

# Racionalna trigonometrija

---

Stipić, Ingrid

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:842022>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ingrid Stipić

**RACIONALNA TRIGONOMETRIJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

|  |            |
|--|------------|
| <b>Sadržaj</b>   | <b>iii</b> |
| <b>Uvod</b>  | <b>2</b>   |
| <b>1 Osnovne ideje</b>                                       | <b>3</b>   |
| 1.1 Upoznavanje s kvadratom udaljenosti i razmakom . . . . . | 3          |
| 1.2 Teoremi racionalne trigonometrije . . . . .              | 11         |
| 1.3 Različiti pristupi . . . . .                             | 12         |
| <b>2 Osnovni pojmovi</b>                                     | <b>16</b>  |
| 2.1 Polje . . . . .  | 16         |
| 2.2 Fibonaccijev i Cauchyjev identitet . . . . .             | 18         |
| 2.3 Linearne jednačbe . . . . .                              | 18         |
| 2.4 Kvadratne jednačbe . . . . .                             | 19         |
| 2.5 Točke i pravci . . . . .                                 | 20         |
| 2.6 Paralelni i okomiti pravci . . . . .                     | 24         |
| 2.7 Afine kombinacije . . . . .                              | 26         |
| <b>3 Kvadrat udaljenosti</b>                                 | <b>30</b>  |
| 3.1 Pravci i trokut . . . . .                                | 30         |
| 3.2 Arhimedova formula . . . . .                             | 37         |
| <b>4 Razmak</b>  | <b>40</b>  |
| 4.1 Dualni razmak i zakret . . . . .                         | 40         |
| 4.2 Omjeri . . . . .   | 43         |
| 4.3 Odnosi između pravaca . . . . .                          | 45         |
| 4.4 Osnovni teoremi o razmaku . . . . .                      | 47         |
| 4.5 Simetrane . . . . .                                      | 51         |
| <b>5 Primjene</b>  | <b>56</b>  |
| 5.1 Primjeri . . . . .                                       | 56         |

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| <i>SADRŽAJ</i>       | iv        |
| 5.2 Fizika . . . . . | 59        |
| <b>Bibliografija</b> | <b>65</b> |

# Uvod

U ovom diplomskom radu je prikazano kako jednostavnije i prirodnije pristupiti geometrijskim problemima primjenjujući racionalnu trigonometriju. Racionalna trigonometrija ujedinjuje geometriju, algebru i teoriju brojeva. Uvođenje racionalne trigonometrije je motivirano time što se vrijednosti 6 osnovnih elemenata trokuta mogu prikazati u obliku razlomka. Naime, kvadrat udaljenosti i razmak su vrijednosti kvadrata brojeva dok su udaljenost i kut skoro linearne vrijednosti.

Umjesto udaljenosti i kuta, koji su temeljni pojmovi Euklidove geometrije, u radu ćemo razvijati racionalnu trigonometriju koja se temelji na pojmovima

$$\textit{kvadrat udaljenosti} = (\textit{udaljenost})^2$$

$$\textit{razmak} = (\sin(\textit{kut}))^2$$

Povijesno gledajući, metričku geometriju je teško odvojiti od decimalnih brojeva radi izračuna kuteva. Racionalna trigonometrija se počela razvijati oko 19. stoljeća kada su se uočile teškoće i ograničenja Euklidove geometrije, no intuitivniji pojmovi udaljenosti i kuta su doveli do toga da se geometrija utemeljila samo na Euklidovoj geometriji koja dominira unazad zadnje dvije tisuće godina. No racionalna trigonometrija nam je mogla biti jednaka kao i Euklidova, možda i intuitivnija da smo se navikli na nju. Mnogi klasični geometrijski pojmovi i rezultati su ovdje redefinirani u općenitiji izgled kao što su Heronova formula, Arhimedov zakon, slični trokuti, paralelogram, ortocentar, Cevin teorem, Stewartov teorem, Brahmaguptina formula, pravilni mnogokuti, Eulerov pravac. Racionalna geometrija ne zahtijeva prethodno razumijevanje klasične geometrije, ona je zasebna i logički odvojena od Euklidove.

Učenici imaju poteškoća u razumijevanju pojmova i definicija kuta i trigonometrijskih funkcija, a kad i uspiju primijeniti formule često ne razumiju zašto je sve to točno. Zbog toga je jako važno najprije definirati osnovne pojmove. Kako bi definirali kut moramo upotrijebiti mjerenje i računanje. U klasičnoj geometriji se koriste različite mjerne jedinice. Većina znanstvenika i inženjera koristi stupnjeve od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ , no negdje koriste i grade od 0 do 400. Matematičari obično preferiraju radijansku mjeru, gdje puni kut ide

do 6.283185... odnosno  $2\pi$ . No koju god skalu izabrali, nastaju problemi kod dodavanja punog kuta i korištenja ili biranja predznaka. Za razliku od toga, kod racionalne trigonometrije razmak između dva pravca je bezdimenzionalna vrijednost i poprima vrijednosti između 0 i 1 gdje je razmak 0 kada su pravci paralelni, a 1 kada su pravci okomiti. Intuitivno možemo zaključiti da kutu od  $45^\circ$  stupnjeva pripada razmak od  $1/2$ , dok  $30^\circ$  i  $60^\circ$  postaju  $1/4$  i  $3/4$ . Mjerenje razmaka se koristi između pravaca, ne polupravaca i kutovi od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  i vrijednost kutova od  $90^\circ$  do  $180^\circ$  se gledaju simetrično.

Stari Grci su vjerovali da je relativna vrijednost fundamentalnija od apsolutne vrijednosti te u ovom radu promatramo takve vrijednosti. Uvodimo definicije bazirajući se na Kartezijevoj geometriji, a to uključuje zapis točke, pravca, trokuta, četverokuta, paralelne i okomite pravce, affine kombinacije te prikaz u koordinatnom sustavu. Definiramo polja i koristimo poznate identitete kao što su Fibonaccijev i Cauchyjev identitet. Racionalna trigonometrija promatra kvadrat vrijednosti, stoga je naravno povezana i sa kvadratnom jednadžbom, kao i sa linearnom jednadžbom te se rješavaju prikladni zadatci u proizvoljnom polju. Proučavanje kvadrata udaljenosti nastavljamo proučavanjem nekih osnovnih koncepata i rezultata racionalne trigonometrije kao što su nul-pravac, polovište, uvjet kolinearosti, Pitagorin teorem i Arhimedova funkcija. Nadalje, promatramo razmak i dualni razmak koji se mogu shvatiti kao ekvivalentni pojmovi, no ovdje je dana prednost razmaku. Nadalje, u radu prezentiramo definicije i teoreme o simetralama dužina i kuteva, tj. njihove analogone iz racionalne trigonometrije. U racionalnoj trigonometriji imamo tako teoreme geometrije, a neki od njih su analogni s teoremima Euklidove geometrije, kao što su kosinuso i sinusov poučak, Heronova formula te teorem da je zbroj kutova u trokutu  $180^\circ$ . Najvažniji teoremi racionalne trigonometrije koje ćemo proučiti su teorem koji daje uvjet kolinearosti točaka, formula tri razmaka, teorem o razmaku, teorem o dualnom razmaku. Kao što ćemo vidjeti u radu, racionalna trigonometrija je logičnija i praktičnija za izračunavanje.

Znanstvenicima, fizičarima i geodetima, racionalna trigonometrija može biti novi alat kojim se povećava točnost, a smanjuje vrijeme rješavanja geometrijskih problema. Matematičarima racionalna trigonometrija može poslužiti kao logički okvir za proučavanje metričkih prostora i njihovih primjena. Uvođenje racionalne trigonometrije zahtijeva od nas otvorenost prema novim idejama i želju za istraživanjem, a zauzvrat daje proširenje postojećeg znanja matematike kao i ljepotu svijeta oko nas. Ona učenicima kao i profesorima daje jednostavniju teoriju koja ne zahtijeva vremena kao Euklidova geometrija. Racionalna trigonometrija može i privući mlade ljude proučavanju matematičkih pojmova novijim i elegantnijim pristupom trigonometriji i geometriji.

# Poglavlje 1

## Osnovne ideje

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 1.1 knjige [4].

### 1.1 Upoznavanje s kvadratom udaljenosti i razmakom

Trigonometrija se bavi izračunavanjem vrijednosti kutova u trokutu. U klasičnoj trigonometriji mjerimo udaljenost i kut, dok u racionalnoj trigonometriji mjerimo kvadrat udaljenosti i razmak.

**Definicija 1.1.1.** *Udaljenost*  $d(A_1, A_2) = |A_1A_2|$  između točaka  $A_1 = (x_1, y_1)$  i  $A_2 = (x_2, y_2)$  je broj

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Prema tome, kvadrat udaljenosti definiramo na sljedeći način.

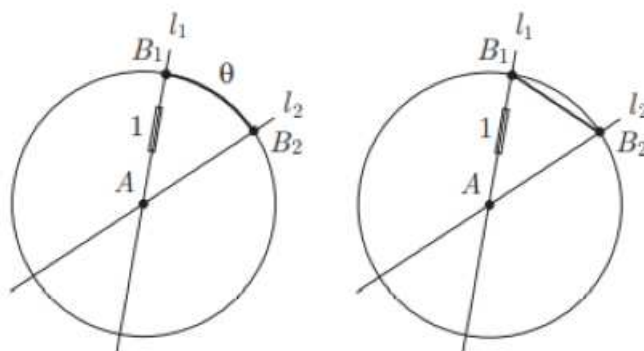
**Definicija 1.1.2.** *Kvadrat udaljenosti*  $Q(A_1, A_2)$  između točaka  $A_1 = (x_1, y_1)$  i  $A_2 = (x_2, y_2)$  je broj

$$Q(A_1, A_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Očito je i  $Q(A_1, A_2) = Q(A_2, A_1)$ .

Razmak mjeri odvojenost između dva pravca. Krenimo prvo od kuta koji određujemo tako da nacrtamo kružnicu radijusa 1 sa središtem u točki  $A$  koje je sjecište ta dva pravca. Neka kružnica siječe te pravce u točkama  $B_1$  i  $B_2$  kao na slici 1.1. Tada definiramo kut  $\theta$  između dva pravca kao duljinu luka između točaka  $B_1$  i  $B_2$ . Ako su pravci blizu paralelnosti, tada se kut kojeg mjerimo u radijanima približava nuli, dok kod okomitih pravaca koristimo aproksimaciju broja  $\pi$  pa je približna vrijednost od  $\pi/2 \approx 1.570796326\dots$



Slika 1.1: Kut između pravaca.<sup>1</sup>

Odmah možemo uočiti teškoće u navedenoj definiciji. Prva je ta da postoje dva načina odabira točke  $B_1$  i dva načina odabira točke  $B_2$  čime dobijemo četiri moguća para točaka za razmotriti. Općenito, imamo osam načina mjerenja duljine luka i ovisno o izboru definicije, možemo dobiti četiri različita rezultata.

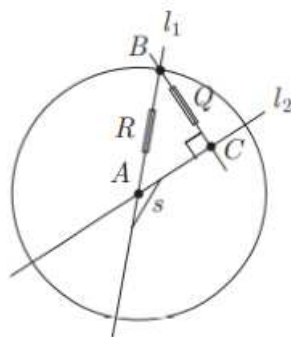
Druga mogućnost je ta da opet nacrtamo kružnicu radijusa jedan, ali sada gledajući udaljenost između točaka  $B_1$  i  $B_2$  kao na slici 1.1. Kada su pravci paralelni za odabrane točke  $B_1$  i  $B_2$ , udaljenost  $d(B_1B_2)$  jednaka je nuli, dok je za okomite pravce jednaka  $\sqrt{2}$ . Međutim, opet imamo dva izbora točaka, ali je ovo sigurno bolja metoda od prethodne.

Glavna ideja je da uzmemo bilo koju točku  $B \neq A$  na jednom od pravaca te spustimo okomicu iz točke  $B$  na drugi pravac. Definiramo razmak  $s(l_1, l_2)$  između dva pravca  $l_1$  i  $l_2$  kao omjer kvadrata udaljenosti

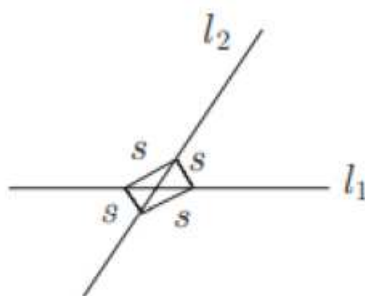
$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B, C)}{Q(A, B)} = \frac{Q}{R},$$

gdje su  $Q$  i  $R$  kvadrati udaljenosti između točaka  $B$  i  $C$ , odnosno  $B$  i  $A$ . U pravokutnom trokutu je  $Q$  kateta i  $R$  hipotenuza kao što je prikazano na slici 1.2.

<sup>1</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

Slika 1.2: Separacija dva pravca.<sup>2</sup>

Broj  $s$  neovisan je o poretku pravaca, to jest  $s(l_1, l_2) = s(l_2, l_1)$  ili izboru tačke  $B$  i to je jedinstven realan broj između 0 i 1. Uočite da nam kružnica više nije bitna i da imamo četiri ekvivalentne mogućnosti izbora razmaka kao što je prikazano na slici 1.3.

Slika 1.3: Četiri moguća izbora razmaka.<sup>3</sup>

Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$ . Tada ćemo kvadrate udaljenosti između vrhova označavati  $s$

$$Q_1 = Q(A_2, A_3),$$

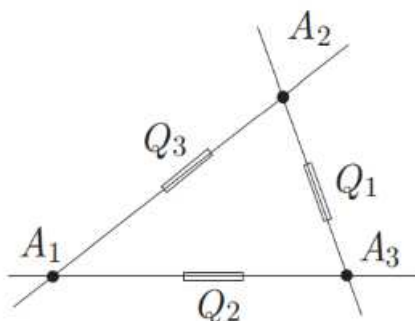
$$Q_2 = Q(A_1, A_3),$$

$$Q_3 = Q(A_1, A_2),$$

kao što je prikazano na slici 1.4. Isti zapis će se koristiti i kada tačke  $A_1, A_2, A_3$  budu kolinearne.

<sup>2</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

<sup>3</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



Slika 1.4: Trokut s kvadratima udaljenosti.<sup>4</sup>

Neka je dan četverokut  $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ . Tada ćemo kvadrate udaljenosti prikazane na slici 1.5 njegovih vrhova označavati s

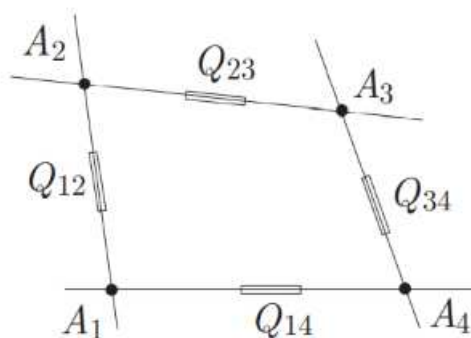
$$Q_{12} = Q(A_1, A_2),$$

$$Q_{23} = Q(A_2, A_3),$$

$$Q_{34} = Q(A_3, A_4),$$

$$Q_{14} = Q(A_1, A_4).$$

Kvadrate udaljenosti  $Q_{13}$  i  $Q_{24}$  su kvadrati dijagonala četverokuta.



Slika 1.5: Četverokut s kvadratima udaljenosti.<sup>5</sup>

Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$ . Tada ćemo razmake označavati s

$$s_1 = s(A_1A_2, A_1A_3),$$

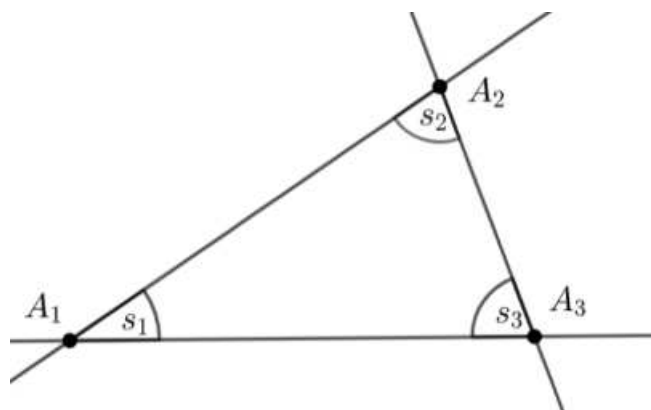
<sup>4</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

<sup>5</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

$$s_2 = s(A_2A_1, A_2A_3),$$

$$s_3 = s(A_3A_1, A_3A_2),$$

kao što je prikazano na slici 1.6 gdje je  $s_1$  razmak suprotne stranice  $\overline{A_2A_3}$  trokuta i slično za ostale razmake.



Slika 1.6: Razmak trokuta.

Općenito, ako su  $l_1, l_2, l_3$  bilo koja tri pravca. Tada ćemo razmake označavati s

$$s_1 = s(l_2, l_3),$$

$$s_2 = s(l_1, l_3),$$

$$s_3 = s(l_1, l_2).$$

Neka je dan četverokut  $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ . Tada ćemo razmake označavati s

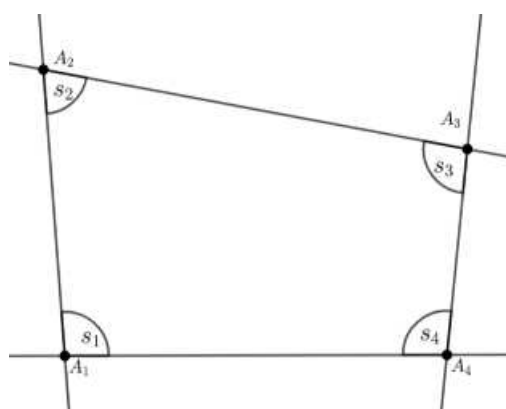
$$s_1 = s(A_1A_2, A_1A_4),$$

$$s_2 = s(A_2A_1, A_2A_3),$$

$$s_3 = s(A_3A_2, A_3A_4),$$

$$s_4 = s(A_4A_1, A_4A_3),$$

kao što je prikazano na slici 1.7

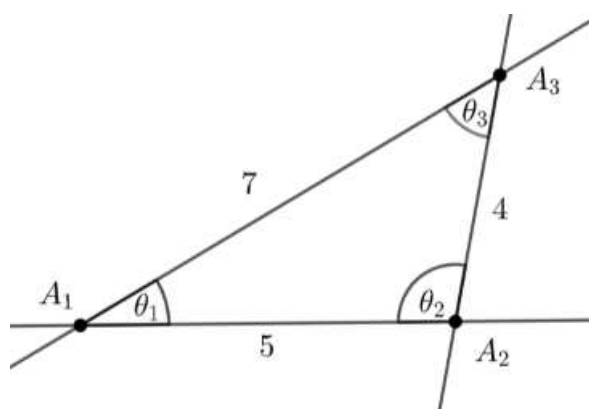


Slika 1.7: Razmak četverokuta.

Pogledajmo razliku između klasične trigonometrije i racionalne trigonometrije na primjeru trokuta.

**Pristup klasične trigonometrije:**

Trokut s duljinama stranica  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 7$ ,  $d_3 = 5$ , ima pripadajuće kutove  $\theta_1 \approx 33.92^\circ$ ,  $\theta_2 \approx 102.44^\circ$ ,  $\theta_3 \approx 43.64^\circ$ , gdje su kutovi i stranice označeni na slici 1.8.

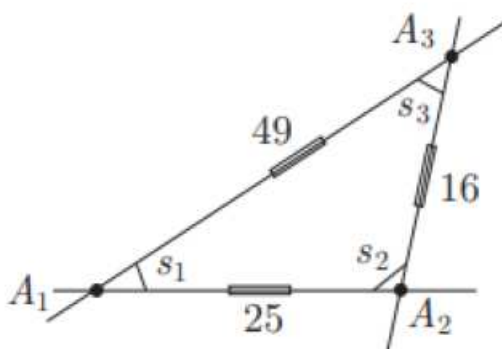


Slika 1.8: Trokut.

Kako bismo riješili trokut i povezali ovih šest veličina, koristimo teorem o zbroju kutova u trokutu, kosinsov poučak i poučak o sinusima. Također, kako bismo izračunali mjeru kuta, potrebne su nam trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije koje je teško izračunati bez džepnog računala.

**Pristup racionalne trigonometrije:**

Trokut s kvadratima udaljenosti  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 49$ ,  $Q_3 = 25$  i s pripadajućim razmacima  $s_1 = 384/1225$ ,  $s_2 = 24/25$ ,  $s_3 = 24/49$ , prikazan je na slici 1.9.



Slika 1.9: Trokut u racionalnoj trigonometriji<sup>6</sup>

U ovom slučaju za izračunavanje vrijednosti razmaka i kvadrata udaljenosti potrebno je poznavati samo elementarnu aritmetiku i algebru.

**Razmak i koordinate**

Neka je  $l$  pravac s implicitnom jednačbom  $ax + by + c = 0$ . Implicitna jednačba pravca  $l$  nije jedinstvena jer ju možemo pomnožiti s bilo kojim realnim brojem različitim od nule i tako dobiti ekvivalentnu jednačbu. Dakle, pravac je određen omjerom  $a : b : c$  pa ga stoga tako i definiramo.

**Definicija 1.1.3.** Razmak  $s(l_1, l_2)$  između pravaca  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  je broj

$$s(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Iz definicije slijedi da su dva pravca  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  paralelna ako i samo ako vrijedi

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

te okomita ako i samo ako vrijedi

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$$

<sup>6</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

Razmak između ta dva pravca je nepromijenjen ako se pravci transliraju pa možemo pretpostaviti da se pravci sijeku u ishodištu  $O = (0, 0)$  te da imaju jednačbe  $a_1x + b_1y = 0$  i  $a_2x + b_2y = 0$ .

Izračunajmo razmak između ta dva pravca.

Neka točka  $B$  leži na pravcu  $l_1$  gdje  $B = (-b_1, a_1)$  te točka  $C$  na pravcu  $l_2$  ima oblik  $C = (-\lambda b_2, \lambda a_1)$ . Kvadrati udaljenosti trokuta  $ABC$  su onda

$$Q(A, B) = b_1^2 + a_1^2,$$

$$Q(A, C) = \lambda^2(b_2^2 + a_2^2),$$

$$Q(B, C) = (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2.$$

Primjenom Pitagorinog poučka s pravim kutom u vrhu  $C$  dobivamo

$$Q(A, C) + Q(B, C) = Q(A, B).$$

Uvrštavanjem kvadrata udaljenosti u Pitagorin poučak dobivamo

$$\lambda^2(b_2^2 + a_2^2) + (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2 = b_1^2 + a_1^2.$$

Sređivanjem ove jednačbe dobivamo

$$2\lambda(a_1a_2 + b_1b_2 - \lambda(a_2^2 + b_2^2)) = 0.$$

Odakle slijedi da je

$$\lambda = 0 \text{ ili } \lambda = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

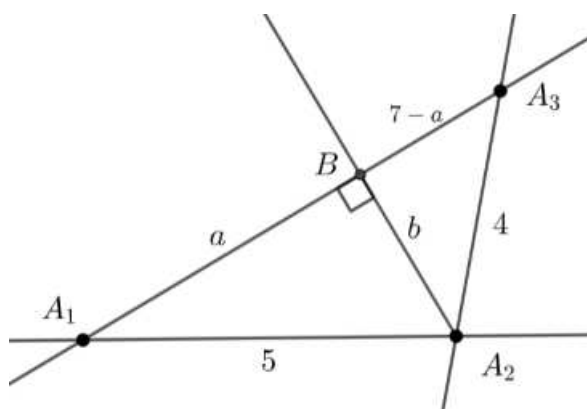
Kada je  $\lambda = 0$ , tada su pravci su okomiti. Uvrštavanjem drugog rješenja za  $\lambda$  u gornji izraz za  $Q(B, C)$  dobivamo

$$Q(B, C) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Stoga je

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B, C)}{Q(A, B)} = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

**Primjer 1.1.4.** Izračunajmo razmak  $s_1$  u trokutu  $\overline{A_1A_2A_3}$  sa stranicama duljine  $d(A_2, A_3) = 4$ ,  $d(A_1, A_3) = 7$ ,  $d(A_1, A_2) = 5$ . Neka točka  $B$  bude ortogonalna projekcija točke  $A_2$  na pravac  $A_1A_3$ , neka je  $a = d(A_1, B)$  i  $b = d(A_2, B)$  kao na slici 1.10.



Slika 1.10: Računanje razmaka.

Promatramo dva pravokutna trokuta  $\overline{A_1A_2B}$  i  $\overline{A_3A_2B}$  i primjenjujući Pitagorin poučak dobivamo

$$a^2 + b^2 = 25$$

i

$$(7 - a)^2 + b^2 = 16.$$

Oduzimanjem jednadžbi i sređivanjem dobivamo  $14a - 49 = 9$ , odnosno

$$a = 58/14 = 29/7.$$

Uvrštavanjem rezultata za  $a$  u jednu od jednadžbi dobivamo

$$b^2 = 25 - a^2 = 25 - (29/7)^2 = 384/49.$$

Tada je razmak

$$s_1 = \frac{Q(A_2, B)}{Q(A_1, A_2)} = \frac{384/49}{25} = \frac{384}{1225}.$$

## 1.2 Teoremi racionalne trigonometrije

Pet glavnih teorema koje ćemo kasnije dokazati su:

1. **Uvjet kolinearnosti:** Tri točke  $A_1, A_2, A_3$  su kolinearne (odnosno leže na jednom pravcu) ako i samo ako vrijedi

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2).$$



2. **Pitagorin poučak:** Pravci  $A_1A_3$  i  $A_2A_3$  su okomiti ako i samo ako je

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

3. **Teorem o razmaku:** Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$ . Tada za kvadrate udaljenosti različite od nule vrijedi da je

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

4. **Teorem o dualnom razmaku:** Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$ . Tada definiramo dualni razmak  $c_3 = 1 - s_3$  za kojeg vrijedi

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

5. **Formula tri razmaka:** Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  za kojeg vrijedi da je

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3.$$

Naravno, postoje mnogo alternativnih formulacija ovih teorema, kao i generalizacija kvadrata udaljenosti i razmaka.

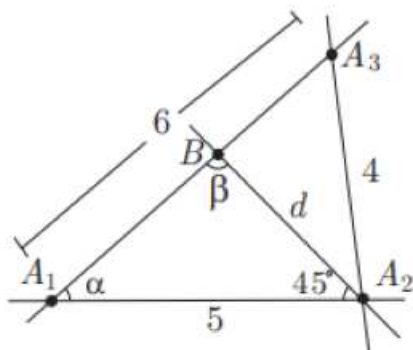
### 1.3 Različiti pristupi

U slijedećem primjeru ćemo prikazati kako računamo duljinu stranice pravokutnog trokuta najprije koristeći klasični trigonometrijski pristup, a zatim pristup racionalne trigonometrije.

**Primjer 1.3.1.** Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s duljinama stranica  $d(A_1, A_2) = 5$ ,  $d(A_2, A_3) = 4$ ,  $d(A_3, A_1) = 6$ . Dana je točka  $B$  na pravcu  $A_1A_3$  s kutom od  $45^\circ$  između pravaca  $A_1A_2$  i  $A_2B$ . Kolika je duljina  $d$  stranice  $\overline{A_2B}$ ?

**Pristup klasične trigonometrije:**

Neka kutovi kod vrhova  $A_1$  i  $B$  budu  $\alpha$  i  $\beta$  kao što je prikazano na slici 1.11.

Slika 1.11: Pristup klasične trigonometrije.<sup>7</sup>

Primjenjujući kosinsov poučak u trokutu  $\overline{A_1A_2A_3}$  dobijemo

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \alpha.$$

Stoga koristeći kalkulator dobijemo da je

$$\alpha = \arccos \frac{3}{4} \approx 41.4096^\circ.$$

Zbroj kutova u trokutu  $\overline{A_1A_2B}$  jednak je  $180^\circ$  pa je

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ - 41.4096^\circ \approx 93.5904^\circ.$$

Poučak o sinusima u trokutu  $\overline{A_1A_2B}$  daje

$$\frac{\sin \alpha}{d} = \frac{\sin \beta}{5}$$

te slijedi

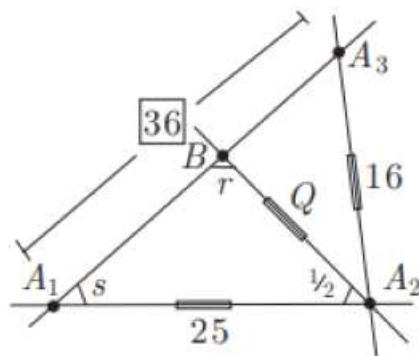
$$d \approx \frac{5 \sin 41.4096^\circ}{\sin 93.5904^\circ} \approx 3.3137.$$

### **Pristup racionalne trigonometrije:**

Odredimo prvo kvadrate udaljenosti svih zadanih stranica, odnosno  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 36$ ,  $Q_3 = 25$  te pripadajući razmak za kut od  $45^\circ$  koji je jednak  $1/2$ . Neka  $s$  bude razmak

<sup>7</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

između pravaca  $A_1A_2$  i  $A_1A_3$ , a  $r$  razmak između pravaca  $BA_1$  i  $BA_2$ , također, neka je  $Q = Q(A_2, B)$  što vidimo na slici 1.12.



Slika 1.12: Pristup racionalne trigonometrije.<sup>8</sup>

Koristimo teorem o dualnom razmaku u trokutu  $\overline{A_1A_2A_3}$  da bismo dobili

$$(25 + 36 - 16)^2 = 4 \cdot 25 \cdot 36 \cdot (1 - s)$$

pa je  $s = 7/16$ .

Koristimo formulu za razmak u trokutu  $\overline{A_1A_2B}$  da bismo dobili

$$\left(\frac{7}{16} + \frac{1}{2} + r\right)^2 = 2\left(\frac{49}{256} + \frac{1}{4} + r^2\right) + 4 \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot r$$

te pojednostavljeno

$$r^2 - r + \frac{1}{256} = 0.$$

Rješenje jednadžbe je  $r = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{16} \sqrt{7}$ .

Za svaki  $r$ , koristeći teorem o razmaku u trokutu  $\overline{A_1A_2B}$ , dobijemo

$$\frac{r}{25} = \frac{s}{Q}$$

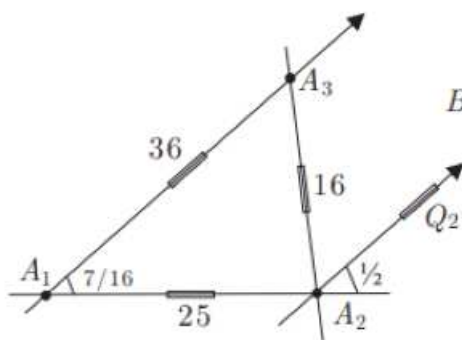
pa uvrštavajući vrijednosti da izračunamo kvadrat udaljenosti i pripadnu duljinu dobijemo

$$Q_1 = 1400 - 525 \sqrt{7} \rightarrow d_1 = \sqrt{Q_1} \approx 3.3137\dots,$$

<sup>8</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

$$Q_2 = 1400 + 525\sqrt{7} \rightarrow d_2 = \sqrt{Q_2} \approx 264.056\dots$$

Dobili smo dva rješenja i očito je točan odgovor  $d_1$  jer početna pretpostavka opisuje dvije moguće situacije, a druga je ta da pravac  $A_2B$  ima razmak  $1/2$  sa  $A_1A_2$  kao na slici 1.13.



Slika 1.13: Drugi slučaj.<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

## Poglavlje 2

# Osnovni pojmovi

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 1.2, 1.3, 1.4 knjige [4].

U ovom poglavlju ćemo objasniti osnovne pojmove vezane za racionalnu trigonometriju koji će nam koristiti za razumijevanje koncepata razmaka i kvadrata udaljenosti.

### 2.1 Polje

**Definicija 2.1.1.** Za neprazan skup  $F$  kažemo da je polje i označavamo s  $(F, +, \cdot)$  ako su na njemu zadane operacije zbrajanja  $+$  :  $F \times F \rightarrow F$  i množenja  $\cdot$  :  $F \times F \rightarrow F$  za koje vrijede sljedeća svojstva:

- $(F, +)$  je komutativna (Abelova) grupa, s neutralnim elementom 0,
- $(F, \cdot)$  je polugrupa, tj. množenje je asocijativno,
- vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju, odnosno

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ za sve } x, y, z \in F,$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \text{ za sve } x, y, z \in F,$$

- svaki nenul element iz  $F$  je invertibilan.<sup>1</sup>

U ovom radu ćemo imati polje racionalnih brojeva, realnih brojeva, kompleksnih brojeva i polje klasa ostatka modulo  $p$  kada je  $p$  prost broj.

---

<sup>1</sup>Definicija je preuzeta iz skripte [1]

### Polje $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Skup  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{p-1}\}$  je prsten uz operacije zbrajanja i množenja modulo  $p$ . Prsten  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  je polje ako i samo ako je  $p$  prost broj.

Pokažimo na primjeru kako su definirane operacije u polju  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .

**Primjer 2.1.2.** Računanje u polju  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \bar{3} + \bar{5} &= \bar{8} = \bar{1}, \\ \bar{3} \cdot \bar{6} &= \bar{18} = \bar{4}, \\ \frac{\bar{34}}{\bar{53}} + \frac{\bar{19}}{\bar{17}} &= \frac{\bar{6}}{\bar{4}} + \frac{\bar{5}}{\bar{3}} = \frac{\bar{38}}{\bar{12}} = \frac{\bar{3}}{\bar{5}} = \bar{2}. \end{aligned}$$

### Kvadrati brojeva

Promatramo proizvoljno polje  $F$ . Izraz 'broj' se koristi za element polja  $F$ . Broj  $a$  u  $F$  je kvadrat broja točno kada je oblika  $a = r^2$  za neki broj  $r$  u  $F$ . Očito su 0 i 1 kvadrati brojeva u svakom polju.

**Primjer 2.1.3.** U polju  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sa  $p$  elemenata, točno je  $(p+1)/2$  različitih kvadrata brojeva.

| $p$        | kvadrati u $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$   |
|------------|---|
| $\bar{3}$  | $\bar{0}, \bar{1}$  |
| $\bar{5}$  | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}$   |
| $\bar{7}$  | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}$  |
| $\bar{11}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{9}$  |
| $\bar{13}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{12}$                             |
| $\bar{17}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{13}, \bar{15}, \bar{16}$          |
| $\bar{19}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{16}, \bar{17}$ |

U polju  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , ako je  $p$  prost i oblika  $p = 4l + 1$ , tada je  $-1$  kvadrat. Ako je oblika  $p = 4l + 3$ , onda broj  $-1$  nije kvadrat.

Za broj  $s$  u polju  $F$  kažemo da je kvazi-korijen onda kada je  $s(s - 1)$  kvadrat. Očito su 0 i 1 kvazi-korijeni u bilo kojem polju.

U primjeru ispod dajemo popis brojeva s tim svojstvom.

**Primjer 2.1.4.** U polju  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sa  $p$  elemenata točno je  $(p + 1)/2$  ili  $(p + 3)/2$  različitih kvazi-korijena ovisno o  $p$ .

| $p$        | kvazi-korijen u $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$   |
|------------|--|
| $\bar{3}$  | $\bar{0}, \bar{1}$   |
| $\bar{5}$  | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}$  |
| $\bar{7}$  | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$  |
| $\bar{11}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{10}$   |
| $\bar{13}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}$   |
| $\bar{17}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{16}$                     |
| $\bar{19}$ | $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{16}, \bar{18}$ |

## 2.2 Fibonaccijev i Cauchyjev identitet

Izdvojimo neke identitete koji će nam kasnije trebati.

Binomnim teoremom dan je razvoj  $(x_1 + x_2)^n$  za prirodni broj  $n$  i elemente  $x_1, x_2$  polja koristeći binomni koeficijent

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1}. \quad (2.1)$$

Razvoj tada glasi

$$(x_1 + x_2)^n = x_1^n + \binom{n}{1}x_1^{n-1}x_2 + \dots + \binom{n}{n-1}x_1x_2^{n-1} + x_2^n. \quad (2.2)$$

Fibonaccijev identitet je jednakost

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1x_2 - y_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2). \quad (2.3)$$

Cauchyjev identitet je jednakost

$$\begin{aligned} (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\ = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.3 Linearne jednadžbe

Promotrimo dvije linearne jednadžbe s varijablama  $x$  i  $y$  oblika

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

i

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

gdje je barem jedan od koeficijenata  $a_1, b_1$  odnosno  $a_2, b_2$  različit od nule. Jedinstveno rješenje  $(x, y)$  postoji onda kada je

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

U ovom slučaju je

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

S druge strane, pretpostavimo da je  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  tako da vrijedi  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ . Tada ako je  $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$  imamo više rješenja, no ako je  $a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$  nema rješenja.

## 2.4 Kvadratne jednadžbe

Kvadratna jednadžba s nepoznicom  $x$  je jednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gdje su  $a, b, c$  realni brojevi i  $a \neq 0$  te su njena rješenja jednaka

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Normirani oblik kvadratne jednadžbe za neke brojeve  $p$  i  $q$  je

$$(x - p)^2 = q.$$

**Definicija 2.4.1.** Dvije kvadratne jednadžbe  $(x - p_1)^2 = q_1$  i  $(x - p_2)^2 = q_2$  su **kompatibilne** onda kada imaju barem jedno zajedničko rješenje.

**Teorem 2.4.2** (Jednakost kvadratnih jednadžbi). Kvadratne jednadžbe  $(x - p_1)^2 = q_1$  i  $(x - p_2)^2 = q_2$  su kompatibilne ako vrijedi

$$\left( (p_1 - p_2)^2 - (q_1 + q_2) \right)^2 = 4q_1q_2.$$

U tom slučaju, ako je  $p_1 \neq p_2$ , njihovo jedinstveno zajedničko rješenje je

$$x = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2(p_1 - p_2)}.$$



*Dokaz.* Ako je  $p_1 = p_2$ , onda su jednačbe  $(x - p_1)^2 = q_1$  i  $(x - p_2)^2 = q_2$  jednake samo kada je  $q_1 = q_2$ , što je ekvivalentno uvjetu da je  $(q_1^2 + q_2^2) = 4q_1q_2$ .

Pretpostavimo suprotno, odnosno da vrijedi  $p_1 \neq p_2$ . Ako su jednačbe kompatibilne i imaju zajedničko rješenje  $x$ , tada oduzimajući jednačbe dobivamo

$$2(p_1 - p_2)x = p_1^2 - p_2^2 - q_1 + q_2 \text{ tako da je } x = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2(p_1 - p_2)}.$$

$x$  zadovoljava i drugu jednačbu pa kada ga uvrstimo slijedi:

$$\left( \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2(p_1 - p_2)} - p_2 \right)^2 = q_2.$$

Sada sređujući gornju jednačbu dobijemo  $((p_1 - p_2)^2 - (q_1 - q_2))^2 = 4(p_1 - p_2)^2 q_1$ , raspišemo kvadrat razlike pa imamo  $(p_1 - p_2)^4 - 2(p_1 - p_2)^2(q_1 - q_2) + (q_1 - q_2)^2 = 4(p_1 - p_2)^2 q_1$ , stoga slijedi  $(p_1 - p_2)^4 + 2(p_1 - p_2)^2(q_1 + q_2) + (q_1 - q_2)^2 = 0$ .

Kako bismo dobili izraz koji tražimo da iskoristimo kvadrat razlike moramo dodati i oduzeti član  $(q_1 + q_2)$  te slijedi  $((p_1 - p_2)^2 - (q_1 + q_2))^2 = 4q_1q_2$ .  $\square$

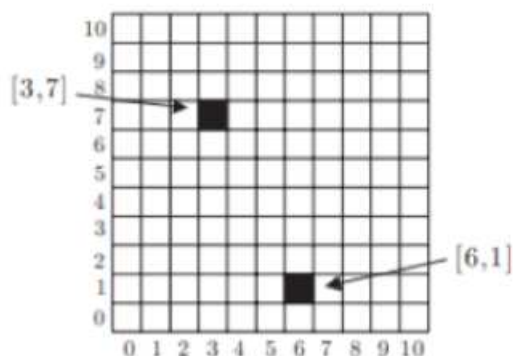
**Primjer 2.4.3.** U polju racionalnih brojeva kvadratne jednačbe  $(x - 4)^2 = 9$  i  $(x - 6)^2 = 1$  su jednake jer vrijedi  $((4 - 6)^2 - (9 + 1))^2 = 36 = 4 \cdot 9 \cdot 1$  te je zajedničko rješenje, zbog toga što je  $4 \neq 6$ , slijedi  $x = \frac{4+6}{2} - \frac{9-1}{2(4-6)} = 7$ .

## 2.5 Točke i pravci

**Definicija 2.5.1.** Kažemo da je točka  $A = (x, y)$  u proizvoljnom polju  $F$  uređeni par brojeva  $x$  i  $y$ , gdje su realni brojevi  $x$  i  $y$  koordinate točke  $A$ .

Pomoću polja  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  prikažimo točke u koordinatnom sustavu kao u sljedećem primjeru.

**Primjer 2.5.2.** Prikaz točke  $(\bar{3}, \bar{7})$  i  $(\bar{6}, \bar{1})$  u polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ .

Slika 2.1: Dvije točke u polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ .<sup>2</sup>

U sljedećoj definiciji ćemo dati malo neuobičajenu definiciju pravca jer će nam upravo takav oblik biti prikladan u nastavku prilikom razvijanja racionalne trigonometrije.

**Definicija 2.5.3.** *Pravac  $l = a : b : c$  je omjer sa svojstvom da barem jedan od  $a$  ili  $b$  nije jednak nuli.*

**Definicija 2.5.4.** *Pravac  $l = a : b : c$  je nul-pravac ako vrijedi  $a^2 + b^2 = 0$ .*

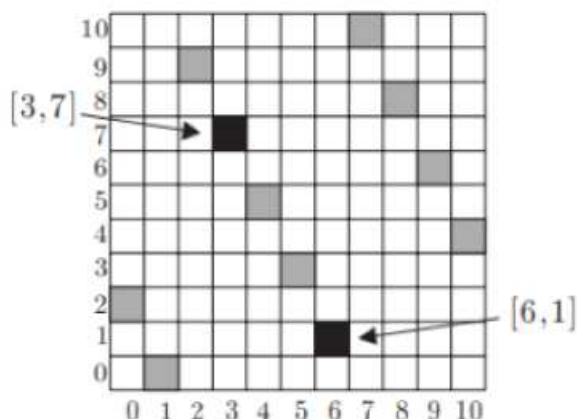
Ako je pravac  $l = a : b : c$  nul-pravac tada  $a$  i  $b$  moraju biti različiti od nule i  $(b/a)^2 = -1$  kako bi  $-1$  bio kvadrat broja.

**Definicija 2.5.5.** *Točka  $A = (x, y)$  leži na pravcu  $l = a : b : c$  ako vrijedi  $ax + by + c = 0$ . Odnosno, pravac  $l$  prolazi točkom  $A$ .*

Kažemo da pravac  $l = a : b : c$  prolazi ishodištem  $O = (0, 0)$ , tj. kažemo da je standardan ili centralan, ako je  $c = 0$ .

**Primjer 2.5.6.** *U polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  je prikazan pravac  $\bar{1}0 : \bar{5} : \bar{1}$  (sivo) koji prolazi kroz točke  $(\bar{3}, \bar{7})$  i  $(\bar{6}, \bar{1})$ .*

<sup>2</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



Slika 2.2: Pravac  $\bar{10} : \bar{5} : \bar{1}$  u  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}^3$

**Definicija 2.5.7.** Za tri ili više točaka koje leže na zajedničkom pravcu kažemo da su kolinearne.

**Teorem 2.5.8** (Kolinearne točke). Točke  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  su kolinearne onda kada vrijedi

$$x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 = 0.$$

*Dokaz.* Ako su sve tri točke identične, onda je identitet očit.

Inače, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ . Iz teorema 2.5.8 imamo da točka  $(x_3, y_3)$  leži na jedinstvenom pravcu koji prolazi kroz  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  ako vrijedi  $(y_1 - y_2)x_3 + (x_2 - x_1)y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$  te odavde slijedi tvrdnja teorema.  $\square$

**Definicija 2.5.9.** Trokut  $\overline{A_1A_2A_3} = \{A_1, A_2, A_3\}$  je skup koji se sastoji od tri nekolinearne točke  $A_1, A_2, A_3$ .

**Primjer 2.5.10.** U polju  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$  točke  $A_1 = (\bar{2}, \bar{8}), A_2 = (\bar{9}, \bar{9}), A_3 = (\bar{10}, \bar{0})$  tvore trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s pravcima na kojima leže stranice

$$l_1 = A_2A_3 = \bar{9} : \bar{1} : \bar{1},$$

$$l_2 = A_1A_3 = \bar{9} : \bar{9} : \bar{1},$$

$$l_3 = A_1A_2 = \bar{7} : \bar{3} : \bar{1}.$$

**Definicija 2.5.11.** Četverokut  $\overline{A_1A_2A_3A_4}$  je skup od četiri različite točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne.

<sup>3</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

**Teorem 2.5.12** (Pravac kroz dvije točke). *Za bilo koje dvije različite točke  $A_1$  i  $A_2$  postoji jedinstveni pravac  $l = A_1A_2$  koji prolazi kroz obje točke. Neka su  $A_1 = (x_1, y_1)$  i  $A_2 = (x_2, y_2)$  dvije različite točke, tada je*

$$l = A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1.$$

*Dokaz.* Ako su  $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$  različite točke, onda pravac  $l = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$  prolazi kroz obje jer vrijedi

$$(y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0,$$

$$(y_1 - y_2)x_2 + (x_2 - x_1)y_2 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Obratno, ako je  $m = a : b : c$  pravac koji prolazi kroz točke  $A_1$  i  $A_2$ , tada imamo

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0.$$

Oduzmemo te dvije jednadžbe kako bismo dobili izraz  $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$  pa je  $a : b = y_1 - y_2 : x_2 - x_1$ . Stoga je  $m = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : d$  za neki broj  $d$  i kako točka  $A_1$  leži na pravcu  $m$ , imamo  $(y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + d = 0$ .

Zaključujemo da je  $d = x_1y_2 - x_2y_1$  pa  $m = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$ .  $\square$

**Teorem 2.5.13** (Pravci koji se sijeku). *Neka se pravci  $a_1 : b_1 : c_1$  i  $a_2 : b_2 : c_2, a_3 : b_3 : c_3$  sijeku. Tada vrijedi*

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 = 0.$$

*Dokaz.* Ako tri pravca prolaze kroz točku  $(x, y)$ , tada je  $(x, y, 1)$  nenul rješenje homogenog linearnog sustava

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

Stoga imamo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 = 0. \quad \square$$

## 2.6 Paralelni i okomiti pravci

Pravci  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  su paralelni onda i samo onda ako vrijedi  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , odnosno kada je  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ .

**Teorem 2.6.1** (Presjek pravaca). *Neka pravci  $l_1$  i  $l_2$  nisu paralelni. Tada postoji jedinstvena točka  $A = l_1 \cap l_2$  koja leži na oba pravca. Neka su dani pravci  $l_1 = a_2 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ , tada je*

$$A = l_1 \cap l_2 = \left( \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right).$$

*Dokaz.* Točka  $(x, y)$  leži na  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  ako vrijedi  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  i  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Kako pravci  $l_1$  i  $l_2$  nisu paralelni, vrijedi da je  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  pa je jedinstveno rješenje ovog sustava

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

□

Pravci  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  su okomiti onda i samo onda ako vrijedi  $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ , odnosno kada je  $a_1 : b_1 = -b_2 : a_2$ .

**Teorem 2.6.2** (O paralelama). *Za bilo koju točku  $A = (x, y)$  i bilo koji pravac  $l = a : b : c$  postoji jedinstveni pravac  $k$  koji prolazi točkom  $A$  i paralelan je pravcu  $l$ . Pravac  $k$  određen je omjerom  $k = a : b : -ax - by$ .*

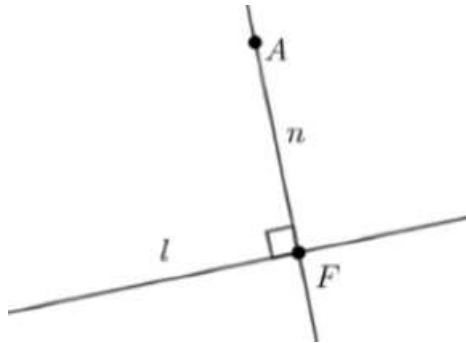
*Dokaz.* Ako je  $l = a : b : c$ , tada je bilo koji pravac  $k$  paralelan s  $l$  oblika  $k = a : b : d$  za neki broj  $d$ . Pravac  $k$  prolazi točkom  $A = (x, y)$  ako i samo ako je  $ax + by + d = 0$ . Takav pravac je jedinstveno određen te ima oblik  $k = a : b : -ax - by$ . □

**Teorem 2.6.3** (O okomici na pravac). *Za bilo koju točku  $A = (x, y)$  i bilo koji pravac  $l = a : b : c$  postoji jedinstveni pravac  $n$  koji prolazi kroz točku  $A$  i okomit je pravcu  $l$ . Pravac  $n$  određen je omjerom  $n = -b : a : -bx - ay$ .*

*Dokaz.* Ako je  $l = a : b : c$ , tada bilo koji pravac  $n$  okomit na  $l$  mora imati oblik  $n = -b : a : d$  za neki broj  $d$  i prolazi točkom  $A = (x, y)$  ako i samo ako je  $-bx + ay + d = 0$ . Takav pravac je jedinstveno određen te ima oblik  $n = -b : a : -bx - ay$ . □

**Teorem 2.6.4** (Sjecište okomice i pravca). *Za bilo koju točku  $A = (x, y)$  i bilo koji pravac  $l = a : b : c$ , okomica  $n$  iz točke  $A$  na pravac  $l$  siječe taj pravac u točki*

$$F = \left( \frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx + a^2y - bc}{a^2 + b^2} \right).$$



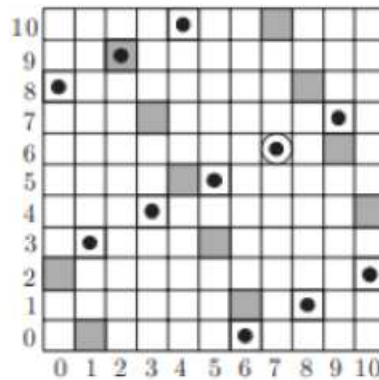
Slika 2.3: Okomica spuštена iz točke A na pravac l.

*Dokaz.* Po teoremu 2.6.3 okomica povučena iz točke  $A = (x, y)$  na pravac  $l = a : b : c$  je  $n = -b : a : bx - ay$ . Ova dva pravca nisu paralelna zbog pretpostavke da je  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Po teoremu 2.6.1 vrijedi

$$F = n \cap l = \left( \frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx + a^2y - bc}{a^2 + b^2} \right).$$

□

**Primjer 2.6.5.** U polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  okomica iz točke  $A = (\bar{7}, \bar{6})$  (krug s točkom) na pravac  $l = \bar{10} : \bar{5} : \bar{1}$  (sivo) je  $n = \bar{9} : \bar{4} : \bar{1}$  (crne točke) i presjek pravca i okomice je  $F = (\bar{2}, \bar{9})$  (sivi kvadrat s točkom).



Slika 2.4: Okomica pravca u polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ .<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

## 2.7 Afine kombinacije

**Definicija 2.7.1.** Za bilo koje točke  $A_1 = (x_1, y_1)$ ,  $A_2 = (x_2, y_2)$  i bilo koja dva broja  $\lambda_1, \lambda_2$  koji zadovoljavaju

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

afina kombinacija  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$  je točka

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2).$$

**Teorem 2.7.2** (Afina kombinacija). Svaka točka koja leži na pravcu  $A_1 A_2$  je jedinstvena afina kombinacija  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$  za neke brojeve  $\lambda_1, \lambda_2$  takve da je  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Obratno, bilo koja afina kombinacija ovog oblika leži na pravcu  $A_1 A_2$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da su točke  $A_1 = (x_1, y_1)$  i  $A_2 = (x_2, y_2)$  različite i da vrijedi  $A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$  za neke brojeve  $\lambda_1, \lambda_2$  koji zadovoljavaju  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Tada identitet

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (x_1 - x_2)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 &= \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)(x_2 y_1 - x_1 y_2) \end{aligned}$$

zajedno s teoremom 2.5.12 pokazuje da  $A_3$  leži na  $A_1 A_2$ .

Obratno, pretpostavimo da točka  $A = (x, y)$  leži na pravcu  $A_1 A_2$  tako da vrijedi

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Kako su točke  $A_1$  i  $A_2$  različite, jedna od zagrada  $(x_2 - x_1)$  i  $(y_2 - y_1)$  je različita od nule.

Bez smanjena općenitosti, pretpostavimo da je  $x_2 - x_1 \neq 0$ .

Tada je  $\lambda = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$  tako da vrijedi  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ . Uvrstimo ovu vrijednost u prethodnu jednakost te dobijemo  $(y - \lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2)(x_2 - x_1) = 0$ .

Stoga je  $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$  pa je točka  $A$  jednaka  $A = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$ .

Provjerimo jedinstvenost.

Ako je  $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 = \mu A_1 + (1 - \mu)A_2$  za neke brojeve  $\lambda$  i  $\mu$ , tada je razlika koordinata na lijevoj i desnoj strani

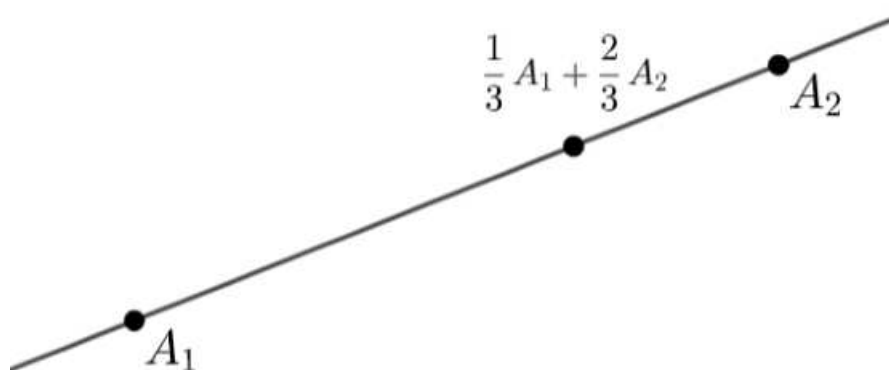
$$(\lambda - \mu)(x_1 - x_2) = 0,$$

$$(\lambda - \mu)(y_1 - y_2) = 0.$$

Po pretpostavci je  $A_1 \neq A_2$  pa možemo zaključiti da vrijedi  $\lambda = \mu$ . □

**Primjer 2.7.3.** Slika 2.5 prikazuje afinu kombinaciju  $(1/3)A_1 + (2/3)A_2$  za dvije točke  $A_1, A_2$  u polju racionalnih brojeva ili u polju realnih brojeva.

<sup>4</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



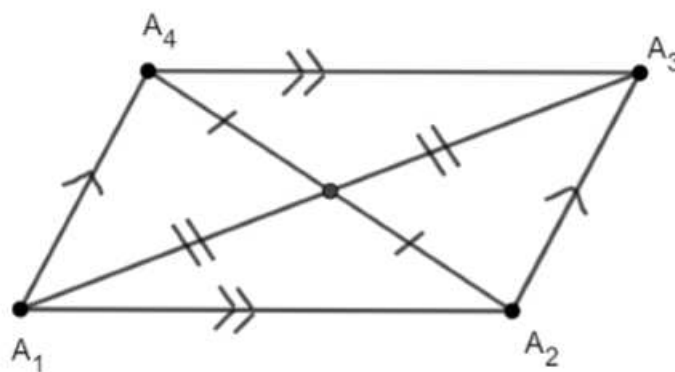
Slika 2.5: Afina kombinacija.

**Definicija 2.7.4.** Za različite točke  $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ , točka

$$M = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

je polovište dužine  $\overline{A_1A_2}$ .

**Teorem 2.7.5** (Središte paralelograma). Ako je  $\overline{A_1A_2A_3A_4}$  paralelogram, tada se njegove dijagonale raspolavljaju.



Slika 2.6: Središte paralelograma.<sup>5</sup>

*Dokaz.* Neka su  $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3), A_4 = (x_4, y_4)$  vrhovi paralelograma. Tada su pravci

$$\overline{A_1A_2} = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1,$$



$$A_3A_4 = y_3 - y_4 : x_4 - x_3 : x_3y_4 - x_4y_3$$

paralelni te iz toga slijedi  $(y_1 - y_2)(x_4 - x_3) - (y_3 - y_4)(x_2 - x_1) = 0$ .

Slično, kako su  $A_2A_3$  i  $A_1A_4$  paralelni, tada vrijedi  $(y_2 - y_3)(x_1 - x_4) - (y_4 - y_1)(x_3 - x_2) = 0$ .

Raspišemo prethodne dvije jednakosti kao

$$(y_1 - y_2)x_4 + (x_2 - x_1)y_4 - (y_1 - y_2)x_3 - (x_2 - x_1)y_3 = 0,$$

$$(y_3 - y_2)x_4 + (x_2 - x_3)y_4 + (x_3 - x_2)y_1 + (y_2 - y_3)x_1 = 0.$$

Točke  $A_1, A_2, A_3$  nisu kolinearne, stoga po teoremu 2.5.8 imamo

$$\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_2 & x_2 - x_3 \end{vmatrix} = -(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1) \neq 0.$$

Riješimo prethodne dvije jednakosti te dobijemo

$$x_4 = x_1 - x_2 + x_3,$$

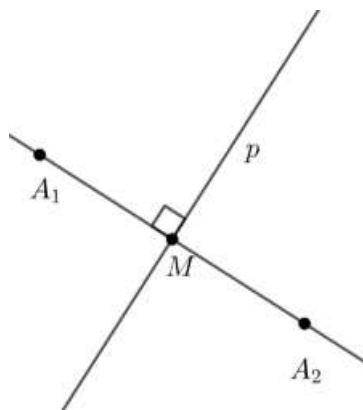
$$y_4 = y_1 - y_2 + y_3,$$

$$\text{pa je } \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_3 = \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4. \quad \square$$

**Definicija 2.7.6** (Simetrala dužine). *Simetrala dužine  $\overline{A_1A_2}$  je okomica povučena iz polovišta  $M$  stranice  $\overline{A_1A_2}$  na pravac  $A_1A_2$ .*

**Teorem 2.7.7** (Simetrala dužine). *Neka su  $A_1 = (x_1, y_1)$  i  $A_2 = (x_2, y_2)$  različite točke. Dužina  $\overline{A_1A_2}$  ima simetralu dužine*

$$p = x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2}.$$



Slika 2.7: Simetrala dužine.

*Dokaz.* Kako je  $A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$ , tada bilo koji pravac okomit na  $A_1A_2$  ima oblik  $p = x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : c$  za neki broj  $c$ . Pravac  $p$  prolazi polovištem

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

dužine  $\overline{A_1A_2}$  onda kada je

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{2} + c = 0.$$

Zbog toga je  $c = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2}$  pa imamo  $p = x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2}$ . □

## Poglavlje 3

# Kvadrat udaljenosti

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 2.5 knjige [4].

Definirali smo kvadrat udaljenosti  $Q(A_1, A_2)$  između točaka  $A_1 = (x_1, y_1)$  i  $A_2 = (x_2, y_2)$  kao broj

$$Q(A_1, A_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

U polju racionalnih brojeva ili u polju realnih brojeva  $Q(A_1, A_2)$  je uvijek nenegativan te je jednak nuli ako vrijedi  $A_1 = A_2$ . Međutim, za ostala polja to ne mora vrijediti.

**Primjer 3.0.1.** U polju kompleksnih brojeva za točke  $A_1 = (0, 0)$  i  $A_2 = (1, i)$  kvadrat udaljenosti je  $Q(A_1, A_2) = 1^2 + i^2 = 0$ .

### 3.1 Pravci i trokut

**Teorem 3.1.1** (Nul-pravac). *Ako su  $A_1$  i  $A_2$  različite točke, tada je  $A_1A_2$  nul-pravac onda kada je  $Q(A_1, A_2) = 0$ .*

*Dokaz.* Ako su  $A_1 = (x_1, y_1)$ ,  $A_2 = (x_2, y_2)$  različite točke, tada zbog teorema 2.5.12 imamo  $A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$ .

Zbog definicije nul-pravca vrijedi  $(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 0$ , a to je upravo uvjet da je  $Q(A_1A_2) = 0$ . □

**Teorem 3.1.2** (Polovište). *Neka  $A_1A_2$  nije nul-pravac. Tada postoji jedinstvena točka  $A$  na tom pravcu koja zadovoljava uvjet*

$$Q(A_1, A) = Q(A, A_2).$$

*Ta točka je polovište*

$$M = (1/2)A_1 + (1/2)A_2$$

dužine  $\overline{A_1A_2}$ .

Nadalje, vrijedi  $Q(A_1, M) = Q(M, A_2) = Q(A_1, A_2)/4$ .

*Dokaz.* Ako su  $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$  različite točke, tada zbog teorema 2.7.2 bilo koja točka na pravcu  $A_1A_2$  ima oblik

$$A = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$$

za neki broj  $\lambda$ .

Uvjet  $Q(A_1, A) = Q(A, A_2)$  tada daje

$$((\lambda - 1)x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 + ((\lambda - 1)y_1 + (1 - \lambda)y_2)^2 = (\lambda x_1 + (-\lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (-\lambda)y_2)^2$$

Sređivanjem prethodne jednakosti dobijemo  $((1 - \lambda)^2 - \lambda^2)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) = 0$ .

Pod pretpostavkom da je  $A_1A_2$  pravac te zbog teorema 3.1.1 vrijedi

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \neq 0$  pa  $(1 - \lambda)^2 - \lambda^2 = 0$ .

Stoga je  $\lambda = 1/2$  i točka  $A$  je polovište stranice  $\overline{A_1A_2}$  i vrijedi

$$M = (1/2)A_1 + (1/2)A_2 = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Tada je

$$Q(A_1, M) = \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{y_1 - y_2}{2} \right)^2 = Q(M, A_2) = Q(A_1, A_2)/4.$$

□

**Teorem 3.1.3** (O paralelogramu). *U paralelogramu  $\overline{A_1A_2A_3A_4}$  za kvadrate udaljenosti suprotnih stranica vrijedi  $Q(A_1, A_2) = Q(A_3, A_4)$  i  $Q(A_1, A_4) = Q(A_2, A_3)$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da su  $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3), A_4 = (x_4, y_4)$  vrhovi paralelograma. Zbog teorema 2.7.5, polovišta stranica  $\overline{A_1A_3}$  i  $\overline{A_2A_4}$  se sijeku tako da vrijedi

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4,$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4.$$

Tada je

$$x_1 - x_2 = x_4 - x_3,$$

$$y_1 - y_2 = y_4 - y_3.$$

No, zbog toga je i

$$\begin{aligned} Q(A_1, A_2) &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \\ &= (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 = Q(A_3, A_4). \end{aligned}$$

□

**Teorem 3.1.4** (Uvjet kolinearnosti). *Neka su  $A_1, A_2, A_3$  točke i neka je  $Q_1 = Q(A_2, A_3)$ ,  $Q_2 = Q(A_1, A_3)$ ,  $Q_3 = Q(A_1, A_2)$ . Tada vrijedi da je*

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)$$

*ako i samo ako su točke  $A_1, A_2, A_3$  kolinearne.*

*Dokaz.* Neka su  $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$ .

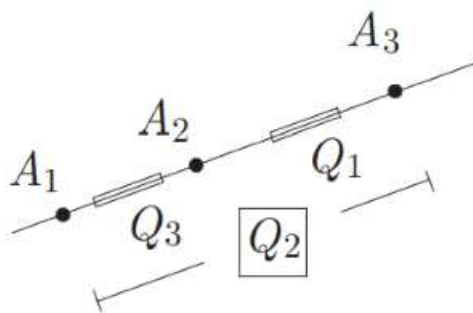
Tada su kvadrati udaljenosti po definiciji

$$Q_1 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2,$$

$$Q_2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2,$$

$$Q_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Na slici 3.1 su prikazane kolinearne točke s pridruženim kvadratima udaljenosti.



Slika 3.1: Kolinarne točke.<sup>1</sup>

Raspišemo ih u obliku

$$Q_1 = a_1^2 + b_1^2,$$

$$Q_2 = a_2^2 + b_2^2,$$

$$Q_3 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2,$$

gdje su  $a_1 = x_3 - x_1, b_1 = y_3 - y_1, a_2 = x_3 - x_2, b_2 = y_3 - y_2$  pa vrijedi

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 2(a_1 a_2 + b_1 b_2).$$

<sup>1</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

Koristimo izraz

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2$$

kojeg raspíšemo kao

$$\begin{aligned} 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 &= 4((a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2)^2) \\ &= 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= 4(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1)^2, \end{aligned}$$

gdje je korišten Fibonaccijev identitet 2.3 u drugom retku. Kako je  $4 \neq 0$ , teorem 2.5.8 govori da je izraz  $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1$  jednak ako i samo ako su točke  $A_1, A_2, A_3$  kolinearne.  $\square$

**Definicija 3.1.5.** Neka je  $F$  polje. Arhimedova funkcija  $A : F^3 \rightarrow F$  za brojeve  $a, b, c$  je definirana kao

$$A(a, b, c) = (a + b + c)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Uočite da je  $A(a, b, c)$  simetrična funkcija.

**Primjer 3.1.6.** Pokažimo da je za realne brojeve 4, 6, 12 funkcija  $A(a, b, c)$  simetrična.

$$A(4, 6, 12) = (4 + 6 + 12)^2 - 2(4^2 + 6^2 + 12^2) = 92,$$

$$A(6, 4, 12) = (6 + 4 + 12)^2 - 2(6^2 + 4^2 + 12^2) = 92,$$

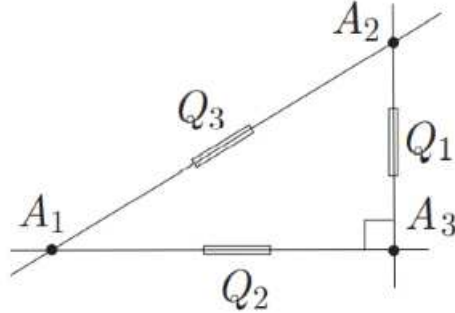
$$A(12, 6, 4) = (12 + 6 + 4)^2 - 2(12^2 + 6^2 + 4^2) = 92.$$

**Teorem 3.1.7** (Pitagorin teorem). Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s kvadratima udaljenosti  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Vrijedi

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

ako i samo ako su pravci  $A_1A_3$  i  $A_2A_3$  okomiti.

*Dokaz.* Neka su  $A_1 = (x_1, y_1)$ ,  $A_2 = (x_2, y_2)$ ,  $A_3 = (x_3, y_3)$ . Tada zbog teorema 2.5.12 imamo  $A_1A_3 = y_1 - y_3 : x_3 - x_1 : x_1y_3 - x_3y_1$  i  $A_2A_3 = y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2$ . Ovi pravci su okomiti ako i samo ako vrijedi  $(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$ .



Slika 3.2: Pravokutan trokut s kvadratima udaljenosti.<sup>2</sup>

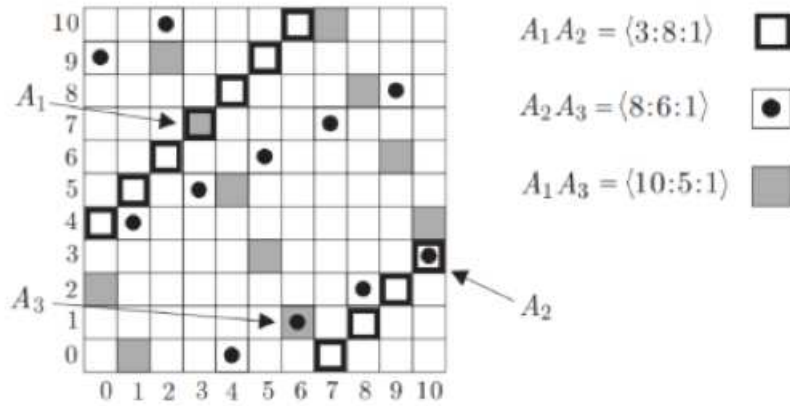
Slijedi

$$\begin{aligned}
 Q_1 + Q_2 - Q_3 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \\
 &\quad - (x_1 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 \\
 &= 2(x_3 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_2x_1 + y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3 + y_3^2) \\
 &= 2((y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2))
 \end{aligned}$$

Kako je  $2 \neq 0$ , tada je desna strana jednakosti jednaka nuli zbog teorema 2.5.8 i pravci  $A_1A_3$  i  $A_2A_3$  su okomiti ako i samo ako je  $Q_1 + Q_2 = Q_3$ . □

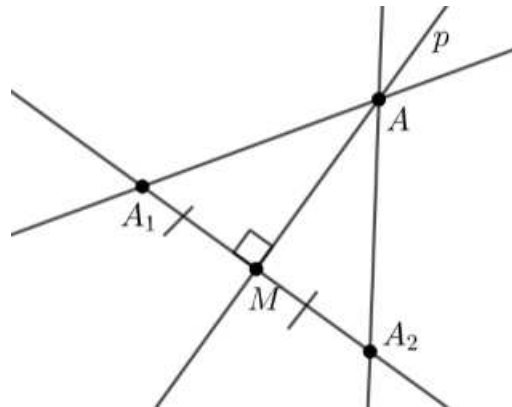
**Primjer 3.1.8.** U polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  dan je pravokutan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$ , gdje su točke  $A_1 = (\bar{3}, \bar{7})$ ,  $A_2 = (\bar{10}, \bar{3})$ ,  $A_3 = (\bar{6}, \bar{1})$  kako je prikazano na slici 3.3 zajedno s pravcima  $A_1A_2 = \bar{3} : \bar{8} : \bar{1}$ ,  $A_1A_3 = \bar{10} : \bar{5} : \bar{1}$ ,  $A_2A_3 = \bar{8} : \bar{6} : \bar{1}$ .

<sup>2</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



Slika 3.3: Pravokutan trokut u  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}^3$

**Teorem 3.1.9** (O simetrali dužine). *Neka je  $p$  simetrala dužine  $\overline{A_1A_2}$ . Tada svaka točka  $A$  koja leži na pravcu  $p$  zadovoljava uvjet  $Q(A, A_1) = Q(A, A_2)$ . Obratno, svaka točka  $A$  koja zadovoljava ovu jednakost leži na pravcu  $p$ .*



Slika 3.4: Simetrala dužine.

*Dokaz.* Pretpostavimo da se točka  $A$  nalazi na pravcu  $p$ . Ako je  $p = A_1A_2$ , tada je  $A_1A_2$  nul-pravac pa po teoremu 3.1.1 imamo  $Q(A, A_1) = Q(A, A_2) = 0$ . Ako je  $p \neq A_1A_2$ , tada je  $A_1A_2$  pravac. U ovom slučaju, ako  $A$  leži na  $A_1A_2$ , tada je  $A$

<sup>3</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



polovište dužine  $\overline{A_1A_2}$  pa po teoremu 3.1.2 imamo  $Q(A, A_1) = Q(A, A_2)$ .

U suprotnome, ako  $A$  ne leži na  $A_1A_2$ , tada vrijedi da trokuti  $\overline{AMA_1}$  i  $\overline{AMA_2}$  imaju pravi kut u polovištu  $M$  od  $A_1A_2$  pa iz Pitagorinog teorema slijedi

$$Q(A, A_1) = Q(A, M) + Q(M, A_1),$$

$$Q(A, A_2) = Q(A, M) + Q(M, A_2).$$

Zbog teorema 3.1.2 imamo  $Q(M, A_1) = Q(M, A_2)$ , stoga je  $Q(A, A_1) = Q(A, A_2)$ .

Obratno, pretpostavimo da je točka  $A$  sa svojstvom  $Q(A, A_1) = Q(A, A_2) = Q$ .

Ako je  $Q(A_1, A_2) = 0$ , tada zbog teorema 3.1.1 pravac  $A_1A_2$  je nul-pravac jer su točke  $A, A_1, A_2$  kolinearne pa točka  $A$  leži na pravcu  $A_1A_2$ .

U drugom slučaju, gdje vrijedi  $Q(A, A_1) = Q(A, A_2) = Q$  pretpostavimo da je  $Q(A_1, A_2) \neq 0$ , tako da je  $A_1A_2$  pravac. Neka točka  $F$  bude nožište okomice spuštene iz točke  $A$  na pravac  $A_1A_2$ . Po Pitagorinom teoremu vrijedi  $Q(F, A_1) = Q - Q(A, D) = Q(F, A_2)$  pa zbog teorema 3.1.2 točka  $F$  je polovište  $M$  stranice  $A_1A_2$  i  $A$  leži na simetrali  $p$  dužine  $A_1A_2$ .  $\square$

**Teorem 3.1.10** (Kvadrat udaljenosti pravca). Za točku  $A = (x, y)$  i za pravac  $l = a : b : c$ , kvadrat udaljenosti od  $A$  do nožišta  $F$  okomice spuštene iz točke  $A$  na pravac  $l$  je

$$Q(A, F) = \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

*Dokaz.* Iz teorema 2.6.4 slijedi da je nožište okomice spuštene iz točke  $A$  na pravac  $p$  točka

$$F = \left( \frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx + a^2y - bc}{a^2 + b^2} \right).$$

Tada je kvadrat udaljenosti

$$\begin{aligned} Q(A, F) &= \left( \frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2} - x \right)^2 + \left( \frac{-abx + a^2y - bc}{a^2 + b^2} - y \right)^2 \\ &= \frac{a^2(ax + by + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2(ax + by + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} \\ &= \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

$\square$

**Definicija 3.1.11.** Kvadrat udaljenosti  $Q(A, l)$  od točke  $A$  do pravca  $l$  definiramo kao kvadrat udaljenosti od točke  $A$  do nožišta  $F$  okomice spuštene iz točke  $A$  na pravac  $l$ .

## 3.2 Arhimedova formula

**Definicija 3.2.1.** Za tri točke  $A_1, A_2, A_3$  s kvadratima udaljenosti  $Q_1, Q_2, Q_3$ , definiramo broj  $\mathcal{A}$  pridružen skupu  $\{A_1, A_2, A_3\}$  kao

$$\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2).$$

Vrijednost  $\mathcal{A}$  ne ovisi o redosljedu točaka, odnosno  $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = A(Q_1, Q_3, Q_2) = A(Q_2, Q_1, Q_3) = A(Q_2, Q_3, Q_1) = A(Q_3, Q_2, Q_1) = A(Q_3, Q_1, Q_2)$ .

**Teorem 3.2.2.** Vrijednost  $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3)$  za točke  $A_1 = (x_1, y_1)$ ,  $A_2 = (x_2, y_2)$ ,  $A_3 = (x_3, y_3)$  je

$$\mathcal{A} = 4(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1)^2.$$

Posebno, vrijednost  $\mathcal{A}$  je kvadrat, a  $\overline{A_1A_2A_3}$  je trokut onda kada je  $\mathcal{A}$  različit od nule.

*Dokaz.* Formula za  $\mathcal{A}$  je izvedena u dokazu teorema 3.1.4 i pokazuje da je  $\mathcal{A}$  kvadrat. Vrijedi  $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)$ . Po teoremu 2.5.8 imamo  $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 \neq 0$  onda kada su točke  $A_1, A_2, A_3$  nekolinearne, odnosno kada tvore trokut. Kako je  $4 \neq 0$  i izraz  $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 \neq 0$ , zaključujemo da je  $\mathcal{A} \neq 0$ .  $\square$

**Primjer 3.2.3.** Prethodni teorem pokazuje da ne postoji niti jedan trokut u polju racionalnih brojeva čiji su kvadrati udaljenosti  $Q_1 = 16$ ,  $Q_2 = 36$ ,  $Q_3 = 9$  jer u polju racionalnih brojeva broj  $\mathcal{A} = 455$  nije kvadrat nekog broja.

**Teorem 3.2.4.** Neka trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  ima kvadrate udaljenosti  $Q_1, Q_2, Q_3$  i pravi kut kod vrha  $A_3$ . Tada vrijedi

$$\mathcal{A} = 4Q_1Q_2.$$

*Dokaz.* Koristimo formulu  $\mathcal{A} = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2$  zajedno s Pitagorinim teoremom 3.1.7 s pravim kutom u vrhu  $A$ , odnosno  $Q_1 + Q_2 = Q_3$  te dobijemo  $\mathcal{A} = 4Q_1Q_2$ .  $\square$

**Teorem 3.2.5.** Neka su dane točke  $A_1, A_2, A_3$  i kvadrati udaljenosti  $Q_1 = Q(A_2, A_3)$ ,  $Q_2 = Q(A_1, A_3)$ ,  $Q_3 = Q(A_1, A_2)$  koji nisu svi jednaki nuli i svaki od njih je zbroj dva kvadrata. Tada postoji trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s ovim kvadratima udaljenosti ako i samo ako je  $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3)$  kvadrat različit od nule.

*Dokaz.* Ako takav trokut postoji, onda po teoremu 3.2.2 imamo da je  $A(Q_1, Q_2, Q_3)$  kvadrat različit od nule.

Obratno, pretpostavimo da postoji  $r \neq 0$  takav da vrijedi

$$A(Q_1, Q_2, Q_3) = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = r^2$$

Tada biramo  $A_3 = (0, 0)$  i  $A_1 = (a_1, b_1)$  takve da  $a_1^2 + b_1^2 = Q_2 \neq 0$ .

Definiramo

$$R = Q_1 + Q_2 - Q_3$$

i

$$a = \frac{a_1 R - b_1 r}{2Q_2}, b = \frac{b_1 R + a_1 r}{2Q_2}.$$

Provjerimo da  $A_2 = (a_2, b_2)$  zadovoljava oba uvjeta  $Q(A_2, A_2) = Q_1$  i  $Q(A_2, A_1) = Q_3$ .  $\square$

**Primjer 3.2.6.** U polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  broj  $\mathcal{A} = 4\bar{5}5 = \bar{4}$  je kvadrat i svaki broj je zbroj dva kvadrata pa zbog teorema 3.2.5 postoji trokut s kvadratima udaljenosti

$$Q_1 = \bar{1}6 = \bar{5},$$

$$Q_2 = \bar{3}6 = \bar{3},$$

$$Q_3 = \bar{9}.$$

Razmaci pravaca na kojima leže stranice trokuta su jednaki

$$s_1 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_2Q_3} = \frac{\bar{4}}{4 \cdot \bar{3} \cdot \bar{9}} = \bar{9},$$

$$s_2 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_3} = \frac{\bar{4}}{4 \cdot \bar{5} \cdot \bar{9}} = \bar{1},$$

$$s_3 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_2} = \frac{\bar{4}}{4 \cdot \bar{5} \cdot \bar{3}} = \bar{3}.$$

Sljedeći teorem generalizira Heronovu formulu iz Euklidske geometrije.

**Teorem 3.2.7** (Arhimedova formula). Neka je trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s kvadratima udaljenosti oblika  $Q_1 = d_1^2$ ,  $Q_2 = d_2^2$ ,  $Q_3 = d_3^2$  za neke brojeve  $d_1, d_2, d_3$ . Tada je

$$\mathcal{A} = (d_1 + d_2 + d_3)(d_1 + d_2 - d_3)(d_2 + d_3 - d_1)(d_3 + d_1 - d_2).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 \\ &= 4d_1^2d_2^2 - (d_1^2 + d_2^2 - d_3^2)^2 \\ &= (2d_1d_2 - (d_1^2 + d_2^2 - d_3^2))(2d_1d_2 + (d_1^2 + d_2^2 - d_3^2)) \\ &= (d_3^2 - (d_1 - d_2)^2)((d_1 + d_2)^2 - d_3^2) \\ &= (d_3 - d_1 + d_2)(d_3 + d_1 - d_2)(d_1 + d_2 - d_3)(d_1 + d_2 + d_3). \end{aligned}$$

$\square$

**Definicija 3.2.8.** Definiramo funkciju  $Q : F^4 \rightarrow F$  za neke brojeve  $a, b, c, d$  kao

$$Q(a, b, c, d) = ((a + b + c + d)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^2 - 64abcd.$$

**Primjer 3.2.9.** Izračunajmo vrijednost funkcije  $Q(a, b, c, d)$  za brojeve 3, 5, 7, 13.

Imamo  $Q(3, 5, 7, 13) = ((3 + 5 + 7 + 13)^2 - 2(3^2 + 5^2 + 7^2 + 13^2))^2 - 64 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = -8960$ .

**Teorem 3.2.10.** Neka su dani brojevi  $a, b, c, d, c$  takvi da je  $A(a, b, x) = 0 = A(c, d, x) = 0$ . Tada je  $Q(a, b, c, d) = 0$ .

Ako je  $a + b \neq c + d$ , tada je

$$x = \frac{(a - b)^2 - (c - d)^2}{2(a + b - c - d)}.$$

*Dokaz.* Ako vrijedi  $A(a, b, x) = 0$  i  $A(c, d, x) = 0$ , onda imamo

$$(x - a - b)^2 = 4ab,$$

$$(x - c - d)^2 = 4cd.$$

Tada po teoremu 2.4.2  $a, b, c, d$  zadovoljavaju uvjet

$$((a + b - c - d)^2 - 4(ab + cd))^2 = 64abcd$$

ili zapisano drugačije  $((a + b + c + d)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^2 = 64abcd$ .

Po istom teoremu, ako su  $a + b \neq c + s$ , onda je

$$x = \frac{(a + b) + (c + d)}{2} - \frac{4ab - 4cd}{2(a + b - c - d)} = \frac{(a - b)^2 - (c - d)^2}{2(a + b - c - d)}.$$

□

**Teorem 3.2.11.** Neka su  $A_1, A_2, A_3, A_4$  kolinearne točke te neka su njihovi kvadrati udaljenosti označeni s  $Q_{ij} = Q(A_i, A_j)$  za sve  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Tada

$$Q(Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{14}) = 0.$$

Nadalje, vrijede jednakosti

$$Q_{13} = \frac{(Q_{12} - Q_{23})^2 - (Q_{34} - Q_{14})^2}{2(Q_{12} + Q_{23} - Q_{34} - Q_{14})}$$

i

$$Q_{24} = \frac{(Q_{23} - Q_{34})^2 - (Q_{12} - Q_{14})^2}{2(Q_{23} + Q_{34} - Q_{12} - Q_{14})}$$

ako su nazivnici s desnih strana jednakosti različiti od nule.

*Dokaz.* Ako su  $A_1, A_2, A_3, A_4$  kolinearne točke, tada vrijedi  $Q(Q_{12}, Q_{23}, Q_{13}) = 0$  i  $Q(Q_{14}, Q_{13}, Q_{34}) = 0$  kolinearni. Primjenjujući prethodni teorem vidimo da vrijedi  $Q(Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{14}) = 0$  i formula za  $Q_{13}$ . Formula za  $Q_{24}$  se može dokazati analogno formuli za  $Q_{13}$ . □

# Poglavlje 4

## Razmak

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 2.6 knjige [4].

Definirali smo razmak između nenul pravaca  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  kao broj

$$s(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Ako je jedan ili oba od  $l_1, l_2$  nul-pravac, tada je razmak  $s(l_1, l_2)$  nedefiniran i bilo koji izraz koji uključuje njega ne možemo definirati. Razmak je dobro definiran i ostaje nepromijenjen ako se koeficijenti pomnože s bilo kojim brojem različitim od nule.

Također, vrijedi  $s(l_1, l_2) = s(l_2, l_1)$  i  $s(l_1, l_2) = 0$  točno kada su pravci  $l_1, l_2$  paralelni. Razmak je nepromijenjen ako se  $l_1$  zamijeni s njemu transliranim pravcem.

### 4.1 Dualni razmak i zakret

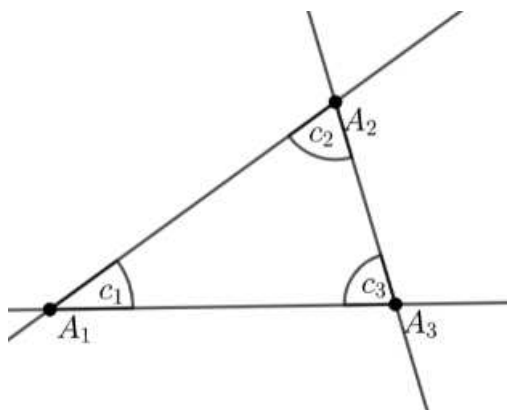
**Definicija 4.1.1.** *Dualni razmak  $c(l_1, l_2)$  između pravaca  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  definiramo kao broj*

$$c(l_1, l_2) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Dualni razmak koji uključuje nul-pravac nije definiran. Također, vrijedi  $c(l_1, l_2) = c(l_2, l_1)$  i  $c(l_1, l_2) = 0$  onda kada su pravci  $l_1$  i  $l_2$  okomiti. Svojstvo da je  $c(l_1, l_2) = 0$  za okomite pravce  $l_1$  i  $l_2$  možemo usporediti sa svojstvom da je skalarni produkt jednak nuli onda kada su vektori okomiti. Dualni razmak je nepromijenjen ako se bilo koji pravac zamijeni njemu transliranim pravcem.

Kod trokuta sa stranicama koje leže na pravcima  $l_1, l_2, l_3$  ćemo koristiti isto pravilo za označavanje kao kod razmaka, tj. s  $c_1$  ćemo označiti dualni razmak pravaca  $l_1$  i  $l_3$  i tako

dalje. Na slici 4.1 kod polja racionalnih brojeva ili polja realnih brojeva dualni razmaci između pravaca koji se sijeku biti će upisani unutar trokuta.

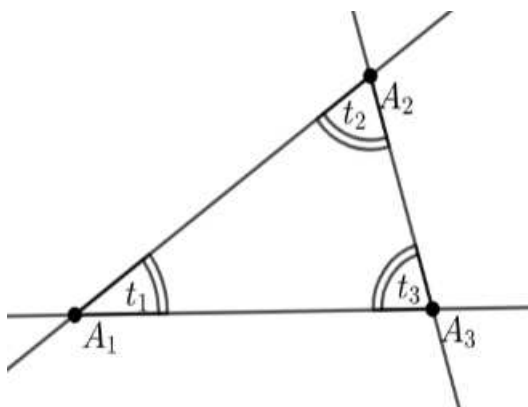


Slika 4.1: Dualni razmaci trokuta.

**Definicija 4.1.2.** Zakret  $t(l_1, l_2)$  između neokomitih pravaca  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  je broj

$$t(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}.$$

Na slici 4.2 su prikazane oznake zakreta trokuta.



Slika 4.2: Zakret trokuta.

Zakret nije definiran ako su pravci  $l_1$  i  $l_2$  okomiti jer tada imamo  $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ . Zakret je uvijek kvadrat broja. Također, vrijedi  $t(l_1, l_2) = t(l_2, l_1)$  i  $t(l_1, l_2) = 0$  onda kada su pravci  $l_1, l_2$  paralelni. Svojstvo da je  $t(l_1, l_2) = 0$  za paralelne pravce  $l_1$  i  $l_2$  možemo usporediti

sa svojstvom da je vektorski produkt kolinearnih vektora jednak nuli. Ako pravci nisu paralelni, tada imamo

$$t(l_1, l_2) = \frac{s(l_1, l_2)}{c(l_1, l_2)}.$$

Uočimo, ako je jedan od pravaca ili oba  $l_1$  i  $l_2$  nul-pravac, tada je zakret definiran iako niti razmak niti dualni razmak nisu definirani.

**Primjer 4.1.3.** *Neka su dani pravci  $l_1 = 3 : 5 : 2$ ,  $l_2 = 4 : 2 : 1$ . Izračunajmo dualni razmak i zakret.*

*Dobijemo da je dualni razmak*

$$c(l_1, l_2) = \frac{(3 \cdot 4 + 5 \cdot 2)^2}{(3^2 + 5^2)(4^2 + 2^2)} = \frac{242}{345},$$

*a zakret*

$$t(l_1, l_2) = \frac{(3 \cdot 2 - 4 \cdot 3)^2}{(3 \cdot 4 + 5 \cdot 2)^2} = \frac{9}{121}.$$

**Teorem 4.1.4** (O sumi razmaka i dualnog razmaka). *Za pravce  $l_1$  i  $l_2$ , neka  $s$  i  $c$  budu razmak i dualni razmak između njih. Tada vrijedi*

$$s + c = 1.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da su dani pravci  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ . Iskoristimo Fibonaccijev identitet 2.3 te dobijemo

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Podijelimo jednakost s  $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$  te iskoristimo definiciju za razmak i dualni razmak kako bismo dobili izraz  $s + c = 1$ .  $\square$

U polju racionalnih brojeva i u polju realnih brojeva ovaj teorem govori da su razmak i dualni razmak uvijek vrijednosti između 0 i 1 jer su oba uvijek pozitivna.

**Teorem 4.1.5** (O kvazi-korijenu). *Za pravce  $l_1$  i  $l_2$  razmak  $s = s(l_1, l_2)$  je jednak nekom kvazi-korijenu. Obratno, svaki kvazi-korijen je dobiven kao razmak između neka dva pravca.*

*Dokaz.* Neka su  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  pa po definiciji za razmak  $s = s(l_1, l_2)$  i dualni razmak  $c = c(l_1, l_2)$ , koristeći teorem 4.1.4 dobijemo da vrijedi

$$s(1 - s) = sc = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \left( \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1^2 + b_1^2)}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \right)^2.$$

Kako je ovo kvadrat broja,  $s$  je kvazi-korijen.

Obratno, pretpostavimo da je  $s$  kvazi-korijen tako da vrijedi  $s(1 - s) = r^2$  za neki broj  $r$ .

Ako je  $s = 1$ , tada je razmak između pravaca  $0 : 1 : 0$  i  $1 : 0 : 0$  jednak nuli.

Inače, promotrimo pravce  $l_1 = 0 : 1 : 0$  i  $l_2 = r : 1 - s : 0$ . Razmak između njih po definiciji je

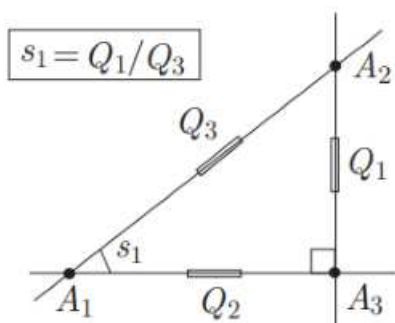
$$s(l_1, l_2) = \frac{r^2}{1 \cdot (r^2 + (1 - s)^2)} = \frac{s(1 - s)}{1 - s} = s.$$

□

## 4.2 Omjeri

**Teorem 4.2.1.** Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s pravim kutom kod vrha  $A_3$  i neka su dani pripradni kvadrati udaljenosti  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Tada je razmak pravaca  $A_1A_2$  i  $A_1A_3$  jednak

$$s_1 = s(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{Q_1}{Q_3}.$$



Slika 4.3: Teorem omjer razmaka.<sup>1</sup>

*Dokaz.* Neka su dani vrhovi trokuta  $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$ . Tada imamo

$$A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1,$$

$$A_1A_3 = y_1 - y_3 : x_3 - x_1 : x_1y_3 - x_3y_1,$$

$$A_2A_3 = y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2,$$

tako da je

$$s_1 = \frac{((y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))^2}{((y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2)((y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2)}.$$

<sup>1</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



Kako su  $A_1A_3$  i  $A_2A_3$  okomiti, vrijedi  $(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$ . Sređivanjem izraza dobijemo

$$(y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1) = (y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1).$$

Stoga je brojnik od  $s_1$  jednak

$$\begin{aligned} & ((y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))^2 = \\ & = ((y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1))^2 + ((y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2 \\ & = ((y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2)((y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2) \end{aligned}$$

gdje je iskorišten Fibonaccijev identitet 2.3 u zadnjem koraku. Iskoristimo definiciju za kvadrat udaljenosti te dobijemo da je

$$s_1 = \frac{Q_2 Q_1}{Q_3 Q_2} = Q_1 / Q_3.$$

□

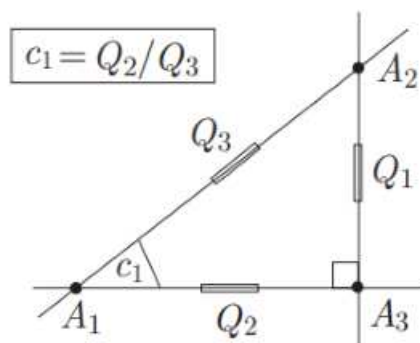
**Teorem 4.2.2.** *Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s pravim kutom kod vrha  $A_3$  i neka su  $Q_1, Q_2, Q_3$  prikladni kvadrati udaljenosti. Tada je dualni razmak pravaca  $A_1A_2$  i  $A_1A_3$  jednak*

$$c_1 = c(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{Q_2}{Q_3}.$$

*Dokaz.* Koristimo teoreme 4.1.4 i 4.2.1 i Pitagorin teorem 3.1.7 kako bismo dobili

$$c_1 = c(A_1A_2, A_1A_3) = 1 - s(A_1A_2, A_1A_3) = 1 - \frac{Q_1}{Q_3} = \frac{Q_2}{Q_3}.$$

□



Slika 4.4: Teorem omjer dualnih razmaka.<sup>2</sup>

**Teorem 4.2.3.** *Neka je dan trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s pravim kutom kod vrha  $A_3$  i neka su  $Q_1, Q_2, Q_3$  pripadni kvadrati udaljenosti. Tada je zakret pravaca  $A_1A_2$  i  $A_1A_3$  jednak*

$$t_1 = t(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

*Dokaz.* Ako je  $Q_3 \neq 0$ , tvrdnja slijedi iz uvjeta  $t_1 = s_1/c_1$  gdje koristimo izraz  $s_1 = Q_1/Q_3$  iz teorema 4.2.1 i izraz  $c_1 = Q_2/Q_3$  iz teorema 4.2.2.

Ako je  $Q_3 = 0$ , tada nisu definirani niti  $s_1$  niti  $c_1$ . U ovom slučaju, Pitagorin teorem 3.1.7 daje  $Q_1 = -Q_2$  te slijedi da je  $t_1 = -1$ . Po teoremu 3.1.1 vrijedi da je  $l_3$  nul-pravac pa je stoga oblika  $1 : i : d$  i za neki broj  $i$  koji zadovoljava  $i^2 = -1$  za neki broj  $d$ .

Pravci  $l_2$  i  $l_3$  nisu okomiti, inače bi vrijedilo da je  $l_1$  paralelan  $l_3$ .

Ako je  $l_2 = a : b : c$ , tada vrijedi  $a + bi \neq 0$  i po definiciji zakreta dobijemo izraz

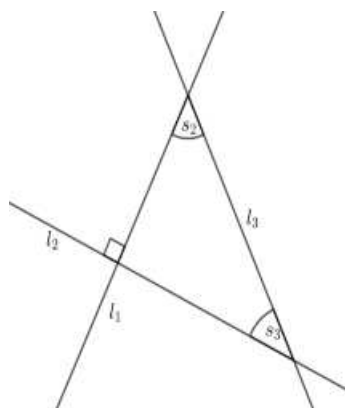
$$t_1 = t(l_2, l_3) = \frac{(ai - b)^2}{(a + bi)^2} = -1.$$

□

**Definicija 4.2.4.** *Kažemo da su dva razmaka  $s_1$  i  $s_2$  komplementarna onda kada vrijedi  $s_1 + s_2 = 1$ .*

### 4.3 Odnosi između pravaca

**Teorem 4.3.1** (Komplementarni razmaci). *Neka su dani okomiti ne-nul pravci  $l_1$  i  $l_2$ . Tada su za bilo koji pravac  $l_3$  razmaci  $s_1 = s(l_2, l_3)$  i  $s_2 = s(l_1, l_3)$  komplementarni.*



Slika 4.5: Komplementarni razmaci.

<sup>2</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

*Dokaz.* Pretpostavimo da su  $l_1$  i  $l_2$  okomiti pravci. Ako je  $l_3$  paralelan bilo kojem od njih, onda je on okomit na drugoga pa su tada  $s_1$  i  $s_2$  jednaki 0 i 1 i stoga su komplementarni. Inače, bilo koja dva pravca će se sijeći te razmak između njih ostaje nepromijenjen kada se pravci zamijene translahiranim pravcima.

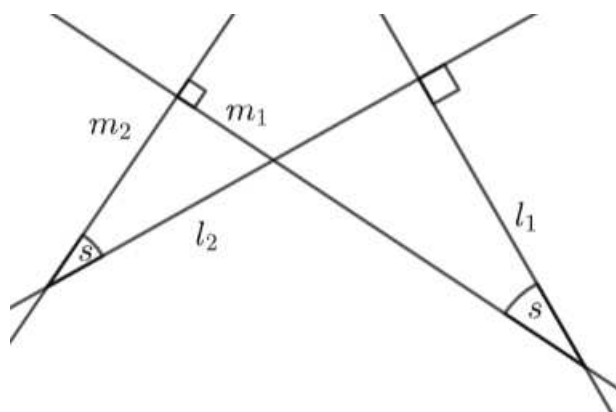
Pretpostavimo da pravci  $l_1, l_2, l_3$  nisu paralelni i da sva tri pravca ne prolaze istom točkom. Neka je  $A_1 = l_2 \cap l_3, A_2 = l_1 \cap l_3, A_3 = l_1 \cap l_2$  i neka su kvadrati udaljenosti od  $A_1 A_2 A_3$  jednaki  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Kako je trokut  $A_1 A_2 A_3$  pravokutan s pravim kutom kod vrha  $A_3$ , po teoremu 4.2.1 imamo  $s_1 = Q_1/Q_3$  i  $s_2 = Q_2/Q_3$ . Stoga vrijedi

$$s_1 + s_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_3} = 1$$

po Pitagorinom teoremu 3.1.7. □

**Teorem 4.3.2.** *Neka su dani okomiti pravci  $l_1, l_2$  te okomiti pravci  $m_1, m_2$ . Tada vrijedi*

$$s(l_1, m_1) = s(l_2, m_2).$$



Slika 4.6: Teorem o razmacima okomitih pravaca.

*Dokaz.* Primjenjujemo teorem 4.3.1 na pravce  $m_1, m_2, l_1$  kako bismo dobili

$$s(l_1, m_1) + s(l_1, m_2) = 1.$$

Primijenimo taj teorem i na pravce  $l_1, l_2, m_2$  kako bismo dobili

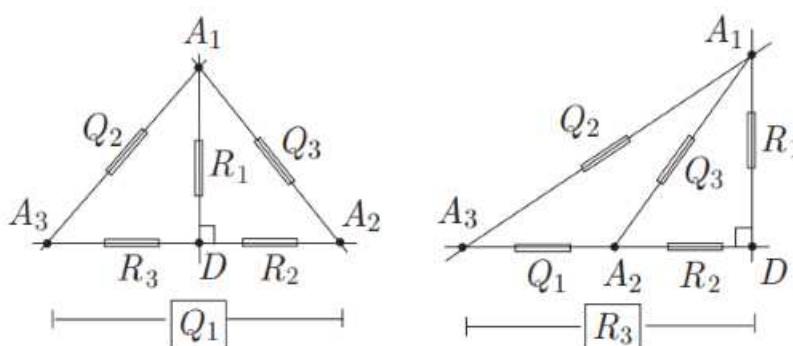
$$s(l_1, m_2) + s(l_2, m_2) = 1.$$

Oduzmemo te dvije jednačbe i zaključimo  $s(l_1, m_1) = s(l_2, m_2)$ . □

### 4.4 Osnovni teoremi o razmaku

**Teorem 4.4.1** (O razmaku). *Neka su dane tri točke  $A_1, A_2, A_3$  i trokut s kvadratima udaljenosti  $Q_1 = Q(A_2, A_3), Q_2 = Q(A_1, A_3), Q_3 = Q(A_1, A_2)$  koji su različiti od nule. Definiramo razmake  $s_1 = s(A_1A_2, A_1A_3), s_2 = s(A_2A_1, A_2A_3), s_3 = s(A_3A_1, A_3A_2)$ . Tada imamo*

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$



Slika 4.7: Teorem o razmaku.<sup>3</sup>

*Dokaz.* Ako su  $A_1, A_2, A_3$  kolinearne točke, tada je  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$  i teorem je dokazan. Inače, tri točke tvore trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  i kvadrati udaljenosti nisu jednaki nuli pa možemo pretpostaviti da je  $D$  nožište okomice iz točke  $A_1$  na pravac  $A_2A_3$ . Definiramo kvadrate udaljenosti  $R_1 = Q(A_1, D), R_2 = Q(A_2, D), R_3 = Q(A_3, D)$ .

Kako su  $\overline{A_1A_2D}$  i  $\overline{A_1A_3D}$  pravokutni trokuti s pravim kutom u vrhu  $D$ , po teoremu 4.2.1 dobijemo  $s_2 = R_1/Q_3, s_3 = R_1/Q_2$ . Rješavajući po  $R_1$  dobijemo da je  $R_1 = Q_3s_2 = Q_2s_3$  tako da vrijedi

$$\frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

Slično, dobijemo

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2}.$$

□

<sup>3</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

**Teorem 4.4.2** (O dualnom razmaku). *Neka su dane tri točke  $A_1, A_2, A_3$  i trokut s kvadratima udaljenosti  $Q_1 = Q(A_2, A_3)$ ,  $Q_2 = Q(A_1, A_3)$ ,  $Q_3 = Q(A_1, A_2)$  različitim od nule. Definiramo dualni razmak  $c_3 = c(A_3A_1, A_3A_2)$ . Tada imamo*

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

*Dokaz.* Ako su tri točke  $A_1, A_2, A_3$  kolinearne stoga vrijedi  $c_3 = 1$  i  $A(A_1, A_2, A_3) = 0$  i  $A(A_1, A_2, A_3) = 0$  pa slijedi tvrdnja.

Inače, tri točke tvore trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$ . Po definiciji dualnog razmaka  $c_3$ , pravci  $A_1A_3$  i  $A_2A_3$  su nenul. Neka je  $D$  nožište okomice povučene iz vrha  $A_1$  na pravac  $A_2A_3$ .

Definiramo kvadrate udaljenosti  $R_1 = Q(A_1, D)$ ,  $R_2 = Q(A_2, D)$ ,  $R_3 = Q(A_3, D)$ .

Kako su  $\overline{A_1A_2D}$  i  $\overline{A_1A_3D}$  pravokutni trokuti s pravim kutom u vrhu  $D$ , koristeći Pitagorin teorem 3.1.7 dobijemo

$$Q_3 = R_1 + R_2 \text{ i } Q_2 = R_1 + R_3.$$

Po teoremu 4.2.2 imamo  $c_3 = R_3/Q_2$ .

Rješavajući zadnje dvije jednačbe, dobijemo da je

$$R_3 = Q_2c_3, R_1 = Q_2(1 - c_3) \text{ i } R_2 = Q_3 - Q_2(1 - c_3).$$

Kako su točke  $A_2, A_3, D$  kolinerane, koristeći uvjet kolinearnosti na kvadratima udaljenosti  $Q_1, R_2, R_3$  dobijemo izraz  $(Q_1 + R_3 - R_2)^2 = 4Q_1R_3$ .

Uvrstimo izračunate vrijednosti za  $R_3$  i  $R_2$  u posljednju jednačbu te slijedi

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

□

**Teorem 4.4.3.** *Neka su dani vrhovi trokuta  $A_1, A_2, A_3$  i njemu prikladni kvadrati udaljenosti  $Q_1, Q_2, Q_3$  te razmak  $s_3 = s(A_3A_1, A_3A_2)$  različit od nule. Tada vrijedi*

$$\mathcal{A} = A(A_1, A_2, A_3) = 4Q_1Q_2s_3.$$

*Dokaz.* Iz teorema 4.1.4 i 4.4.2 imamo

$$\begin{aligned} 4Q_1Q_2s_3 &= 4Q_1Q_2(1 - c_3) \\ &= 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 \\ &= (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = A(A_1, A_2, A_3) = \mathcal{A}. \end{aligned}$$

□

**Primjer 4.4.4.** U polju realnih brojeva trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s kvadratima udaljenosti

$$Q_1 = 16,$$

$$Q_2 = 36,$$

$$Q_3 = 9,$$

daje vrijednost  $\mathcal{A} = A(16, 36, 9) = (16 + 36 + 9)^2 - 2(16^2 + 36^2 + 9^2) = 455$ .

Prema teoremu 4.4.3 dobijemo

$$s_1 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_2Q_3} = \frac{455}{4 \cdot 36 \cdot 9} = \frac{455}{1296},$$

$$s_2 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_3} = \frac{455}{4 \cdot 16 \cdot 9} = \frac{455}{576},$$

$$s_3 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_2} = \frac{455}{4 \cdot 16 \cdot 36} = \frac{455}{2304}.$$

**Primjer 4.4.5.** U polju kompleksnih brojeva trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s kvadratima udaljenosti

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = 2,$$

$$Q_3 = i$$

daje vrijednost  $\mathcal{A} = A(1, 2, i) = (1 + 2 + i)^2 - 2(1 + 4 - 1) = 6i$ .

Prema teoremu 4.4.3 dobijemo

$$s_1 = 3/4,$$

$$s_2 = 3/2,$$

$$s_3 = 3i/4.$$

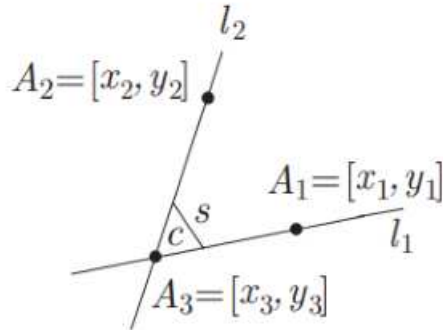
**Teorem 4.4.6** (Formula za računanje razmaka). Neka su  $l_1$  i  $l_2$  pravci koji se sijeku u točki  $A_3 = (x_3, y_3)$  i neka je  $A_1 = (x_1, y_1)$  bilo koja točka na pravcu  $l_1$  te  $A_2 = (x_2, y_2)$  bilo koja točka na pravcu  $l_2$ . Tada je razmak  $s$  između  $l_1$  i  $l_2$  jednak

$$s = \frac{((y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1))^2}{((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2)((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)}.$$

*Dokaz.* Po teoremu 2.5.12 vrijedi  $l_1 = y_1 - y_3 : x_3 - x_1 : x_1y_3 - x_3y_1$  i

$l_2 = y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2$ . Iskristimo definiciju za razmak kako bismo dobili tvrdnju.  $\square$

Pojmovi iz teorema 4.4.6 i 4.4.7 prikazani su na slici 4.8.

Slika 4.8: Prikaz razmaka i dualnog razmaka točkaka.<sup>4</sup>

**Teorem 4.4.7** (Formula za računanje dualnog razmaka). *Neka su  $l_1$  i  $l_2$  pravci koji se sijeku u točki  $A_3 = (x_3, y_3)$  i neka je  $A_1 = (x_1, y_1)$  bilo koja točka na pravcu  $l_1$  te  $A_2 = (x_2, y_2)$  bilo koja točka na pravcu  $l_2$ . Tada je dualni razmak  $c$  između  $l_1$  i  $l_2$  jednak*

$$c = \frac{((y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2}{((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2)((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)}.$$

*Dokaz.* Koristimo analogan argument kao u prethodnom teoremu. □

**Teorem 4.4.8** (Formula tri razmaka). *Neka su dani pravci  $l_1, l_2, l_3$  s razmacima  $s_1 = s(l_2, l_3)$ ,  $s_2 = s(l_1, l_3)$ ,  $s_3 = s(l_1, l_2)$ . Tada vrijedi*

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_2^2 + s_1^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3.$$

*Dokaz.* Ako su barem dva pravca paralelna, tada je jedan od razmaka jednak nuli, stoga su ostala dva razmaka jednaka pa formula vrijedi.

Neka su dana tri neparalelna pravca, tada transliramo jedan od pravaca kako bismo dobili trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  s razmacima  $s_1, s_2, s_3$  i kvadratima udaljenosti  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Iz teorema 4.4.1 postoji broj  $D$  različit od nule, takav da vrijedi

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3} = \frac{1}{D} \quad (4.1)$$

Primijenimo teorem 4.4.2 gdje je

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

<sup>4</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

U prethodnom izrazu iskoristimo  $s + c = 1$  i raspišemo ga kao

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + 4Q_1Q_2s_3. \quad (4.2)$$

Iskoristimo jednakost 4.1 kako bismo zamijenili  $Q_1$  sa  $s_1D$ ,  $Q_2$  sa  $s_2D$  i  $Q_3$  sa  $s_3D$  u jednakosti 4.2, a potom podijelimo sa  $D^2$ .

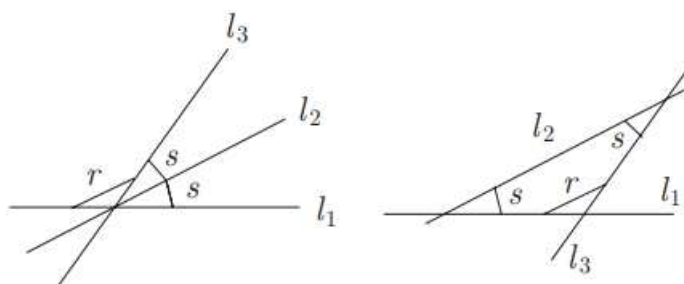
Rezultat je  $(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$ . □

**Teorem 4.4.9** (Jednaki razmaci). *Neka su dani pravci  $l_1, l_2, l_3$  i neka je  $s(l_1, l_2) = s(l_2, l_3) = s$  kao na slici 4.9. Tada vrijedi*

$$s(l_1, l_3) = 0$$

ili

$$s(l_1, l_3) = 4s(1 - s).$$



Slika 4.9: Teorem o jednakim razmacima.<sup>5</sup>

*Dokaz.* Ako je  $s(l_1, l_3) = r$ , tada iz 4.4.8 vrijedi  $(2s + r)^2 = 2(2s^2 + r^2) + 4s^2r$ , odnosno  $r(r - 4s(1 - s)) = 0$ . Stoga je  $r = 0$  ili  $r = 4s(1 - s)$ . □

## 4.5 Simetrale

**Definicija 4.5.1.** *Simetrala kuta između pravaca  $l_1, l_2$  je pravac  $h$  koji prolazi kroz  $l_1 \cap l_2$  i zadovoljava uvjet*

$$s(l_1, h) = s(l_2, h).$$

Uočimo da je u polju realnih brojeva ova definicija ekvivalentna definiciji simetrale kuta u Euklidskoj geometriji.

<sup>5</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



**Teorem 4.5.2** (Simetrala kuta). *Simetrala kuta između pravaca  $l_1, l_2$  postoji onda kada je  $s(l_1, l_2)$  kvadrat broja. U tom slučaju postoje točno dvije simetrale i one su okomite. Neka su dani pravci  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  takvi da je  $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ . Tada dvije simetrale kuta između pravaca  $l_1, l_2$  uvijek postoje i jednadžba im je jednaka*

$$a_1b_2 - a_1b_1 : 0 : b_2c_1 - b_1c_2$$

i

$$a_1b_2 - a_2b_1 : c_2a_1 - c_1a_2.$$

Ako je  $a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$  i  $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = r^2$ , tada su simetrale kuta između pravaca  $l_1, l_2$  dane sa

$$(a_1a_2 - b_1b_2 + r)(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ : ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 + r(b_2c_1 - b_1c_2))$$

i

$$(a_1a_2 - b_1b_2 - r)(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ : ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 - r(b_2c_1 - b_1c_2)).$$

*Dokaz.* Ako je  $s(l_1, h) = s(l_2, h) = s$ , tada po teoremu 4.4.9 je  $s(l_1, l_2) = 4s(1 - s)$  jer  $l_1$  i  $l_2$  nisu paralelni. Teorem 4.1.5 govori da je  $s(1 - s)$  kvadrat, stoga je i  $s(l_1, l_2)$  kvadrat broja. Obratno, pretpostavimo da su  $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$  i  $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$  i  $s = s(l_1, l_2)$  kvadrati. Kako vrijedi

$$s = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Ekvivalentno je uvjetu

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = r^2$$

za neki  $r$ . Ako je  $h = a : b : c$ , tada jednadžba  $s(l_1, h) = s(l_2, h)$  glasi

$$\frac{(a_1b - ab_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a^2 + b^2)} = \frac{(a_2b - ab_2)^2}{(a_2^2 + b_2^2)(a^2 + b^2)}.$$

Koristimo izraz

$$(a_1b - ab_1)^2(a_2^2 + b_2^2) - (a_2b - ab_2)^2(a_1^2 + b_1^2) = -(a_1b_2 - a_2b_1)((a^2 - b^2)(a_1b_2 + a_2b_1) - 2ab(a_1a_2 - b_1b_2))$$

koji se lagano može provjeriti direktnim računom.

Kako  $l_1$  i  $l_2$  nisu paralelni, vrijedi  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . Koristimo zadnje dvije jednakosti kako

bismo dobili ekvivalentni uvjet

$$a^2(a_1b_2 + a_2b_1) - 2ab(a_1a_2 - b_1b_2) - b^2(a_1b_2 + a_2b_1) = 0. \quad (4.3)$$

Pretpostavimo da je  $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ . Tada se prethodna jednakost svede na

$$ab(a_1a_2 - b_1b_2) = 0.$$

Ako je i  $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$ , tada bi Fibonaccijev identitet

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

implicirao  $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 0$  što je nemoguće jer niti jedan od pravaca  $l_1$  i  $l_2$  nisu nul-pravci.

Dakle, mora vrijediti  $ab = 0$  te pravac  $h$  mora biti ili oblika  $1 : 0 : d_1$  ili  $0 : 1 : d_2$  za neke vrijednosti  $d_1$  i  $d_2$  jedinstveno određene uvjetom da  $h$  prolazi točkom

$$l_1 \cap l_2 = \left( \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right).$$

Postoje dvije mogućnosti za  $h$ :

$$h_1 = a_1b_2 - a_2b_1 : 0 : b_2c_1 - b_1c_2 \text{ ili } h_2 = 0 : a_1b_2 - a_2b_1 : c_2a_1 - c_1a_2.$$

Uočimo da je tada  $s$  kvadrat, odnosno

$$s = \left( \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 - b_1b_2} \right)^2.$$

Pretpostavimo sada da je  $a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$ . U ovom slučaju iz jednadžbe 4.3 slijedi da niti  $a$  niti  $b$  ne mogu biti nula. Ako je jedan od njih nula, tada je i drugi, što je nemoguće jer je  $a : b : c$  pravac. Stoga, bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da je  $b = a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$ .

Jednadžbu 4.3 dopunimo do kvadrata koristeći Fibonaccijev identitet 2.3 kako bismo dobili

$$(a - (a_1a_2 - b_1b_2))^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = r^2.$$

Dobijemo dvije mogućnosti za  $h$ :

$$h_1 = a_1a_2 - b_1b_2 + r : a_1b_2 + a_2b_1 : d_1 \text{ ili } h_2 = a_1a_2 - b_1b_2 - r : a_1b_2 + a_2b_1 : d_2.$$

Brojevi  $d_1$  i  $d_2$  su određeni činjenicom da  $h$  prolazi kroz  $l_1 \cap l_2$ .

Tada računanjem dolazimo do toga da se jednadžbe za  $h_1$  i  $h_2$  mogu napisati kao

$$\begin{aligned} h_1 &= (a_1a_2 - b_1b_2 + r)(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ & : ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 + r(b_2c_1 - b_1c_2)) \end{aligned}$$

i

$$h_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - r)(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ : ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 - r(b_2c_1 - b_1c_2)).$$

Ova dva pravca su okomita jer vrijedi  $((a_1a_2 - b_1b_2) + r)((a_1a_2 - b_1b_2) - r) + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = 0$  zbog Fibonaccijevog identiteta 2.3 i prema definiciji od  $r$  u ovom dokazu.  $\square$

**Primjer 4.5.3.** U polju racionalnih brojeva zadani su pravci  $l_1 = 2 : 1 : -1$  i  $l_2 = 11 : 2 : -4$ .

Tada je  $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 625 = 25^2$  i to je kvadrat pa kut između pravaca  $l_1, l_2$  ima simetralu.

Neka je  $r = 25$  i uočimo da  $a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$ . Prema teoremu 4.5.2 simetrale su jednake  $h_1 = 1 : -3 : 1$  i  $h_2 = 21 : 7 : -9$ .

Ovi pravci su okomiti i vrijedi

$$s(l_1, h_1) = s(l_2, h_1) = 49/50,$$

$$s(l_1, h_2) = s(l_2, h_2) = 1/50.$$

**Primjer 4.5.4.** U polju racionalnih brojeva dani su pravci  $l_1 = 3 : 1 : 5$  i  $l_2 = -3 : 1 : 2$ .

Tada je  $s(l_1, l_2) = 9/25$  i to je kvadrat pa kut između pravaca  $l_1, l_2$  ima simetralu.

U ovom slučaju vrijedi  $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$  pa je simetrala kuta dana teoremom 4.5.2 kao

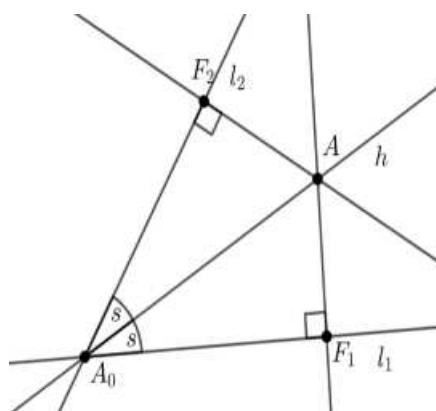
$$h_1 = 6 : 0 : 3 = 2 : 0 : 1 \text{ i } h_2 = 0 : 6 : 21 = 0 : 2 : 7.$$

Provjerimo da vrijedi izraz za simetralu kuta  $s(l_1, h_1) = s(l_2, h_1) = 1/10$  i

$$s(l_1, h_2) = s(l_2, h_2) = 9/10.$$

**Teorem 4.5.5** (Jednaki kvadrati udaljenosti dva pravca). Neka su dani pravci  $l_1$  i  $l_2$  te je  $l_1 \cap l_2$  vrh kuta. Tada bilo koja točka  $A$  koja leži na simetrali  $h$  kuta između pravaca  $l_1, l_2$  zadovoljava  $Q(A, l_1) = Q(A, l_2)$ . Obratno, bilo koja točka koja zadovoljava ovu jednadžbu leži na nekoj simetrali kuta između pravaca  $l_1, l_2$ .

*Dokaz.* Neka su dani pravci  $l_1$  i  $l_2$ . Pretpostavimo da je  $l_1 \cap l_2$  je vrh kuta i da je  $A$  točka na jednoj simetrali  $h$  kuta. Pretpostavimo da je  $A_0 = l_1 \cap l_2$  i da su  $F_1$  i  $F_2$  nožišta okomice spuštene iz vrha  $A$  na pravac  $l_1$  i  $l_2$ .



Slika 4.10: Jednaki kvadrati udaljenosti dva pravca.

Tada su trokuti  $\overline{A_0AF_1}$  i  $\overline{A_0AF_2}$  pravokutni i po pretpostavci imamo

$$s(l_1, h) = \frac{Q(A, F_1)}{Q(A, A_0)} = s(l_2, h) = \frac{Q(A, F_2)}{Q(A, A_0)}.$$

Stoga je  $Q(A, l_1) = Q(A, F_1) = Q(A, F_2) = Q(A, l_2)$ .

Obratno, ako imamo  $A \neq l_1 l_2$  i  $Q(A, l_1) = Q(A, l_2)$ , tada je  $Q(A, F_1) = Q(A, F_2)$  gdje su  $F_1$  i  $F_2$  nožišta okomica spušteneh iz točke  $A$  na pravce  $l_1$  i  $l_2$ .

Neka je  $A_0 = l_1 \cap l_2$  i  $h = A \cap A_0$ . Tada vrijedi

$$s(l_1, h) = \frac{Q(A, F_1)}{Q(A, A_0)} = \frac{Q(A, F_2)}{Q(A, A_0)} = s(l_2, h)$$

pa je stoga  $h$  simetrala kuta između pravaca  $l_1, l_2$ . Preciznije,  $l_1 \cap l_2$  je vrh kuta po teoremu 4.5.2.  $\square$

# Poglavlje 5

## Primjene

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 2.7, 3.10 i 4.23 knjige [4].

Primijenimo racionalnu trigonometriju kako bismo uvidjeli da je stvorena za matematiku i povezane joj discipline. Njome se olakšava Euklidova geometrija jer se koristi kvadrat vrijednosti koji je često olakšavajući za rješavanje praktičnih problema.

### 5.1 Primjeri

**Primjer 5.1.1.** *U bilo kojem polju dan je trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  gdje točke imaju koordinate  $A_1 = (1, 1), A_2 = (5, 2), A_3 = (3, -1)$ . Primijenimo teoreme racionalne trigonometrije.*

Kvadrati udaljenosti tog trokuta su  $Q_1 = 13, Q_2 = 8, Q_3 = 17$   
pa izračunamo  $\mathcal{A} = A(13, 8, 17) = (17 + 8 + 17)^2 - 2(13^2 + 8^2 + 17^2) = 400$ .

Izračunamo razmake

$$s_1 = 25/34, s_2 = 100/221, s_3 = 25/26$$

pa su stoga dualni razmaci  $c_1 = 9/34, c_2 = 121/221, c_3 = 1/26$ .

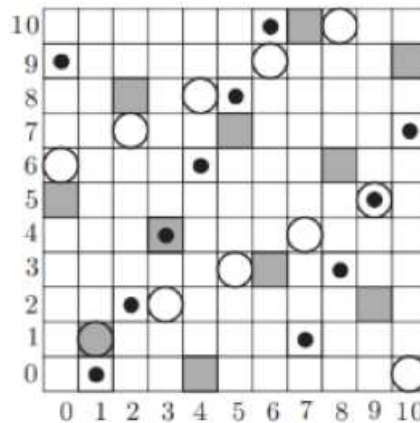
Primijenimo teoreme 4.4.1, 3.1.4, 4.4.2:

$$\frac{25/34}{13} = \frac{100/121}{8} = \frac{25/26}{17} = \frac{25}{442}$$
$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = \frac{225625}{48841} = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$$
$$(c_1 + c_2 - c_3 - 1)^2 = \frac{1089}{48841} = 4c_1c_2c_3.$$

Kako je  $221 = 13 \cdot 17, 442 = 2 \cdot 13 \cdot 17, 48841 = 13^2 \cdot 17^2$ , ove formule vrijede u bilo kojem polju koje nije karakteristika 13 ili 17. Ako polja nemaju karakteristike 3 ili 11, tada dualni razmaci nisu jednaki nuli pa su zakreti  $t_1 = 25/9, t_2 = 100/121, t_3 = 25$ .

**Primjer 5.1.2.** Dan je trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  u polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  s koordinatama  $A_1 = (\bar{1}, \bar{1})$ ,  $A_2 = (\bar{3}, \bar{4})$ ,  $A_3 = (\bar{9}, \bar{5})$ . Primijenimo teoreme racionalne trigonometrije.

Stranice trokuta leže na pravcima  
 $l_1 = \bar{10} : \bar{6} : \bar{1}$  (mali crni krugovi),  
 $l_2 = \bar{1} : \bar{9} : \bar{1}$  (veliki otvoreni krugovi),  
 $l_3 = \bar{8} : \bar{2} : \bar{1}$  (sivi kvadrati) kako je prikazano na slici 5.1.



Slika 5.1: Trokut u polju  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ .<sup>1</sup>

Kvadrati udaljenosti su  $Q_1 = \bar{4}$ ,  $Q_2 = \bar{3}$ ,  $Q_3 = \bar{2}$ ,  
 stoga dobijemo  $\mathcal{A} = A(\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}) = (\bar{4} + \bar{3} + \bar{2})^2 - \bar{2}(\bar{16} + \bar{9} + \bar{4}) = \bar{1}$ .  
 Teorem 4.4.3 daje razmake  $s_1 = \bar{6}$ ,  $s_2 = \bar{10}$ ,  $s_3 = \bar{3}$ .  
 Teorem 4.4.1 daje jednake omjere razmaka i kvadrata udaljenosti, odnosno dobijemo  
 $\bar{6}/\bar{4} = \bar{10}/\bar{3} = \bar{3}/\bar{2} = \bar{7}$ .  
 Uvjet kolinearnosti 3.1.4 vrijedi jer  $(s_1 + s_2 + s_3)^2 = \bar{9} = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$ .

**Primjer 5.1.3.** Dan je trokut  $\overline{A_1A_2A_3}$  u polju kompleksnih brojeva s koordinatama  $A_1 = (0, 0)$ ,  $A_2 = (3, -i)$ ,  $A_3 = (1 + i, 2i)$ . Primijenimo teoreme racionalne trigonometrije.

Kvadrati udaljenosti su

$$Q_1 = (-2 + i)^2 + (3i)^2 = -6 - 4i,$$

$$Q_2 = (1 + i)^2 + (2i)^2 = -4 + 2i,$$

<sup>1</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

$$Q_3 = (-3)^2 + i^2 = 8,$$

izračunamo

$$\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = (-6 - 4i - 4 + 21 + 8)^2 - 2[(-6 - 4i)^2 + (-4 + 2i)^2 + 8^2] = -192 - 56i.$$

Teorem 4.4.3 daje razmake

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{41}{40} + \frac{19}{20}i, \\ s_2 &= \frac{43}{52} - \frac{27}{104}i, \\ s_3 &= -\frac{199}{130} - \frac{16}{65}i. \end{aligned}$$

Teorem 4.4.1 daje jednake omjere razmaka i kvadrata udaljenosti, odnosno dobijemo

$$\frac{\frac{41}{40} + \frac{19}{20}i}{-6 - 4i} = \frac{\frac{43}{52} - \frac{27}{104}i}{-4 + 2i} = \frac{-\frac{199}{130} - \frac{16}{65}i}{8} = -\frac{199}{1040} - \frac{2}{65}i.$$

Uvjet kolinearosti 3.1.4 vrijedi jer  $(s_1 + s_2 + s_3)^2 = -\frac{398}{4225} + \frac{38577}{135200}i = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$ .

**Primjer 5.1.4.** U polju racionalnih brojeva u trokutu  $\overline{A_1A_2A_3}$  zadano je  $s_3 = 81/130$ ,  $Q_1 = 5$ ,  $Q_3 = 17$ . Primijenimo teoreme racionalne trigonometrije.

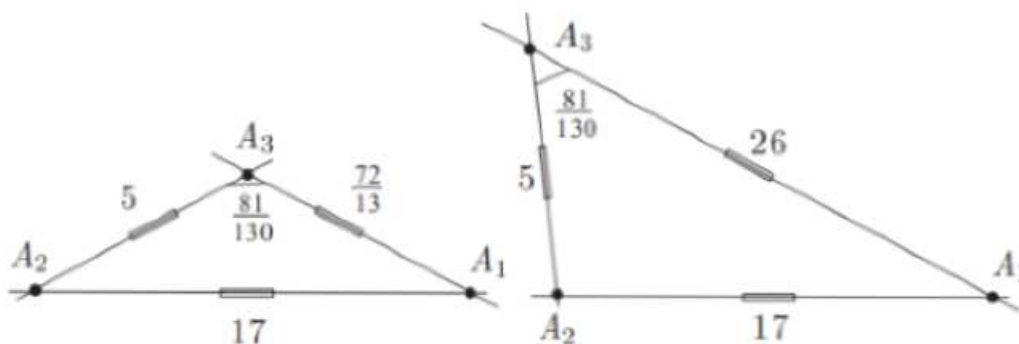
Koristimo teorem 4.4.2 kako bismo dobili

$$(Q_2 - 12)^2 = 4 \cdot 5 \cdot Q_2 \cdot \frac{49}{130} = \frac{98}{13} \cdot Q_2.$$

Sredimo izraz kako bismo dobili  $(13Q_2 - 72)(Q_2 - 26) = 0$  tako da imamo dva slučaja kao što vidimo na slici 5.2

i)  $Q_2 = 72/19$ ,

ii)  $Q_2 = 26$ .



Slika 5.2: Dvije mogućnosti.<sup>2</sup>

i) Ako je  $Q_2 = 72/13$ , tada teorem 4.4.1 daje

$$\frac{s_1}{5} = \frac{s_2}{72/13} = \frac{81/130}{17}$$

tako da dobijemo razmake  $s_1 = 81/442$ ,  $s_2 = 2916/14365$ ,  $s_3 = 81/130$ .

ii) Ako je  $Q_2 = 26$ , tada teorem 4.4.1 daje

$$\frac{s_1}{5} = \frac{s_2}{26} = \frac{81/130}{17}$$

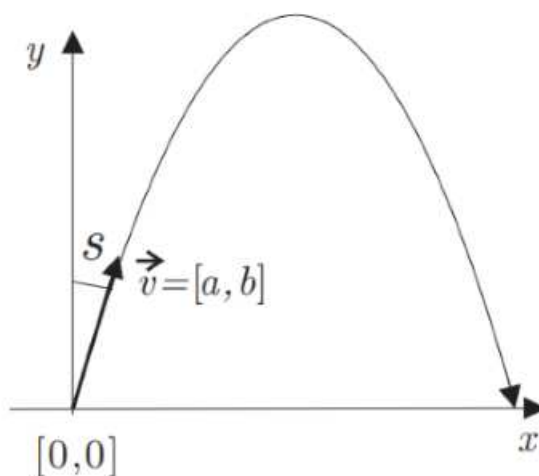
tako da dobijemo razmake  $s_1 = 81/442$ ,  $s_2 = 81/85$ ,  $s_3 = 81/130$ .

## 5.2 Fizika

Promotrimo trajektoriju hitca kao parabolu. Ako hitac počinje u ishodištu s brzinom  $\vec{v} = (a, b)$  kao na slici 5.3, tada je njegov položaj u vremenu  $t$  dan s

$$\left( at, bt - \frac{gt^2}{2} \right)$$

gdje je  $g$  gravitacijsko ubrzanje.



Slika 5.3: Hitac.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

<sup>3</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].



**Primjer 5.2.1.** Dana je konstantna početna brzina  $v = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Koji razmak  $s$  od vertikalne rezultira time da projektil prijeđe najveći horizontalni put prije nego padne na pod u točku  $(x, 0)$  za neki  $x$ ?

Projektil padne na pod za vrijeme  $t$  gdje je

$$bt - \frac{gt^2}{2} = 0$$

tako da je ili  $t = 0$  ili  $t = 2b/g$ .

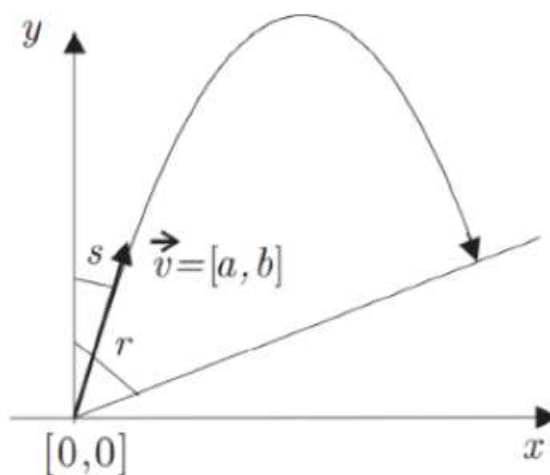
Koristeći pristup racionalne trigonometrije, umjesto udaljenosti ćemo gledati kvadrat udaljenosti te je zapravo pitanje za koje vrijednosti  $A = a^2$  i  $B = b^2$ , uz uvjet  $A + B = v^2 = V$  daje najveću horizontalnu kvadratnu udaljenost

$$x^2 = (at)^2 = \frac{4AB}{g^2}.$$

Sada je to problem maksimiziranja produkta  $AB$  dva broja  $A$  i  $B$  s uvjetom da im je zbroj jednak  $V$ . Maksimalnu vrijednost dobijemo za  $A = B = V/2$ , dajući maksimalnu horizontalnu kvadratnu udaljenost  $x^2 = \frac{V^2}{g^2}$ .

Projektil bi trebao biti ispucan s razmakom jednakim  $s = 1/2$  od vertikalne.

**Primjer 5.2.2.** Neka je projektil ispucan iz ishodišta na brdo koje je predstavljeno pravcem  $l$  kroz ishodište koji ima razmak  $r$  s vertikalom kao na slici 5.4. Početna brzina  $v$  je konstantna. Koji razmak  $s$  od vertikalne će rezultirati maksimalnom horizontalnom udaljenosti nakon slijetanja?



Slika 5.4: Projektil na brdu.<sup>4</sup>

Brdo je predstavljeno jednažbom

$$x^2 = r(x^2 + y^2),$$

stoga projektil pogađa brdo za

$$(at)^2 = r((at)^2 + (bt - gt^2/2)^2).$$

Rješavajući dobijemo da je  $t = 0$  ili  $t$  zadovoljava kvadratnu jednažbu

$$\left(t - \frac{2b}{g}\right)^2 = \frac{4a^2(1-r)}{g^2r}.$$

Stoga je  $t = \frac{2b}{g} \pm \frac{2a}{g} \sqrt{\frac{1-r}{r}}$ .

Kako bi horizontalna udaljenost bila maksimalna, zapravo trebamo maksimizirati  $at$ , odnosno

$$f(a, b) = ab \pm a^2c$$

birajući  $a$  i  $b$  uz uvjet

$$g(a, b) = a^2 + b^2 = V$$

gdje je  $c$  konstanta  $c = \sqrt{\frac{1-r}{r}}$ .

Ovo možemo promatrati kao problem iz matematičke analize, koji se može riješiti Lagrangeovom metodom. Gradijenti su jednaki

$$\nabla f = (b \pm 2ac, a)$$

i

$$\nabla g = (2a, 2b)$$

te trebaju biti proporcionalni iz čega slijedi da je  $(b \pm 2ac)b - a^2 = 0$ .

Sredimo prethodni izraz te kvadiramo da bismo maknuli predznak kako bismo dobili  $4a^2b^2c^2 = (a^2 - b^2)^2$  te napravimo supstituciju da dobijemo  $a^2(V - a^2)c^2 = (2a^2 - V)^2$ .

Ova se kvadratna jednažba s nepoznanicom  $a^2$  može zapisati u obliku

$$\left(a^2 - \frac{V}{2}\right)^2 = \frac{V^2c^2}{4(1+c^2)} = \frac{V^2(1-r)}{4}.$$

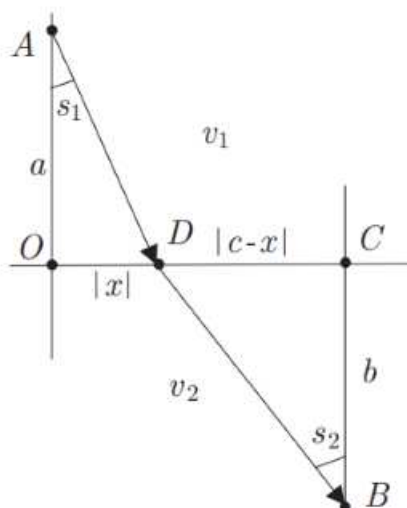
Stoga je  $a^2 = \frac{V}{2}(1 \pm \sqrt{1-r})$  pa je razmak  $s$  između početnog smjera i vertikale

$$s = \frac{a^2}{V} = \frac{1 \pm \sqrt{1-r}}{2}.$$

Međutim, ovo je ekvivalentno izrazu  $r = 4s(1-s)$ , stoga projektilov početni smjer treba biti simetrala kuta između brda i vertikale. Uočimo da postoje dva rješenja, jedno kada projektil ide uzbrdo i jedno kada projektil ide nizbrdo.

<sup>4</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

**Primjer 5.2.3.** Neka čestica putuje od točke  $A = (0, a)$  do točke  $B = (c, -b)$  gdje su  $a, b > 0$  kroz neku točku  $D = (x, 0)$  na horizontalnoj osi kao na slici 5.5. Ako čestica ima brzinu  $v_1$  u području  $y \geq 0$  i brzinu  $v_2$  u području  $y < 0$ , za koji izbor točke  $D$  će ukupno vrijeme putovanja biti najmanje?



Slika 5.5: Snellov zakon.<sup>5</sup>

Osnovna formula koja povezuje udaljenost  $d$  i vrijeme  $t$  te brzinu  $v$  je

$$v = d/t. \quad (5.1)$$

Neka je  $|OD| = |x|$  i  $|DC| = |c - x|$ , neka su vremena  $t_1$  i  $t_2$  koja su potrebna čestici da putuju od  $A$  do  $D$  ravnom linijom i od  $D$  do  $B$  dana s

$$t_1 = \frac{|AD|}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1},$$

$$t_2 = \frac{|DB|}{v_2} = \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Ukupno vrijeme  $t$  je

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

<sup>5</sup>Slika je preuzeta iz knjige [4].

Ovo je funkcija od  $x$  jer su  $a, b, v_1, v_2$  konstante. Sada možemo izračunati vrijednost  $x$  u kojoj funkcija postiže minimum ili maksimum. Kako bi to napravili, potrebna je derivacija od  $\sqrt{x}$ . No, pogledajmo problem sa stajališta racionalne trigonometrije.

Kako je  $Q = d^2$  jedna od tvrdnji racionalne trigonometrije, tada kvadriramo izraz 5.1 kako bismo dobili

$$V = Q/T$$

gdje su  $V = v^2, T = t^2$ . Kako je  $Q(A, D) = a^2 + x^2$  i  $Q(D, B) = (c - x)^2 + b^2$ , kvadriramo i vremena  $t_1$  i  $t_2$  kako bismo dobili

$$T_1 = \frac{a^2 + x^2}{V_1}, \quad (5.2)$$

$$T_2 = \frac{(c - x)^2 + b^2}{V_2}. \quad (5.3)$$

Kako je  $t = t_1 + t_2$ , pokazat ćemo da vrijedi  $A(T, T_1, T_2) = 0$ . Koristeći definiciju Arhimedove funkcije i teorem 3.2.7 dobijemo  $A(t, t_1, t_2) = (t + t_1 + t_2)(t + t_1 - t_2)(t + t_2 - t_1)(t_1 + t_2 - t)$  zbog uvjeta  $t = t_1 + t_2$  dolazimo do  $A(t, t_1, t_2) = 0$ . Sve tri vrijednosti ovise o varijabli  $x$ , a nama je cilj izabrati  $x$  kako bi minimizirali  $T$ .

Vrijedi jednakost

$$(T_1 + T_2 - T)^2 = 4T_1T_2 \quad (5.4)$$

te sve tri vrijednosti ovise o varijabli  $x$ . Deriviranjem dobivamo

$$2(T_1 + T_2 - T)^2 \left( \frac{dT_1}{dx} + \frac{dT_2}{dx} - \frac{dT}{dx} \right) = 4 \frac{d(T_1T_2)}{dx}. \quad (5.5)$$

Kako bismo maksimizirali ili minimizirali  $T$ , trebamo prvo odrediti sve stacionarne točke njegove derivacije, tj. kada vrijedi

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

Kvadriramo jednadžbu 5.5 tako da dobijemo

$$T_1T_2 \left( \frac{dT_1}{dx} + \frac{dT_2}{dx} \right) = \left( T_2 \frac{dT_1}{dx} + T_1 \frac{dT_2}{dx} \right)^2.$$

Proširimo i sredimo jednadžbu kako bismo dobili općenitu formulu za maksimum i minimum, odnosno

$$T_2 \left( \frac{dT_1}{dx} \right)^2 = T_1 \left( \frac{dT_2}{dx} \right)^2. \quad (5.6)$$

Jednadžbe 5.6 i 5.2 uvrstimo u jednadžbu 5.3 gdje je

$$\frac{dT_1}{dx} = \frac{2x}{V_1},$$

$$\frac{dT_2}{dx} = \frac{2(x-c)}{V_2}.$$

Dobivamo

$$\frac{(c-x)^2 + b^2}{V_2} \cdot \frac{4x^2}{V_1^2} = \frac{a^2 + x^2}{V_1} \cdot \frac{4(c-x)^2}{V_2^2}$$

ili

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

Razmaci  $s_1$  i  $s_2$  između pravca  $AD$  i vertikale te pravca  $DB$  i vertikale su

$$s_1 = \frac{x^2}{a^2 + x^2}$$

$$s_2 = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2 + b^2}.$$

Ovo potvrđuje Snellov zakon. Minimalno vrijeme dobivamo kada je

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s_2}{s_1}.$$

# Bibliografija

- [1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Zagreb, 2008.,  
[https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/linearna\\_algebra\\_sk\\_7.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/linearna_algebra_sk_7.pdf), pristupljeno 06.09.2022.
- [2] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra 1*, skripta PMF-MO,  
<https://pdfslide.net/documents/linearna-algebra-1-skripta-za-nastavnicke-studije-na-pmf-mo.html?page=2>, pristupljeno 06.09.2022.
- [3] B. Širola, *Algebarske strukture*, skripta PMF-MO,  
<https://pdfslide.net/documents/algebarske-strukture-boris-sirola-pmf-bila-bi-da-je-to-nauka-o-algebarskim.html?page=2>, pristupljeno 06.09.2022.
- [4] N. J. Wilderger, *Divine Proportions, Rational trigonometry to universal trigonometry*, Wild Egg Pty Ltd., 2005.

# Sažetak

Ovaj rad opisuje odnos racionalne trigonometrije s klasičnom Euklidovom geometrijom. U Euklidovoj geometriji osnovni pojmovi su udaljenost i kut, dok u racionalnoj trigonometriji koristimo kvadrat udaljenosti i razmak. Racionalna trigonometrija koristi kvadratne vrijednosti i zbog toga se rješenja mogu prikazati u racionalnom obliku tako da se sve može izračunati primjenom aritmetike i algebre te su na taj način dobivena jednostavnija rješenja.

U radu je iskazano i dokazano pet glavnih teorema racionalne trigonometrije kao i još neki potrebni za razvitak teorije. U njima se povezuje šest elemenata trokuta, a to su uvjet kolinearnosti, Pitagorin poučak, teorem o razmaku kao racionalan analogon poučka o sinusima, teorem o dualnom razmaku koji odgovara poučku o kosinusu i formula tri razmaka koja predstavlja teorem da je zbroj kutova u trokutu  $180^\circ$ . Nakon svakog teorema dan je primjer njegove primjene u geometriji i njegova usporedba s Euklidovom geometrijom.

U svakom od poglavlja predstavljeni su osnovni pojmovi i oznake potrebni za razvoj dane teorije. Također su definirane nove funkcije, npr. Arhimedova funkcija te su uvedeni i novi pojmovi poput dualnog razmaka i zakreta koje možemo povezati s vektorskim i skalarnim produktom. Neki od teorema koji su dokazani su sljedeći: teorem o polovištu, teoremi o paralelogramu, teoremi o simetrali dužine i teoremi o simetrali kuta. Na kraju rada dani su primjeri zadataka iz geometrije i fizike u kojima je korištena teorija racionalne trigonometrije.

# Summary

This thesis describes the relationship between rational trigonometry and classical Euclidean geometry. In Euclidean geometry, the basic terms are distance and angle, while in rational trigonometry we use quadrance and spread. Rational trigonometry uses quadratic values and, because of this, solutions of the geometric problems can be presented in a rational form, so that everything can be calculated using arithmetic and algebra, and in this way simpler solutions are obtained.

This thesis presents and proves five main theorems of rational trigonometry, as well as some other results necessary for the development of the theory. They connect six elements of the triangle, namely Triple quad formula, Pythagoras' theorem, Spread law as a rational analog of the law of sines, Cross law which corresponds to the law of cosines, and Triple spread formula, which represents the theorem that the sum of the angles in a triangle is  $180^\circ$ . After each theorem, an example of its geometry application is given and a comparison with Euclidean geometry is given.

In each of the chapters, the basic terms and symbols necessary for the development of the given theory are presented. New functions were also defined, e.g. the Archimedes function, and new concepts such as cross and twist were introduced, which we can associate with the vector and scalar product. Some of the theorems that have been proved are as follows: Bisector theorem, Parallelogram theorems and theorems on vertex and perpendicular bisectors. At the end of the thesis, examples of problems from geometry and physics were given in which the theory of rational trigonometry can be applied.



# Životopis

Rođena sam 2. srpnja 1997. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Josipa Zorića i Osnovnu školu Ivana Benkovića u Dugom Selu, a potom upisujem Srednju školu Dugo Selo, smjer: opća gimnazija. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2016. godine, a iste godine upisujem sveučilišni integrirani preddiplomski i diplomski studij Matematika i fizika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Tijekom studija bila sam demonstratorica iz kolegija Elementarna teorija brojeva.

Na petoj godini studija, 2021. godine, krećem raditi kao nastavnik matematike u Srednjoj školi Dugo Selo.