Elementarni aspekti neprekidnosti

Lujo, Lea

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:078113

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-17**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lea Lujo

ELEMENTARNI ASPEKTI NEPREKIDNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, listopad, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mojoj obitelji koja mi je bila najveća podrška na ovome putu i što su me naučili da nikada ne odustajem od svojih snova te da je trud i upornost ključ uspjeha. Hvala vam na svakoj riječi ohrabrenja te na svim molitvama i bezuvjetnoj ljubavi. Hvala na brizi i požrtvovnosti.

Zahvaljujem se svom momku koji je vjerovao u mene od prvog do zadnjeg dana. Posebno mu se zahvaljujem što mi je bio oslonac i rame za plakanje u svim teškim trenutcima (a bilo ih je često) te na beskrajnom strpljenju, podršci i svim lijepim riječima.

Zahvaljujem se svojim prijateljicama koje su uvijek bile spremne slušati moje kukanje u kolokvijskim tjednima. Hvala vam što ste imale razumijevanja i bile tu kad god je bilo potrebno te dijelile samnom sve moje uspone i padove, suze i smijeh.

Zahvaljujem se svojim kolegicama i kolegama s faksa koji su samnom učili za kolokvije, poticali me na učenje i rad, uvijek bili spremni pomoći te čuvali mjesto na svakom predavanju kada sam kasnila (čitaj: svaki dan).

Zahvaljujem se svome mentoru na velikoj pomoći i brojim savjetima tokom studiranja i pisanja ovog diplomskog rada. Hvala Vam na svakoj riječi ohrabrenja i motivacije, a ponajviše na izdvojenom vremenu.

I za kraj, meni svaka čast!

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavat ćemo pojam neprekidne funkcije.

U prvom poglavlju dajemo definiciju neprekidne funkcije te zatim proučavamo nizove i njihovu vezu s neprekidnošću. Nakon toga proučavamo omeđene podskupove od $\mathbf{R}$ te neka svojstva nizova, a zatim uvodimo pojam limesa funkcije te ispitujemo njegovu vezu s neprekidnošću. Na kraju prvog poglavlja navodimo aksiom potpunosti realnih brojeva.

U drugom poglavlju se bavimo neprekidnim funkcijama na segmentu. Prvo dokazujemo da neprekidna funkcija na segmentu poprima sve međuvrijednosti, a zatim uvodimo pojmove gomilišta i skupilišta niza te dokazujemo da svaki omeđen niz realnih brojeva ima konvergentan podniz. Nadalje dokazujemo da je svaka neprekidna funkcija na segmentu omeđena te da štoviše poprima minimum i maksimum. Na kraju drugog poglavlja dokazujemo da je svaka funkcija na segmentu uniformno neprekidna.

U trećem poglavlju proučavamo neprekidnost u kontekstu metričkih prostora. Prvo dajemo definiciju metričkog prostora i neke osnovne primjere, a zatim proučavamo otvorene skupove u metričkom prostoru. Na kraju trećeg poglavlja se bavimo neprekidnim funkcijama između metričkih prostora te odnosom neprekidnih funkcija, konvergentnih nizova i otvorenih skupova.

Poglavlje 1

Osnovna svojstva neprekidnih funkcija

U ovom poglavlju uvodimo pojam neprekidnosti za realnu funkciju realne varijable.

1.1 Definicija neprekidne funkcije

Definicija 1.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija. Neka je $x_0 \in S$. Kažemo da je f neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Napomena 1.1.2. *Neka su $a, b \in \mathbf{R}$ te neka je $r \in \mathbf{R}, r > 0$. Tada je*

$$|b - a| < r \Leftrightarrow b \in \langle a - r, a + r\rangle.$$

To slijedi iz sljedećih ekvivalencija:

$$|b - a| < r \Leftrightarrow -r < b - a < r \Leftrightarrow a - r < b < a + r \Leftrightarrow b \in \langle a - r, a + r\rangle.$$

Napomena 1.1.3. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija te $x_0 \in S$. Iz napomene 1.1.2 slijedi da je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle.$$

Definicija 1.1.4. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija. Kažemo da je f neprekidna ako je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in S$.*

Primjer 1.1.5. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}, S \neq \emptyset, c \in \mathbf{R}$ te $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s $f(x) = c$, za svaki $x \in S$. Tvrdimo da je f neprekidna funkcija.*

Neka je $x_0 \in S$ *te neka je* $\varepsilon > 0$. *Želimo dokazati da postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in S$ *vrijedi sljedeća implikacija:*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

No, za svaki $x \in S$ *vrijedi* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *jer je* $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0$. *Prema tome, za bilo koji* $\delta > 0$ *implikacija* (1.1) *vrijedi za svaki* $x \in S$. *Stoga,* f *je neprekidna u* x_0. *Dakle,* f *je neprekidna.*

Primjer 1.1.6. *Neka je* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana s*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Tvrdimo da funkcija f *nije neprekidna u točki* 0.

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *Tada postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi*

$$x \in \langle -\delta, \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon \rangle. \tag{1.2}$$

Neka je $x = \frac{\delta}{2}$. *Tada je* $0 < x < \delta$ *pa je onda* $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$ *pa iz* (1.2) *slijedi da je* $f(x) \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, *to jest* $f(x) \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.
Iz $0 < x$ *slijedi* $f(x) = 1$, *no to je u kontradikciji s* $f(x) \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. *Prema tome,* f *nije neprekidna u* 0.
Neka je $x_0 \in \mathbf{R}$ *takav da je* $x_0 > 0$. *Dokažimo da je f neprekidna u* x_0.
Neka je $\varepsilon > 0$. *Definirajmo* $\delta = x_0$. *Neka je* $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, *to jest* $x \in \langle 0, 2x_0 \rangle$. *Tada je* $x > 0$ *pa je* $f(x) = 1$. *Prema tome* $f(x) = f(x_0)$. *Dakle,*

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle.$$

Stoga, vrijedi

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$$

što znači da je f *neprekidna u* x_0.
Uzmimo sada $x_0 \in \mathbf{R}$ *takav da je* $x_0 < 0$. *Želimo dokazati da je f neprekidna u* x_0.
Neka je $\varepsilon > 0$. *Odaberimo* $\delta = -x_0$. *Očito je* $\delta > 0$. *Ako je* $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, *onda je* $x \in \langle 2x_0, 0 \rangle$ *pa je* $f(x) = -1$ *to jest* $f(x) = f(x_0)$, *te vrijedi*

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle.$$

Stoga je f *neprekidna u* x_0.

Primjer 1.1.7. *Neka je $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s*

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Funkcija g je neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in \mathbf{R}$ takav da je $x_0 \neq 0$, što vidimo posve analogno kao u prethodnom primjeru. Tvrdimo da g nije neprekidna u točki 0. Pretpostavimo suprotno. Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi:

$$x \in \langle -\delta, \delta \rangle \Rightarrow g(x) \in \langle 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon \rangle. \tag{1.3}$$

Neka je $x = -\frac{\delta}{2}$. Tada je $-\delta < x < 0$ pa je $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$. Iz (1.3) slijedi da je

$$g(x) \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle. \tag{1.4}$$

Iz $x < 0$ i definicije funkcije g slijedi $g(x) = -1$ što je u kontradikciji s (1.4). Prema tome, g nije neprekidna u 0.

Primjer 1.1.8. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, $S \neq \emptyset$ te neka je $f : S \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ za svaki $x \in S$. Tvrdimo da je funkcija f neprekidna. Neka je $x_0 \in S$ te neka je $\varepsilon > 0$. Definiramo $\delta = \varepsilon$. Tada za svaki $x \in S$ očito vrijedi implikacija:*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle,$$

to jest implikacija:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle.$$

Prema tome, funkcija f je neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna funkcija.

1.2 Nizovi i neprekidnost

Definicija 1.2.1. *Neka je S skup. Za bilo koju funkciju $x : \mathbf{N} \to S$ kažemo da je niz u skupu S. Ako je x niz u skupu S i $n \in \mathbf{N}$, onda $x(n)$ označavamo s x_n, a x označavamo i s $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ili (x_n).*

Definicija 1.2.2. *Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ te neka je $L \in \mathbf{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema L ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - L| < \varepsilon$, to jest $x_n \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$.*
Ako niz (x_n) teži prema L, onda pišemo $x_n \to L$.

Primjer 1.2.3. *Neka je $k \in \mathbf{R}$ te (x_n) niz u $\mathbf{R}$ definiran s $x_n = k$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada niz (x_n) teži prema k. Pokažimo to.*
Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo bilo koji $n_0 \in \mathbf{N}$. Neka je $n \geq n_0$. Tada je $x_n \in \langle k - \varepsilon, k + \varepsilon \rangle$ jer je $x_n = k$. Prema tome $x_n \to k$.

Primjer 1.2.4. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva definiran s $x_n = \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Dokažimo da x_n teži u 0. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (to sigurno možemo). Neka je $n \geq n_0$. Tada je $n > \frac{1}{\varepsilon}$ pa je $\frac{1}{n} < \varepsilon$ što povlači da je $\frac{1}{n} \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, to jest $x_n \in \langle 0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon \rangle$. Dakle, $x_n \in \langle 0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon \rangle$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome $x_n \to 0$.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija neprekidna u x_0. Pretpostavimo da je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Tada $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle. \tag{1.5}$$

Imamo da $x_n \to x_0$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Iz (1.5) sada slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x_n) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$. Prema tome $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Teorem 1.2.6. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, $f : S \to \mathbf{R}$ i $x_0 \in S$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće: ako je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ i $x_n \to x_0$, onda $f(x_n) \to f(x_0)$. Tada je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Prepostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$ takav da je

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle,$$

ali

$$f(x) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle.$$

Stoga, za svaki $n \in \mathbf{N}$ (ako uzmemo $\delta = \frac{1}{n}$) postoji $x_n \in S$ takav da je

$$x_n \in \langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \rangle,$$

ali

$$f(x_n) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle.$$

Dakle, postoji $\varepsilon > 0$ te za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji

$$x_n \in \langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \rangle$$

takav da

$$f(x_n) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle. \tag{1.6}$$

Za svaki $n \in \mathbf{N}$ imamo

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}. \tag{1.7}$$

Tvrdimo da $x_n \to x_0$. Neka je $\varepsilon' > 0$. Prema primjeru 1.2.4 postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon'$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{1}{n} < \varepsilon'$. Stoga, iz (1.7) slijedi da je $|x_n - x_0| < \varepsilon'$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome, $x_n \to x_0$. Iz prepostavke teorema slijedi da $f(x_n) \to f(x_0)$. Iz ovoga slijedi da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, to jest

$$f(x_n) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle.$$

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da (1.6) vrijedi za svaki $n \in \mathbf{N}$. Zaključak: funkcija f je neprekidna u x_0.

□

Napomena 1.2.7. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $x_0 \in \mathbf{R}$ takav da $| x_n - x_0 |< \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. U dokazu prethodnog teorema smo vidjeli da tada $x_n \to x_0$.*

Propozicija 1.2.8. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u $\mathbf{R}$ te neka su $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada niz $(x_n + y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ teži prema $a + b$, to jest $x_n + y_n \to a + b$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $n_0', n_0'' \in \mathbf{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0'$ vrijedi $|x_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ te takvi da za svaki $n \geq n_0''$ vrijedi $|y_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Stavimo $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Dakle, $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$. Prema tome $x_n + y_n \to a + b$.

□

1.3 Omeđenost

Definicija 1.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za realan broj M kažemo da je gornja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq M$.*

Definicija 1.3.2. *Za podskup S od $\mathbf{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako ima barem jednu gornju među.*

Definicija 1.3.3. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za realan broj m kažemo da je donja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \geq m$.*

Definicija 1.3.4. *Za podskup S od $\mathbf{R}$ kažemo da je odozdo omeđen ako ima barem jednu donju među.*

Definicija 1.3.5. *Ako je skup S i odozdo i odozgo omeđen, onda kažemo da je S omeđen skup.*

Propozicija 1.3.6. *Neka su S i T odozgo omeđeni skupovi. Tada je $S \cup T$ odozgo omeđen skup.*

Dokaz. Kako su S i T odozgo omeđeni skupovi postoje $M_1 \in \mathbf{R}$ i $M_2 \in \mathbf{R}$ takvi da za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq M_1$ i za svaki $x \in T$ vrijedi $x \leq M_2$. Tada za svaki $x \in S \cup T$ vrijedi $x \leq \max\{M_1, M_2\}$. Dakle, $\max\{M_1, M_2\}$ je gornja međa skupa $S \cup T$. Time je tvrdnja dokazana.

□

Propozicija 1.3.7. *Neka su S i T odozdo omeđeni skupovi. Tada je i $S \cup T$ odozdo omeđen skup.*

Dokaz. Analogno dokazu prethodne propozicije. □

Korolar 1.3.8. *Neka su S i T omeđeni skupovi. Tada je $S \cup T$ omeđen skup.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz prethodne dvije propozicije. □

Korolar 1.3.9. *Ako je $n \in \mathbf{N}$ te ako su $S_1, ..., S_n$ omeđeni skupovi, onda je $S_1 \cup ... \cup S_n$ omeđen.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.
Baza: za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi: ako su $S_1, ..., S_n$ omeđeni skupovi, onda je i $S_1 \cup ... \cup S_n$ omeđen.
Korak. Trebamo dokazati da tvrdnja vrijedi za $n+1$. Neka su $S_1, ..., S_{n+1}$ omeđeni skupovi. Vrijedi

$$S_1 \cup \cdots \cup S_{n+1} = (S_1 \cup \cdots \cup S_n) \cup S_{n+1}.$$

Stoga, iz pretpostavke indukcije i propozicije 1.3.7 slijedi da je $S_1 \cup \cdots \cup S_{n+1}$ omeđen skup. Zaključak: tvrdnja teorema je dokazana. □

Definicija 1.3.10. *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je konvergentan ako postoji $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$.*

Definicija 1.3.11. *Za niz realnih brojeva* (x_n) *kažemo da je omeđen ako je skup* $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ *omeđen.*

Primjer 1.3.12. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbf{R}$ *definiran s* $x_n = n$*, za svaki* $n \in \mathbf{N}$*. Vrijedi:* $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N}$*, a* $\mathbf{N}$ *nije omeđen skup (nije odozgo omeđen). Prema tome, niz* (x_n) *nije omeđen.*

Primjer 1.3.13. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbf{R}$ *definiran s*

$$x_n = \begin{cases} -1, & n \quad paran \\ 1, & n \quad neparan \end{cases}$$

Imamo $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{-1, 1\}$ *pa je očito* (x_n) *omeđen niz. Tvrdimo da niz* (x_n) *nije konvergentan. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji* $L \in \mathbf{R}$ *takav da* $x_n \to L$*.*
1.slučaj: $L \neq 1$*. Definirajmo* $\varepsilon = |1 - L|$*. Tada je* $\varepsilon > 0$ *pa postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takav da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi*

$$|x_n - L| < |1 - L|. \tag{1.8}$$

Odaberimo $n \geq n_0$ *takav da je n paran broj. Tada je* $x_n = 1$ *pa iz* (1.8) *slijedi* $|1-L| < |1-L|$ *što je kontradikcija.*
2.slučaj: $L = 1$*. Uzmemo* $\varepsilon = \frac{1}{2}$*. Tada postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takav da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $|x_n - 1| < \frac{1}{2}$*. Odaberemo* $n \geq n_0$ *takav da je n neparan broj. Tada je* $x_n = -1$ *pa vrijedi* $|-1-1| < \frac{1}{2}$*, to jest* $2 < \frac{1}{2}$ *što je nemoguće.*
U oba slučaja smo dobili kontradikciju pa zaključujemo da (x_n) *nije konvergentan niz.*

Propozicija 1.3.14. *Neka je* (x_n) *konvergentan niz. Tada je* (x_n) *omeđen niz.*

Dokaz. Budući da je (x_n) konvergentan niz, postoji $L \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to L$. Odaberimo neki $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$. Slijedi da je

$$\langle x_n \mid n \geq n_0 \rangle \subseteq \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle.$$

Iz ovoga je očito da je $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ omeđen skup. Vrijedi

$$\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{x_1\} \cup ... \cup \{x_{n_0}\} \cup \{x_n \mid n \geq n_0\}. \tag{1.9}$$

Svaki jednočlan podskup od $\mathbf{R}$ je očito omeđen pa iz (1.9) i korolara 1.3.9 slijedi da je skup $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ omeđen. Prema tome, niz (x_n) je omeđen. □

Propozicija 1.3.15. *Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$*. Tada je* S *omeđen skup ako i samo ako postoji* $M \in \mathbf{R}$ *takav da je* $|x| \leq M$*, za svaki* $x \in S$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen skup. Tada postoje m i N takvi da je m donja međa, a N gornja međa skupa S. Dakle, za svaki $x \in S$ vrijedi $m \leq x \leq N$. Neka je $M = max\{-m, N\}$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq M$. S druge strane, za svaki $x \in S$ iz $m \leq x$ slijedi $-x \leq -m$ pa je $-x \leq M$. Po definiciji apsolutne vrijednosti zaključujemo da je $|x| \leq M$, za svaki $x \in S$.
Obratno, pretpostavimo da postoji $M \in \mathbf{R}$ takav da je $|x| \leq M$, za svaki $x \in S$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $-M \leq x \leq M$. Iz ovoga je očito da je $-M$ donja međa skupa S, a M gornja međa skupa S pa slijedi da je skup S omeđen. □

Korolar 1.3.16. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Tada je (x_n) omeđen niz ako i samo ako postoji $M \in \mathbf{R}$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.*

Dokaz. Dokaz ove tvrdnje slijedi direktno iz prethodne propozicije.

□

Propozicija 1.3.17. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u $\mathbf{R}$, te neka su $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.*

Dokaz. Niz (x_n) je konvergentan pa je i omeđen po propoziciji 1.3.15. Iz korolara 1.3.16 slijedi da postoji $M \in \mathbf{R}$ takav da je $|x_n| \leq M$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Očito je $M \geq 0$. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Imamo:

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b| = |x_n \cdot (y_n - b) + b \cdot (x_n - a)|$$

$$\leq |x_n \cdot (y_n - b)| + |b \cdot (x_n - a)| = |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \leq M \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b|.$$

Dakle,

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq M \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b|, \tag{1.10}$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $y_n \to b$ postoji $n_1 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_1$ vrijedi

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}. \tag{1.11}$$

Budući da $x_n \to a$ postoji $n_2 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_2$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}. \tag{1.12}$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, te $n \geq n_0$. Tada vrijedi (1.11) i (1.12) pa koristeći (1.10) dobivamo

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq M \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \cdot |b| = \frac{M}{M+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|b|}{|b|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \varepsilon$, za svaki $n \geq n_0$. Time smo dokazali da $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$. □

Napomena 1.3.18. *Neka su $u, v \in \mathbf{R}$. Tada vrijedi*

$$||u| - |v|| \leq |u - v|. \tag{1.13}$$

Naime, imamo $|u| = |u - v + v| \leq |u - v| + |v|$ to jest $|u| \leq |u - v| + |v|$ pa je

$$|u| - |v| \leq |u - v|. \tag{1.14}$$

Zamjenom uloga u i v dobijemo $|v| - |u| \leq |v - u|$, to jest

$$|v| - |u| \leq |u - v|. \tag{1.15}$$

Iz (1.15) *i* (1.14) *slijedi* (1.13).

Propozicija 1.3.19. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$. Tada $-x_n \to -a$ i $|x_n| \to |a|$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$|-x_n - (-a)| = |-x_n + a| = |(-1) \cdot (x_n - a)| = |x_n - a|.$$

Stoga, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|-x_n - (-a)| = |x_n - a| < \varepsilon.$$

Zaključujemo da $-x_n \to -a$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Iz prethodne napomene 1.3.18 slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$||x_n - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon.$$

Prema tome $|x_n| \to |a|$. □

Lema 1.3.20. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je $a \neq 0$ te da je $x_n \neq 0$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada je niz $(\frac{1}{x_n})$ omeđen.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.3.19 vrijedi $|x_n| \to |a|$. Definiramo $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Tada je $\varepsilon > 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n| \in \langle |a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon \rangle$. Stoga, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a| - \varepsilon < |x_n|$ pa iz definicije broja ε slijedi da je $\frac{|a|}{2} < |x_n|$, za svaki $n \geq n_0$. Iz ovoga slijedi da je $|\frac{1}{x_n}| < \frac{2}{|a|}$ za svaki $n \geq n_0$ pa iz propozicije 1.3.15 slijedi da je skup $\{\frac{1}{x_n} \mid n \geq n_0\}$ omeđen. Vrijedi

$$\left\{\frac{1}{x_n} \mid n \in \mathbf{N}\right\} = \left\{\frac{1}{x_1}\right\} \cup \left\{\frac{1}{x_2}\right\} \cup \ldots \cup \left\{\frac{1}{x_{n_0}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{x_n} \mid n \geq n_0\right\}$$

pa iz korolara 1.3.9 slijedi da je $\left\{\frac{1}{x_n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ omeđen skup. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 1.3.21. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je $a \neq 0$ te da je $x_n \neq 0$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi niz $(\frac{1}{x_n})$ je omeđen pa prema korolaru 1.3.16 postoji $M \in \mathbf{R}$ takav da $|\frac{1}{x_n}| \leq M$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz ovoga slijedi da je $M > 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Uočimo da je $\frac{\varepsilon}{M}|a| > 0$ (jer je $a \neq 0$). Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M}|a|.$$

Za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{x_n - a}{x_n \cdot a}\right| = |x_n - a| \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot \frac{1}{|a|} < \frac{\varepsilon}{M} \cdot |a| \cdot M \cdot \frac{1}{|a|} = \varepsilon,$$

to jest $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$ pa po definiciji konvergencije niza slijedi da $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$. □

Neka je S neki skup.
Za funkcije $f, g : S \to \mathbf{R}$ definiramo funkciju $f + g : S \to \mathbf{R}$ s

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

za svaki $x \in S$.
Nadalje, definiramo funkciju $f \cdot g : S \to \mathbf{R}$ s

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

za svaki $x \in S$.
Za funkciju $f : S \to \mathbf{R}$ definiramo funkcije $|f| : S \to \mathbf{R}$ i $-f : S \to \mathbf{R}$ s

$$|f|(x) = |f(x)|$$

i

$$(-f)(x) = -f(x),$$

za svaki $x \in S$.
Nadalje, ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$ definiramo funkciju $\frac{1}{f} : S \to \mathbf{R}$ s

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)},$$

za svaki $x \in S$.

Propozicija 1.3.22. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, neka je $x_0 \in S$ te neka su $f, g : S \to \mathbf{R}$ funkcije neprekidne u x_0. Tada su funkcije $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$ i $(-f)$ neprekidne u x_0. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$, onda je $\frac{1}{f}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Želimo dokazati da

$$(f + g)(x_n) \to (f + g)(x_0). \tag{1.16}$$

Ako to dokažemo, onda će iz teorema 1.2.6 slijediti da je funkcija $f + g$ neprekidna u x_0. Iz propozicije 1.2.5 slijedi da $f(x_n) \to f(x_0)$ i $g(x_n) \to g(x_0)$. Iz propozicije 1.2.8 slijedi da $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$, to je upravo (1.16). Dakle, funkcija $f + g$ je neprekidna u x_0. Na isti način, koristeći propoziciju 1.3.17 dobivamo da je funkcija $f \cdot g$ neprekidna u x_0. Također iz propozicije 1.3.19 slijedi da su funkcije $-f$ i $|f|$ neprekidne u x_0. Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0$, za svaki $x \in S$. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Tada $f(x_n) \to f(x_0)$ pa iz propozicije 1.3.21 slijedi $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{f(x_0)}$, to jest $\frac{1}{f}(x_n) \to \frac{1}{f}(x_0)$. Prema teoremu 1.2.6 funkcija $\frac{1}{f}$ je neprekidna u x_0. □

1.4 Limes funkcije

Definicija 1.4.1. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, $f : S \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ te $L \in \mathbf{R}$. Kažemo da je L limes funkcije f u točki x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je $x \neq x_0$ vrijedi:*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Uočimo da je implikacija (1.17) ekvivalentna implikaciji

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle.$$

Primjer 1.4.2. *Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s $f(x) = 1$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.*
Tvrdimo da je 1 limes od f u točki 2.
Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo bilo koji $\delta > 0$. Za svaki $x \in \mathbf{R}$ takav da je $x \neq 2$ vrijedi implikacija:

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

jer je $f(x) = 1$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Primjer 1.4.3. *Neka je $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

Također, tvrdimo da je 1 *limes od* g *u točki* 2.
Naime, ako je $\varepsilon > 0$, *uzmemo bilo koji* $\delta > 0$ *te za svaki* $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 2$ *vrijedi:*

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |g(x) - 1| < \varepsilon$$

jer je $g(x) = 1$, *za svaki* $x \in \mathbf{R}\backslash\{2\}$.

Propozicija 1.4.4. *Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$, $f : S \to \mathbf{R}$ *te* $x_0 \in S$. *Tada je* f *neprekidna u* x_0 *ako i samo ako je* $f(x_0)$ *limes od* f *u* x_0.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Posebno, za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi prethodna implikacija. To znači da je $f(x_0)$ limes od f u točki x_0.
Obratno, pretpostavimo da je $f(x_0)$ limes od f u x_0. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Prethodna implikacija očito vrijedi i za $x = x_0$ pa stoga vrijedi za svaki $x \in S$, a to znači da je f neprekidna.

□

Propozicija 1.4.5. *Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$, $f : S \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ *te* $L \in \mathbf{R}$. *Pretpostavimo da je* L *limes od* f *u* x_0. *Nadalje, pretpostavimo da je* (x_n) *niz realnih brojeva takav da je* $x_n \in S\backslash\{x_0\}$ *za svaki* $n \in \mathbf{N}$ *te takav da* $x_n \to x_0$. *Tada* $f(x_n) \to L$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi:

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle. \tag{1.18}$$

Zbog $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je za svaki $n \geq n_0$, $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.
Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, $x_n \in S$ i $x_n \neq x_0$ (prema pretpostavci), pa iz (1.18) slijedi $f(x_n) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle$. Prema tome, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x_n) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 1.4.6. *Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$, $f : S \to \mathbf{R}$ *te neka su* $x_0, L \in \mathbf{R}$. *Pretpostavimo da za svaki niz realnih brojeva takvih da je* $x_n \in S\backslash\{x_0\}$, *za svaki* $n \in \mathbf{N}$ *te takav da* $x_n \to x_0$ *vrijedi* $f(x_n) \to L$. *Tada je* L *limes od* f *u* x_0.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$, $x \neq x_0$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ i $f(x) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$. Stoga, za svaki $n \in \mathbf{N}$, ako uzmemo $\delta = \frac{1}{n}$, postoji $x_n \in S$, $x_n \neq 0$ takav da je $x_n \in \langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \rangle$, ali $f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$.
Iz činjenice da je $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ slijedi, na isti način kao u dokazu teorema 1.2.6, da $x_n \to x_0$. Iz pretpostavke teorema slijedi $f(x_n) \to L$, a to je u kontradikciji s činjenicom da $f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

1.5 Aksiom potpunosti

Definicija 1.5.1. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te $M \in \mathbf{R}$. Kažemo da je M supremum skupa S ako je M gornja međa od S te ako za svaku gornju među M' od S vrijedi $M \leq M'$.*

Propozicija 1.5.2. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $M \in \mathbf{R}$. Tada je M supremum od S ako i samo ako vrijedi sljedeće:*

1) M je gornja međa od S

2) Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x + \varepsilon > M$.

Dokaz. Pretpostavimo da je M supremum od S. Tada prema prethodnoj definiciji vrijedi 1).
Dokažimo 2). Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in S$ takav da je $x + \varepsilon > M$. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $x + \varepsilon \leq M$. Dakle, $x \leq M - \varepsilon$, za svaki $x \in S$. Tada je $M - \varepsilon$ gornja međa od S, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je M najmanja gornja međa (po definiciji supremuma). Dakle, postoji $x \in S$ takav da je $x + \varepsilon > M$. Time smo dokazali da vrijedi 2).
Obratno, pretpostavimo da vrijedi 1) i 2). Želimo dokazati da je M supremum.
Neka je M' gornja međa od S. Želimo dokazati da je $M \leq M'$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $M > M'$. Neka je $\varepsilon = M - M'$. Očito je $\varepsilon > 0$, pa prema 2) postoji $x \in S$ takav da $x + \varepsilon > M$. Budući da je M' gornja međa od S vrijedi da je $x \leq M'$, iz čega slijedi da je $x + \varepsilon \leq M' + \varepsilon$, to jest $x + \varepsilon \leq M$ (jer je $M' + \varepsilon = M$ prema definiciji od ε). Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $x + \varepsilon > M$. Prema tome $M \leq M'$ i time smo pokazali da je M supremum skupa S. □

Aksiom potpunosti Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathbf{R}$ takvi da je $x \leq y$, za sve $x \in A$ i $y \in B$. Tada postoji $z \in \mathbf{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$, za sve $x \in A$ i $y \in B$.

Propozicija 1.5.3. *Svaki neprazan odozgo omeđen skup u $\mathbf{R}$ ima supremum.*

Dokaz. Neka je S odozgo omeđen neprazan podskup od $\mathbf{R}$. Neka je T skup svih gornjih međa od S. Uočimo da je T neprazan skup (jer je S odozgo omeđen). Neka je $y \in T$. Kako je T skup svih gornjih međa od S vrijedi da je $x \leq y$, za svaki $x \in S$. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbf{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$, za sve $x \in S$, $y \in T$. Slijedi da je z supremum skupa S. □

Propozicija 1.5.4. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je M gornja međa od S. Tada je M supremum od S ako i samo ako postoji niz (x_n) u $\mathbf{R}$ takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $x_n \to M$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je M supremum od S. Neka je $\varepsilon > 0$. Po propoziciji 1.5.2 postoji $x \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x$. Očito je $x \leq M$ pa imamo $M - \varepsilon < x < M + \varepsilon$ što povlači da je $|x - M| < \varepsilon$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $|x - M| < \varepsilon$. Stoga, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $x_n \in S$ takav da je $|x_n - M| < \frac{1}{n}$. Iz dokaza teorema 1.2.6 vidimo da $x_n \to M$. Obratno, pretpostavimo da postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $x_n \to M$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - M| < \varepsilon$. Odaberimo bilo koji $n \geq n_0$. Iz $|x_n - M| < \varepsilon$, to jest iz $|M - x_n| < \varepsilon$ slijedi $M - x_n < \varepsilon$. Stoga je $M - \varepsilon < x_n$. Iz ovoga i propozicije 1.5.2 slijedi da je M supremum. □

Definicija 1.5.5. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $m \in \mathbf{R}$. Kažemo da je m infimum skupa S ako je m najveća donja međa od S, to jest ako vrijedi sljedeće:*

1) *m je donja međa skupa S;*

2) *za svaki donju među m' skupa S vrijedi $m' \leq m$.*

Propozicija 1.5.6. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, te neka je $m \in \mathbf{R}$. Tada je m infimum skupa S ako i samo ako vrijedi sljedeće:*

1) *m je donja međa od S;*

2) *za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x - \varepsilon < m$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je m infimum skupa S. Tada po definiciji vrijedi 1).
Dokažimo da vrijedi 2.) Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in S$ takav da je $x - \varepsilon < m$.
Pretpostavimo da vrijedi suprotno. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $x - \varepsilon \geq m$. Dakle, $x \geq m + \varepsilon$. Tada je $m + \varepsilon$ donja međa skupa S, a to je kontradikcija jer je m najveća donja međa od S. Time smo dokazali da vrijedi 2.)
Obratno, pretpostavimo da vrijedi 1.) i 2.). Želimo dokazati da je m infimum. Neka je m' donja međa od S. Želimo pokazati da je $m' \leq m$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je $m' > m$. Neka je $\varepsilon = m' - m$. Očito je $\varepsilon > 0$ pa prema 2.) postoji $x \in S$ takav da

$$x - \varepsilon < m. \tag{1.19}$$

Kako je m' donja međa skupa S, onda je $m' \leq x$. Iz (1.19) slijedi da je $x < m + \varepsilon$ pa je $m' < m + \varepsilon$ što je u kontradikciji s definicijom od ε. Zaključak: $m' \leq m$. Stoga je m infimum skupa S. □

Propozicija 1.5.7. *Svaki odozdo omeđen neprazan skup ima infimum.*

Dokaz. Neka je S neprazan odozdo omeđen skup. Neka je T skup svih donjih međa od S. Uočimo da je T neprazan skup jer je S odozdo omeđen. Neka je $y \in T$. Kako je T skup svih donjih međa od S vrijedi da je $y \leq x$, za svaki $x \in S$. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbf{R}$ takav da je $y \leq z \leq x$, za svaki $x \in S$, $y \in T$. Slijedi da je z infimum skupa S. □

Propozicija 1.5.8. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je m donja međa skupa S. Tada je m infimum skupa S ako i samo ako postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $x_n \to m$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je m infimum skupa S. Neka je $\varepsilon > 0$. Po propoziciji 1.5.6 postoji $x \in S$ takav da je $x < m + \varepsilon$. Očito je $m \leq x$ pa vrijedi $m - \varepsilon < x < m + \varepsilon$. Iz ovoga slijedi $| x - m |< \varepsilon$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $| x - m |< \varepsilon$. Stoga, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $x_n \in S$ takav da je $| x_n - m |< \frac{1}{n}$. Iz ovoga slijedi $x_n \to m$.
Obratno, pretpostavimo da postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da $x_n \in S$ te takav da $x_n \to m$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $| x_n - m |< \varepsilon$. Odaberimo bilo koji $n \geq n_0$. Iz $| x_n - m |< \varepsilon$ slijedi $x_n - m < \varepsilon$, to jest $x_n - \varepsilon < m$. Po propoziciji slijedi da je m infimum skupa S. □

Primjer 1.5.9. *Neka su a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Tada je a infimum skupa $\langle a, b]$. Očito je a donja međa ovog skupa. Pretpostavimo da je m donja međa skupa $\langle a, b]$ takva da je $a < m$. Tada je $a < \min\{m, b\}$ pa možemo odabrati $x \in \mathbf{R}$ takav da je $a < x < \min\{m, b\}$. Slijedi $a < x < b$ i $x < m$, to jest $x \in \langle a, b]$ i $x < m$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je m donja međa od $\langle a, b]$. Zaključak: za svaku donju među od $\langle a, b]$ vrijedi da je $m < a$. Prema tome a je infimum skupa $\langle a, b]$.*

Lema 1.5.10. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $x_0 \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to x_0$. Neka je $a \in \mathbf{R}$.*

1) *Pretpostavimo da je $x_n \leq a$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada je $x_0 \leq a$.*

2) *Pretpostavimo da je $x_n \geq a$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada je $x_0 \geq a$.*

Dokaz. 1) Pretpostavimo suprotno, to jest da je $x_0 > a$. Definirajmo $\varepsilon = x_0 - a$. Očito je $\varepsilon > 0$. Iz $x_n \to x_0$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle . \tag{1.20}$$

Odaberimo neki $n \geq n_0$. Iz (1.20) slijedi $x_0 - \varepsilon < x_n$. Iz definicije od ε slijedi da je $x_0 - \varepsilon = a$. Prema tome, $a < x_n$, što je nemoguće. Zaključujemo da je $x_0 \leq a$.
2) Imamo $-x_n \leq -a$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Prema propoziciji 1.3.19 vrijedi $-x_n \to -x_0$. Prema 1) vrijedi $-x_0 \leq -a$. Stoga je $x_0 \geq a$. $\square$

Poglavlje 2

Neprekidne funkcije na segmentu

2.1 Međuvrijednosti neprekidnih funkcija

Definicija 2.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $f : S \to \mathbf{R}$. Neka je $x_0 \in S$. Kažemo da je x_0 nultočka funkcije f ako je $f(x_0) = 0$.*

Primjer 2.1.2. *Neka su a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Tada postoji funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ takva da je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ i f nema nultočku. Naime, možemo odabrati bilo koji $c \in \langle a, b\rangle$ te definirati funkciju $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ s*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq c \\ 1, & x < c \end{cases}$$

Teorem 2.1.3. *Neka su a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Tada f ima nultočku.*

Dokaz. Definirajmo

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}.$$

Očito je $a \in S$. Dakle, S je neprazan skup. Nadalje, očito je $S \subseteq [a, b]$ pa slijedi da je S odozgo omeđen skup. Stoga prema propoziciji 1.5.3 postoji $c \in \mathbf{R}$ takav da je c supremum skupa S. Imamo $a \leq c$ (jer je $a \in S$) i $c \leq b$ (jer je b gornja međa skupa S). Dakle, $a \leq c \leq b$ pa je $c \in [a, b]$. Iz propozicije 1.5.4 slijedi da postoji niz realnih brojeva (x_n) takav da je $x_n \in S$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $x_n \to c$. Slijedi da je $x_n \in [a, b]$ i $f(x_n) \leq 0$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Prema propoziciji 1.2.5 vrijedi $f(x_n) \to f(c)$. Iz leme 1.5.10 slijedi da je $f(c) \leq 0$. Iz ovoga sada zaključujemo da je $a \neq b$. Stoga je $c < b$. Neka je $x \in \langle c, b]$. Tvrdimo da je $f(x) > 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $f(x) \leq 0$ pa je $x \in S$, što povlači da je $x \leq c$ (jer je c supremum od S). Ovo je nemoguće jer je $x \in \langle c, b]$. Dakle, $f(x) > 0$ za svaki $x \in \langle c, b]$. Prema primjeru 1.5.9 c je infimum skupa $\langle c, b]$. Prema propoziciji 1.5.8

postoji niz realnih brojeva (z_n) takav da je $z_n \in \langle c, b]$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da $z_n \to c$. Prema propoziciji 1.2.5 vrijedi da $f(z_n) \to f(c)$. Iz $f(x) > 0$, za svaki $x \in \langle c, b]$, slijedi da je $f(z_n) \geq 0$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz leme 1.5.10 slijedi da je $f(c) \geq 0$. Ranije smo vidjeli da je $f(c) \leq 0$ pa zaključujemo da je $f(c) = 0$. □

Korolar 2.1.4. *Neka su a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $y_0 \in \mathbf{R}$ takav da je $f(a) < y_0 < f(b)$. Tada postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y_0$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ s $g(x) = f(x) - y_0$, za svaki $x \in [a, b]$. Definirajmo funkciju $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ s $h(x) = -y_0$. Prema primjeru 1.1.5 h je neprekidna funkcija. Vrijedi $g = f + h$ pa iz propozicije 1.3.22 slijedi da je g neprekidna funkcija. Imamo $g(a) = f(a) - y_0 < 0$ i $g(b) = f(b) - y_0 > 0$ pa iz prethodnog teorema zaključujemo da postoji $x \in [a, b]$ takav da je $g(x) = 0$. Dakle, $f(x) - y_0 = 0$ pa je $f(x) = y_0$. □

Korolar 2.1.5. *Neka su a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $y_0 \in \mathbf{R}$ takav da je $f(a) > y_0 > f(b)$. Tada postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y_0$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ s $g(x) = -(f(x) - y_0)$, za svaki $x \in [a, b]$. Definirajmo funkciju $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ s $h(x) = -y_0$. Tada je h neprekidna funkcija. Vrijedi da je $g = -(f + h)$ pa iz propozicije 1.3.22 slijedi da je g neprekidna. Imamo $g(c) = -(f(c) - y_0) < 0$ i $g(b) = -(f(b) - y_0) > 0$ pa iz teorema 2.1.3 zaključujemo da postoji $x \in [a, b]$ takav da je $g(x) = 0$. Dakle, $-(f(x) - y_0) = 0$, to jest $f(x) = y_0$. □

2.2 Gomilišta i skupilišta nizova

Definicija 2.2.1. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbf{R}$. Kažemo da je a gomilište niza (x_n) ako za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $n' \geq n$ takav da je $| x'_n - a |< \varepsilon$.*

Primjer 2.2.2. *Pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva te da je $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$. Tada je a gomilište niza (x_n). Naime, neka su $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbf{N}$. Želimo naći $n' \geq n$ takav da je $| x'_n - a |< \varepsilon$. Budući da $x_n \to a$ postoji $m_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $m \geq m_0$ vrijedi $| x_m - a |< \varepsilon$. Definirajmo $n' = \max\{m, n\}$. Očito je $n' \geq n$, a iz $n' \geq m$ slijedi $| x'_n - a |< \varepsilon$. Prema tome, a je gomilište niza (x_n).*

Primjer 2.2.3. *Definirajmo niz realnih brojeva (x_n) s*

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ paran} \\ -1, & n \text{ neparan} \end{cases}$$

Tvrdimo da je 1 gomilište niza (x_n). Neka su $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbf{N}$.

1^o n je paran.
Neka je $n' = n + 2$. Tada vrijedi da je $n' \geq n$ i $| x'_n - 1 |< \varepsilon$.
2^o n je neparan.
Neka je $n' = n + 1$. Tada vrijedi da je $n' \geq n$ i $| x'_n - 1 |< \varepsilon$.
Dokazali smo da je 1 gomilište niza (x_n). Dokaz da je -1 gomilište niza (x_n) provodi se analogno.
Niz nije konvergentan što smo vidjeli u primjeru 1.3.13.

Definicija 2.2.4. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za S kažemo da je skupilište niza (x_n) ako za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $n' \geq n$ takav da je $x'_n \in S$.*

Napomena 2.2.5. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te $a \in \mathbf{R}$. Tada je a gomilište niza (x_n) ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi da je $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$ skupilište niza (x_n).*

Primjer 2.2.6. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ takav da je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada je očito S skupilište niza (x_n).*

Propozicija 2.2.7. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka su S i T podskupovi od $\mathbf{R}$.*

1) *Pretpostavimo da je S skupilište niza (x_n) te da je $S \subseteq T$. Tada je i T skupilište niza (x_n).*

2) *Pretpostavimo da je S skupilište niza (x_n) te da T nije skupilište niza (x_n). Tada je $S \setminus T$ skupilište niza (x_n).*

Dokaz. Tvrdnja 1) slijedi direktno iz definicije skupilišta.
Iz činjenice da T nije skupilište niza (x_n) slijedi da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi da $x'_n \notin T$. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Budući da je S skupilište, postoji $n' \geq \max\{n, n_0\}$ takav da je $x'_n \in S$. Iz $n' \geq \max\{n, n_0\}$ slijedi da je $n' \geq n$ i $n' \geq n_0$, a to povlači da $x'_n \notin T$. Stoga je $x'_n \in S \setminus T$. Time smo dokazali da je $S \setminus T$ skupilište niza (x_n). □

Lema 2.2.8. *Neka je (x_n) omeđen niz realnih brojeva. Neka je*

$$\Omega = \{a \in \mathbf{R} \mid \langle a, +\infty\rangle \text{ skupilište niza } (x_n)\}.$$

Tada je Ω neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbf{R}$.

Dokaz. Budući da je (x_n) omeđen niz postoje m i $M \in \mathbf{R}$ takvi da je $m \leq x_n \leq M$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz ovoga je očito da je $x_n \in \langle m - 1, +\infty\rangle$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz ovoga i primjera 2.2.6 je jasno da je $\langle m - 1, +\infty\rangle$ skupilište niza (x_n). Stoga je $m - 1 \in \Omega$. Dakle, Ω je neprazan skup. Tvrdimo da je M gornja međa skupa Ω. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $a \in \Omega$ takav da je $M < a$. Budući da je $x_n \leq M < a$, vrijedi da je $x_n < a$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Stoga, $x_n \notin \langle a, +\infty\rangle$, za svaki $n \in \mathbf{N}$, što povlači da $\langle a, +\infty\rangle$ nije skupilište niza (x_n) (iz definicije je jasno da skupilište niza uvijek sadrži bar jedan član niza). No, ovo je nemoguće jer iz $a \in \Omega$ slijedi da je $\langle a, +\infty\rangle$ skupilište niza (x_n). Prema tome, M je gornja međa od Ω. Slijedi da je Ω omeđen skup. □

Teorem 2.2.9. *Neka je (x_n) omeđen niz realnih brojeva. Tada postoji $a \in \mathbf{R}$ takav da je a gomilište niza (x_n).*

Dokaz. Neka je $\Omega = \{b \in \mathbf{R} \mid \langle b, +\infty\rangle \text{ skupilište niza } (x_n)\}$. Prema prethodnoj lemi Ω je neprazan, odozgo omeđen skup. Prema propoziciji 1.5.3 postoji $a \in \mathbf{R}$ takav da je a supremum skupa Ω. Tvrdimo da je a gomilište niza (x_n). U tu svrhu će prema napomeni 2.2.5 biti dovoljno dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi da je $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ skupilište niza (x_n). Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 1.5.2 postoji $b \in \Omega$ takav da je $a - \varepsilon < b$. Odaberimo $r \in \mathbf{R}$ takav da je $a < r < a + \varepsilon$. Iz $a < r$ slijedi da $r \notin \Omega$ (jer je a supremum od Ω). Stoga, $\langle r, +\infty\rangle$ nije skupilište niza (x_n). Imamo $b \leq a$ (jer je $b \in \Omega$) pa je $b < r$. Budući da je $b \in \Omega$, vrijedi da je $\langle b, +\infty\rangle$ skupilište niza (x_n). Po propoziciji 2.2.7 je $\langle b, +\infty\rangle \setminus \langle r, +\infty\rangle$ skupilište niza (x_n). Očito je $\langle b, +\infty\rangle \setminus \langle r, +\infty\rangle = \langle b, r]$. Dakle, $\langle b, r]$ je skupilište niza (x_n). Iz $a - \varepsilon < b$ i $r < a + \varepsilon$ slijedi da je $\langle b, r] \subseteq \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ pa po propoziciji 2.2.7 slijedi da je $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ skupilište niza (x_n). Time smo dokazali tvrdnju teorema. □

Definicija 2.2.10. *Za funkciju $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ kažemo da je strogo rastuća ako je $p(n) < p(n+1)$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.*

Propozicija 2.2.11. *Neka je $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija.*

1) Ako su $n, m \in \mathbf{N}$ takvi da je $n < m$, onda je $p(n) < p(m)$.

2) Za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $n \leq p(n)$.

Dokaz. 1) Fiksirajmo $n \in \mathbf{N}$. Dokažimo indukcijom po $m > n$ da je $p(n) < p(m)$. Za $m = n+1$ tvrdnja vrijedi prema definiciji strogo rastuće funkcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m > n$. Tada je $p(n) < p(m)$ pa zbog $p(m) < p(m+1)$ imamo $p(n) < p(m+1)$. Time smo dokazali da je $p(n) < p(m)$, za svaki $m > n$. Dakle, 1) vrijedi.
Tvrdnju 2) dokazujemo indukcijom po $n \in \mathbf{N}$. Za $n = 1$ vrijedi $1 \leq p(1)$ jer je $p(1) \in \mathbf{N}$. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $n \leq p(n)$. Iz toga i $p(n) < p(n+1)$ slijedi $n < p(n+1)$. Budući da su n i $p(n+1)$ prirodni brojevi slijedi $n+1 \leq p(n+1)$. Time je tvrdnja 2) dokazana. □

Definicija 2.2.12. *Neka je S skup te neka su (x_n) i (y_n) nizovi u skupu S. Kažemo da je (y_n) podniz niza (x_n) ako postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $y_n = x_{p_n}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.*

Primjer 2.2.13. *Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ definiran s (x_n) s*

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ paran} \\ 3, & n \text{ neparan} \end{cases}$$

Neka je (y_n) niz u $\mathbf{R}$ definiran s $y_n = 0$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada je (y_n) podniz niza (x_n). Naime, za funkciju $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definiranu s $p(n) = 2n$ vrijedi da je strogo rastuća funkcija te da je $p(n)$ paran broj za svaki $n \in \mathbf{N}$ pa je jasno da je $y_n = x_{p(n)}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Uočimo sljedeće:
Ako je (x_n) niz u skupu S te $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija onda za niz $(x_{p(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ u S vrijedi da je podniz niza (x_n).

Propozicija 2.2.14. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je (y_n) podniz niza (x_n). Tada $y_n \to a$.*

Dokaz. Postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $y_n = x_{p_n}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $| x_n - a |< \varepsilon$. Neka je $n \geq n_0$. Iz propozicije [2.2.11 (2)] slijedi da je $p(n) \geq n$ pa je $p(n) \geq n_0$. Stoga je $| x_{p(n)} - a |< \varepsilon$. Dakle, zadnja nejednakost vrijedi za svaki $n \geq n_0$. Time smo dokazali da $x_{p(n)} \to a$, to jest $y_n \to a$. □

Propozicija 2.2.15. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je (y_n) podniz od (x_n). Pretpostavimo da je $a \in \mathbf{R}$ tako da $y_n \to a$. Tada je a gomilište niza (x_n).*

Dokaz. Neka je $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija takva da je $y_n = x_{p(n)}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Neka su $\varepsilon > 0$ i $n'' \in \mathbf{N}$. Budući da (y_n) teži u a postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $| x_{p(n)} - a |< \varepsilon$. Neka je $n = \max\{n'', n_0\}$. Tada je $n \geq n_0$ pa vrijedi $| x_{p(n)} - a |< \varepsilon$. Stavimo $n' = p(n)$. Dakle, $| x'_n - a |< \varepsilon$. Prema propoziciji [2.2.11 (2)] i definicije od n vrijedi $p(n) \geq n \geq n''$. To znači da je $n' \geq n''$. Zaključak: za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $n'' \in \mathbf{N}$ postoji $n' \geq n''$ takav da $| x'_n - a |< \varepsilon$. Stoga je a gomilište niza (x_n). □

Propozicija 2.2.16. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n). Tada postoji podniz od (x_n) koji teži prema a.*

Dokaz. Definiramo funkciju $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ induktivno na sljedeći način:
prema definiciji gomilišta jasno je da postoji $k \in \mathbf{N}$ takav da $| x_k - a |< 1$. Definirajmo $p(1) = k$. Dakle,

$$| x_{p(1)} - a |< 1. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da smo za neki $n \in \mathbf{N}$ definirali $p(n)$. Prema definiciji gomilišta postoji $n' \geq p(n) + 1$ takav da je $| x'_n - a |< \frac{1}{n+1}$. Definirajmo $p(n + 1) = n'$. Imamo

$$| x_{p(n+1)} - a |< \frac{1}{n + 1} \tag{2.2}$$

i

$$p(n+1) > p(n). \tag{2.3}$$

Na taj način smo konstruirali funkciju $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Iz (2.3) slijedi da je p strogo rastuća funkcija. Stoga je $(x_{p(n)})$ podniz niza (x_n). Iz (2.1) i (2.2) slijedi da je $| x_{p(n)} - a | < \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Po napomeni 1.2.7 slijedi da $x_{p(n)} \to a$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 2.2.17. *Svaki omeđen niz ima konvergentan podniz. Čak štoviše, ako je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ te ako su $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da je $a \leq x_n \leq b$, za svaki $n \in \mathbf{N}$, onda postoji podniz (y_n) od (x_n) i $c \in [a, b]$ takav da $y_n \to c$.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ te neka su $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da je $a \leq x_n \leq b$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada je (x_n) omeđen niz pa prema teoremu 2.2.9 postoji $c \in \mathbf{R}$ takav da je c gomilište niza (x_n). Prema propoziciji 2.2.16 postoji podniz (y_n) od (x_n) takav da $y_n \to c$. Iz definicije podniza je očito da je $a \leq y_n \leq b$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz leme 1.5.10 slijedi da je $a \leq c \leq b$. Time je tvrdnja dokazana. □

2.3 Omeđene funkcije

Definicija 2.3.1. *Neka je S skup te neka je $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija. Kažemo da je f omeđena funkcija ako je Imf omeđen skup, pri čemu je Imf slika funkcije f, to jest $Imf = \{f(x) \mid x \in S\}$.*

Napomena 2.3.2. *Neka je S skup te $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija. Tada je f omeđena funkcija ako i samo ako postoje m i $M \in \mathbf{R}$ takvi da je $m \leq f(x) \leq M$, za svaki $x \in S$.*

Primjer 2.3.3. *Neka je $f : \langle 0, 1] \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s $f(x) = \frac{1}{x}$, za svaki $x \in \langle 0, 1]$. Tvrdimo da je $Imf = [1, +\infty\rangle$. Neka je $x \in \langle 0, 1]$. d Dakle, $0 \leq x \leq 1$ pa je $1 \leq \frac{1}{x}$, to jest $1 \leq f(x)$. Time smo pokazali da je $Imf \subseteq [1, +\infty\rangle$. Neka je $y \in [1, +\infty\rangle$. Tada je $0 \leq \frac{1}{y} \leq 1$ pa ako definiramo $x = \frac{1}{y}$ imamo da je $x \in \langle 0, 1]$ te da je $f(x) = y$. Stoga je $y \in Imf$. Time smo dokazali da je $Imf = [1, +\infty\rangle$. Skup $[1, +\infty\rangle$ očito nije omeđen pa onda imamo da Imf nije omeđen skup. To znači da funkcija f nije omeđena.*

Primjer 2.3.4. *Neka je $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \langle 0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Koristeći prethodni primjer dobivamo da je slika od f:

$$Imf = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\} = \{f(x) \mid x \in \langle 0, 1]\} \cup \{f(0)\} = [1, +\infty\rangle \cup \{0\}.$$

Dakle, $Imf = \{0\} \cup [1, +\infty\rangle$ pa je jasno da f nije omeđena funkcija.

Propozicija 2.3.5. *Neka su $a,\ b \in \mathbf{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Tada je Imf odozgo omeđen skup.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi da n nije gornja međa od Imf pa postoji $y_n \in Imf$ takav da $n < y_n$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$, zbog $y_n \in Imf$, postoji $x_n \in [a,b]$ takav da je $y_n = f(x_n)$.
Na taj način smo dobili (x_n) u $\mathbf{R}$ takav da je $x_n \in [a,b]$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Prema korolaru 2.2.17 postoje $c \in [a,b]$ i podniz (z_n) niza (x_n) takvi da $z_n \to c$.
Budući da je (z_n) podniz niza (x_n) postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $z_n = x_{p(n)}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.
Znamo da je $n < f(x_n)$, za svaki $n \in \mathbf{N}$, pa je $p(n) < f(x_{p(n)})$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz propozicije 2.2.11 slijedi da je $n \leq p(n)$ pa je $n < f(x_{p(n)})$, to jest $n < f(z_n)$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.
S druge strane iz $z_n \to c$ i činjenice da je f neprekidna funkcija (pa posebno neprekidna i u točki c) slijedi da $f(z_n) \to f(c)$. Ovo znači da je niz $f(z_n)$ omeđen. Dakle, $\{f(z_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ je omeđen skup pa je posebno i odozgo omeđen što povlači da postoji $A \in \mathbf{R}$ takav da $f(z_n) \subseteq A$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz ovoga i zbog $n < f(z_n)$ slijedi da je $n < A$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. To je očito nemoguće. Slijedi da je Imf odozgo omeđen skup.

□

Teorem 2.3.6. *Neka su $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ te neka je $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f omeđena funkcija.*

Dokaz. Treba dokazati da je Imf omeđen skup. Da je Imf odozgo omeđen skup slijedi iz prethodne propozicije. Da je Imf odozdo omeđen skup dokazujemo na sljedeći način.
Iz propozicije 1.3.22 slijedi da je $-f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Prema prethodnoj propoziciji slijedi da je $Im(-f)$ odozgo omeđen skup, to jest postoji $A \in \mathbf{R}$ takav da je $y \leq A$, za svaki $y \in Im(-f)$.
Neka je $x \in [a,b]$ proizvoljan. Tada je $(-f)(x) \in Im(-f)$ pa slijedi da je $(-f)(x) \leq A$. Dakle, $-f(x) \leq A$, to jest $f(x) \geq -A$. Stoga je $f(x) \geq -A$ za svaki $x \in [a,b]$, što znači da je $-A$ donja međa od Imf. Prema tome, Imf je odozdo omeđen skup. Zaključujemo da je Imf omeđen skup pa je f omeđena funkcija. □

Definicija 2.3.7. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $M \in S$. Kažemo da je M maksimum skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq M$.*
Dakle, maksimum nekog skupa je gornja međa tog skupa koja je ujedno i element tog skupa.

Napomena 2.3.8. *Pretpostavimo da je M maksimum skupa S. Tada je M supremum skupa S. To slijedi iz definicije supremuma. Naime, očito je M gornja međa skupa S, a ako je M' neka gornja međa skupa S, onda je $M \leq M'$ jer je $M \in S$.*

Primjer 2.3.9. *Tvrdimo da je* 0 *supremum skupa* $\langle -\infty, 0\rangle$.
Jasno je da je 0 *gornja međa tog skupa. Neka je* $\varepsilon > 0$. *Tada je* $-\varepsilon < 0$ *pa možemo odabrati* $x \in \mathbf{R}$ *takav da je* $-\varepsilon < x < 0$. *Očito je* $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, *a iz* $-\varepsilon < x$ *slijedi* $0 < x + \varepsilon$. *Iz propozicije 1.5.2 slijedi da je* 0 *supremum skupa* $\langle -\infty, 0\rangle$. *Ovaj skup nema maksimum. Naime, kada bi* M *bio maksimum ovog skupa onda bi* M *bio i supremum tog skupa pa bismo zbog jedinstvenosti supremuma imali da je* $M = 0$, *što je nemoguće jer* $0 \notin \langle -\infty, 0\rangle$.

Definicija 2.3.10. *Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$ *te neka je* $m \in S$. *Kažemo da je* m *minimum skupa* S *ako za svaki* $x \in S$ *vrijedi* $x \geq m$. *Dakle, minimum nekog skupa je donja međa tog skupa koja je ujedno i element tog skupa.*

Napomena 2.3.11. *Analogno kao u slučaju maksimuma vidimo da minimum nekog skupa mora biti ujedno i infimum tog skupa.*

Definicija 2.3.12. *Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$ *te neka je* $f : S \to \mathbf{R}$ *funkcija. Neka je* $x_0 \in S$. *Kažemo da* f *poprima minimum u točki* x_0 *ako je* $f(x_0) \leq f(x)$, *za svaki* $x \in S$.
Uočimo da je ovo ekvivalentno tome da je $f(x_0)$ *minimum skupa* Imf.

Definicija 2.3.13. *Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$ *te neka je* $f : S \to \mathbf{R}$ *funkcija. Neka je* $x_0 \in S$. *Kažemo da* f *poprima maksimum u točki* x_0 *ako je* $f(x_0) \geq f(x)$, *za svaki* $x \in S$.
Uočimo da je ovo ekvivalentno tome da je $f(x_0)$ *maksimum skupa* Imf.

Primjer 2.3.14. *Skup* $\langle 0, 1\rangle$ *je očito omeđen. Tvrdimo da ovaj skup nema minimum. Kada bi postojao minimum* m *ovog skupa, onda bismo zbog* $m \in \langle 0, 1\rangle$ *imali* $0 < m < 1$ *pa bismo mogli odabrati* $x \in \mathbf{R}$ *takav da je* $0 < x < m$ *iz čega bi slijedilo da je* $x \in \langle 0, 1\rangle$ *i* $x < m$, *a to je u kontradikciji s definicijom minimuma.*
Analogno, vidimo da skup $\langle 0, 1\rangle$ *nema maksimuma. Neka je* $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = x$, *za svaki* $x \in \langle 0, 1\rangle$. *Tada je* $Imf = \langle 0, 1\rangle$ *pa vidimo da je* f *omeđena funkcija koja ne poprima ni minimum ni maksimum u niti jednoj točki. Uočimo da je prema primjeru 1.1.8 funkcija* f *neprekidna.*
Neka je $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana s*

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 1\rangle \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \ \ ili \ x = 1 \end{cases}$$

Tada je $Img = \langle 0, 1\rangle$ *pa zaključujemo da je* g *omeđena funkcija koja ne poprima ni minimum ni maksimum u niti jednoj točki.*

Lema 2.3.15. *Neka je* (z_n) *niz realnih brojeva definiran s* $z_n = 0$, *za svaki* $n \in \mathbf{N}$. *Pretpostavimo da je* $L \in \mathbf{R}$ *takav da* $z_n \to L$. *Tada je* $L = 0$.

Dokaz. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $|z_n - L| < \varepsilon$, to jest $|L| < \varepsilon$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $0 \leq |L| < \varepsilon$. Stoga je $|L| = 0$ pa je $L = 0$. □

Propozicija 2.3.16. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Iz propozicije 1.3.19 slijedi da $-x_n \to -b$, pa iz propozicije 1.2.8 slijedi da $x_n - x_n \to a - b$. Iz prethodne leme slijedi da je $a - b = 0$ pa je $a = b$. □

Teorem 2.3.17. *Neka su $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da f poprima maksimum u točki x_0.*

Dokaz. Prema teoremu 2.3.6 funkcija f je omeđena, što povlači da je Imf omeđen skup. Iz propozicije 1.5.3 slijedi da postoji $S \in \mathbf{R}$ takav da je S supremum skupa Imf.
Neka je $n \in \mathbf{N}$. Iz propozicije 1.5.2 slijedi da postoji $y_n \in Imf$ takav da je $y_n + \frac{1}{n} > S$. Dakle, $S - \frac{1}{n} < y_n$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ iz $y_n \in Imf$ slijedi da postoji $x_n \in [a, b]$ takav da je $y_n = f(x_n)$. Prema tome,

$$S - \frac{1}{n} < f(x_n), \tag{2.4}$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$. Prema korolaru 2.2.17 postoje podniz (z_n) niza (x_n) i $c \in [a, b]$ takav da $z_n \to c$. Kako je (z_n) podniz niza (x_n) postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $x_{p(n)} = z_n$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Dakle, $x_{p(n)} \to c$ pa iz propozicije 1.2.5 slijedi da

$$f(x_{p(n)}) \to f(c). \tag{2.5}$$

Iz (2.4) slijedi da je

$$S - \frac{1}{p(n)} < f(x_{p(n)}), \tag{2.6}$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$. Zbog $n \leq p(n)$ (propozicija 2.2.11) je $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{p(n)}$ pa slijedi $S - \frac{1}{n} \leq S - \frac{1}{p(n)}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Iz ovoga i (2.5) slijedi da je $S - \frac{1}{n} < f(x_{p(n)})$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ očito vrijedi $f(x_{p(n)}) \in Imf$ pa je $f(x_{p(n)}) \leq S$ jer je S supremum od Imf. Slijedi da je $f(x_{p(n)}) < S + \frac{1}{n}$ pa stoga za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$S - \frac{1}{n} < f(x_{p(n)}) < S + \frac{1}{n}.$$

Iz ovoga slijedi da je $|f(x_{p(n)}) - S| < \frac{1}{n}$. Iz napomene 1.2.7 slijedi da $f(x_{p(n)}) \to S$. Iz ovoga, (2.5) i propozicije 2.3.16 slijedi da je $f(c) = S$. Ovo znači da je $S \in Imf$. Dakle, S je maksimum skupa Imf, to jest $f(c)$ je maksimum skupa Imf. Prema tome, funkcija f poprima maksimum u točki c. □

Korolar 2.3.18. *Neka su $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da f poprima minimum u x_0.*

Dokaz. Iz propozicije 1.3.22 slijedi da je funkcija $-f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna. Iz prethodnog teorema slijedi da postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da $-f$ poprima maksimum u x_0, to jest $-f(x) \leq -f(x_0)$, za svaki $x \in [a, b]$. Iz toga slijedi da je $f(x_0) \leq f(x)$, za svaki $x \in [a, b]$ pa vrijedi da f poprima minimum u točki x_0. □

2.4 Uniformna neprekidnost

Definicija 2.4.1. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija. Kažemo da je f uniformno neprekidna ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi sljedeća implikacija:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Uočimo sljedeće: ako je $f : S \to \mathbf{R}$ uniformno neprekidna funkcija, onda je f neprekidna. Naime, neka su $x_0 \in S$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za sve $y \in S$ vrijedi (2.7). Iz toga slijedi da posebno za svaki $x \in S$ vrijedi implikacija

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0. Kako je x_0 bio proizvoljan zaključujemo da je f neprekidna.

Primjer 2.4.2. *Neka je $f : \langle 0, 1] \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s $f(x) = \frac{1}{x}$, za svaki $x \in \langle 0, 1]$. Tvrdimo da je f neprekidna funkcija koja nije uniformno neprekidna. Prema primjeru 1.1.8 funkcija $g : \langle 0, 1] \to \mathbf{R}$ definirana s $g(x) = x$, za svaki $x \in \langle 0, 1]$ je neprekidna. Iz propozicije 1.3.22 slijedi da je funkcija $\frac{1}{g}$ neprekidna. Očito je $f = \frac{1}{g}$. Dakle, f je neprekidna funkcija. Kažemo sad da f nije uniformno neprekidna. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in \langle 0, 1]$ vrijedi implikacija:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \varepsilon.$$

Posebno, za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in \langle 0, 1]$ vrijedi implikacija:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < 1. \tag{2.8}$$

Odaberimo $n \in \mathbf{N}$ takav da je $\frac{1}{2\delta} < n$ (to sigurno možemo). Slijedi da je $\frac{1}{2n} < \delta$. Definirajmo $x = \frac{1}{n}$ i $y = \frac{1}{2n}$. Tada imamo $x, y \in \langle 0, 1]$ te vrijedi

$$|x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \delta.$$

Dakle, $|x-y|<\delta$*. Iz* (2.8) *slijedi da je* $|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|<1$*. No, to je nemoguće jer prema definiciji od* x *i* y *imamo* $|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=n$*. Zaključak:* f *nije uniformno neprekidna.*

Primjer 2.4.3. *Neka je* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *funkcija definirana s* $f(x)=x$*, za svaki* $x\in\mathbf{R}$*. Neka je* $\varepsilon>0$*. Uzmimo* $\delta=\varepsilon$*. Tada za sve* $x,y\in\mathbf{R}$ *očito vrijedi implikacija:*

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |x-y|<\varepsilon.$$

To znači da je funkcija f *uniformno neprekidna. Stoga je* f *neprekidna pa je prema propoziciji 1.3.22 i funkcija* $g=f\cdot f$ *neprekidna.*
No, tvrdimo da g *nije uniformno neprekidna. Imamo* $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$*,* $g(x)=x^2$*, za svaki* $x\in\mathbf{R}$*.*
Pretpostavimo da je g *uniformno neprekidna. Tada postoji* $\delta>0$ *takav da za svaki* $x,y\in\mathbf{R}$ *vrijedi*

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<1.$$

Dakle, za sve $x,y\in\mathbf{R}$ *vrijedi*

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |x^2-y^2|<1. \tag{2.9}$$

Odaberimo $x\in\mathbf{R}$ *takav da* $x>\frac{1}{\delta}$*. Definirajmo* $y=x+\frac{\delta}{2}$*. Tada je* $|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$ *pa prema* (2.9) *vrijedi da je*

$$|x^2-y^2|<1. \tag{2.10}$$

Imamo:

$$|x^2-y^2|=|x-y|\cdot|x+y|=\frac{\delta}{2}\left(2x+\frac{\delta}{2}\right)=\delta x+\left(\frac{\delta}{2}\right)^2>\delta x>1.$$

Pri tome smo kod zadnje nejednakosti koristili da je $x>\frac{1}{\delta}$*.*
Dakle, $|x^2-y^2|>1$ *što je u kontradikciji s* (2.10) *. Zaključak:* g *nije uniformno neprekidna.*

Lema 2.4.4. *Neka su* $p,q:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ *strogo rastuće funkcije. Tada je* $p\circ g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ *strogo rastuća funkcija.*

Dokaz. Neka je $n\in\mathbf{N}$. Kako je q strogo rastuća funkcija imamo $q(n)<q(n+1)$. Po propoziciji 2.2.11 imamo $p(q(n))<p(q(n+1))$, to jest $(p\circ q)(n)<(p\circ q)(n+1)$ pa slijedi da je $p\circ q$ strogo rastuća funkcija. □

Lema 2.4.5. *Neka su* (x_n) *i* (y_n) *nizovi realnih brojeva takvi da je* $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$*, za svaki* $n\in\mathbf{N}$*. Pretpostavimo da je* $a\in\mathbf{R}$ *takav da* $x_n\to a$*. Tada* $y_n\to a$*.*

Dokaz. Za svaki $n\in\mathbf{N}$ vrijedi $|(y_n-x_n)-0|<\frac{1}{n}$ pa iz napomene 1.2.7 slijedi da $y_n-x_n\to 0$. Prema propoziciji 1.2.8 vrijedi $x_n+(y_n-x_n)\to a+0$, to jest $y_n\to a$. □

Teorem 2.4.6. *Neka su* $a,b\in\mathbf{R}$*,* $a<b$ *te neka je* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *neprekidna funkcija. Tada je* f *uniformno neprekidna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest f nije uniformno neprekidna. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoje $x, y \in [a, b]$ takvi da $|x - y| < \delta$ i $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Posebno za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoje x_n, $y_n \in [a, b]$ takvi da je $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Tako smo dobili nizove realnih brojeva (x_n) i (y_n) takve da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi x_n, $y_n \in [a, b]$,

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \tag{2.11}$$

i

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{2.12}$$

Prema korolaru 2.2.17 postoje strogo rastuća funkcija $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ i $c \in [a, b]$ takvi da

$$x_{p(n)} \to c. \tag{2.13}$$

Prema propoziciji 2.2.11 za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $n \leq p_n$, što povlači da je $\frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{n}$ pa iz (2.11) slijedi

$$|x_{p(n)} - y_{p(n)}| < \frac{1}{p(n)} < \frac{1}{n},$$

to jest

$$|x_{p(n)} - y_{p(n)}| < \frac{1}{n}.$$

Iz ovoga, (2.13) i leme 2.4.5 slijedi da $y_{p(n)} \to c$. Iz ovoga, (2.13) i propozicije 1.2.5 slijedi da $f(x_{p(n)}) \to f(c)$ i $f(y_{p(n)}) \to f(c)$.
Stoga $-f(y_{p(n)}) \to -f(c)$ pa $f(x_{p(n)}) - f(y_{p(n)}) \to 0$. Iz ovoga slijedi da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f(x_{p(n)}) - f(y_{p(n)}) - 0| < \varepsilon,$$

to jest

$$|f(x_{p(n)}) - f(y_{p(n)})| < \varepsilon.$$

Odaberimo bilo koji $n \geq n_0$. Imamo

$$|f(x_{p(n)}) - f(y_{p(n)})| < \varepsilon,$$

a kada u (2.12) umjesto n stavimo $p(n)$ dobivamo

$$|f(x_{p(n)}) - f(y_{p(n)})| \geq \varepsilon.$$

Kontradikcija. Slijedi da je f uniformno neprekidna. $\square$

Poglavlje 3

Metrički prostori

3.1 Definicija metrike i primjeri

Definicija 3.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbf{R}$ funkcija sa sljedećim svojstvima:*

1) $d(x, y) \geq 0$ *za svaki x, $y \in X$;*

2) *za sve x, $y \in X$ vrijedi $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;*

3) $d(x, y) = d(y, x)$*, za sve x, $y \in X$;*

4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *za sve x, y, $z \in X$ (nejednakost trokuta).*

Tada funkciju d nazivamo metrika na X. Uređeni par (X, d) nazivamo metrički prostor.

Primjer 3.1.2. *Neka je $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana s $d(x, y) = |x - y|$.*
Koristeći osnovna svojstva apsolutne vrijednosti vidimo da funkcija d zadovoljava prva tri svojstva iz definicije metrike. Dokažimo da d zadovoljava svojstvo 4) iz definicije metrike. Neka su x, y, $z \in \mathbf{R}$. Koristeći činjenicu da za sve a, b, $c \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

dobivamo da je

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Stoga vrijedi četvrto svojstvo pa je d metrika na $\mathbf{R}$.
Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbf{R}$.

Lema 3.1.3. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka su $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}$. Tada je*

$$\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + \cdots + (u_n + v_n)^2} \le \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} + \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}. \tag{3.1}$$

Dokaz. Kvadriranjem dobivamo da je nejednakost (3.1) ekvivalentna s

$$(u_1 + v_1)^2 + \cdots + (u_n + v_n)^2 \le u_1^2 + \cdots + u_n^2 + 2\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} + v_1^2 + \cdots + v_n^2.$$

Sređivanjem dobivamo da je prethodna nejednakost ekvivalentna nejednakosti:

$$u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \le \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}. \tag{3.2}$$

Dokažimo da vrijedi (3.2). Očito je da (3.2) vrijedi ako je $u_1 = \cdots = u_n = 0$.
Pretpostavimo da je bar jedan od brojeva $u_1, \dots, u_n$ različit od 0. Definirajmo funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s

$$f(x) = (u_1 x + v_1)^2 + \cdots + (u_n x + v_n)^2,$$

za svaki $x \in \mathbf{R}$.
Kvadriranjem zagrada u definiciji od f dobivamo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi:

$$f(x) = x^2(u_1^2 + \cdots + u_n^2) + 2x(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n) + v_1^2 + \cdots + v_n^2.$$

Iz ovoga vidimo da je f kvadratna funkcija pa budući da je $f(x) \ge 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$ imamo da je $D \le 0$, gdje je D diskriminanta ove funkcije. Vrijedi:

$$D = 4(u_1v_1+\cdots+u_nv_n)^2-4(u_1^2+\cdots+u_n^2)(v_1^2+\cdots+v_n^2) = 4((u_1v_1+\cdots+u_nv_n)^2-(u_1^2+\cdots+u_n^2)(v_1^2+\cdots+v_n^2))$$

pa iz $D \le 0$ slijedi

$$(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n)^2 - (u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2) \le 0$$

pa je

$$(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n)^2 \le (u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2).$$

Korjenovanjem dobivamo:

$$| u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n | \le \sqrt{(u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2)}.$$

□

Primjer 3.1.4. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ funkcija definirana s:*

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dokažimo da je d metrika na $\mathbf{R}^n$.
Lako se vidi da d zadovoljava svojstva (1)-(3) iz definicije metrike.
Neka su x, y, $z \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$.
Za $i \in \{1, \dots, n\}$ definirajmo:

$$u_i = x_i - z_i, v_i = z_i - y_i.$$

Prema lemi 3.1.3 vrijedi:

$$\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + \dots + (u_n + v_n)^2} \leq \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} + \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}. \tag{3.3}$$

Uočimo da je $u_i + v_i = x_i - y_i$, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Stoga, prema (3.3) *imamo:*

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2},$$

to jest

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Prema tome d je metrika na $\mathbf{R}^n$.
Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$.
Uočimo da se za $n = 1$ ova metrika podudara s metrikom iz primjera 3.1.2.

Primjer 3.1.5. *Neka je X neprazan skup. Definiramo $d : X \times X \to \mathbf{R}$ s:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x = y \\ 1, & \text{ako je } x \neq y. \end{cases}$$

Tvrdimo da je d metrika na X. Svojstva (1)-(3) iz definicije metrike su očito zadovoljena.
Neka su x, y, $z \in X$. Tvrdimo da je

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \tag{3.4}$$

Ako je $x \neq z$ ili $z \neq y$, onda je bar jedan od brojeva na desnoj strani od (3.4) *jednak* 1 *pa je očito da* (3.4) *vrijedi.*
Inače, imamo $x = y = z$ pa i u tom slučaju (3.4) *vrijedi.*
Dakle, d je metrika na X. Za d kažemo da je diskretna metrika na X.

3.2 Otvoreni skupovi

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za $x_0 \in X$ i $r > 0$ definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je otvorena kugla u (X, d) oko x_0 radijusa r.
Ako želimo istaknuti o kojoj se metrici radi, otvorenu kuglu oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d) označavamo s $K_d(x_0, r)$.

Primjer 3.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Neka su $x_0 \in \mathbf{R}$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$. Naime, neka je $x \in \mathbf{R}$. Vrijede sljedeće ekvivalencije:*

$$x \in K(x_0, r) \Leftrightarrow d(x, x_0) < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r \Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle .$$

Dakle, svaka otvorena kugla u $(\mathbf{R}, d)$ je otvoreni interval u $\mathbf{R}$.
Obratno, svaki otvoreni interval u $\mathbf{R}$ oblika $\langle a, b\rangle$, gdje su a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ je otvorena kugla u $(\mathbf{R}, d)$. Naime, koristeći dokazano dobivamo da je

$$\langle a, b\rangle = \left\langle \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \right\rangle = K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Definicija 3.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u (X, d) ako za svaki $x_0 \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$.*

Propozicija 3.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Svaka otvorena kugla u (X, d) je otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka su $x_0 \in X$, $r > 0$. Želimo dokazati da je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d). Neka je $x \in K(x_0, r)$. Slijedi da je $d(x, x_0) < r$. Odaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon < r - d(x, x_0)$. Tvrdimo da je

$$K(x, \varepsilon) \subseteq K(x_0, r). \tag{3.5}$$

Neka je $y \in K(x, \varepsilon)$. Tada je $d(y, x) < \varepsilon$.
Koristeći nejednakost trokuta dobivamo da je

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, y_0) < \varepsilon + d(x, x_0) < (r - d(x, x_0)) + d(x, x_0) = r.$$

Dakle, $d(y, x_0) < r$ pa je $y \in K(x_0, r)$. Time smo dokazali da vrijedi (3.5).
Prema tome, $K(x_0, r)$ je otvoren skup u (X, d). $\square$

Definicija 3.2.5. *Neka su A i X skupovi te neka je $U : A \to \mathcal{P}(X)$ funkcija, gdje je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X (to jest skup svih podskupova od X). Tada za U kažemo da je indeksirana familija podskupova od X. Za $\alpha \in A$ umjesto $U(\alpha)$ pišemo U_α. Indeksiranu familiju*

U označavamo i sa $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$. Ako je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija podskupova od X onda definiramo

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \{x \in X \mid \text{ postoji } \alpha \in A \text{ takav da je } x \in U_\alpha\}.$$

Propozicija 3.2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

1) Skupovi $\emptyset$ i X su otvoreni u (X, d).

2) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je U_α otvoren skup u (X, d) za svaki $\alpha \in A$. Tada je $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d).

3) Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d). Tada je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).

Dokaz.

1) Prazan skup je trivijalno otvoren u (X, d).
Za svaki $x_0 \in X$ je očito $K(x_0, r) \subseteq X$, za svaki $r > 0$. Prema tome, X je otvoren skup u (X, d).

2) Neka je $x \in \bigcup U_\alpha$. Stoga, postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$. Budući da je U_{α_0} otvoren skup u (X, d) postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Prema tome, $K(x, r) \subseteq \bigcup U_\alpha$. Stoga je $\bigcup U_\alpha$ otvoren skup.

3) Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Kako su U i V otvoreni skupovi postoje $r > 0$ i $s > 0$ takvi da je $K(x, r) \subseteq U$ i $K(x, s) \subseteq V$.
Definirajmo
$$m = \min\{r, s\}.$$
Vrijedi da je $m > 0$, $m \le r$ i $m \le s$.
Iz toga slijedi da je $K(x, m) \subseteq K(x, r)$ što povlači da je $K(x, m) \subseteq U$.
Isto tako, imamo $K(x, m) \subseteq K(x, s)$ pa je $K(x, m) \subseteq V$.
Zaključujemo da je $K(x, m) \subseteq U \cap V$. Prema tome, slijedi da je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d). □

Definicija 3.2.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te U otvoren skup u (X, d) takav da je $x_0 \in U$. Tada za U kažemo da je otvorena okolina od x_0 u (X, d).*

3.3 Neprekidne funkcije između metričkih prostora

Definicija 3.3.1. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori. Neka je $f : X \to Y$ funkcija te $x_0 \in X$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u x_0 (s obzirom na metrike d i d') ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi sljedeća implikacija:*

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Napomena 3.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je Y neprazan podskup od X. Očito je da je $d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbf{R}$ metrika na Y. Dakle, $(Y, d|_{Y\times Y})$ je metrički prostor. Za $(Y, d|_{Y\times Y})$ kažemo da je potprostor metričkog prostora (X, d).*

Definicija 3.3.3. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. Neka je X neprazan podskup od $\mathbf{R}^n$. Tada za $d|_{X\times X}$ kažemo da je euklidska metrika na X.*

Napomena 3.3.4. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, $S \neq \emptyset$ te neka je $f : S \to \mathbf{R}$. Neka je $x_0 \in S$. Neka je d euklidska metrika na S te neka je d' euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Tada je očito f neprekidna u x_0 (u smislu definicije 1.1.1) ako i samo ako je f neprekidna u x_0 s obzirom na metrike d i d'.*

Propozicija 3.3.5. *Neka su (X, d), (Y, d') metrički prostori. Neka je $f : X \to Y$ te $x_0 \in X$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) f je neprekidna u x_0 s obzirom na d i d';

(2) za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $f(K_d(x_0, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(x_0, \varepsilon))$;

(3) za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ u (Y, d') postoji otvorena okolina U od x_0 u (X, d) takva da je $f(U) \subseteq V$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (1).
Dokažimo (2). Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi:

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Iz ovoga zaključujemo za svaki $x \in K_d(x_0, \delta)$ vrijedi $f(x) \in K_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$. Ovo upravo znači da je

$$f(K_d(x_0, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(x_0, \varepsilon)).$$

Dakle, vrijedi (2).
Obratno, na isti način vidimo da (2) povlači (1).
Pretpostavimo sada da vrijedi (2) i pokažimo da vrijedi (3). Neka je V otvorena okolina od $f(x_0)$ u (Y, d'). Dakle, V je otvoren skup u (Y, d') takav da je $f(x_0) \in V$ pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$K_{d'}(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V. \tag{3.6}$$

Prema (2) postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K_d(x_0, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(x_0), \varepsilon).$$

Iz ovoga i (3.6) slijedi da je $f(K_d(x_0, \delta)) \subseteq V$. Očito je $K_d(x_0, \delta)$ otvorena okolina od x_0 u (X, d). Time smo pokazali da vrijedi (3).
Obratno, pretpostavimo da vrijedi (3). Dokažimo (2). Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je

$K_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$ otvorena okolina od $f(x_0)$ u (Y, d') prema (3) postoji U otvorena okolina od x_0 u (X, d) takva da je

$$f(U) \subseteq K_{d'}(f(x_0), \varepsilon). \tag{3.7}$$

Kako je U otvorena okolina od x_0 postoji $\delta > 0$ takva da je $K_d(x_0, \delta) \subseteq U$. Stoga je

$$f(K_d(x_0, \delta)) \subseteq f(U)$$

pa iz ovoga i (3.7) slijedi

$$f(K_d(x_0, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(x_0), \varepsilon).$$

Stoga vrijedi (2). Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 3.3.6. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je f neprekidna (s obzirom na d i d') ako je f neprekidna u x_0 s obzirom na d i d', za svaki $x_0 \in X$.*

Napomena 3.3.7. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$, $S \neq \emptyset$ te neka je $f : S \to \mathbf{R}$ funkcija. Neka je d euklidska metrika na S te neka je d' euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Očito je da je tada f neprekidna (u smislu definicije 1.1.4) ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na d i d'.*

Lema 3.3.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $W \subseteq X$. Pretpostavimo da za svaki $x \in W$ postoji otvorena okolina U od x u (X, d) takva da je $U \subseteq W$. Tada je W otvoren skup.*

Dokaz. Neka je $x \in W$. Tada postoji otvorena okolina U od x takva da je $U \subseteq W$. Nadalje, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$. Slijedi $K(x, r) \subseteq W$. Time smo dokazali da je W otvoren skup. □

Teorem 3.3.9. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na d i d' ako i samo ako za svaki otvoren skup V u (Y, d') vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na d i d'. Neka je V otvoren skup u (Y, d').
Želimo dokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d). Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$. Dakle, V je otvorena okolina od $f(x)$ u (Y, d') pa budući da je f neprekidna u x iz propozicije 3.3.5 slijedi da postoji otvorena okolina U od x u (X, d) takva da je $f(U) \subseteq V$. Tvrdimo da je $U \subseteq f^{-1}(V)$. Neka je $z \in U$. Tada je $f(z) \in f(U)$ pa je $f(z) \in V$ jer je $f(U) \subseteq V$. Stoga je $z \in f^{-1}(V)$. Prema tome, $U \subseteq f^{-1}(V)$. Iz leme 3.3.8 slijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d).
Obratno, pretpostavimo da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d) za svaki otvoren skup V u (Y, d'). Dokažimo da je f neprekidna. Neka je $x_0 \in X$. Pretpostavimo da je V otvorena okolina od

$f(x_0)$ u (Y, d'). Definirajmo $U = f^{-1}(V)$. Prema pretpostavci U je otvoren skup u (X, d). Iz $f(x_0) \in V$ slijedi da je $x_0 \in f^{-1}(V)$, to jest $x_0 \in U$. Prema tome, U je otvorena okolina od x_0 u (X, d). Tvrdimo da je $f(U) \subseteq V$. Neka je $z \in f(U)$. Tada je $z = f(x)$ za neki $x \in U$. Iz $x \in U$ i $U = f^{-1}(V)$ slijedi da je $f(x) \in V$, to jest $z \in V$. Time smo dokazali da je $f(U) \subseteq V$.
Dokazali smo sljedeće: Za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ u (Y, d') postoji otvorena okolina U od x_0 u (X, d) takva da $f(U) \subseteq V$. Iz propozicije 3.3.5 slijedi da je f neprekidna u x_0. Zaključak: f je neprekidna. □

Definicija 3.3.10. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $L \in X$. Kažemo da niz (x_n) teži prema L u (X, d) i pišemo $x_n \to L$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $d(x_n, L) < \varepsilon$.*

Napomena 3.3.11. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$, neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ te $x_0 \in \mathbf{R}$. Tada očito vrijedi sljedeće: $x_n \to x_0$ u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$ ako i samo ako $x_n \to x_0$ u smislu definicije 1.2.1.*

Napomena 3.3.12. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $L \in X$. Tada $x_n \to L$ u (X, d) ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $x_n \in K(L, \varepsilon)$.*

Propozicija 3.3.13. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $L \in X$. Tada $x_n \to L$ ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu U od L u (X, d) postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo $x_n \to L$. Neka je U otvorena okolina od L u (X, d). Kako je U otvoren skup postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(L, \varepsilon) \subseteq U$. Iz prethodne napomene slijedi da postoji $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $x_n \in K(L, \varepsilon)$. Iz ovoga je očito da je $x_n \in U$, za svaki $n \geq n_\varepsilon$.
Obratno, pretpostavimo da za svaku otvorenu okolinu U od L u (X, d) postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.
Dokažimo da $x_n \to L$. Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo

$$U = K(L, \varepsilon).$$

Tada je U otvorena okolina od L. Po pretpostavci postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in K(L, \varepsilon)$. Iz prethodne napomene slijedi da $x_n \to L$. □

Propozicija 3.3.14. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori. Neka je $f : X \to Y$ te $L \in X$. Pretpostavimo da je f neprekidna u točki L. Nadalje, pretpostavimo da je (x_n) niz u X takav da $x_n \to L$. Tada $f(x_n) \to f(L)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f neprekidna prema propoziciji 3.3.5 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(K_d(L, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(L), \varepsilon). \tag{3.8}$$

Kako $x_n \to L$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in K_d(L, \delta)$. Iz ovoga slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$f(x_n) \in f(K_d(L, \delta))$$

pa iz (3.8) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$f(x_n) \in K_{d'}(f(L), \varepsilon).$$

Stoga $f(x_n) \to f(L)$. □

Lema 3.3.15. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $L \in X$. Pretpostavimo da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $x_n \in K(L, \frac{1}{n})$. Tada $x_n \to L$.*

Dokaz. Uzmimo $\varepsilon > 0$ i odaberimo n_ε takav da je $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Uzmimo $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq n_\varepsilon$. Tada je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon}$. Prema pretpostavci leme imamo

$$d(x_n, L) < \frac{1}{n},$$

to jest

$$d(x_n, L) < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Stoga prema napomeni 3.3.12 $x_n \to L$. □

Teorem 3.3.16. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori. Neka je $f : X \to Y$ funkcija te neka je $L \in X$. Pretpostavimo da za svaki niz (x_n) u X takav da $x_n \to L$ vrijedi $f(x_n) \to f(L)$. Tada je f neprekidna u točki L.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in X$ takav da je $x \in K_d(L, \delta)$, ali $f(x) \notin K_{d'}(f(L), \varepsilon)$. Stoga za svaki $n \in \mathbf{N}$ (ako uzmemo $\delta = \frac{1}{n}$) postoji $x_n \in X$ takav da je $x_n \in K_d(L, \frac{1}{n})$, ali $f(x_n) \notin K_{d'}(f(L), \varepsilon)$. Na ovaj način smo definirali niz (x_n) u X takav da je $x_n \in K_d(L, \frac{1}{n})$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ te takav da

$$f(x_n) \notin K_{d'}(f(L), \varepsilon) \text{ za svaki } n \in \mathbf{N}. \tag{3.9}$$

Iz leme 3.3.15 slijedi da $x_n \to L$. Iz pretpostavke teorema slijedi da $f(x_n) \to f(L)$. Stoga, postoji $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $f(x_n) \in K_{d'}(f(L), \varepsilon)$ što je u kontradikciji s (3.9). Zaključak: funkcija f je neprekidna u L. □

Više o neprekidnim funkcija i metričkim prostorima može se naći u [1], [2] i [3].

Bibliografija

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska Knjiga, 1997.

[2] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska Knjiga, 1991.

[3] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, OxfordUniversity-Press, 1975.

Sažetak

Ovaj diplomski rad podijelili smo na tri veća poglavlja u kojima smo promatrali neke elementarne aspekte neprekidnosti.
U prvom poglavlju smo definirali neprekidne funkcije te proučavali nizove. Zatim smo promatrali omeđene podskupove od **R** te neka svojstva nizova, a uveli smo i pojam limesa funkcije te ispitivali njegovu vezu s neprekidnošću. Na kraju prvog poglavlja smo naveli aksiom potpunosti realnih brojeva.
U drugom poglavlju smo se bavili neprekidnim funkcijama na segmentu. Dokazali smo da neprekidna funkcija na segmentu poprima sve međuvrijednosti te uveli pojmove gomilišta i skupilišta niza. Također smo dokazali da svaki omeđen niz realnih brojeva ima konvergentan podniz i da je svaka neprekidna funkcija na segmentu omeđena.
U trećem poglavlju proučavali smo neprekidnost u kontekstu metričkih prostora. Na početku smo iskazali definiciju metričkog prostora i neke osnovne primjere, a zatim smo se bavili otvorenim skupovima u metričkom prostoru. Naposljetku smo proučavali neprekidne funkcije između metričkih prostora.

Summary

We divided this thesis into three larger chapters in which we observed some elementary aspects of continuity.

In the first chapter, we defined continuous functions and studied sequences. Then we considered bounded subsets of **R** and some properties of sequences, and we also introduced the notion of the limit of a function and examined its connection with continuity. At the end of the first chapter, we stated the axiom of completeness of real numbers.

In the second chapter we dealt with continuous functions on a segment. We proved that a continuous function on a segment takes on all intermediate values and introduced the notions of an accumulation point of a sequence. We also proved that every bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence and that every continuous function on a segment is bounded.

In the third chapter we studied continuity in the context of metric spaces. At the beginning, we stated the definition of the metric space and some basic examples, and then we dealt with open sets in the metric space. At the end, we observed continuous functions between metric spaces.

Životopis

Rođena sam 23. rujna 1996. godine u Dubrovniku gdje započinjem školovanje u Osnovnoj školi Marina Držića. Školovanje nastavljam u Gimnaziji Dubrovnik, a 2016. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija postajem prvostupnica edukacije matematike te iste godine obrazovanje nastavljam na diplomskom studiju Matematike, također nastavnički smjer, na Sveučilištu u Zagrebu.