

# Obrada slika pomoću varijacijskog računa i diferencijalnih jednažbi

---

**Tolja, Lucija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:827697>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-27**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lucija Tolja

**OBRADA SLIKA POMOĆU**  
**VARIJACIJSKOG RAČUNA I**  
**DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Roditeljima na bezuvjetnoj podršci i najvažnijim životnim lekcijama  
Sestrama i bratu na onome što jesu i na onome što jesam uz njih  
Prijateljima na uspomenama zbog kojih bih iznova studirala  
Mentoru na podršci, pomoći i razumijevanju kako tijekom  
studiranja tako i tijekom pisanja ovog rada  
Hvala vam!*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Motivacija i osnovni pojmovi</b>	<b>2</b>
1.1 Znanost o slikama . . . . .	2
1.2 Digitalna slika . . . . .	3
1.3 Zahtjevi pri obradi slika . . . . .	3
1.4 Motivacija varijacijskog i PDJ pristupa obradi slika . . . . .	5
1.5 Filtriranje . . . . .	7
<b>2 Modeliranje i reprezentacija slika</b>	<b>9</b>
2.1 Slike kao distribucije . . . . .	9
2.2 $L^p$ slike . . . . .	13
2.3 Soboljevlje slike . . . . .	13
2.4 $BV$ slike . . . . .	15
<b>3 Raščišćavanje</b>	<b>18</b>
3.1 Šum na slikama . . . . .	18
3.2 Rudin, Osher, Fatemi TV model raščišćavanja . . . . .	19
3.3 Implementacija preko zakašnjele difuzivne iteracije fiksnom točkom . . . . .	24
<b>4 Izoštavanje</b>	<b>29</b>
4.1 Zamućenje na slikama . . . . .	29
4.2 Rudin, Osher, Fatemi TV model izoštavanja . . . . .	31
4.3 Implementacija preko zakašnjele difuzivne iteracije fiksnom točkom . . . . .	34
<b>5 Nadopunjavanje</b>	<b>35</b>
5.1 Geometrijski modeli slika . . . . .	35
5.2 Modeliranje slika pomoću krivulja . . . . .	40

5.3	Mumford - Shah model nadopunjavanja . . . . .	41
5.4	Mumford - Shah - Euler model nadopunjavanja . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Segmentacija</b>	<b>46</b>
6.1	Opis Mumford - Shahovoga modela segmentacije . . . . .	46
6.2	Prvi slučaj: fiksni rub . . . . .	48
6.3	Drugi slučaj: varijabilan rub . . . . .	50
6.4	Slaba formulacija Mumford - Shah funkcionala . . . . .	52
	<b>Bibliografija</b>	<b>55</b>

# Uvod

Današnji svijet često se naziva informacijskim društvom. Međutim, ono što možemo primijetiti da glavno sredstvo prijenosa informacija postaju slike. Prosječan korisnik pametnog telefona svakodnevno primi milijune informacija putem zaslona svog uređaja. U svijetu koji se sve većom brzinom razvija i napreduje, slike su izvrstan izvor informacija jer su brz, jednostavan, efikasan i vjerodostojan prikaz fizičkog svijeta. Upravo zbog toga, naziv informacijsko društvo možemo malo suziti te današnje društvo nazvati slikovnim društvom. Kao odgovor na to javila se potreba za razvojem modela i algoritama koji će moći obraditi i interpretirati slike. Bez novih nastojanja da se slike analiziraju i obrade, eksplozijom slikovnih informacija ne bismo mogli baratati.

Kao i kod mnogih pojava u našoj okolini, u pozadini obrade slika stoji matematika. Tri su glavna pristupa: stohastičko modeliranje, pristup preko baznih okvira (eng. wavelets) i pristup preko parcijalnih diferencijalnih jednačbi. U ovom radu bazirat ćemo se na pristupu preko varijacijskog računa i parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Razvoj ovog pristupa obradi slika intenzivirao se devedesetih godina prošlog stoljeća i još je uvijek „živo” istraživačko područje. Razvoju uvelike pogoduje i razvoj računarske znanosti i unaprjeđenje tehnologije.

U radu se obrađuju četiri osnovna zahtjeva pri obradi slika: raščišćavanje, izoštravanje, nadopunjavanje i segmentacija. Prva dva su opisana pomoću Rudin, Osher, Fatemi modela, a druga dva pomoću Mumford - Shahovog modela. Na ovaj način su raznovrsne slike, bilo da prikazuju obiteljsku fotografiju s proslave rođendana, magnetsku rezonancu mozga ili pak staničnu strukturu mikroorganizma, matematičkim jezikom svedene na iste modele i na njima se mogu primijenjivati isti algoritmi.

# Poglavlje 1

## Motivacija i osnovni pojmovi

### 1.1 Znanost o slikama

Znanost o slikama sastoji se od tri relativno nezavisna dijela: akvizicija slika, obrada slika i interpretacija slika. Slika ne postoji dokle god ju ne snimimo, ukoliko je potrebno mora se obraditi da bi ju naposljetku mogli i interpretirati.

Akvizicija slika proučava mehanizme kojima različiti uređaji snimaju slike te matematičke modele i algoritme koji su integrirani u njih. Neki od glavnih problema u ovom dijelu su: ultrazvučna slikovna dijagnostika, termalni noćni vid, radarsko snimanje, računalna tomografija (CT), magnetska rezonancija (MRI), računalna grafika itd.

Obradu slika možemo prikazati idućim dijagramom

$$u_0 \xrightarrow{T} F = T[u_0].$$

Ovdje  $u_0$  predstavlja snimljenu sliku koja je na neki način degradirana pri njenom snimanju ili pohranjivanju.  $T$  je operator obrade koji se primjenjuje na danu sliku  $u_0$  te producira novu sliku  $F$  sa željenim svojstvima.

Posljednji aspekt znanosti o slikama je njihova interpretacija. Ovo možemo shvatiti kao inverz akviziciji. Dok se akvizicija bavi proučavanjem kako iz 3d svijeta konstruirati vjerodostojne 2d slike, interpretacija slika pokušava rekonstruirati 3d svijet iz 2d slika. Na primjer, stomatolog iz abnormalnih uzoraka na slici postavlja dijagnozu.

Čovjek, iako toga često nije svjestan, na dnevnoj bazi koristi obradu slika na ovaj ili onaj način. Da bismo sa slike dobili što značajnije informacije, često ih moramo obraditi. U ovom radu fokus će biti na različitim načinima obrade slika, odnosno na četiri glavna zahtjeva pri obradi slika: raščišćavanju, izoštravanju, segmentaciji te nadopunjavanju.



## 1.2 Digitalna slika

Digitalna slika je slika dobivena iz analogne uzorkovanjem i kvantizacijom. Ovo ovisi o uređaju za akviziciju slike, npr. vrsti senzora na digitalnoj kameri. Digitalna slika dobiva se tako da se analogna slika prekrije regularnom mrežom. Elemente mreže nazivamo pikseli. Svakom pikselu dodjeljuje se vrijednost koja predstavlja npr. prosječnu svjetlinu na njemu.

Matematički, digitalnu sliku možemo prikazati funkcijom definiranom na dvodimenzionalnoj mreži. Ukoliko je slika crno-bijela možemo ju shvatiti kao skalarnu funkciju dvije realne varijable i pri tome se svakom pikselu pridružuje vrijednost od 0 do 255 sa skale sive, gdje 0 predstavlja crnu boju, a 255 bijelu boju. Nadalje, boje se prikazuju kao vektori, pa tako  $(r, b, g)$  predstavlja redom crvenu, plavu i zelenu komponentu boje, pri čemu se vrijednosti boja opet kreću po skali od 0 do 255. Dakle, slika u boji se prikazuje vektorskom funkcijom dvije realne varijable. Različite boje dobivaju se kombiniranjem crvene, plave i zelene boje. Kod slika u boji svaki piksel možemo shvatiti kao  $1 \times 3$  vektor. S obzirom da svaka boja ima cjelobrojne vrijednosti od 0 do 255, možemo dobiti ukupno  $256 \cdot 256 \cdot 256 = 16777216$  različitih boja.

Još jedna važna karakteristika slike je njena veličina, odnosno rezolucija. Rezolucija je zapravo broj redaka i stupaca slike. Veća rezolucija znači da je slika vjerodostojnije prikazuje fizički svijet. Danas je gotovo nemoguće naći digitalnu kameru s rezolucijom manjom od  $640 \times 480$ . Rezolucija MRI skena je primjerice  $128 \times 128$ .

## 1.3 Zahtjevi pri obradi slika

### Raščišćavanje

Pri akviziciji digitalnih slika često se dogodi da na slici nastanu šumovi. Stoga je zadatak raščišćavanja pri obradi slike da identificira i ukloni šumove te istovremeno očuva glavne informacije i strukturu na slici.

Neka je slika sa šumom  $u_0$  dana s

$$u_0(x) = u(x) + n(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

gdje  $n(x)$  označava aditivni Gaussianov bijeli šum, a  $u$  je čista slika. Zadatak raščišćavanja bio bi da od verzije sa šumom  $u_0$  dođemo do čiste slike  $u$ .

### Izoštavanje

Zamućenje na slikama događa se zbog krivog fokusa, podrhtavanja kamere, atmosferskih turbulencija kod astronomskih snimanja, pokreta zbog disanja pacijenta kod medicinskog snimanja i slično. Stoga je zadatak izoštravanja pri obradi slike identifikacija zamućenih dijelova i poboljšavanje slike tako da se zamućeni dijelovi poprave.



Slika 1.1: Primjer raščišćavanja slike (slika preuzeta iz [7])



Slika 1.2: Primjer izoštravanja slike (slika preuzeta iz [13])

## Nadopunjavanje

Još jedan od važnih zahtjeva pri obradi slika je nadopunjavanje dijelova na slikama koji nedostaju radi određenih oštećenja na slici. Kod ovakvih slika sve informacije u određenim pikselima su izgubljene i moraju se rekonstruirati iz netaknutih dijelova slike.



Slika 1.3: Primjer nadopunjavanja slike (slika preuzeta iz [10])

## Segmentacija

Segmentacija slike za zadatak ima sa slike izdvojiti jedan ili više objekata koji su od određene važnosti na slici uz moguću prisutnost šumova na slici i/ili zamućenja slike.

Problem možemo postaviti na sljedeći način. Neka je dana 2d domena  $\Omega$  te slika  $u_0$  koja je potencijalno degradirana šumom ili zamućenjem. Tražimo vizualno značajnu particiju domene slike

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N, \quad N \geq 1,$$

tako da svaka komponenta  $\Omega_n$  vizualno odgovara nekom objektu na slici.



Slika 1.4: Primjer segmentacije slike (slika preuzeta iz [6])

## 1.4 Motivacija varijacijskog i PDJ pristupa obradi slika

Varijacijski račun je matematički alat koji se bavi problemom optimiziranja funkcionala. Varijacijske metode postavljaju problem kojeg rješavamo minimizacijom funkcionala ener-

gije. Rješenja diferencijalnih jednadžbi drugog reda, koje nazivamo Euler-Lagrangeovim jednadžbama, dat će nam funkcije za koje je dani funkcional stacionaran. Kod varijacijskog pristupa obradi slika, rekonstruiranu sliku  $u$  dobivamo iz promatrane slike  $u_0$  kao minimizator funkcionala.

Jedan od tipičnih varijacijskih metoda pri obradi slike je metoda totalne varijacije koju ćemo u nastavku teksta zvati TV model. TV model uklanja šum sa slike  $u_0$  minimizacijom funkcionala energije

$$F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx dy = \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \, dx dy$$

pri čemu mora vrijediti

$$\int_{\Omega} u \, dx dy = \int_{\Omega} u_0 \, dx dy$$

i

$$\int_{\Omega} (u - u_0)^2 \, dx dy = \sigma^2,$$

gdje je  $\sigma$  konstanta koja predstavlja apriornu informaciju o šumu na slici  $u_0$ . Pripadna Euler-Lagrangeova jednadžba je

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) - \lambda_1 - \lambda_2(u - u_0) = 0 \quad \text{na } \Omega.$$

s rubnim uvjetom

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

a  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  su Lagrangeovi multiplikatori. Ograničenje ove metode je to što ju možemo primijeniti samo na skalarnim funkcijama  $u$ , odnosno u terminima slika samo na sivim slikama.

Metode koje se zasnivaju na parcijalnim diferencijalnim jednadžbama usko su povezane s varijacijskim metodama. Minimizacija varijacijskog funkcionala, kao što smo već rekli, rezultira Euler-Lagrangeovim jednadžbama koje i same jesu parcijalne diferencijalne jednadžbe.

S druge strane, ovaj pristup ne mora uvijek slijediti iz varijacijskih modela. Važan primjer je Perona - Malikov model anizotropne difuzije za raščišćavanje slika koji je dan s

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ D(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right],$$

gdje koeficijent difuzije  $D$  ovisi o gradijentu slike  $u$ . Jednadžba osigurava bržu difuziju u unutarnjim područjima gdje se slika slabo mijenja te sporiju difuziju u blizini granica slike. Dakle, model zadržava oštrinu rubova i istovremeno smanjuje šumove na slici, što i želimo.

## 1.5 Filtriranje

Filtriranje je jedna od najkorištenijih metoda pri obradi slika i služi pri njihovom modifikiranju i poboljšavanju. Vjerojatno prvo što čovjeku padne na pamet pri spomenu riječi filter u pogledu slika su filteri na fotografijama na društvenim mrežama i na raznim portalima. Međutim, filteri su puno raširenija metoda poboljšavanja slike i koriste se u raznim sferama. Tako se na primjer filtriranjem uklanjaju razne anomalije na medicinskim slikama poput šumova i slično. Filtriranje slika mijenja vrijednosti svakog piksela slike tako što se boje slike mijenjaju bez da se mijenja pozicija piksela na slici. Postoje i druge tehnike kod kojih se mijenjaju pozicije piksela na slikama.

Ovdje ćemo navesti neke od filtera koji se koriste.

### Median filter

Median filter je nelinearni filter i jedan je od najčešće korištenih. Koristan je pri uklanjanju šumova sa slika.

Vrijednost pojedinog piksela na slici uz pomoć Median filtera se zamjenjuje s vrijednosti mediana piksela u okolini promatranog piksela. Možemo zamisliti da „prozor” koji obuhvaća sve susjedne piksele jednog fiksiranog piksela klizi po slici od jednog do drugog piksela i tako u konačnici dobivamo filtriranu sliku.

123	125	126	130	140
122	124	126	127	135
118	120	150	125	134
119	115	119	123	133
111	116	110	120	130

Slika 1.5: Računanje median vrijednosti okoline piksela (slika preuzeta iz [11])

Na gornjoj slici želimo promijeniti vrijednost pikselu u sredini, odnosno pikselu s trenutnom vrijednošću 150. Vrijednosti piksela iz okoline, odnosno piksela koje obuhvaća prozor sa slike su:

124, 126, 127, 120, 150, 125, 115, 119, 123.

Ako vrijednosti poredamo od najmanje prema najvećoj imamo:

115, 119, 120, 123, 124, 125, 126, 127, 150.

Sada lako vidimo da je median ovih vrijednosti 124, pa primjenom median filtera nova vrijednost promatranog piksela postaje 124.

### Min i max filter

Min i max filteri su također nelinearni filteri.

Min filter je filter koji pojačava tamne točke na slici. Slično kao i kod median filtera, ovdje se vrijednost promatranog piksela zamjenjuje minimalnom vrijednošću piksela iz njegove okoline, odnosno „prozora” koji klizi po slici. Na donjoj slici lijevo je prikazana originalna slika, a desno slika na koju je primijenjen min filter.



Slika 1.6: Min filter (slika preuzeta iz [12])

Suprotno od min filtera, max filter je filter koji pojačava svijetle točke na slici. Ovdje se vrijednost promatranog piksela zamjenjuje maksimalnom vrijednošću piksela iz njegove okoline. Na donjoj slici lijevo je prikazana originalna slika, a desno slika na koju je primijenjen max filter.



Slika 1.7: Max filter (slika preuzeta iz [12])

## Poglavlje 2

# Modeliranje i reprezentacija slika

Osnovni korak pri obradi slika je njena matematička reprezentacija i analiza. Pri različitim zahtjevima obrade koriste se i različite reprezentacije slika.

Digitalnu sliku koja je snimljena nekim uređajem, poput digitalne kamere, najčešće prikazujemo pomoću matrice piksela. Taj matricni prikaz slike  $u = (u_{i,j})$ , odnosno njen analogan prikaz  $u = u(x, y)$ , gdje je  $x \in \Omega = (a, b) \times (c, d)$ , zovemo fizičkom slikom. Da bi fizičkoj slici pridružili matematičku reprezentaciju potrebna nam je određena transformacija. Neka je  $W$  domena transformacije  $\mathcal{T}$ , a  $U$  klasa fizičkih slika. Transformacija je tada dana s

$$\mathcal{T} : U \rightarrow W, \quad u \mapsto w = \mathcal{T}u.$$

Sljedeći primjer nam pokazuje kako i ljudski sustav za vid možemo shvatiti kao operator transformacije.

**Primjer 2.0.1.** *Neka je  $U$  klasa slika  $u = (u_l, u_r)$  projiciranih na lijevo i desno oko, a  $W$  neka predstavlja klasu elektrokemijskih signala koje hvata očni korteks. Tada čovjekov sustav za vid možemo shvatiti kao biološku transformaciju  $\mathcal{T}_h : U \rightarrow W$  koju ostvaruje složena neuronska i stanična mreža.*

Da bismo sliku mogli analizirati, potrebno je izabrati njenu adekvatnu matematičku reprezentaciju. U narednim sekcijama dat ćemo prikaz različitih reprezentacija slika.

### 2.1 Slike kao distribucije

Pristup slikama kao distribucijama pripada determinističkom modeliranju slika i u ovom poglavlju ćemo ga detaljnije opisati.

Neka je  $\Omega$  otvorena i ograničena 2d Lipshitzova domena. Skup test funkcija na  $\Omega$  dan je s

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \phi \subseteq K, K \in \mathcal{K}(\Omega)\}.$$

Za prostor  $\mathcal{D}$  često se koristi i oznaka  $C_c^\infty$ . Svaku test funkciju  $\phi$  možemo shvatiti kao linearni senzor za snimanje signala slike. Sada je slika  $u$  distribucija, odnosno možemo ju shvatiti kao neprekidni linearan funkcional na  $\mathcal{D}(\Omega)$

$$u : \phi \mapsto \langle u, \phi \rangle.$$

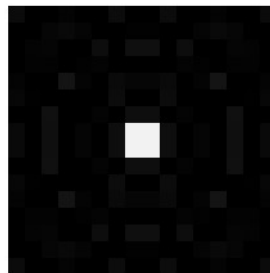
Dakle, na prostor slika možemo gledati kao na prostor distribucija  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Prednost reprezentacije slika pomoću distribucija je što ispunjavaju zahtjeve raznolikih slika iz potpuno različitih područja. Također, slika  $u$  ne postoji u stvarnom svijetu već se dobiva kao odgovor na senzore kamere ili ljudskog sustava za vid. Zbog toga reprezentacija pomoću distribucija vrlo dobro rezonira s ovime.

**Primjer 2.1.1.** *Diracova delta funkcija*

$$\langle u, \phi \rangle = \phi(0, 0), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*najjednostavniji je primjer slike kao distribucije. Prikazuje svijetlu točku koncentriranu u ishodištu.*



Slika 2.1: Diracova delta funkcija kao slika (slika preuzeta iz [14])

**Primjer 2.1.2.** *Distribucija dana s*

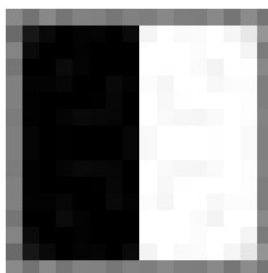
$$u(x, y) = H(x),$$

*gdje je  $H$  Heavisideova funkcija*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

*prikazuje sliku s jednolikim idealnim rubom sa skokom (eng. an ideal uniform step edge).*





Slika 2.2: Heavisideova funkcija kao slika (slika preuzeta iz [14])

**Primjer 2.1.3.** Distribucija dana s

$$u(x, y) = \delta(x)$$

takva da za svaki  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(0, y) dy$$

prikazuje jednoliku svijetlu zraku (eng. a uniform bright line or beam).

Distribucija dana s

$$u(x, y) = \delta(x)v(y),$$

gdje je  $v(y)$  1d distribucija, tako da za svaki  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \phi \rangle = \langle v(y), \phi(0, y) \rangle,$$

prikazuje nejednoliku svijetlu zraku (eng. a nonuniform bright line).

Da bismo pomoću distribucijskih slika mogli modelirati slike koje su nam od praktične koristi u primjeni, potrebna su nam još neka svojstva distribucija. Ako na sliku gledamo kao na broj fotona projiciranih na piksele, prirodno je da svojstvo pozitivnosti distribucijskih slika treba biti zadovoljeno.

**Definicija 2.1.4.** Za distribucijsku sliku kažemo da je pozitivna ako za svaki senzor  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  takav da  $\phi(x) \geq 0$  vrijedi

$$\langle u, \phi \rangle \geq 0.$$

Sada za pozitivnu distribucijsku sliku kao posljedicu imamo njenu neprekidnost.

**Teorem 2.1.5.** Neka je  $u$  pozitivna distribucijska slika na  $\Omega$ . Tada za svaki kompakt  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  postoji konstanta  $C > 0$ , koja ovisi o kompaktu, tako da za svaki senzor  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  takav da  $\text{supp } \phi \subseteq K$  vrijedi

$$\langle u, \phi \rangle \leq C \|\phi\|_{\infty}.$$

*Dokaz.* Neka je  $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$  režuća funkcija takva da  $0 \leq \chi \leq 1$  i  $\chi = 1$  na kompaktu  $K$ . Za svaku  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  takvu da  $\text{supp } \phi \subseteq K$  vrijedi

$$-\chi(x)\|\phi\|_\infty \leq \phi(x) \leq \chi(x)\|\phi\|_\infty, \quad \text{za svaki } x \in \Omega.$$

Tada je

$$\langle u, \phi + \chi\|\phi\|_\infty \rangle \geq 0 \quad \text{i} \quad \langle u, \chi\|\phi\|_\infty - \phi \rangle \geq 0.$$

Iz ovog direktno slijedi

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq |\langle u, \chi \rangle| \|\phi\|_\infty.$$

Uz odabir  $C = |\langle u, \chi \rangle|$  slijedi tvrdnja. □

Sada je jasno da su pozitivne distribucije, distribucije reda 0, a Rieszov teorem o reprezentaciji nam kaže da ih možemo shvatiti kao Radonove mjere.

**Teorem 2.1.6** (Rieszov teorem o reprezentaciji - distribucije). [14, teorem 3.3] *Distribucija  $u$  je pozitivna distribucijska slika ako i samo ako postoji jedinstvena Radonova mjera  $\mu$  na  $\Omega$  takva da za svaki senzor  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  vrijedi*

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi(x) d\mu.$$

Ono što nam je također od značaja je da znamo kako „mjeriti” informacije koje nam daje distribucijska slika.

**Definicija 2.1.7.** *Neka je  $U \subseteq \Omega$  neki otvoreni skup. Ukupna masa od  $U$  definirana je sa*

$$\|u\|_U = \sup \{ \langle u, \phi \rangle : \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{supp } \phi \subseteq U, \|\phi\|_\infty \leq 1 \}.$$

Uzmimo sada konstantnu sliku  $u \equiv 1$  na  $\Omega$ . Vidimo da je  $\|u\|_\Omega = |\Omega|$ . S obzirom da neuroni primarnog korteksa reagiraju samo na prostorne promjene i karakteristike, ovo nam nije prihvatljivo u primjeni. Zato definiramo novu mjeru kao

$$\|u\|_U^* = \sup \{ \langle u, \phi \rangle : \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{supp } \phi \subseteq U, \|\phi\|_\infty \leq 1, \langle 1, \phi \rangle = 0 \}.$$

Uvjet  $\langle 1, \phi \rangle = 0$  ekvivalentan je s  $\int_{\Omega} \phi(x) dx = 0$ . Ako ovo pogledamo u 1d, znamo da u tom slučaju postoji  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  takva da  $\phi(x) = \psi'(x)$ , to jest

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \psi' \rangle = - \langle u', \psi \rangle.$$

Sada možemo uočiti da smo uvjetom  $\langle 1, \phi \rangle = 0$  željeli postići to da na slikama mjerimo samo promjene (u 1d slučaju se iz prethodnog vidi da  $\|u\|_U^*$  ovisi samo o distribucijskoj derivaciji od  $u$ ), odnosno da su netrivialni senzori  $\phi$  oscilatorni. Jasno je da za konstantnu sliku bez značajki vrijedi  $\|u\|_U^* = 0$ .

## 2.2 $L^p$ slike

Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Za svaki  $p \in [1, +\infty)$  Lebesgueov prostor  $L^p(\Omega)$  definiramo kao

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ izmjeriva} : \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

dok je za  $p = +\infty$  Lebesgueov prostor  $L^\infty(\Omega)$  definiran kao

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ izmjeriva} : (\exists M \geq 0) |u| \leq M \text{ s.s.} \}.$$

Ovo su Banachovi prostori na kojima je norma za  $p \in [1, +\infty)$  dana sa

$$\|u\|_p = \left[ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

a za  $p = \infty$

$$\|u\|_\infty = \inf \{ M > 0 : |u| \leq M \text{ s.s.} \}.$$

Važno svojstvo  $L^p$  slika nam opet daje Rieszov teorem o reprezentaciji.

**Teorem 2.2.1** (Rieszov teorem o reprezentaciji -  $L^p$  slike). [14, teorem 3.4] Neka je  $1 \leq p < \infty$  te neka je  $p^*$  njegov konjugirani eksponent, tj  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Tada je svaki neprekidni linearni funkcional  $L$  na  $L^p(\Omega)$  dan s

$$L(u) = \int_{\Omega} v_L(x)u(x) dx$$

za neki jedinstveni  $v_L \in L^{p^*}(\Omega)$ . Nadalje, vrijedi

$$\|L\| = \|v_L\|_{p^*}.$$

Po prethodnom teoremu je dan izomorfizam prostora  $L^p(\Omega)$  i  $(L^{p^*}(\Omega))'$ , za  $1 \leq p < \infty$ . Budući da je prostor senzora  $\mathcal{D}(\Omega)$  gust u  $L^{p^*}$ , za  $1 \leq p^* < \infty$ , svaka  $L^p$  slika potpuno je određena sa svojim distribucijskim svojstvima u  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , odnosno svaka  $L^p$  slika,  $1 < p < \infty$ , je i distribucijska slika. Budući da obrat općenito ne vrijedi, možemo zaključiti da  $L^p$  slike imaju više strukture od općenitih distribucijskih slika.

## 2.3 Soboljevlje slike

Prisjetimo se definicije Soboljevljevog prostora  $H^1(\Omega)$ .  $H^1(\Omega)$  je Hilbertov prostor definiran s

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega) \right\},$$

pri čemu  $\nabla$  predstavlja slabu (distribucijsku) derivaciju. Skalarni produkt na  $H^1$  je dan s

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2}$$

te inducira normu

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2}.$$

Uzmimo sada sliku  $u \in L^2(\Omega)$ . To znači da su njene distribucijske derivacije  $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$  dobro definirane (vidi prethodnu točku). Prirodno se nameće da je mjera slikovnih informacija za  $H^1$  slike dana s

$$\|\nabla u\|_{L^2} = \left( \int_{\Omega} [(\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2] dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

jer time u obzir uzimamo samo promjene na slici.

Soboljevlevi prostori slika višeg reda  $H^k(\Omega)$ ,  $k \geq 2$  definiraju se analogno kao i prostor  $H^1(\Omega)$ .

S druge strane, ako umjesto  $L^2$  norme uzmemo bilo koju drugu  $L^p$ ,  $p \geq 1$ , normu da bismo mjerili derivacije, dobivamo Soboljevlejeve prostore slika koje označavamo s  $W^{k,p}(\Omega)$ . Preciznije, ovi prostori se definiraju na sljedeći način:

**Definicija 2.3.1.** Za  $1 \leq p \leq \infty$  definiramo Soboljevlev prostor  $W^{k,p}(\Omega)$  kao prostor lokalno sumabilnih funkcija  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  takvih da za svaki multiindeks  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq k$ , derivacija  $D^\alpha$  postoji u slabom smislu i pripada prostoru  $L^p(\Omega)$ . Posebno, za  $p = 2$ , pišemo  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ .

Prostori  $W^{k,p}$  su Banachovi prostori s normom

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Ukoliko želimo modelirati promjenu na slici s njenim prvim derivacijama prirodno se nameće da za prostor slika uzmemo prostor  $H^1(\Omega)$ . Međutim, jedan od nedostataka ako uzmemo  $u \in H^1(\Omega)$  je što tada  $u$  nužno mora imati određeno svojstvo neprekidnosti.

Pogledajmo najprije jednodimenzionalni slučaj. Neka je  $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in H^1(0, 1)$ . Tada za svaki  $0 < s < t < 1$  imamo

$$u(t) - u(s) = \int_s^t u'(r) dr \leq \sqrt{t-s} \sqrt{\int_s^t |u'(r)|^2 dr} \leq \sqrt{t-s} \|u\|_{H^1}$$

pa vidimo da  $u$  mora biti 1/2-Hölder neprekidna.

U dvije dimenzije uzmimo  $u : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in H^1((0, 1) \times (0, 1))$ . Tada  $u$  općenito nije neprekidna, međutim za skoro sve  $y \in (0, 1)$  je preslikavanje  $x \mapsto u(x, y) \in H^1(0, 1)$ . Naime, po Fubinijevom teoremu i činjenici da je  $u \in H^1(0, 1)$  imamo

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 |D_x u(x, y)|^2 dx \right) dy \leq \|u\|_{H^1}^2 < \infty,$$

iz čega slijedi da za skoro svaki  $y$  funkcija  $x \mapsto D_x u(x, y)$  mora biti kvadratno integrabilna. Iz ovoga slijedi da je za skoro svaki  $y$  preslikavanje  $x \mapsto u(x, y)$  1/2- Hölder neprekidno u  $x$ , pa slika  $u$  sigurno ne može prelaziti preko vertikalnih rubova (ne možemo imati skokove po skoro svim horizontalnim pravicima). Analogno vrijedi i za  $y \mapsto u(x, y)$ , odnosno za horizontalne rubove. Slično se može pokazati i za svaki  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Problem kod zahtjeva da je slika neprekidna je to što rubovi slike, koje predstavljaju skokove u slikovnoj funkciji, ne mogu biti prikazani. Međutim, s obzirom da rubovi slike sadrže njene najvažnije značajke, kad god obrađujemo sliku želimo prikazati i sačuvati njene rubove u tom proces. Zbog toga ćemo promatrati prostore manje glatkoće, odnosno prostore funkcija s omeđenom varijacijom koji će biti opisani u idućoj sekciji.

## 2.4 BV slike

Kod reprezentacije slika želimo prostor slika koji je matematički moguć i u praksi vjerno prikazuje ključne značajke dane slike. Rudin, Osher i Fatemi su 1992. godine uveli pojam totalne varijacije. Neka je  $u = u(x, y) \in L^1(\Omega)$ . Ako je  $u$  glatka, tada je njena totalna varijacija (TV) definirana s

$$\text{TV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x, y)| dx dy. \quad (2.1)$$

Za sliku  $u$  za koju vrijedi  $\text{TV}(u) < \infty$  kažemo da ima ograničenu varijaciju.  $BV(\Omega)$  označava prostor svih  $L^1$  funkcija s ograničenom varijacijom.

Pogledajmo sada koliku glatkoću od  $u$  zahtjeva definicija (2.1). Na prvi pogled čini se da bi  $u$  trebala biti barem  $W^{1,1}(\Omega)$  funkcija, međutim prostor  $BV$  je puno veći od toga. Pogledajmo sljedeći primjer.

**Primjer 2.4.1.** Za  $f(x, y) \in L^1(\Omega)$  možemo definirati totalni integral s

$$I(f) = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

Neka je  $f(x, y) = \delta(x, y)$  Diracova delta funkcija u  $(0, 0) \in \Omega$ . Tada je

$$I(\delta) = \int_{\Omega} \delta(x, y) dx dy = 1.$$

Međutim,  $\delta$  nije  $L^1$  funkcija u tradicionalnom smislu, već je mjera.

Neka je sada  $\mu$  nenegativna mjera svih Borelovih skupova iz  $\Omega$  takva da  $\mu(K) < \infty$  za sve kompakte  $K \subseteq \Omega$ . Ovakve mjere su primjeri Radonovih mjera. Kao i u prethodnom primjeru, možemo definirati

$$I(\mu) = \int_{\Omega} 1 \, d\mu = \mu(\Omega).$$

Mjere  $\mu$  generaliziraju prostor  $L^1_{loc}$ . Može se pokazati da su Radonove mjere najopćenitija matematička klasa za koju je  $I(\cdot)$  dobro definiran.

Sada isto možemo primijeniti i na TV funkcional (2.1), uz  $f = \nabla u$ .

**Primjer 2.4.2** (Totalna varijacija Heavisideove funkcije). *Neka je  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Heavisideova funkcija, tj.*

$$u(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

*Lako se vidi da je distribucijska derivacija funkcije  $u$  jednaka  $\delta$ , gdje je  $\delta$  Diracova delta funkcija u 0. Tada  $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R})$  (jer  $u'$  nije niti funkcija), ali i dalje možemo definirati*

$$TV(u) = \int_{\mathbb{R}} |u'(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\delta = 1.$$

Općenito, neka je  $\mu(x)$  konačna Radonova mjera na  $\mathbb{R}$  te  $u$  funkcija takva da  $u' = \mu$ . Tada možemo definirati

$$TV(u) = \int_{\mathbb{R}} d|\mu| = |\mu|(\mathbb{R}).$$

Ovdje je  $|\mu| = \mu^+ - \mu^-$  totalna varijacija mjere  $\mu$ , a  $\mu^+$  i  $\mu^-$  njena pozitivna i negativna varijacija.

Sada možemo poopćiti totalnu varijaciju za funkcije  $u \in L^1_{loc}$ .

**Definicija 2.4.3** (Totalna varijacija). *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Za sliku  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  totalna varijacija je dana s*

$$TV(u) = |Du|(\Omega) = \sup \left\{ - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2), |\varphi(x)| \leq 1, x \in \Omega \right\}.$$

*Prostor  $BV(\Omega)$  funkcija s ograničenom varijacijom je skup funkcija  $u \in L^1(\Omega)$  takvih da  $TV(u) < \infty$  s normom*

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + TV(u).$$

Sada možemo sumirati:

- $W^{1,1}$  slike su i  $BV$  slike, no njima ne možemo prikazati rubove slika koji su ključni za percepciju slike.

- $L^p$  slike dobro prikazuju rubove, no ne mogu zorno prikazati lokalne oscilatorne nepravilnosti kod slika.
- $BV$  slike najbolje balansiraju između prikaza nepravilnosti i uvažavanja rubova slika.

Upravo zbog gore navedenog u ovom radu slike ćemo najčešće interpretirati kao elemente prostora  $BV$ .

## Poglavlje 3

# Raščišćavanje

### 3.1 Šum na slikama

Šum možemo shvatiti kao neželjeni signal na slici. Preciznije, šum je nasumična varijacija svjetline ili boje na slikama. Ljudsko oko ga vidi kao zrnatu strukturu koja prekriva sliku. Najčešće je uzrokovan tehničkim ograničenjima uređaja za akviziciju slika ili zbog okolnosti iz okoline u kojoj je slika snimljena. Primjerice, kod astronomskih snimanja do šumova na slikama može doći zbog nehomogenosti atmosfere u smislu gustoće, indeksa loma svjetlosti ili temperature. U medicini, šumovi na medicinskim slikama javljaju se zbog spontanog kretanja pacijenta poput disanja ili zbog nehomogenosti tkiva i organa.

Pri raščišćavanju slike želimo s nje maknuti šum, a da pritom izgubimo što manje informacija sa slike i da njena struktura ostane očuvana. U ovom procesu najčešće koristimo inverzni, median ili Wiener filter.

U ovom radu bavit ćemo se aditivnim šumom, tj. promatrat ćemo zašumljenu sliku

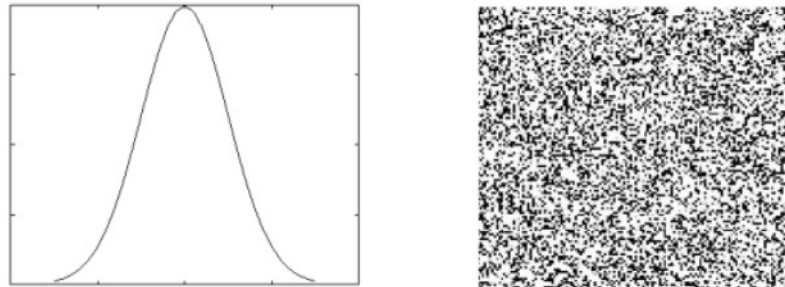
$$u_0(x) = u(x) + n(x), \quad x \in \Omega,$$

gdje  $u$  predstavlja originalnu sliku, a  $n$  šum.

#### Gaussov šum

Gaussov šum je vrsta signalnog šuma koji ima funkciju gustoće vjerojatnosti jednaku normalnoj distribuciji. Ova vrsta šuma najčešće nastaje pri akviziciji slika zbog toga što senzori na različitim uređajima imaju svojstvene šumove koji nastaju zbog razine osvjetljenja i temperature. Pikseli na slikama s Gausovim šumom zbroj su originalnih vrijednosti piksela i nasumičnih vrijednosti Gaussovog šuma. Sljedeća slika prikazuje Gaussovu funkciju distribucije vjerojatnosti Gaussovog šuma i prikaz Gaussovog šuma u pikselima.

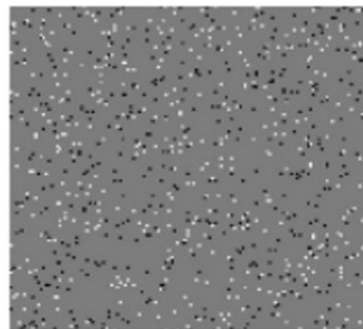




Slika 3.1: Gaussov šum (slika preuzeta iz [1])

### Sol i papar šum

Sol i papar šum je šum kojeg ljudsko oko vidi kao bijele i crne piksele koji se pojavljuju nasumično. Bijeli obično na tamnijim dijelovima slike, a crni na svijetlijim. Ova vrsta šuma se najčešće pojavljuje na fotografijama, a uglavnom se javlja zbog grešaka u prijenosu datoteka ili grešaka pri pretvorbi fotografije iz analogne u digitalnu. Prikaz sol i papar šuma dani su na donjoj slici.



Slika 3.2: Sol i papar šum (slika preuzeta iz [1])

## 3.2 Rudin, Osher, Fatemi TV model raščišćavanja

TV model raščišćavanja slika uveli su 1992. godine Rudin, Osher i Fatemi. *BV* model slike te pripadajuća TV Radnova mjera prikladni su za obradu osnovnih vizualnih karakteristika slike, njenih rubova. Pogodnost ovog pristupa je što ne zahtjeva da se rubovi izdvajaju pa je posebno koristan pri raščišćavanju, izoštravanju i nadopunjavanju.

Da bismo motivirali Rudin, Osher, Fatemi TV model raščišćavanja, uvest ćemo pristranu iterativnu median proceduru filtriranja (eng. biased iterated median filtering procedure) čija su rješenja prirodno povezana s TV modelom raščišćavanja.

Promotirimo 1d diskretizirani slikovni signal na  $[0, 1]$

$$x[k], \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

koji predstavlja točkovni uzorak neprekidnog signala

$$x[k] = x\left(\frac{k}{N}\right).$$

Pretpostavimo da je signal onečišćen bijelim šumom  $n[k]$  s varijancom  $\sigma^2$  :

$$x_0[k] = x[k] + n[k].$$

Uz početnu iteraciju  $x^{(0)}$ , provodimo iterativni proces procjene baziran na pristranom median filtriranju. U svakom pikselu  $k$  definiramo TV procjenu pogreške u  $n$ -toj iteraciji procesa:

$$e_\lambda(z | x^{(n)}[k-1], x^{(n)}[k+1]; x_0[k]) = |z - x^{(n)}[k-1]| + |z - x^{(n)}[k+1]| + \lambda|z - x_0[k]|,$$

za  $k = 1, \dots, N-1$ . Ovdje  $\lambda \geq 0$  označava pristranost prema promatranom zašumljenom signalu. U rubnim čvorovima  $k = 1$  i  $k = N$  gube se nepostojeći članovi pa imamo:

$$\begin{aligned} e_\lambda(z | x^{(n)}[0]; x_0[1]) &= |z - x^{(n)}[0]| + \lambda|z - x_0[1]| \\ e_\lambda(z | x^{(n)}[N-1]; x_0[N]) &= |z - x^{(n)}[N-1]| + \lambda|z - x_0[N]| \end{aligned}$$

Sada definiramo procjenitelja pogreške u sljedećoj,  $n+1$ -voj iteraciji, kao

$$x^{(n+1)}[k] = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}} e_\lambda(z | x^{(n)}[k-1], x^{(n)}[k+1]; x_0[k]), \quad k = 0, \dots, N.$$

Gornja relacija definira jednu iteraciju od  $x^{(n)}$  do  $x^{(n+1)}$  koju zovemo pristrano median filtriranje.

Za  $z = (z[0], z[1], \dots, z[N])$ , definiramo funkciju ukupnog troška s

$$\tilde{E}_\lambda[z | x^{(n)}; x_0] = \sum_{k=0}^N e_\lambda(z[k] | x^{(n)}[k-1], x^{(n)}[k+1]; x_0[k])$$

koja je rastavljena po komponentama od  $z$ .

Iz gornje definicije iteracije trivijalno slijedi:

$$x^{(n+1)} = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^{N+1}} \tilde{E}_\lambda[z|x^{(n)}; x_0].$$

Štoviše, ova relacija je ekvivalentna s definicijom jer su sumandi neovisni.

Parametri funkcije troška  $\tilde{E}_\lambda$  su  $x^{(n)}$  i  $x_0$ , dok je  $z$  njena varijabla. Kroz rad će se često pojavljivati ovakva oznaka. U argumentu lijevo od vertikalne linije uvijek će biti varijable funkcije, a desno od vertikalne linije njeni parametri.

**Teorem 3.2.1.** *Ako gornji iterirajući proces filtriranja konvergira, odnosno*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}[k] = \hat{x}[k], \quad k = 0, \dots, N,$$

*limes  $\hat{x}$  mora biti kritična točka funkcije troška*

$$E_\lambda[z|x_0] = \sum_{k=0}^{N-1} |z[k+1] - z[k]| + \lambda \sum_{k=0}^N |z[k] - x_0[k]|.$$

Dokaz teorema 3.2.1 može se pronaći u [14, teorem 4.13].

Sada možemo uvesti Rudin, Osher, Fatemi TV model raščišćavanja. Ako pustimo  $N$  u beskonačno, funkcija greške  $E_\lambda[z|x_0]$  iz teorema 3.2.1 konvergira prema

$$E_\lambda[z|x_0] = \int_0^1 |z'(t)| dt + \lambda \int_0^1 |z(t) - x_0(t)| dt$$

odnosno, općenitije

$$E_{\lambda,p}[z|x_0] = \int_0^1 |z'(t)| dt + \lambda \int_0^1 |z(t) - x_0(t)|^p dt,$$

za neki  $p \geq 1$ . S druge strane, ako je šum  $n(t)$  aditivan i Gaussov s varijancom  $\sigma^2$ , tada maksimalna aposteriorna procjena vjerojatnosti sugerira da uzmemo  $p = 2$ , a za  $\lambda$  da bude obrnuto proporcionalna varijanci. Tada je pripadajući procjenitelj raščišćavanja dan kao minimizator

$$\hat{x}_{\lambda,p} = \operatorname{arg min}_{z \in BV(0,1) \cap L^p(0,1)} E_{\lambda,p}[z|x_0].$$

Važna karakteristika ovog modela je da je mehanizam diskretnog median filtriranja implicitno ugrađen u njega zbog TV polunorme

$$TV[z] = \int_0^1 |z'(t)| dt.$$

Za 2d slike  $u_0(x)$  sa šumom na kvadratnoj domeni  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$  s aditivnim Gausovim bijelim šumom, model zovemo Rudin, Osher, Fatemi TV model raščišćavanja. Precizno, model je dan s

$$E_{tv}[u|u_0] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u_0(x) - u(x))^2 dx. \quad (3.1)$$

Minimizator od  $E_{tv}$  može biti nedostižan ako je  $u$  iz Soboljevlevog prostora  $W^{1,1}(\Omega)$  (jer taj prostor nije refleksivan). Ako za prostor uzmemo prostor  $BV$  funkcija, koji je veći i prikladniji, funkcional energije možemo zapisati u terminima Radonove mjere kao

$$E_{tv}[u|u_0] = \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u_0(x) - u(x))^2 dx.$$

Sljedeći teorem dodatno pokazuje da je prostor  $BV$  funkcija prikladan kako je  $u$  njemu pripradni optimizacijski problem dobro postavljen.

**Teorem 3.2.2.** *Neka je slika sa šumom  $u_0$  iz  $L^2(\Omega)$ . Tada postoji jedinstveni minimizator  $\hat{u}$  od  $E_{tv}$  iz  $BV(\Omega)$ .*

Dokaz teorema 3.2.2 se može pronaći u [14, teorem 4.14].

## Euler - Lagrangeove jednadžbe

TV model raščišćavanja najčešće se rješava pomoću Euler-Lagrangeovih jednadžbi.

Neka je  $u \in W^{1,1}(\Omega)$ . Računamo prvu varijaciju od  $E_{tv}$  u smjeru  $\delta u$ , tj.

$$\delta E_{tv} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_{tv}[u + h\delta u | u_0] - E_{tv}[u | u_0]}{h} = \frac{d}{dh} E_{tv}[u + h\delta u | u_0] \Big|_{h=0}.$$

Izračunajmo najprije derivaciju funkcije  $G(h) = E_{tv}[u + h\delta u | u_0]$ :

$$\begin{aligned} G'(h) &= \frac{d}{dh} \left[ \int_{\Omega} |\nabla(u + h\delta u)| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u_0 - (u + h\delta u))^2 dx \right] \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dh} |\nabla(u + h\delta u)| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dh} (u_0 - (u + h\delta u))^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\nabla u + h \nabla \delta u}{|\nabla u + h \nabla \delta u|} \cdot \nabla \delta u dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dh} (u_0 - (u + h\delta u))^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u + h \delta \nabla u}{|\nabla u + h \delta \nabla u|} \right] \delta u dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + h \frac{\partial \delta u}{\partial \mathbf{n}}}{|\nabla u + h \delta \nabla u|} \delta u d\mathcal{H}^1 - \lambda \int_{\Omega} (u_0 - u - h\delta u) \delta u dx, \end{aligned}$$

gdje  $\mathbf{n}$  označava vanjsku normalu na  $\partial\Omega$ , a  $d\mathcal{H}^1$  je 1d Hausdorffova mjera na  $\partial\Omega$ . Uvrštavanjem  $h = 0$  u gornjem izrazu dobivamo prvu varijaciju od  $E_{tv}$  u smjeru  $\delta u$  :

$$\delta E_{tv} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \delta u \, dx + \lambda \int_{\Omega} (u - u_0) \delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta u \, d\mathcal{H}^1,$$

Tada postoji jedinstveni  $C^1$  ili  $W^{1,1}$  minimizator koji mora zadovoljavati Euler - Lagrangeovu jednadžbu

$$- \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda(u - u_0) = 0,$$

uz Neumannov rubni uvjet

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Alternativno, ako sa  $f$  označimo podintegralnu funkciju u (3.1), jednadžbu možemo u ovisnosti o vremenu  $t$  zapisati na sljedeći način

$$u_t(x, t) = - \frac{\partial f}{\partial u} = \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] - \lambda(u(x, t) - u_0(x)),$$

s istim rubnim uvjetom. Gornja Euler - Lagrangeova jednadžba je degenerirana eliptička jednadžba zbog člana s gradijentom u nazivniku. Da bi izbjegli ovu degeneraciju, Marquina i Osher su došli do nove nelinearne evolucijske jednadžbe

$$u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] - \lambda |\nabla u| (u - u_0)$$

opet s Neumannovim rubnim uvjetom.

Drugi pristup povezuje TV model raščišćavanja s problemom minimalne površine. Koeficijent dizuzije  $D = |\nabla u|^{-1}$  zamijeni se s

$$D_* = |\nabla u|_a^{-1}, \text{ gdje je } |x|_a = \sqrt{x^2 + a^2},$$

za neki mali parametar kondicioniranja  $a > 0$ . Sada je jednadžba dana s

$$- \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right] + \lambda(u - u_0) = 0, \text{ s rubnim uvjetom } \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

To je Euler - Lagrangeova jednadžba ravnoteže pridružena modificiranoj funkciji troška

$$E_*[u | u_0] = \int_{\Omega} |\nabla u|_a \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u_0(x) - u(x))^2 \, dx.$$

Ako uzmemo parametarski zadanu površinu na  $\Omega$

$$az - u(x) = 0, \quad \text{tj.} \quad z = \frac{1}{a} u(x_1, x_2),$$

energija  $E_*$  tada postaje pristrani model minimalne površine, pri čemu je  $\lambda$  također skaliran s  $a$ .

### 3.3 Implementacija preko zakašnjele difuzivne iteracije fiksnom točkom

U ovom poglavlju prikazat ćemo shemu za implementaciju TV modela raščišćavanja u Kartezijevom koordinatnom sustavu temeljenu na konačnim diferencijama i zakašnjoj difuzivnoj iteraciji fiksnom točkom (eng. lagged diffusivity fixed - point iteration) za Euler - Lagrangeovu jednadžbu

$$-\operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda(u - u_0) = 0 \quad \text{s} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0.$$

Zakašnjela difuzivna metoda fiksne točke linearizira gornju nelinearnu jednadžbu u svakoj iteraciji  $u^{(n)} \rightarrow v = u^{(n+1)}$

$$-\operatorname{div}(D^{(n)} \nabla v) + \lambda(v - u_0) = 0 \quad \text{s} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (3.2)$$

gdje je koeficijent difuznosti  $D^{(n)} = \frac{1}{|\nabla u^{(n)}|}$  određen prethodnom iteracijom, tj. zaostaje jednim korakom (eng. lagged). Sada se sve svodi na optimizaciju sljedećeg kvadratnog funkcionala energije:

$$E[v|u^{(n)}, u_0] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D^{(n)} |\nabla v|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (v - u_0)^2 dx.$$

Na slici 3.3 prikazan je piksel  $O$ , njegova četiri susjedna piksela  $E, N, W$  i  $S$  te četiri pripadajuća polovišta  $e, n, w$  i  $s$ .

Označimo okolinu od  $O$  s

$$\Lambda_O = \{E, N, W, S\}.$$

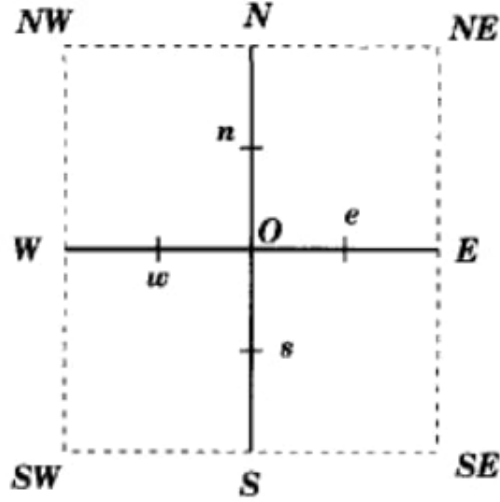
Neka je  $\mathbf{v} = (v^1, v^2) = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ . Divergenciju možemo diskretizirati s centralnim diferencijama

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \approx \frac{v_e^1 - v_w^1}{h} + \frac{v_n^2 - v_s^2}{h},$$

gdje  $h$  označava korak mreže. Kod obrade slika za  $h$  uvijek uzimamo 1. Nadalje, aproksimiramo polovišta u kojima slikovne informacije nisu direktno dostupne. Na primjer u polovištu  $e$  imamo:

$$v_e^1 = \frac{1}{|\nabla u_e|} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_e \approx \frac{1}{|\nabla u_e|} \frac{u_E - u_O}{h},$$

$$|\nabla u_e| \approx \frac{1}{h} \sqrt{(u_E - u_O)^2 + \left( \frac{u_{NE} - u_N - u_S - u_{SE}}{4} \right)^2}.$$



Slika 3.3: Pikel (slika preuzeta iz [14])

Naime, aproksimiramo  $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_e$  pomoću centralnih diferencija, a  $\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_e$  pomoću prosjeka  $\frac{u_{NE}-u_{SE}}{2h}$  i  $\frac{u_N-u_S}{2h}$ . Analogno aproksimiramo i za  $N, W$  i  $S$ . Dakle, Euler - Lagrangeovu jednadžbu u pikselu  $E$  diskretiziramo s:

$$\sum_{P \in \Lambda_O} \frac{1}{|\nabla u_P|} (u_O - u_P) + \lambda (u_O - u_O^0) = 0, \quad (3.3)$$

gdje na primjer za  $P = E$ ,  $p$  označava  $e$ . Nadalje, definiramo

$$\begin{aligned} w_P &= \frac{1}{|\nabla u_P|}, \quad P \in \Lambda_O \\ h_{OP} &= \frac{w_P}{\sum_{Q \in \Lambda_O} w_Q + \lambda} \\ h_{OO} &= \frac{\lambda}{\sum_{Q \in \Lambda_O} w_Q + \lambda}. \end{aligned}$$

Tada (3.3) postaje

$$u_O = \sum_{P \in \Lambda_O} h_{OP} u_P + h_{OO} u_O^0, \quad (3.4)$$

pri čemu je

$$\sum_{P \in \Lambda_O} h_{OP} + h_{OO} = 1.$$

Jednadžba (3.4) predstavlja niskopropusni filter. S obzirom da svi koeficijenti ovise o  $u$ , radi se o sustavu nelinearnih jednadžbi.

Kombinirajući zakašnjeli difuzivni algoritam iteracije fiksne točke (3.2) i Gauss - Jacobijev iterativni algoritam, imamo:

$$u_O^{(n+1)} = \sum_{P \in \Lambda_O} h_{OP}^{(n)} u_P^{(n)} + h_{OO}^{(n)} u_O^{(n)}, \quad (3.5)$$

gdje je  $h^{(n)} = h(u^{(n)})$ . S obzirom da je  $h$  niskopropusni filter, algoritam (3.5) je stabilan i zadovoljava princip maksimuma.

Korisne varijacije metode možemo dobiti alterniranjem defincije od  $w_P$  ili  $|\nabla u_P|$ . Na primjer,  $|\nabla u_e|$  možemo aproksimirati s:

$$|\nabla u_e| \approx \frac{1}{h} \sqrt{(u_E - u_O)^2 + \left(\frac{u_{NE} - u_{SE}}{2}\right)^2}.$$

Također, za  $w_P$  možemo uzeti

$$w_P = \frac{1}{|\nabla u_P|_a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + |\nabla u_P|^2}},$$

za neki skalar  $a > 0$  da bismo regularizirali nazivnik.

## Implementacija u Python-u

Opisani Rudin, Osher, Fatemi TV model raščišćavanja implementirat ćemo u programskom jeziku Python.

Python je jezik koji može obavljati razne programske zadatke, a jedan od njih je i obrada slika. Zapravo, ovo je programski jezik koji se danas najviše koristi u svrhu obrade slika. Neki od razloga su to što je besplatan i dostupan u svim operativnim sustavima te je sintaktički dosta jednostavan u usporedbi s nekim drugim jezicima poput C/C++.

Moduli u Pythonu omogućavaju lakši i brži razvoj programskog kôda. Postoji puno modula za Python koji ubrzavaju razvoj programskog kôda jednostavnim pozivanjem unaprijed napisanih funkcija, konstanti i slično. Kod obrade slika najvažniji moduli su: Scikit-image, SciPy i OpenCV. Scikit-image uključuje algoritme za segmentaciju, manipulacije s bojama, filtriranje i slično. SciPy se koristi za matematičke proračune te sadrži i algoritme za mjerenje objekata na slikama, filtriranje, prilagođavanje interpolaciji itd. Naposljetku, OpenCV služi za obradu slika, prepoznavanje lica, otkrivanje objekata na slikama i slično.

Za potrebe TV raščišćavanja koristili smo metodu `denoise_tv_chambolle` iz modula `restoration`. Metoda se sastoji od pet parametara.



1. `image` -  $n$  - dimenzionalni niz `int`-ova, `uint`-ova ili `float`-ova koji predstavlja podatke koje je potrebno raščistiti, odnosno numerički prikaz slike
2. `weight` - `float` vrijednost, težina raščišćavanja, što je ova vrijednost veća, slika će se više raščistiti
3. `eps` - `float` vrijednost, relativna razlika funkcije troška koja određuje kriterij zaustavljanja
4. `max_num_iter` - `int` vrijednost, maksimalan broj iteracija algoritma
5. `multichannel` - `boolean` vrijednost, određuje primjenjuje li se TV raščišćavanje odvojeno za svaki kanal boje R, G, B

Metoda vraća  $n$ - dimenzionalni niz koji predstavlja raščišćenu sliku. Cijeli program dan je sljedećim kodom.

```
#Potrebne biblioteke
import cv2
from skimage import io, img_as_float
from skimage.restoration import denoise_tv_chambolle
from matplotlib import pyplot as plt

#Čitanje slike
image = img_as_float(io.imread('images/balloons_noisy.png', as_gray
                             =False))

#TV raščišćavanje
denoise_image = denoise_tv_chambolle(image, weight=0.2, eps=0.0002,
                                     max_num_iter=500, multichannel=True)

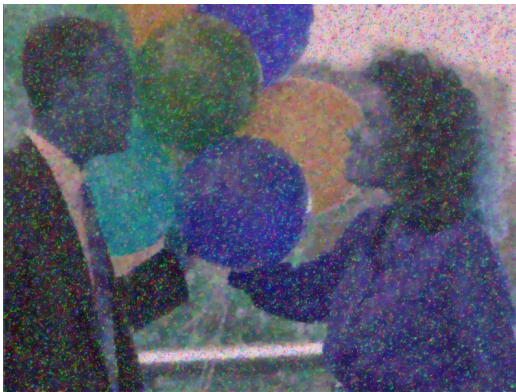
#Prikaz originalne i nove slike
cv2.imshow("Original", image)
cv2.imshow("TV Filtered", denoise_image)

cv2.waitKey(0)
cv2.destroyAllWindows()
```

Na slici 3.4a prikazana je izvorna zašumljena slika koju smo učitali u našem programu. Slike 3.4b i 3.4c su izlazne slike programa pri čemu smo sliku 3.4b dobili uz `weight=0.2`,



(a) Originalna slika (slika preuzeta iz [9])



(b) TV filter, weight=0.2



(c) TV filter, weight=0.45

Slika 3.4: Rezultati implementacije u Python-u

a sliku 3.4c uz  $\text{weight}=0.45$ . Primijetimo kako je šum na slici s većim  $\text{weight}$  bolje otklonjen što smo i očekivali. Međutim, ono što je karakteristično za TV raščišćavanje je da obično daje slike s efektom crtanog filma, što je i vidljivo. Također, možemo primijetiti kako su rubovi objekata na slici očuvani što smo i naveli kao jednu od prednosti TV modela.

# Poglavlje 4

## Izoštavanje

Uklanjanjem zamućenja na slikama, njihovim izoštravanjem, iz zamućene slike oporavkom dobivamo jasno vidljivu sliku. Zamućenje najčešće nastaje podrhtavanjem uređaja za akviziciju slike ili pomicanjem objekta kojeg se snima. Ovaj problem jedan je od osnovnih problema u obradi slika i računalnom vidu.

Matematički, izoštravanje je usko povezano s difuzijskim procesima unatrag koji su vrlo nestabilni. Dakle, modeli izoštravanja rješavaju inverzne probleme pa su od presudne važnosti pogodni regularizatori koji osiguravaju stabilnost često na uštrb detalja na slikama. Tehnike regularizacije osiguravaju postojanje, jedinstvenost i stabilnost izoštranih slika.

### 4.1 Zamućenje na slikama

Ovdje pretpostavimo da  $u \in L^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  omeđen, predstavlja sliku.

#### Linearna zamućenja

Izoštavanje možemo shvatiti kao poništavanje procesa zamućivanja na oštroj bistroj slici. Kao što smo već rekli, radi se o inverznom problemu. Zbog toga ćemo najprije opisati matematičke modele zamućivanja da bismo se mogli baviti izoštravanjem.

Općenito, linearno zamućenje  $u_0 = K u$  definirano je kao ograničeni linearni operator  $K$ . U stvarnom svijetu, šum je neizbježan pa zamućenje modeliramo kao

$$u_0 = K(u) + n,$$

gdje  $n$  predstavlja (aditivni) šum.

Najčešće korišteni tip linearnog zamućenja je zamućenje invarijantno na pomake. Za linearno zamućenje  $K$  kažemo da je invarijantno na pomake ako za svaki pomak  $a \in \mathbb{R}^2$  i

svaku točku  $x \in \mathbb{R}^2$

$$u_0(x) = (K(u))(x) \implies u_0(x - a) = (K(u))(x - a).$$

U obradi signala linearni operator koji je invarijantan na pomake može se zapisati kao konvolucija. Dakle,

$$(K(u))(x) = (k * u)(x) = \int_{\Omega} k(x - y)u(y) dy, \quad x \in \Omega$$

za neku funkciju jezgre operatora  $k(x)$ .

Promotrimo sada općeniti neprekidni linearni operator zamućenja  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  koji nije nužno invarijantan na pomake. Za neki fiksni piksel  $x \in \Omega$ , je

$$L^2(\Omega) \ni u \xrightarrow{L_x} (K(u))(x) \in \mathbb{R}$$

neprekidni linearni funkcional na Hilbertovom prostoru  $L^2(\Omega)$ . Sada Rieszov teorem o reprezentaciji [8, dodatak D, teorem 2] povlači da postoji jedinstveni vektor  $k(x, \cdot) \in L^2(\Omega)$  takav da  $L_x u = \langle k(x, \cdot), u \rangle$ , odnosno

$$u_0(x) = \int_{\Omega} k(x, y)u(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Ovdje je općenito  $k(x, \cdot) \in L^2(\Omega)$ , međutim u terminima slika domena  $\Omega$  je uvijek ograničena pa u tom slučaju imamo  $L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ , odnosno  $k(x, \cdot) \in L^1(\Omega)$ . Dakle, i u općem slučaju imamo integralnu reprezentaciju zamućenja  $u_0$ .

## DC uvjet

DC uvjet je dan s

$$K(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \text{ uz } \mathbb{1} \in L^\infty$$

te je ovo jedna od istaknutih karakteristika operatora zamućenja. Kad je zamućenje invarijantno na pomake s jezgrom  $k$ , DC uvjet zahtjeva

$$\int_{\mathbb{R}^2} k(x) dx = 1.$$

## Nelinearna zamućenja

U literaturi se najčešće koriste linearna zamućenja, no postoje i nelinearna zamućenja. Promotrimo sljedeću zadaću:

$$v_t = \operatorname{div} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \nabla v \right], \quad (4.1)$$

$$v|_{t=0} = u(x). \quad (4.2)$$

Jednadžba (4.1) naziva se Perona - Malikova nelinearna izotropna difuzija i koristi se za izbjegavanje problema zamućivanja. Koristi se nehomogeni proces koji smanjuje difuzivnost na onim mjestima na slici za koje je veća vjerojatnost da se radi o rubovima. Navedena vjerojatnost se mjeri s  $|\nabla u|^2$ . Cilj je smanjiti izgladivanje na rubovima gdje je  $|\nabla u|$  velik i time poboljšati rubove.

Neka je  $v(x, t)$  rješenje gornje zadaće (4.1). Za bilo koje fiksno konačno vrijeme  $T > 0$ , definiramo nelinearni operator  $K = K_T$  s

$$u_0 = K(u) = v(x, T).$$

Nelinearnost je očita kako je sama jednadžba (4.1) nelinearna. Primijetimo:

$$K(\lambda u) \neq \lambda K(u), \text{ za } \lambda \neq 0.$$

Ali, operator  $K$  očito zadovoljava DC uvjet. Naime, za  $u \equiv \mathbb{1}$  je  $v \equiv \mathbb{1}$  rješenje zadaće (4.1)-(4.2).

## 4.2 Rudin, Osher, Fatemi TV model izoštravanja

U ovom poglavlju ćemo opet govoriti o Rudin, Osher, Fatemi TV modelu, ali ovaj put o njihovom modelu izoštravanja.

Ako uzmemo TV mjeru za regularizaciju slike  $u$ , odnosno  $E[u] = \alpha \int_{\Omega} |Du|$ , posteriorna energija izoštravanja je dana sa

$$\begin{aligned} E[u|u_0, k] &= E[u] + E[u_0|u, k] \\ &= \alpha \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (k * u - u_0)^2, \quad x \in \Omega = \mathbb{R}^2, \alpha, \lambda > 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Relaciju (4.3) zovemo Rudin, Osher, Fatemi TV model izoštravanja.

Primijetimo da dokle god promatramo minimizaciju energije, samo omjer  $r = \frac{\alpha}{\lambda}$  utječe na rješenje. Općenito,  $r = \frac{\alpha}{\lambda}$  bi trebao biti proporcionalan varijanci šuma  $\sigma^2$ .

Da bismo olakšali invarijantnost na pomake u (4.3) smo pretpostavili da je slikovna domena  $\Omega$  cijeli prostor  $\mathbb{R}^2$ . Međutim, u primjeni  $\Omega$  je često ograničeni disk ili kvadrat za koji zamućenje

$$K(u) = (k * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} k(x - y)u(y) dy, \quad x \in \Omega$$

mora biti redefinirano.

Najprije, zamućenje možemo modificirati tako da jezgra operatora nije invarijanta na pomake. Dana je s

$$k(x, y) = \frac{k(x - y)}{\int_{\Omega} k(x - z) dz}, \quad x, y \in \Omega. \quad (4.4)$$

Pretpostavimo da je originalna jezgra operatora  $k(x)$  nenegativna i da  $x = (0, 0)$  pripada nosaču mjere  $d\mu(x) = k(x) dx$ . To onda znači da je integral od  $k(x)$  na bilo kojoj okolini  $(0, 0)$  pozitivan. Tada je nazivnik u (4.4) uvijek pozitivan. Provjerimo da je DC uvjet zadovoljen i kada integriramo po  $\Omega$  ( $x \in \Omega$ ):

$$(K(\mathbb{1}))(x) = \int_{\Omega} \frac{k(x-y)}{\int_{\Omega} k(x-z) dz} dy = \frac{\int_{\Omega} k(x-y) dy}{\int_{\Omega} k(x-z) dz} = 1.$$

Alternativni način je da ekstrapoliramo  $u$  izvan  $\Omega$ . Neka je

$$Q : u \Big|_{\Omega} \mapsto \tilde{u} = Q(u),$$

pogodni linearni operator ekstrapolacije koji proširuje  $u$  na  $\Omega$  na cijelu ravninu. Tada je modifikacija zamućenja dana s

$$(K(u))(x) = (k * \tilde{u})(x) = (k * Q(u))(x), \quad x \in \Omega.$$

DC uvjet je zadovoljen ako i samo ako je  $k * Q(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$  kada je restringiran na  $\Omega$ . Dovoljno je zapravo da  $Q(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ , s obzirom da  $k$  zadovoljava DC uvjet na  $\mathbb{R}^2$ . Ako je  $Q$  dan kao integralni operator s jezgrom  $g(x, y)$ , pri čemu  $y \in \Omega$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , onda je modificirani  $K$  dan s

$$k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} k(x-z)g(z, y) dz, \quad x, y \in \Omega.$$

DC uvjet je zadovoljen kada  $g$  i  $k$  zadovoljavaju sljedeći uvjet kompatibilnosti:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^2} k(x-z)g(z, y) dz dy = 1, \quad x \in \Omega. \quad (4.5)$$

Ukratko, oba navedena pristupa vode do zamućenja  $K$  koje nije invarijantno na pomake i ima jezgru  $k(x, y)$ . Model izoštravanja za  $BV$  slike je tada dan s

$$\min_u E_{\text{tv}}[u|u_0, K] = \alpha \int_{\Omega} |Du| dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (K(u) - u_0)^2 dx. \quad (4.6)$$

## Postojanje i egzistencija

Pretpostavimo sada da je slikovna domena omeđena i Lipschitzova u  $\mathbb{R}^2$ . Također, neka su zadovoljene iduće pretpostavke:

1. idealna slika je  $u \in BV(\Omega)$
2. zamućena i zamagljena slika je  $u_0 \in L^2(\Omega)$

3. linearno zamućenje  $K : L^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  je ograničeno, injektivno i zadovoljava DC uvjet  $K[1] \equiv 1$ .

**Teorem 4.2.1.** [Egzistencija i jedinstvenost BV modela izoštravanja] Neka su zadovoljeni uvjeti 1., 2. i 3. Optimalno izoštravanje  $u_* = \operatorname{argmin} E_{iv}[u|u_0, K]$  za model (4.6) postoji i jedinstveno je.

Dokaz teorema 4.2.1 može se pronaći u [14, teorem 5.2].

**Korolar 4.2.2.** Jedinstveni minimizator  $u_*$  mora zadovoljavati uvjet srednje vrijednosti

$$\langle K(u_*) \rangle = \langle u_0 \rangle,$$

gdje  $\langle u \rangle$  označava srednju vrijednost, tj.  $\langle u \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$ .

*Dokaz.* Za jedinstveni minimizator  $u_*$  definiramo

$$e(c) = E_{iv}[u_* - c|u_0, K],$$

za bilo koji  $c \in \mathbb{R}$ . Ako ovaj izraz raspišemo dobivamo:

$$e(c) = \alpha \int_{\Omega} |D(u_* - c)| dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (K(u_* - c) - u_0)^2 dx. \quad (4.7)$$

Imamo  $Dc = 0$  jer je  $c$  konstanta. Nadalje, kako je  $K$  linearan te zadovoljava DC uvjet slijedi  $K(c) = cK(\mathbb{1}) = c$ . Izraz (4.7) sada postaje

$$e(c) = \alpha \int_{\Omega} |Du_*| dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (K(u_*) - c - u_0)^2 dx. \quad (4.8)$$

Prvi integral u (4.8) ne ovisi o  $c$  pa  $c_* = \operatorname{argmin} e(c)$  mora minimizirati

$$\int_{\Omega} (K(u_*) - u_0 - c)^2 dx = \int_{\Omega} (K(u_*) - u_0)^2 dx - 2c \int_{\Omega} (K(u_*) - u_0) dx + c^2 |\Omega|.$$

Jedinstveni minimizator gornje kvadratne jednadžbe je  $c_* = \langle K(u_*) - u_0 \rangle$ . S druge strane,  $c_*$  mora biti nula jer  $u_* - c_* = u_* - 0 = u_*$  zbog jedinstvenosti minimizatora. Stoga,

$$\langle K(u_*) \rangle = \langle u_0 \rangle,$$

pa je tvrdnja dokazana. □

### Euler - Lagrangeova jednadžba

Pripadna Euler - Lagrangeova modelu (4.6) je dana s

$$\alpha \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] - \lambda K^*(K(u) - u_0) = 0, \quad (4.9)$$

s Neumannovim rubnim uvjetom  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0$ .  $K^*$  je adjungirani operator operatoru zamućenja  $K$ . Jednadžba (4.9) je zadovoljena u distribucijskom smislu, odnosno za svaku test funkciju  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ , rješenje zadovoljava

$$\alpha \left\langle \nabla \phi, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle + \lambda \langle K(\phi), K(u) - u_0 \rangle = 0.$$

Nelinearnu degeneriranu eliptičku jednadžbu (4.9) regulariziramo do

$$\alpha \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right] - \lambda K^*(K(u) - u_0) = 0, \quad (4.10)$$

gdje je  $|x|_a = \sqrt{x^2 + a^2}$  za neki fiksni pozitivni parametar  $a$ . Sve se svodi na minimiziranje

$$E[u|u_0, K, a] = \alpha \int_{\Omega} \sqrt{|Du|^2 + a^2} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (K[u] - u_0)^2 dx, \quad (4.11)$$

što je usko povezano s problemom minimalne površine.

### 4.3 Implementacija preko zakašnjele difuzivne iteracije fiksnom točkom

Slično kao i kod raščišćavanja, izoštravanje se često implementira pomoću algoritam Implementacija preko zakašnjele difuzivne iteracije fiksnom točkom.

Koristeći trenutnu najbolju procjenu  $u^{(n)}$ , tražimo  $u^{(n+1)}$  rješavajući sljedeći lineariziranu jednadžbu

$$\alpha \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u^{(n+1)}}{|\nabla u^{(n)}|_a} \right] - \lambda K^*(K(u^{(n+1)}) - u_0) = 0, \quad (4.12)$$

s Neumannovim rubnim uvjetom. Uz dani  $u^{(n)}$ , linearni operator

$$L_n = -\alpha \operatorname{div} \frac{1}{|\nabla u^{(n)}|_a} \nabla + \lambda K^* K$$

je pozitivno definitan odnosno strogo eliptičan, što nam osigurava postojanje jedinstvenog rješenja.



# Poglavlje 5

## Nadopunjavanje

Nadopunjavanje je umjetnički naziv za slikovnu interpolaciju. Riječ nadopunjavanje svoje korijene vuče iz restauratorskih zavoda gdje su umjetnici uklanjali pukotine sa starih umjetnina prateći što vjernije zamisli autora. S vremenom su se muzeji likovne umjetnosti digitalizirati pa su umjetnine skenirane na računala i na njima se softverski popravljaju. Ovo daje priliku za puno pokušaja i pogrešaka bez da se umjetnina na bilo koji način fizički ošteti. Međutim, ovo naravno nije jedina primjena digitalnog nadopunjavanja slika, već se nadopunjavanje koristi u raznim djelatnostima, primjerice filmskoj industriji.

Idealna slika  $u^0 = u^0(x)$  definirana je na slikovnoj domeni  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ . Zbog nesavršene slikovne akvizicije, transmisije ili zbog nekih drugih faktora, može se dogoditi da postoji podskup  $D \subseteq \Omega$  takav da slikovne informacije na  $D$  nedostaju ili su nedostupne. Uz to, čak i dostupan dio slike  $u^0|_{D^c}$  na  $D^c = \Omega \setminus D$  je često degradiran šumom ili zamućenjem. Cilj nadopunjavanja slike je rekonstruirati cijelu idealnu sliku iz nepotpune i degradirane slike. Stoga je nadopunjavanje 2d interpolacijski problem.

U ovom poglavlju  $\Omega$  označava slikovnu domenu,  $D$  označava domenu za nadopunjavanje na slici,  $u^0$  je dio slike kojeg imamo na  $\Omega \setminus D$ , a  $u$  željena nadopunjena slika.

### 5.1 Geometrijski modeli slika

Geometrija ima važnu ulogu pri percepciji slika i razumijevanju slika. Kao što smo više puta u radu spomenuli, rubovi su česti izazov kod obrade slika. Stoga je jako važno da razumijemo kako matematički modelirati rubove i krivulje na slikama.

Kao i do sada želimo naći prigodnu energetska formulaciju  $E[\Gamma]$ . U digitalnoj obradi slika, Freemanov lančani kod je algoritam često korišten za prikaz granica objekata na slikama i slikovnih rubova. Opisat ćemo ideju koja stoji iza toga. Želimo prikazati 1d krivulju  $\Gamma$  lancem uređenih točaka

$$x_0, x_1, \dots, x_N$$

koje su dovoljno guste da osiguraju razumnu aproksimaciju. Dakle, želimo definirati pogodnu energetska formu

$$E[x_0, x_1, \dots, x_N].$$

Konstruirat ćemo dva najkorištenija modela ravninskih krivulja: energiju duljine i Eulerovu elastičnu energiju.

Za početak navodimo sljedeće aksiome.

**Aksiom 5.1.1** (Euklidska invarijantnost). *Neka je  $Q \in O(2)$  rotacija i  $c \in \mathbb{R}^2$  proizvoljna točka. Euklidska invarijantnost dijeli se na dva dijela:*

- *invarijantnost na rotacije*

$$E[Qx_0, Qx_1, \dots, Qx_N] = E[x_0, x_1, \dots, x_N]$$

- *invarijantnost na translacije*

$$E[x_0 + c, x_1 + c, \dots, x_N + c] = E[x_0, x_1, \dots, x_N].$$

**Aksiom 5.1.2** (Obrnuta invarijantnost). *Vrijedi*

$$E[x_0, x_1, \dots, x_N] = E[x_N, \dots, x_1, x_0],$$

*drugim riječima energija je neovisna o orijentaciji krivulje.*

**Aksiom 5.1.3** ( $p$ -točkovna akumulacija).  *$p$ -točkovna akumulacijska energija zadovoljava zakon akumulacije:*

$$E[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] = E[x_0, \dots, x_n] + E[x_{n-p+2}, \dots, x_{n+1}],$$

za sve  $n \geq p - 2$ .

Koristeći prethodni aksiom, jednostavno se izvodi sljedeći rezultat.

**Propozicija 5.1.4.** *Pretpostavimo da je  $E$   $p$ -točkovno akumulacijska. Tada za svaki  $N \geq p - 1$ ,*

$$E[x_0, \dots, x_N] = \sum_{n=0}^{N-p+1} E[x_n, \dots, x_{n+p-1}].$$

Na primjer, 2-točkovna akumulacijska energija je dana s

$$E[x_0, \dots, x_N] = E[x_0, x_1] + E[x_1, x_2] + \dots + E[x_{N-1}, x_N],$$

dok je 3-točkovna akumulacijska energija dana s

$$E[x_0, \dots, x_N] = E[x_0, x_1, x_2] + E[x_1, x_2, x_3] + \dots + E[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N].$$

Općenito,  $p$ -točkovna akumulacijska energija  $E$  je u potpunosti određena s vrijednošću u proizvoljnih  $p$  točaka:

$$E[x_0, \dots, x_{p-1}].$$

Mi ćemo proučavati energiju za  $p = 2$  i  $p = 3$ .

## 2-točkovna akumulacijska energija i duljina

**Propozicija 5.1.5.** *Euklidski invarijantna 2-točkovna akumulacijska energija mora biti oblika*

$$E[x_0, \dots, x_N] = \sum_{n=0}^{N-1} f(|x_{n+1} - x_n|),$$

za neku nenegativnu funkciju  $f(s)$ .

*Dokaz.* Moramo dokazati da

$$E[x_0, x_1] = f(|x_1 - x_0|).$$

Invarijantnost na translacije daje

$$E[x_0, x_1] = E[0, x_1 - x_0] = F(x_1 - x_0),$$

gdje je  $F(x) = E[0, x]$ . Sada invarijantnost na rotacije daje

$$F(Qx) \equiv F(x), \quad Q \in O(2), x \in \mathbb{R}^2.$$

Stoga, ako definiramo  $f(s) = F((s, 0))$ , imamo

$$F(x) = f(|x|).$$

□

Dodatno, vrijedi i sljedeće.

**Aksiom 5.1.6.** *[Linearnost zbrajanja] Za svaki  $\alpha \in (0, 1)$  i  $x_1 = \alpha x_0 + (1 - \alpha)x_2$ , vrijedi*

$$E[x_0, x_2] = E[x_0, x_1] + E[x_1, x_2].$$

Sada vrijedi idući rezultat koji kaže da je energija jedinstvena do na multiplikativnu konstantu.

**Teorem 5.1.7.** *Euklidski invarijantna 2-točkovna akumulacijska energija  $E$ , za koju vrijedi linearnost zbrajanja, je energija duljine, tj.*

$$E[x_0, \dots, x_N] = c \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - x_{n+1}|,$$

za neku fiksnu konstantu  $c > 0$ .

*Dokaz.* Teorem će biti dokazan ukoliko pokažemo:  $f(s) = c s$ . Znamo da za 2-točkovnu akumulacijsku energiju  $E$  po aksiomu 5.1.6 vrijedi

$$E[x_0, x_2] = E[x_0, x_1] + E[x_1, x_2].$$

To povlači

$$f(|x_2 - x_0|) = f(|x_1 - x_0|) + f(|x_2 - x_1|).$$

Kako je

$$|x_1 - x_0| = (1 - \alpha)|x_2 - x_0| \quad \text{i} \quad |x_2 - x_1| = \alpha|x_2 - x_0|, \quad \alpha \in (0, 1),$$

vidimo da  $f$  zadovoljava svojstvo linearnosti. □

### 3-točkovna akumulacijska energija i zakrivljenost

Ako primijenimo Frobeniusov teorem na Euklidsku invarijantnost imamo sljedeći rezultat.

**Propozicija 5.1.8.** [14, propozicija 6.9] *Postoje točno tri nezavisne invarijante  $I_1, I_2$  i  $I_3$  tako da je  $E[x_0, x_1, x_2]$  njihova funkcija.*

Definiramo

$$a = |x_1 - x_0|, \quad b = |x_2 - x_1|, \quad c = |x_2 - x_0|.$$

Tada je uređena trojka  $(a, b, c)$  Euklidska invarijanta, a dva lanca  $[x_0, x_1, x_2]$  i  $[y_0, y_1, y_2]$  su Euklidski kongruentna ako i samo ako dijele istu invarijantu  $(a, b, c)$ . Dakle, mora postojati nenegativna funkcija  $F(a, b, c)$  takva da

$$E[x_0, x_1, x_2] = F(a, b, c).$$

Sada definiramo dvije simetrične funkcije u  $a$  i  $b$ .

$$A_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad B_1 = ab.$$

Obrnuta invarijantnost sada implicira simetriju of  $F$  po  $a$  i po  $b$ . Dakle,  $E$  mora biti funkcija ovisna o  $A_1, B_1$  i  $c$  :

$$E[x_0, x_1, x_2] = f(A_1, B_1, c).$$

Označimo sa  $s$  poluopseg trokuta  $(x_1, x_2, x_3)$ :

$$s = A_1 + \frac{c}{2}$$

i s  $\Delta$  njegovu površinu:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-c)(s^2 - 2A_1s + B_1)}.$$

Sada možemo definirati (digitalnu) zakrivljenost u  $x_1$  s

$$\kappa_1 = 4 \frac{\Delta}{B_1 c} = \frac{\sin \theta_1}{\frac{c}{2}},$$

gdje je  $\theta_1$  kut nasuprot stranice  $[x_0, x_2]$ . Calabi, Olver i Tannenbaum su pokazali da za proizvoljnu glatku krivulju i fiksnu točku  $x_1$  na njoj, uz  $a, b \rightarrow 0$ , vrijedi

$$\kappa_1 = \kappa(x_1) + O(|b-a|) + O(a^2 + b^2),$$

gdje je  $\kappa(x_1)$  zakrivljenost u točki  $x_1$ . Sada lako vidimo da je  $\kappa_1, A_1, B_1$  skup zajedničkih invarijanti za Euklidsku invarijantnost, obrnutu invarijantnost i

$$E[x_0, x_1, x_2] = g(\kappa_1, A_1, B_1),$$

pa smo pokazali idući rezultat.

**Teorem 5.1.9.** *3-točkovna akumulacijska energija  $E$  s Euklidskom i obrnutom invarijantnošću ima oblik*

$$E[x_0, \dots, x_N] = \sum_{n=1}^{N-1} g(\kappa_n, A_n, B_n).$$

Primijetimo da uz  $a, b = O(h)$ ,  $h \rightarrow 0$ , u fiksnoj točki  $x_1 \in \Gamma$ ,

$$\kappa_1 = O(1), \quad A_1 = O(h), \quad B_1 = O(h^2).$$

Taylorov razvoj funkcije  $g$  u točki  $(\kappa_1, 0, 0)$  dan je sa

$$\begin{aligned} g(\kappa_1, A_1, B_1) &= g(\kappa_1, 0, 0) + (\kappa_1 - \kappa_1)g_{\kappa_1}(\kappa_1, 0, 0) + (A_1 - 0)g_{A_1}(\kappa_1, 0, 0) + (B_1 - 0)g_{B_1}(\kappa_1, 0, 0) + \dots \\ &= 0 + A_1 g_{A_1}(\kappa_1, 0, 0) + B_1 g_{B_1}(\kappa_1, 0, 0) + \dots \\ &= g_1(\kappa_1)A_1 + g_2(\kappa_1)B_1 + \dots \end{aligned}$$

Ovdje je  $g(\kappa_1, 0, 0) = 0$  jer za  $A_1 = B_1 = 0$  slijedi i  $\kappa_1 = 0$ . Naime, tada je i  $x_0 = x_1 = x_2$  pa je  $E[x_0, x_1, x_2] = 0$ , odnosno  $g(\kappa_1, 0, 0) = 0$ . Funkcije  $g_1, g_2, \dots$  predstavljaju parcijalne derivacije funkcije  $g$  po  $A_1$  i  $B_1$ . Ako zanemarimo sve članove reda većeg ili jednakog 2, tj.  $O(h^2)$ , imamo

$$g(\kappa_1, A_1, B_1) = g_1(\kappa_1)A_1$$

(uočite da je  $B_1 = O(h^2)$ ). Stoga smo izveli idući korolar.

**Korolar 5.1.10.** *Uz pretpostavke iz teorema 5.1.9, pretpostavimo da za bilo koju glatku jednostavnu krivulju  $\Gamma$  i njenu lančanu aproksimaciju  $[x_0, x_1, \dots, x_N]$  s veličinom*

$$h = \max_{0 \leq n \leq N-1} |x_n - x_{n+1}|$$

*takvom da  $h \rightarrow 0$ ,  $E[x_0, \dots, x_N]$  konvergira. Tada postoji samo jedna klasa takve energije i dana je s*

$$E[x_0, \dots, x_N] = \sum_{n=1}^{N-1} f(\kappa_n)A_n.$$

*Uz  $h \rightarrow 0$ , energija konvergira k*

$$E[\Gamma] = \int_{\Gamma} f(\kappa) ds,$$

*gdje je  $ds$  element duljine.*

## 5.2 Modeliranje slika pomoću krivulja

Jednom kada imamo model krivulje  $E[\Gamma]$  možemo ga „podići” do modela slike.

Neka je  $u(x)$  slika s domenom  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Pretpostavimo da je  $u$  glatka tako da je za gotovo svaku sivu vrijednost  $\lambda$ , nivo skup

$$\Gamma_\lambda = \{x \in \Omega : u(x) = \lambda\}$$

glatka 1d mnogostrukost. Neka je  $\omega(\lambda)$  prikladna nenegativna funkcija težine. Tada, oslanjajući se na dani model krivulje  $E[\Gamma]$ , možemo konstruirati slikovni model

$$E[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[\Gamma_\lambda] \omega(\lambda) d\lambda.$$

Dogovorno  $\omega(\lambda) = 1$  da odražava osjetljivost ljudske percepcije. Pretpostavimo da imamo snop nivo skupova čije su sive vrijednosti unutar  $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$ . Ako je  $\Delta\lambda$  mali, slika se čini glatka na danim nivo skupovima pa je manje osjetljiva za percepciju. Također je tada i

energija mala. S druge strane, ako je  $\Delta\lambda$  veliki, na primjer kada snop nivo skupova sadrži oštar rub, onda ti nivo skupovi sadrže važne vizualne informacije pa je i pripadna energija velika.

Ako uzmemo energiju duljine iz teorema 5.1.7, tada imamo slikovni model

$$E[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{duljina}(\Gamma_\lambda) d\lambda,$$

što je upravo Rudin - Osher - Fatemi TV model

$$E[u] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx.$$

Slično, ako uzmemo model zakrivljenosti krivulje iz korolara 5.1.10 dobivamo slikovni model

$$E[u] = \int_{\Omega} f\left(\left|\operatorname{div}\left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right]\right|\right) |\nabla u| dx.$$

Uz  $f(s) = \alpha + \beta s^2$ , gornju formulaciju zovemo elastični slikovni model.

Međutim, ovdje ćemo obraditi drugi pristup kod kojeg je konstrukcija slikovnih modela bazirana na rubovima objekata. Za ovaj pristup zaslužni su Mumford i Shah. U ove slikovne modele, krivuljni model je ugrađen da mjeri energiju rubova, na primjer nagle skokove na slikama.

Klasični Mumford - Shah slikovni model koristi model duljine krivulje:

$$E[u, \Gamma] = \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \alpha \text{duljina}(\Gamma),$$

gdje je  $\Gamma$  kolekcija rubova slike. Ovaj model je vrlo uspješan kod raščišćavanja i segmentacije slika, međutim za nadopunjavanje je nedostatan. Iz tog razloga uveden je novi slikovni model, Mumford - Shah - Euler, koji se bazira na modelu elastične krivulje:

$$E[u, \Gamma] = \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma} (\alpha + \beta \kappa^2) ds,$$

gdje je  $\kappa$  zakrivljenost.

U narednim sekcijama ova dva modela bit će detaljno opisana.

### 5.3 Mumford - Shah model nadopunjavanja

Kod Mumford - Shahovog modela nadopunjavanja želimo minimizirati posteriornu energiju

$$J_{\text{ms}}[u, \Gamma | u^0, D] = \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \alpha \text{duljina}(\Gamma) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (u - u^0)^2 dx,$$

gdje su  $\gamma, \alpha$  i  $\lambda$  pozitivne konstante. Model daje kompletnu čistu sliku  $u$  i pripadajuću kolekciju rubova  $\Gamma$ . Ukoliko je  $D$  prazan skup, odnosno ne postoji domena koju treba nadopuniti, model se svodi na klasični Mumford - Shah model za segmentaciju o kojem će biti riječ u idućem poglavlju.

Za zadani poredak rubova  $\Gamma$ , varijacija funkcionala  $J_{\text{ms}}[u|\Gamma, u^0, D]$  daje

$$\gamma \Delta u + \lambda_D(x)(u^0 - u) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega \setminus \Gamma, \quad (5.1)$$

s adijabatskim uvjetom  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  na  $\Gamma$  te također na  $\partial\Omega$ . Također,  $\lambda_D = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\Omega \setminus D}(x)$ . Označimo rješenje eliptičke jednadžbe (5.1) s  $u_\Gamma$ . Tada je najstrmiji silazni infinitezimalni pomak od  $\Gamma$  za  $J_{\text{ms}}[\Gamma|u_\Gamma, u^0, D]$  dan s

$$\frac{dx}{dt} = \left( \alpha \kappa + \left[ \frac{\gamma}{2} |\nabla u_\Gamma|^2 + \frac{\lambda_D}{2} (u_\Gamma - u^0)^2 \right]_\Gamma \right) \vec{n}. \quad (5.2)$$

Ovdje je  $x \in \Gamma$  piksel na rubu, a  $\vec{n}$  je smjer normale u  $x$ . Oznaka  $|g|_\Gamma$  označava skok skalarnog polja  $g(x)$  po  $\Gamma$ :

$$|g|_\Gamma(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} (g(x + \sigma \vec{n}) - g(x - \sigma \vec{n})).$$

Predznak zakrivljenost  $\kappa$  i smjer normale  $\vec{n}$  su sparene tako da  $\kappa \vec{n}$  pokazuje na centar zakrivljenosti od  $\Gamma$  u  $x$ .

Mumford - Shah model nadopunjavanja je model drugog reda. Za ovaj model Esegodglu i Shen su dali jednostavnu numeričku shemu baziranu na rezultatima Ambrosija i Tortorellija koristeći  $\Gamma$ -konvergenciju.

U teoriji  $\Gamma$ -konvergencije jednodimenzionalni rub  $\Gamma$  je aproksimiran s pripadajućom funkcijom

$$x : \Omega \rightarrow [0, 1],$$

koja je približno 1 gotovo svugdje osim na uskoj okolini od  $\Gamma$ , danoj s proizvoljno malim  $\varepsilon$ , gdje je blizu 0. Posteriorna energija  $J_{\text{ms}}[u, \Gamma|u^0, D]$  se tada aproksimira s:

$$J_\varepsilon[u, z|u^0, D] = \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_D(x)(u - u^0)^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_\Omega z^2 |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_\Omega \left( \varepsilon |\nabla z|^2 + \frac{(1-z)^2}{4\varepsilon} \right) dx. \quad (5.3)$$

Varijacijom funkcionala u  $u$  i  $z$  odvojeno, dobivamo Euler - Lagrangeov sustav:

$$\lambda_D(x)(u - u^0) - \gamma \nabla \cdot (z^2 \nabla u) = 0 \quad (5.4)$$

$$(\gamma |\nabla u|^2) z + \alpha \left( -2\varepsilon \Delta z + \frac{z-1}{2\varepsilon} \right) = 0, \quad (5.5)$$



s prirodnim adijabatskim rubnim uvjetima na  $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{\nu}} = 0.$$

Definirajmo dva eliptička operatora:

$$L_z = -\nabla \cdot z^2 \nabla + \frac{\lambda_D}{\gamma} \quad (5.6)$$

$$M_u = 1 + \frac{2\varepsilon\gamma}{\alpha} |\nabla u|^2 - 4\varepsilon^2 \Delta. \quad (5.7)$$

Sada se Euler - Lagrangeov sustav (5.4) – (5.5) može zapisati u sljedećem obliku:

$$L_z u = \frac{\lambda_D}{\gamma} u^0 \quad \text{i} \quad M_u z = 1. \quad (5.8)$$

Ovaj sustav lako je rješiv korištenjem nekog eliptičkog solvera i iterativne sheme.

## 5.4 Mumford - Shah - Euler model nadopunjavanja

Kao što je već spomenuto Mumford - Shah model je nedostatan za probleme nadpounjavanja velikih dimenzija zbog ugrađene energije duljine. Da bi se ovaj nedostatak riješio, Esedoglu i Shen su uveli model nadopunjavanja baziran na Mumford - Shah - Euler modelu slika. Ovdje je posteriorna energija koju minimiziramo dana s

$$J_{\text{mse}}[u, \Gamma|u^0, D] = \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma} (\alpha + \beta\kappa^2) ds + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (u - u^0) dx, \quad (5.9)$$

gdje je energija duljine iz  $J_{\text{ms}}$  poboljšana u Eulerovu elastičnu energiju. Ovdje je pripadna Euler - Lagrangeova jednačba za  $J_{\text{mse}}[u|u^0, D]$

$$\gamma \Delta u + \lambda_D(x)(u^0 - u) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad (5.10)$$

s adijabatskim rubnim uvjetom  $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$  na  $\Gamma$  i na  $\partial\Omega$ . Za rješenje  $u_\Gamma$  najstrmiji silazni infinitezimalni pomak od  $\Gamma$  za  $J_{\text{mse}}[\Gamma|u_\Gamma, u^0, D]$  je dan s

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\kappa - \beta \left( 2 \frac{d^2\kappa}{ds^2} + \kappa^3 \right) + \left[ \frac{\gamma}{2} |\nabla u_\Gamma|^2 + \frac{\lambda_D}{2} (u_\Gamma - u^0)^2 \right]_\Gamma. \quad (5.11)$$

Oznake su jednake kao i u prethodnoj sekciji.

Kod ovog modela implementacija više nije tako trivijalna jer je izazovno pronaći numeričku reprezentaciju jednodimenzionalnog objekta  $\Gamma$ , a izazov predstavlja i računanje

zakrivljenosti i diferencijala. Ovdje su Esedoglu i Shen dali numeričku shemu baziranu na teoriji  $\Gamma$ -konvergencije De Giorgija.

De Giorgi je predložio da se Eulerov elastični krivuljni model

$$e(\Gamma) = \int_{\Gamma} (\alpha + \beta \kappa^2) ds$$

aproksimira s eliptičkim integralom

$$E_{\varepsilon}[z] = \alpha \int_{\Omega} \left( \varepsilon |\nabla z|^2 + \frac{W(z)}{4\varepsilon} \right) dx + \frac{\beta}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( 2\varepsilon \nabla z - \frac{W'(z)}{4\varepsilon} \right)^2 dx, \quad (5.12)$$

gdje  $W(z)$  može biti simetrična funkcija dvostrukog zdenca

$$W(z) = (1 - z^2)^2 = (z + 1)^2(z - 1)^2.$$

Sada originalnu posteriornu energiju  $J_{\text{mse}}$  od  $u$  i  $\Gamma$  možemo zamijeniti eliptičkom energijom od  $u$  i  $z$ :

$$J_{\varepsilon}[u, z|u^0, D] = \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} z^2 |\nabla u|^2 dx + E_{\varepsilon}[z] + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D (u - u^0)^2 dx. \quad (5.13)$$

Za dani  $z$ , varijacijom  $u$  u  $J_{\varepsilon}[u|z, u^0, D]$  dobivamo

$$\lambda_D (u - u^0) - \gamma \operatorname{div}(z^2 \nabla u) = 0, \quad (5.14)$$

s adijabatskim rubnim uvjetom  $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0$  na  $\partial\Omega$ . Za rješenje  $u$ , najstrmiji silazni infinitezimalni pomak od  $z$  za  $J_{\varepsilon}[z|u, u^0, D]$  je dan s

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\gamma |\nabla u|^2 z + \alpha g + \frac{\beta W''(z)}{2\varepsilon^2} g - 4\beta \Delta g, \quad (5.15)$$

$$g = 2\varepsilon \Delta z - \frac{W'(z)}{4\varepsilon}, \quad (5.16)$$

opet s adijabatskim rubnim uvjetima na  $\partial\Omega$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{\nu}} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial g}{\partial \vec{\nu}} = 0.$$

Jednadžba (5.15) je četvrtog reda po  $z$  pa da bismo osigurali stabilnost mora vrijediti  $\Delta t = O\left(\frac{(\Delta x)^4}{\varepsilon \beta}\right)$ . Ovo se može osigurati dodavanjem korekcijskog faktora za vrijeme

$$\frac{\partial z}{\partial t} = T(\nabla z, g|u) \left( -\gamma |\nabla u|^2 z + \alpha g + \frac{\beta W''(z)}{2\varepsilon} g - 4\beta \Delta g \right),$$

gdje je  $T(\nabla z, g|u)$  prikladni pozitivni skalar, na primjer  $T = |\nabla z|$ . Drugi način je prebaciti se na implicitne ili poluimplicitne sheme. Jednadžba (5.15) može se preinačiti u

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \gamma|\nabla u|^2 z - 2\alpha\varepsilon\Delta z + 8\beta\varepsilon\Delta^2 z = -\frac{\alpha}{4\varepsilon}W'(z) + \frac{\beta W''(z)}{2\varepsilon^2}g + \frac{\beta}{\varepsilon}\Delta W'(z). \quad (5.17)$$

Ako uvedemo pozitivno definitni eliptički operator

$$L_u = \gamma|\nabla u|^2 - 2\alpha\varepsilon\Delta + 8\beta\varepsilon\Delta^2$$

ovo možemo jednostavno zapisati kao

$$\frac{\partial z}{\partial t} = L_u z = f(z).$$

Desna strana u (5.17) označena je s  $f(z)$ . Sada je poluimplicitna shema dana s:

$$(1 + \Delta t L_u) z^{(n+1)} = z^{(n)} + \Delta t f(z^{(n)}),$$

u svakom diskretnom vremenskom koraku  $n$ .

# Poglavlje 6

## Segmentacija

U zadnjem poglavlju dat ćemo kratak matematički pregled procesa segmentacije preko Mumford- Shah modela.

Segmentacija je most između nižih i viših razina obrade slike. Cilj je particionirati sliku na kolekciju objekata na kojima se kasnije vrše ostali procesi kao na primjer detekcija, prepoznavanje i praćenje objekata.

### 6.1 Opis Mumford - Shahovoga modela segmentacije

Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  otvorena, ograničena i povezana slikovna domena. Neka je  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  crno - bijela slika. Možemo pretpostaviti da je  $g$  ograničena funkcija u  $\Omega$ , tj.  $g \in L^\infty(\Omega)$ . Mumford - Shah model segmentacije glasi: Pronaći dekompoziciju

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$$

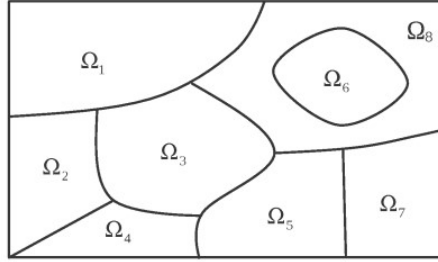
domene  $\Omega$  slike  $g$  tako da

- Slika  $g$  varira glatko, odnosno sporo unutar svake particije  $\Omega_i$ .
- Slika  $g$  varira diskontinuirano, odnosno brzo na granici  $\Gamma$  između različitih particija  $\Omega_i$ .

Sada problem segmentacije možemo preformulirati na sljedeći način:

Pronaći načine na koje možemo definirati i izračunati optimalne aproksimacije funkcije  $g(x)$  pomoću funkcije  $u(x)$  zadane po dijelovima, odnosno funkcije  $u$  čije su restrikcije  $u_i$  na  $\Omega_i$  neprekidne i diferencijabilne.

Sada slijedi da su  $(\Omega_i)_{i=1}^n$  disjunktni povezani otvoreni podskupovi domene  $\Omega$ , te da svaki ima po dijelovima glatki rub. S  $\Gamma$  ćemo označiti uniju rubova od  $\Omega_i$ , te će to biti



Slika 6.1: Dekompozicija domene na osam particija (slika preuzeta iz [15])

zatvoren skup. Dakle, imamo

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n, \quad \Gamma = \Omega \cap (\partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n).$$

Funkcional  $E$  kojeg je potrebno minimizirati je dan s

$$E[u, \Gamma|g] = \mu^2 \int_{\Omega} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \nu |\Gamma|, \quad (6.1)$$

gdje je  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna, štoviše diferencijabilna unutar svakog  $\Omega_i$ , te može biti diskontinuirana na  $\Gamma$ .  $|\Gamma|$  je mjera od  $\Gamma$  koju ćemo definirati kao  $d - 1$ -dimenzionalnu Hausdorffovu mjeru u  $\mathbb{R}^d$ , tj.  $\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma)$ .

Važan rezultat dobijemo ako ograničimo  $E$  na po dijelovima konstantne funkcije  $u$ , tj.  $u = c_i$ , na svakom otvorenom skupu  $\Omega_i$ , gdje su  $c_i$  konstante za svaki  $i$ . Ako  $E$  pomnožimo s  $\mu^{-2}$  dobivamo

$$\mu^{-2} E[u, \Gamma|g] = \sum_i \int_{\Omega_i} (g - c_i)^2 dx + \nu_0 |\Gamma|, \quad (6.2)$$

gdje je  $\nu_0 = \frac{\nu}{\mu^2}$ . Lako je za vidjeti da se ovo minimizira u varijablama  $c_i$  ako stavimo

$$c_i = \langle g \rangle_{\Omega_i} = \frac{\int_{\Omega_i} g(x) dx}{|\Omega_i|},$$

gdje  $|\Omega_i|$  označava Lebesgueovu mjeru od  $\Omega_i$ . Dakle, dovoljno je minimizirati

$$E_0[\Gamma|g] = \sum_i \int_{\Omega_i} (g - \langle g \rangle_{\Omega_i})^2 dx + \nu_0 |\Gamma|.$$

$E_0$  možemo interpretirati kao limes funkcionala  $E$  kada  $\mu \rightarrow 0$ .

U narednim rezultatima trebat će nam Soboljevljeve funkcije  $u \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ , definirane u poglavlju 2.

## 6.2 Prvi slučaj: fiksni rub

Ne bismo li bolje razumijeli i analizirali minimizaciju funkcionala (6.1), izračunat ćemo prvu varijaciju u odnosu na svaku od nepoznanica.

Pretpostavimo da je  $\Gamma$  fiksni, kao zatvoreni podskup otvorenog ograničenog skupa  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  te označimo

$$E[u|g] = \mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx$$

za  $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ , gdje je  $\Omega \setminus \Gamma$  otvoren i ograničen, a  $g \in L^2(\Omega \setminus \Gamma)$ . Vrijede sljedeći rezultati kao posljedica standardne metode varijacijskog računa.

**Propozicija 6.2.1.** *Postoji jedinstveni minimizator problema*

$$\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)} E[u|g]. \quad (6.3)$$

*Dokaz.* Primijetimo da je  $0 \leq \inf E < +\infty$ , budući da možemo uzeti  $u_0 \equiv 0$  i  $E[u_0|g] = \mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} g^2(x) dx < +\infty$ . Prema tome možemo označiti  $m = \inf_u E[u|g]$  i za minimizirajući niz uzeti  $(u_j)_{j \geq 1} \in W^{1,2}(\Omega)$  takav da  $\lim_{j \rightarrow \infty} E[u_j|g] = m$ .

Nadalje, svojstvo paralelograma za  $u, v \in L^2(\Omega)$  daje

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_2^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|v\|_2^2$$

pa slijedi

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|v\|_2^2 - \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_2^2. \quad (6.4)$$

Neka su  $u, v \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ . Tada je  $E[u|g], E[v|g] < \infty$ . Primjenom (6.4) na  $u-g$  i  $v-g$  pa onda i na  $\nabla u$  i  $\nabla v$  dobivamo:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{u+v}{2} \middle| g\right] &= \frac{1}{2} E[u|g] + \frac{1}{2} E[v|g] - \frac{\mu^2}{4} \int_{\Omega \setminus \Gamma} |u-v|^2 dx - \frac{1}{4} \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla(u-v)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} E[u|g] + \frac{1}{2} E[v|g] - \begin{cases} \frac{\mu^2}{4} \|u-v\|_{W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{4}\right) \|\nabla(u-v)\|_2^2 & \text{ako } \frac{1}{4} \geq \frac{\mu^2}{4} \\ \frac{1}{4} \|u-v\|_{W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \left(\frac{\mu^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \|u-v\|_2^2 & \text{ako } \frac{1}{4} \leq \frac{\mu^2}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ako uzmemo  $u, v \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$  takve da  $E[u|g], E[v|g] \leq m + \varepsilon$ , tada

$$\begin{aligned} m &\leq E\left[\frac{u+v}{2} \middle| g\right] \\ &\leq m + \varepsilon - \begin{cases} \frac{\mu^2}{4} \|u-v\|_{W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{4}\right) \|\nabla(u-v)\|_2^2 & \text{ako } \frac{1}{4} \geq \frac{\mu^2}{4} \\ \frac{1}{4} \|u-v\|_{W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \left(\frac{\mu^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \|u-v\|_2^2 & \text{ako } \frac{1}{4} \leq \frac{\mu^2}{4} \end{cases}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\|u - v\|_{W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)}^2 \leq \begin{cases} \frac{4\varepsilon}{\mu^2} & \text{ako } \frac{1}{4} \geq \frac{\mu^2}{4} \\ 4\varepsilon & \text{ako } \frac{1}{4} \leq \frac{\mu^2}{4}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Neka je sada  $w_j = u_j - u_1$ . Iz (6.5), vidimo da je  $(w_j)_j$  Cauchyev niz u  $W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ . Neka je  $w$  limes ovog niza. Stavimo  $u_0 = u_1 + w$ . Tada

$$\begin{aligned} E[u|g] &= \mu^2 \|u_0 - g\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \\ &= \mu^2 \|(u_1 - g) + w\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1 + \nabla w\|_{L^2}^2 \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \left[ \mu^2 \|(u_1 - g) + w_j\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1 + \nabla w_j\|_{L^2}^2 \right] \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} E[u_j|g] \\ &= m, \end{aligned}$$

zbog neprekidnosti  $L^2$  norme. Iz ovoga slijedi postojanje minimizatora. Jedinstvenost slijedi uzimanjem  $\varepsilon = 0$ .  $\square$

**Propozicija 6.2.2.** *Jedinstveno rješenje problema (6.3) je rješenje eliptičke jednadžbe*

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = -\mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} [u(x) - g(x)]v(x) dx, \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma) \quad (6.6)$$

ili rješenje jednadžbe

$$\Delta u = \mu^2(u - g)$$

u smislu distribucija u  $\Omega \setminus \Gamma$ , s rubnim uvjetom  $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$  na  $\partial(\Omega \setminus \Gamma)$ , gdje je  $\vec{N}$  jedinična vanjska normala na rub.

*Dokaz.* Zaista, neka je  $\varepsilon \mapsto A(\varepsilon) = E(u + \varepsilon v)$ , za  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  i proizvoljni  $v \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ . Tada je  $A$  kvadratna funkcija u  $\varepsilon$ , dana s

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)^2 dx + \varepsilon^2 \mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} v^2 dx + 2\varepsilon \mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)v dx \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla v|^2 dx + 2\varepsilon \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla u \cdot \nabla v dx, \end{aligned}$$

te imamo

$$A'(\varepsilon) = 2\varepsilon \mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} v^2 dx + 2\mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)v dx + 2\varepsilon \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla v|^2 dx + 2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

i

$$A'(0) = 2\mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)v dx + 2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

S obzirom da mora vrijediti

$$E[u|g] = A(0) \leq A(\varepsilon) = E[u + \varepsilon v|g], \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall v \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$$

stavljamo  $A'(0) = 0$  za takve  $v$ , pa slijedi slaba formulacija (6.6). Dodatno, ako je  $u$  klasično rješenje problema ili ako je  $u \in W^{2,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ , tada parcijalnom integracijom zadnje relacije dobivamo

$$A'(0) = 2\mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)v \, dx - 2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\Delta u)v \, dx + \int_{\partial(\Omega \setminus \Gamma)} \nabla u \cdot \vec{N} v \, ds = 0.$$

Ako uzmemo  $v \in C_0^1(\Omega \setminus \Gamma) \subset W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ , dobivamo

$$\Delta u = \mu^2(u - g) \text{ u } \Omega \setminus \Gamma.$$

Koristeći prethodno i uzevši sada  $v \in C^2(\Omega \setminus \Gamma)$ , dolazimo do rubnog uvjeta  $\nabla u \cdot \vec{N} = \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$  na rubu od  $\Omega \setminus \Gamma$ , odnosno na rubu  $\Omega$  i svih  $\Omega_i$ .  $\square$

Pretpostavimo sada da je  $g \in L^\infty(\Omega \setminus \Gamma)$ , što je u redu s obzirom da  $g$  predstavlja sliku. Možemo izvesti da jedinstveni minimizator  $u$  funkcionala (6.3) zadovoljava nejednakost  $\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ . Navedimo najprije iduću lemu preuzetu iz [15, poglavlje 6, lema 2].

**Lema 6.2.3.** *Ako je  $\Omega \setminus \Gamma$  otvoren te  $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$ , tada  $u^+ = \max(u, 0)$  je također u  $W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$  i  $|\nabla u^+(x)| \leq |\nabla u(x)|$  gotovo svuda.*

Neka je sada  $u^*(x) = \max\{-\|g\|_\infty, \min(\|g\|_\infty, u(x))\}$ . Lema 6.1.4. povlači da je  $u^* \in W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$  i da  $\int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u^*(x)|^2 \, dx \leq \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u(x)|^2 \, dx$ . Također, očito je  $\int_{\Omega \setminus \Gamma} (u^* - g)^2 \, dx \leq \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)^2 \, dx$ , pa iz toga slijedi  $E[u^*|g] \leq E[u|g]$ . Međutim,  $u$  je minimizator od  $E$ , pa mora vrijediti  $u(x) = u^*(x)$  gotovo svuda pa zaključujemo  $\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ .

### 6.3 Drugi slučaj: varijabilan rub

Dosadašnji račun je bio za fiksni  $\Gamma$ , međutim pogledajmo sad što se događa kada variramo  $\Gamma$ . Dakle, računamo prvu varijaciju od  $E[u, \Gamma|g]$  u odnosu na  $\Gamma$ . Pretpostavimo da je  $(u, \Gamma)$  minimizator of  $E$  iz (6.1) i varirajmo  $\Gamma$ . Također, pretpostavimo da je  $\Gamma \cap U$  lokalno graf regularne funkcije  $\phi$ , gdje je  $U$  mala okolina blizu regularne jednostavne točke  $P$  u  $\Gamma$ . Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je  $U = D \times I$ , gdje je  $I$  interval u  $\mathbb{R}$  i  $\Gamma \cap U = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in U = D \times I : x_d = \phi(x_1, \dots, x_{d-1})\}$ . Neka  $u^+$  označava restrikciju od  $u$  na

$$U^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_d > \phi(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})\} \cap U,$$



a  $u^-$  restrikcija od  $u$  na

$$U^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_d < \phi(x_1, x_2, \dots, x_d)\} \cap U,$$

i odaberimo  $H^1$  proširenja  $u^+$  od  $U^+$  do  $U$  te  $u^-$  od  $U^-$  do  $U$ . Ovakva proširenja možemo opravdati idućim teoremom preuzetim iz [8, sekcija 5.4, teorem 1].

**Teorem 6.3.1** (Teorem o proširenju). *Neka je  $U$  omeđen i  $\partial U$  je  $C^1$ . Neka je  $V$  otvoreni skup koji je kompaktno sadržan u  $U$ . Tada postoji ograničeni linearni operator:*

$$T : H^1(U) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$$

takav da za sve  $u \in H^1(U)$  :

- (i)  $Tu = u$  skoro svugdje na  $U$ ,
- (ii)  $\text{supp } Tu \subseteq V$ ,
- (iii)  $\|Tu\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^1(U)}$ , gdje konstanta  $C$  ovisi o  $U$  i  $V$ .

Sada, za mali  $\varepsilon$  definiramo deformaciju  $\Gamma_\varepsilon$  od  $\Gamma$  unutar  $U$  kao graf od

$$x_d = \phi(x_1, \dots, x_{d-1}) + \varepsilon\psi(x_1, \dots, x_{d-1}),$$

tako da je  $\psi$  nula izvan  $D$  te  $\Gamma_\varepsilon = \Gamma$  izvan  $U$ .

Definiramo

$$u_\varepsilon = \begin{cases} u(x) & \text{ako } x \notin U \\ (\text{proširenje od } u^+)(x) & \text{ako } x \in U, x \text{ iznad } \Gamma_\varepsilon \cap U \\ (\text{proširenje od } u^-)(x) & \text{ako } x \in U, x \text{ ispod } \Gamma_\varepsilon \cap U. \end{cases}$$

Želimo izračunati prvu varijaciju funkcionala. Sada, uz  $z = (x_1, \dots, x_{d-1})$ , imamo

$$\begin{aligned} E[u_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon | g] - E[u, \Gamma | g] &= \mu^2 \int_U [(u_\varepsilon - g)^2 - (u - g)^2] dx \\ &+ \int_{U \setminus \Gamma_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - \int_{U \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx \\ &+ \nu [|\Gamma_\varepsilon \cap U| - |\Gamma \cap U|] \\ &= \mu^2 \int_D \left( \int_{\phi(z)}^{\phi(z) + \varepsilon\psi(z)} [(u^- - g)^2 - (u^+ - g)^2] dx_d \right) dz \\ &+ \int_D \left( \int_{\phi(z)}^{\phi(z) + \varepsilon\psi(z)} [|\nabla u^-|^2 - |\nabla u^+|^2] dx_d \right) dz \\ &+ \nu \int_D [\sqrt{1 + |\nabla(\phi + \varepsilon\psi)|^2} - \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2}] dz. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E[u_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon | g] - E[u, \Gamma | g]}{\varepsilon} &= \mu^2 \int_D \left[ (u^- - g)^2 - (u^+ - g)^2 \right] \Big|_{x_d = \phi(z)} \psi(z) dz \\ &+ \int_D \left[ |\nabla u^-|^2 - |\nabla u^+|^2 \right] \Big|_{x_d = \phi(z)} \psi(z) dz \\ &+ \nu \int_D \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \psi}{\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

za sve  $\psi$  s obzirom da je  $(u, \Gamma)$  minimizator. Parcijalnom integracijom dobivamo za sve  $\psi$ :

$$\begin{aligned} &\int_D \left[ (\mu^2 (u^- - g)^2 + |\nabla u^-|^2) - (\mu^2 (u^+ - g)^2 + |\nabla u^+|^2) \right] \Big|_{x_d = \phi(z)} \psi(z) dz \\ &- \int_D \nu \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla \phi}{\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}} \right] \psi(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Napokon, prva varijacija u odnosu na  $\Gamma$  je dana s

$$\left[ \mu^2 (u^- - g)^2 + |\nabla u^-|^2 \right] - \left[ \mu^2 (u^+ - g)^2 + |\nabla u^+|^2 \right] - \nu \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla \phi}{\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}} \right] = 0$$

na  $\Gamma \cap U$ .

Primijetimo da zadnji izraz predstavlja zakrivljenost od  $\Gamma \cap U$  te ako zapišemo gustoću energije kao

$$e(u; x) = \mu^2 (u(x) - g(x))^2 + |\nabla u(x)|^2,$$

napokon dobivamo

$$e(u^+) - e(u^-) + \nu \operatorname{curv}(\Gamma) = 0 \text{ na } \Gamma.$$

## 6.4 Slaba formulacija Mumford - Shah funkcionala

Da bismo bolje mogli proučavati matematička svojstva Mumford - Shahovog funkcionala (6.1) moramo definirati mjeru od  $\Gamma$  kao  $(d-1)$ -dimenzionalnu Hausdorffovu mjeru  $\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma)$ . Ona je najprirodniji način da proširimo pojam duljine na skupove koji nisu glatki.

Promatramo prvu varijaciju funkcionala

$$E[u, \Gamma | g] = \mu^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \nu \mathcal{H}^{d-1}(\Gamma). \quad (6.7)$$

Za dokaz egzistencije minimizatora primijenit ćemo direktnu metodu varijacijskog računa. Stoga najprije moramo pronaći topologiju za koju je funkcional slabo poluneprekidan te da je istovremeno osigurana kompaktnost minimizirajućeg niza. Međutim,  $\Gamma \mapsto \mathcal{H}^{d-1}(\Gamma)$  nije slabo poluneprekidan uz bilo koju kompaktnu topologiju. Zbog toga skup  $\Gamma$  zamijenjujemo sa skupom skokova  $S_u$  od  $u$ . Tada je  $\Gamma$  eliminiran, a problem je sada dan kao slaba formulacija

$$\inf_u F[u|g] = \mu^2 \int_{\Omega \setminus S_u} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus S_u} |\nabla u|^2 dx + \nu \mathcal{H}^{d-1}(S_u). \quad (6.8)$$

Da bismo pokazali da problem (6.8) ima rješenje moremo uvesti novi prostor. Novi prostor zvat ćemo prostor specijalnih funkcija ograničene varijacije i označavati sa  $SBV$ . Uveli su ga De Giorgi i Ambrosio radi slabih formulacija nekih varijacijskih problema poput Mumford - Shahovog problema segmentacije. Ovaj prostor je zatvoreni potprostor prostora  $BV$  te vrijedi  $W^{1,1}(\Omega) \subset SBV(\Omega) \subset BV(\Omega)$ . Više o prostoru  $SBV$  može se pronaći u [3].

Važan rezultat, koji ćemo koristiti za dokaz postojanja rješenja od (6.8), vezan uz kompaktnost  $SBV$ , dio je sljedećeg teorema. Dokaz se može pronaći u [2].

**Teorem 6.4.1.** *Neka je  $u_n \in SBV(\Omega)$  niz funkcija takvih da postoji konstanta  $C > 0$  i  $|u_n(x)| \leq C$  za gotovo svaki  $x \in \Omega$  i  $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_n}) \leq C$ . Tada postoji podniz  $u_{n_k}$  koji gotovo svuda konvergira prema funkciji  $u \in SBV(\Omega)$ . Štoviše,  $\nabla u_{n_k}$  konvergira slabo u  $L^2(\Omega)^N$  prema  $\nabla u$  i*

$$\mathcal{H}^{N-1}(S_u) \leq \liminf_{n_k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_{n_k}}).$$

Idući teorem govori o postojanju minimizatora.

**Teorem 6.4.2.** *Neka je  $g \in L^\infty(\Omega)$  gdje je  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  otvoren, ograničen i povezan skup. Tada postoji minimizator  $u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  od*

$$F[u|g] = \mu \int_{\Omega \setminus S_u} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus S_u} |\nabla u|^2 dx + \nu \mathcal{H}^{d-1}(S_u).$$

*Dokaz.* Primijetimo da  $0 \leq \inf_{SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)} F < \infty$ . Naime, možemo uzeti  $u_0 = 0 \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  i iskoristiti činjenicu da je  $g \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ . Stoga, postoji minimizirajući niz  $u_n \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  koji zadovoljava  $\lim_{n \rightarrow \infty} F[u_n|g] = \inf F$ . Također, primijetimo kako zbog prijašnje diskusije ovdje imamo  $\|u_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty < \infty$ . Budući da  $F[u_n|g] \leq C < \infty$  za sve  $n \geq 0$  i koristeći  $g \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , zaključujemo da

$$\|u_n\|_2 \leq C \quad \text{i} \quad \int_{\Omega \setminus S_{u_n}} |\nabla u| dx + \mathcal{H}^{d-1}(S_{u_n}) < C,$$

za neku pozitivnu realnu konstantu  $C$ . Koristeći ovo i teorem 6.4.1, zaključujemo da postoje podniz  $u_{n_k}$  i  $u \in SBV(\Omega)$  takvi da  $u_{n_k} \rightharpoonup u$  u  $L^2(\Omega)$  i  $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u$  u  $L^2(\Omega)$ . Stoga,

$$F[u|g] \leq \liminf_{n_k \rightarrow \infty} F[u_{n_k}|g] = \inf F,$$

pri čemu smo koristili da je norma u  $L^2(\Omega)$  slabo nizovno poluneprekidna odozdo. Nadalje, vrijedi i

$$\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty.$$

□

# Bibliografija

- [1] *A Guide to Different Types of Noises and Image Denoising Methods*, <https://analyticsindiamag.com/a-guide-to-different-types-of-noises-and-image-denoising-methods/>, pristupljeno: 14.8.2022.
- [2] L. Ambrosio, *A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (1989), 3(B):857–881.
- [3] L. Ambrosio, *Existence Theory for a New Class of Variational Problems*, Archive for Rational Mechanics and Analysis (1990), 111(4):291–322.
- [4] G. Aubert i P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Springer, 2006.
- [5] A Chambolle, V. Caselles, M. Novaga, D. Cremers i T. Pock, *An introduction to Total Variation for Image Analysis*, HAL open science, 2009.
- [6] T. F. Chan i J. Shen, *Image Processing and Analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*, SIAM, 2005.
- [7] *Denoise Image Using Deep Convolutional Neural Networks — Image Denoising — Deep Learning for Image Processing — MATLAB Deep Learning Toolbox™*, <https://www.gofastresearch.com/2020/05/denoise-image-using-dcnn.html>, pristupljeno: 10.7.2022.
- [8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010.
- [9] *image\_denoise*, [https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/c\\_src/image\\_denoise/image\\_denoise.html](https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/c_src/image_denoise/image_denoise.html), pristupljeno: 17.8.2022.
- [10] *Image Inpainting: Humans vs. AI*, [https://medium.com/@mikhail\\_26901/image-inpainting-humans-vs-ai-48fc4bca7ecc](https://medium.com/@mikhail_26901/image-inpainting-humans-vs-ai-48fc4bca7ecc), pristupljeno: 10.7.2022.
- [11] *Median Filter*, <https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/median.htm>, pristupljeno: 5.8.2022.

- [12] *Minimum, Maximum, and Median Filters*, <https://www.graphicsmill.com/docs/gm/minimum-maximum-median-filters.htm>, pristupljeno: 5.8.2022.
- [13] Dr. Sachin Ruikar i R. Kabade, *Image deblurring and restoration using wavelet transform*, **9** (2016).
- [14] C. B. Schönlieb, *Image Processing – Variational and PDE Methods*, Mathematical Tripos Part III, 2013/2014.
- [15] L. A. Vese i C. Le Guyader, *Variational Methods in Image Processing*, Chapman & Hall/CRC, 2016.

# Sažetak

Obrada slika matematički se može opisati s različitih aspekata, no u ovom radu odabran je pristup preko varijacijskog računa i parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Osnovni zadaci pri obradi slika su raščišćavanje, izoštravanje, nadopunjavanje i segmentacija. Kada jednom digitalnu sliku definiramo kao matematički element, možemo analizirati modele koji se bave jednim od navedena četiri zahtjeva pri obradi slika.

U prvom poglavlju motiviran je spomenuti pristup te su dani kratki opisi osnovnih alata koji se koriste. Drugo poglavlje opisuje različite načine reprezentacije slika kao matematičkih elemenata te sugerira kako se prostor  $BV$  slika pokazuje najpogodnijim za opis modela obrade. U trećem poglavlju opisuje se Rudin, Osher, Fatemi TV model raščišćavanja te su pokazani rezultati implementacije metode u Python-u. Četvrto poglavlje opisuje izoštravanje, koje je inverzni problem, opet preko Rudin, Osher, Fatemi TV modela. U petom poglavlju opisano je nadopunjavanje, a u šestom segmentacija, oboje preko Mumford - Shahovih modela.

# Summary

Image processing can be mathematically described from different aspects, but in this thesis variational calculus and partial differential equations were chosen. Main tasks in image processing are denoising, deblurring, inpainting and segmentation. Once we represent an image as a mathematical object, we can analyse models which deal with one of four tasks in image processing.

In the first chapter mentioned approach is motivated and brief description of tools used is given. Second chapter describes different ways to represent an image as a mathematical object and suggest the space of  $BV$  images as the most suitable. Third chapter describes Rudin, Osher, Fatemi TV denoising model and gives the results of the implementation of the method in Python. Fourth chapter describes deblurring, which is an inverse problem, again via Rudin, Osher, Fatemi TV model. Fifth chapter describes inpainting and sixth chapter describes segmentation, both via Mumford - Shah models.



# Životopis

Rođena sam 29. travnja 1996. godine u Zadru. Pohađala sam Osnovnu školu „Vladimir Nazor” Neviđane na otoku Pašmanu, a nakon toga Gimnaziju Jurja Barakovića u Zadru. Nakon završetka srednje škole, 2014. godine upisala sam nastavnički smjer preddiplomskog sveučilišnjog studija Matematike na zagrebačkom Prirodoslovno - matematičkom fakultetu. Isti sam završila 2019. godine, a odmah potom upisala sam diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika na istom odsjeku. Od 2017. godine do 2022. godine bila sam potpredsjednica Udruge za održivi razvoj „Bumbak” koja djeluje na otoku Pašmanu.