Pellovi brojevi

Marić, Helena

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Helena Marić

Pellovi brojevi

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Ovaj rad posvećujem ocu Juri, majci Ivanki, bratu Stipi i baki Ivi. Zahvaljujem im se na neizmjernoj podršci koju su mi pružili tijekom mog studija. Posebno se zahvaljujem mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić na pomoći pri izradi ovog rada.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Sadržaj

Uvod

Engleski matematičar John Pell rođen je 1611. godine u Southwicku, a umro je 1685. godine u Londonu. Kao trinaestogodišnjak je upisao studij matematike na Cambridgeu na kojem je 1630. godine i magistrirao. Radio je kao sveučilišni profesor matematike u Londonu i Amsterdamu, a bavio se i znanstvenim radom koji uključuje algebru i teoriju brojeva. Neka od njegovih važnih djela su *Eliptica prognostica, Un idea of the mathematcis, A table of ten thounshand of square numbers.* Iako ih je švicarski matematičar Leonhard Euler pogrešno pripisao Johnu Pellu, Pellovi brojevi će u povijesti zauvijek nositi njegovo ime. Naime, Euler je u 18. stoljeću greškom proglasio Pella prvim matematičarem koji se bavio netrivijalnim rješenjima jednadžbi oblika $x^2 - dy^2 = \pm 1$, danas poznate pod nazivom Pellova jednadžba. Budući da nema dokaza kako je Pell doprinio rješavanju ovih jednadžbi, možemo tvrditi da je Euler pogriješio.

Cilj ovog diplomskog rada je opis i prikaz nekih osnovnih svojstava niza Pellovih brojeva (P_n) te pripadnih Pell–Lucasovih brojeva (Q_n). Kao i puno poznatiji niz Fibonaccijevih brojeva, niz Pellovih brojeva zadaje se rekurzijom drugog reda $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ uz početne uvjete $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, a niz Pell–Lucasovih brojeva zadovoljava istu rekurziju, $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$, ali druge početne uvjete $Q_1 = 1,\ Q_2 = 3$. Osnovna veza između ova dva niza dana je sljedećim relacijama:

$$Q_n = P_n + P_{n-1},\ 2P_n = Q_n + Q_{n-1}.$$

Postoje još brojni identiteti s Pellovim i Pell-Lucasovim brojevima. U radu su iskazani i dokazani samo neki od njih. Opisujemo i vezu s Pellovom, odnosno pelovskom jednadžbom za $d = 2$, $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Zaista, sva rješenja jednadžbe $x^2 - 2y^2 = -1$ u skupu prirodnih brojeva su (Q_{2n-1}, P_{2n-1}), $n \geq 1$, a sva rješenja jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$ dana su a (Q_{2n}, P_{2n}), $n \geq 1$. Uz to Pellovi brojevi mogu poslužiti kao dobra racionalna aproksimacija broja $\sqrt{2}$. Vrijedi

$$\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n + P_{n-1}}{P_n}.$$

Često korištena racionalna aproksimacija broja $\sqrt{2}$, $\dfrac{577}{408}$, zapravo je $\dfrac{Q_8}{P_8}$.

U radu se još bavimo s trokutastim shemama u kojima se pojavljuju Pellovi i Pell–Lucasovi brojevi. Nadalje ispitujemo međusobnu djeljivost Pellovih brojeva. Tako je $P_m \mid P_n$ ako i samo ako $m \mid n$. Nadalje, iz svojstva da je $\operatorname{nzd}(P_m, P_n) = 1$ ako i samo ako $\operatorname{nzd}(m, n) = 1$ dobivamo još jedan dokaz poznate tvrdnje o beskonačno mnogo prostih brojeva.

Pellovi brojevi mogu se dovesti u vezu s Pitagorinim trojkama i s još nekim poznatim brojevima, npr. figurativnim. Tako je u nizu Pellovih brojeva $P_1 = 1$ jedini trokutasti broj, a $P_1 = 1, P_3 = 5, P_4 = 12, P_6 = 70$ su jedini peterokutni brojevi.

1 Pellovi brojevi

Pellovi brojevi su nazvani po engleskom matematičaru Johnu Pellu (1611.-1685.), budući da imaju veze s Pellovom jednadžbom $x^2 - dy^2 = 1$, gdje je d prirodni broj koji nije potpuni kvadrat. Nadalje, pojavljuju se u racionalnoj aproksimaciji broja $\sqrt{2}$. Za početak ćemo ih definirati pomoću rekurzivne relacije drugog reda.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Definirajmo Pellove brojeve i navedimo karakterizaciju Pellovih brojeva.

Definicija 1.1. *Niz* ***Pellovih brojeva*** (P_n) *zadan je početnim uvjetima*

$$P_1 = 1,\ P_2 = 2$$

i rekurzivnom relacijom

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \tag{1}$$

za sve $n \geq 3$.

Ponekad se Pellov niz inicijalizira s $P_0 = 0$ i $P_1 = 1$. Nadalje, ovom nizu se često pridružuje niz zadan istom rekurzivnom formulom i drugim početnim uvjetima.

Definicija 1.2. *Niz* (Q_n) *zadan je početnim uvjetima*

$$Q_1 = 1,\ Q_2 = 3$$

i rekurzijom

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \tag{2}$$

za sve $n \geq 3$ *naziva se niz* ***Pell–Lucasovih brojeva****.*

Treba napomenuti da se u brojnim izvorima niz Pell–Lucasovih brojeva naziva niz $(2Q_n)$. Naime, Pellovi brojevi i Pell–Lucasovi brojevi su svojevrsni matematički „blizanci” – na isti način kao što su to Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi. Pell–Lucasov niz se također ponekad inicijalizira pomoću $Q_0 = 1$ i $Q_1 = 1$. Zanimljivo je da ni Pell ni Lucas nisu imali veze s s nizovima (P_n) i (Q_n).
Prvih nekoliko članova Pellovog niza su:

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860 \ldots$$

n	0	1	2	3	4	5	6
P_n	0	1	2	5	12	29	70
Q_n	1	1	3	7	17	41	99
$\frac{Q_n}{P_n}$	–	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{3}{2}=1.5$	$\frac{7}{5}=1.4$	$\frac{17}{12}\approx 1.4166$	$\frac{41}{29}\approx 1.4138$	$\frac{99}{70}\approx 1.414$

Tablica 1: Pellovi i Pell–Lucasovi brojevi te njihovi kvocijenti

Prvih nekoliko članova Pell–Lucasovog niza su:

$$1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601\ldots$$

Iz tablice 1.1 možemo uočiti sljedeće:

$1^2-2\cdot1^2=-1,\ 3^2-2\cdot2^2=1,\ 7^2-2\cdot5^2=-1,\ 17^2-2\cdot12^2=1,\ 41^2-2\cdot29^2=-1,\ldots.$

Općenito vrijedi da je

$$Q_n^2-2P_n^2=(-1)^n,$$

odnosno da je (Q_{2n},P_{2n}) rješenje Pellove jednadžbe $x^2-2y^2=1$, a (Q_{2n+1}, P_{2n+1}) pelovske jednadžbe $x^2-2y^2=-1$. O tome će biti riječi u jednom od sljedećih odjeljaka.

Nadalje, kvocijenti Pell–Lucasovih brojeva i Pellovih brojeva čine dobru racionalnu aproksimaciju broja $\sqrt{2}$ što se također može vidjeti u tablici 1.1, a i s time ćemo se baviti nešto kasnije.

Teorem 1.3. *Nizovi (P_n) i (Q_n) računaju se eksplicitno pomoću formula:*

$$P_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$

$$Q_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2},$$

za $n\geq 0$.

Dokaz. Oba niza, (P_n) i (Q_n), zadana su istom rekurzivnom relacijom kojoj je pridružena kvadratna jednadžba

$$x^2-2x-1=0,$$

čija su rješenja $\gamma=1+\sqrt{2}$, $\delta=1-\sqrt{2}$. Stoga je

$$P_n=A\gamma^n+B\delta^n,\ \ Q_n=C\gamma^n+D\delta^n,$$

pri čemu su A,B,C,D konstante koje odredimo iz početnih uvjeta $P_0=0$, $P_1=1$ i $Q_0=1$, $Q_1=1$ te dobijemo formule iz tvrdnje. □

Propozicija 1.4. *Neka je* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tada vrijedi sljedeća matrična formula:*

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Matričnu formulu ćemo dokazati pomoću principa matematičke indukcije.
Baza: Za $n = 1$ očito vrijedi

$$P^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Pretpostavka: Pretpostavimo da dana formula vrijedi za neki prirodan broj n.
Korak: Iz

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= P^n \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2P_{n+1} + P_n & P_{n+1} \\ 2P_n + P_{n-1} & P_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

zaključujemo da matrična formula vrijedi za $n + 1$, pa princip matematičke indukcije povlači da vrijedi i za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Propozicija 1.5. *Vrijede sljedeća svojstva:*

(a) Pellov broj s parnim indeksom P_{2n} *je paran, a s neparnim indeksom* P_{2n+1} *neparan.*

(b) Svaki Pell–Lucasov broj je neparan.

(c) Svaki Pell–Lucasov broj može završiti samo sa znamenkom iz skupa $\{1, 3, 7, 9\}$, *tj. s neparnom znamenkom različitom od* 5.

(d) P_n *i* Q_n *su relativno prosti brojevi.*

Dokaz. (a) $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ i

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \equiv P_{n-2} \pmod 2.$$

Stoga je

$$P_{2n} \equiv P_0 = 0 \pmod 2, \; P_{2n+1} \equiv P_1 = 1 \pmod 2.$$

(b) $Q_0 = 1$, $Q_1 = 1$ i

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \equiv Q_{n-2} \pmod{2}.$$

Stoga je

$$Q_{2n} \equiv Q_0 = 1 \pmod{2},\ Q_{2n+1} \equiv Q_1 = 1 \pmod{2}.$$

(c) Izračunajmo članove niza ($Q_n \mod 5$):

$$\underline{1,1},3,2,2,1,4,4,2,3,3,4,\underline{1,1},3,2,\ldots$$

Dakle, možemo primijetiti da je niz ($Q_n \mod 5$) periodičan s periodom duljine 12. Nadalje, očito je $Q_n \mod 5 \in \{1,2,3,4\}$, a budući da je Q_n neparan, slijedi da je $Q_n \mod 10 \in \{1,3,7,9\}$.

(d) Tvrdnja slijedi direktno iz identiteta $Q_n^2 - 2P_n^2 = (-1)^n$ (v. odjeljak 1.3).

□

1.2 Identiteti s Pellovim i Pell–Lucasovim brojevima

Rješenja jednadžbe $x^2 - 2x = 1$ označimo s

$$\gamma = 1 + \sqrt{2},\ \delta = 1 - \sqrt{2}.$$

Uz te oznake formule iz teorema 1.3 možemo zapisati kao

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta},\ Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}. \tag{3}$$

Prethodne relacije se ponekad nazivaju *Binetove formule* za nizove Pellovih i Pell-Lucasovih brojeva. Nadalje, lako se pokaže da vrijedi:

$$\gamma\delta = -1, \gamma = \frac{-1}{\delta}, \delta = \frac{-1}{\gamma},$$

što ćemo korisiti u dokazu sljedećeg teorema.

Teorem 1.6. *Za Pellove i Pell-Lucasove brojeve vrijede sljedeći identiteti:*

$$2Q_n = P_{n+1} + P_{n-1}, \tag{4}$$
$$Q_n = P_n + P_{n-1}, \tag{5}$$
$$2P_n = Q_n + Q_{n-1} \tag{6}$$
$$6P_n = P_{n+2} - P_{n-2}, \tag{7}$$
$$Q_{n-1} + Q_{n+1} = 4P_n, \tag{8}$$
$$\gamma^n = \gamma P_n + P_{n-1}, \tag{9}$$
$$P_{2n} = 2P_n Q_n, \tag{10}$$
$$Q_n^2 + 2P_n^2 = Q_{2n}, \tag{11}$$
$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1}, \tag{12}$$
$$P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1} P_n. \tag{13}$$

Dokaz. Identitet (4) pokazujemo pomoću Binetovih formula (3):

$$\begin{aligned} P_{n+1} + P_{n-1} &= \frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}}{\gamma - \delta} + \frac{\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}}{\gamma - \delta} = \frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1} + \gamma^n \left(\frac{1}{\gamma}\right) - \delta^n \left(\frac{1}{\delta}\right)}{\gamma - \delta} \\ &= \frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1} + \gamma^n(-\delta) - \delta^n(-\gamma)}{\gamma - \delta} = \frac{\gamma^n(\gamma - \delta) + \gamma^n(\gamma - \delta)}{\gamma - \delta} \\ &= \frac{(\gamma - \delta)(\gamma^n + \delta^n)}{\gamma - \delta} = \gamma^n + \delta^n = 2Q_n. \end{aligned}$$

Identiteti (5), (6) (7) i (8) se lako pokazuju pomoću prethodno dokazanog identiteta (4) i Binetovih formula (3).

Identitet (9) dokazujemo pomoću principa matematičke indukcije.
Baza: Za $n = 1$ je očito $\gamma = \gamma P_1 + P_0$ jer je $P_0 = 0$ i $P_1 = 1$.
Pretpostavka: Neka vrijedi identitet (9) za neki prirodan broj n.
Korak: Iz

$$\begin{aligned} \gamma^{n+1} &= \gamma\gamma^n \\ &= \gamma(\gamma P_n + P_{n-1}) \\ &= \gamma^2 P_n + \gamma P_{n-1} \\ &= (2\gamma + 1)P_n + \gamma P_{n-1} \\ &= \gamma(2P_n + P_{n-1}) + P_n \\ &= \gamma P_{n+1} + P_n \end{aligned}$$

zaključujemo da identitet (9) vrijedi za $n+1$, pa princip matematičke indukcije povlači da vrijedi i za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Identitet (10) slijedi iz

$$P_nQ_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta} \cdot \frac{\gamma^n + \delta^n}{2} = \frac{\gamma^{2n} - \delta^{2n}}{2(\gamma - \delta)} = \frac{1}{2}P_{2n}.$$

Identiteti (11) i (12) slijede direktno iz Binetovih formula.

Naposljetku, dokažimo identitet (13) koristeći matrični zapis. Iz činjenice $P^{m+n} = P^m P^n$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} P_{m+n+1} & P_{m+n} \\ P_{m+n} & P_{m+n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{m+1} & P_m \\ P_m & P_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & Pn-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{m+1}P_{n+1} + P_mP_n & P_{m+1}P_n + P_mP_{n-1} \\ P_mP_{n+1} + P_{m-1}P_n & P_mP_n + P_{m-1}P_{n-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Propozicija 1.7. *Neka je* $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Tada vrijedi sljedeća matrična formula*

$$Q^n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix}, & \text{ako je } n \text{ neparan broj,} \end{cases}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Matričnu formulu ćemo dokazati pomoću principa matematičke indukcije.

Baza: Za $n = 1$ imamo:

$$2^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q^1,$$

a za $n = 2$ dobivamo

$$2^{\frac{2}{2}} \begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kako je

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

slijedi da odgovarajuća jednakost za $n = 2$.

Pretpostavka: Pretpostavimo da zadana formula vrijedi za prirodan broj

$n \geq 2$.
Korak: Neka je $n+1$ neparan broj. Budući da je tada n paran vrijedi

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= Q^n \cdot Q \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 3P_{n+1} + P_n & P_{n+1} + P_n \\ 3P_n + P_{n-1} & P_n + P_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Koristeći identitete (1) i (4) dobivamo

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= 2^{\frac{n-2}{2}} \begin{pmatrix} P_{n+2} + P_{n+1} & P_{n+1} + P_n \\ P_{n+1} + P_n & P_n + P_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} Q_{n+2} & Q_{n+1} \\ Q_{n+1} & Q_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kako je za paran broj n vrijedi $\frac{n}{2} = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, slijedi da je

$$Q^{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} Q_{n+2} & Q_{n+1} \\ Q_{n+1} & Q_n \end{pmatrix}.$$

Ako je $n+1$ paran broj, odnosno n neparan, tada je

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} 3Q_{n+1} + Q_n & Q_{n+1} + Q_n \\ 3Q_n + Q_{n-1} & Q_n + Q_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zbog (2) je

$$Q^{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} Q_{n+2} + Q_{n+1} & Q_{n+1} + Q_n \\ Q_{n+1} + Q_n & Q_n + Q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Iz (6) imamo:

$$Q^{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} 2P_{n+2} & 2P_{n+1} \\ 2P_{n+1} & 2P_n \end{pmatrix} = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix}.$$

Odnosno

$$Q^{n+1} = 2^{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix}.$$

Zaključujemo da matrična formula vrijedi za $n+1$, pa princip matematičke indukcije povlači da vrijedi i za svaki $n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.3 Veza s Pellovom jednadžbom

Diofantska jednadžba

$$x^2 - dy^2 = 1$$

gdje je $d \in \mathbb{N}$ i d nije potpuni kvadrat, naziva se **Pellova jednadžba**. Njoj pridruženu jednadžbu

$$x^2 - dy^2 = -1$$

zvat ćemo **pelovskom jednadžbom** . Rješenja navedenih jednadžbi tražimo u skupu prirodnih brojeva. Očito je da Pellova jednadžba uvijek ima trivijalno rješenje $(1, 0)$, no pokazuje se da je rješiva i skupu prirodnih brojeva za svaki d (koji nije potpuni kvadrat). Za razliku od toga, pelovska jednadžba ne mora imati rješenje u skupu $\mathbb{N}$.

Već smo spomenuli da ova jednadžba nosi ime po engleskom matematičaru Johnu Pellu koji baš i nije doprinio njenom rješavanju. Naime, 1657. godine Fermat je izazvao matematičare Johna Wallisa i Williama V. Brounckera da riješe jednadžbu $x^2 - dy^2 = 1$. Iako je Brouncker prvi uspio riješiti navedenu jednadžbu, Euler je greškom tu zaslugu pripisao Pellu. Inače Pellovim jednadžbama bavili su se i indijski matematičari od 7. stoljeća nadalje (npr. Brahmagupta, Bhaskara), no i grčki matematičari čak 4 stoljeća pr. Kr. koji su upravo proučavali jednadžbe $x^2 - 2y^2 = \pm 1$.

Rješenja Pellove, odnosno pelovske jednadžbe (u, v) često zapisujemo i kao element kvadratnog polja $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$: $u + v\sqrt{d}$. Prednosti tog zapisa vide se u iskazu sljedećeg teorema.

Teorem 1.8. *Neka je d prirodni broj koji nije potpuni kvadrat. Sva rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ u skupu prirodnih brojeva su*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n, \; n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

pri čemu je (x_1, y_1) tzv. fundamentalno rješenje*, tj. najmanje rješenje u skupu prirodnih brojeva.*

Dokaz. Prvi korak u dokazu ove tvrdnje jest pokazati da uvijek postoji rješenje Pellove jednadžbe u skupu prirodnih brojeva. Taj dio ćemo preskočiti, a dokaz se može naći u [2] (Teorem 10.10). Stoga pretpostavimo da je (x_1, y_1) najmanje Pellove jednadžbe rješenje u skupu prirodnih brojeva.

Pokažimo da je (x_n, y_n) dano s (14) rješenje Pellove jednadžbe. Zaista, množenjem jednakosti (14) s jednakošću

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n$$

slijedi

$$(x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = (x_1^2 - dy_1^2)^n,$$

odnosno

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1.$$

Još preostaje pokazati da su formulom (14) dana sva rješenja Pellove jednadžbe. Pretpostavimo da postoji rješenje (a, b) koje nije oblika $(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}$. Budući da vrijedi $x_1 + y_1\sqrt{d} > 1$ i $a + b\sqrt{d} > 1$, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da:

$$(x_1 + y\sqrt{d})^m < a + b\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{m+1}. \tag{15}$$

Ako izraz (15) pomnožimo s $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-m} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^m$. dobijemo:

$$1 < (a + b\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^m < x_1 + y_1\sqrt{d}.$$

Definirajmo sada $s, t \in \mathbb{Z}$ kao $s + t\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^m$. Vrijedi:

$$s^2 - dt^2 = (a^2 - db^2)(x_1^2 - dy_1^2)^m = 1.$$

Slijedi $0 < s - t\sqrt{d} < 1$, te zaključujemo $s > 0$ i $t > 0$. Iz navedenog zaključujemo da je (s, t) rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ i $s + t\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ u prirodnim brojevima, a to je kontradikcija. □

Sljedeći teorem olašava računanje nizova (x_n) i (y_n) pomoću rekurzivnih formula.

Teorem 1.9. *Ako je (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ niz svih rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima dobiven pomoću* (14)*, onda vrijedi*

$$x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n, \tag{16}$$

$$y_{n+2} = 2x_1y_{n+1} - y_n, \tag{17}$$

za sve $n \geq 0$, pri čemu je $(x_0, y_0) = (1, 0)$ (tzv. trivijalno rješenje), a (x_1, y_1) fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe.

Dokaz. Iz teorema 1.8 zaključujemo da vrijedi $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$. Iz navedenog slijedi:

$$(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}) = x_{n+2} + y_{n+2}\sqrt{d}$$
$$(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = x_n + y_n\sqrt{d}.$$

Imamo:

$$x_{n+2} = x_1x_{n+1} + dy_1y_{n+1} \tag{18}$$

$$x_n = x_1x_{n+1} - dy_1y_{n+1}. \tag{19}$$

Zbrajanjem (18) i (19) dobivamo $x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n$. Analognim postupkom dobivamo $y_{n+2} = 2x_1y_{n+1} - y_n$. □

Lako se može vidjeti da je $(x_1, y_1) = (3, 2)$ fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$. Stoga su prema teoremu 1.9 sva rješenja (x_n, y_n) u skupu prirodnih brojeva dana s

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \tag{20}$$
$$y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n, \tag{21}$$

uz početne uvjete $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $(x_1, y_1) = (3, 2)$.

Propozicija 1.10. *Nizovi Pellovih i Pell–Lucasovih brojeva s parnim, odnosno neparnim indeksima zadovoljavaju rekurziju*

$$z_{n+2} = 6z_{n+1} - z_n,$$

za sve $n \geq 0$.

Dokaz. Iz rekurzije (1) koja definira Pellove brojeve imamo

$$\begin{aligned} P_{2n} &= 2P_{2n-1} + P_{2n-2}, \\ P_{2n+2} &= 2P_{2n+1} + P_{2n}. \end{aligned}$$

Oduzimanjem prethodnih relacijama dobivamo

$$P_{2n+2} - P_{2n} = 2(\underbrace{P_{2n+1} - P_{2n-1}}_{=P_{2n}}) + P_{2n} - P_{2n-2},$$

a odatle je

$$P_{2n+2} = 6P_{2n} - P_{2n-2}.$$

Analogno vrijedi i za sve ostale slučajeve. □

Uočimo da je i jednadžba $x^2 - 2y^2 = -1$ rješiva u skupu prirodnih brojeva. Očito je $(1, 1)$ njeno najmanje rješenje u prirodnim brojevima. Općenito, jednadžba $x^2 - dy^2 = -1$ ne mora biti rješiva u skupu prirodnih brojeva, no ako jest rješiva postoji veza između rješenja jednadžbi $x^2 - dy^2 = 1$ i $x^2 - dy^2 = -1$. Naime, ako je (a, b) rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = -1$, onda je

$$(a + b\sqrt{d})^2 = a^2 + db^2 + 2ab\sqrt{d}$$

rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$. Zaista,

$$\begin{aligned} (a^2 + db^2)^2 - d(2ab)^2 &= (a^2 + db^2 - 2ab\sqrt{d})(a^2 + db^2 + 2ab\sqrt{d}) \\ &= (a - b\sqrt{d})^2(a + b\sqrt{d})^2 \\ &= (a^2 - db^2)^2 = (-1)^2 = 1. \end{aligned}$$

Općenito može se dokazati sljedeća tvrdnja (v. teorem 10.14 iz [2]).

Teorem 1.11. *Ako je jednadžba $x^2 - 2y^2 = -1$ rješiva i (x_1, y_1) njeno fundamentalno rješenje, onda su (x_{2n+1}, y_{2n+1}), $n \geq 0$ sva rješenja te jednadžbe, a (x_{2n}, y_{2n}), $n \geq 1$ su sva rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima, pri čemu su (x_{2n}, y_{2n}) dani s (14).*

Korolar 1.12. *Sva rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$ u skupu prirodnih brojeva dana su s*

$$(Q_{2n}, P_{2n}), n \geq 1,$$

a sva rješenja pelovske jednadžbe $x^2 - 2y^2 = -1$ s

$$(Q_{2n+1}, P_{2n+1}),\ n \geq 0.$$

Posebno vrijedi

$$Q_n^2 - dP_n^2 = (-1)^n,$$

za sve $n \geq 0$.

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji 1.10 i relacijama (20), (21) te zbog odgovarajućih početnih uvjeta slijedi tvrdnja za rješenja Pellove jednadžbe. Teoremi 1.9 i 1.11 te propozicija 1.10 povlače analognu tvrdnju za rješenja pelovske jednadžbe. □

1.4 Aproksimacija broja $\sqrt{2}$

Matematičari su već u 5. stoljeću prije Krista uspjeli aproksimirati $\sqrt{2}$ kao

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}.$$

Danas znamo da se iza te aproksimacije krije pojam razvoja u *jednostavni verižnog razlomka.* Budući da je jednostavni verižni razlomak broja $\sqrt{d}$ u vezi s jednadžbama $x^2 - dy^2 = \pm 1$, aproksimacija broja $\sqrt{2}$ imat će veze i s Pellovim brojevima.

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiramo broj $a_0 \in \mathbb{Z}$, te niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ na sljedeći način:

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor,$$

ako je $\alpha - a_0 > 0$, onda postoji $\alpha_1 \in \langle 0, 1 \rangle$ za koji je

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1},$$

pa definiramo

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor.$$

Ako je $a_1 = \alpha_1$, dobili smo

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

i postupak staje, no ako je $\alpha_1 - a_1 > 0$, postupak se nastavlja. Općenito, sve dok je $\alpha_i - a_i > 0$, možemo definirati

$$a_{i+1} = \lfloor \alpha_{i+1} \rfloor,$$

gdje je

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i} \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ako je $a_n = \alpha_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

i kažemo da smo broj α razvili u *jednostavan konačan verižni razlomak*. Kraće pišemo

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Uočimo da je u uvom slučaju $\alpha \in \mathbb{Q}$. No vrijedi i obratno. Ako je α racionalan broj, može ga se prikazati pomoću *konačnog* verižnog razlomka, odnosno opisani postupak će stati nakon konačno mnogo koraka. Brojevi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nazivaju se *parcijalni kvocijenti* verižnog razlomka. U uvom slučaju, dakle kada je $\alpha = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, parcijalni kvocijenti su upravo kovocijenti kojii se dobiju promjenom Euklidovog algoritma na brojeve m i n.

S druge strane, ako je α iracionalan broj, postupak se nastavlja u nedogled i tada kažemo da smo broj α razvili u *jednostavan beskonačni verižni razlomak* i pišemo

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [a_0, a_1, a_2, \ldots]. \tag{22}$$

Izraz na desnoj strani prethodnog izraza je zapravo limes niza racionalnih brojeva oblika

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}} = [a_0, a_1, \ldots, a_k], \; k \geq 0$$

koji se nazivaju *konvergente* verižnog razlomka broja α. Jednakost u izrazu (22) zapravo shvaćamo kao

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k}.$$

Prethodno tvrdnju nije sasvim jednostavno pokazati. Navodimo neka osnovna svojstva konvergenti iz kojih ona proizlazi.

Teorem 1.13. *Neka je* $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ *niz konvergenti jednostavnog verižnog razlomka broja* α. *Vrijedi:*

1. $$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_{-2} = 0, \; p_{-1} = 1, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_{-2} = 1, \; q_{-1} = 0, \; n \geq 0; \end{aligned}$$
2. $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ *za* $n \geq -1$;
3. $\operatorname{nzd}(p_n, q_n) = 1$ *za* $n \geq -2$;
4. $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$ *je rastući niz, a* $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ *padajući;*
5. $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}$ *za sve* $m, n \in \mathbb{N}_0$;
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$;
7. $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$.

Teorem 1.14 (Legendre)**.** *Neka su* p *i* q *cijeli brojevi takvi da je*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Tada je $\frac{p}{q}$ *neka konvergenta od* α.

Iz prethodna dva teorema zaključuje se da su konvergente verižnog razlomka jako dobre aproksimacije nekog realnog (iracionalnog) broja. Štoviše, ako je racionalan broj *dobro* aproksimira neki realan broj α, onda on mora biti konvergenta od α (teorem 1.14). Budući da za rješenje (x, y) Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ vrijedi

$$\left|\sqrt{d} - \frac{x}{y}\right| = \frac{1}{y|x + y\sqrt{d}|} < \frac{1}{2\sqrt{d}y^2}.$$

Legendreov teorem 1.14 povlači da je $\dfrac{x}{y}$ neka konvergenta u razvoju broja $\sqrt{d}$.

Broj $\sqrt{d}$ spada u skupinu brojeva koje nazivamo *kvadratne iracionalnosti*, odnosno u skupinu iracionalnih rješenja kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima. Verižni razlomci kvadratnih iracionalnosti su periodski. No vrijedi i obrat. Ako je razvoj u verižni razlomak nekog broja periodski, on je kvadratna iracionalnost. Razvoj u verižni razlomak broja $\sqrt{d}$ je vrlo specifičan i ima sljedeći oblik

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, 2a_0}],$$

pri čemu se kvocijenti $a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell = 2a_0$ ponavljaju u nedogled. Nadalje, $a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1}$ je palindrom što znači da je $a_1 = a_{\ell-1}$, $a_2 = a_{\ell-2}$, itd. Broj ℓ je tzv. duljina perioda. Parcijalni kvocijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ mogu se odrediti pomoću sljedećeg algoritma:

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \alpha_i = \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i}, s_{i+1} = a_i t_i - s_i, t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}$$

gdje su $s_0 = 0, t_0 = 1, d, s_i, t_i \in \mathbb{Z}, t_0 \neq 0$ i $t_0 \mid (d - s_0^2)$. Algoritam staje kada se s_i i t_i prvi put ponove.

Primjenom danog algoritma dobivamo da je

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1, \overline{2}].$$

Prema tome rekurzija za konvergente (teorem 1.13, 1.) broja $\sqrt{2}$ glasi

$$p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 1,$$
$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 1,$$

uz početne uvjete

$$p_0 = 1, p_1 = 3, q_0 = 1, q_1 = 2.$$

Očito je su nizovi (p_n) i (q_n) upravo Pell–Lucasov niz i Pellov niz (v. definicije 1.1 i 1.2). Dakle,

$$p_n = Q_{n+1},\ \ q_n = P_{n+1},\ \ n \geq 0$$

pa je stoga

$$\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n}.$$

Zbog identiteta (4) često se piše

$$\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n + P_{n-1}}{P_n}.$$

Racionalna aproksimacija broja $\sqrt{2}$ koju smo spomenuli na početku – $\frac{577}{408}$ jednaka je sedmoj konvergenti, tj.

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408} = \frac{p_7}{q_7} = \frac{Q_8}{P_8}.$$

Sljedeći teorem samo potvrđuje ono što smo već ustanovili u prethodnom odjeljku (korolar 1.12).

Teorem 1.15. *Neka su $\frac{p_n}{q_n}$ konvergente i ℓ duljina perioda u razvoju u verižni razlomak od $\sqrt{d}$. Tada vrijedi:*

1. *Za ℓ paran broj, jednadžba $x^2 - dy^2 = -1$ nema rješenje. Rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ su oblika $(x, y) = (p_{n\ell-1}, q_{n\ell-1}), n \in \mathbb{N}$. Fundamentalno rješenje je $(p_{\ell-1}, q_{\ell-1})$.*

2. *Za l neparan broj, rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = -1$ dana su s $(x, y) = (p_{(2n-1)\ell-1}, q_{(2n-1)\ell-1})$. Sva rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ dana su s $(x, y) = (p_{2n\ell-1}, q_{2n\ell-1}), n \in \mathbb{N}$. Fundamentalno rješenje od $x^2 - dy^2 = 1$ je $(p_{2\ell-1}, q_{2\ell-1})$.*

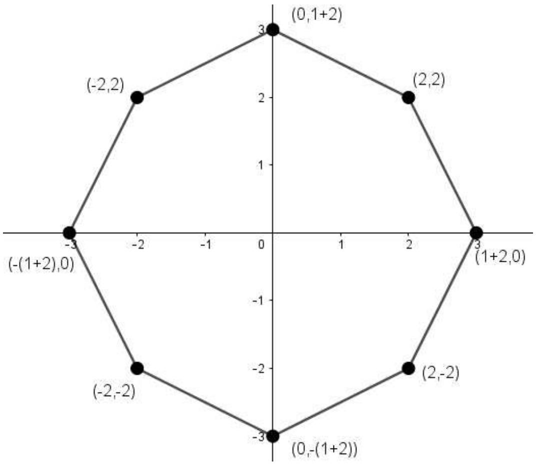
Zaista, za $d = 2$ je $\ell = 1$ i sva rješenja jednadžbe $x^2 - 2y^2 = -1$ su

$$(p_{(2n-1)-1}, q_{(2n-1)-1}) = (p_{2n-2}, q_{2n-2}) = (Q_{2n-1}, P_{2n-1}),\ \ n \geq 1,$$

a sva rješenja jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$ su

$$(p_{2n-1}, q_{2n-1}) = (Q_{2n}, P_{2n}),\ \ n \geq 1.$$

Budući da Pellovi brojevi aproksimiraju $\sqrt{2}$, mogu se upotrijebiti za racionalne aproksimacije pravilnih osmerokuta. Točke s cjelobrojnim koordinatama $(\pm(P_i + P_{i+1}), 0), (0, \pm(P_i + P_{i+1}))$ i $(\pm P_i, \pm P_i)$ predstavljaju vrhove osmerokuta koji nalikuje pravilnom osmerokut. Naime, vrhovi tog osmerokuta nisu jednako udaljeni od ishodišta koordinatnog sustava, a i unutarnji kutovi nisu svi jednaki. Veličina unutarnjeg kuta u pravilnom osmerokutu jednaka 135°, dok se u Pellovom osmerokutu prikazanom na slici 1 pojavljuju kutovi od 143.13° i 126.87°.



Slika 1: Osmerokut s koordinatama $(\pm(P_1 + P_2), 0), (0, \pm(P_1 + P_2))$ i $(\pm P_1, \pm P_1)$

2 Pellovi brojevi u trokutastim shemama

U ovom poglavlju pokazujemo da se Pellovi brojevi pojavljuju u trokutastim shemama sličnim Pascalovu trokutu.

2.1 Modificirani Pascalov trokut

Pellove brojeve možemo povezati s trokutom koji nalikuje Pascalovu trokutu. Generiramo trokutastu shemu na način da započinjemo s brojem 1 te svaki redak započinjemo i završavamo s 1, a svaki član retka (počevši od trećeg retka nadalje) između jedinica na krajevima jednak je zbroju tri broja iznad njega. Taj trokut nazivamo *modificirani Pascalov trokut* (slika 2).

						1						
					1		1					
				1		3		1				
			1		5		5		1			
		1		7		13		7		1		
	1		9		25		25		9		1	
1		11		41		63		41		11		1

Slika 2: Modificirani Pascalov trokut

Elemente n-tog retka modificiranog Pascalova trokuta označit ćemo s

$$A(n,0), A(n,1), \ldots, A(n,n),$$

pri čemu je vrh trokuta shvaćen kao nulti redak ($n = 0$). Neka je a_n, $n \geq 0$, zbroj svih članova n - tog retka modificiranog Pascalova trokuta, tj.

$$a_n = A(n,0) + A(n,1) + \cdots + A(n,n).$$

Promatrajući sliku 2 opažamo da je

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 12, a_4 = 29, \ldots,$$

što je prvih nekoliko Pellovih brojeva. To vrijedi i općenito.

Teorem 2.1. *Za svaki $n \geq 0$ vrijedi $a_n = P_{n+1}$.*

Dokaz. Promotrimo li n-ti redak modificiranog Pascalova trokuta možemo primijetiti da je svaki član $(n-1)$-og retka iskorišten dva puta pri izračunu članova n-tog reda (za članove lijevo i desno ispod sebe). Također, treba primijetiti da su članovi $(n-2)$-og reda korišteni samo jednom za generiranje članova n-tog retka. To znači da se elementi niza (a_n) generiraju pomoću iste rekurzije kao i Pellovi brojevi. Ustanovimo to i formalno. Za $n \geq 2$ vrijedi

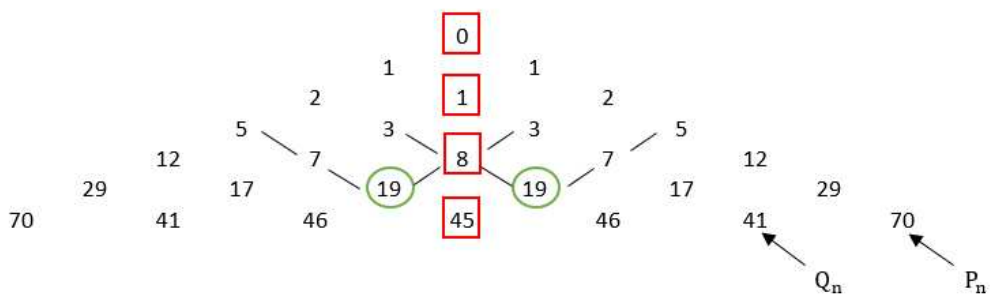
$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} A(n,k) = A(n,0) + A(n,1) + \cdots + A(n,k) + \cdots + A(n,n) \\
&= A(n-1,0) + \big(A(n-1,0) + A(n-1,1) + A(n-2,0)\big) \\
&\quad + \big(A(n-1,1) + A(n-1,2) + A(n-2,1)\big) + \cdots + \\
&\quad + \big(A(n-1,k-1) + A(n-1,k) + A(n-2,k-1)\big) + \cdots + \\
&\quad + \big(A(n-1,n-2) + A(n-1,n-1) + A(n-2,n-2)\big) + A(n-1,n-1) \\
&= 2\big(A(n-1,0) + 2A(n-1,1) + A(n-1,2) + \cdots + A(n-1,n-1)\big) \\
&\quad + A(n-2,0) + A(n-2,1) + \cdots + A(n-2,n-2) \\
&= 2a_{n-1} + a_{n-2}.
\end{aligned}$$

Dakle, niz (a_n) zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz Pellovih brojeva. Kako je $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, vrijedi $a_n = P_{n+1}$, za sve $n \geq 0$. $\square$

2.2 Pellov trokut

Konsturirajmo trokutastu shemu prikazanu na slici 3 na način da u vrh stavimo broj 0, u prvi redak brojeve 1,1 te u sredinu drugog retka također broj 1. Ostale elemente dobivamo kao linearnu kombinaciju, s koeficijentima 2 i 1, elementa iz prethodna dva retka, a novodobiveni element i dva elementa koja ga generiraju paralelni su stranicama trokuta. Možemo opaziti da se neki elementi mogu generirati na dva načina, na primjer

$$19 = 2 \cdot 8 + 3 = 2 \cdot 7 + 5.$$



Slika 3: Pellov trokut

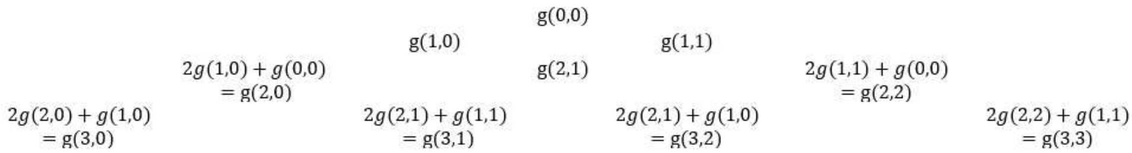
Nadalje, na slici 3 primjećujemo da se u ovako konstruiranom trokutu pojavljuju Pellovi i Pell–Lucasovi brojevi. Zato se navedeni trokut naziva *Pellov trokut*.

Sada ćemo preciznije opisati generiranje elemenata Pellova trokuta. Označimo s $g(i,j)$ j-ti po redu element slijeva i-tog retka Pellovog trokuta, $i,j \in \{0,1,2,\dots\}$. Početni uvjeti su

$$g(0,0) = 0, g(1,0) = g(1,1) = g(2,1) = 1,$$

a ostale elemente Pellovog trokuta dobivamo koristeći sljedeće rekurzije:

$$\begin{aligned} g(n,0) &= 2g(n-1,0) + g(n-2,0), && (23)\\ g(n,j) &= 2g(n-1,j) + g(n-2,j), 1 \leq j \leq n-2 && (24)\\ g(n,n-1) &= 2g(n-1,n-2) + g(n-2,n-3), && (25)\\ g(n,n) &= 2g(n-1,n-1) + g(n-2,n-2), && (26)\end{aligned}$$



Slika 4: Konstrukciju Pellovog trokuta

Određivanje prvih nekoliko elemenata Pellovog trokuta prikazano je na slici 4. Nadalje, iz same konstrukcije može se vidjeti da je Pellov trokut zrcalno simetričan s obzirom na glavnu os simetrije, odnosno

$$g(n,j) = g(n,n-j).$$

Zbog simetrije i rekurzije (25) vrijedi

$$g(n,j) = 2g(n-1,j-1) + g(n-2,j-2), 2 \leq j \leq n-1.$$

Uspoređujući prethodnu relaciju i (24) zaključujemo da se elementi $g(n,j)$ za $j \in \{2,\dots,n-2\}$ mogu prikazati na dva načina:

$$g(n,j) = 2g(n-1,j) + g(n-2,j) = 2g(n-1,j-1) + g(n-2,j-2).$$

Za odgovarajuće j, uzastopnom primjenom relacije (24) imamo:

$$\begin{aligned} g(n,j) &= 2g(n-1,j) + g(n-2,j)\\ &= 5g(n-2,j) + 2g(n-3,j)\\ &= 12g(n-3,j) + 5g(n-4,j)\\ &= 29g(n-4,j) + 12g(n-5,j)\end{aligned}$$

Koristeći princip matematičke indukcije može se pokazati da vrijedi

$$g(n,j) = P_{k+1} \cdot g(n-k,j) + P_k \cdot g(n-k-1,j), \tag{27}$$

za $1 \leq j \leq n-k-1$.

Propozicija 2.2. *Vrijedi*

$$g(n,0) = g(n,n) = P_n, \tag{28}$$

$$g(n,1) = g(n,n-1) = Q_{n-1}, \tag{29}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Jednakost (28) slijedi direktno iz rekurzije (23) i odgovarajućih početnih uvjeta.

Prema (27) za $j = 1$ i $k = n-2$ dobivamo (29),

$$g(n,1) = P_{n-1} \cdot g(2,1) + P_{n-2} \cdot g(1,1) = P_{n-1} + P_{n-2} = Q_{n-1}.$$

□

Propozicija 2.3. *Vrijedi*

$$g(n,j) = P_{n-j}Q_j + P_{n-j-1}P_j,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq n-1$.

Dokaz. Za $k = n-j-1$ relacija (27) daje

$$\begin{aligned} g(n,j) &= P_{n-j}g(j+1,j) + P_{n-j-1}g(j,j) \\ &= P_{n-j}Q_j + P_{n-j-1}P_j \\ &= P_{n-j}Q_j + P_{n-j-1}P_j. \end{aligned}$$

□

2.3 Još neke trokutaste sheme s Pellovim brojevima

Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi se eksplicitno mogu računati pomoću sljedećih formula:

$$F_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{j}$$

i

$$L_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}$$

za $n \geq 1$, a slična formula vrijedi i za Pellove brojeve.

Teorem 2.4.

$$P_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} = \binom{n-j-1}{j} 2^{n-2j-1}$$

Dokaz. Teorem 2.4 ćemo dokazati pomoću principa matematičke indukcije.
Baza: Za $n = 1$ i $n = 2$ imamo:

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{0} 2^0 = 1 = P_1$$

i

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{1-j}{j} = 2^{1-2j} = 2 = P_2.$$

Pretpostavka: Pretpostavimo da formula vrijedi za svaki prirodan broj n, $n \leq k$, gdje je k proizvoljan cijeli broj i $k \geq 2$. *Korak:* Pokažimo da formula vrijedi za $n = k + 1$. Iz (1) imamo:

$$P_{k+1} = 2P_k + P_{k-1} \tag{30}$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-j-1}{j} 2^{k-2j-1} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \binom{k-j-2}{j} 2^{k-2j-2}. \tag{31}$$

Rastavit ćemo dokaz na dva slučaja.
1.slučaj: Neka je $k = 2m + 1$ neparan broj. Tada iz (30) imamo:

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j}{j} 2^{2m-2j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-j-1}{j} 2^{2m-2j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j}{j} 2^{2m-2j+1} + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m-j}{j-1} 2^{2m-2j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j}{j} 2^{2m-2j+1} + \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j}{j-1} 2^{2m-2j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left[\binom{2m-j}{j} + \binom{2m-j}{j-1} \right] 2^{2m-2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j+1}{j} 2^{2m-2j+1}.
\end{aligned}$$

2.slučaj: Neka je $k = 2m$ paran broj. Tada iz (30) imamo:

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-j-1}{j} 2^{2m-2j} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-j-2}{j} 2^{2m-2j-2} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-j-1}{j} 2^{2m-2j} + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m-j-1}{j-1} 2^{2m-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j-1}{j} 2^{2m-2j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j-1}{j-1} 2^{2m-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left[\binom{2m-j-1}{j} + \binom{2m-j-1}{j-1} \right] 2^{2m-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{2m-j}{j} 2^{2m-2j}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da formula vrijedi za $n = k + 1$, pa princip matematičke indukcije povlači da vrijedi i za svaki $n \in \mathbb{N}$. $\square$

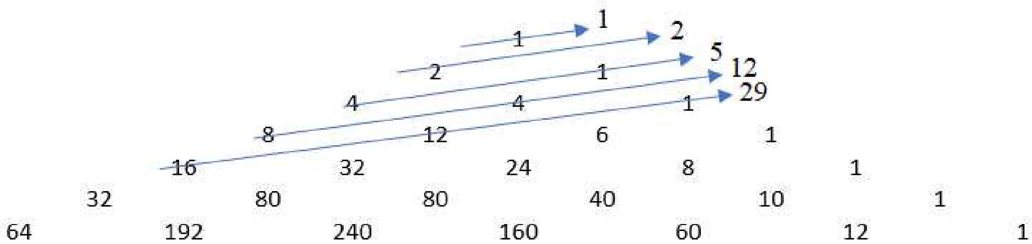
Teorem 2.4 sugerira da Pellove brojeve možemo pronaći u trokutastoj shemi koju dobivamo tako što odgovarajuće elemente množimo određenom potencijom broja dva. konkretno, svaki element na poziciji (n, k) množimo potencijom 2^{n-k}. Takav trokut nazvat ćemo *skalirani* Pascalov trokut (slika 5).

						1						
					2		1					
				4		4		1				
			8		12		6		1			
		16		32		24		8		1		
	32		80		80		40		10		1	
64		192		240		160		60		12		1

Slika 5: Skalirani Pascalov trokut

Dodamo li elemente Pascalovog trokuta kao na slici 6, dobivamo Pellove brojeve. Na primjer $P_5 = 16 + 12 + 1 = 29$. Možemo izračunati i za P_7:

$$\begin{aligned}
P_7 = 169 &= 64 + 80 + 24 + 1 \\
&= 1 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 \\
&= \binom{6}{0} 2^6 + \binom{5}{1} 2^4 + \binom{4}{2} 2^2 + \binom{3}{3} 2^0.
\end{aligned}$$



Slika 6: Skalirani Pascalov trokut i Pellovi brojevi

Treba uočiti da se svaki element skaliranog Pascalovog trokuta $B(n,r)$ može definirati rekurzivno:

$$B(n,r) = \begin{cases} 2^n, & \text{ako } r = 0 \\ 2B(n-1,r) + B(n-1,r-1), & \text{ako } 0 < r < n \\ 1, & \text{ako } r = 1 \end{cases}$$

Na primjer:

$$2B(4,3) + B(4,2) = 2 \cdot 8 + 24 = 40 = B(5,3).$$

3 Djeljivost Pellovih brojeva

U ovom dijelu ćemo iskazati i dokazati nekoliko teorema koji su povezani s djeljivosti Pellovih brojeva. Iskoristit ćemo navedene teoreme kako bismo povezali Pellove brojeve s prostim brojevima, odnosno kako bismo dokazali da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Teorem 3.1. *Neka su m, n pozitivni cijeli brojevi. Tada vrijedi:*

$$P_m \mid P_{mn}.$$

Dokaz. Tvrdnja trivijalno vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \geq 1$. Tada iz (13) imamo:

$$P_{m(n+1)} = P_{mn+m} = P_{mn}P_{m+1} + P_{mn-1}P_m.$$

Budući da $P_m \mid P_{mn}$ prema pretpostavci, slijedi da $P_m \mid P_{m(n+1)}$. Prema principu matematičke indukcije vrijedi $P_m \mid P_{mn}$ za svaki cijeli broj $n \geq 1$. $\square$

Teorem 3.2. *Ako $P_m \mid P_n$, tada $m \mid n$.*

Dokaz. Neka je $n = mk + r, 0 \leq r < m$. Tada iz (13) imamo:

$$P_n = P_{mk+r} = P_{mk}P_{r+1} + P_{mk-1}P_r.$$

Budući da $P_m \mid P_n$ i $P_m \mid P_{mk}$, slijedi da $P_m \mid P_{mk-1}P_r$. Iz činjenice da je $\mathrm{nzd}(P_{mk}, P_{mk-1}) = 1$ slijedi da $P_m \nmid P_{mk-1}$. Zaključujemo da $P_m \mid P_r$. To je nemoguće osim ako je $r = 0$. Dakle, $n = mk$, odnosno $m \mid n$. $\square$

Najveći zajednički djelitelj brojeva a i b označavat ćemo s $\mathrm{nzd}(a, b)$.

Lema 3.3. *Za prirodan broj m vrijedi:*

$$\mathrm{nzd}(P_m, P_{m-1}) = 1.$$

Lema 3.4. *Za pozitivne cijele brojeve q i n vrijedi:*

$$\mathrm{nzd}(P_{qn-1}, P_n) = 1.$$

Dokaz. Neka je $d = \mathrm{nzd}(P_{qn-1}, P_n)$. Tada znamo da $d \mid P_{qn-1}, P_n$. Iz 3.1 slijedi da $P_n \mid P_{qn}$, odnosno $d \mid P_{qn}$. Kako je $\mathrm{nzd}(P_{qn}, P_{qn-1}) = 1$ prema 3.3, zaključujemo da $d \mid 1$, tj. $d = 1$. $\square$

Lema 3.5. *Neka je $m = qn + r$, $0 \leq r \leq n$. Tada vrijedi* $\mathrm{nzd}(P_m, P_n) = \mathrm{nzd}(P_n, P_r)$.

Dokaz. Iz identiteta (13) i leme 3.4 imamo:

$$\begin{aligned}\text{nzd}(P_m, P_n) &= \text{nzd}(P_{qn+r}, P_n) = \text{nzd}(P_{qn}P_{r+1} + P_{qn-1}P_r, P_n)\\ &= \text{nzd}(P_{qn-1}P_r, P_n) = \text{nzd}(P_r, P_n) = \text{nzd}(P_n, P_r).\end{aligned}$$

□

Sada možemo iskazati i dokazati najvažniji teorem koji će nam pomoći pri određivanju najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika dvaju Pellovih brojeva.

Teorem 3.6. *Za $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\text{nzd}(P_m, P_n) = P_{\text{nzd}(m,n)}.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $m \geq n$. Iz Euklidovog algoritma dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned} m &= q_0 n + r_1, & 0 &\leq r_1 < n\\ n &= q_1 r_1 + r_2, & 0 &\leq r_2 < r_1\\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3, & 0 &\leq r_3 < r_2\\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-2} r_{n-1} + r_n, & 0 &\leq r_n < r_{n-1}\\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0 \end{aligned}$$

Lema 3.4 povlači da je

$$\text{nzd}(P_m, P_n) = \text{nzd}(P_n, P_{r_1}) = \text{nzd}(P_{r_1}, P_{r_2}) = \cdots = \text{nzd}(P_{r_{n-1}}, P_{r_n}).$$

Budući da je $r_{n-1} = q_n r_n$ možemo pisati $\text{nzd}(P_{r_{n-1}}, P_{r_n}) = \text{nzd}(P_{q_n r_n}, P_{r_n})$. Prema teoremu 3.1 imamo $P_{r_n} \mid P_{q_n r_n}$. Dakle, $\text{nzd}(P_{q_n r_n}, P_{r_n}) = P_{r_n}$. No $r_n = \text{nzd}(m, n)$, iz čega slijedi da je $\text{nzd}(P_{q_n r_n}, P_{r_n}) = P_{\text{nzd}(m,n)}$, odnosno $\text{nzd}(P_m, P_n) = P_{\text{nzd}(m,n)}$. □

Na primjeru ćemo pokazati kako odrediti najveći zajednički djelitelj dvaju Pellovih brojeva koristeći teorem 3.6.

Primjer 3.7. *Odredite najveći zajednički djelitelj Pellovih brojeva P_{21} i P_{14}.*

Rješenje. Koristeći teorem 3.6 imamo:

$$\text{nzd}(P_{21}, P_{14}) = P_{\text{nzd}(21,14)} = P_7$$

odnosno

$$\text{nzd}(38613965, 80782) = 169.$$

□

Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a i b označit ćemo s $\text{nzv}(a, b)$. Budući da je

$$\text{nzv}(a, b) = \frac{ab}{\text{nzd}(a, b)},$$

prema teoremu 3.6 dobivamo da se najmanji zajednički višekratnik dva Pellova broja P_m i P_n može računati prema formuli

$$\text{nzv}(P_m, P_n) = \frac{P_m P_n}{\text{nzd}(P_m, P_n)} = \frac{P_m P_n}{P_{\text{nzd}(m,n)}}$$

Primjer 3.8. *Odredite najmanji zajednički višekratnik Pellovih brojeva P_{10} i P_{15}.*

Rješenje. Vrijedi:

$$\text{nzv}(P_{10}, P_{15}) = \frac{P_{10} P_{15}}{P_{\text{nzd}(10,15)}} = \frac{P_{10} P_{15}}{P_5} = \frac{2378 \cdot 195025}{29} = 15992050.$$

$\square$

Napomena 3.9. *Teorem 3.6 općenito ne vrijedi za Pell–Lucasove brojeve. Na primjer,* $\text{nzd}(Q_6, Q_{12}) = 1$, *ali* $Q_{\text{nzd}(6,12)} = Q_6 = 99$ *pa* $Q_{\text{nzd}(6,12)} \neq \text{nzd}(Q_6, Q_{12})$.

Korolar 3.10. $\text{nzd}(P_m, P_n) = 1$ *ako i samo ako* $\text{nzd}(m, n) = 1$.

Korolar 3.11. *Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji točno k prostih brojeva: $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Neka su $P_{q_1}, P_{q_2}, \ldots, P_{q_k}$ pripadajući Pellovi brojevi. Prema 3.10, za $i \neq j$ vrijedi $\text{nzd}(q_i, q_j) = 1, \text{nzd}(P_{q_i}, P_{q_j}) = 1$. Iz pretpostavke znamo da postoji točno k prostih brojeva, iz čega slijedi da je svaki Pellov broj P_{q_i}, $i = 1, \ldots, k$, prost. No to je u kontradikciji s činjenicom da $P_{17} = 1136689 = 137 \cdot 8297$ složen. Dakle, postoji beskonačno mnogo prostih brojeva. $\square$

4 Primjeri

U ovom poglavlju izdvojili smo nekoliko zanimljivih zadataka u kojima se pojavljuju Pellovi i Pell–Lucasovi brojevi.

Primjer 4.1. *Pokažite da postoji niz* (A_k) *takav da vrijedi:*

$$P_{n+2k} = P_{n+k}A_k - (-1)^k.$$

Niz (A_k) *definirajte rekurzivno.*

Rješenje. Iz Binetove formule (3) slijedi

$$\begin{aligned}(\gamma - \delta)(P_{n+2k} + (-1)^k P_n) &= (\gamma^{n+2k} - \delta^{n+2k}) + (-1)^k(\gamma^n - \delta^n) \\ &= (\gamma^{n+2k} - \delta^{n+2k}) + (\gamma\delta)^k(\gamma^n - \delta^n) \\ &= (\gamma^{n+2k} - \delta^{n+2k}) + \gamma^{n+k}\delta^k - \gamma^k\delta^{n+k} \\ &= (\gamma^{n+k} - \delta^{n+k})(\gamma^k + \delta^k).\end{aligned}$$

Dakle,

$$P_{n+2k} + (-1)^k P_n = 2P_{n+k}Q_k.$$

Stoga zaključujemo da je $A_k = 2Q_k$. Budući da je $Q_1 = 1, Q_2 = 3$, imamo $A_1 = 2, A_2 = 6$. Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned}2A_{k-1} + A_{k-2} &= 4Q_{k-1} + 2Q_{k-2} \\ &= 2(2Q_{k-1} + Q_{k-2}) = 2Q_k = A_k,\end{aligned}$$

Niz (A_k) zadan je rekurzijom

$$A_k = 2A_{k-1} + A_{k-2},\ \ k \geq 3,$$

uz početne uvjete $A_1 = 2, A_2 = 6$. □

Primjer 4.2. *Pronađite cijele brojeve* a, b, c *i* d *takve da vrijedi*

$$P_n = P_{n-a} + 444P_{n-b} + P_{n-c} + P_{n-d}$$

i $1 < a < b < c < d$.

Rješenje. Za r, s nenegativne cijele brojeve i $r \geq s$ ima Prema $P_{r+s} = 2P_rQ_s - (-1)^s P_{r-s}$, gdje su r i s cijeli brojevi. Označimo li $r + s = m$, navedeni identitet možemo pisati kao:

$$P_m = 2P_{m-s}Q_s - (-1)^s P_{m-2s}.$$

Iz navedenog identiteta slijede

$$P_n = P_{(n-b)+b} = 2P_{n-b}Q_b - (-1)^b P_{n-2b}, \tag{32}$$

$$P_{n-b+k} = P_{(n-b)+k} = 2P_{n-b}Q_k - (-1)^k P_{n-b-k}. \tag{33}$$

Oduzimajući (33) od (32) dobivamo

$$P_n - P_{n-b+k} = 2P_{n-b}(Q_b - Q_k) - (-1)^b P_{n-2b} + (-1)^k P - n - b - k. \tag{34}$$

Za neparan broj b neparan i paran broj k paran broj iz (34) slijedi

$$P_n = P_{n-b+k} + 2P_{n-b}(Q_b - Q_k) + P_{n-b-k} + P_{n-2b}.$$

Budući da želimo $Q_b - Q_k = 222 = 239 - 17$ izabrat ćemo $b = 7$ i $k = 4$. Iz toga nam slijedi da je $a = b - k = 3, c = b + k = 11$ i $2b = 14$. Dakle, naš identitet glasi

$$P_n = P_{n-3} + 444P_{n-7} + P_{n-11} + P_{n-14},$$

odnosno

$$a = 3,\ b = 7,\ c = 11,\ d = 14.$$

Na primjer za $n = 17$ je

$$\begin{aligned} P_{14} + 444P_{10} + P_6 + P_3 &= 80782 + 444 \cdot 2378 + 70 + 5 \\ &= 1136689 \\ &= P_{17}. \end{aligned}$$

□

U sljedećem primjeru primjenjuje se tzv. *Candidov identitet* koji je dobio ime po talijanskom matematičaru Giacomu Candidu (1871.-1941.) i glasi

$$\left(x^2 + y^2 + (x+y)^2\right)^2 = 2\left(x^4 + y^4 + (x+y)^4\right). \tag{35}$$

Primjer 4.3. *Korištenjem* (35) *pokažite identitete:*

$$(P_{n-2}^2 + 4P_{n-1}^2 + P_n^2)^2 = 2(P_{n-2}^4 + 16P_{n-1}^4 + P_n^4),$$

$$(Q_{n-2}^2 + 4Q_{n-1}^2 + Q_n^2)^2 = 2(Q_{n-2}^4 + 16Q_{n-1}^4 + Q_n^4),$$

za $n \geq 0$.

Rješenje. Uvrštavanjem $x = P_{n-2}$ i $y = 2P_{n-1}$ u (35) dobivamo

$$\left(P_{n-2}^2 + 4P_{n-1}^2 + (\underbrace{P_{n-2} + 2P_{n-1}}_{=P_n})^2\right)^2 = 2\left(P_{n-2}^4 + 16P_{n-1}^4 + (\underbrace{P_{n-2} + 2P_{n-1}}_{=P_n})^4\right).$$

Konkretno za $n = 5$ imamo:

$$\begin{aligned}(P_3^2 + 4P_4^2 + P_5^2)^2 &= (5^2 + 4 \cdot 12^2 + 29^2)^2 \\ &= 2079364 = 2(5^4 + 16 \cdot 12^4 + 29^4) \\ &= 2(P_3^4 + 16P_4^4 + P_5^4).\end{aligned}$$

Za $x = Q_{n-2}$ i $y = 2Q_{n-1}$ iz (35) analogno dobivamo

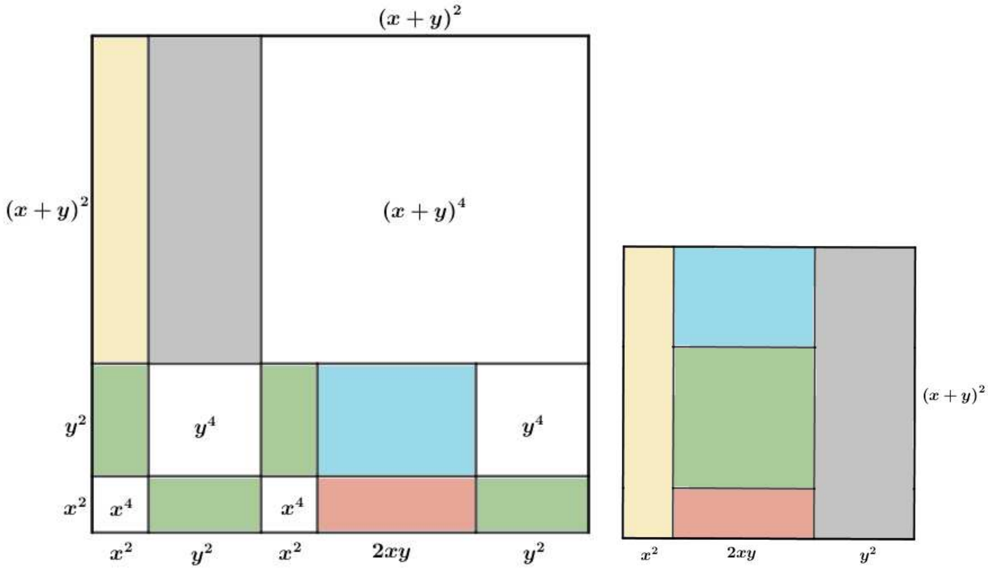
$$\left(Q_{n-2}^2 + 4Q_{n-1}^2 + (\underbrace{Q_{n-2} + 2Q_{n-1}}_{=Q_n})^2\right)^2 = 2\left(Q_{n-2}^4 + 16Q_{n-1}^4 + (\underbrace{Q_{n-2} + 2Q_{n-1}}_{=Q_n})^4\right).$$

Za $n = 5$ je

$$\begin{aligned}(Q_3^2 + 4Q_4^2 + Q_5^2)^2 &= (7^2 + 4 \cdot 17^2 + 41^2)^2 \\ &= 8328996 = 2(7^4 + 16 \cdot 17^4 + 41^4) \\ &= 2(Q_3^4 + 16Q_4^4 + Q_5^4).\end{aligned}$$

□

Dokaz Candidovog identiteta. Koristimo tzv. dokaz bez riječi prikazan na slici 7. □



Slika 7: Vizualna interpretacija Candidovog identiteta

5 Pellovi i neki poznati brojevi

U ovom poglavlju ćemo povezati Pellove brojeve s Pitagorinim trojkama i figurativnim brojevima. Navest ćemo samo ključne korake za dokaz nekih tvrdnji jer su tehnički zahtjevne i nadilaze područje ovog rada.

5.1 Pitagorine trojke

Pitagorin trokut je pravokutan trokut čije su duljine stranica prirodni brojevi. Ako su a, b katete, a c hipotenuza Pitagorinog trokuta, tada vrijedi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Uređenu trojku (a, b, c) nazivamo *Pitagorina trojka.* Ako su brojevi a, b i c relativno prosti, kažemo da je (a, b, c) *primitivna Pitagorina trojka.*

Teorem 5.1. *Neka je b paran broj. Sve primitivne Pitagorine trojke (a, b, c) su zadane formulama:*

$$a = x^2 - y^2, \; b = 2xy, \; c = x^2 + y^2,$$

gdje su x, y relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti i $x > y$.

Koristeći već dokazane identitete, prikazat ćemo primitivne Pitagorine trojke pomoću Pellovih brojeva. Iz identiteta (10) i (11) znamo da vrijedi:

$$2Q_{2n}P_{2n} = P_{4n},$$

$$Q_{2n}^2 - P_{2n}^2 = P_{2n}^2 + 1.$$

Neka su $x = Q_{2n}$ i $y = P_{2n}$. Brojevi P_{2n} i Q_{2n} su različite parnosti i vrijedi $Q_{2n} > P_{2n}$. Kako iz (12) vrijedi $(P_{2n}, Q_{2n}) = 1$, tada je $2xy = P_{4n}$. Nadalje, kako je

$$x^2 - y^2 = P_{2n}^2 + 1$$

te

$$x^2 + y^2 = Q_{2n}^2 + P_{2n}^2 = (2P_{2n}^2 + 1) + P_{2n}^2 = 3P_{2n}^2 + 1,$$

slijedi da je

$$(P_{4n}, P_{2n}^2 + 1, 3P_{2n}^2 + 1)$$

primitivna Pitagorina trojka.

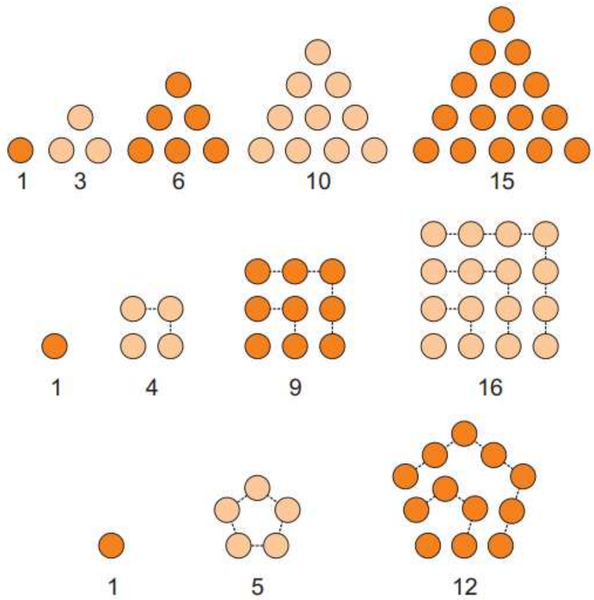
Na primjer, za $n = 2$ dobivamo primitivnu Pitagorinu trojku

$$(P_8, P_4^2 + 1, 3P_4^2 + 1) = (408, 145, 433),$$

a pripadni x i y iz teorema 5.1 su $x = Q_4 = 17$ i $y = P_4 = 12, (P_4, Q_4) = 1$.

5.2 Trokutasti brojevi

Poligonalni brojevi su pozitivni cijeli brojevi koji se u ravnini mogu prikazati pravilnim n-terokutima pri čemu je $n \geq 3$ (slika 8[1]).



Slika 8: Trokutasti, kvadratni i peterokutni brojevi

Trokutasti brojevi su najjednostavniji poligonalni brojevi koje u ravnini prikazujemo točkama raspoređenim u obliku trokuta.

Definicija 5.2. *Za $n \in \mathbb{N}$ n-ti* ***trokutasti broj*** *T_n jednak je zbroju prvih n prirodnih brojeva.*

Očito je

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Prvih nekoliko trokutastih brojeva je 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Očito je $P_1 = T_1 = 1$ no pokazuje se da je to i jedini trokutasti Pellov broj. Kako je

$$\frac{m(m+1)}{2} = P_n$$

ekvivalentno s

$$(2m+1)^2 = 8P_n + 1,$$

slijedi da se problem svodi na karakterizaciju od n za koji je $8P_n + 1$ potpuni kvadrat.

[1]Slika je preuzeta iz [1]

Teorem 5.3. *Pellov broj P_n je trokutast ako i samo ako je $n = 1$*

U ovom radu nećemo dokazati teorem 5.3, no dokaz možemo pronaći u [4] (str. 138.-140.). Dokaz slijedi iz sljedećih identiteta s Pellovim i Pell–Lucasovim brojevima:

- $P_{m+n} = 2P_mQ_n - (-1)^nP_{m-n}$
- $P_{2^tn} = P_n(2Q_n)(2Q_{2n})(2Q_{4n}), \ldots, (2Q_{2^{t-1}n})$
- $Q_n^2 = 2P_n^2 + (-1)^n$
- $Q_{2n} = 2Q_n^2 - (-1)^n.$

te svojstava Jacobijevog simbola.

5.3 Peterokutni brojevi

Peterokutni brojevi su pozitivni cijeli brojevi koje možemo u ravnini prikazati pravilnim peterokutima.

Definicija 5.4. *Za $n \in \mathbb{N}$ n-ti* ***peterokutni broj*** *p_n jednak je*

$$p_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2).$$

Kako je očito

$$p_n = 3T_n - 2n,$$

slijedi

$$p_n = \frac{n(3n-1)}{2}, \ n \geq 1.$$

Prvih nekoliko peterokutnih brojeva su 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ... Možemo primijetiti da su četiri među navedenim ujedno i Pellovi brojevi: $1, 5, 12, 70$. Pokazuje se da su to i jedini Pellovi peterokutni brojevi.Iz

$$\frac{m(3m-1)}{2} = P_n,$$

množenjem s 24 slijedi

$$36m^2 - 12m = 24P_n$$

te

$$(6m-1)^2 = 24P_n + 1.$$

Problem se sada svodi na karakterizaciju prirodnih brojeva n za koje je $24P_n+1$ potpuni kvadrat (v. [4] str. 141.-143.).

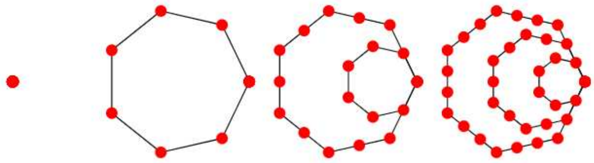
Teorem 5.5 (Teorem 7.2. iz [4])**.** *Pellov broj P_n je peterokutan broj ako i samo ako je $n = 1, 3, 4$ ili 6.*

5.4 Sedmerokutni brojevi

Sedmerokutni brojevi su poligonalni brojevi koje u ravnini možemo prikazati pravilnim sedmerokutima.

Definicija 5.6. *Za $n \in \mathbb{N}$ n-ti **sedmerokutni broj** S_n jednak je*

$$S_n = 1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + (5n - 4).$$



Slika 9: Sedmerokutni brojevi (preuzeto iz [7])

Prvih nekoliko sedmerokutnih brojeva 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, ... Iz prethodne definicije možemo zaključiti da je

$$S_n = 5T_n - 4n,$$

pa je

$$S_n = \frac{n(5n-3)}{2}.$$

Želimo odrediti $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je

$$\frac{m(5m-3)}{2} = P_n.$$

Množenjem prethodne relacije s 40 dobivamo

$$100m^2 - 60m = 40P_n,$$

odnosno

$$(10m-3)^2 = 40P_n + 9.$$

Dakle, P_n je sedmerokutan broj ako i samo ako je $40P_n + 9$ potpuni kvadrat, a to vrijedi samo za $n = 1$.

Teorem 5.7. *Pellov broj P_n je sedmerokutan ako i samo ako je $n = 1$.*

Teorem nećemo u potpunosti dokazati. Koristit ćemo samo korolar i lemu iz koje dokaz direktno slijedi. U [4] (str. 146. i 147.) može se pronaći detaljan dokaz.

Korolar 5.8. *Neka je* $n \equiv 0, \pm 1$ *ili* 6 $(mod\ 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2)$. *Tada je* $40P_n + 9$ *potpun kvadrat ako i samo ako je* $n = 0, \pm 1$ *ili* 6.

Lema 5.9. *Neka je* $n \not\equiv 0, \pm 1$ *ili* 6 $(mod\ 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2)$. *Tada* $40P_n + 9$ *nije potpun kvadrat.*

Skica dokaza teorema 5.7. Iz 5.8 i 5.9 možemo zaključiti da je $40P_n + 9$ potpuni kvadrat ako i samo ako je $n = 0, \pm 1$ ili 6. Budući da je $n \geq 1$, n ne može biti -1 ili 0. Za $n = 6$ imamo

$$40P_n + 9 = 40P_6 + 9 = 40 \cdot 70 + 9 = 53^2.$$

Stoga mora vrijediti

$$53^2 = (10m - 3)^2, m \geq 1. \tag{36}$$

Rješavajući (36) dobijemo $m = -5$ što ne može biti. Zaključujemo da je $n = 1$, odnosno P_1 je jedini sedmerokutan Pellov broj. □

Literatura

[1] B. Dakić, Figurativni brojevi, MiŠ, 31 (2005./06.), str. 22-25.

[2] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[3] A. F. Horadam, Pell identities, Fibonacci Quart. 9 (1971.)

[4] T. Koshy, *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*, Springer, 2014.

[5] W. L. McDaniel, Triangular Numbers in the Pell Sequence, Fib. Quart. 34, 105-107, 1996.

[6] E. W. Weisstein, *Figurate Number* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `https://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html`

[7] E. W. Weisstein, *Heptagonal Number* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `https://mathworld.wolfram.com/HeptagonalNumber.html`

[8] Wikipedia (2022.): Pell number `https://en.wikipedia.org/wiki/Pell_number` (20.7.2022.)

Sažetak

Niz Pellovih brojeva zadan je početnim uvjetima $P_1 = 1, P_2 = 2$, te rekurzivnom relacijom $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 3$. Uz definiciju Pellovih brojeva, u radu su definirani i Pell–Lucasovi brojevi koji su s njima usko povezani. Navedena su različita svojstva i identiteti s Pellovim i Pell–Lucasovima brojevima, kao i najvažniji dokazi istih. Pellovi brojevi vežu se i uz Pellovu jednadžbu $x^2 - 2y^2 = 1$ te uz racionalne aproksimacije $\sqrt{2}$. U radu su opisane i neke trokutaste sheme s Pellovim brojevima te njihova veza s Pitagorinim trojkama i poligonalnim brojevima.

Summary

The Pell numbers sequence is defined with initial conditions: $P_1 = 1, P_2 = 2$ and by the recurrence relation $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 3$. Since they are closely related to Pell numbers, Pell-Lucas numbers are defined in this thesis. We showed the properties and identities of both Pell and Pell-Lucas numbers as proofs of the most important ones. Pell numbers are in close relation with Pell's equation $x^2 - 2y^2 = 1$, and we stated the relation between Pell numbers and approximation of $\sqrt{2}$. We described some triangular schemes with Pell's numbers and stated the relation between Pell numbers, Pythagorean triplets, and polygonal numbers.

Životopis

Rođena sam 9. srpnja 1998. godine u Slavonskom Brodu, gdje sam završila Osnovnu školu Vladimira Nazora te opći smjer Gimnazije Matije Mesića. Godine 2017. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, a 2020. godine istoimeni diplomski sveučilišni studij na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu. Od svibnja 2022. godine zaposlena sam u tvrtki Photomath koja se bavi kreiranjem matematičkog sadržaja za istoimenu mobilnu aplikaciju.