak na trokut  $\triangle SS_1H$ . Imamo:

$$|S_1H|^2 + |HS|^2 = |SS_1|^2$$

$|HS| = d - R$ ,  $|SS_1| = R + r$ . Iz trokuta  $\triangle TS_1H$  imamo  $|S_1H|^2 = R^2 - x^2$  (slika 2.36) pa slijedi:

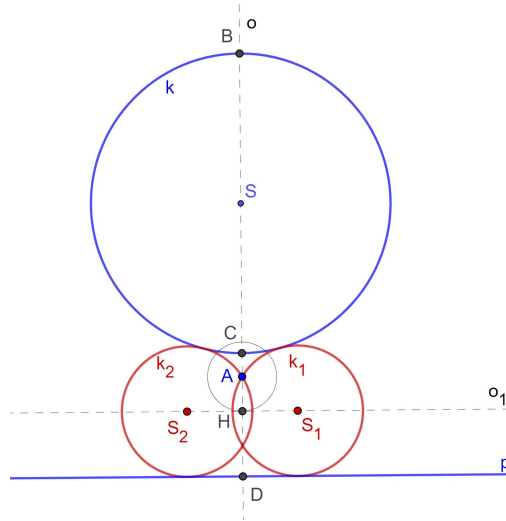
$$\begin{aligned} (d - R)^2 + (R^2 - x^2) &= (R + r)^2 \\ x &= a - R \text{ pa vrijedi:} \\ d^2 - 2dR + R^2 + R^2 - (a - R)^2 &= R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 \\ d^2 - 2dR + R^2 - a^2 + 2aR - R^2 &= 2Rr + r^2 \\ R &= \frac{d^2 - a^2 - r^2}{2(r - a + d)} \end{aligned}$$

$R$  je radijus tražene kružnice te je dalje lako konstruirati.

### Konstrukcija:

Neka je  $a = d(A, D)$ ,  $d = d(S, D)$  te  $r$  radijus kružnice  $k$ , a  $o$  okomica iz  $S$  na  $p$ .

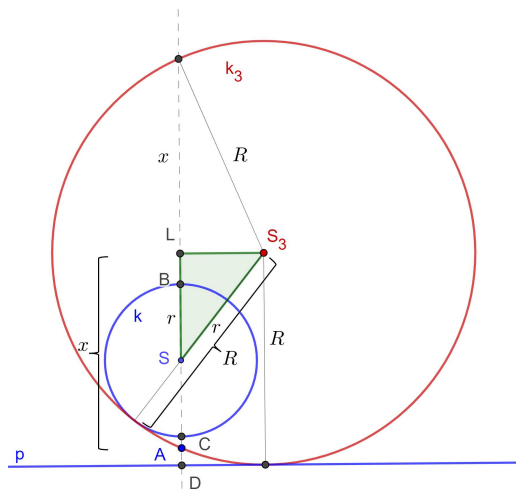
1. konstruirajmo duljine  $R = \frac{d^2 - a^2 - r^2}{2(r - a + d)}$  i  $x = |a - R|$
2.  $k(A, x) \cap o = \{H\}$
3.  $o_1 =$  okomica iz  $H$  na  $o$
4.  $k(A, R) \cap o_1 = \{S_1, S_2\}$
5.  $k_1 = k(S_1, R), k_1 = k(S_1, R)$



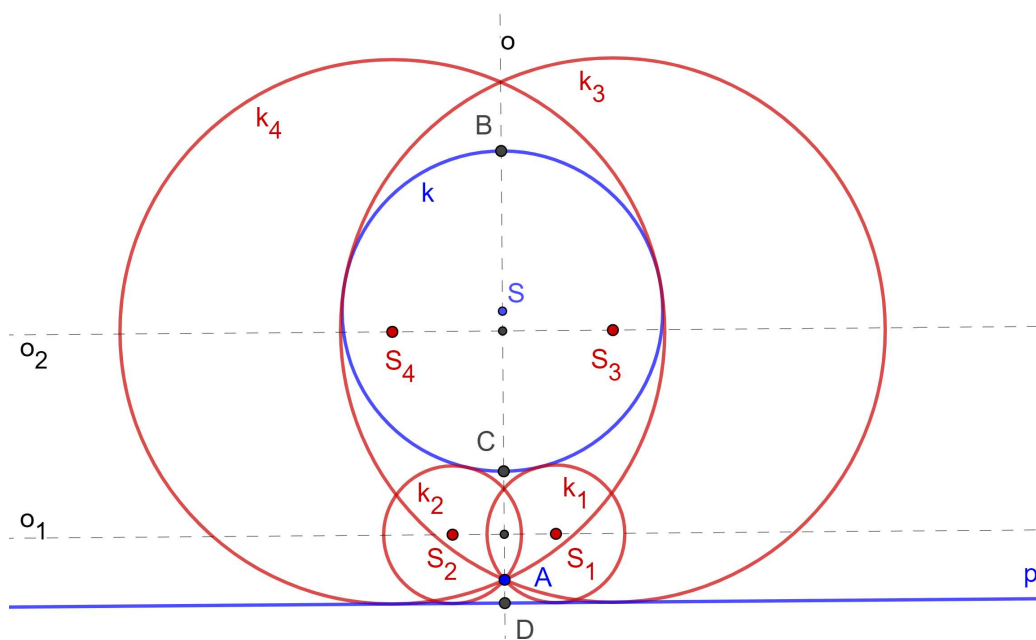
Slika 2.37: Konstrukcija problema Tpk, slučaj E

**Rasprava:**

Ako se  $A$  nalazi unutar kružnice  $k$  te ako je  $r - a + d \leq 0$  konstrukciju nije moguće provesti. Zapišimo se može li brojnik  $d^2 - a^2 - r^2$  biti negativan. Kako je  $d > a > r$  brojnik će uvijek biti pozitivan. Međutim, na sličan način se iz trokuta  $\triangle SS_3L$  na slici 2.38 dobije radijus  $R_1 = \frac{d^2 - a^2 - r^2}{2(d - r - a)}$ ,  $x = |R_1 - a|$  pa postoje još dva rješenja. Dokaz slijedi iz analize.



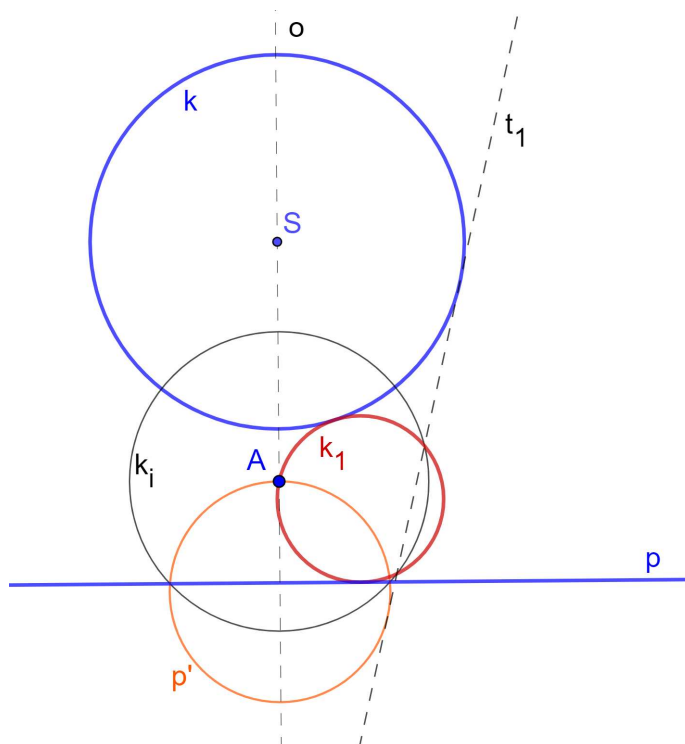
Slika 2.38: Problema Tpk, slučaj E, još dva rješenja

Slika 2.39: Problem Tpk, slučaj  $E$ , sva rješenja

## 2. način - konstrukcija inverzijom

### Analiza:

Odaberimo kružnicu inverzije sa središtem u  $A$  takvu da se zadana kružnica  $k$  preslika sama u sebe. Pravac  $p$  koji dira traženu kružnicu  $k_1$  preslikati će se inverzijom u kružnicu  $p'$  koja prolazi središtem inverzije. Tražena kružnica  $k_1$  koja prolazi točkom  $A$  te dira kružnicu  $k$  i pravac  $p$ , preslikati će se u pravac koji dira kružnicu  $p'$  i kružnicu  $k$ . Slika tražene kružnice  $k_1$  je zajednička tangenta kružnice  $k$  i  $p'$ .

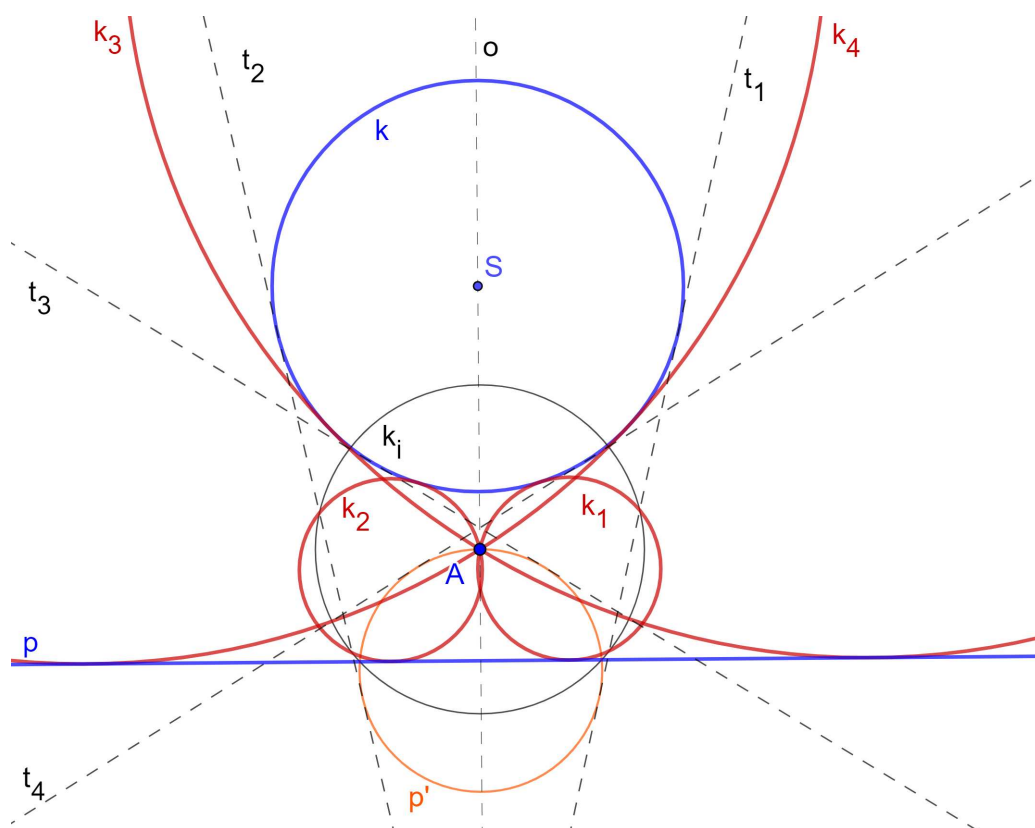


Slika 2.40: Analiza problema Tpk, slučaj  $E$  (konstrukcija inverzijom)

### Konstrukcija:

1. konstruiramo kružnicu inverzije  $k_i$  sa središtem  $A$  koja je ortogonalna na  $k$
2. preslikamo inverzijom pravac  $p$  u kružnicu  $p'$
3. konstruiramo zajedničke tangente  $t_1, t_2, t_3$  i  $t_4$  kružnica  $k$  i  $p'$
4. preslikamo tangente  $t_1, t_2, t_3$  i  $t_4$  inverzijom u tražene kružnice  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$





Slika 2.41: Konstrukcija problema Tpk, slučaj  $E$  (konstrukcija inverzijom)

**Rasprava:**

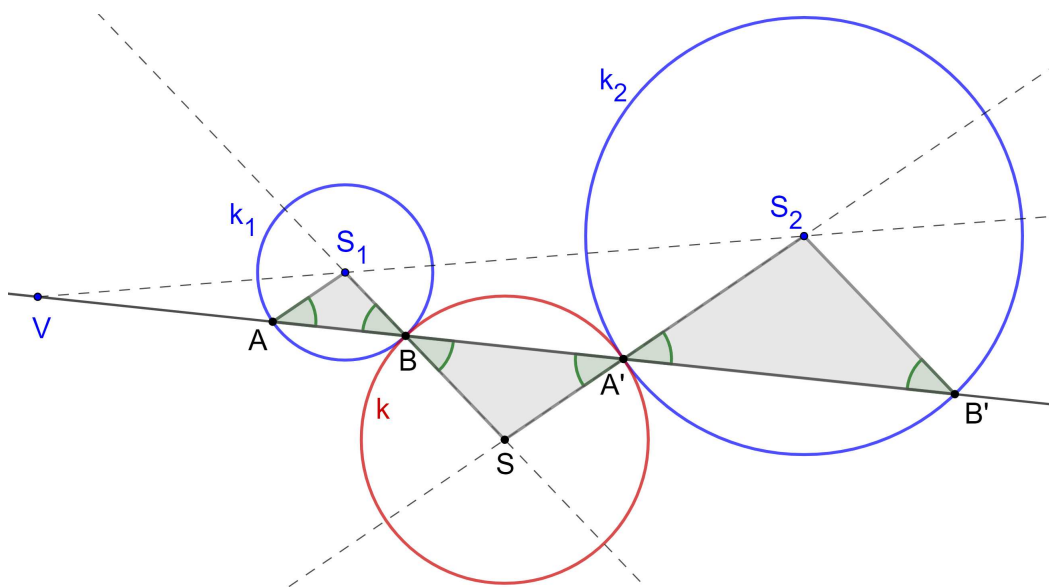
Ako se točka  $A$  nalazi unutar kružnice  $k$  konstrukcija se ne može provesti.  
Dokaz slijedi iz analize.

## 2.3 Problem Tkk

S obzirom na to da sada prelazimo na malo kompliciranije slučajeve zapisat ćemo prvo neke leme koje će nam pomoći pri rješavanju preostalih problema.

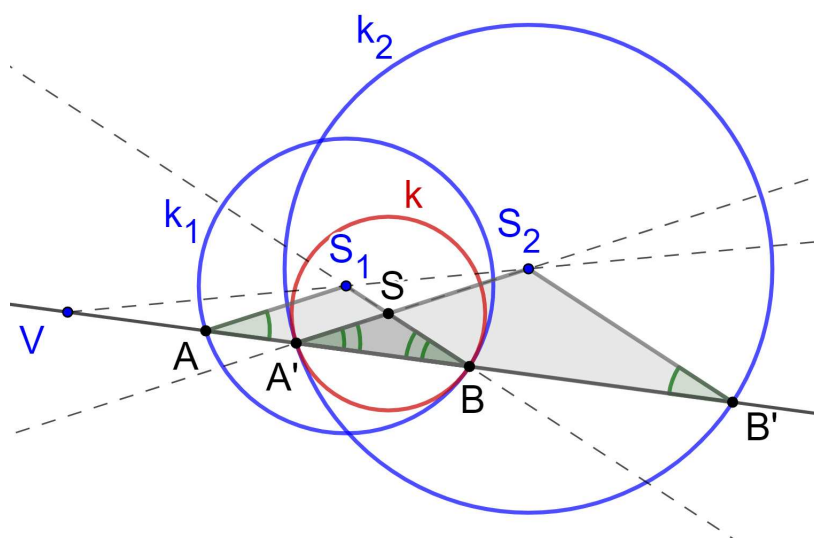
**Lema 1.** *Neka su dane kružnice  $k_1 = k(S_1, r_1)$ ,  $k_2 = k(S_2, r_2)$  koje se ne sijeku te neka je  $V$  njihov vanjski (ili unutarnji) centar sličnosti. Sekanta na kružnicu  $k_1$  iz  $V$  siječe  $k_1$  redom u točkama  $A$  i  $B$  ( $|VA| < |VB|$ ). Ta sekanta siječe kružnicu  $k_2$  redom u točkama  $A'$ ,  $B'$  (slike točaka  $A$  i  $B$  pri homotetiji s centrom  $V$  koja preslikava  $k_1$  u  $k_2$ ). Označimo  $S_1B \cap S_2A'$  sa  $S$ . Kružnica  $k = k(S, |SA'|)$  dira zadane kružnice.*

*Dokaz.* Jednakokračni trokuti  $\triangle BS_1A$  i  $\triangle B'S_2A'$  su po homotetiji s centrom  $V$  koja preslikava  $k_1$  u  $k_2$  slični pa su kutovi  $\sphericalangle S_1AB$ ,  $\sphericalangle ABS_1$ ,  $\sphericalangle S_2A'B'$  i  $\sphericalangle A'B'S_2$  sukladni. Također, kutovi  $\sphericalangle ABS_1$  i  $\sphericalangle A'BS$  te  $\sphericalangle S_2A'B'$  i  $\sphericalangle SA'B$  sukladni su jer su vršni kutovi. Trokut  $A'BS$  je jednakokračan pa je  $S$  središte kružnice koja dira kružnicu  $k_1$  u točki  $B$ , a kružnicu  $k_2$  u  $A'$ .  $\square$



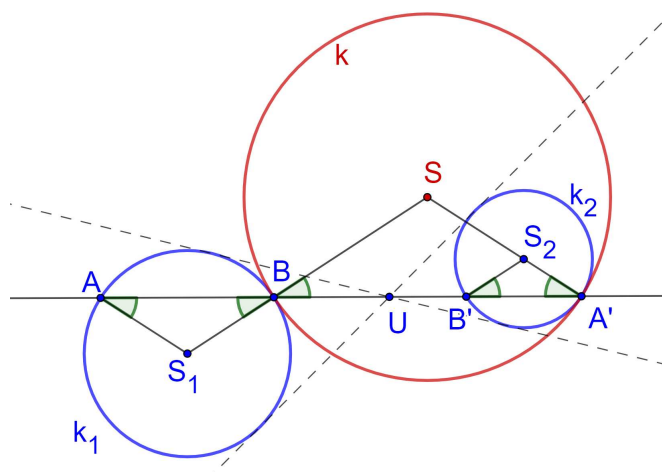
Slika 2.42: Lema 1

Lema 1 vrijedi i ako se kružnice sijeku:



Slika 2.43: Lema 1, kružnice se sijeku

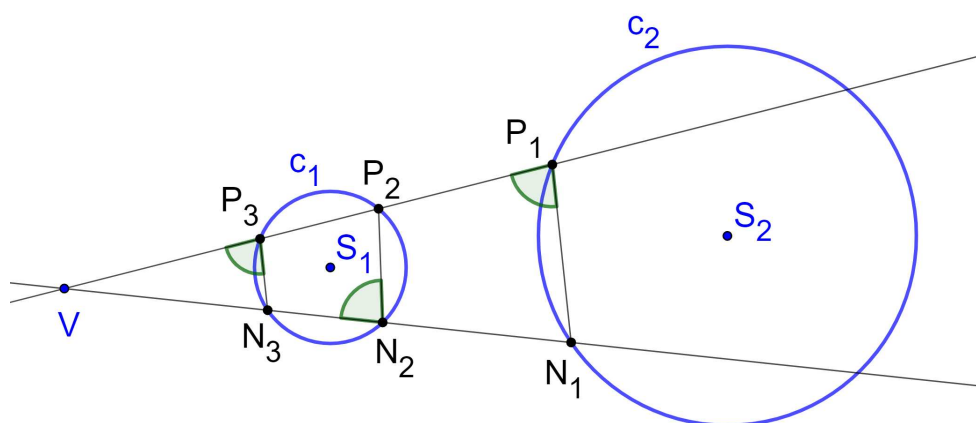
Iz dokaza Leme 1 vidimo: Ako kružnica  $k$  dira  $k_1$  u  $B$ , a  $k_2$  u  $A'$ , onda je centar homotetije koja preslikava  $k_1$  u  $k_2$  na pravcu  $A'B$ .



Slika 2.44: Lema 1, unutarnji centar sličnosti

**Lema 2.** Neka su dane kružnice  $c_1 = k(S_1, r_1)$ ,  $c_2 = k(S_2, r_2)$  koje se ne sijeku te neka je  $V$  njihov vanjski (ili unutarnji) centar homotetije. Tada sve kružnice koje diraju izvana  $c_1$  i  $c_2$  imaju istu potenciju s obzirom na tačku  $V$  i tačka  $V$  leži na potencijali bilo kojih dviju takvih kružnica.

*Dokaz.* Pravac kroz vanjski centar sličnosti  $V$  (ili unutarnji  $U$ ) siječe kružnice  $c_1$  i  $c_2$  u točkama  $N_1, N_2$  (tako da  $S_1N_1 \parallel S_2N_2$ ). Vrijednost  $|VN_1| \cdot |VN_2|$  uvijek je ista, novisno o pravcu. Dokažimo da kružnica koja dira  $c_1$  u  $N_1$  te prolazi točkom  $N_2$  nužno dira  $c_2$ . Promotrimo dva pravca i odgovarajuća sjecišta  $N_1, N_2, P_1, P_2$  te  $P_3, N_3$ . Zbog homotetije s centrom  $V$  koja preslikava  $c_1$  u  $c_2$  znamo da  $P_1N_1 \parallel P_3N_3$ . Također  $\sphericalangle VP_1N_1 = \sphericalangle VP_3N_3$  (kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca) i  $\sphericalangle VP_3N_3 = \sphericalangle P_2N_2V$  (tetivnost). Zaključujemo da je četverokut  $P_1N_1N_2P_2$  tetivan te vrijedi  $|VN_1| \cdot |VN_2| = |VP_1| \cdot |VP_2|$ .  $\square$



Slika 2.45: Lema 2

**Napomena.** Bilo koje dvije kružnice  $k_1$  i  $k_2$  koje diraju kružnice  $c_1$  i  $c_2$  izvana imaju istu potenciju s obzirom na točku  $V$ .

**Problem.** U ravnini zadane su dvije kružnice  $c_1$  i  $c_2$  i točka  $A$ . Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku  $A$  te dira zadane kružnice.

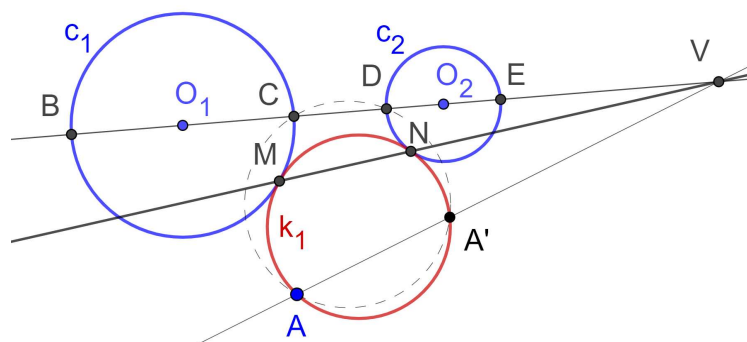
Ovaj problem ćemo riješiti na dva načina.

### 1. način

#### Analiza:

Zadane su dvije kružnice  $c_1$  i  $c_2$  te točka  $A$ . Neka je  $k_1$  tražena kružnica koja dira zadane. Neka je točka  $M$  diralište  $k_1$  s  $c_1$ , a točka  $N$  diralište  $k_1$  s  $c_2$ . Prema Lemi 1 znamo da pravac  $MN$  prolazi vanjskim (ili unutarnjim) centrom homotetije tih dviju kružnica (Slika 2.46). Neka je pravac  $VA$  sekanta kružnice  $k_1$  koju siječe u točkama  $A$  i  $A'$  pa vrijedi  $|VA'| \cdot |VA| = |VN| \cdot |VM|$ . Neka pravac  $O_1O_2$  siječe zadane kružnice redom u točkama  $B, C, D, E$  kao na slici 2.46.

Točke  $C$  i  $D$  se ne preslikavaju promatranom homotetijom jedna u drugu. Prije smo pokazali (Lema 2) da vrijedi  $|VC| \cdot |VD| = |VN| \cdot |VM|$  pa vrijedi  $|VD| \cdot |VC| = |VA'| \cdot |VA|$ . Zaključujemo da  $A, A', C$  i  $D$  konciklične. Konstruiramo li kružnicu  $k'$  koja prolazi točkama  $A, C$  i  $D$  i odredimo točku  $A'$  kao sjecište  $VA$  i  $k'$ , konstrukciju tražene kružnice  $k_1$  sveli smo na problem *TTk* (2.1) jer treba konstruirati kružnicu  $k_1$  koja prolazi točkama  $A$  i  $A'$  te dira kružnicu  $c_1$ .

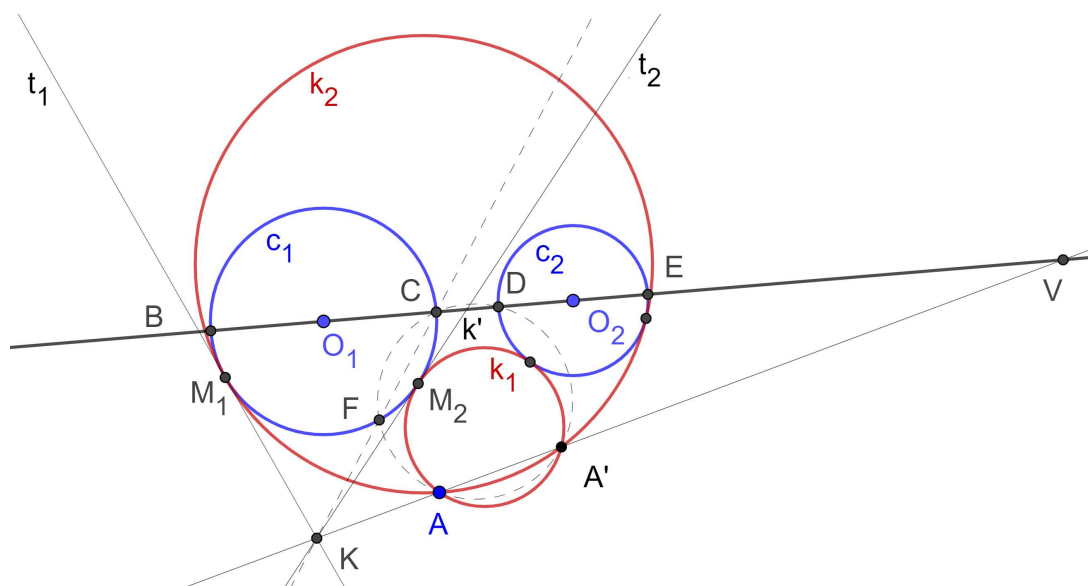


Slika 2.46: Analiza problema *Tkk*

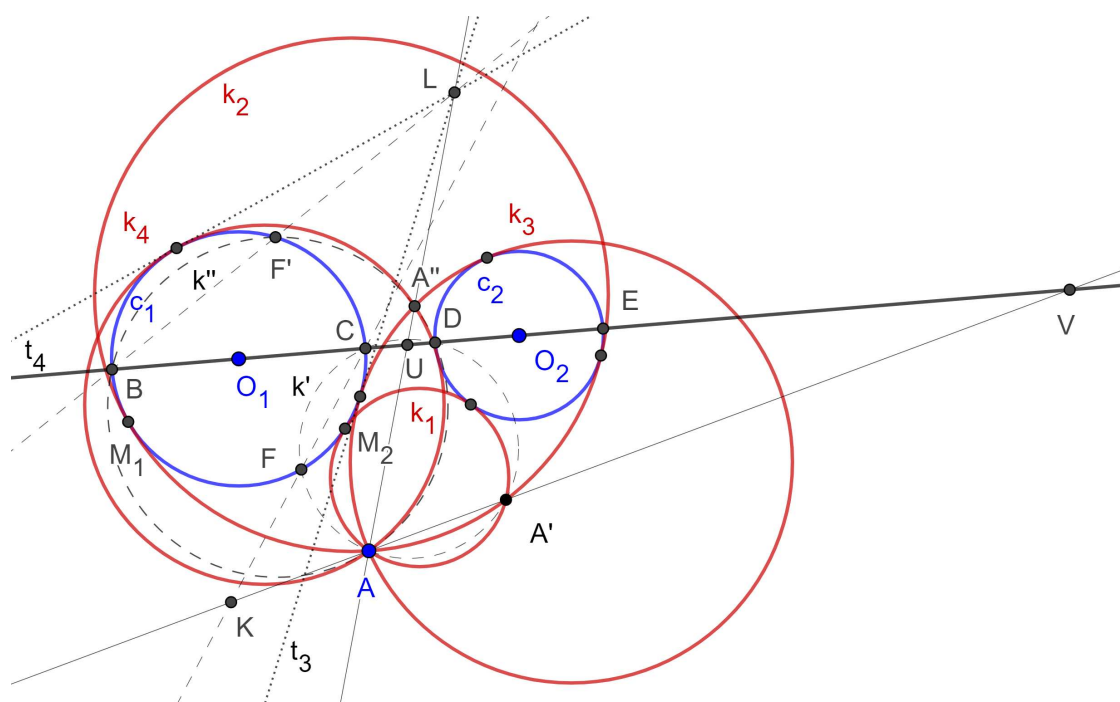
### Konstrukcija:

Zadane su kružnice  $c_1(O_1, r_1)$  i  $c_2(O_2, r_2)$  te točka  $A$ .

1. pravac  $O_1O_2$
2.  $O_1O_2$  siječe  $c_1$  u točkama  $\{B, C\}$  tako da je  $|O_2B| > |O_2C|$ , a  $c_2$  u točkama  $\{D, E\}$  tako da je  $|O_1E| > |O_1D|$
3.  $V$  je vanjsko središte sličnosti kružnica  $c_1$  i  $c_2$
4.  $k' = k(A, C, D)$ ,  $k'$  siječe  $c_1$  u točkama  $F$  i  $C$
5.  $AV \cap k' = \{A, A'\}$
6.  $CF \cap AV = \{K\}$
7. konstruiramo iz  $K$  tangente  $t_1, t_2$  na kružnicu  $c_1$
8.  $t_1 \cap c_1 = \{M_1\}$ ,  $t_2 \cap c_1 = \{M_2\}$
9. tražene kružnice su kružnice  $k_1 = k(A, A', M_1)$  i kružnica  $k_2 = k(A, A', M_2)$
10. ponovimo analogan postupak za korake 3-9 s unutarnjim centrom sličnosti  $U$  te dobivamo kružnice  $k_3$  i  $k_4$ .



Slika 2.47: Konstrukcija problema Tkk, koraci 1-9



Slika 2.48: Konstrukcija problema Tkk, sva rješenja

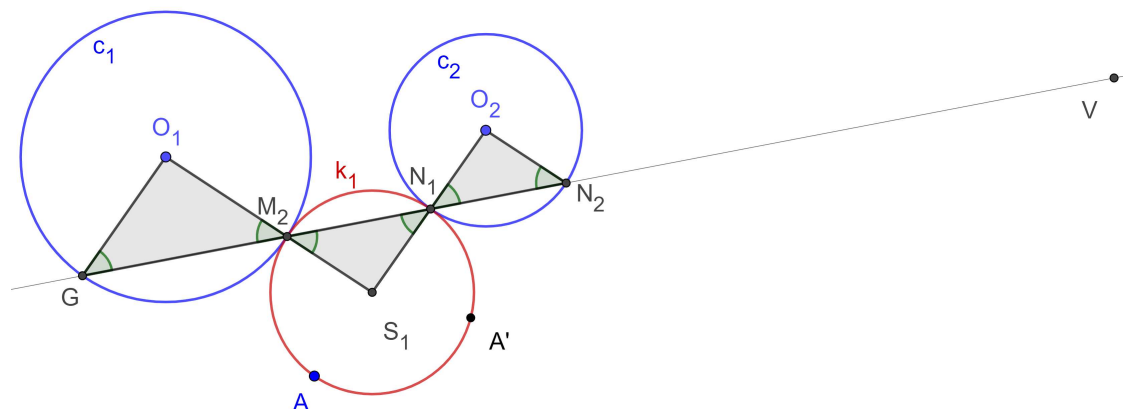
**Dokaz:**

Dokažimo da kružnica  $k_1$  dira zadane kružnice  $c_1$  i  $c_2$  te prolazi točkom  $A$ . Iz konstrukcije očito je da prolazi kroz  $A$ , trebamo još dokazati da dira  $c_1$  i  $c_2$ .

Znamo:  $|KM_2|^2 = |KC| \cdot |KF| = |KA'| \cdot |KA|$ . Neka je  $S_1$  središte kružnice  $k_1$ .  $KM_2$  je tangenta na  $k_1$  pa je  $M_2$  je diralište  $c_1$  i  $k_1$ . Trebamo još dokazati da  $k_1$  dira  $c_2$ .

Neka je  $N_1$  sjecište  $VM_2$  i  $c_2$  takva da  $O_1M_2$  nije paralelno s  $O_2N_1$ . Dokažimo da je  $N_1$  na  $k_1$ . Zbog 4. i 5. koraka konstrukcije točke  $A, A', C$  i  $D$  su konciklične, a  $AA'$  i  $CD$  sijeku se u  $V$ . Zato je  $|VA| \cdot |VA'| = |VC| \cdot |VD|$ . Prema lemi 2  $|VC| \cdot |VD| = |VM_2| \cdot |VN_1|$  gdje je  $N_1$  sjecište  $VM_2$  i  $c_2$ . Znači  $|VA| \cdot |VA'| = |VM_2| \cdot |VN_1|$  što znači da je  $N_1$  na  $k_1$ .

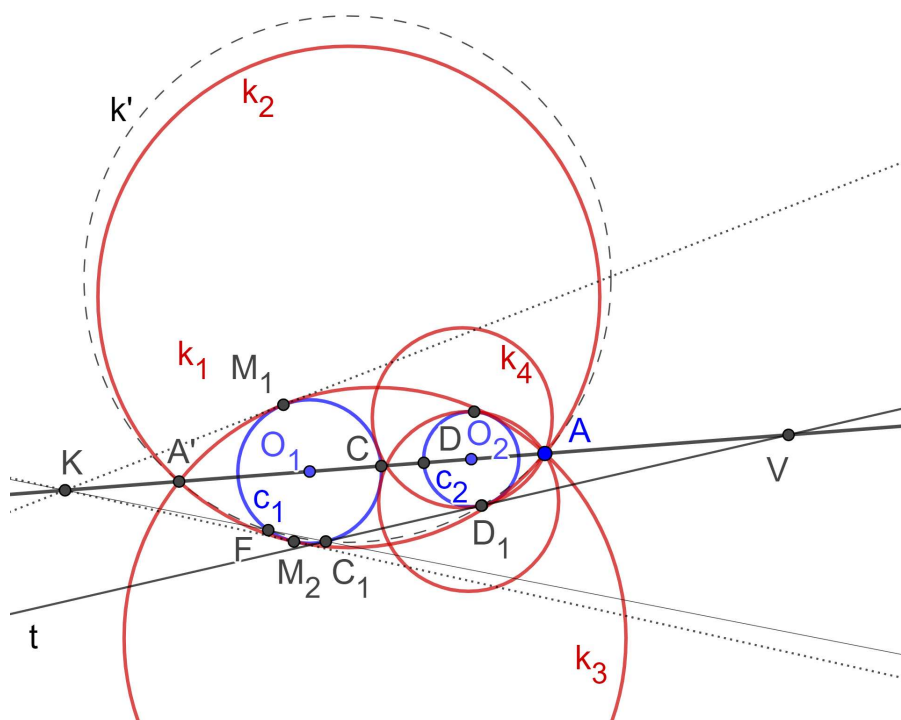
Treba dokazati da su  $S_1, N_1, O_2$  kolinearne. Neka je  $G$  sjecište pravca  $VM_2$  i kružnice  $c_1$ . Trokut  $\triangle M_2O_1G$  ima svoju homotetičnu sliku obzirom na homotetiju s centrom  $V$  koja preslikava  $A$  u  $A'$  unutar kružnice  $c_2$  i neka je to trokut  $\triangle N_2O_2N_1$  [Slika 2.49]. Ti trokuti imaju jednake kutove. Produžimo li  $O_1M_2$  do  $S_1$  kutovi  $\sphericalangle VM_2S_1$  i  $\sphericalangle O_1M_2G$  sukladni jer su vršni. Spojimo  $S_1N_1$  tada  $|S_1N_1| = |S_1M_2|$ , dakle  $S_1N_1M_2$  jednakokrani trokut te  $\sphericalangle N_1M_2S_1 = \sphericalangle S_1N_1M_2$ . Dakle vrijedi  $\sphericalangle S_1N_1M_2 = \sphericalangle N_1M_2S_1 = \sphericalangle GM_2O_1 = \sphericalangle O_1GM_2 = \sphericalangle O_2N_1N_2$  pa su kutovi  $\sphericalangle S_1N_1M_2$  i  $\sphericalangle O_2N_1N_2$  vršni, dakle  $S_1, N_1, O_2$  kolinearne. Analogno se pokaže za kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_4$ .  $\square$



Slika 2.49: Dokaz problema Tkk

**Rasprava:**

U prva dva koraka konstrukcije ne nailazimo na probleme, dok u četvrtom se moramo zapitati što ako su  $A, C$  i  $D$  kolinearne. Tada umjesto pravca  $O_1O_2$  i točaka  $C$  i  $D$  konstruiramo zajedničku tangentu  $t$  dviju kružnica tako  $t \cap c_1 = C_1, t \cap c_2 = D_1$  te dalje konstrukciju provodimo pomoću tih točaka. Ostaju četiri rješenja.

Slika 2.50: Problem Tkk,  $A \in O_1O_2$ 

U 4. koraku može nam se desiti da kružnice  $k'$  i  $c_1$  imaju samo jedno sjecište, TOČKU  $C$ . U tom slučaju u 7. koraku konstrukcije umjesto  $CF$  uzmemo tangentu u  $C$  na  $c_1$ .

Kružnice  $k'$  i  $c_1$  imaju samo jedno sjecište ako se  $A$  nalazi na kružnici sa središtem u polovištu dužine  $\overline{CD}$  radijusa  $\frac{|CD|}{2}$ .

U 5. koraku može nam se desiti da se  $A$  i  $A'$  poklope ako je  $AV$  tangenta kružnice  $k'$ . Tada ćemo u 9. koraku trebati konstruirati kružnicu koja prolazi kroz  $M_2$  koja dira pravac  $AV$ . Zapitajmo se u 7. koraku mogu li nam  $AA'$  i  $CF$  biti paralelni. Mogu, tada točka  $K$  nije definirana i tangente  $t_1$  i  $t_2$  su tangente na  $c_1$  paralelne sa  $CF$  i  $AA'$  što nije problem konstruirati. Može li se  $K$  nalaziti unutar kružnice  $c_1$ ? Može samo ako se  $A$  nalazi unutar neke od zadanih kružnica, a tada nema rješenja.

Ako  $K = M = N$  tada imamo samo jedno rješenje slučaja, odnosno dva rješenja ukupno. Promotrimo još sve moguće položaje triju zadanih objekata:

1.  $c_1$  i  $c_2$  sijeku u dvije različite točke
  - ako se točka  $A$  ne nalazi ni na  $c_1$  ni na  $c_2$ , postoje dva rješenja
  - ako se točka  $A$  nalazi na sjecištu  $c_1$  i  $c_2$  tada nema rješenja

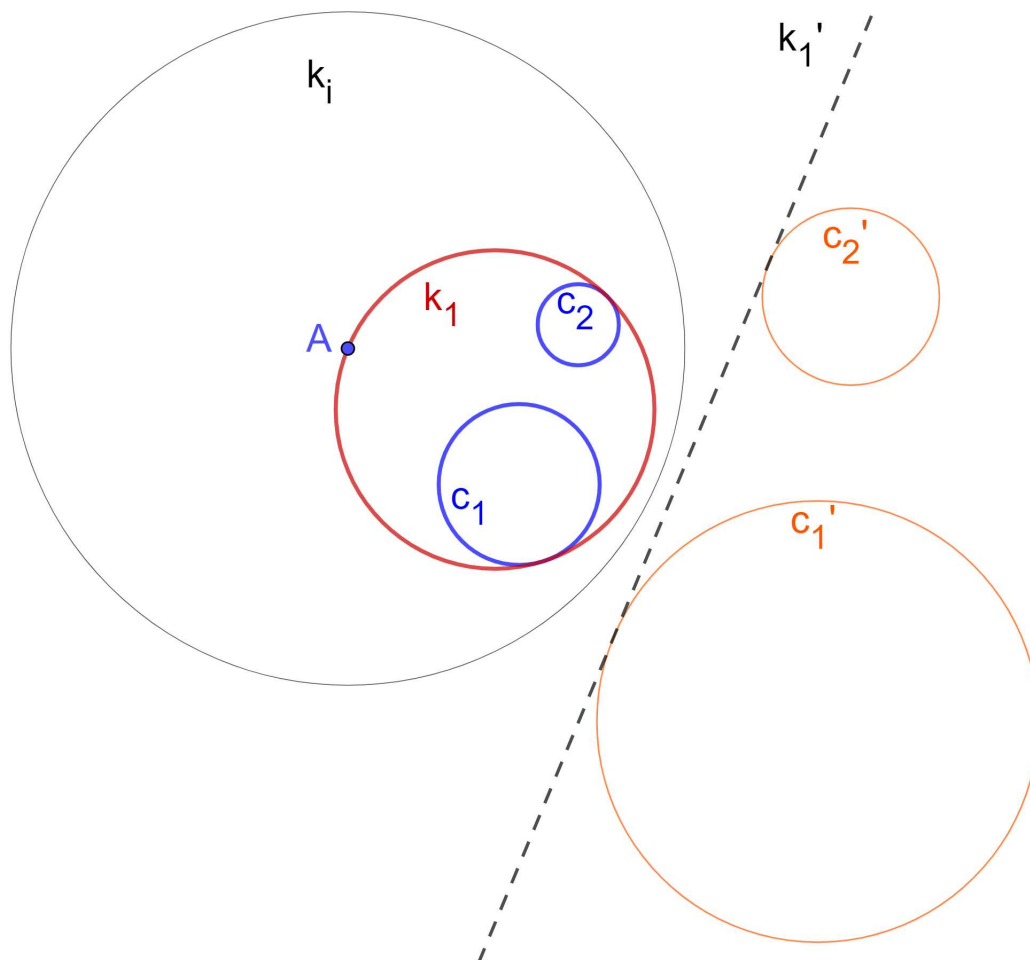


- ako se  $A$  nalazi na  $c_1$ , ali ne i na  $c_2$  postoje dva rješenja
2.  $c_1$  i  $c_2$  se diraju izvana/iznutra
- $c_1$  i  $c_2$  diraju se u točki  $A$ , tada postoji beskonačno rješenja
  - ako se točka  $A$  nalazi izvan obiju kružnica, a kružnice se diraju izvana tada postoje tri rješenja, a ako se kružnice diraju iznutra postoje jedno rješenje
  - ako se točka  $A$  nalazi na jednoj od kružnica rješenje je jedinstveno
  - ako se točka  $A$  nalazi unutar jedne od kružnica, a izvan druge te se kružnice diraju izvana tada postoji jedno rješenje, a ako se kružnice diraju iznutra postoje tri rješenja
  - ako se točka  $A$  nalazi unutar obje kružnice tada rješenja nema
3.  $c_1 \cap c_2 = \emptyset$
- ako se  $c_1$  i  $c_2$  ne sijeku i ne leže jedna unutar druge te točka  $A$  se nalazi izvan zadanih kružnica postoje četiri rješenja
  - ako se  $c_1$  i  $c_2$  ne sijeku, a jedna leži unutar druge te točka  $A$  se nalazi izvan zadanih kružnica tada rješenja nema
  - ako se  $c_1$  i  $c_2$  ne sijeku a točka  $A$  nalazi se na jednoj od njih, tada postoje dva rješenja.
  - ako se  $c_1$  i  $c_2$  ne sijeku i ne leže jedna unutar druge, a točka  $A$  se nalazi unutar jedne, ali ne i unutar druge, rješenja nema
  - ako se  $c_1$  i  $c_2$  ne sijeku, a jedna leži unutar druge i točka  $A$  se nalazi unutar jedne ali ne i unutar druge tada postoje četiri rješenja
  - ako se  $c_1$  i  $c_2$  ne sijeku, a jedna leži unutar druge i točka  $A$  se nalazi unutar obje, rješenja nema

## 2. način - konstrukcija inverzijom

**Problem.** U ravnini zadane su dvije kružnice i točka  $A$ . Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi točkom  $A$  i dira zadane kružnice.

**Analiza:**

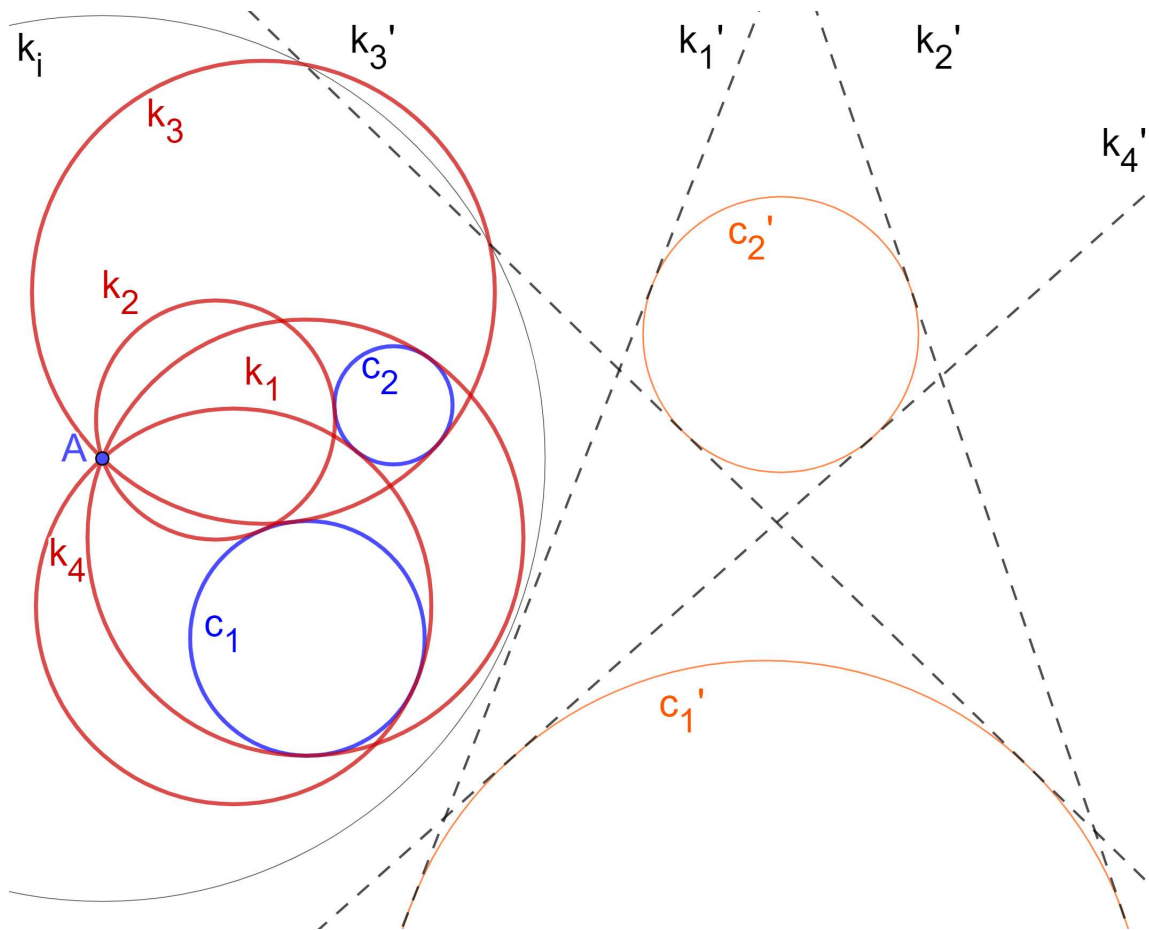


Slika 2.51: Analiza problema Tkk, konstrukcija inverzijom

Želimo da se tražena kružnica  $k$  preslika u neki pravac  $k'$  pa uzmimo za centar inverzije točku  $A$ . Zadane kružnice preslikat će se u kružnice kojima je  $A$  centar sličnosti, a pravac  $k'$  zajednička tangenta. Uzmemo proizvoljan radijus inverzije.

**Konstrukcija:**

1. konstruiramo kružnicu inverzije  $k = k_i(A, r_i)$ ,  $r_i$  proizvoljan
2. preslikamo kružnicu  $c_1$  inverzijom u odnosu na kružnicu  $k_i$  u kružnicu  $c'_1$
3. preslikamo kružnicu  $c_2$  inverzijom u odnosu na kružnicu  $k_i$  u kružnicu  $c'_2$
4. konstruiramo zajedničke tangente kružnica  $c'_1$  i  $c'_2$
5. dobivene tangente  $k'_1, k'_2, k'_3$  i  $k'_4$  preslikamo inverzijom u kružnice  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$  i to su tražene kružnice



Slika 2.52: Problem Tkk, konstrukcija inverzijom

## 2.4 Problem ppk

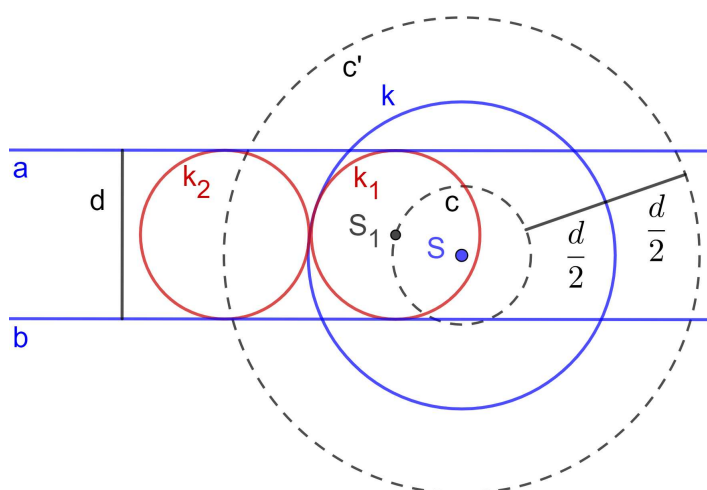
**Problem.** U ravnini zadani su kružnica  $k$  te pravci  $a$  i  $b$ . Konstruirati kružnicu koja dira dva zadana pravca i danu kružnicu.

Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih pravaca.

1. Pravci  $a$  i  $b$  su paralelni.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)
2. Pravci  $a$  i  $b$  se sijeku.  
Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)

**Slučaj A.** Apolonijev problem ppk u situaciji kada su zadani kružnica  $k$  te paralelni pravci  $a$  i  $b$ . Trebamo konstruirati kružnicu koja dira zadane pravce i kružnicu.

**Analiza:**



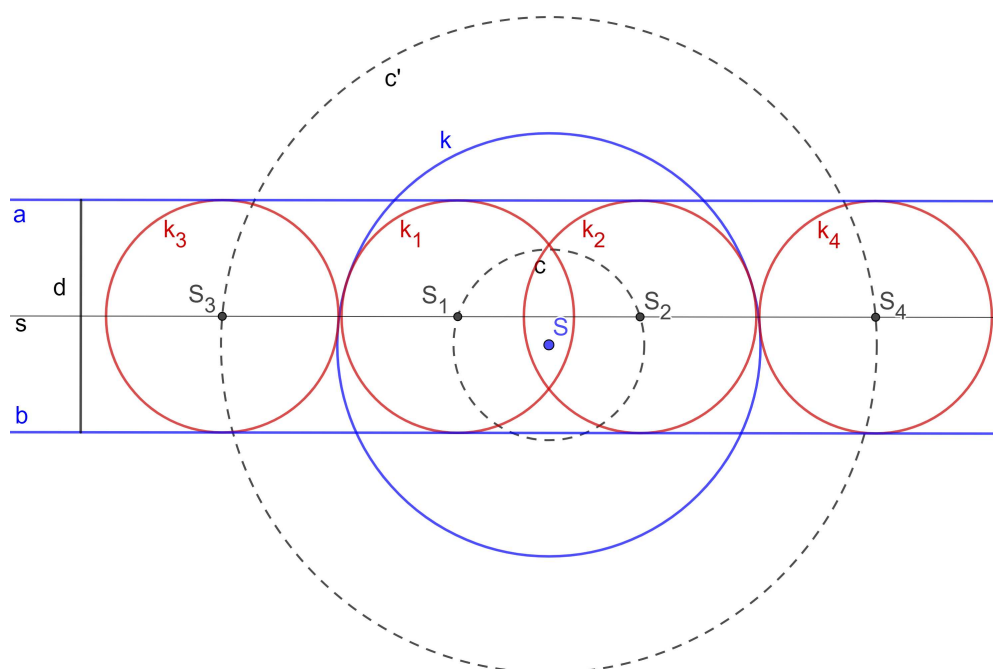
Slika 2.53: Analiza problema ppK, slučaj A

Neka je  $k_1 = k(S_1, r_1)$  kružnica koja dira pravce  $a$  i  $b$  te kružnicu  $k = k(S, r)$ . Znamo da je njen radijus polovina udaljenosti između pravaca  $a$  i  $b$ . Neka je  $c$  kružnica koncentrična kružnici  $k$  koja prolazi središtem tražene kružnice pa je njen radijus  $r - \frac{d}{2}$  (ili  $r + \frac{d}{2}$ ). Ako konstruiramo  $c$ , lako ćemo odrediti središte tražene kružnice  $k_1$ .

**Konstrukcija:**

Dana je kružnica  $k = k(S, r)$  i pravci  $a, b$ . Neka je  $d$  udaljenost pravaca  $a$  i  $b$ .

1.  $s$  pravac koji je paralelan sa zadanima i jednako udaljen od  $a$  i  $b$
2.  $c = k(S, r - \frac{d}{2}), c' = k(S, r + \frac{d}{2})$
3.  $c \cap s = \{S_1, S_2\}, c' \cap s = \{S_3, S_4\}$
4.  $k_1 = k(S_1, \frac{d}{2}), k_2 = k(S_2, \frac{d}{2}), k_3 = k(S_3, \frac{d}{2}), k_4 = k(S_4, \frac{d}{2})$



Slika 2.54: Konstrukcija problema ppK, slučaj A

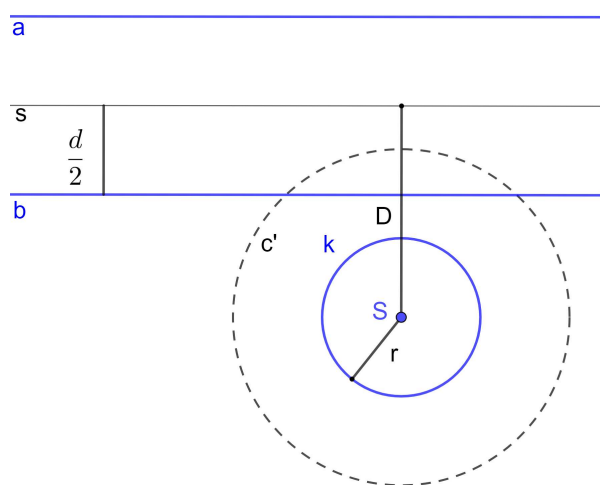
**Rasprava:**

U prvom koraku nemamo problema u konstrukciji.

U drugom koraku ako je  $r \leq \frac{d}{2}$  onda nema kružnice  $c'$  (za  $r = \frac{d}{2}$ ,  $c'$  je točka).

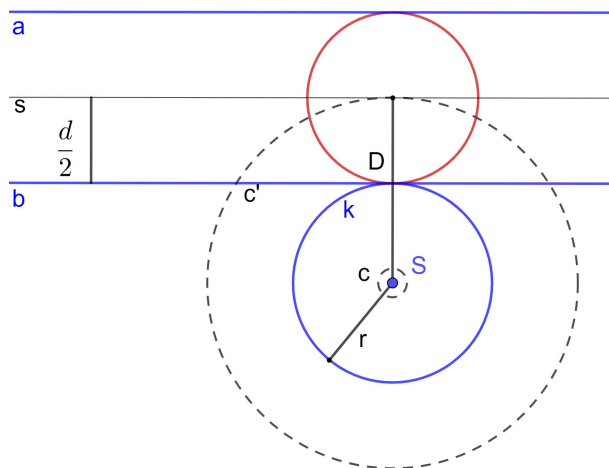
Zapitajmo se kada se sijeku kružnice  $c, c'$  s pravcem  $s$ . Broj sjecišta kružnice sa središtem  $S$  i pravca  $s$  ovisi o udaljenosti  $D = d(S, s)$  i polumjeru kružnice. Kružnica i pravac  $s$  sijeku se u dvije točke ako je  $D$  manji od polumjera, diraju se ako je  $D$  jednak polumjeru, a presjeka nema ako je  $D$  veći od polumjera kružnice. Vrijedi:

1. Ako je  $r < D - \frac{d}{2}$  tada  $c \cap s = \emptyset$  i  $c' \cap s = \emptyset$  pa u ovom slučaju nema rješenja.



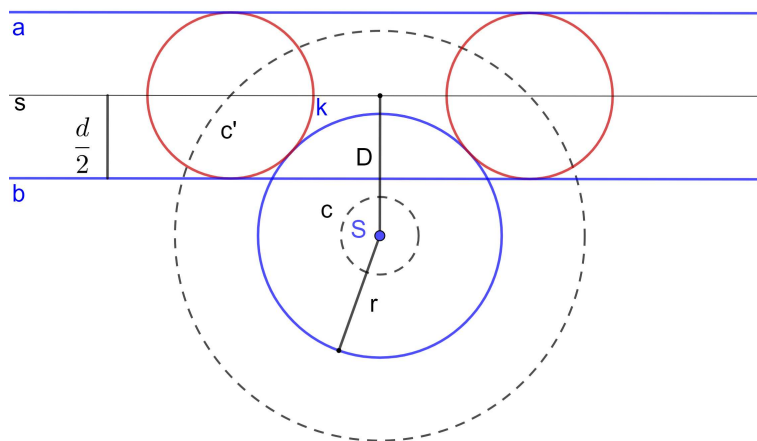
Slika 2.55: Problem ppK, slučaj A, nema rješenja

2. Ako je  $r = D - \frac{d}{2}$  tada  $c \cap s = \emptyset$ , a  $c'$  dira  $s$  u jednoj točki pa postoji jedno rješenje.



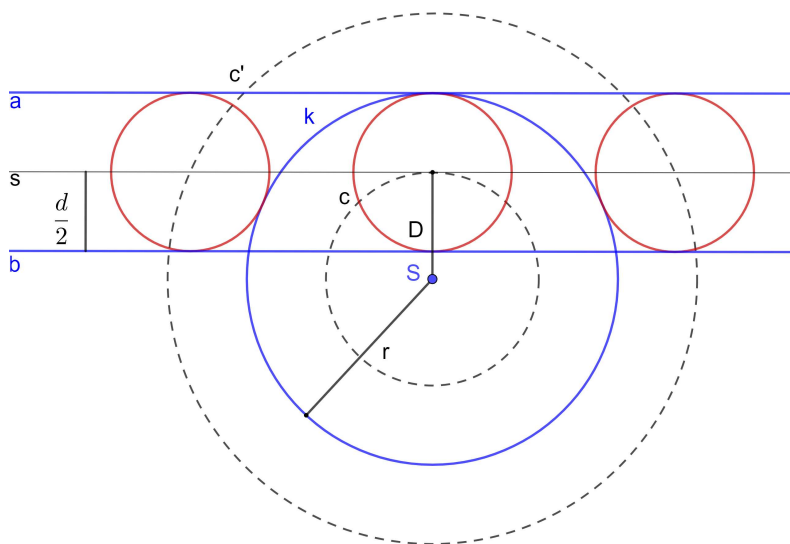
Slika 2.56: Problem ppK, slučaj A, jedno rješenje

3. Ako je  $D - \frac{d}{2} < r < D + \frac{d}{2}$  tada  $c \cap s = \emptyset$ , a  $c'$  siječe  $s$  u dvije točke pa postoje dva rješenja.



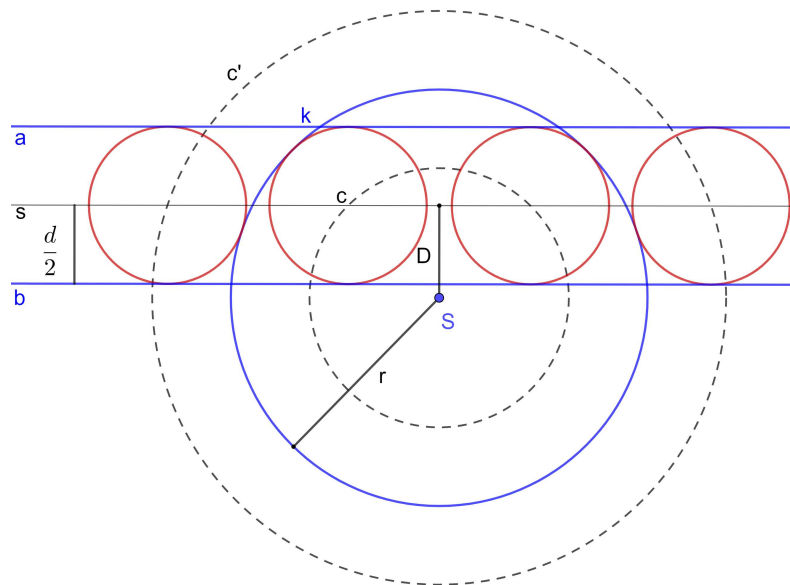
Slika 2.57: Problem ppK, slučaj A, dva rješenja

4. Ako je  $r = D + \frac{d}{2}$  tada  $c$  dira  $s$  u jednoj točki, a  $c'$  siječe  $s$  u dvije točke pa postoje tri rješenja.



Slika 2.58: Problem ppK, slučaj A, tri rješenja

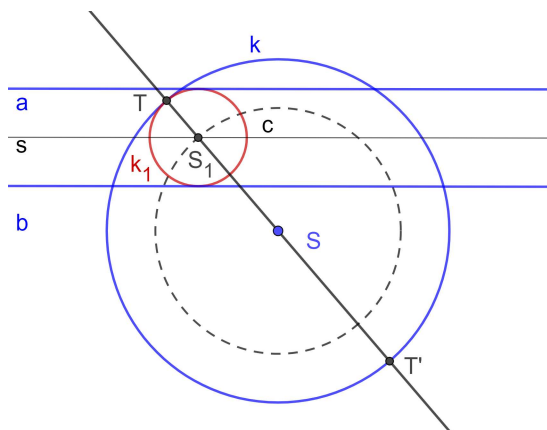
5. Ako je  $r > D + \frac{d}{2}$  tada  $c$  i  $c'$  sijeku  $s$  u dvije točke pa postoje četiri rješenja.



Slika 2.59: Problem ppK, slučaj A, četiri rješenja

**Dokaz:**

Trebamo dokazati da kružnice  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$  diraju dva zadana pravca i zadanu kružnicu. Promatramo je  $k_1 = k(S_1, \frac{d}{2})$ . Znamo da  $S_1 \in s$  pa slijedi da  $k_1$  dira pravce  $a$  i  $b$ . Također, zbog 2. i 3. koraka konstrukcije,  $S_1 \in c = k(S, r - \frac{d}{2})$  pa slijedi da  $|SS_1| = r - \frac{d}{2}$ . Neka je točka  $T$  na kružnici  $k$  i na pravcu  $SS_1$  takva da  $|TS| > |TS_1|$ .



Slika 2.60: Problem ppK,  $T \in k, T \in SS_1$

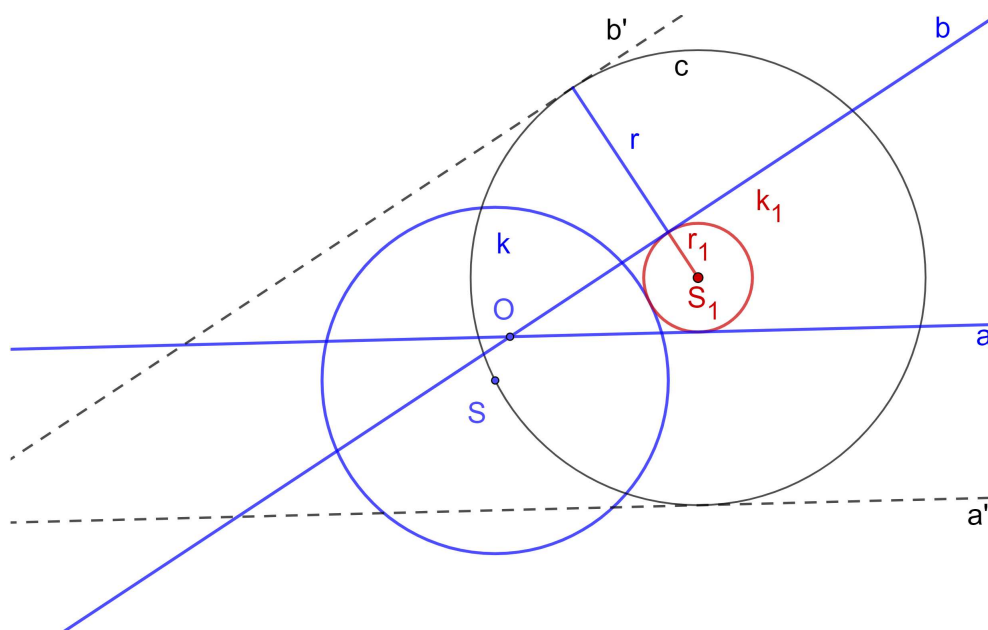


Dokazati ćemo da je  $T$  diralište kružnica  $k_1$  i  $k$ .  $T$  je na  $k$  po definiciji, a na  $k_1$  je jer  $|S_1T| = |ST| - |S_1S| = r - (r - \frac{d}{2}) = \frac{d}{2}$ . Dakle,  $T$  je na kružnici  $k_1$ . Još trebamo provjeriti da je  $T$  diralište, ali to direktno slijedi iz činjenice da su  $S_1, T$  i  $S$  kolinearne točke. Analogno dokazujemo za preostale kružnice. □

**Slučaj B.** Apolonijev problem ppk u situaciji kada su zadani kružnica  $k$  te pravci  $a$  i  $b$  koji se sijeku. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira zadane pravce i kružnicu.

**Analiza:**

Neka je  $k_1 = k(S_1, r_1)$  kružnica koja dira pravce  $a$  i  $b$  te kružnicu  $k = k(S, r)$ , a neka je  $c$  kružnica koncentrična kružnici  $k_1$  koja prolazi središtem dane kružnice. Ako konstruiramo  $c$  dobit ćemo središte tražene kružnice koje je zatim lako konstruirati. Neka je  $a'$  pravac paralelan s  $a$  udaljen od njega za  $r$ , a pravac  $b'$  pravac paralelan s  $b$  udaljen od njega za  $r$ . Kružnica  $c$  dodiruje pravce  $a'$  i  $b'$ . Time smo problem sveli na konstrukciju kružnice  $c$  kroz zadanu točku  $S$  koja dodiruje pravce  $a'$  i  $b'$ , tj. na problem  $Tpp$  [1.3].

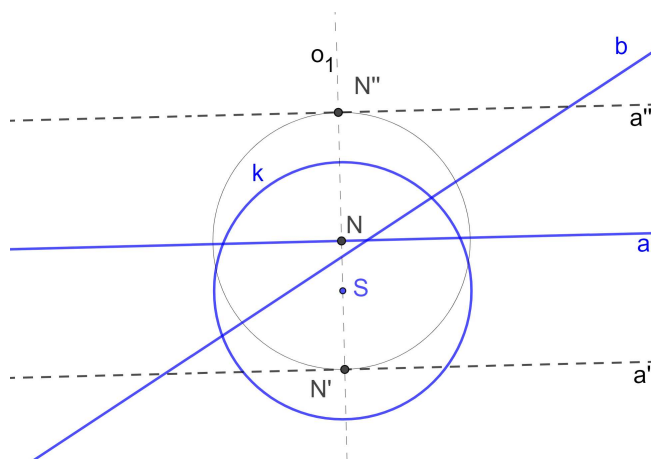


Slika 2.61: Analiza problema ppK, slučaj B

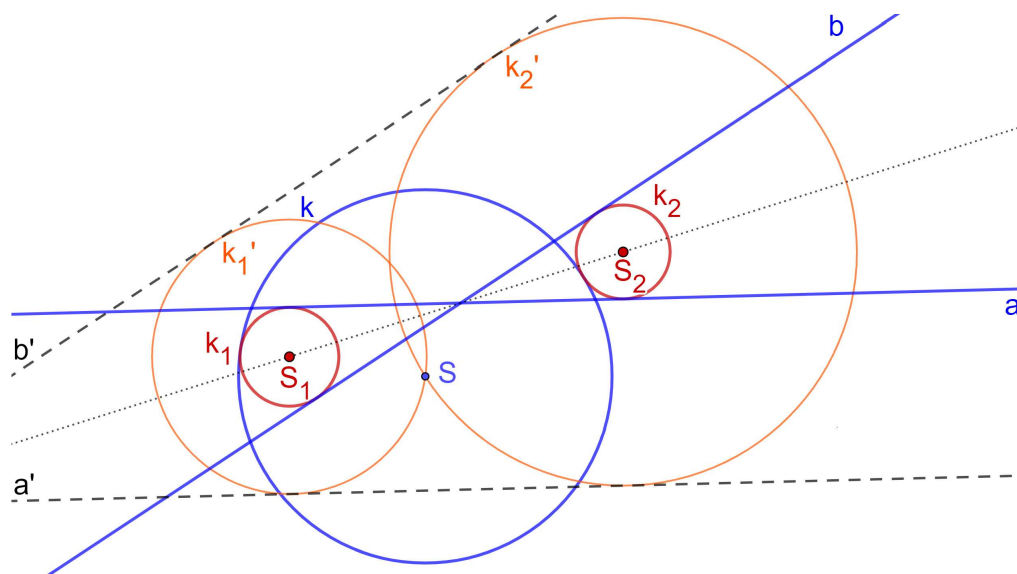
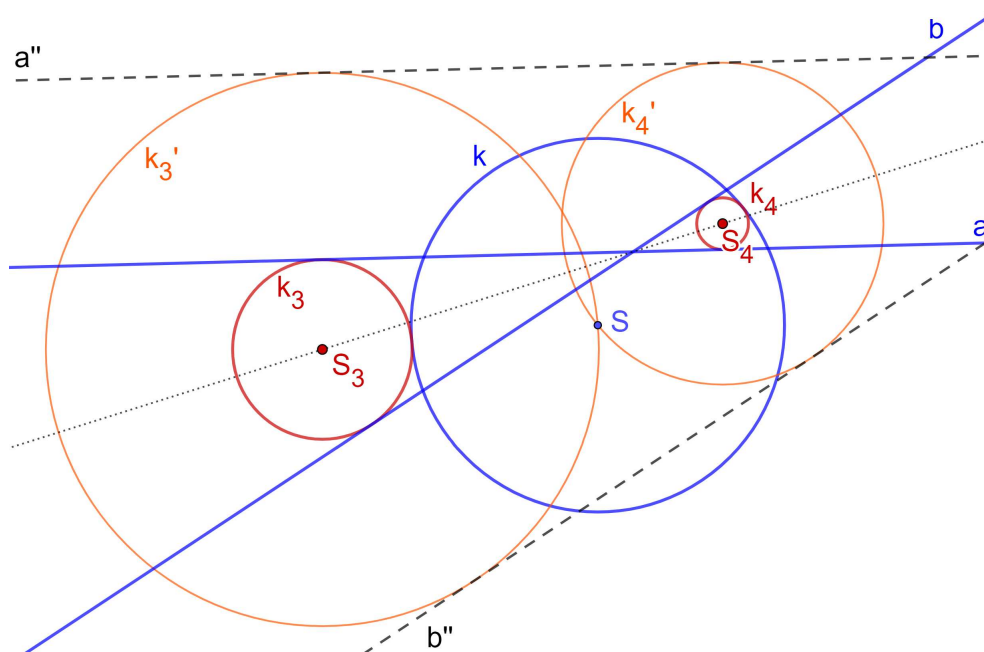
**Konstrukcija:**

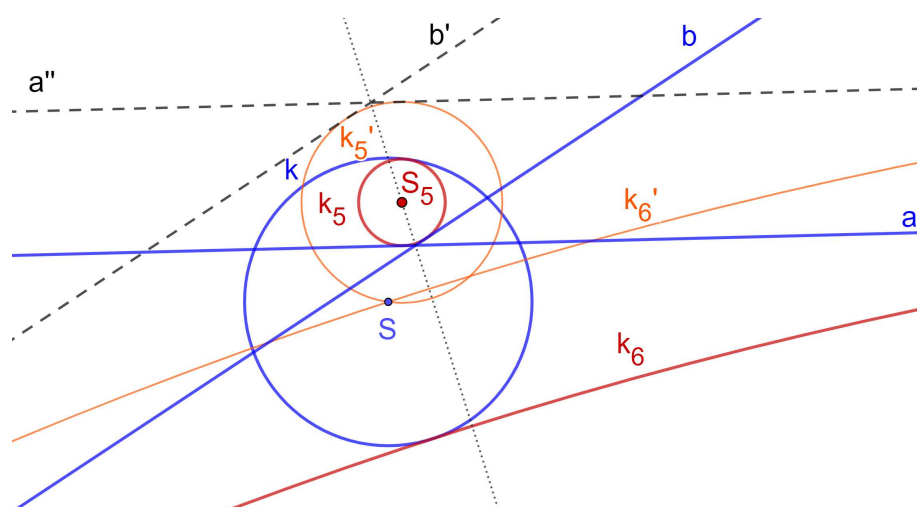
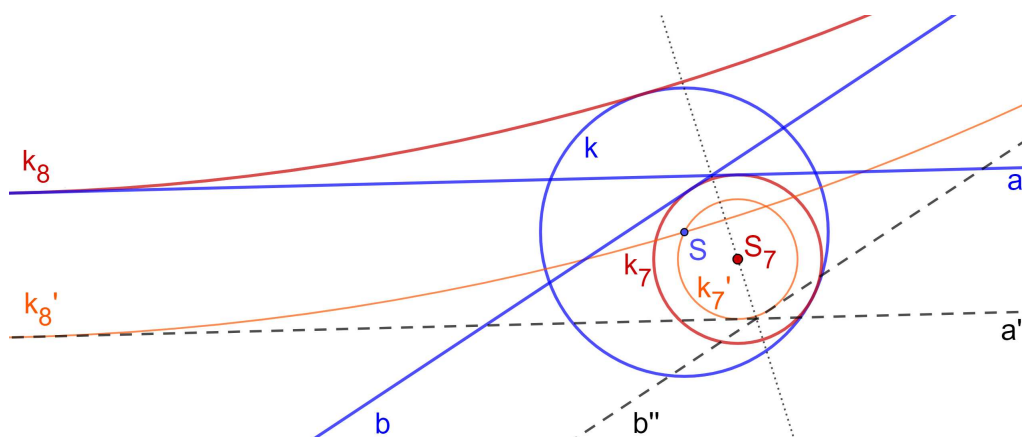
Dana je kružnica  $k(S, r)$  te pravci  $a$  i  $b$ .

1. okomica  $o_1$  iz točke  $S$  na pravac  $a$ , nožište  $N$
2.  $o_1 \cap k(S, r) = \{N', N''\}$  pri čemu  $N'$  i  $S$  leže s iste strane pravca  $a$
3.  $a'$  i  $a''$  paralele s  $a$  kroz  $N'$ , odnosno  $N''$
4. okomica  $o_2$  iz točke  $S$  na pravac  $b$ , nožište  $M$
5.  $o_2 \cap k(S, r) = \{M', M''\}$  pri čemu  $M'$  i  $S$  leže s iste strane pravca  $b$
6.  $b'$  i  $b''$  paralele s  $b$  kroz  $M'$ , odnosno  $M''$
7. kružnice  $k'_1 = k(S_1, r'_1)$  i  $k'_2 = k(S_2, r'_2)$  koje diraju pravce  $a'$  i  $b'$  te prolaze točkom  $S$  (konstrukcija detaljno opisana u cjelini 1.3: *ppT*)  
Analogno, konstruiramo kružnice:  
 $k'_3$  i  $k'_4$  koje diraju pravce  $a''$  i  $b''$  i prolaze točkom  $S$   
 $k'_5$  i  $k'_6$  koje diraju pravce  $a'$  i  $b''$  i prolaze točkom  $S$   
 $k'_7$  i  $k'_8$  koje diraju pravce  $a''$  i  $b'$  i prolaze točkom  $S$
8. za  $i = 1, \dots, 8$ , ako je  $d(S_i, a) = d(S_i, b) = d(S_i, S) \pm r$  onda kružnica  $k_i = k(S_i, d(S_i, a))$  dodiruje pravce  $a$  i  $b$  i dira kružnicu  $k$



Slika 2.62: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, koraci 1-3

Slika 2.63: Konstrukcija problema ppk, slučaj B,  $k_1$  i  $k_2$ Slika 2.64: Konstrukcija problema ppk, slučaj B,  $k_3$  i  $k_4$

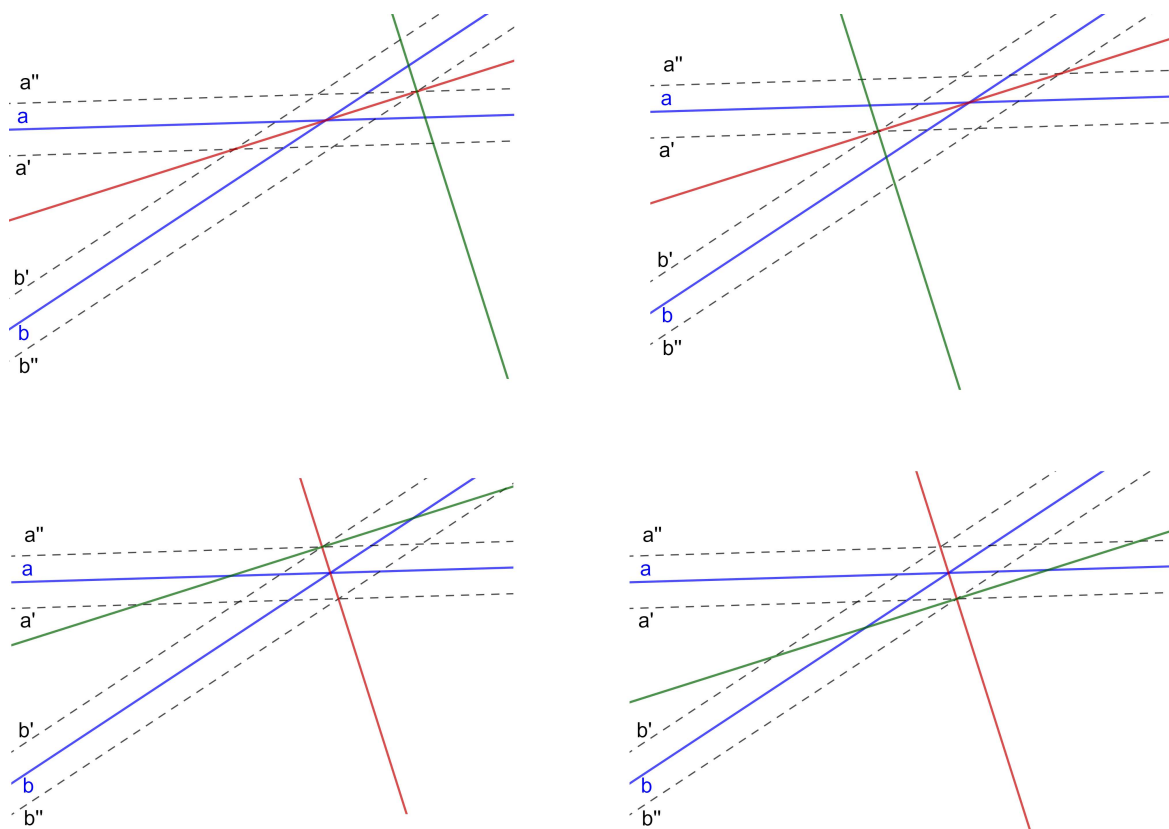
Slika 2.65: Konstrukcija problema ppk, slučaj B,  $k_5$  i  $k_6$ Slika 2.66: Konstrukcija problema ppk, slučaj B,  $k_7$  i  $k_8$ **Dokaz:**

Želimo dokazati da kružnice  $k_1 - k_8$  diraju pravce  $a$  i  $b$  te kružnicu  $k$ . Dokaz slijedi direktno iz uvjeta u 8. koraku.

Dokažimo još da se središte  $S_i$  mora nalaziti na nekoj od simetrala kutova koje zatvaraju pravci  $a$  i  $b$ .

Ako je  $S_i$  na simetrali  $\sphericalangle(a', b')$ ,  $\sphericalangle(a', b'')$ ,  $\sphericalangle(a'', b'')$ ,  $\sphericalangle(a'', b')$  koja je ujedno simetrala  $\sphericalangle(a, b)$ , tj. ako je na crvenom pravcu (a ne zelenom (slika 2.67)) onda postoji kružnica

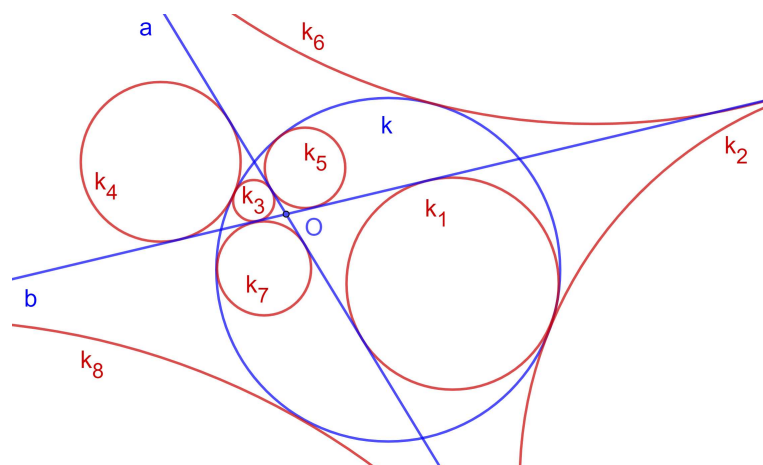
koja dira pravce  $a$  i  $b$  sa središtem  $S_i$ . To znamo iz 8. koraka konstrukcije te je to jedna od kružnica  $k(S_i, r'_i + r)$ ,  $k(S_i, r'_i - r)$  i  $k(S_i, r - r'_i)$ .  $\square$



Slika 2.67: Problem ppk, slučaj B, simetrale kutova

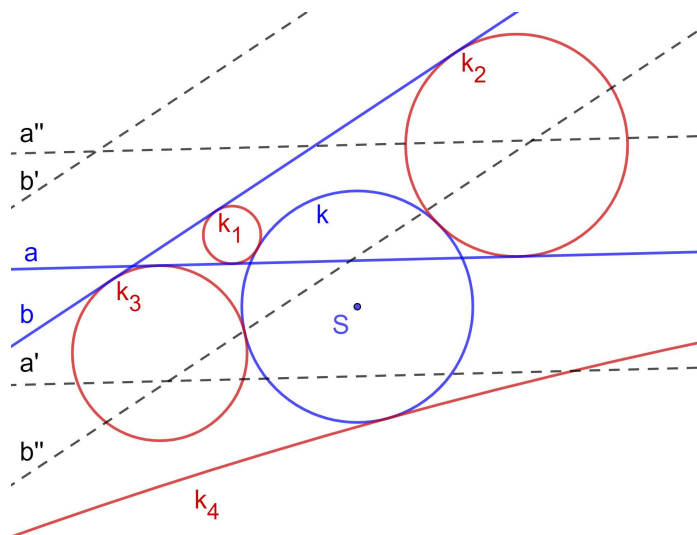
**Rasprava:** U koracima konstrukcije 1 – 6 nema nikakvih problema. Promotrimo još međusobne položaje danih objekata:

1. Ako oba pravca  $a$  i  $b$  sijeku kružnicu  $k$  u ukupno 4 različite točke postoji osam rješenja.



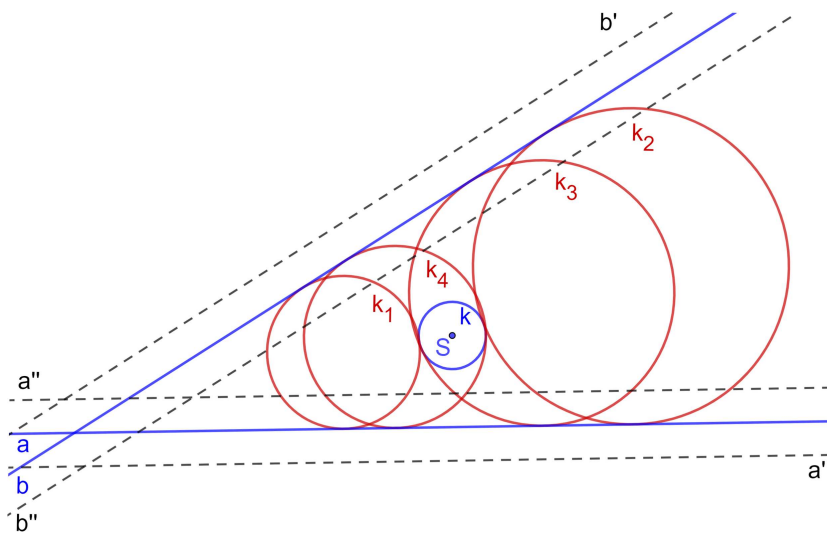
Slika 2.68: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, osam rješenja

2. Ako je jedan od pravaca  $a$  i  $b$  siječe kružnicu  $k$  u dvije točke, a drugi ju ne siječe, postoje četiri rješenja.



Slika 2.69: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

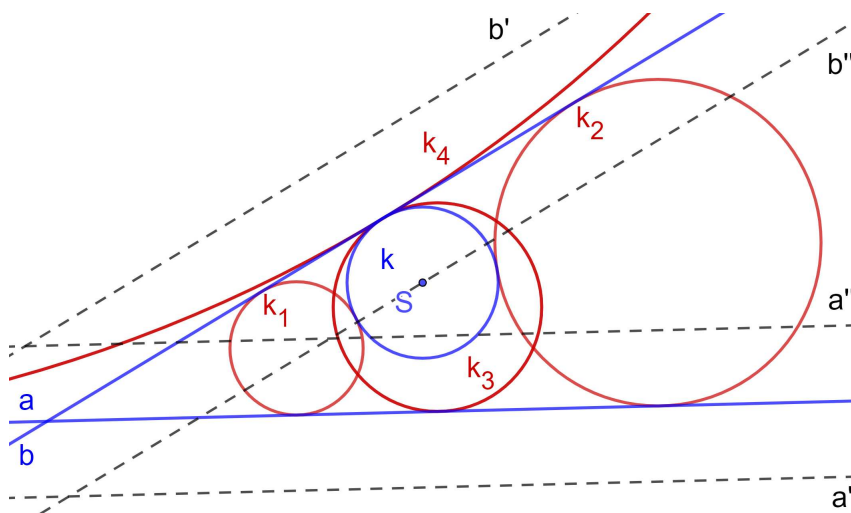
3. Ako kružnica  $k$  ne siječe pravce  $a$  i  $b$  postoje četiri rješenja.



Slika 2.70: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

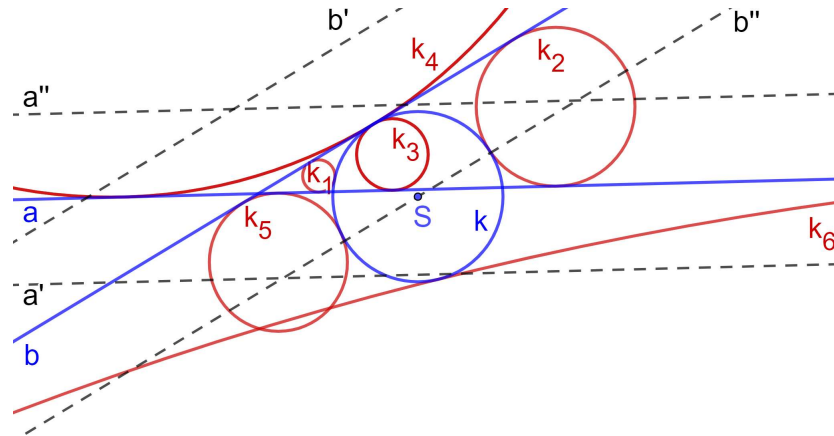
4. Ako jedan ili oba pravca diraju  $k$ , a sjecište pravaca nije na  $k$ , razlikujemo slučajeve:

- Ako je jedan od pravaca  $a$  i  $b$  tangenta kružnice  $k$ , a drugi pravac ju ne siječe postoje četiri rješenja.



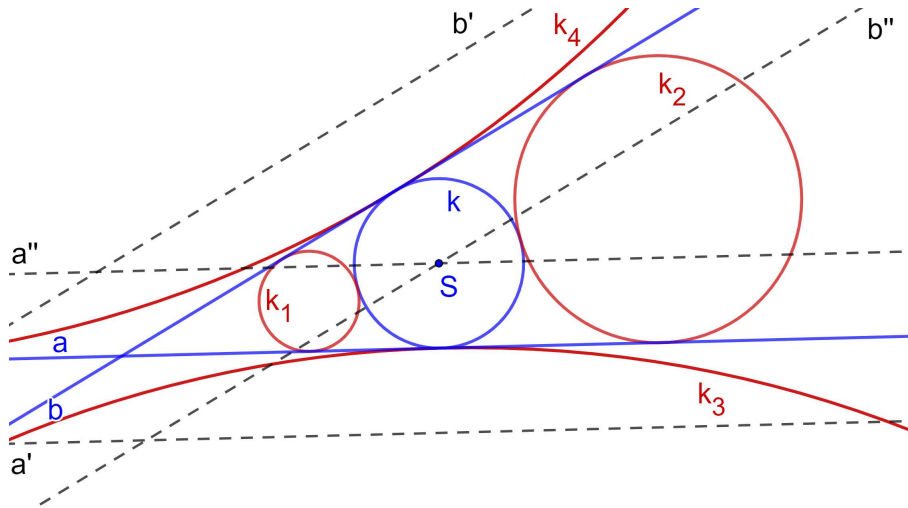
Slika 2.71: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

- Ako je jedan od pravaca  $a$  i  $b$  tangenta kružnice  $k$ , a drugi pravac ju siječe u dvije točke postoje šest rješenja



Slika 2.72: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, šest rješenja

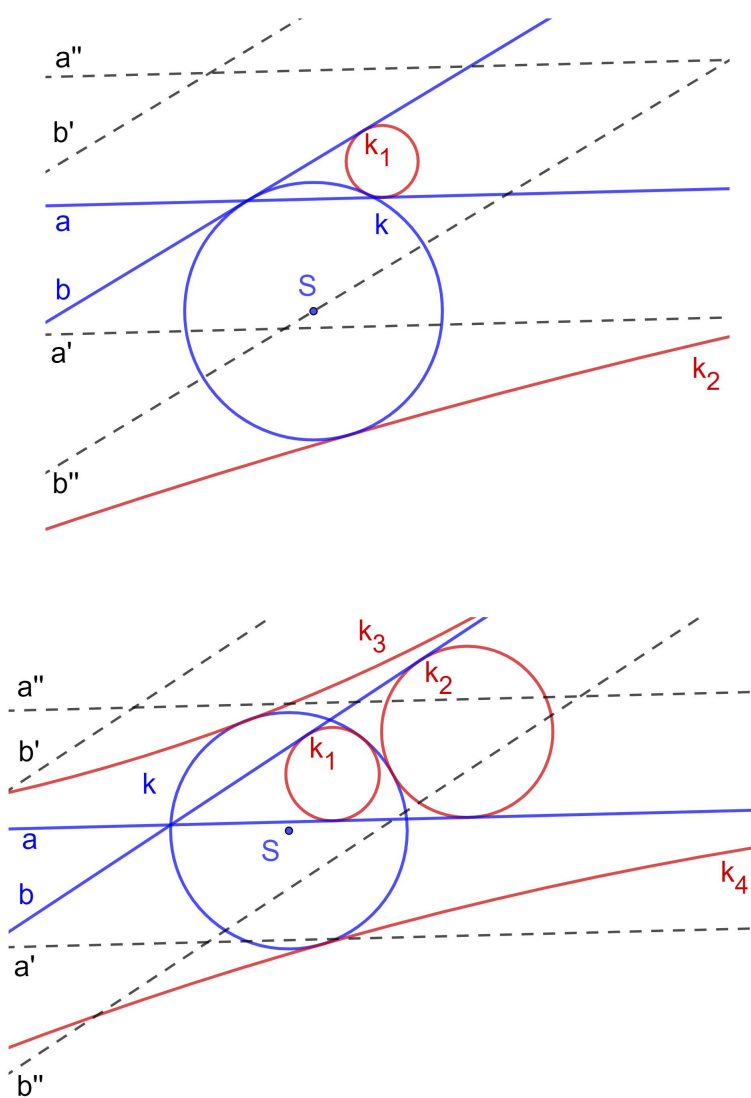
- Ako su oba pravaca  $a$  i  $b$  tangente kružnice postoje četiri rješenja.



Slika 2.73: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

5. Ako je sjecište pravaca na kružnici tada ako je jedan od pravaca tangenta kružnice postoje dva rješenja, inače postoje četiri rješenja.





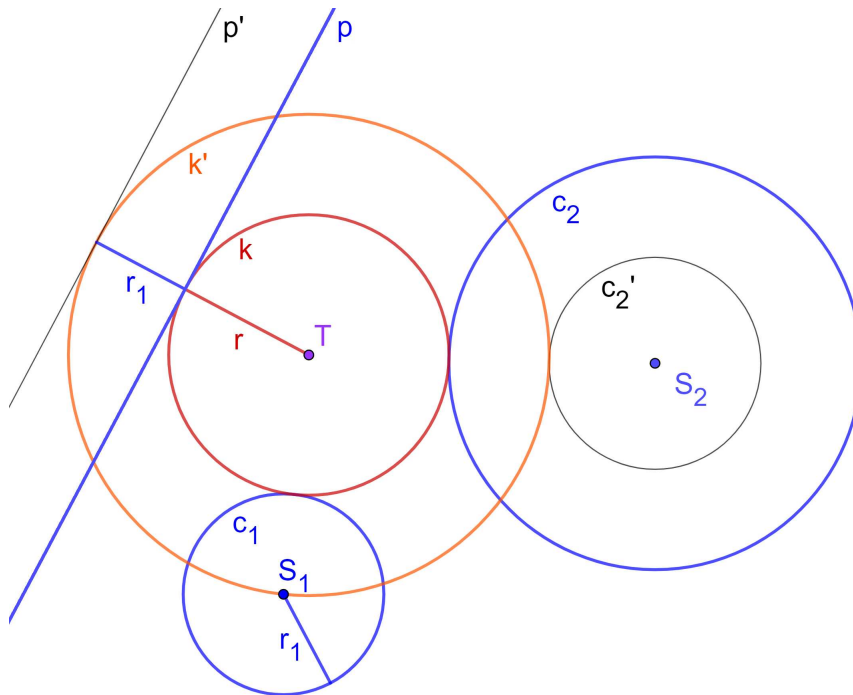
Slika 2.74: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, dva tj. četiri rješenja

## 2.5 Problem pkk

**Problem.** U ravnini su zadane kružnice  $c_1$  i  $c_2$  te pravac  $p$ . Konstruirati kružnicu koja dira dvije zadane kružnice i zadani pravac.

### Analiza:

Neka je  $c_1 = k(S_1, r_1)$  i  $c_2 = k(S_2, r_2)$  i neka je bez smanjenja općenitosti  $r_1 < r_2$ . Neka je  $k = k(T, r)$  kružnica koja dira kružnice  $c_1$  i  $c_2$  te pravac  $p$ . Neka je  $k'$  koncentrična kružnica kružnici  $k$  koja prolazi točkom  $A$  pa je njen radijus  $r + r_1$ . Tada ta kružnica dira pravac  $p'$  koji je paralelan s  $p$ , a udaljen od njega za  $r_1$ . Kružnica  $k'$  dira i kružnicu  $c_2'$  koncentričnu kružnici  $c_2$  radijusa manjeg (ili većeg) za  $r_1$ . Ako konstruiramo  $k'$ , lako ćemo konstruirati  $k$ . Kružnicu  $k'$  konstruiramo na način opisan u cjelini 2.2 ( $Tpk$ ), slučaj D.

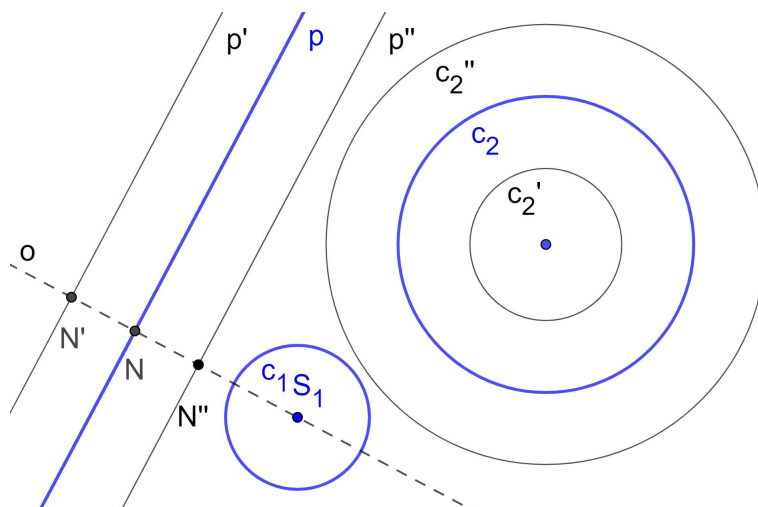


Slika 2.75: Analiza problema pkk

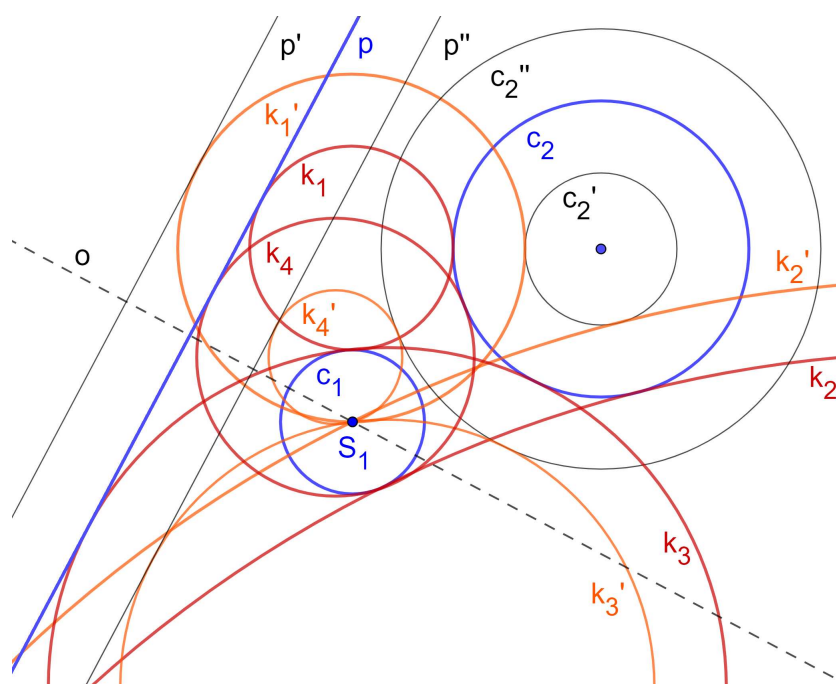
**Konstrukcija:**

Neka je  $c_1 = k(S_1, r_1)$  i  $c_2 = k(S_2, r_2)$ ,  $r_1 > r_2$ .

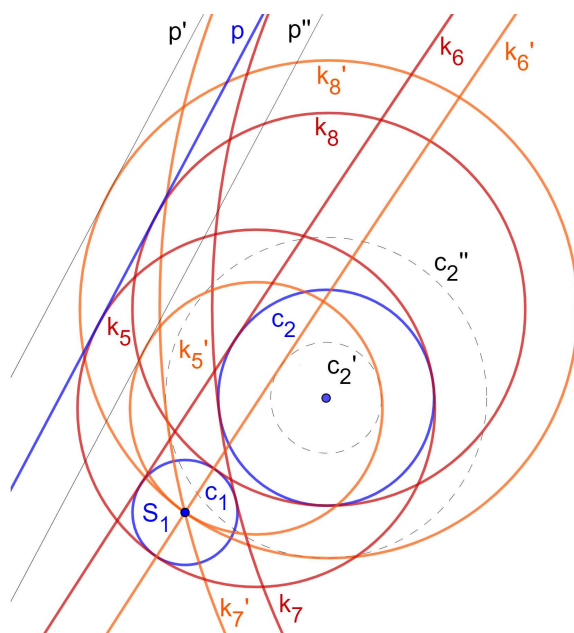
1. okomica  $o$  iz  $S_1$  na  $p$  siječe pravac  $p$  u  $N$
2. neka su  $N$  i  $N'$  točke na presjeku  $o$  i  $k(N, r_1)$  takve da  $N''$  i  $S_1$  leže s iste strane pravca  $p$
3. paralela kroz  $N'$  s  $p = p'$ , paralela kroz  $N''$  s  $p = p''$
4.  $c'_2 = k(S_2, r_2 - r_1)$ ,  $c''_2 = k(S_2, r_2 + r_1)$
5. konstruirajmo kružnice  $k'_1$  i  $k'_2$  koje diraju pravac  $p'$ , kružnicu  $c'_2$  te prolaze kroz  $S_1$  (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
6. ako je  $d(T_1, c_1) = d(T_1, c_2) = d(T_1, S_1) - r$  onda  $k_1 = k(S_1, d(S_1, a))$ , ako je  $d(T_2, c_1) = d(T_2, c_2) = d(T_2, S_1) - r$  onda  $k_2 = k(S_2, d(S_2, a))$
7. konstruirajmo kružnice  $k'_3$  i  $k'_4$  koje diraju pravac  $p''$ , kružnicu  $c''_2$  te prolaze kroz  $S_1$  (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
8. ako je  $d(T_3, c_1) = d(T_3, c_2) = d(T_3, S_1) + r$  onda  $k_3 = k(S_3, d(S_3, a))$ , ako je  $d(T_4, c_1) = d(T_4, c_2) = d(T_4, S_1) + r$  onda  $k_4 = k(S_4, d(S_4, a))$
9. konstruirajmo kružnice  $k'_5$  i  $k'_6$  koje diraju pravac  $p''$ , kružnicu  $c'_2$  te prolaze kroz  $S_1$  (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
10. ako je  $d(T_5, c_1) = d(T_5, c_2) = d(T_5, S_1) + r$  onda  $k_5 = k(S_5, d(S_5, a))$ , ako je  $d(T_6, c_1) = d(T_6, c_2) = d(T_6, S_1) + r$  onda  $k_6 = k(S_6, d(S_6, a))$
11. konstruirajmo kružnice  $k'_7$  i  $k'_8$  koje diraju pravac  $p'$ , kružnicu  $c''_2$  te prolaze kroz  $S_1$  (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
12. ako je  $d(T_7, c_1) = d(T_7, c_2) = d(T_7, S_1) + r$  onda  $k_7 = k(S_7, d(S_7, a))$ , ako je  $d(T_8, c_1) = d(T_8, c_2) = d(T_8, S_1) + r$  onda  $k_8 = k(S_8, d(S_8, a))$



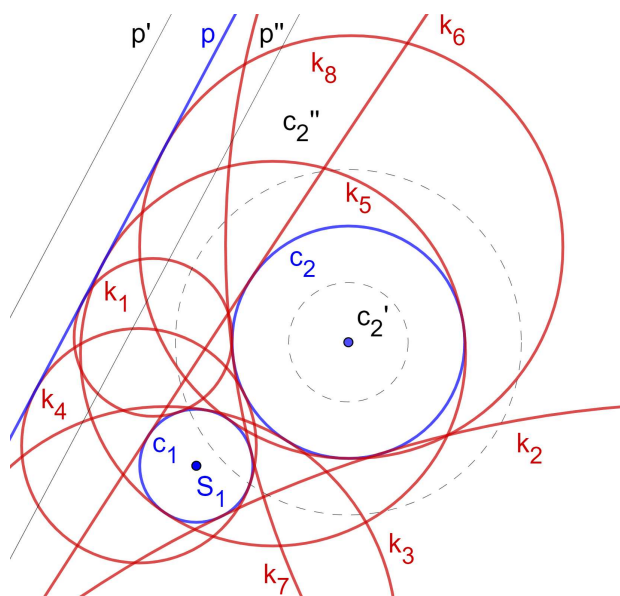
Slika 2.76: Konstrukcija problema pkk, koraci 1-4



Slika 2.77: Konstrukcija problema pkk, koraci 5-8



Slika 2.78: Konstrukcija problema pkk, koraci 9-12



Slika 2.79: Konstrukcija problema pkk, 8 rješenja

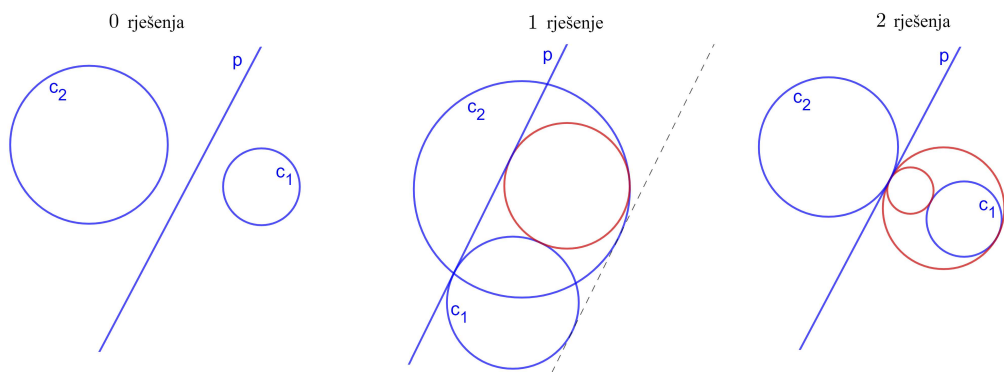
**Dokaz:**

Potrebno je dokazati da kružnice  $k_1, \dots, k_8$  diraju kružnice  $c_1$  i  $c_2$  te pravac  $p$ . To slijedi iz konstrukcije zbog odabira kružnica  $k'_1, \dots, k'_8$  te zbog koraka 6, 8, 10 i 12.

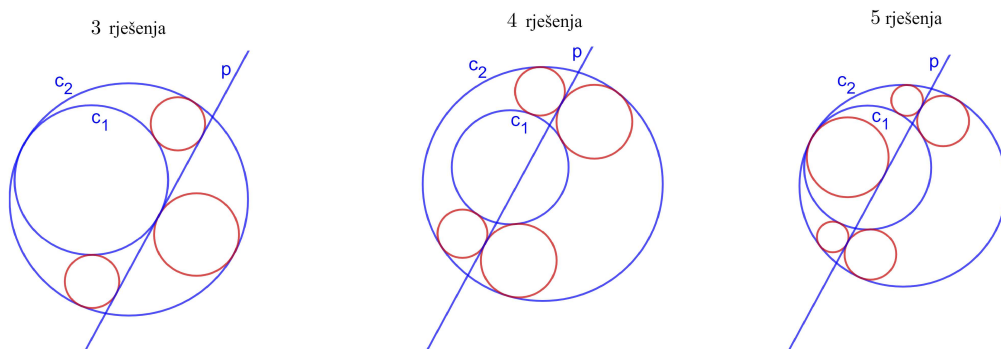
□

**Rasprava:**

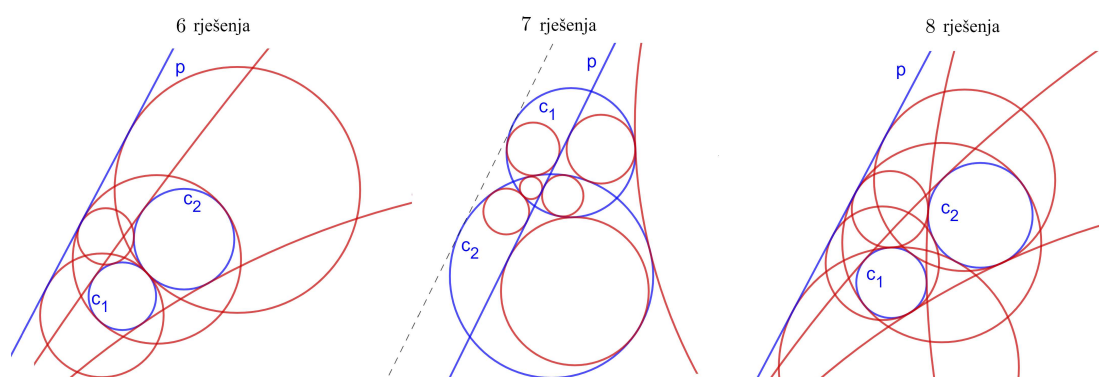
Ovisno o međusobnom položaju kružnica i pravca može biti 0 do 8 rješenja kao što je prikazano na slikama 2.80, 2.81 i 2.82.



Slika 2.80: Problem pkk, primjer 0, 1 i 2 rješenja

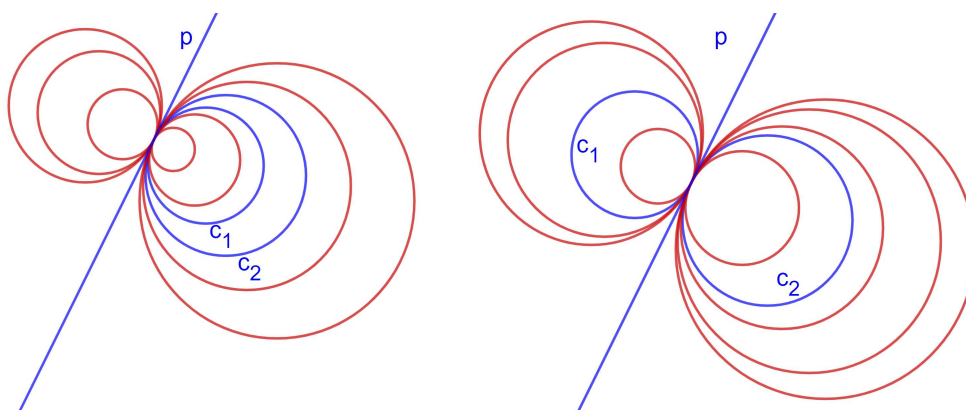


Slika 2.81: Problem pkk, primjer 3, 4 i 5 rješenja



Slika 2.82: Problem pkk, primjer 6, 7 i 8 rješenja

U nekim posebnim slučajevima ovaj problem ima i beskonačno rješenja kao što je prikazano u primjerima na slici 2.83.



Slika 2.83: Problem pkk, beskonačno rješenja

## Poglavlje 3

# Rješenje izvornog Apolonijevog problema

U ovom ćemo poglavlju opisati konstrukcije originalnog Apolonijevog problema, problema *kkk*, u kojem su sva tri dana elementa kružnice.

### 3.1 Problem *kkk*

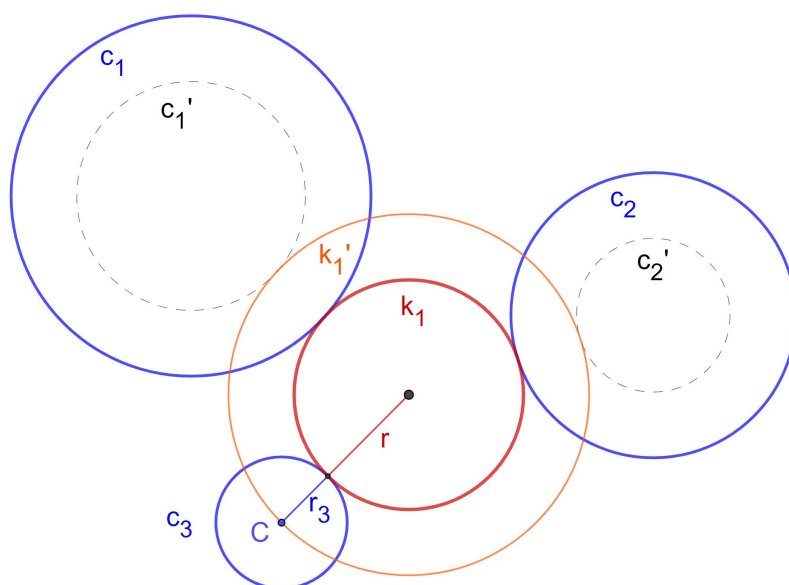
**Problem.** *Neka su  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  kružnice. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira sve tri kružnice.*

#### *1. način*

**Analiza:**

Zadane su tri kružnice  $c_1 = k(A, r_1)$ ,  $c_2 = k(B, r_2)$  i  $c_3 = k(C, r_3)$ . Neka je bez smanjenja općenitosti  $r_3 \leq r_2 \leq r_1$ . Smanjimo li radijus kružnica  $c_1$  i  $c_2$  za radijus kružnice  $c_3$  problem ćemo svesti na konstrukciju problema *Tkk* koji znamo riješiti. [Cjelina 2.3]





Slika 3.1: Analiza kkk

**Konstrukcija:**

## I. dio konstrukcije

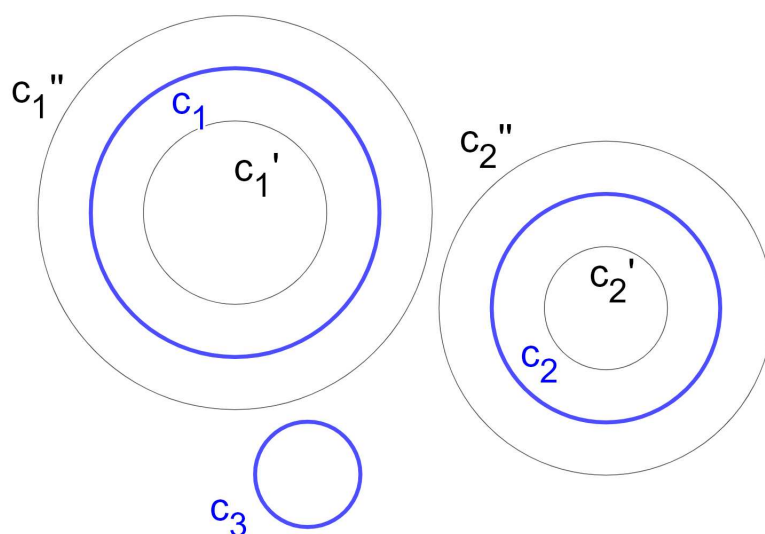
1. kružnica  $c'_1 = k(A, r_1 - r_3)$  koncentrična kružnici  $c_1$
2. kružnica  $c'_2 = k(B, r_2 - r_3)$  koncentrična kružnici  $c_2$
3. kružnica  $c''_1 = k(A, r_1 + r_3)$  koncentrična kružnici  $c_1$
4. kružnica  $c''_2 = k(B, r_2 + r_3)$  koncentrična kružnici  $c_2$

## II. dio konstrukcije

5. konstruiramo kružnice kružnice  $k'_i = k(S_i, d_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, 16\}$  koje diraju kružnice  $c'_1$  i  $c'_2$ , ili  $c'_1$  i  $c'_2$ , ili  $c''_1$  i  $c''_2$ , ili  $c''_1$  i  $c''_2$  i prolaze točkom  $C$ , (konstrukcija Tkk, cjelina 2.3)

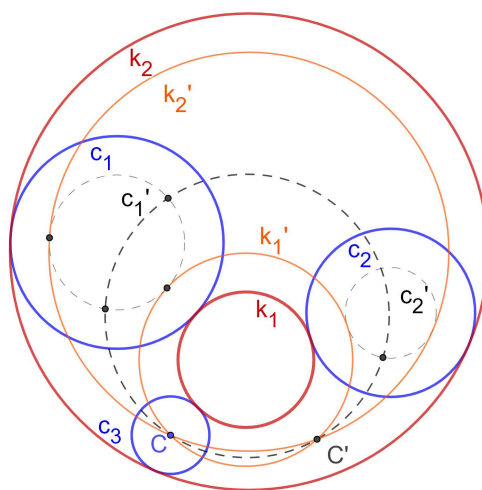
## III. dio konstrukcije

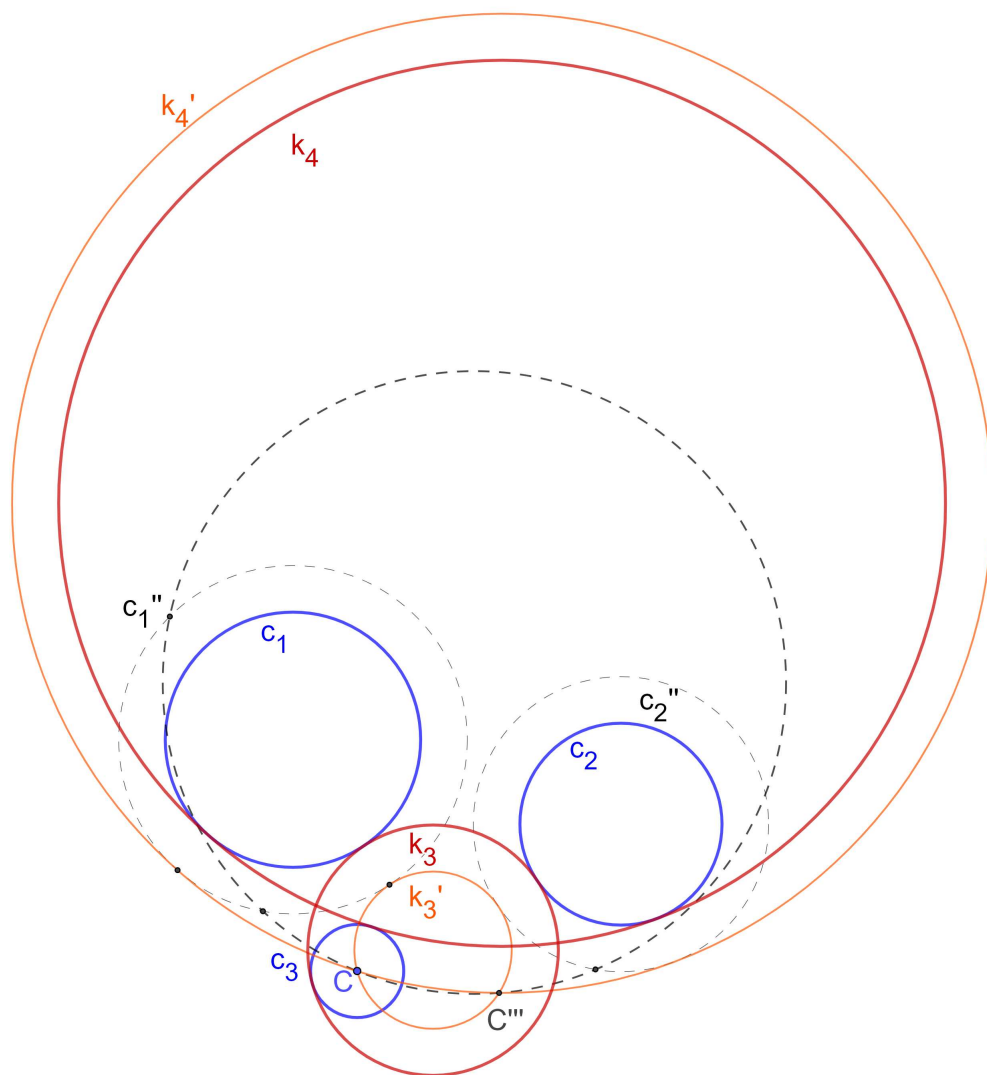
6. kružnice  $k_i = k(S_i, d_i \pm r_3)$ ,  $i \in \{1, \dots, 16\}$  koncentrične kružnicama  $k'_i = k(S_i, d'_i)$  su moguća rješenja ako je  $d(S_i, c_1) = d(S_i, c_2) = d(S_i, c_3) = d(S_i, C) \pm r_3$

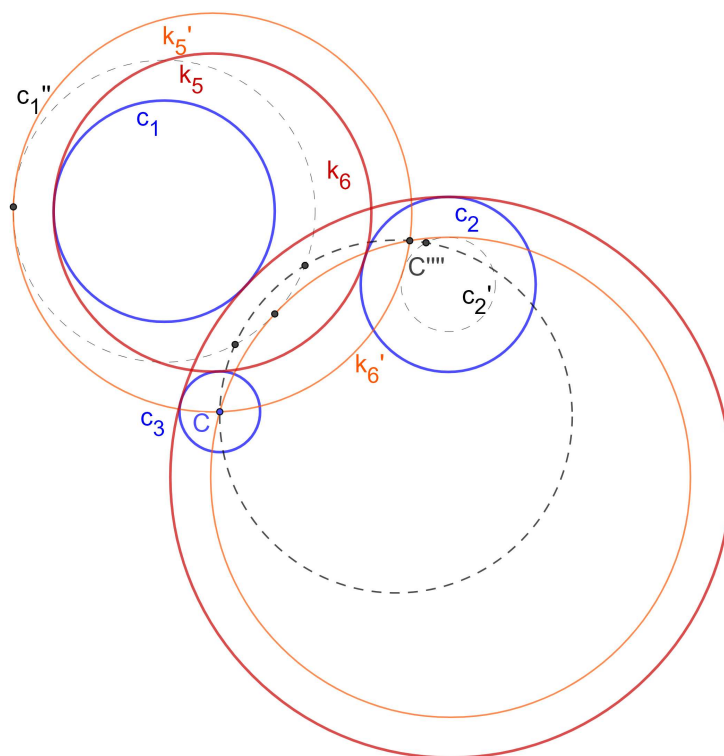


Slika 3.2: problem kkk konstrukcija koraka 1-4

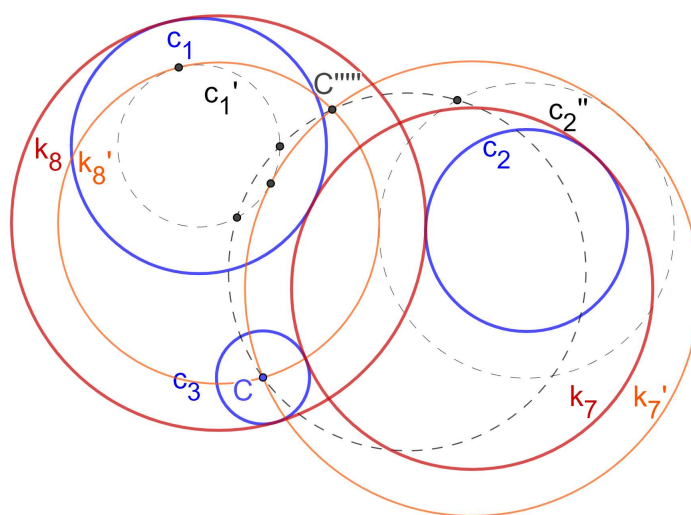
Na slikama 3.3, 3.4, 3.5 i 3.6 kružnice  $c_1, c_2$  i  $c_3$  su uvijek u istom položaju, a ostale kružnice predstavljaju tražena rješenja.

Slika 3.3: Konstrukcija problema kkk, Rješenja  $k_1$  i  $k_2$

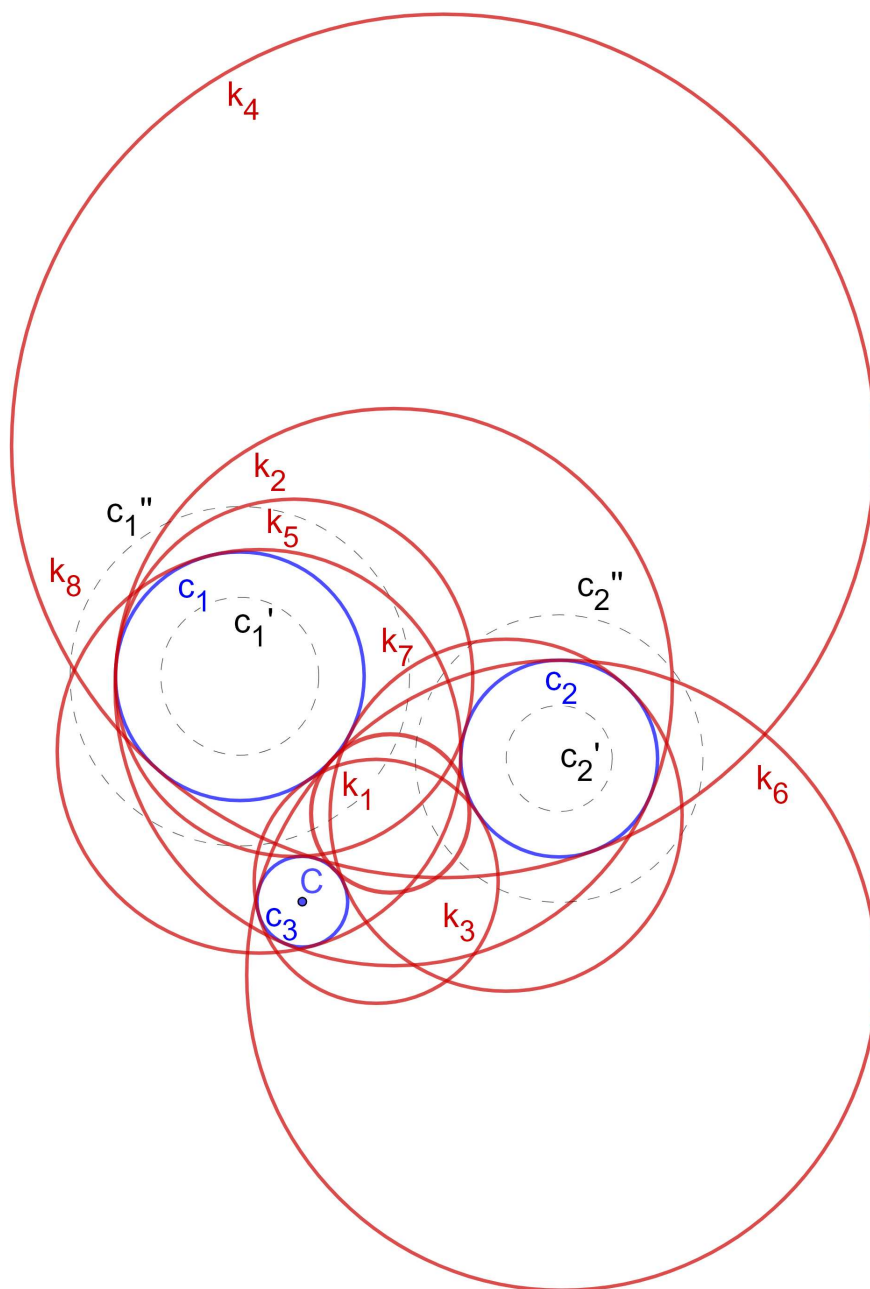
Slika 3.4: Konstrukcija problema kkk, Rješenja  $k_3$  i  $k_4$



Slika 3.5: Konstrukcija problema kkk, Rješenja  $k_5$  i  $k_6$



Slika 3.6: Konstrukcija problema kkk, Rješenja  $k_7$  i  $k_8$



Slika 3.7: Konstrukcija problema kkk, sva rješenja

**Dokaz:**

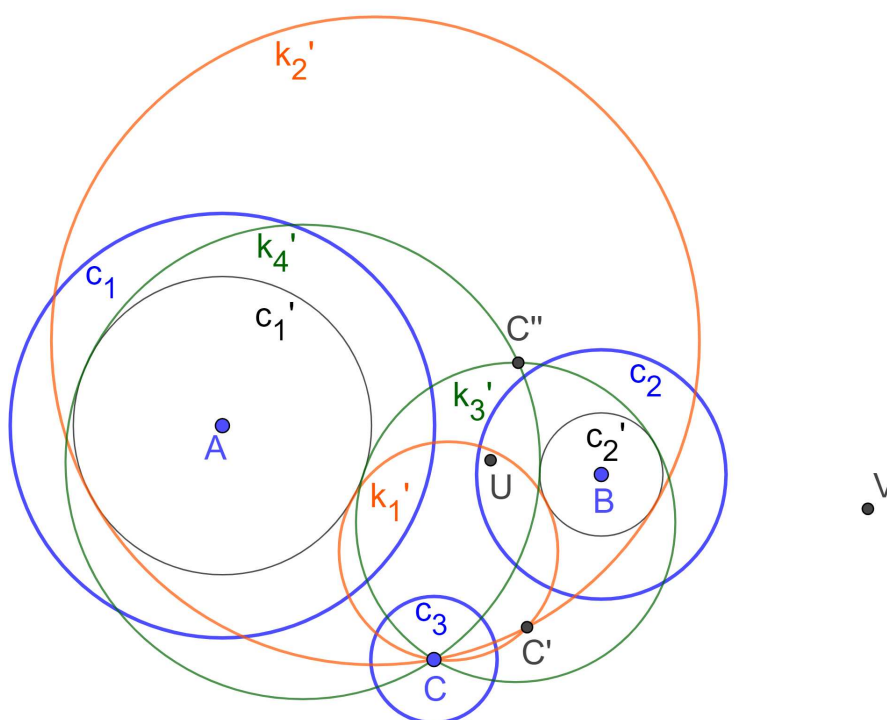
Trebamo dokazati da svaka od konstruiranih kružnica dira tri zadane kružnice.

To slijedi iz konstrukcije zbog odabira kružnica  $k'_i = k(S_i, d_i)$  te zbog koraka 6. □

**Rasprava:**

Problem konstrukcije kružnice koja prolazi danom točkom i dira dvije dane kružnice ima najviše 4 rješenja: kružnicu  $k'_1$  koja dira obje kružnice izvana, kružnicu  $k'_2$  koja dira obje kružnice iznutra, te kružnice  $k'_3$  i  $k'_4$  (slika 3.8). No, kružnice  $k'_3$  i  $k'_4$  neće dati rješenje našeg problema jer povećanjem ili smanjenjem polumjera za  $r_3$  ne vrijedi jednakost  $d(S_i, c_1) = d(S_i, c_2) = d(S_i, c_3) = d(S_i, C) \pm r_3$ . Dakle, pri rješavanju problema Tkk sve kombinacije kružnica  $c'_1, c'_2, c''_1, c''_2$  dati će nam 16 mogućih rješenja od kojih pola neće biti rješenja problema kkk.

Zaključujemo da ovisno o međusobnom položaju kružnica i pravca može biti 0 do 8 rješenja kao što je prikazano na slici

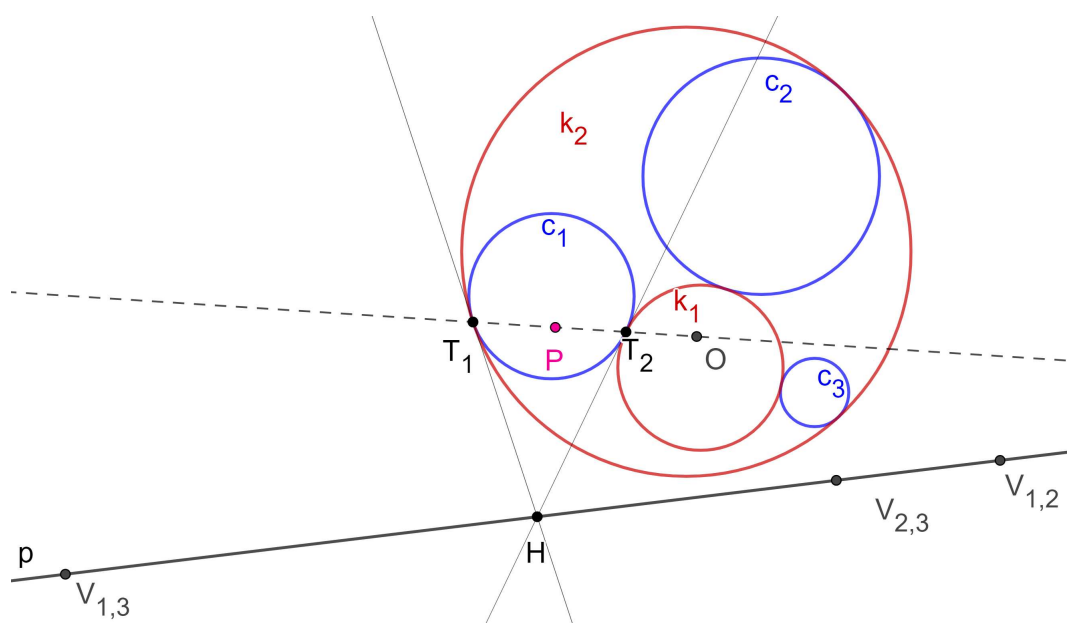


Slika 3.8: Problem kkk, rasprava

## 2. način - Gergonnova konstrukcija

Jedna od standardnih tehnika pri rješavanju Apolonijevog problema je primjena inverzije, s idejom dobivanja jednostavnijeg problema, pronalaženjem potrebne kružnice i inverznog preslikavanja. Rješenje problema kkk Josepha Diaza Gergonnea (Annales de Mathématiques 1816. [6]) je izvanredno po tome što se inverzija koristi kao motivirajuća početna točka, a potom i u dokazu valjanosti konstrukcije, ali ne i u samoj konstrukciji.

### Analiza:



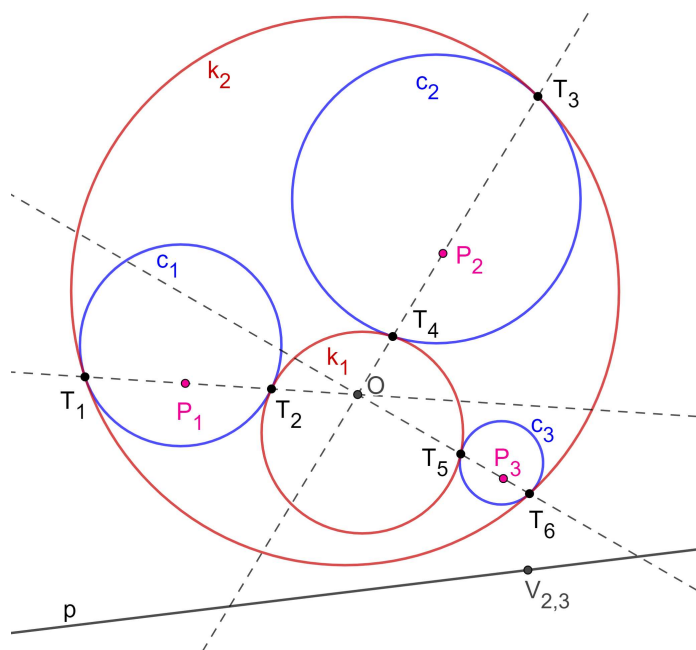
Slika 3.9: Analiza kkk, Gergonov pristup

Neka su  $k_1$  i  $k_2$  tražena rješenja takva da  $k_1$  svaku zadanu kružnicu dira iznutra, a  $k_2$  izvana. Pošto  $k_1$  i  $k_2$  diraju sve tri dane kružnice  $c_1, c_2$  i  $c_3$ , vanjski centri sličnosti svaka dva para zadanih kružnica leže na potencijali  $p$  kružnica  $k_1$  i  $k_2$  (Lema 2). Da su bile zadane kružnice  $k_1$  i  $k_2$ , kružnice  $c_1, c_2, c_3$  bile bi tri od mnogo njihovih zajedničkih kružnica koje jednu zadanu kružnicu diraju izvana, a drugu iznutra. Zato se unutarnji centar sličnosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$  mora nalaziti na potencijalima kružnica  $c_1$  i  $c_2$ ,  $c_1$  i  $c_3$ ,  $c_2$  i  $c_3$  (Lema 2). Dakle, radikalno središte  $O$ , kružnica  $c_1, c_2$  i  $c_3$  unutarnji je centar sličnosti kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Možemo zaključiti da dirališta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  sa svakom danom kružnicom moraju biti kolinearna s  $O$ . Neka su  $T_1$  i  $T_2$  ta dirališta s kružnicom  $c_1$ . Konstruiramo li tim točkama tangente na kružnicu  $c_1$  one će se sijeći u točki  $H$  koja se nalazi na potencijali  $p$  jer  $|HT_1| = |HT_2|$  i

pravci  $HT_1$  i  $HT_2$  tangente su kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Točka  $H$  pol je pravca  $T_1T_2$  u odnosu na kružnicu  $c_1$ . Pol pravca  $T_1T_2$  u odnosu na kružnicu  $c_1$  leži na pravcu  $p$ , dakle pol pravca  $p$  leži na pravcu  $T_1T_2$ . Neka je  $P$  pol pravca  $p$  u odnosu na kružnicu  $c_1$ . Točke  $O, T_1, P$  i  $T_2$  kolinearne. Sada konstrukciju nije problem provesti.

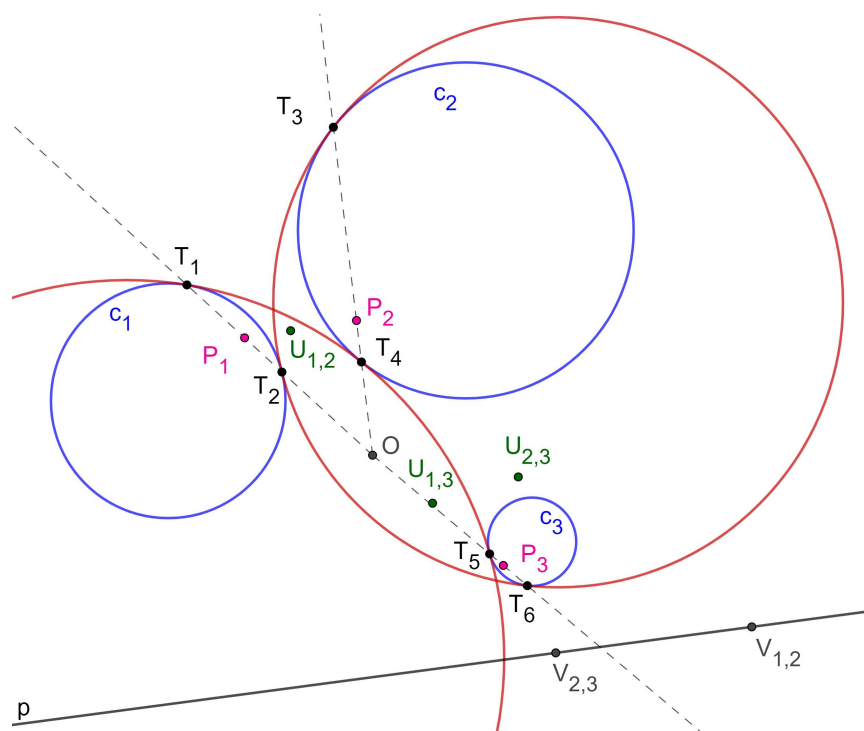
### Konstrukcija:

1. konstruiramo 6 centara homotetije (unutarnje -  $U_{12}, U_{13}, U_{23}$  i vanjske centre -  $V_{12}, V_{13}, V_{23}$  sličnosti svakog para kružnica)
2. spojimo dobivene točke i dobijemo 4 osi sličnosti zadanih kružnica,  $U_{12}U_{13}, U_{12}U_{23}$  i  $U_{13}U_{23}$ .
3. konstruiramo radikalno središte  $O$  kružnica  $c_1, c_2$  i  $c_3$ . [Konstrukcija 2]
4. za svaku os sličnosti konstruiramo njen pol u odnosu na svaku kružnicu
5. spojimo polove s radikalnim središtem  $O$  i sjecišta tih pravaca s kružnicama su točke dodira traženih i zadanih kružnica
6. konstruiramo kružnice kroz odgovarajuće točke dodira (po jedna točka na svakoj od danih kružnica)

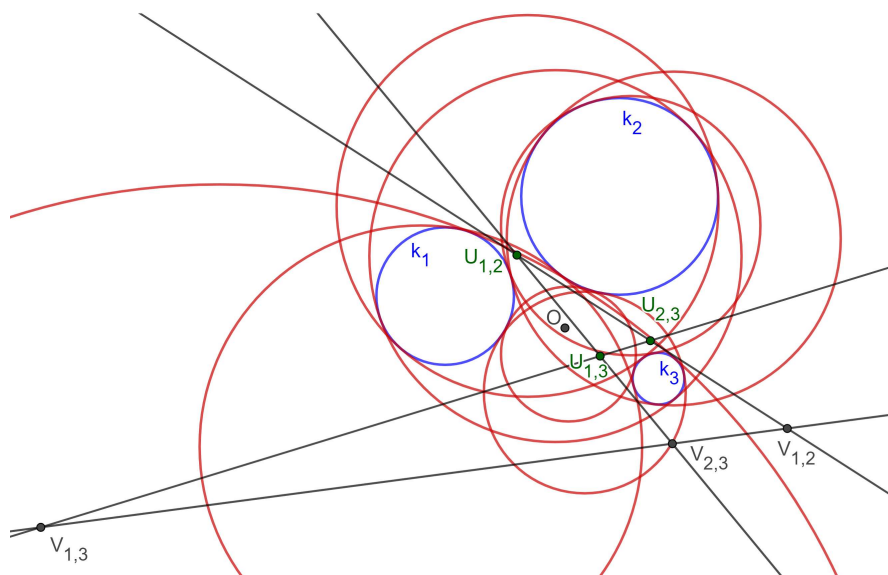


Slika 3.10: Konstrukcija problema kkk, Gergonov pristup - dva rješenja





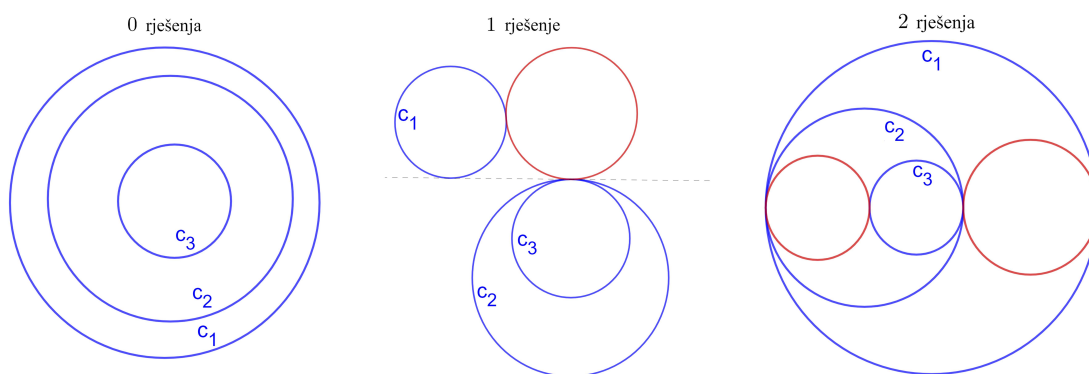
Slika 3.11: Konstrukcija problema kkk, Gergonov pristup - dva rješenja



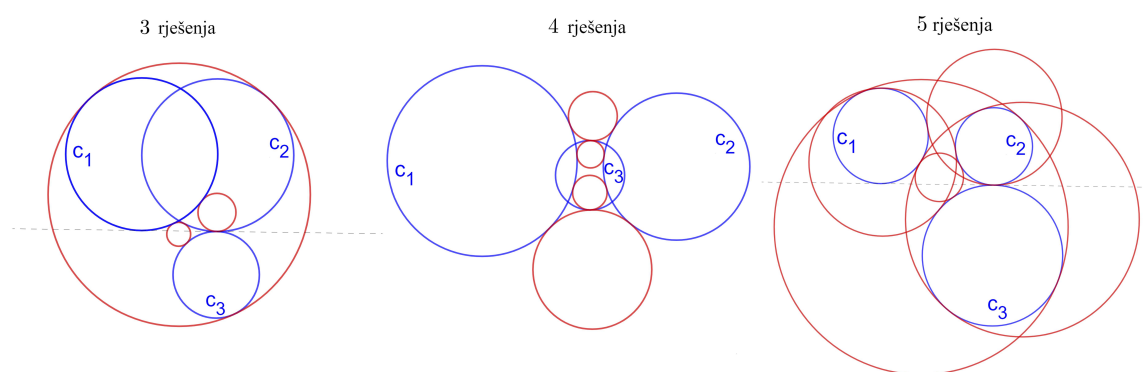
Slika 3.12: Konstrukcija problema kkk, Gergonov pristup - sva rješenja

**Rasprava:**

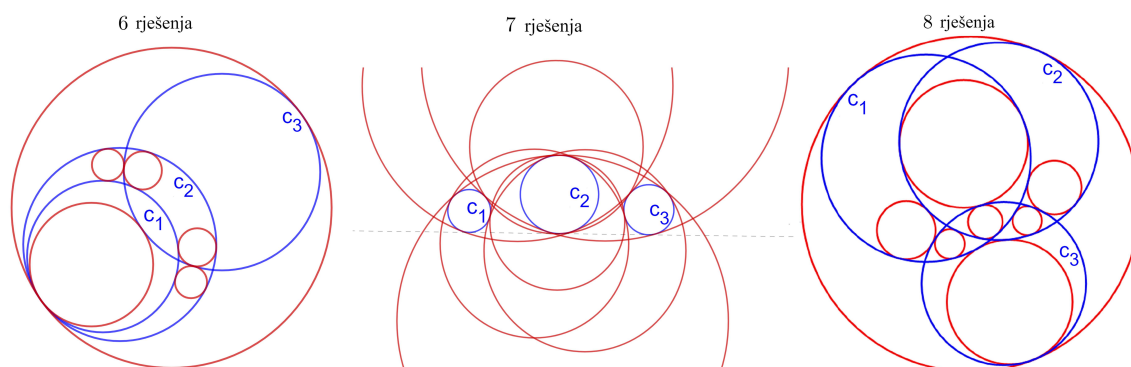
Moguće je da bude 0-8 rješenja. Tih 8 rješenja koliko ih najviše ima zapravo znači da unutar svake Apolonijeve kružnice nalazi se neka od danih kružnica (jedna ili dvije ili sve tri ili pak nijedna). A što je točno unutar nje možemo izabrati na osam načina te dobiti najviše osam rješenja kao što je prikazano na slikama 3.13, 3.14 i 3.15 .



Slika 3.13: Problem kkk, primjer 0, 1 i 2 rješenja

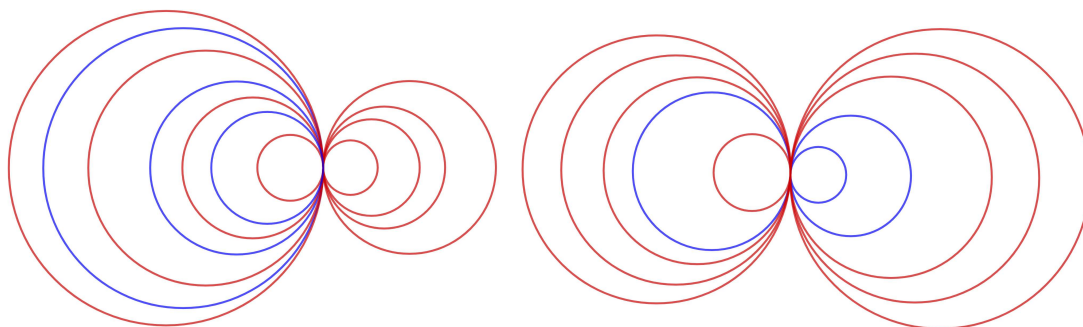


Slika 3.14: Problem kkk, primjer 3, 4 i 5 rješenja



Slika 3.15: Problem kkk, primjer 6, 7 i 8 rješenja

U nekim posebnim slučajevima ovaj problem ima i beskonačno rješenja kao što je prikazano u primjerima na slici 3.16.



Slika 3.16: Problem kkk, beskonačno rješenja

# Bibliografija

- [1] D. Palman (1996), *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.
- [2] Paul Kunkel (2007), *The tangency problem of Apollonius: three looks*, Dostupno na: <https://doi.org/10.1080/17498430601148911> (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)
- [3] Alexander Bogomolny, *The Problem of Apollonius*, Dostupno na: <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Apollonius.shtml> (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)
- [4] Zor Shekhtman, *Apollonius Problems*, Dostupno na: (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)
- [5] M. Bombardelli, T. Pejković, prema predavanjima profesora Vladimira Voleneca, *Konstruktivne metode u geometriji*. Dostupno na: [https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/kmg\\_predavanja.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/kmg_predavanja.pdf) (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)
- [6] Ž. M. Šipuš, M. Bombardelli, *Analitička geometrija*. Dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf> (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)
- [7] A. Guberina, *Generalizacija Apolonijeva problema*, diplomski rad, PMF Split, 2018.
- [8] Wikipedia, *Apolonijeva mreža*, Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian\\_gasket/media/File:Apollonian\\_gasket.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_gasket/media/File:Apollonian_gasket.svg) (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)



# Sažetak

U ovom diplomskom radu proučava se i rješava Apolonijev problem koji glasi:

Dani su tri objekta, krug, pravac ili točka. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje sva tri dana objekta.

Problem je je podijeljen u deset zasebnih konstruktivnih problema. Rad je podijeljen na tri poglavlja. U uvodu su navedeni svih deset problema te neke osnovne definicije, teoremi i konstrukcije. U prvom poglavlju opisane su konstrukcije Apolonijevih problema u kojima nema kružnice tj. u kojima su svi zadani elementi ili točke ili pravci. Poglavlje je podijeljeno na četiri potpoglavlja od kojih je svako rješenje jednog konstruktivnog problema. U drugom poglavlju opisane su konstrukcije Apolonijevih problema u kojima su jedan ili dva dana elementa kružnice, a preostali točke i/ili pravci. Poglavlje je podijeljeno na pet potpoglavlja od kojih je svako rješenje jednog konstruktivnog problema. U trećem poglavlju opisane su konstrukcije originalnog Apolonijevog problema u kojima su sva tri dana elementa kružnice.

U svim poglavljima proučava se metodika rješavanja konstruktivne zadaće, etape rješavanja (analiza, konstrukcija, dokaz i rasprava) te su neki problemi riješeni i na više načina. Detaljno su opisane etape rješavanja svih konstrukcija. Neki problemi podijeljeni su na više slučajeva ovisno o položajima zadanih objekata i zasebno riješeni kao konstruktivne zadaće. Zadatci su poredani prema složenosti i popraćeni su nizom slika konstruiranih u GeoGebri.



# Summary

The thesis studies and solves the Apollonius' problem, which is:

Three objects are given, a circle, a line, or a point. Construct a circle that touches all three given objects.

The problem is subdivided into ten constructive problems. All ten problems, some basic definitions, theorems and simpler construction problems needed for the thesis are listed in the introduction. The thesis consists of three chapters. The first chapter describes the constructions of Apollonius' problems in which there are no circles, or in other words, in which all given elements are either points or lines. The chapter is divided into four subchapters - each containing a solution to one constructive problem. The second chapter describes the constructions of Apollonius' problems in which one or two given elements are circles and others are points and/or lines. This chapter is divided into five subchapters with each containing a solution to one constructive problem. The third chapter describes the construction of the original Apollonius' problem, in which all three given elements are circles.

All chapters study the methods of solving a constructive problem and stages of solving one (analysis, construction, proof, and discussion). Also, some problems are solved in more than one way. The stages of solving the constructive problems are described in detail. Some problems are divided into several cases depending on the positions of given objects and are solved separately as constructive problems. The problems are arranged by complexity and are substantiated with a list of images constructed using GeoGebra.





# Životopis

Moje ime je Martina Hanževački i rođena sam 4. listopada 1993. u Zagrebu. Svoje obrazovanje započinjem u Osnovnoj školi dr. Ante Starčevića, a nakon završene osnovne škole upisujem II. gimnaziju u Zagrebu. Nakon položene državne mature 2012. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, gdje sam 2018. završila preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički. Nakon toga upisala sam diplomski studij Matematika, smjer nastavnički, koji sada završavam. Tijekom diplomskog studija počela sam predavati matematiku. Radila sam do sada redom u Trećoj ekonomskoj školi Zagreb, Osnovnoj školi Vladimira Nazora, XII. gimnaziji Zagreb, IV. gimnaziji Zagreb, Tehničkoj školi Ruđera Boškovića te trenutno radim u XII. gimnaziji. Volim rad s djecom te se vidim do kraja radnog vijeka u učiteljskoj profesiji.