

# Raspadi i vremena života teških hadrona

---

Hukić, Eugen

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:514000>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Eugen Hukić

RASPADI I VREMENA ŽIVOTA TEŠKIH  
HADRONA

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Eugen Hukić**

Diplomski rad

**Raspadi i vremena života teških  
hadrona**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Blaženka Melić

Suvoditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Nikola Poljak

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2022.

Veliko hvala mentorici Blaženki Melić na vodstvu, prenesenom znanju i uloženom vremenu. Zahvaljujem se Ivanu Nišandžiću i Jamesu Gratrexu na pomoći, te prof. Alexanderu Lenzu, University of Siegen, što mi je ustupio svoja predavanja "Spezielle Kapitel der QFT".

Hvala mojoj obitelji na podršci i razumijevanju tijekom cijelog studija. Hvala i prijateljima na podršci i što su mi učinili studiranje veselijim.

## Sažetak

Razmatrani su slabi raspadi teških hadrona i njihova vremena života. Vremena života teških hadrona dobivaju se izračunavanjem inkluzivnih širina raspada teških kvarkova. Izložen je formalizam inkluzivnih slabih raspada u kojem je širina raspada izražena kao red matričnih elemenata lokalnih operatora s inverznom masom teškog kvarka kao parametrom razvoja. Opisani su efektivni hamiltonijan slabih interakcija i efektivna teorija teškog kvarka, koji su osnova računa inkluzivnih raspada. U ovom radu primijenjen je spomenuti formalizam na šarmantne mezone. Izračunata su vremena života  $D^0$ ,  $D^+$  i  $D_s^+$  mezona, gdje smo se ograničili na vodeći red u razvoju po QCD konstanti vezanja,  $\alpha_s$ . Promatrani su doprinosi pojedinačnih članova u razvoju širina raspada tih mezona. Prikazani i diskutirani su nedavno objavljeni rezultati koji uključuju više redove po  $\alpha_s$ .

Ključne riječi: teški hadroni, vremena života, hamiltonijan slabih raspada, efektivna teorija teškog kvarka

# Heavy hadron decays and lifetimes

## Abstract

Weak decays of heavy hadrons and their lifetimes are considered. The lifetimes of heavy hadrons are obtained by calculating the inclusive decay widths of heavy quarks. The formalism of inclusive weak decays, in which the decay width is expressed as a series of matrix elements of local operators with the inverse heavy quark mass as the expansion parameter, is presented. The effective Hamiltonian of weak interactions and the Heavy Quark Effective Theory are described, which are the basis for the calculation of inclusive decays. In this thesis, the mentioned formalism is applied to charmed mesons. The lifetimes of  $D^0$ ,  $D^+$  and  $D_s^+$  mesons are calculated, where we limited ourselves to the leading order in the expansion in the strong coupling,  $\alpha_s$ . The individual contributions in the expansion of the decay widths of these mesons are discussed. Recently published results involving higher orders in the expansion in  $\alpha_s$  are presented and discussed.

Keywords: heavy hadrons, lifetimes, Hamiltonian of weak interactions, Heavy Quark Effective Theory

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kvantna kromodinamika i slaba međudjelovanja</b>	<b>3</b>
2.1	Uvod u QCD . . . . .	3
2.2	Lagranžijan QCD-a . . . . .	3
2.3	Kvarkovski model . . . . .	4
2.3.1	SU(2) okusna simetrija . . . . .	4
2.3.2	SU(3) okusna simetrija . . . . .	7
2.3.3	SU(4) okusna simetrija . . . . .	9
2.4	Slaba međudjelovanja . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Teški hadroni</b>	<b>14</b>
3.1	Eksperimentalne vrijednosti i opis računanja širine raspada . . . . .	14
3.2	Mjerenje vremena života $D$ mezona . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Efektivne teorije</b>	<b>21</b>
4.1	Efektivni hamiltonijan slabih međudjelovanja . . . . .	21
4.1.1	Fermijeva teorija . . . . .	23
4.1.2	Neleptonski efektivni hamiltonijan . . . . .	24
4.1.3	Ukupni efektivni hamiltonijan . . . . .	27
4.2	Simetrija teškog kvarka . . . . .	28
4.2.1	Efektivna teorija teškog kvarka . . . . .	29
4.2.2	Lagranžijan efektivne teorije teškog kvarka . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Razvoj teškog kvarka</b>	<b>35</b>
5.1	Formula inkluzivne širine raspada . . . . .	35
5.2	Dvokvarkovski operatori . . . . .	38
5.2.1	Operatori dimenzije 3 i 5 . . . . .	38
5.2.2	Operatori dimenzije 6 . . . . .	40
5.3	Četverokvarkovski operatori . . . . .	40
5.3.1	Operatori dimenzije 6 . . . . .	40
5.3.2	Operatori dimenzije 7 . . . . .	46

<b>6</b>	<b>Rezultati</b>	<b>49</b>
6.1	Širine raspada i vremena života . . . . .	49
6.2	Omjeri vremena života . . . . .	57
6.3	Korekcije višeg reda QCD-a . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>61</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Račun širine raspada vodećeg člana</b>	<b>63</b>
<b>B</b>	<b>Širine raspada četverokvarkovskih članova dimenzije 6</b>	<b>67</b>
B.1	Paulijeva interferencija . . . . .	67
B.2	Izmjena W bozona . . . . .	70
B.3	Anihilacija . . . . .	73
<b>C</b>	<b>Vrijednosti parametara modela vreće računatih preko HQET pravila sume</b>	<b>74</b>
	<b>Literatura</b>	<b>75</b>



# 1 Uvod

Vrijeme života čestice je jedno od njezinih najosnovnijih svojstva. U ovom radu proučavani su slabi raspadi i vremena života hadrona koji sadržavaju teški kvark. Slabi raspadi su česta područja istraživanja jer mogu poslužiti za testiranje Standardnog modela, zato što daju brojne informacije o fundamentalnim pitanjima narušenja CP simetrije, miješanju okusa preko *Cabibbo–Kobayashi–Maskawa* (CKM) matrice i služe kao test narušenja univerzalnosti leptonskog okusa. Slabi raspadi hadrona su direktno povezani s hadronskom fizikom, koja je karakterizirana neperturbativnim efektima jake sile. Prepletenost efekata slabih i jakih međudjelovanja osigurava bogatstvo pojava i omogućuje uvid u raznolikost fizikalnih mehanizma.

Vremena života teških hadrona se dobivaju izračunavanjem inkluzivnih širina raspada teških kvarkova koji se sustavno tretiraju u teorijskom okviru poznatom kao razvoj po masi teške čestice. On je nastao spojem tehnika razvoja operatorskog umnoška i efektivne teorije teškog kvarka. U ovom radu opisani su navedeni formalizmi, te su oni primijenjeni u računu vremena života šarmantnih mezona  $D^0$ ,  $D^+$  i  $D_s^+$ . Promatrane su širine raspada tih mezona i posebno su razmatrani doprinosi pojedinačnih članova u razvoju širine raspada po masi  $c$  kvarka.

Rad je organiziran na sljedeći način. 2. poglavlje je o kvantnoj kromodinamici (QCD) i slabim interakcijama. Opisan je lagranžijan QCD-a i kvarkovski model, te kako se pomoću aproksimativne okusne simetrije može doći do osnovnih svojstava mezona.

U 3. poglavlju su prikazani eksperimentalni rezultati vremena života teških mezona i napravljen je kratak pregled formalizma računanja širina raspada teških hadrona. Na kraju poglavlja opisan je način mjerenja vremena života teških hadrona.

U poglavlju 4. opisane su efektivne teorije koje su osnova računa inkluzivnih raspada teških hadrona. Poglavlje počinje s opisom efektivnog hamiltonijana slabih međudjelovanja koji se koristi u računu širine raspada. Zatim je opisana simetrija teškog kvarka koja vodi na efektivnu teoriju teškog kvarka (tzv. HQET) pomoću koje se određuju matrični elementi u izrazu za širinu raspada teškog mezona.

U 5. poglavlju je opisan razvoj po masi teškog kvarka, formula pomoću koje se računa inkluzivna širina raspada teških hadrona koja se dobiva pomoću razvoja operatorskog produkta, te je dan detaljan opis najvažnijih članova u tom razvoju.

U 6. poglavlju su diskutirani dobiveni rezultati za širine raspada šarmantnih mezona u vodećem redu QCD-a, te je diskutiran doprinos pojedinačnih članova u razvoju. Izračunati su i omjeri vremena života šarmantnih mezona. Na kraju poglavlja diskutiran je utjecaj viših redova QCD-a na širine raspada i dani su najnoviji dostupni rezultati koji uključuju više redove QCD-a. Komentirani su rezultati i izvučen je zaključak.

Dodatak A sadrži račun vodećeg člana u formuli razvoja širine raspada. U dodatku B je napravljen račun za doprinos četverokvarkovskih članova dimenzije 6 ukupnoj širini raspada. Dodatak C sadrži tablicu vrijednosti parametara modela vreće (tzv. *bag* modela) izračunatih pomoću HQET pravila sume.

## 2 Kvantna kromodinamika i slaba međudjelovanja

### 2.1 Uvod u QCD

Jaka sila je jedan od četiri fundamentalne interakcije u prirodi. Čestice koje interagiraju jakom silom zovu se hadroni. Oni se dijele u dvije skupine: barioni, čestice polucjelobrojnog spina i mezoni, čestice cjelobrojnog spina. Hadroni nisu elementarne čestice, oni se sastoje od kvarkova, antikvarkova i gluona. Barioni se u kvarkovskom modelu sastoje od tri kvarka ( $qqq$ ), a mezoni od kvark-antikvark para ( $q\bar{q}$ ). Kvarkovi su fermioni spina  $\frac{1}{2}$  i mogu postojati u 6 vrsta, tj. okusa, koji se dijele u 3 generacije; u prvu pripadaju  $u$  (*up*) i  $d$  (*down*), u drugu  $c$  (*charm*) i  $s$  (*strange*), te u treću  $t$  (*top* ili *truth*) i  $b$  (*bottom* ili *beauty*) kvark. Kvantna kromodinamika (skraćeno QCD, engl. *quantum chromodynamics*) je kvantna teorija polja koja opisuje jaku silu i čestice koje njome interagiraju. Nosioi jake sile su gluoni. Hadroni su stanja koja su vezana gluonima, te dobar dio mase hadrona ne dolazi od "golih" masa kvarkova, nego od gluona. U iduća dva poglavlja opisana su osnovna svojstva QCD-a i slabih interakcija (prema [1–3]).

### 2.2 Lagranžijan QCD-a

Kvantna kromodinamika je baždarna teorija jakih interakcija između elementarnih čestica, kvarkova i gluona. Ona je invarijantna na SU(3) lokalne fazne transformacije

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp \left[ i g_s \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \hat{\mathbf{T}} \right] \psi(x), \quad (2.1)$$

gdje je  $g_s$  konstanta vezanja QCD-a,  $\alpha^a(x)$  su funkcije prostorno-vremenske koordinate  $x$  i ima ih 8, a  $T^a$  su 8 generatora grupe SU(3). Oni su povezani s Gell-Mannovim matricama,  $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ . Svakom kvarkovskom polju je pridružen naboj koji se naziva boja (zato se često i piše SU(3)<sub>c</sub>, c za *color*) i dolazi u tri vrste: crvena (oznaka r, engl. *red*), zelena (oznaka g, engl. *green*) i plava (oznaka b, engl. *blue*). Prema tome, kvarkovsko (i antikvarkovsko) polje  $\psi(x)$  ima tri komponente,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_r(x) \\ \psi_g(x) \\ \psi_b(x) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

gdje je svaka komponenta Diracovo polje za kvark određene boje. U prirodi se opažaju samo objekti koji su invarijantni na transformaciju u prostoru boje, odnosno ne nose голу boju, nego jednaku količinu boje i antiboje (kao kvark i antikvark u mezonu) ili jednake količine svake od tri boje (kao kod bariona, gdje svaki kvark nosi različitu boju). To svojstvo se naziva zatočenje boje.

Interakcije se opisuju preko prijenosnika gluona, kojima se pridružuju baždarna polja  $G_\mu^a(x)$ . Ima ih 8, za svaki generator baždarne simetrije jedno vektorsko polje. Lagranžijan QCD-a ima sljedeći oblik

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\psi}_{f,A} (i\not{\partial}\delta_{AB} - g_s T_{AB}^a \not{G}^a(x) - \delta_{AB} m_f) \psi_{f,B} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

gdje suma po  $f$  ide po okusima kvarkova i koristi se *slash* notacija,  $\not{G}^a(x) \equiv \gamma^\mu G_\mu^a(x)$  i  $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ , a  $\gamma^\mu$  su Diracove matrice.  $F_{\mu\nu}^a$  je tenzor jakosti gluonskog polja,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (2.4)$$

gdje su  $f^{abc}$  strukturne konstante SU(3) grupe definirane preko  $[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c$ . Pošto generatori SU(3) grupe ne komutiraju, QCD je neabelovska baždarna teorija. Treći član u prethodnoj jednadžbi opisuje interakciju gluona sa samim sobom.

## 2.3 Kvarkovski model

### 2.3.1 SU(2) okusna simetrija

U kvarkovskom modelu kvarkovi nose električni naboj i spin hadrona, te se zato nazivaju valentnim. Iz ovog modela se mogu načiniti brojna predviđanja. Kvarkovski model slijedi prirodno iz aproksimativne izospinske simetrije nuklearne sile. Iako se u kvarkovskom modelu zanemaruje utjecaj gluona, postoje eksperimentalne naznake da gluoni imaju važnu ulogu, te da i masa i spin hadrona većinom dolaze od gluonskih interakcija.

U kvarkovskom modelu koncept izospina za lake kvarkove ima značajnu ulogu. Koncept izospina je uveo Heisenberg, koji je, nakon što je otkriven neutron 1932. godine, predložio da se proton i neutron mogu promatrati kao dva stanja iste čestice. Naime, mase protona i neutrona su približno jednake ( $m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_n =$

939.57 MeV/c<sup>2</sup>) i za nuklearnu silu (interakciju nukleon-nukleon) se može uzeti da je aproksimativno neovisna o naboju. Drugim riječima, kada bi se zanemarila razlika u masama tih čestica i "isključio" električni naboj protona, ne bi bilo moguće razlikovati proton od neutrona. Stoga možemo pričati o (aproksimativnoj) izospinskoj simetriji nuklearne sile. Proton i neutron, kao dva stanja iste čestice - nukleona, se mogu tada prikazati kao stanja

$$p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad n = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Ona tvore izospinski dublet, ukupnog izospina  $I = 1/2$  i treće komponente izospina  $I_3 = 1/2$  za  $p$ , te  $I_3 = -1/2$  za  $n$ . Izospinska simetrija tada znači da su spomenuta stanja invarijantna na grupu SU(2) "rotacija" u izospinskom prostoru. Jedna takva transformacija je zamjena svih protona neutronima i obratno.

Ideja da su proton i neutron različita stanje iste čestice, tj. ideja izospinske simetrije može se proširiti na kvarkove. Kako QCD međudjelovanje ne razlikuje okuse kvarkova, jaka sila posjeduje okusnu simetriju (u limesu u kojem su mase  $u$  i  $d$  kvarka jednake) analognu izospinskoj simetriji nuklearne sile. U apstraktnom okusnom prostoru stanja  $u$  i  $d$  kvarka se zapisuju isto kao i stanja  $p$  i  $n$  u jednadžbi (2.5),

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Ona su invarijantna na unitarne transformacije u SU(2) prostoru. Općenita konačna transformacija u tom prostoru se može prikazati unitarnim operatorom

$$\hat{U} = e^{i\alpha \cdot \hat{T}}, \quad (2.7)$$

gdje je  $\alpha \cdot \hat{T} = \alpha_1 \hat{T}_1 + \alpha_2 \hat{T}_2 + \alpha_3 \hat{T}_3$ . Operator  $\hat{T} = \frac{1}{2} \sigma$  je operator izospina. Za tri generatora  $\sigma^a$  može se izabrati da su Paulijeve matrice. Transformacijom stanja  $|u\rangle$  ili  $|d\rangle$  unitarnim operatorom (2.7), u općenitom slučaju, dobije se stanje koje je linearna kombinacija stanja  $|u\rangle$  i  $|d\rangle$ . No kako  $u$  i  $d$  kvark nisu identični, imaju različite naboje (i različite mase), nema smisla promatrati njihove linearne kombinacije, zato što bi to vodilo na narušenje zakona očuvanja naboja (koji kaže da je električni naboj očuvan u svim interakcijama). Jedina fizikalno smisljena transformacija je ona koja odgovara

zamjeni tih stanja,  $u \leftrightarrow d$ .

Izospinska algebra je ista spinskoj i definirana je generatorima SU(2) grupe simetrija. Grupa ima tri generatora, koji su neabelovski i zadovoljavaju algebru

$$[\hat{T}_1, \hat{T}_2] = i\hat{T}_3, \quad [\hat{T}_2, \hat{T}_3] = i\hat{T}_1 \quad \text{i} \quad [\hat{T}_3, \hat{T}_1] = i\hat{T}_2. \quad (2.8)$$

Hamiltonijan jakih interakcija ne razlikuje  $u$  od  $d$  kvarka, stoga u limesu kada su mase  $u$  i  $d$  kvarka jednake, mogu se iz simetrija raditi fizikalne predikcije. Očuvane observable su treća komponenta izospina  $I_3$  i ukupni izospin  $I$  (operatori  $\hat{I}$  i  $\hat{I}_3$  komutiraju međusobno i s hamiltonijanom jakih interakcija). Pravila pri kombiniranju izospina za sistem od dva kvarka su jednaka kao i pravila za angularni moment. Za kombinaciju dva stanja  $\phi(I^a, I_3^a)$  i  $\phi(I^b, I_3^b)$ , dobije se stanje  $\phi(I, I_3)$  za koje vrijedi

$$I_3 = I_3^a + I_3^b \quad \text{i} \quad |I^a - I^b| \leq I \leq |I^a + I^b|. \quad (2.9)$$

Kombinacijom dva  $u$  kvarka dobije se

$$uu \equiv \phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \phi(1, +1). \quad (2.10)$$

Kombinacijom dva  $d$  kvarka dobije se

$$dd \equiv \phi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \otimes \phi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \phi(1, -1). \quad (2.11)$$

Može se pokazati (npr. pomoću operatora podizanja i spuštanja projekcije izospina,  $\hat{T}_+$  i  $\hat{T}_-$ ) da su druga dva stanja, koja su svojstvena stanja ukupnog izospina s projekcijom  $I_3 = 0$ , kombinacije  $ud$  i  $du$  stanja,

$$\phi(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) \quad \text{i} \quad \phi(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du). \quad (2.12)$$

Stanje  $\phi(1, 0)$  je stanje tripleta izospina 1, a stanje  $\phi(0, 0)$  je stanje singleta izospina 0. Dakle, dva izospinska dubleta se povežu tako da se dobije jedno triplet stanje izospina 1 i jedno singlet stanje izospina 0, što se zapisuje kao  $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$ .

Izospinsko stanje tri kvarka dobije se dodavanjem jednog  $u$  ili  $d$  kvarka na izospinsko singlet stanje i triplet stanje dva kvarka. Korištenjem pravila za zbrajanje projekcije izospina  $I_3$  i ukupnog izospina  $I$  može se iz izvedenih stanja dva kvarka

dobiti stanja sustava od tri kvarka. Od osam kombinacija tri  $u$  i  $d$  kvarka ( $uuu$ ,  $uud$ ,  $udu$ ,  $udd$ ,  $duu$ ,  $dud$ ,  $ddu$  i  $ddd$ ), dobije se da se oni grupiraju u jedno kvadruplet stanje izospina  $\frac{3}{2}$  i dva dubleta izospina  $\frac{1}{2}$ , što se zapisuje kao  $2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \otimes (3 \oplus 1) = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = 4 \oplus 2 \oplus 2$ .

### 2.3.2 SU(3) okusna simetrija

Proširenjem okusne simetrije dodavanjem stranog,  $s$  kvarka, dobije se SU(3) okusna simetrija. No pošto je  $s$  kvark značajno veće mase od  $u$ , odnosno  $d$  kvarka, simetrija je dodatno narušena. No, iako je razlika između mase  $s$  kvarka i  $u$ , tj.  $d$  kvarka velika u odnosu na masu  $u, d$  kvarkova, i reda je 100 MeV-a, to je relativno malo naprama tipičnim energijama vezanja u hadronima, koje su reda 1 GeV, što čini promatranje SU(3) okusne simetrije opravdanim.

SU(3) okusna simetrija se može prikazati unitarnom  $3 \times 3$  matricom  $\hat{U}$ , koja se može zapisati pomoću devet kompleksnih brojeva ili 18 realnih parametara. Iz uvjeta unitarnosti matrice,  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = I$ , sljede devet ograničenja na parametre. Stoga se  $\hat{U}$  može prikazati pomoću devet linearno nezavisnih  $3 \times 3$  matrica. Jedna od njih je jedinična matrica pomnožena s kompleksnom fazom. Ostalih osam matrica SU(3) grupe se mogu prikazati pomoću osam hermitskih generatora  $\hat{T}_i$ , tako da se opća SU(3) transformacija može zapisati kao

$$\hat{U} = e^{i\alpha \cdot \hat{T}}. \quad (2.13)$$

Osam generatora se mogu prikazati pomoću osam Gell-Mannovih matrica,  $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ ,  $a = (1, \dots, 8)$ . Matrice djeluju na SU(3) reprezentacije  $u$ ,  $d$  i  $s$  kvarkova

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Kako ne komutiraju svi generatori SU(3) grupe, treba za observable izabrati generatore koji komutiraju. Uz ukupni izospin,  $\hat{T}$ , kompatibilne observable se opisuju generatorima  $T_3$  i  $T_8$ . Odgovarajući kvantni brojevi su treća komponenta izospina i

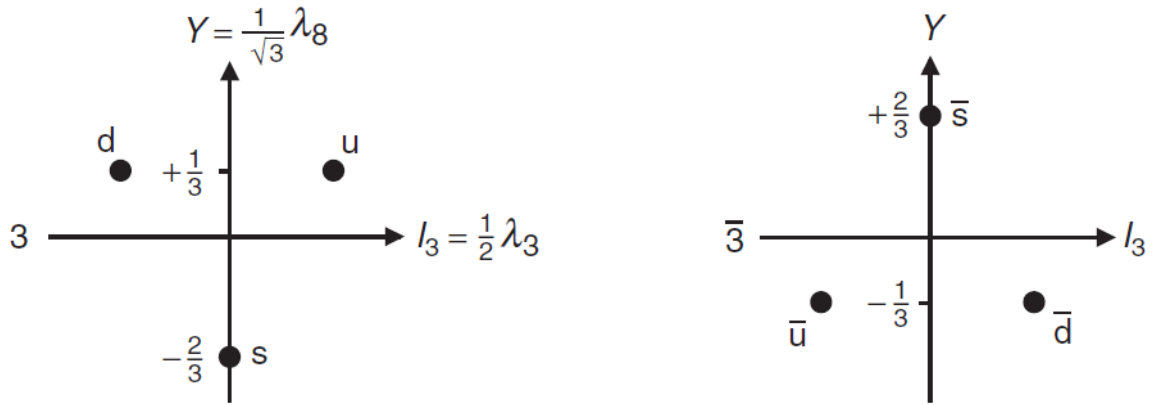
hipernaboj, koji su definirani operatorima

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 \quad \text{i} \quad \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8. \quad (2.15)$$

Može se pokazati da kvarkovi imaju sljedeće vrijednosti izospina i hipernaboja

$$\begin{aligned} \hat{T}_3 u &= +\frac{1}{2}u \quad \text{i} \quad \hat{Y}u = +\frac{1}{3}u, \\ \hat{T}_3 d &= -\frac{1}{2}d \quad \text{i} \quad \hat{Y}d = +\frac{1}{3}d, \\ \hat{T}_3 s &= 0 \quad \text{i} \quad \hat{Y}s = -\frac{2}{3}s. \end{aligned} \quad (2.16)$$

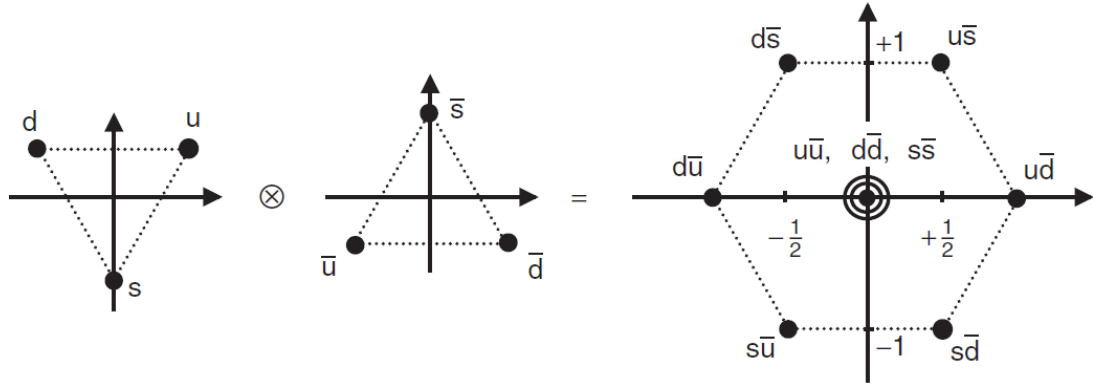
Antikvarkovi  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$  i  $\bar{s}$  imaju kvantne brojeve suprotnog predznaka od odgovarajućih kvarkova  $u$ ,  $d$  i  $s$ , te oni tvore  $\bar{3}$  multiplet, što je i prikazano na slici 2.1, gdje je na x-osi prikazana vrijednost treće komponente izospina, a na y-osi vrijednost hipernaboja.



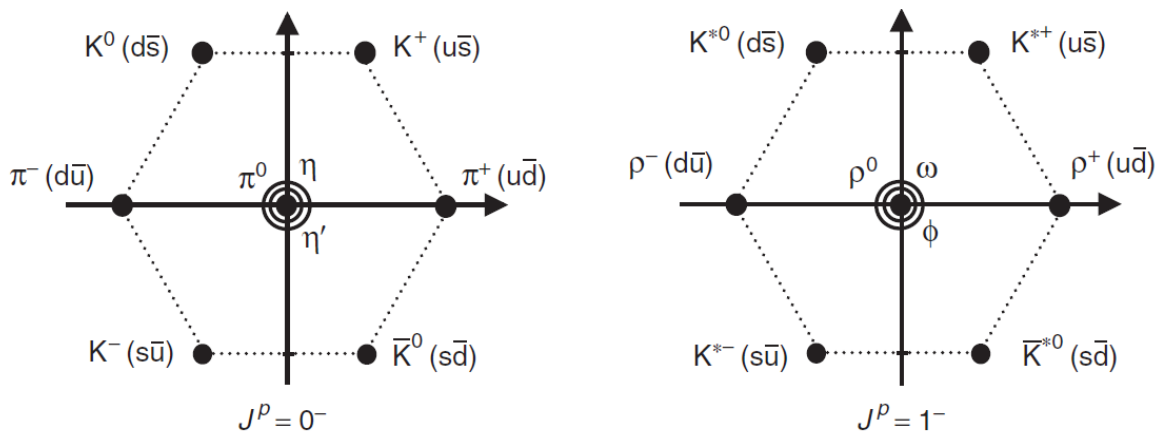
Slika 2.1: Izospin  $I_3$ , i hipernaboj  $Y$ , u SU(3) okusnoj simetriji za kvarkove (lijevo) i antikvarkove (desno). Iz [1].

Hipernaboj  $Y$  je aditivan kvantni broj kao i  $I_3$ , te se pomoću njih određuje okusni sadržaj stanja. Laka mezonska stanja ( $q\bar{q}$ ), koja sadrže  $u$ ,  $d$  ili  $s$  kvark i njihove antikvarkove, mogu se konstruirati tako da se odrede ekstremna stanja u SU(3) multipletu, te se pomoću operatora podizanja i spuštanja odrede ostala stanja multipleta. Vrijednosti brojeva  $I_3$  i  $Y$  za devet mogućih stanja kombinacije lakog kvarka i lakog antikvarka prikazani su na slici 2.2. Kvark i antikvark u SU(3) reprezentaciji se povezuju u jedan oktet i jedan singlet,  $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ . Slika 2.3 prikazuje mezone orbitalnog angularnog momenta  $l = 0$  na  $I_3 - Y$  grafu, lijevi graf za stanja spina  $s = 0$  ( $J = 0$ ), tj. pseudoskalarne mezone, a desni za stanja spina  $s = 1$  ( $J = 1$ ), tj. vektorske mezone, koji su svi eksperimentalno potvrđeni. Ista rasprava se može





Slika 2.2: 9 mogućih  $q\bar{q}$  kombinacija i njima pridruženi izospin  $I_3$ , i hipernaboj  $Y$ , SU(3) okusne simetrije. Iz [1].



Slika 2.3: Devet  $l = 0$  i  $s = 0$  pseudoskalarnih mezona, te devet  $l = 0$  i  $s = 1$  vektorskih mezona sastavljenih od lakih kvarkova i njima pridruženi izospin  $I_3$ , i hipernaboj  $Y$ . Iz [1].

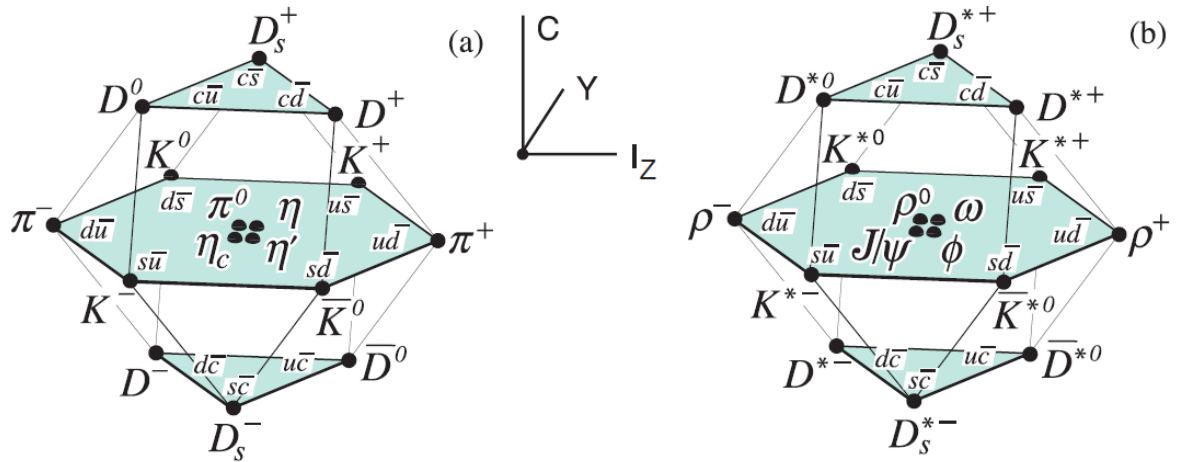
napraviti i s barionima ( $qqq$ ). Dakle, iako je SU(3) simetrija aproksimativna, njom je moguće objasniti otkrivena mezonska stanje orbitalnog angularnog momenta  $l = 0$ . Isto vrijedi i za barionska stanja orbitalnog angularnog momenta  $l = 0$ .

### 2.3.3 SU(4) okusna simetrija

Simetriju se može dalje proširiti na SU(4) dodavanjem čarobnog,  $c$  kvarka. Očuvani kvantni brojevi su treća komponenta izospina  $I_3$ , hipernaboj  $Y$  i  $C$  broj. Grafički prikaz pseudoskalarnih i vektorskih mezona sačinjenih od  $u, d, s$  i  $c$  kvarkova u  $I_3 - Y - C$  prostoru je prikazan na slici 2.4.  $C$  je jednak  $+1$  ako je u mezonu sadržan  $c$  kvark, a jednak  $-1$  za  $\bar{c}$  antikvark, dok je za ostale kvarkove nula. Ti kvantni brojevi su povezani s nabojem preko Gell-Mann-Nishijima formule, koja je za mezone

$$Q = I_3 + \frac{3Y + 4C}{6}, \quad (2.17)$$

gdje je  $Q$  naboj kvarka.



Slika 2.4: 16 pseudoskalarnih i vektorskih mezona sastavljenih od  $u, d, s$  i  $c$  kvarkova i njima pridruženi kvantni brojevi; izospin  $I_3$ ,  $C$  broj i hipermaboj  $Y$ . Iz [4].

U  $SU(4)$  16 mezona se grupira u 15-plet i singlet,  $4 \otimes \bar{4} = 15 \oplus 1$ .

No kako je masa  $c$  kvarka veća do mase lakih kvarkova za više od 1 GeV, koliko iznosi tipična energija vezanja hadrona,  $SU(4)$  simetrija je od ograničene koristi, iako je dobra za klasifikaciju hadrona koji sadrže  $c$  kvark.

## 2.4 Slaba međudjelovanja

Slaba sila se po mnogočemu razlikuje od jake i elektromagnetske sile. Prijenosnici jake i elektromagnetske sile su bezmaseni, neutralni gluoni, odnosno foton, dok u slabim interakcijama imamo masivne prijenosnike, nabijeni  $W^+$  i  $W^-$  bozoni, te neutralni  $Z^0$  bozon. Dio slabih interakcija, u kojima su prijenosnici  $W^\pm$  bozoni, opisuje procese u kojima čestica koja sudjeluje u procesu mijenja naboj, tj.  $W^\pm$  bozoni povezuju fermione različitog električnog naboja. Taj dio interakcije je odgovoran i za narušenje pariteta, to je ustvari jedini dio u standardnom modelu gdje paritet nije očuvan.

Slaba interakcija je povezana s invarijantnošću na  $SU(2)$  lokalne transformacije,

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[ig_W \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \mathbf{T}] \psi(x). \quad (2.18)$$

$T^i$  su tri generatora  $SU(2)$  grupe, koji se mogu zapisati preko Paulijevih matrica,  $T^i = \frac{1}{2} \sigma^i$ , a  $\alpha_i(x)$  su tri funkcije koje određuju lokalnu fazu u nekoj prostorno-vremenskoj točki. Zbog zahtjeva lokalne baždarne invarijantnosti uvode se tri baždarna polja

koja odgovaraju baždarnim bozonima  $W^{(1)}$ ,  $W^{(2)}$  i  $W^{(3)}$ . Kako su generatori SU(2) grupne transformacije  $2 \times 2$  matrice, spinor  $\psi(x)$  je (pa analogiji izospina) slabi izospinski dublet, no kako interakcije u kojima su prijenosnici  $W^\pm$  bozoni vežu fermione različitog naboja, taj dublet sadrži okuse koji se razlikuju za jedan elementarni naboj. Pokazalo se da u slabim nabijenim interakcijama, u kojima su prijenosnici  $W^\pm$  bozoni, sudjeluju samo lijevi fermioni, tj. lijevi kiralni (skraćeno LH, od engl. *left-handed*) spinor,  $\psi_L = P_L \psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$ . Prema tome, baždarna transformacija (2.18) djeluje samo na LH projekcije spinora, stoga se za simetrijsku grupu slabih interakcija često piše SU(2)<sub>L</sub>. Slabi izospinski dubleti su:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \mu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \text{ i } \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L. \quad (2.19)$$

Ukupni slabi izospin dubleta je  $I_W = \frac{1}{2}$ , dok gornje čestice u dubletu, kao npr.  $\nu_\mu$ , imaju treću komponentu slabog izospina  $I_W^{(3)} = \frac{1}{2}$ , a donje čestice u dubletu, kao npr.  $\mu^-$ , imaju treću komponentu slabog izospina  $I_W^{(3)} = -\frac{1}{2}$ . Transformacija (2.18) ne mijenja desne kiralne projektore (skraćeno RH od engl. *right-handed*) spinora,  $\psi_R = P_R \psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi$ , pa su oni smješteni u slabi izospinski singlet  $I_W = 0$ :

$$e_R^-, \mu_R^-, \tau_R^-, u_R, c_R, t_R, d_R, s_R, b_R. \quad (2.20)$$

Kako se slabi izospinski singleti ne mijenjaju pri SU(2) transformacijama, oni se ni ne vežu za baždarne bozone simetrije.

U eksperimentima se pokazalo da se fizikalni  $Z$  bozon veže za LH čestice i za RH čestice, stoga on ne može biti  $W^{(3)}$  bozon iz SU(2)<sub>L</sub> lokalne baždarne simetrije. Kako su foton i  $Z$  bozon, s pripadajućim poljima  $A_\mu$  i  $Z_\mu$ , neutralni, oni se mogu izraziti kao kombinacija dva neutralna bozona. Tako je nastalo elektroslabo ujedinjenje. U GSW (Glashow, Salam, Weinberg) modelu U(1) baždarna simetrija elektromagnetizma se zamjenjuje novom U(1)<sub>Y</sub> lokalnom baždarnom simetrijom

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \hat{U}(x)\psi(x) = \exp\left[ig' \frac{Y}{2} \zeta(x)\right] \psi(x), \quad (2.21)$$

koja daje novo baždarno polje,  $B_\mu$ , vezano za novi naboj, slabi hipernaboj  $Y$ . Elektroslabo ujedinjenje daje fizikalna polja fizikalnih bozona  $Z_\mu$  i  $A_\mu$  kao linearnu kom-

binaciju polja  $B_\mu$  i  $W_\mu^{(3)}$ , prikazanu preko kuta  $\theta_W$  (indeks  $W$  od Weinberg ili *weak*) koji se može mjeriti.

Elektroslaba međudjelovanja se mogu podijeliti na "nabijena" (sadrže  $W$  bozone), koja su odgovorna za prijenos električnog naboja u interakcijama i "neutralna" međudjelovanja (sadrži  $Z$  bozone i foton kao prijenosnike sile). Ukupni interakcijski dio lagranžijana se tada zapisuje na sljedeći način

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{CC} + \mathcal{L}_{NC}. \quad (2.22)$$

Lagranžijan nabijenih međudjelovanja (indeks CC od engl. *charged-current*) je oblika

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g_W}{\sqrt{2}}(J_{CC}^\mu W_\mu^+ + J_{CC}^{\mu\dagger} W_\mu^-), \quad (2.23)$$

a neutralnih međudjelovanja (indeks NC od engl. *neutral-current*)

$$\mathcal{L}_{NC} = -eJ_\mu^{\text{em}} A^\mu + \frac{g_W}{2 \cos \theta_W} J_\mu^o Z^\mu. \quad (2.24)$$

$\theta_W$  je Weinbergov kut miješanja,  $g_W$  je  $SU(2)_L$  konstanta vezanja, te  $e$  je elementarni električni naboj. Struje su sljedećih oblika:

$$J_{CC}^\mu = (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) \gamma^\mu \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} + (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) \gamma^\mu V_{CKM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$J_\mu^{\text{em}} = \sum_f Q_f \bar{f} \gamma_\mu f, \quad (2.26)$$

$$J_\mu^o = \sum_f \bar{f} \gamma_\mu (v_f - a_f \gamma_5) f, \quad (2.27)$$

gdje su

$$v_f = T_3^f - 2Q_f \sin^2 \theta_W, \quad a_f = T_3^f. \quad (2.28)$$

$J_{CC}^\mu$  sadrži lijeve projekcije leptonskih i kvarkovskih polja,  $\psi_L = P_L \psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$ .  $Q_f$  i  $T_3^f$  su električni naboj i treća komponenta slabog izospina od LH fermiona  $f_L$ , a  $\gamma^5$  je definirana kao  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . U sumi  $f$  ide po svim leptonima i kvarkovima.

Slaba sila može mijenjati okus kvarkova tako da svi *up*-tipovi ( $u$ ,  $c$ ,  $t$ ) mogu

prijeći u *down*-tipove kvarkova ( $d, s, b$ ), ali preferiraju svoju generaciju. To svojstvo je sadržano u *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa* (skraćeno CKM) matrici  $V_{\text{CKM}}$  (u izrazu 2.25). Crtice u izrazu (2.19) na stanjima ( $d', s', b'$ ) označuju da ta stanja nisu jednaka svojstvenim stanjima mase ( $d, s, b$ ), nego su ona tzv. svojstvena stanja slabe sile. Svojstvena stanja slabe sile i svojstvena stanja mase su povezana preko CKM matrice,

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{V_{\text{CKM}}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

## 3 Teški hadroni

### 3.1 Eksperimentalne vrijednosti i opis računanja širine raspada

Hadroni s teškim kvarkom izdvajaju se od ostalih hadrona zato što u granici beskonačne mase kvarka dinamika hadrona ne ovisi o masi i spinu tog kvarka. Ta simetrija se naziva simetrija teškog kvarka (skraćeno HQS od engl. *Heavy Quark Symmetry*) i omogućuje pojednostavljen opis dinamike jakih interakcija u hadronima i precizan opis njihovih slabih raspada. Proučavanje hadrona s teškim kvarkom je time manje modelski ovisno u odnosu na ostale hadrone, na koje se ne može primijeniti spomenuta simetrija.

U ovom radu promatramo inkluzivne slabe raspade hadrona s teškim kvarkom, konkretno mezona iz  $D$  sektora, koji sadrže jedan  $c$ , tj. čarobni kvark. U inkluzivnim raspadima se sumira po svim dostupnim konačnim stanjima, dok se u ekskluzivnim promatra raspad u točno određeno konačno stanje, tj. čestice. Inkluzivne raspade je općenito teže mjeriti, no iz teorijskog pogleda su jednostavniji za proučavanje. Čarobni kvark ima jedinstvenu ulogu u Standardnom modelu jer je on jedini gornji tip kvarka čiji se slabi hadronski raspadi mogu analizirati ( $t$  kvark se raspadne prije nego se hadronizira).  $D$  sektor time ima posebnu ulogu u ispitivanju neutralnih struja koje mijenjaju okus (skraćeno FCNC, od engl. *flavour changing neutral current*), jer su  $D$  mezoni jedini mezoni u kojem su virtualni kvarkovi donjeg tipa u FCNC procesima.

Prije nastavka rasprave o hadronima s teškim kvarkom, potrebno je prvo objasniti što se smatra pod teškim kvarkom. Za definiciju teškog kvarka potrebno je uvesti referentnu masenu skalu s kojom se uspoređuje masa kvarkova. Najprirodnije je za skalu usporedbe uzeti skalu jakih međudjelovanja  $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 - 300 \text{ MeV}$ . Teški kvarkovi su oni kojima je masa znatno veća od te skale, tj.  $m_q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ , a laki kvarkovi su oni za koje vrijedi obrnuti uvjet,  $m_q \ll \Lambda_{\text{QCD}}$ . Prema tome teški kvarkovi su  $c$  ( $m_c \simeq 1.27 \text{ GeV}$ ),  $b$  ( $m_b \simeq 4.18 \text{ GeV}$ ) i  $t$  kvark ( $m_t \simeq 172.76 \text{ GeV}$ ), a laki kvarkovi su  $u$  ( $m_u \simeq 2.16 \text{ MeV}$ ) i  $d$  kvark ( $m_d \simeq 4.67 \text{ MeV}$ ). Masa  $s$  kvarka ( $m_s \simeq 93 \text{ MeV}$ ) je usporediva sa skalom  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , stoga je njega teže klasificirati, iako se često navodi kao laki kvark<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Kvarkove nije moguće opaziti kao slobodne čestice, stoga se u teorijskim razmatranjima mogu koristiti različiti tipovi masa, te je nužno definirati skalu na kojoj su određene. Navedene su sljedeće mase: za  $u$ ,  $d$  i  $s$  kvarkove su navedene procjene strujnih kvarkovskih masa u  $\overline{MS}$  shemi na skali  $\mu \simeq 2 \text{ GeV}$ , mase  $c$  i  $b$  kvarkova su klizne mase u  $\overline{MS}$  shemi na skalama  $\overline{m}_c$ , tj.  $\overline{m}_c(\overline{m}_c)$  i  $\overline{m}_b$ , tj.  $\overline{m}_b(\overline{m}_b)$ , a masa  $t$  kvarka je određena iz izravnih mjerenja stvaranja  $t\bar{t}$  para. Maseni parametri koji će se koristiti u ovom radu su uzeti tako da budu u skladu s teorijskim formalizmom inkluzivnih slabih

Najteži  $t$  kvark se vrlo brzo raspada izravnim raspadima (poput  $t \rightarrow W^+b$ ) prije nego što dođe do hadronizacije tog kvarka. Stoga, jedino  $c$  i  $b$  kvarkovi formiraju hadrone koji sadrže teške kvarkove, a oni se i nazivaju teški hadroni. Hadroni koji sadržavaju  $c$  kvark nazivaju se šarmantni hadroni ili  $c$  hadroni, a hadroni koji sadržavaju  $b$  kvark nazivaju se  $b$  hadroni.

Do danas je opaženi veliki broj teških hadrona, no tek kod malog broja teških hadrona slabe interakcije dominantno određuju njihovo vrijeme života. Slabi raspad dolaze do izražaja kada nije mogući raspad u stanje niže mase bez promjene okusa valentnih kvarkova, a to je slučaj samo za najniža stanja u  $SU(3)_{\text{okus}}$  multipletima (kod kojih je spin  $s = 0$ , za mezone ili  $s = 1/2$  za barione, te se nalaze u osnovnom stanju,  $n = 1, l = 0$ ) teških hadrona. Stanja većih masa se raspadaju u najniža stanja jakim ili elektromagnetskim raspadima (tj. doprinos slabih raspada takvih čestica je zanemariv). Stoga, pogodni šarmantni mezoni za promatranje slabih raspada su jednostruko šarmantni mezoni  $SU(3)_{\text{okus}}$  antitripleta (vidi sliku 2.4 pod (a)):  $D^+(c\bar{d})$ ,  $D^0(c\bar{u})$  i  $D_s^+(c\bar{s})$ . Sektor jednostruko šarmantnih bariona sadrži četiri bariona koji se dominantno raspadaju slabim raspadima, a to su članovi  $SU(3)_{\text{okus}}$  antitripleta  $\Lambda_c^+(cud)$ ,  $\Xi_c^+(cus)$  i  $\Xi_c^0(cds)$ , te jedan član  $SU(3)_{\text{okus}}$  seksteta  $\Omega_c^+(css)$ . Od dvostruko šarmantnih bariona eksperimentalno je uočen jedino  $\Xi_{cc}^{++}(ccu)$ .

B mezoni koji se raspadaju slabim raspadima su  $B^0(\bar{b}d)$ ,  $B^+(\bar{b}u)$ ,  $B_s^0(\bar{b}s)$  te teško-teški mezon  $B_c^+(\bar{b}c)$ , dok su jednostruki  $b$  barioni čija su vremena života određena slabim raspadima  $\Lambda_b^0(bud)$ ,  $\Xi_b^0(bus)$ ,  $\Xi_b^-(bds)$  i  $\Omega_b^0(bss)$ .

U tablici 3.1 prikazana su eksperimentalno izmjerena vremena života šarmantnih mezona, dok tablica 3.2 prikazuje isto za B mezone. Za B mezone koji sadrže jedan  $b$  kvark vremena života su jednaka unutar 10%. Kod šarmantnih mezona razlika vremena života je mnogo veća.  $D^+$  mezon ima znatno dulje vrijeme života od  $D^0$  (omjer vremena života iznosi  $\tau(D^+)/\tau(D^0) \sim 2.5$ ) i  $D_s^+$  mezona, što je jasno vidljivo na slici 3.1. Podaci pokazuju vrlo velik raspon vremena života šarmantnih hadrona. U granici beskonačno teškog kvarka svi hadroni koji sadržavaju teški kvark imaju jednako vrijeme života. Eksperimentalni podaci za vremena života ukazuju da se  $b$  kvark i još značajnije  $c$  kvark nalaze daleko od granice beskonačno teškog kvarka. Odstupanja od granice beskonačno teškog kvarka je opisano tzv. predasimptotskim efektima. Na slici 3.1 vidljiva je i određena hijerarhija vremena života, što znači da raspada i neće uvijek biti jednaki gore navedenim vrijednostima.

su predasimptotski efekti vrlo veliki u  $c$  sektoru. U ovom radu promatran je teorijski formalizam kojim se računaju širine raspada teških hadrona, te je objašnjeno zašto šarmantni mezoni imaju toliko različita vremena života.

	$D^0(c\bar{u})$	$D^+(c\bar{d})$	$D_s^+(c\bar{s})$
m [GeV]	1.86483	1.86965	1.96834
$\tau$ [ps]	$0.4101 \pm 0.0015$	$1.040 \pm 0.007$	$0.504 \pm 0.004$
$\Gamma$ [ $\text{ps}^{-1}$ ]	$2.44 \pm 0.01$	$0.96 \pm 0.01$	$1.98 \pm 0.02$

Tablica 3.1: Mase, eksperimentalne vrijednosti vremena života i širina raspada šarmantnih mezona  $D^0$ ,  $D^+$  i  $D_s^+$ . Preuzeto iz PDG [4].

	$B^0(\bar{b}d)$	$B^+(\bar{b}u)$	$B_s^0(\bar{b}s)$	$B_c^+(\bar{b}c)$
m [GeV]	5.27963	5.27931	5.36689	6.2749
$\tau$ [ps]	$1.519 \pm 0.004$	$1.638 \pm 0.004$	$1.515 \pm 0.004$	$0.510 \pm 0.009$

Tablica 3.2: Mase i eksperimentalne vrijednosti vremena života  $B$  mezona. Preuzeto iz PDG [4].

Za računanje vremena života inkluzivnih slabih raspada teških hadrona koristimo formalizam koji se može sažeti na sljedeći način. Vrijeme života hadrona  $H$  povezano je sa širinom raspada preko jednostavne formule (koristimo prirodni sustav jedinica u kojem je  $\hbar=c=1$ )

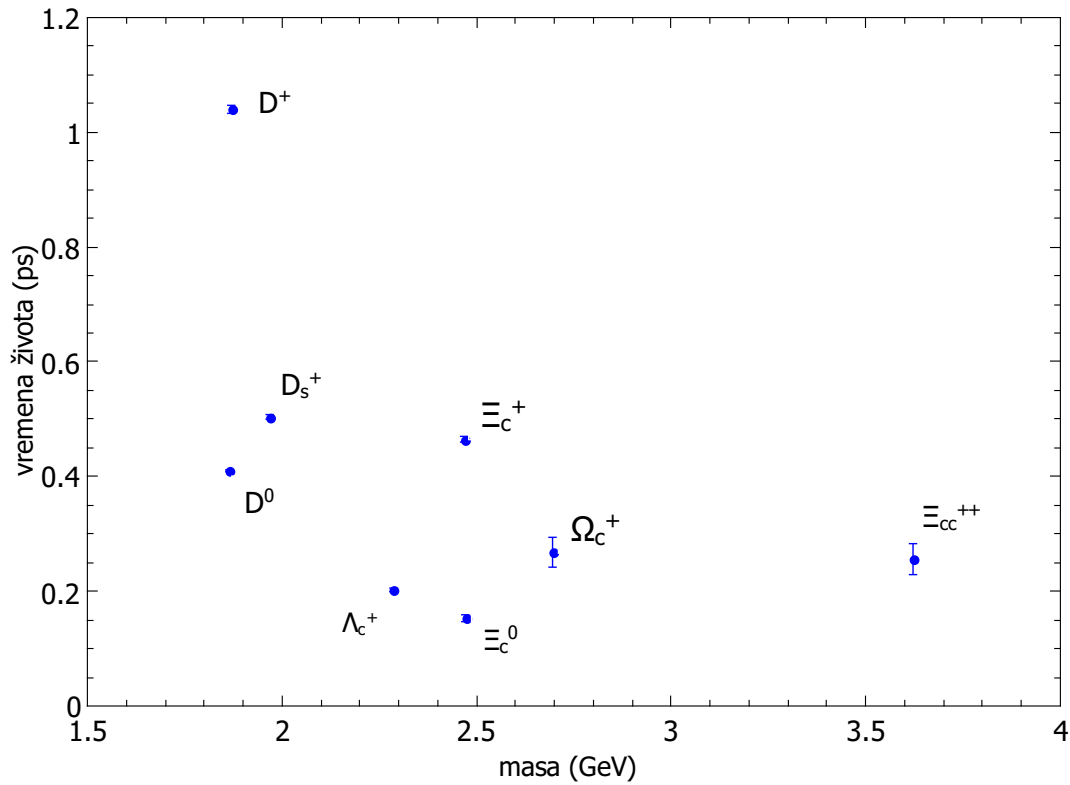
$$\tau(H) = \frac{1}{\Gamma(H)}. \quad (3.1)$$

Širina inkluzivnog slabog raspada se preko optičkog teorema može povezati s imaginarnim dijelom matričnog elementa operatora prijelaza. Operator prijelaza se preko razvoja operatorskog produkta (skraćeno OPE, od engl. *Operator Product Expansion*) može prikazati kao red lokalnih operatora. Ukupna širina inkluzivnog slabog raspada se, kao rezultat toga, može prikazati kao red matričnih elemenata lokalnih operatora s inverznom masom teškog kvarka  $1/m_Q$  kao parametrom razvoja. Širina inkluzivnog raspada poprima tada sljedeću opću strukturu [5],

$$\Gamma(H) = \Gamma_3 + \Gamma_5 \frac{\langle \mathcal{O}_5 \rangle}{m_Q^2} + \Gamma_6 \frac{\langle \mathcal{O}_6 \rangle}{m_Q^3} + \dots + 16\pi^2 \left[ \tilde{\Gamma}_6 \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_6 \rangle}{m_Q^3} + \tilde{\Gamma}_7 \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_7 \rangle}{m_Q^4} + \dots \right], \quad (3.2)$$

koja se naziva razvoj teškog kvarka (skraćeno HQE, od engl. *Heavy Quark Expansion*).





Slika 3.1: Ovisnosti eksperimentalno izmjenjenih vremena života šarmantnih hadrona koji se raspadaju slabim raspadima o njihovoj masi. Prikazani su samo oni šarmantni mezoni kojima su izmjerena vremena života. Podaci su uzeti iz PDG [4].

Operatori viših dimenzija su potisnuti većim negativnim potencijama mase teškog kvarka, što čini doprinose operatora najnižih dimenzija najvažnijim. Prvi član,  $\Gamma_3$ , je dan raspadom teškog kvarka i može se izračunati u perturbativnoj teoriji.  $\Gamma_3$  je jednak za sve hadrone koji sadrže određeni teški kvark. No, kako ćemo i vidjeti kasnije, ostali članovi daju velike doprinose i ne mogu se zanemariti, na što upućuju i eksperimentalne vrijednosti vremena života prikazane na slici 3.1. Ostali članovi uključuju efekte interakcije teškog kvarka s lakim kvarkovima u hadronu, što čini razliku u vremenima života teških hadrona s istim teškim kvarkom. Koeficijenti  $\Gamma_i$  u jednadžbi (3.2) se mogu razviti u red po QCD konstanti  $\alpha_s$  i računati perturbativno,

$$\Gamma_i = \Gamma_i^{(0)} + \frac{\alpha_s(m_c)}{4\pi} \Gamma_i^{(1)} + \left[ \frac{\alpha_s(m_c)}{4\pi} \right]^2 \Gamma_i^{(2)} + \dots \quad (3.3)$$

U ovom radu su svi računi napravljeni samo u vodećem redu razvoja po  $\alpha_s$ , te su samo navedeni i diskutirani rezultati u kojima su uračunati viši redovi. Matrični elementi operatora u izrazu (3.2) se mogu računati pomoću Efektivne teorije teških kvarkova

(skraćeno HQET od engl. *Heavy Quark Effective Theory*).

Ovaj formalizam je dobro ispitan i eksperimentalno potvrđen u  $B$  sektoru (vidi [6] i reference u tom članku). Valjanost HQE formalizma u  $D$  sektoru je još upitna (vidi [7]), no postoje uvjerljivi argumenti da bi taj formalizam trebao funkcionirati i za  $D$  sektor (vidi [8]). U formalizmu OPE se pretpostavlja kvark-hadronska dualnost, tj. suglasnost hadronskih veličina i kvark-gluonskih proračuna (za detalje o dualnosti vidi [9] i posebno za  $c$  sektor [10]).

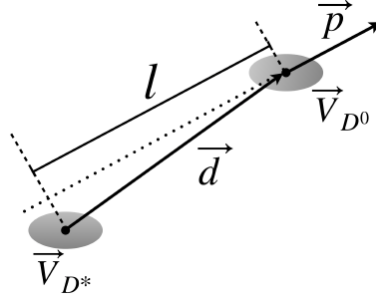
U ovom radu su proučavani raspad  $D^0$ ,  $D^+$  i  $D_s^+$  mezona u formalizmu HQE i uzimao se samo vodeći red u razvoju po  $\alpha_S$ .

### 3.2 Mjerenje vremena života $D$ mezona

$D$  mezoni se najčešće stvaraju i proučavaju u  $e^+e^-$  sudarivačima (u tu skupinu pripadaju tzv.  $B$ -tvornice) i u hadronskim sudarivačima. Energije  $e^+e^-$  snopova su podešene tako da energija u sustavu centra mase odgovara točno određenoj rezonanci, koja odgovara teškom kvarkoniju. Jakim raspadima teškog kvarkonija se formiraju teški hadroni čiji slabi raspad se dalje proučavaju. Prednost  $e^+e^-$  sudarivača je što imaju "čišću" eksperimentalnu pozadinu nego hadronski sudarivači, kod kojih QCD pozadina ima veći utjecaj, pa je teže rekonstruirati raspad. Stoga su  $e^+e^-$  sudarivači pogodniji za mjerenje konačnih stanja neodređene energije, dok hadronski sudarivači imaju veći udarni presjek i pogodniji su za rijetke raspade s dobrim potpisima.  $e^+e^-$  sudarivači mogu raditi, pored  $B$ -tvornica, i kao "šarmantne" tvornice na  $\psi(3770)$  rezonanci, koja je malo iznad  $D\bar{D}$  praga. No i  $B$ -tvornice, na rezonanci  $\Upsilon(4S)$ , proizvode velik broj uzorka  $D$  mezona, iz kontinuuma i preko raspada  $B$  mezona. Teški hadroni se proučavaju i u eksperimentima s nepomičnom metom. U tim eksperimentima se na nepomičnu metu usmjerava snop nabijenih čestica (obično protona ili elektrona) uslijed čega dolazi do stvaranja teških hadrona.

Pri mjerenjima vremena života se promatra put koji teški hadron prijeđe od trenutka njegovog stvaranja do trenutka njegovog raspada, te se iz mnoštva takvih događaja određuje vrijeme života.

U  $e^+e^-$  sudarivačima, vrijeme života  $D$  mezona,  $\tau_D$ , se dobiva iz vlastitog vremena



Slika 3.2: Slikoviti prikaz mjerenja prijeđenog puta  $D$  mezona preko točke stvaranja i točke raspada  $D$  mezona. Iz [11].

$D$  mezona definiranog kao (iz [11])

$$t_D = m_D \frac{l_D}{p_D} = m_D \vec{d} \cdot \frac{\vec{p}_D}{p_D^2},$$

gdje je  $m_D$  masa mezona, a  $\vec{p}_D$  rekonstruirani impuls  $D$  mezona. Vektor  $\vec{d}$  spaja točku stvaranja  $D$  mezona i vrhove raspada. Točka raspada,  $\vec{V}_D$  na slici 3.2, se određuje iz fitanja produkata raspada  $D$  mezona na jednu točku, dok se točka stvaranja  $D$  mezona,  $\vec{V}_{D^*}$ , određuje iz presijecanja putanje  $D$  mezona, određene iz impulsa vektora, i vektora  $\vec{V}_D$ , s područjem interakcije  $e^+e^-$  snopova (tzv. *beam spot*). Vrijeme života se tada određuje iz fitanja mjerenja vremena raspada  $D$  mezona na distribuciju maksimalne vjerojatnosti. Duljina raspada  $l_D$  se određuje iz projekcije vektora  $\vec{d}$  na impuls čestica nastalih raspadom  $D$  mezona. Ključno za dobra mjerenja su precizno određivanje nabijenih produkata raspada  $D$  mezona i dobra rezolucija na detektorima za procjenu točaka raspada i za rekonstrukciju impulsa.

U eksperimentima s fiksnom metom, brzina je obično velika ( $\beta\gamma \sim 40 - 100$ ). Za otklanjanje pozadinskog zagađenja, potrebno je da bude razmak između točke stvaranja (primarna točka) i točke raspada (sekundarna točka) mezona veliki,  $l > N\sigma_l$ , gdje je  $\sigma_l$  pogreška u longitudinalnoj udaljenosti primarne i sekundarne točke. Vrijeme života se određuje iz fitanja na formulu za reducirano vlastito vrijeme  $t' = t - (N\sigma_l) \times (m_D/p_D)$ , gdje vrijednost broja  $N$  ovisi o analizi. Reducirano vlastito vrijeme se koristi kako bi se smanjile velike korekcije kratkog vremena  $t$ . Same pojedinosti prilagodbe su različite za različita mjerenja vremena života.

Na kraju ovog poglavlja načinimo kratki pregled eksperimentalnih projekata usmjerenih na proučavanje raspada  $D$  mezona. Čarobni kvark je otkriven 1974. u dvama različitim eksperimentima, u eksperimentu s nepomičnom metom  $p + \text{Be}$  u

Brookhavenu i u SPEAR  $e^+e^-$  sudarivaču u SLAC-u, gdje je otkrivena  $J/\Psi$  čestica, vezano stanje  $c\bar{c}$ , kao rezonanca na 3.1 GeV-a. Time je počeo "lov" na šarmantne hadrone. SLAC-LBL Mark I kolaboracija je prva otkrila  $D^0$  i  $D^+$  mezone. Mjerenja šarmantnih mezona u hadronskim sudarivačima su započela CDF eksperimentom na Tevatronu na Fermilabu, a nastavljena su LHCb eksperimentom u CERN-u. Veliki broj  $D$  mezona se može proizvesti u  $e^+e^-$  sudarivačima koji rade kao "šarmantne" tvornice, u koje pripada ubrzivač CESR u Cornellu (CLEO-c kolaboracija) i BEPC sudarivač u Pekingu (BES III kolaboracija). Važni eksperimenti su bili BaBar na ubrzivaču PEP-II u SLAC-u i BELLE na ubrzivaču KEKB u Tsukubi, koji su radili kao  $B$  tvornice. Nedavno su izašli i rezultati mjerenja vremena života  $D^+$  i  $D^0$  mezona iz eksperimenta Belle II na ubrzivaču SuperKEKB u Tsukubi [12].

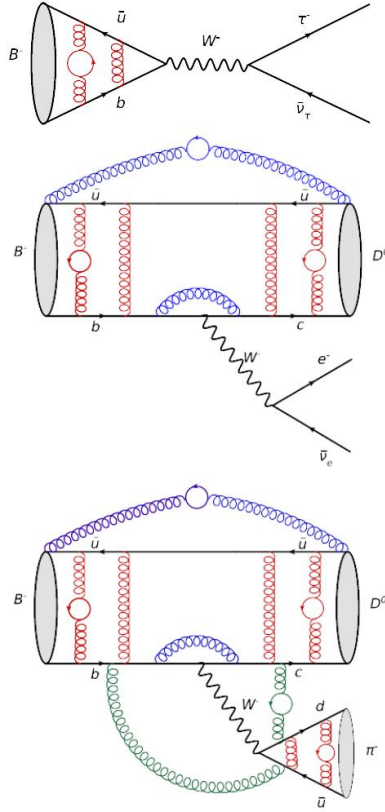
## 4 Efektivne teorije

Slabi raspadi mezona se mogu podijeliti u tri kategorije: leptonski raspadi, u kojima se kvark i antikvark u mezonu anihiliraju, te se u konačnom stanju pojavljuju samo leptoni; semileptonski raspadi, u kojima se u konačnom stanju pojavljuju i leptoni i hadroni; i neleptonski raspadi, u kojima se u konačnom stanju pojavljuju samo hadroni. Po jedan primjer za svaku kategoriju prikazan je na slici 4.1, za raspad  $B^-$  mezona. Iz slike se može vidjeti zašto raspadi hadrona nisu laki za opisivanje. Jednostavnost slabih raspada je ovdje "pokvarena" jakim interakcijama unutar i između hadrona, tj. QCD efektima, koji su neperturbativni, što uvelike otežava račun. Fenomenologija hadronskih slabih raspada je karakterizirana složenim ispreplitanjem slabe i jake sile. Za proučavanje mezonskih raspada, neperturbativni QCD efekti se moraju uzeti u obzir. Jedan način da se to napravi je da se raspad opiše preko efektivne teorije (opis prema [3, 5]).

### 4.1 Efektivni hamiltonijan slabih međudjelovanja

Efektivne teorije su standardni način za proučavanje jakih međudjelovanja u neperturbativnom, niskoenergetskom području. Ideja je pojednostaviti teoriju tako da ako postoje parametri teorije koji su ili jako veliki ili jako mali, velike parametre stavimo u beskonačnost, tj. male parametre pustimo u nulu, što daje pojednostavljenu aproksimativnu teoriju. Konačni efekti jako velikih ili jako malih parametara se mogu uključiti kroz perturbaciju.

Za proučavanje procesa gdje je moguće stvaranje i poništavanje čestica, potrebno je u stvaranju efektivne teorije eliminirati sve čestice koje su preteške da bi bile stvorene na energijama koje su od interesa. Takve efektivne teorije daju opis samo dijela fizike, onog na energetske skali manjoj od masa teških čestica koje su eliminirane. Teške čestice mase  $M$  ne mogu biti direktno stvorene u početnoj nisko-energetskoj konfiguraciji čestica, ali mogu se virtualno stvarati i brzo uništiti, što je zadano relacijom nejednakosti,  $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ . Ako je nesačuvanje energije dano s  $\Delta E \sim M$ , onda je  $\Delta t \sim 1/M$ . Znači da se utjecaj teške čestice javlja kratko, lokalno u vremenu, kada se promatraju područja puno manje energije. Vrijedi i  $\Delta x \sim 1/M$ , što znači da se teška čestica javlja lokalizirano i u prostoru u efektivnoj, nisko-energetskoj teoriji. Konstruirana efektivna teorija mora biti invarijantna na simetrije fundamentalne teorije, ali



Slika 4.1: Slikoviti prikaz raspada  $B^-$  mezona i utjecaj QCD efekata na raspad. Prikazani su tri različita raspada, od kojih je prvi  $B^- \rightarrow \bar{\nu}_\tau \tau^-$  spada u leptonske, drugi  $B^- \rightarrow D^0 \bar{\nu}_e e^-$  u semileptonske, a treći  $B^- \rightarrow D^0 \pi^-$  u neleptonske raspade. Iz [6].

može sadržavati i dodatne, nove simetrije, na koje lagranžijan fundamentalne teorije nije invarijantan. U niskoenergetskoj granici efektivna teorija ima isto ponašanje kao i izvorna fundamentalna teorija, dok je ono u visokoenergetskoj granici različito.

Eliminacijom svih stupnjeva slobode iznad karakteristične skale, dolazimo do efektivnih teorije čiji najopćenitiji hamiltonijan ima beskonačno mnogo članova [3],

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i V_{\text{CKM}}^i C_i(\mu) Q_i. \quad (4.1)$$

Ovdje su  $Q_i$  lokalni operatori s kvarkovskim sadržajem specifičnim za dani proces,  $C_i$  su Wilsonovi koeficijenti i generiraju se jakim interakcijama, a skala  $\mu$  je proizvoljna i obično se uzima kao karakteristična skala raspada.

### 4.1.1 Fermijeva teorija

U najjednostavnijem slučaju  $\beta$ -raspada, prikazanom na (a) dijelu slike 4.2, gdje drvasti dijagram odgovara interakciji u potpunoj teoriji u kojoj se izmjenjuje  $W$  bozon, amplituda dobivena Feynmanovim pravilima je

$$\mathcal{M} = \left( \frac{g_2}{\sqrt{2}} \right)^2 [\bar{e}(p_e)\gamma_\mu P_L \nu_e(p_\nu)] \frac{1}{(p_e - p_\nu)^2 - M_W^2} \left( g^{\mu\rho} - \frac{(p_e - p_\nu)^\mu (p_e - p_\nu)^\rho}{M_W^2} \right) \cdot [\bar{u}(p_u)\gamma_\rho P_L d(p_d)]. \quad (4.2)$$

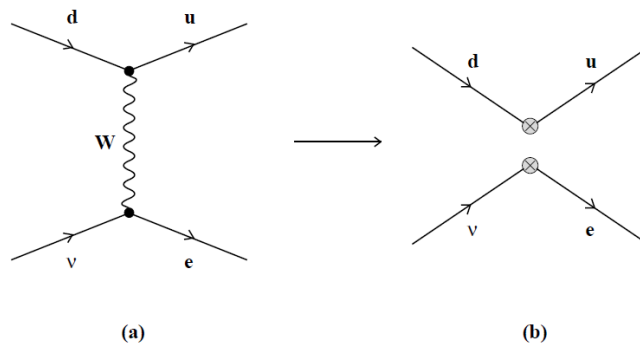
Sve su mase kvarkova i leptona mnogo manje od mase  $W$  bozona,  $M_W$ , tako da je i promjena impulsa uzrokovana slabim raspadom mnogo manja od  $M_W$ . Stoga se može propagator u nazivniku aproksimirati vodećim članom u razvoju po  $1/M_W^2$ , tj.  $(p_e - p_\nu)^2 - M_W^2 \rightarrow -M_W^2$  i zanemariti faktor  $(p_e - p_\nu)^\mu (p_e - p_\nu)^\rho / M_W^2$ . Efektivni hamiltonijan koji opisuje taj proces je tada

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}(p_e)\gamma_\mu P_L \nu_e(p_\nu)] [\bar{u}(p_u)\gamma^\mu P_L d(p_d)], \quad (4.3)$$

gdje je  $G_F$  Fermijeva konstanta koja je definirana relacijom  $G_F/\sqrt{2} = g_2^2/(8M_W^2)$ . Usporedbom s (4.1), vidimo da je u ovom jednostavnom primjeru Wilsonov koeficijent  $C(M_W)$  jednak jedinici, a lokalni operator  $Q$  je dan produktom dvije V-A struje (vektorsko-aksijalne struje). Raspad opisan efektivnim hamiltonijanom (4.3) je prikazan na (b) dijelu slike 4.2. Hamiltonijan (4.3) predstavlja efektivnu, tzv. Fermijevu teoriju za  $\beta$ -raspade. U Fermijevoj teoriji, u niskoenergetskom području,  $E \ll M_W$ , efekt razmjene  $W$  bozona aproksimativno odgovara lokalnoj interakciji dvije A-V struje. Formula (4.1) se može smatrati generalizacijom Fermijeve teorije tako da uključuje sve poznate kvarkove i leptone, kao i njihovo jako i elektroslabo međudjelovanje.

Feynmanovi dijagrami, poput onog na slici (a) 4.2, s punim  $W$ -propagatorom, tj.  $Z$ -propagatorom, te  $t$  kvarkom opisuju situaciju na vrlo malim udaljenostima, tj. na velikim energijama  $\mathcal{O}(M_{W,Z}, m_t)$ , dok su raspad hadrona na niskim energijama  $\mathcal{O}(m_b, m_c, m_K)$  prikladnije opisani efektivnim lokalnim vrhovima koji su dani lokalnim operatorima  $Q_i$ , kao na slici (b) 4.2. Wilsonovi koeficijenti se u tom pogledu mogu smatrati konstantama vezanja povezanim s efektivnim vrhovima.

Efektivni hamiltonijan (4.1) je dan sumom efektivnih vrhova pomnoženih s efek-



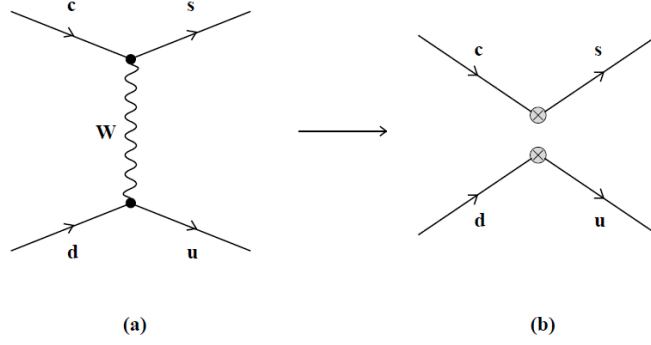
Slika 4.2:  $\beta$  raspad prikazan na kvarkovskom nivou s punim  $W$ -propagatorom (a) i u efektivnoj teoriji (b). Iz [3].

tivnim konstantama vezanja  $C_i$ . Takav red se naziva razvoj operatorskog umnoška (OPE). Wilsonovi koeficijenti  $C_i(\mu)$  opisuju visokoenergetski dio, koji dolazi od izmjene visokoenergetskih gluona, tj. doprinosi na skalama većim od  $\mu$ , te se oni zbog asimptotske slobode QCD-a mogu računati perturbativno, tako dugo dok  $\mu$  nije pre-malen. Općenito vrijedi  $C(\mu) = C(\mu, M_W, \alpha_s(\mu))$ . Matrični elementi operatora  $Q_i$ ,  $\langle f | Q_i | i \rangle$ , opisuju neperturbativni dio, odnosno niskoenergetsku fiziku. Struktura lokalnih operatora  $Q_i$  općenito može biti mnogo složenija od onih u  $\beta$ -raspadu. Skala  $\mu$  služi kao granica koja odvaja nisko-energetski doprinos od visoko-energetskog i ona se može proizvoljno odabrati. Dinamika na niskim energijama ne ovisi o pojednostima dinamike na visokim energijama. Skala  $\mu$  je renormalizacijska skala o kojoj ovise i Wilsonovi koeficijenti i operatori, odnosno matrični elementi operatora, dok u lokalnoj teoriji efektivni hamiltonijan, koji je vezan na fizikalne veličine, ne ovisi o toj skali. No praktično, obzirom da se neperturbativni dijelovi  $\langle Q_i \rangle$  računaju u modelima, to kraćenje nije potpuno i postoji rezidualna  $\mu$ -ovisnost koja se treba uzeti u obzir u računu.

#### 4.1.2 Neleptonski efektivni hamiltonijan

Promotrimo slabi raspad u kojem se mijenja okus početnog kvarka i kada se u konačnom stanju pojavljuju samo kvarkovi, npr.  $c \rightarrow s u \bar{d}$ . Ako se zanemare QCD efekti, proces je prikazna drvastim dijagramom na slici (a) 4.3. Hamiltonijan slabog raspada





Slika 4.3: Drvasti dijagram raspada  $c \rightarrow s \bar{d} u$  prikazan preko punog  $W$ -propagatora u (a) dijelu i u efektivnoj teoriji preko operatora  $Q_i$  označenih s prekrštenim kružnicama u (b) dijelu. Iz [3]

preko  $W$  bozona je dan s

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \frac{M_W^2}{k^2 - M_W^2} (\bar{s}c)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} (\bar{s}c)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{M_W^2}\right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdje je  $(\bar{s}c)_{V-A} \equiv \bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c$ . Kako je  $k$ , impuls razmijenjen preko  $W$  bozona, vrlo mali u usporedbi s masom  $W$  bozona,  $M_W$ , opravdano je u prvom redu jednadžbe (4.4) razviti u red  $-M_W^2/(k^2 - M_W^2) = 1/(1 - k^2/M_W^2) = 1 + k^2/M_W^2 + \dots$ . Članovi reda  $\mathcal{O}(k^2/M_W^2)$  se mogu zanemariti. Pri tome se kao vodeći operator pojavljuje četverofermionski operator. Masa  $W$  bozona je višestruko veća od mase  $c$  kvarka (približno 60 puta veća), stoga se za raspade tog tipa pobuđenja  $W$  bozona smatraju nebitnim stupnjevima slobode koje treba ukloniti pri konstrukciji efektivne teorije. Jednadžba (4.4) se može zapisati kao

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} (\bar{s}c)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A} + \text{operatori viših dimenzija}, \quad (4.5)$$

Operatori viših dimenzija odgovaraju članu  $\mathcal{O}(k^2/M_W^2)$  u (4.4) i obično sadrže članove s derivacijama. Oni se, zbog razvoja po malom  $1/M_W$ , mogu zanemariti. Ovdje je opet primijenjen OPE. OPE je ekvivalentan potpunoj teoriji ako se promatraju svi članovi u razvoju.

Za  $c \rightarrow s \bar{d} u$  raspad efektivni hamiltonijan bez QCD efekata je dan prvim članom izraza (4.5). Kada se uključe QCD korekcije, mijenjaju se koeficijenti operatora u efektivnom hamiltonijanu  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , ali se i pojavljuje novi operator. Efektivni hamiltoni-

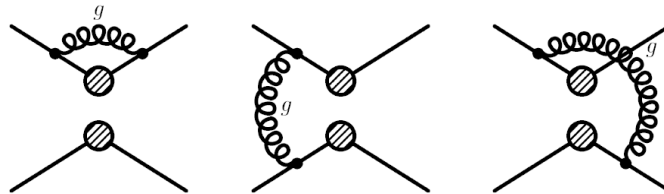
jan tada poprima oblik

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} (C_1(\mu) Q_1 + C_2(\mu) Q_2) , \quad (4.6)$$

gdje su operatori  $Q_1 = (\bar{s}_i c_i)_{V-A} (\bar{u}_j d_j)_{V-A}$  i  $Q_2 = (\bar{s}_i c_j)_{V-A} (\bar{u}_j d_i)_{V-A}$ . Uključivanjem QCD korekcija, uz originalni operator  $Q_1$  pojavio se još jedan operator  $Q_2$  s istim okusima, ali različitom strukturom boje. Iz slike 4.4 može se shvatiti zašto je potrebno uvesti dodatni operator. Kod izmjene gluona koji povezuje dvije struje imamo  $(\bar{q}_1^{\alpha i} (\gamma_\mu (1 - \gamma_5))_{\alpha\beta} q_2^{\beta j}) (\bar{q}_3^{\gamma k} (\gamma^\mu (1 - \gamma_5))_{\gamma\delta} q_4^{\delta l})$ , gdje su eksplicitno napisani Diracovi indeksi  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  i indeksi boje  $(i, j, k, l)$ . Produkt struja se može raspisati pomoću produkta Gell-Mannovih matrica

$$\sum_a T_{ij}^a T_{kl}^a = -\frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{kj} . \quad (4.7)$$

Prvi član u tom raspisu daje korekciju operatoru  $Q_1$ , a drugi član postaje operator  $Q_2$ . Ako se zanemare QCD korekcije, vrijedi  $C_1 = 1$  i  $C_2 = 0$ , čime se reproducira prvi član u izrazu (4.5). Koeficijenti  $C_1, C_2$  u efektivnom hamiltonijanu obuhvaćaju skale iznad  $\mu$ , dok operatori  $Q_1$  i  $Q_2$  sadržavaju doprinose stupnjeva slobode pridruženih energetska skalama ispod  $\mu$ .



Slika 4.4: Neki od karakterističnih dijagrama s jednom petljom kada se promatra raspad kvarka s QCD korekcijama, prikazani u efektivnoj teoriji. Prvi dijagram daje QCD korekcije  $C_1$  Wilsonovog koeficijenta,  $C_1 = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s)$ , a druga dva dijagrama generiraju novi operator  $Q_2$  s Wilsonovim koeficijentom  $C_2 \sim \mathcal{O}(\alpha_s)$ . Iz [13].

### 4.1.3 Ukupni efektivni hamiltonijan

Efektivni hamiltonijan za općeniti neleptonski raspad  $c$  kvarka,  $c \rightarrow q_1 \bar{q}_2 u$  ( $q_i = u, d, s$ ), u punom obliku je

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NL}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{q_1, q_2=d,s} V_{cq_1} V_{uq_2}^* [C_1(\mu) Q_1^{q_1 q_2} + C_2(\mu) Q_2^{q_1 q_2}] - V_{ub} V_{cb}^* \sum_{j=3}^6 C_j(\mu) Q_j \right] + \text{h.c.}, \quad (4.8)$$

gdje su  $V_{ab}$  elementi CKM matrice,  $C_i(\mu)$  su Wilsonovi koeficijenti renormalizirani na skali  $\mu \sim m_c$ , a  $Q_{1,2}^{q_1 q_2}$  su operatori definirani izrazima

$$\begin{aligned} Q_1^{q_1 q_2} &= (\bar{q}_1^i \gamma_\rho (1 - \gamma_5) c^i) (\bar{u}^j \gamma^\rho (1 - \gamma_5) q_2^j), \\ Q_2^{q_1 q_2} &= (\bar{q}_1^i \gamma_\rho (1 - \gamma_5) c^j) (\bar{u}^j \gamma^\rho (1 - \gamma_5) q_2^i), \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdje su  $i, j$  indeksi boje.  $Q_j$ ,  $j = 3 \dots 6$  su pingvinski operatori, koji dolaze od pingvinskih dijagrama, koji se pojavljuju u jednostruko Cabibbo potisnutim raspadima  $c \rightarrow s \bar{s} u$ ,  $c \rightarrow d \bar{d} u$  ili još dodatno potisnutim raspadima, kao  $c \rightarrow u \bar{u} u$ . Wilsonovi koeficijenti uz pingvinske operatore su mali (u usporedbi s  $C_1(\mu)$  i  $C_2(\mu)$  na istoj skali  $\mu$ ), te su uz to dodatno jače potisnuti zbog CKM faktora,  $V_{ub} V_{cb}^* \ll V_{cq_1} V_{uq_2}^*$ . Zato se oni često zanemaruju, stoga ih i ovdje nećemo uzimati u obzir u računu.

Ukupni efektivni hamiltonijan koji opisuje sve moguće slabe raspade  $c$  kvarka se može zapisati kao suma neleptonskih, semileptonskih i leptonskih raspada

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NL}} + \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{SL}} + \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{lep}}, \quad (4.10)$$

gdje je  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NL}}$  dan izrazom (4.8), a semileptonski hamiltonijan je

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{SL}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=d,s} \sum_{l=e,\mu} V_{cq}^* Q^{ql} + \text{h.c.}, \quad (4.11)$$

i  $Q^{ql} = (\bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) c) (\bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) l)$ . Hamiltonijan  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{lep}}$  opisuje leptonske raspade, od kojih, u našem slučaju, jedino raspad  $D_s^+ \rightarrow \mu \tau \tau^+$  ima veliki omjer grananja, dok su za ostale leptonske raspade oni zanemarivi. Dodatno postoje i raspadi poput  $D \rightarrow \pi l^+ l^-$  koji imaju puno manji omjer grananja od raspada opisanih s  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NL}}$  i  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{SL}}$ , stoga ćemo i njihov doprinos zanemariti.

## 4.2 Simetrija teškog kvarka

Jaka međudjelovanja hadrona koja sadrže teški kvark lakša su za promatranje od hadrona koji sadrže samo lake kvarkove. Jedan od razloga povezan je i s asimptotskom slobodom, tj. činjenicom da efektivna konstanta vezanja QCD-a postaje slabija za velike impulse (tj. energije). Na velikim udaljenostima, odnosno za male impulse, konstanta vezanja postaje velika, što dovodi do neperturbativnih efekata, kao što je zatočenost kvarkova i gluona na skali od  $R_{\text{had}} \sim 1/\Lambda_{\text{QCD}} \sim 1\text{fm}$ , što i određuje veličinu hadrona. Za teške kvarkove efektivna konstanta vezanja,  $\alpha(m_Q)$  je mala, što sugerira da su na udaljenostima usporedivim s Comptonovom valnom duljinom  $\lambda_Q \sim 1/m_Q$  jaka međudjelovanja perturbativna. Kao što je spomenuto, veličina hadrona je oko  $R_{\text{had}}$ , dok je impuls koji se izmjenjuje između teških i lakih stupnjeva slobode (laki kvarkovi i meki gluoni) u hadronu reda  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Teški kvark u hadronu je okružen oblakom jako interagirajućih lakih kvarkova, antikvarkova i gluona. Zato što je  $\lambda_Q \ll R_{\text{had}}$ , tj. Comptonova valna duljina teškog kvarka značajno manja od veličine hadrona, dolazi do pojednostavljenja. Laki stupnjevi slobode gotovo "ne vide" okus i orijentaciju spina teškog kvarka, te samo "osjećaju" boju teškog kvarka.

U limesu kada  $m_Q \rightarrow \infty$ , hadroni koji se razlikuju samo po okusu ili spinskom kvantnom broju teškog kvarka imaju istu konfiguraciju lakih stupnjeva slobode. Na temelju toga se mogu promatrati neke aproksimativne simetrije jakih međudjelovanja teških kvarkova. Ako bi u teškom hadronu s jednim teškim kvarkom koji se giba brzinom  $v$  zamijenili taj teški kvark s drugim teškim kvarkom različitog okusa i spina, ali s istom brzinom  $v$ , laki stupnjevi slobode bi ostali isti kao i prije zamjene. Dakle, za  $N_f$  okusa teškog kvarka postoji  $SU(2N_f)$  spin-okusna simetrijska grupa, te pri transformacijama iz te grupe jaka međudjelovanja ostaju invarijantna.

Simetrija teškog kvarka je aproksimativna simetrija, ona vrijedi samo kada  $m_Q \rightarrow \infty$ , stoga je potrebno razmarati korekcije pošto mase teških kvarkova nisu beskonačne. Ta simetrija nije simetrija samog lagranžijana QCD-a (kao što je kiralna simetrija pri limesu  $m_q \rightarrow 0$ ), nego je simetrija efektivne teorije, koja je dobra aproksimacija QCD-a na određenoj energetskej skali. Ona se može promatrati u sustavima u kojima teški kvark međudjeluje izmjenom mekih gluona, impulsa  $\sim \Lambda_{\text{QCD}}$ . Teški kvark je tada skoro na ljusci mase, fluktuacije impulsa su reda  $\Lambda_{\text{QCD}}$  i iščezavaju kada  $\Lambda_{\text{QCD}}/m_Q \rightarrow 0$ . Korekcije zbog slomljene simetrije, jer je masa teškog kvarka konačna, se mogu sistematski računati. U sljedećem poglavlju ćemo detaljnije pro-

motriti ta svojstva hadrona s jednim teškim kvarkom ([14, 15]).

#### 4.2.1 Efektivna teorija teškog kvarka

Efektivna teorija teškog kvarka (HQET) opisuje međudjelovanja jednog teškog kvarka, u kojem su svi hadronski prijenosi impulsa mnogo manji od mase teškog kvarka,  $m_Q$ . Teški kvarkovi su  $c$  i  $b$ , za koje vrijedi  $\Lambda_{\text{QCD}} \ll m_c, m_b$ . Taj uvjet nam govori da će jake interakcije na energijama teških hadrona biti perturbativne i moći će se primijeniti perturbativne metode. U ovoj efektivnoj teoriji  $m_Q$  je skala visokoenergetske fizike, a  $\Lambda_{\text{QCD}}$  je skala niskoenergetske fizike. U sustavu mirovanja hadrona, teški kvark gotovo miruje. On ima neko rezidualno gibanje zbog emisije i apsorpcije mekih gluona. Impuls teškog kvarka se mijenja, ali ostaje gotovo na ljusci mase. U limesu kada  $m_Q \rightarrow \infty$ , teški kvark potpuno miruje i djeluje kao statički izvor naboja boje na lake stupnjeve slobode (lake kvarkove i meke gluone) koji ga okružuju.

HQET je konceptualno različit od Fermijeve teorije. Teški kvark se pojavljuje i u vanjskim strujama, stoga se on ne može izintegrirati, kako se to radi s  $W$  bozonom u Fermijevoj teoriji koji se tada više ne pojavljuje u toj teoriji. No kako su svi prijenosi impulsa puno manji od mase  $m_Q$ , impuls teškog kvarka se može razdvojiti na dva dijela, "veliki" dio i "mali", rezidualni dio

$$p_Q^\mu = m_Q v^\mu + k^\mu, \quad (4.12)$$

gdje je  $v^\mu$  konstantan četverovektor brzine hadrona, tj. teškog kvarka (razlika je do na  $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/m_Q)$  i iščezava za  $m_Q \rightarrow \infty$ ), i vrijedi  $v^2 = 1$ , a  $k$  je rezidualni impuls za koji vrijedi  $k \ll m_Q v$ . Interakcije s lakim stupnjevima slobode mijenjaju samo rezidualni impuls za iznos red  $\Delta k \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ , stoga se efektivna teorija može dobiti razvijanjem amplitude po  $k^\mu/m_Q$ . Za propagator teškog kvarka se tada dobije

$$\begin{aligned} \frac{\not{p}_Q + m_Q}{p_Q^2 - m_Q^2 + i\epsilon} &= \frac{m_Q \not{v} + \not{k} + m_Q}{(m_Q^2 + 2m_Q v \cdot k + k^2 - m_Q^2 + i\epsilon)} \\ &= \frac{1 + \not{v} + \not{k}/m_Q}{2v \cdot k + k^2/m_Q + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{v \cdot k + i\epsilon} \left( \frac{1 + \not{v}}{2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{k^\mu}{m_Q} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Iz razvoja kvarkovskog propagatora može se vidjeti da u vodećem redu nema ovis-

nosti o masi teškog kvarka, tj. taj član je invarijantan na okusnu simetriju (kao i u slučaju QCD-a za bezmasene kvarkove, koji isto posjeduje simetriju na promjenu okusa). Kada bi uzeli limes da masa teškog kvarka ide u beskonačnost, ostao bi samo prvi član u (4.13), koji uz sebe ima projektor  $P_+$ . Propagatori  $P_+$  i  $P_-$  su definirani na sljedeći način

$$P_+ = \frac{1 + \not{v}}{2}, \quad P_- = \frac{1 - \not{v}}{2}, \quad (4.14)$$

ta vrijedi  $P_\pm^2 = P_\pm$ ,  $P_\pm P_\mp = P_\mp P_\pm = 0$  i  $P_+ + P_- = 1$ . Za daljnja promatranja definiramo polje teškog kvarka na sljedeći način

$$\begin{aligned} Q(x) &= e^{-im_Q v \cdot x} Q_v(x) = e^{-im_Q v \cdot x} (h_v(x) + H_v(x)), \\ h_v(x) &= e^{im_Q v \cdot x} P_+ Q(x), \\ H_v(x) &= e^{im_Q v \cdot x} P_- Q(x), \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdje polje  $h_v(x)$  označava "veliku", a polje  $H_v(x)$  "malu" komponentu kvarkovskog polja  $Q(x)$ . Ovdje je napravljeno reskaliranje polja  $Q(x)$  tako da se izdvojio brzo varirajući prostorno-vremenski dio polja  $e^{-im_Q v \cdot x}$ . Time se ustvari efektivno uklonila masa mirovanja teškog kvarka iz energije, jer taj dio energije po pretpostavci nije na raspolaganju drugim česticama u niskoenergetskoj teoriji. Također vrijede relacije

$$\begin{aligned} P_+ h_v &= h_v, \quad P_- h_v = 0, \\ P_+ H_v &= 0, \quad P_- H_v = H_v, \end{aligned} \quad (4.16)$$

tj.  $\not{v} h_v = h_v$ ,  $\not{v} H_v = -H_v$ .

U sustavu mirovanja, kada je  $v^\mu = (1, \vec{0})$ ,  $h_v$  odgovara gornjim dvjema komponentama  $Q$  polja, a  $H_v$  donjim. Male komponente polja se mogu eliminirati (uporabom jednadžbi gibanja) i predstavljaju korekcije reda  $1/m_Q$  u lagranžijanu HQET.

Za interakciju teškog kvarka s mekim gluonima impulsa  $q$  se može pisati

$$\begin{aligned} \frac{1}{\not{p} - m_Q} (ig_s \gamma^\nu) \frac{1}{\not{p} + \not{q} - m_Q} &= \frac{1}{v \cdot p} P_+ (ig_s \gamma^\nu) \frac{1}{v \cdot (p + q)} P_+ + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/m_Q) \\ &= ig_s \frac{1}{v \cdot p} \frac{1}{v \cdot (p + q)} P_+ \gamma^\nu P_+ + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/m_Q) \\ &= ig_s v^\nu \frac{1}{v \cdot p} \frac{1}{v \cdot (p + q)} P_+ + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}/m_Q), \end{aligned} \quad (4.17)$$

gdje se u prvoj jednakosti iskoristila jednadžba (4.13), a u trećoj relacija  $P_+ \gamma^\mu P_+ =$

$P_+ v^\mu$ . Može se vidjeti da u vodećem redu dolazi do projiciranja samo "velikih" komponenti  $h_v$ , jer vrijede relacije (4.16). Također, se uočava da ne može doći do promjene spina u vodećem redu razvoja po  $1/m_Q$ , jer u izrazu za interakciju teškog kvarka s mekim gluonima više nema Dirac matrica. Stoga, u limesu  $m_Q \rightarrow \infty$  postoje dvije simetrije, okusna i spinska simetrija, pa vrijedi

$$\text{hadron}(Q_1, s_1) = \text{hadron}(Q_2, s_2).$$

Stoga, efektivna teorija teškog kvarka ima  $SU(2N_f)$  spinsko-okusnu simetriju, gdje je  $N_f$  broj okusa. Ta simetrija veže stanja iste brzine  $v$ , ali različitih impulsa  $m_Q v + k$ .

#### 4.2.2 Lagranžijan efektivne teorije teškog kvarka

QCD lagranžijan za teški kvark dan je izrazom

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{Q}(i\not{D} - m_Q)Q, \quad (4.18)$$

gdje je  $D_\mu = p_\mu - ig_s A_\mu$  kovarijantna derivacija u kojoj je  $A_\mu = T_a A_\mu^a$  gluonsko polje. Uvrštavanjem dekompozicije polja teškog kvarka na "velike" i "male" komponente u prethodni lagranžijan dobije se

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{h}_v i v \cdot D h_v - \bar{H}_v (i v \cdot D + 2m_Q) H_v + \bar{h}_v i \not{D}_\perp H_v + \bar{H}_v i \not{D}_\perp h_v, \quad (4.19)$$

gdje su se iskoristile relacije (4.16).  $D_\perp^\mu = D^\mu - v^\mu (v \cdot D)$  je komponenta od  $D^\mu$  za koju vrijedi  $v \cdot D_\perp = 0$ . U sustavu mirovanja je  $D_\perp^\mu = (0, \vec{D})$ . Iz lagranžijana se može vidjeti da  $h_v$  opisuje bezmasene modove, dok  $H_v$  opisuje teške modove velike mase, koje treba eliminirati. Iz lagranžijana se mogu dobiti jednadžbe gibanja,

$$-i v \cdot D h_v = i \not{D}_\perp H_v, \quad (4.20)$$

$$(i v \cdot D + 2m_Q) H_v = i \not{D}_\perp h_v. \quad (4.21)$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi

$$H_v = \frac{1}{i v \cdot D + 2m_Q} i \not{D}_\perp h_v. \quad (4.22)$$





Sljedeći član lagranžijana je

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^1 = \frac{1}{2m_Q} \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v - \frac{g_s}{4m_Q} \bar{h}_v \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} h_v. \quad (4.27)$$

Članovi u tom lagranžijanu se mogu lako identificirati u sustavu mirovanja:

$$\mathcal{O}_{\text{kin}} = \frac{1}{2m_Q} \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v \rightarrow -\frac{1}{2m_Q} \bar{h}_v (i\vec{D})^2 h_v. \quad (4.28)$$

Ovaj član je baždarno invarijantna formulacija kinetičkog člana ( $\vec{p}^2/2m$ ) koji dolazi od "off-shell" rezidualnog gibanja teškog kvarka, tj. interakcije teškog kvarka s lakim stupnjevima slobode u hadronu. Drugi član opisuje međudjelovanje spina teškog kvarka s gluonskim poljem koje proizvode laki stupnjevi slobode:

$$\mathcal{O}_{\text{mag}} = \frac{g_s}{4m_Q} \bar{h}_v \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} h_v \rightarrow -\frac{g_s}{m_Q} \bar{h}_v \vec{S} \cdot \vec{B}_c h_v, \quad (4.29)$$

gdje je  $\vec{S}$  spinski operator i  $B_c^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} G^{jk}$  su komponente color-magnetskog polja. Taj član je kromomagnetska hiperfina interakcija koja narušava okusnu i spinsku simetriju.

Polje teškog kvarka  $Q$  se može izraziti preko polja  $h_v$ , tako da se jednadžba (4.22) ubci u definiciju za polje teškog kvarka (4.15), što se onda može razviti u red. Time se dobije

$$\begin{aligned} Q(x) &= e^{-im_Q v \cdot x} \left( 1 + \frac{1}{iv \cdot D + 2m_Q} i\cancel{D}_\perp \right) h_v(x) \\ &= e^{-im_Q v \cdot x} \left( 1 + \frac{i\cancel{D}_\perp}{2m_Q} - \frac{i\cancel{D}_\perp}{4m_Q^2} (iv \cdot D) + \dots \right) h_v(x). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pomoću tog izraza se mogu izgraditi operatori u HQET-u koji sadrže teški kvark. Dakle, za hadron  $H$  mase  $M_H$  koji sadrži teški kvark  $Q$ , može se pokazati da je

$$\langle H | \bar{Q} Q | H \rangle = 2M_H \left( 1 - \frac{\mu_\pi^2 - \mu_G^2}{2m_Q^2} + \frac{\rho_D^3 - \rho_{\text{LS}}^3}{2m_Q^3} + \mathcal{O}(1/m_Q^4) \right), \quad (4.31)$$

gdje su korištene sljedeće definicije

$$\langle H | \bar{h}_v h_v | H \rangle = 2M_H, \quad (4.32)$$

$$\langle H | \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v | H \rangle = -2M_H \mu_\pi^2, \quad (4.33)$$

$$\langle H | \bar{h}_v (iD_\mu iD_\nu) (-i\sigma^{\mu\nu}) h_v | H \rangle = 2M_H \mu_G^2, \quad (4.34)$$

$$\langle H | \bar{h}_v (iD_\mu) (iv \cdot D) (iD^\mu) h_v | H \rangle = 2M_H \rho_D^3, \quad (4.35)$$

$$\langle H | \bar{h}_v (iD_\mu) (iv \cdot D) (iD_\nu) (-i\sigma^{\mu\nu}) h_v | H \rangle = 2M_H \rho_{LS}^3. \quad (4.36)$$

Matrični elementi definirani u (4.32) - (4.36) se pojavljuju u razvoju širine raspada po inverznoj masi teškog kvarka. Taj razvoj je opisan u sljedećem poglavlju.

## 5 Razvoj teškog kvarka

### 5.1 Formula inkluzivne širine raspada

Ukupna širina raspada hadrona  $H$  mase  $M_H$  se može dobiti tako da se uzme kvadrat matričnog elementa efektivnog hamiltonijana između stanja hadrona  $H$  i konačnog stanja  $f$  s  $n$  čestica i integrira po faznom prostoru, te sumira po  $f$ :

$$\Gamma(H) = \frac{1}{2M_H} \sum_f \int \prod_i^n \left[ \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_H - \sum_i^n p_i \right) |\langle f | \mathcal{H}_{\text{eff}} | H \rangle|^2. \quad (5.1)$$

U tom izrazu suma ide po svim mogućim konačnim stanjima  $f$ , a u integralu po faznom prostoru se množi po svim česticama s impulsom  $p_i$  i energijom  $E_i$  u određenom konačnom stanju. Hamiltonijan u prethodnom izrazu je dan izrazom (4.10)

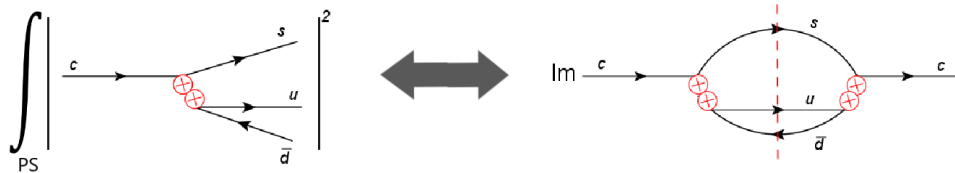
Ovdje ćemo širinu inkluzivnih raspada računati preko optičkog teorema, pomoću kojeg se širina inkluzivnog raspada može izraziti kao

$$\Gamma(H \rightarrow X) = \frac{1}{2M_H} \text{Im} \langle H | \hat{T} | H \rangle, \quad (5.2)$$

gdje je nelokalni operator prijelaza  $\hat{T}$  dan s

$$\hat{T} = i \int d^4 x T \{ \mathcal{H}_{\text{eff}}(x), \mathcal{H}_{\text{eff}}^\dagger(0) \}. \quad (5.3)$$

$T$  u prethodnom izrazu označava vremensko uređenje. Ekvivalencija jednadžbe (5.1) i jednadžbe (5.2) je dijagramski vizualizirana na slici 5.1, za raskid  $c \rightarrow s\bar{d}u$ .



Slika 5.1: Slikoviti prikaz ekvivalencije jednadžbi (5.1) i (5.2).

Pomoću razvoja operatorskog produkta se matrični element nelokalnog operatora  $\hat{T}$  može svesti na red matričnih elemenata lokalnih operatora,

$$\hat{T} = i \int d^4 x T \{ \mathcal{H}_{\text{eff}}(x), \mathcal{H}_{\text{eff}}^\dagger(0) \} = \sum_n C_n(\mu) \mathcal{O}_n(\mu). \quad (5.4)$$

Stoga, uz pretpostavku kvark-hadronske dualnosti, moguće je širinu inkluzivnog raspada teškog hadrona prikazati kao red matričnih elemenata lokalnih operatora. Prikladno je urediti razvoj širine raspada tako da su operatori u razvoju poredani od manjih dimenzija prema većim. Koeficijenti pridruženi operatorima nižih dimenzija imaju dominantnije ponašanje u granici  $x \rightarrow 0$  (u izrazu (5.4)), te stoga nekoliko prvih operatora u razvoju dobro aproksimiraju produkt lokalnih operatora. Takvim uređenjem razvoja širine raspada  $\Gamma_H$  se ustvari dobije  $\Gamma_H$  kao razvoj po inverznoj vrijednosti mase teškog kvarka  $1/m_Q$ . Što je dimenzija operatora veća, to je njegov doprinos potisnut negativnijom potencijom  $m_Q$  u odnosu na vodeći član. Operator prijelaza se tada može zapisati na sljedeći način

$$\mathcal{T} = \left( \mathcal{C}_3 \mathcal{O}_3 + \frac{\mathcal{C}_5}{m_Q^2} \mathcal{O}_5 + \frac{\mathcal{C}_6}{m_Q^3} \mathcal{O}_6 + \dots \right) + 16\pi^2 \left( \frac{\tilde{\mathcal{C}}_6}{m_Q^3} \tilde{\mathcal{O}}_6 + \frac{\tilde{\mathcal{C}}_7}{m_Q^4} \tilde{\mathcal{O}}_7 + \dots \right). \quad (5.5)$$

U ovom su razvoju s  $\mathcal{O}_i$  označeni dvokvarkovski operatori, koji su opisani dijagramima s dvije petlje, dok su s  $\tilde{\mathcal{O}}_i$  označeni četverokvarkovski operatori, koji su opisani dijagramima s jednom petljom. Operatori su detaljnije opisani u idućim poglavljima. Koeficijenti u izrazu (5.5) se mogu dalje razviti po QCD konstanti vezanja  $\alpha_s$ ,

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i^{(0)} + \mathcal{C}_i^{(1)} \alpha_s + \mathcal{C}_i^{(2)} \alpha_s^2 + \dots \quad (5.6)$$

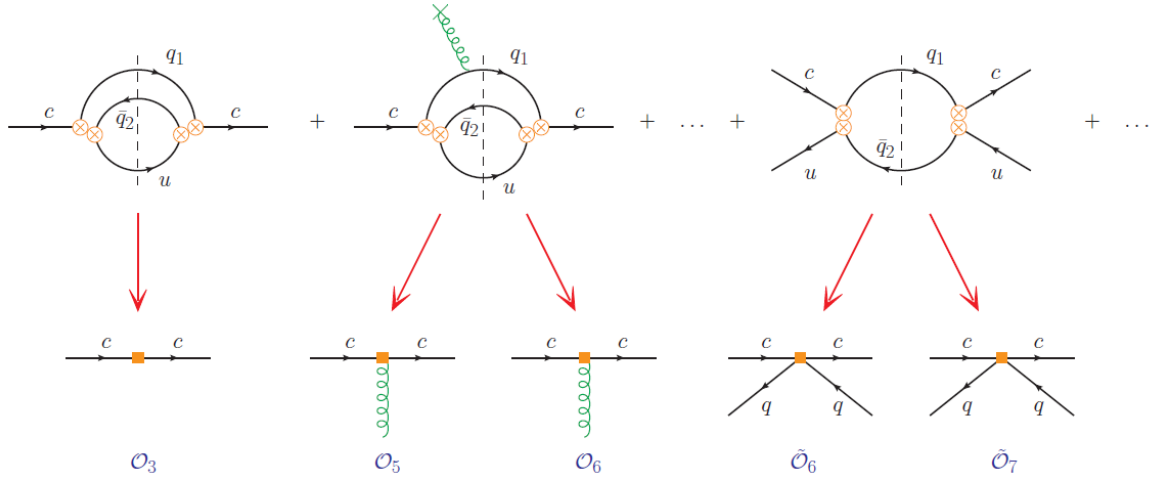
Ovaj formalizam je shematski prikazan na slici 5.2, za  $D$  mezone. Prvi dijagram u gornjem redu na toj slici odgovara raspadu slobodnog  $c$  kvarka, dok su korekcije zbog interakcija teškog kvarka s mekim gluonima i kvarkovima opisani drugim i trećim dijagramom u gornjem redu.

Kako se  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NL}}$  i  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{SL}}$  ne miješaju u operatoru prijelaza, tj.

$$\langle H | T(\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NL}}(x), \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{SL}}(0)) | H \rangle = 0, \quad (5.7)$$

ukupna širina inkluzivnog raspada  $\Gamma_H$  se može pisati kao zbroj inkluzivnih širina raspada opisanih hamiltonijanima  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NL}}$  i  $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{SL}}$ , odnosno

$$\Gamma_H = \Gamma_H^{\text{NL}} + \Gamma_H^{\text{SL}}. \quad (5.8)$$



Slika 5.2: Prikaz dijagrama koji opisuju doprinose u HQE iz jednadžbe (3.2), odnosno jednadžbe (5.9). Prekriženim kružnicama su označeni operatori  $Q_i$  efektivnog hamiltonijana, dok su kvadratima prikazani lokalni operatori  $O_i$  i  $\tilde{O}_i$ . Iz [19].

Izraz za širinu raspada hadrona  $H$  u konačno stanje  $f$  poprima sljedeći oblik

$$\Gamma(H \rightarrow f) = \frac{G_F^2 m_Q^5}{192\pi^3} |V_{CKM}|^2 \left[ c_3^f \frac{\langle H | \bar{Q} Q | H \rangle}{2M_H} + \frac{1}{m_Q^2} c_5^f \frac{\langle H | \bar{Q} g_s \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} Q | H \rangle}{2M_H} + \frac{1}{m_Q^3} c_6^f \frac{\langle H | O_D | H \rangle}{2M_H} + \dots + 16\pi^2 \left( \sum_i \frac{1}{m_Q^3} c_6^f \frac{\langle H | Q_i^q | H \rangle}{2M_H} + \sum_i \frac{1}{m_Q^4} c_7^f \frac{\langle H | P_i^q | H \rangle}{2M_H} + \dots \right) \right]. \quad (5.9)$$

$O_D$  je operator dimenzije 6 (dimenzije mase na 6, u sustavu  $\hbar = c = 1$ ), a  $Q_i^q$  i  $P_i^q$  su četverokvarkovski operatori dimenzije 6 i dimenzije 7 i oni će biti opisani kasnije u tekstu. Odmah se može uočiti da nema članova proporcionalnih s  $1/m_Q$  u razvoju. Razlog tome je da nije moguće naći baždarno invarijantan operator dimenzije 4 koji se upotrebom jednadžbi gibanja ne bi mogao svesti na operatore drugih dimenzija koji se pojavljuju u razvoju. Operator  $QQ$  sadržava operatore dimenzije 5 i dimenzije 6 iz izraza (5.5) koji će biti razmatrani u sljedećim odlomcima. Perturbativni račun koeficijenta u (5.9) im daje oblik reda u  $\alpha_s$ . Koeficijenti  $c_i^f$  uzimaju u obzir masene korekcije i uključuju različite QCD korekcije, kao što su radijativne korekcije u dijagramima inkluzivnih raspada i kombinacije Wilsonovih koeficijenata. Radijativne QCD korekcije se dobiju kada se u obzir uzmu dijagrami s gluonskim izmjenama između kvarkovskih linija. Masene korekcije općenito ovise o varijabli  $x = m_f^2/m_Q^2$ , gdje  $m_f$  označava masu čestice u konačnom stanju. U  $c$  raspadima  $u$  i  $d$  kvark (i elektron) smatramo bezmasenim česticama, dok za  $s$  kvark i  $\mu$  lepton uzimamo konačnu

masu. Oblik masenih korekcija ovisi o broju masenih čestica u konačnom stanju i o tome da li su mase tih čestica jednake ili različite. U idućim poglavljima je napravljen opis operatora u razvoju (5.9).

## 5.2 Dvokvarkovski operatori

### 5.2.1 Operatori dimenzije 3 i 5

Vodeći član u razvoju sadrži operator dimenzije 3,  $\bar{Q}Q$ , koji se ponekad naziva operator raspada. Dijagram raspada  $c$  kvarka opisan tim osnovnim operatorom je prikazan na slici 5.3. Taj član se dobiva kada u računu kontrahiramo sva kvarkovska polja koja odgovaraju produktima raspada teškog kvarka. Račun vodećeg člana, preko optičkog teorema, dan je u Dodatku A. Operator raspada opisuje raspad slobodnog kvarka. Doprinos širini inkluzivnog raspada koji daje taj operator je proporcionalan s  $m_Q^5$ . Njegov doprinos je neovisan o ostalim konstituentima u teškom hadronu i daje jednaki doprinos za sve hadrone koji sadrže određeni teški kvark. No matrični elementi operatora imaju različite doprinose za različite teške hadrone. U granici beskonačno teškog kvarka svi teški hadroni imaju jednaki doprinos pridružen operatoru raspada. Korištenjem jednadžbi gibanja u HQET moguće je operator raspada razviti kao

$$\bar{Q}Q = \bar{Q}_v \gamma_0 Q_v - \frac{\bar{Q}_v [(i\vec{D})^2 - \frac{1}{2}g_s \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] Q_v}{2m_Q^2} + \mathcal{O}(1/m_Q^3), \quad (5.10)$$

gdje  $Q_v$  označava HQET polje teškog kvarka koji se giba četverbrzinom  $v$ , definirano u (4.15). U razvoju su izostavljeni članovi koji imaju oblik totalne derivacije jer oni ne doprinose dijagonalnim matričnim elementima. Matrični element operatora raspada s obzirom na stanje teškog hadrona  $H$  se, do na član  $1/m_Q^4$ , može zapisati u sljedećem obliku

$$\frac{1}{2M_H} \langle H | \bar{Q}Q | H \rangle = 1 - \frac{\mu_\pi^2}{2m_Q^2} + \frac{\mu_G^2}{2m_Q^2} + \frac{\rho_D^3}{2m_Q^3} - \frac{\rho_{LS}^3}{2m_Q^3} + \mathcal{O}(1/m_Q^4), \quad (5.11)$$

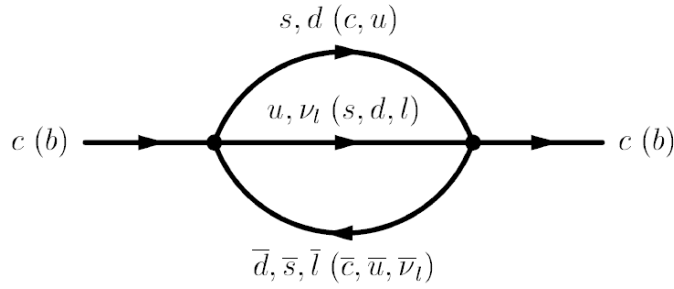
pri čemu su matrični elementi operatora  $\mu_\pi^2$ ,  $\mu_G^2$ ,  $\rho_D^3$  i  $\rho_{LS}^3$  dani jednadžbama (4.33)-(4.36). U sustavu mirovanja hadrona  $H$  se matrični element  $\mu_\pi^2$  može zapisati kao

$$\mu_\pi^2 = \frac{1}{2M_H} \langle H | \bar{Q}_v (i\vec{D})^2 Q_v | H \rangle, \quad (5.12)$$

dok se  $\mu_G^2$  može zapisati preko tenzora gluonskog polja  $G^{\mu\nu}$ ,

$$\mu_G^2 = \frac{1}{2M_H} \langle H | \bar{Q}_v \frac{1}{2} g_S \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} Q_v | H \rangle . \quad (5.13)$$

$\mu_\pi^2$  je matrični element operatora kinetične energije  $\bar{Q}(i\vec{D})^2 Q$  i parametrizira prosječnu kinetičku energiju jednog teškog kvarka u sustavu mirovanja hadrona  $H$ .  $\mu_G^2$  je matrični element kromomagnetskog operatora  $\bar{Q} g_S \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} Q$ , koji se pojavljuje i izravno u OPE, (5.9), te opisuje međudjelovanje spina lakog kvarka s kromomagnetskim poljem teškog kvarka.

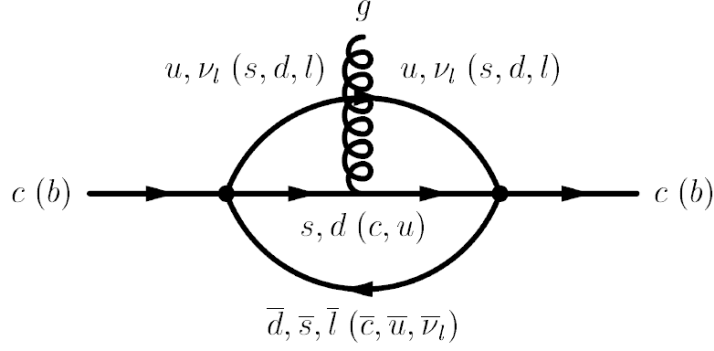


Slika 5.3: Dijagram inkluzivnog raspada pridružen operatoru raspada  $\bar{Q}Q$ . Iz [13].

Operator kinetičke energije ne ovisi izravno o lakim konstituentima, iako će gibanje teškog kvarka biti različito u različitim hadronskim konfiguracijama. Doprinos kromomagnetskog operatora širini raspada prikazan je dijagramom inkluzivnog raspada na slici 5.4. Taj operator opisuje utjecaj hadronskog kromodinamičkog polja na raspad teškog kvarka. Na operatorskoj razini on isto ne ovisi izravno o okusu lakih konstituenata, no različita hadronska stanja će imati različita kromodinamička polja unutar hadrona.

Stoga, operatori dimenzije 5 opisuju utjecaj okoline teškog kvarka na njegov raspad, te su potisnuti s  $1/m_Q^2$  u odnosu na vodeći član u razvoju. Oni opisuju preasimptotske efekte u raspadima teških hadrona, tj. efekte koji iščezavaju kada masa teškog kvarka postaje beskonačna (asimptotsko područje). Matrični elementi operatora kinetičke energije i kromomagnetskog operatora zadovoljavaju relaciju (iz [16]), neovisnu o skali  $\mu$ ,

$$\mu_\pi^2 > \mu_G^2 . \quad (5.14)$$



Slika 5.4: Jedan od dijagrama inkluzivnog raspada pridružen kromomagnetskom operatoru  $\bar{Q}g_S\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}Q$ . Uz ovaj dijagram doprinose i svi ostali dijagrami u kojima se vanjski pozadinski gluon spaja na jednu od unutrašnjih (anti)kvarkovskih linija. Iz [13].

### 5.2.2 Operatori dimenzije 6

Određivanjem daljnjih  $1/m_Q$  korekcija višeg reda u razvoju kvarkovskog propagatora, u razvoju matričnih elemenata dimenzije 3 i 5, te u razvoju pripadajućih koeficijenata (vidi [17, 18]) dobivaju se dvokvarkovski doprinosi dimenzije 6. Doprinosi širini inkluzivnog raspada operatora dimenzije 6 je potisnut s  $1/m_Q^3$  u odnosu na vodeći član u razvoju. Efekti koje ovi operatori opisuju spadaju u predasimptotske efekte, opisuju utjecaj hadronske okoline na raspad teškog kvarka. Dvokvarkovski operatori dimenzije 6 sadrže polje teškog kvarka i operatore gluonskog polja. Oni se dalje dijele na Darwinov i spin-orbit operatore koji sadrže tri kovarijantne derivacije. U HQET se mogu definirati na sljedeći način

$$2M_H\rho_D^3 = \langle H | \bar{h}_v(iD_\mu)(iv \cdot D)(iD^\mu)h_v | H \rangle , \quad (5.15)$$

$$2M_H\rho_{LS}^3 = \langle H | \bar{h}_v(iD_\mu)(iv \cdot D)(iD_\nu)(-i\sigma^{\mu\nu})h_v | H \rangle , \quad (5.16)$$

Prvi odgovara matričnom elementu Darwinovog, a drugi spin-orbit operatora.

Kvark-gluonski operatori dimenzije 6 su znatno numerički potisnuti u odnosu na četverokvarkovske operatore dimenzije 6.

## 5.3 Četverokvarkovski operatori

### 5.3.1 Operatori dimenzije 6

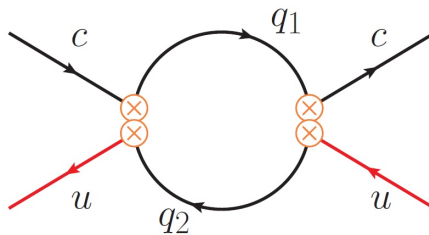
Četverokvarkovski operatori sadržavaju četiri kvarkovska polja, uz dva polja teškog kvarka sadržavaju i dva polja lakog kvarka. Četverokvarkovski operatori dimenzije 6



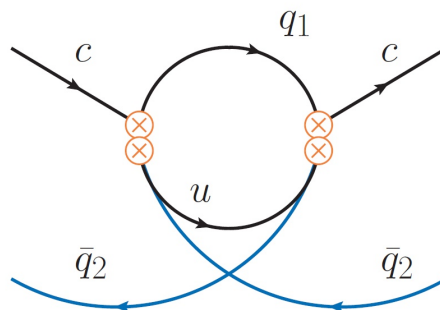
imaju opći oblik

$$O_{4q} = (\bar{Q}\Gamma q)(\bar{q}\Gamma'Q), \quad (5.17)$$

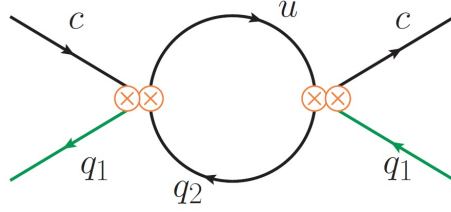
gdje  $Q$  označava polje teškog kvarka, dok  $q = u, d, s$  označava polje lakog kvarka koji se nalazi u valentnoj strukturi teškog hadrona. Matrice  $\Gamma$  i  $\Gamma'$  predstavljaju kombinacije Diracovih matrica i generatora  $SU(3)_{\text{boja}}$  grupe. Doprinosi četverokvarkovskih operatora širini raspada za  $D$  mezone su prikazani dijagramima inkluzivnih raspada na slikama 5.5, 5.6 i 5.7. Ti operatori opisuju utjecaj lakog kvarka iz valentne strukture teškog hadrona na raspad teškog kvarka, izravno su ovisni o valentnoj strukturi teškog hadrona, tj. za različite hadrone općenito daju različite doprinose. Četverokvarkovski operatori su presudni za objašnjenje hijerarhije vremena života i drugih inkluzivnih veličina u raspadima teških hadrona. Iz slika se može vidjeti da dijagrami imaju samo jednu petlju (dok dijagrami operatora raspada i kromomagnetskog operatora imaju dvije petlje), stoga je njihov numerički doprinos povećan faktorom  $16\pi^2$  u odnosu na operatore čiji dijagrami sadržavaju jednu petlju.



Slika 5.5: Dijagram inkluzivnog raspada  $D$  mezona koji opisuje izmjenu  $W^\pm$  bozona (engl. *weak exchange*, WE). U ovom dijagramu  $q_1$  i  $q_2$  mogu odgovarati  $d$  ili  $s$  kvarkovima. Iz [19].



Slika 5.6: Dijagram inkluzivnog raspada koji opisuje Paulijevu interferenciju (engl. *Pauli interference*, PI). U ovom dijagramu  $q_1$  može biti  $d$  ili  $s$  kvark, a  $\bar{q}_2$  može biti  $\bar{s}$  za  $D_s^+$  ili  $\bar{d}$  za  $D^+$  mezon. Iz [19].



Slika 5.7: Dijagram inkluzivnog raspada koji opisuje anihilaciju (engl. *weak annihilation*, WA). U ovom dijagramu  $q_2$  može biti  $d$  ili  $s$  kvarka, a  $q_1$  može biti  $s$  za  $D_s^+$  ili  $d$  za  $D^+$  mezon. Za semileptonske raspade se u petlji nalaze leptoni. Iz [19].

Četverokvarkovske operatore koji se pojavljuju u razvoju za širinu inkluzivnog raspada moguće je prikazati u nekoliko baza četverkvarkovskih operatora. Ovdje ćemo koristiti Neubertovu bazu (ili N bazu), u kojoj operatori imaju sljedeći oblik

$$\begin{aligned}
O_1^q &= (\bar{Q}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)q)(\bar{q}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)Q), \\
O_2^q &= (\bar{Q}(1 - \gamma_5)q)(\bar{q}(1 + \gamma_5)Q), \\
T_1^q &= (\bar{Q}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)T^a q)(\bar{q}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)T^a Q), \\
T_2^q &= (\bar{Q}(1 - \gamma_5)T^a q)(\bar{q}(1 + \gamma_5)T^a Q),
\end{aligned} \tag{5.18}$$

gdje su  $T^a$  generatori  $SU(3)_{\text{boja}}$  grupe.

Efekte četverokvarkovskih operatora se može svrstati pod nekoliko tipova koji opisuju fizikalni mehanizam iza navedenih operatora: Paulijeva interferencija (skraćeno PI), izmjena  $W$  bozona (skraćeno WE, od engl. *weak exchange*) i anihilacija (skraćeno WA, od engl. *weak annihilation*). Tip efekta četverokvarkovskih operatora ovisi o teškom hadronu koji se promatra, o okusu lakog kvarka koji je sadržan u četverokvarkovskom operatoru i o načinu raspada teškog kvarka. U raspadima  $D$  mezona, koje ćemo ovdje promatrati, efekt anihilacije i Paulijeve interferencije dolazi od četverokvarkovskih operatora koji sadržavaju  $s$  ili  $d$  polja, dok efekt  $W$  izmjene dolazi od četverokvarkovskih operatora s  $u$  kvarkovskim poljima. Različiti doprinosi četverokvarkovskih operatora za  $D^0$ ,  $D^+$  i  $D_s^+$  mezone su prikazani u tablici 5.1. Doprinos Paulijeve interferencije općenito za hadrone može biti pozitivan ili negativan, ali za  $D$  mezone je uvijek negativan, jer se umnožak perturbativnih Wilsonovih koeficijenta i matričnih elemenata operatora na slici 5.6 iskombinira tako da daju negativan doprinos.

Matrični elementi operatora definiranih s (5.18) u QCD-u su za  $D$  mezone para-

Hadron	CE NL	SCS-s NL	SCS-d NL	DCS NL	CE SL	CS SL
	$c \rightarrow s\bar{d}u$	$c \rightarrow s\bar{s}u$	$c \rightarrow d\bar{d}u$	$c \rightarrow d\bar{s}u$	$c \rightarrow s\bar{l}\nu_l$	$c \rightarrow d\bar{l}\nu_l$
$D^0(c\bar{u})$	$\Gamma_{\text{WE}}$	$\Gamma_{\text{WE}}$	$\Gamma_{\text{WE}}$	$\Gamma_{\text{WE}}$	-	-
$D^+(c\bar{d})$	$\Gamma_{\text{PI}}^-$	-	$\Gamma_{\text{PI}}^- + \Gamma_{\text{WA}}$	$\Gamma_{\text{WA}}$	-	$\Gamma_{\text{WA}}^{\text{SL}}$
$D_s^+(c\bar{s})$	$\Gamma_{\text{WA}}$	$\Gamma_{\text{PI}}^- + \Gamma_{\text{WA}}$	-	$\Gamma_{\text{PI}}^-$	$\Gamma_{\text{WA}}^{\text{SL}}$	-

Tablica 5.1: Različiti doprinosi četverokvarkovskih operatora u inkluzivnim raspadima  $D$  mezona. NL označava neleptonske raspade, a SL semileptonske raspade. Jednostruko Cabibbo potisnuti raspadi su označeni s SCS (*singly Cabibbo suppressed*), a dvostruko Cabibbo potisnuti s DCS (*doubly Cabibbo suppressed*), dok su Cabibbo dominantni raspadi označeni s CE (*Cabibbo enhanced*).

metrizirani na sljedeći način<sup>1</sup>

$$\langle D_q | O_i^q | D_q \rangle = A_i f_{D_q}^2 m_{D_q}^2 B_i^q, \quad (5.19)$$

$$\langle D_q | O_i^{q'} | D_q \rangle = A_i f_{D_q}^2 m_{D_q}^2 \delta_i^{qq'}, \quad q \neq q', \quad (5.20)$$

gdje su  $q, q' = u, d, s$ .  $B_i^q$  su tzv. parametri modela vreće (engl. *bag model*), od kojih su  $B_{1,2}^q$  bojni singleti, a  $B_{3,4}^q \equiv \epsilon_{1,2}^q$  su bojni okteti. Parametri  $A_i$  su definirani kao

$$A_1^q = A_3^q = 1, \quad A_2^q = A_4^q = \frac{m_D^2}{(m_c + m_q)^2}. \quad (5.21)$$

$f_{D_q}$  je mezonska QCD konstanta raspada, koja se definira kao

$$\langle 0 | \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 c | D_q(p) \rangle = i f_{D_q} p^\mu, \quad (5.22)$$

gdje je  $p$  četveroimpuls  $D$  mezona.

Matrične elemente četverokvarkovskih operatora dimenzije 6 i dimenzije 7 za teške mezone moguće je, u aproksimaciji zasićenja vakuumom (skraćeno VIA, od engl. *vacuum insertion approximation*), izraziti preko samo jednog parametra, mezonske konstante raspada. Aproksimacije zasićenja vakuumom sastoji se od aproksimacije jedinice projektorom na vakuumsko stanje,

$$\mathbf{1} = \sum_n |n\rangle \langle n| \approx |0\rangle \langle 0|. \quad (5.23)$$

<sup>1</sup>Ponekad se kao pokratak koristi notacija  $O_i^q$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  gdje je  $O_3^q \equiv T_1^q$ ,  $O_4^q \equiv T_2^q$ .

Aproksimacija matričnih elemenata se onda sastoji od ubacivanja jedinice u odgovarajuće matrične elemente, odnosno

$$\langle D_q | O_1^q | D_q \rangle = \langle D_q | (\bar{Q}\Gamma_\mu q)(\bar{q}\Gamma^\mu Q) | D_q \rangle \approx \langle D_q | \bar{Q}\Gamma_\mu q | 0 \rangle \langle 0 | \bar{q}\Gamma^\mu Q | D_q \rangle = f_D^2 m_D^2, \quad (5.24)$$

i isto za  $Q_2^q$ , te

$$\langle D_q | T_1^q | D_q \rangle = \langle D_q | (\bar{Q}\Gamma_\mu T^a q)(\bar{q}\Gamma^\mu T^a Q) | D_q \rangle \approx \langle D_q | \bar{Q}\Gamma_\mu T^a q | 0 \rangle \langle 0 | \bar{q}\Gamma^\mu T^a Q | D_q \rangle = 0, \quad (5.25)$$

jer matrični element oktetnog operatora između dva singletna stanja iščezava, i isto za  $T_2^q$ . Aproksimacija zasićenja vakuumom je to bolja što je doprinos viših stanja  $\langle n | \neq | 0 \rangle$  u projektoru (5.23) potisnutiji.

Kada se matrični elementi operatora iz (5.18) zapišu u kontekstu HQET, dobiju se sljedeći operatori

$$\tilde{O}_1^q = (\bar{h}_v \gamma_\mu (1 - \gamma_5) q)(\bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) h_v), \quad (5.26)$$

$$\tilde{O}_2^q = (\bar{h}_v (1 - \gamma_5) q)(\bar{q} (1 + \gamma_5) h_v), \quad (5.27)$$

$$\tilde{T}_1^q = (\bar{h}_v \gamma_\mu (1 - \gamma_5) T^a q)(\bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) T^a h_v), \quad (5.28)$$

$$\tilde{T}_2^q = (\bar{h}_v (1 - \gamma_5) T^a q)(\bar{q} (1 + \gamma_5) T^a h_v), \quad (5.29)$$

gdje je  $h_v$  HQET polje definirano u (4.15). Parametrizacija matričnih elemenata operatora definiranih u HQET je sljedeća (uzeto iz [19]),

$$\langle D_q | \tilde{O}_i^q | D_q \rangle = F^2(m_c) m_{D_q} \tilde{B}_i^q = f_{D_q}^2 m_{D_q}^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha_s(m_c)}{m_c} \right) \tilde{B}_i^q, \quad (5.30)$$

$$\langle D_q | \tilde{O}_i^{q'} | D_q \rangle = F^2(m_c) m_{D_q} \tilde{\delta}_i^{q'q} = f_{D_q}^2 m_{D_q}^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha_s(m_c)}{m_c} \right) \tilde{\delta}_i^{q'q}, \quad q \neq q'. \quad (5.31)$$

$F(m_c)$  je HQET (statička) konstanta raspada, dana izrazom

$$\langle 0 | \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 h_v | D_q(v) \rangle = iF(\mu) \sqrt{m_{D_q}} v^\mu, \quad (5.32)$$

u kojem se koristi impuls iz HQET,  $p^\mu = m_Q v^\mu$ . Veza između  $f_D$  i  $F$  do na  $\alpha_s$  i  $1/m_c$

korekcije i na skali  $\mu = m_c$  je dana relacijom

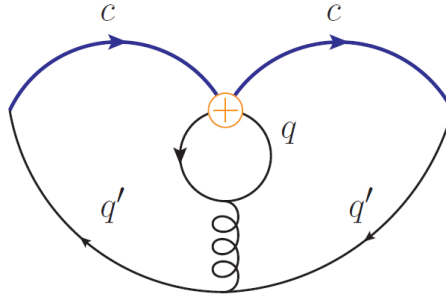
$$f_D = \frac{F(m_c)}{\sqrt{m_D}} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{G_1(m_c)}{m_c} + 6 \frac{G_2(m_c)}{m_c} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\Lambda}}{m_c} \right), \quad (5.33)$$

gdje je  $\bar{\Lambda} = m_D - m_c$ , te parametri  $G_1$  i  $G_2$  karakteriziraju matrične elemente ne-lokalnih operatora. U drugoj jednakosti u izrazima (5.30) i (5.31), kada se HQET konstanta raspada,  $F(m_c)$ , izražava preko QCD konstante,  $f_{D_q}$ , uključene su samo  $\alpha_s$  korekcije, a  $1/m_c$  korekcije nisu uključene. To je zato što se korekcije  $1/m_c$  mogu, u konzistentnom razvoju po  $1/m_c$ , kako će i kasnije biti objašnjeno, apsorbirati u doprinose operatora dimenzije 7.

Dakle, primjenom VIA parametri modela vreće bojno-singletnih operatora su  $\tilde{B}_{1,2}^q = 1$ , a bojno-oktetnih operatora iščezavaju,  $\tilde{\epsilon}_{1,2}^q = 0$ . Ovdje pretpostavljamo izospinsku simetriju, tj.

$$\tilde{B}_i^u = \tilde{B}_i^d. \quad (5.34)$$

Veličine  $\tilde{\delta}_i^{q'q}$  u izrazu (5.31) opisuju tzv. *eye*-korekcije, prikazane na slici 5.8. Primjenom VIA one iščezavaju,  $\tilde{\delta}_i^{q'q} = 0$ .



Slika 5.8: Dijagram koji opisuje *eye*-korekcije. Iz [19].

Izvan VIA, matrični elementi četverokvarkovskih operatora s vanjskim poljem  $q'$  različiti su od nule i kada je valentni kvark  $q$  u mezonu  $D_q$  različiti od  $q'$ , pa  $\tilde{\delta}_i^{q'q}$  nisu nula.

Parametri  $\tilde{B}_i^q$ ,  $\tilde{\epsilon}_i^q$  i  $\tilde{\delta}_i^{q'q}$  se mogu računati i izvan VIA, preko HQET pravila sume (engl. *HQET sum rules*). Ponovo se pretpostavlja izospinska simetrija,

$$\tilde{\delta}_i^{uq'} = \tilde{\delta}_i^{dq'}, \quad \tilde{\delta}_i^{q'u} = \tilde{\delta}_i^{q'd}, \quad q' = u, d, s. \quad (5.35)$$

Iznosi parametara modela vreće koje koristimo u radu, izračunati HQET pravilima sume u [20,21], dani su u Dodatku C.

### 5.3.2 Operatori dimenzije 7

Kada se u računu četverokvarkovskih operatora dimenzije 6 uzme u obzir impuls lakih kvarkova i njihova mase, dobiju se korekcije koje su potisnute s  $1/m_Q^4$ . Ti operatori, dimenzije 7, su dani četverokvarkovskim operatorima pomnoženim s malom masom lakog kvarka iz valentne strukture teškog hadrona ili s četverokvarkovskim operatorima koji sadrže dodatne derivacije. Operatori dimenzije 7, definirani u QCD-u, se mogu prikazati u sljedećoj bazi

$$P_1^q = m_q(\bar{c}(1 - \gamma_5)q)(\bar{q}(1 - \gamma_5)c), \quad (5.36)$$

$$P_2^q = \frac{1}{m_c}(\bar{c}\vec{D}_\nu\gamma_\mu(1 - \gamma_5)D^\nu q)(\bar{q}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)c), \quad (5.37)$$

$$P_3^q = \frac{1}{m_c}(\bar{c}\vec{D}_\nu(1 - \gamma_5)D^\nu q)(\bar{q}(1 + \gamma_5)c), \quad (5.38)$$

te su tim operatorima pridruženi i pripadajući bojno-oktetni operatori  $S_1^q, S_2^q, S_3^q$ , koji sadrže generatore  $T^a$ .

U kontekstu HQET, operatori dimenzije 7 sastoje se od lokalnih operatora

$$\tilde{P}_1^q = m_q(\bar{h}_v(1 - \gamma_5)q)(\bar{q}(1 - \gamma_5)h_v), \quad (5.39)$$

$$\tilde{P}_2^q = (\bar{h}_v\gamma_\mu(1 - \gamma_5)(iv \cdot D)q)(\bar{q}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)h_v), \quad (5.40)$$

$$\tilde{P}_3^q = (\bar{h}_v(1 - \gamma_5)(iv \cdot D)q)(\bar{q}(1 + \gamma_5)h_v), \quad (5.41)$$

te

$$\tilde{R}_1^q = (\bar{h}_v\gamma_\mu(1 - \gamma_5)q)(\bar{q}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)(i\not{D})h_v), \quad (5.42)$$

$$\tilde{R}_2^q = (\bar{h}_v(1 - \gamma_5)q)(\bar{q}(1 + \gamma_5)(i\not{D})h_v), \quad (5.43)$$

uz pripadajuće bojno-oktetne operatore  $\tilde{S}_{1,2,3}^q$  i  $\tilde{U}_{1,2}^q$ . Uz lokalne operatore pojavljuju

se još i nelokalni operatori

$$\tilde{M}_{1,\pi}^q = i \int d^4y T \left[ \tilde{O}_1^q(0), (\bar{h}_v(iD)^2 h_v)(y) \right], \quad (5.44)$$

$$\tilde{M}_{2,\pi}^q = i \int d^4y T \left[ \tilde{O}_2^q(0), (\bar{h}_v(iD)^2 h_v)(y) \right], \quad (5.45)$$

$$\tilde{M}_{1,G}^q = i \int d^4y T \left[ \tilde{O}_1^q(0), \frac{1}{2} g_s (\bar{h}_v \sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} h_v)(y) \right], \quad (5.46)$$

$$\tilde{M}_{2,G}^q = i \int d^4y T \left[ \tilde{O}_2^q(0), \frac{1}{2} g_s (\bar{h}_v \sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} h_v)(y) \right], \quad (5.47)$$

uz pripadajuće bojno-oktetne operatore. Ovdje su se, u usporedbi s QCD bazom, pojavili dva dodatna lokalna operatora  $\tilde{R}_1^q$  i  $\tilde{R}_2^q$  (i pripadajući okteti), te četiti dodatna nelokalna operatora  $\tilde{M}_{1,\pi}^q$ ,  $\tilde{M}_{2,\pi}^q$ ,  $\tilde{M}_{1,G}^q$  i  $\tilde{M}_{2,G}^q$  (i pripadajući okteti).

Matrični elementi operatora (5.39) - (5.47) u HQET formalizmu su parametrizirani na sljedeći način

$$\langle D_q | \tilde{P}_1^q | D_q \rangle = -m_q F^2(\mu_0) m_{D_q} \tilde{B}_{P,1}^q, \quad (5.48)$$

$$\langle D_q | \tilde{P}_2^q | D_q \rangle = -F^2(\mu_0) m_{D_q} \bar{\Lambda} \tilde{B}_{P,2}^q, \quad (5.49)$$

$$\langle D_q | \tilde{P}_3^q | D_q \rangle = -F^2(\mu_0) m_{D_q} \bar{\Lambda} \tilde{B}_{P,3}^q, \quad (5.50)$$

$$\langle D_q | \tilde{R}_1^q | D_q \rangle = -F^2(\mu_0) m_{D_q} (\bar{\Lambda} - m_q) \tilde{B}_{R,1}^q, \quad (5.51)$$

$$\langle D_q | \tilde{R}_2^q | D_q \rangle = -F^2(\mu_0) m_{D_q} (\bar{\Lambda} - m_q) \tilde{B}_{R,2}^q, \quad (5.52)$$

gdje je  $\bar{\Lambda} = m_D - m_c$ , te

$$\langle D_q | \tilde{M}_{1,\pi}^q | D_q \rangle = 2F^2(\mu_0) m_D G_1(\mu_0) \tilde{L}_{1,\pi}^q, \quad (5.53)$$

$$\langle D_q | \tilde{M}_{2,\pi}^q | D_q \rangle = 2F^2(\mu_0) m_D G_1(\mu_0) \tilde{L}_{2,\pi}^q, \quad (5.54)$$

$$\langle D_q | \tilde{M}_{1,G}^q | D_q \rangle = 12F^2(\mu_0) m_D G_2(\mu_0) \tilde{L}_{1,G}^q, \quad (5.55)$$

$$\langle D_q | \tilde{M}_{2,G}^q | D_q \rangle = 12F^2(\mu_0) m_D G_2(\mu_0) \tilde{L}_{2,G}^q, \quad (5.56)$$

i slično za bojno-oktetne operatore. U VIA, parametri modela vreće iznose  $\tilde{B}_{P,i}^q = 1$ ,  $\tilde{B}_{R,i}^q = 1$ , te  $\tilde{L}_{i,\pi}^q = 1$ ,  $\tilde{L}_{i,G}^q = 1$ , a parametri bojnih-okteta su nula. Za matrične elemente operatora dimenzije 7 još nisu dostupni neperturbativni računi, stoga se ovdje računalo samu u VIA aproksimaciji za matrične elemente operatora dimenzije 7.

U VIA i na skali  $\mu_0 = m_c$ , doprinos lokalnih operatora  $\tilde{R}_{1,2}^q$ , kao i nelokalnih  $\tilde{M}_{1,\pi}^q$ ,

$\tilde{M}_{2,\pi}^q$ ,  $\tilde{M}_{1,G}^q$  i  $\tilde{M}_{2,G}^q$  se može apsorbirati u matrične elemente dimenzije 6 koji su proporcionalni QCD konstanti raspada  $f_D$ , tako da ostaju samo  $\tilde{P}_{1,2,3}^q$  operatori, analogni onima u QCD bazi. To ćemo demonstrirati na primjeru Paulijeve interferencije. Doprinos Paulijeve interferencije u vodećem redu razvoja po  $\alpha_s$  i do reda  $1/m_c^4$  u razvoju po  $1/m_c$ , za raspad  $c \rightarrow s\bar{d}u$ , iznosi

$$\text{Im}\mathcal{T}^{\text{PI}} = \Gamma_0 |V_{ud}^*|^2 \frac{32\pi^2}{m_c^3} (1 - z_s)^2 \left[ C_{\text{PI}}^S \left( \tilde{O}_1^d + \frac{\tilde{R}_1^d}{m_c} + \frac{\tilde{M}_{1,\pi}^d}{m_c} + \frac{\tilde{M}_{1,G}^d}{m_c} 2 \frac{1 + z_s}{1 - z_s} \frac{\tilde{P}_1^q}{m_c} \right) + (\text{color - octet part}) \right], \quad (5.57)$$

gdje je  $C_{\text{PI}}^S = C_1^2 + 6C_1C_2 + C_2^2$ . U izračunu matričnog elementa od  $\text{Im}\mathcal{T}^{\text{PI}}$  preko VIA, doprinosi od bojno-oktetnih operatora nestaju. Uz parametrizaciju danu u (5.30) i (5.48)-(5.56), u VIA i na skali  $\mu = m_c$  se dobiva

$$\begin{aligned} \langle D^+ | \tilde{O}_1^d + \frac{\tilde{R}_1^d}{m_c} + \frac{\tilde{M}_{1,\pi}^d}{m_c} + \frac{\tilde{M}_{1,G}^d}{m_c} | D^+ \rangle_{\text{HQET}} &= F^2(m_c) m_{D^+} \left[ 1 - \frac{\bar{\Lambda}}{m_c} + \frac{2G_1(m_c)}{m_c} + \frac{12G_2(m_c)}{m_c} \right] \\ &= f_D^2 m_{D^+}^2 = \langle D^+ | O_1^d | D^+ \rangle_{\text{QCD}}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

gdje se u drugom redu napravio prijelaz između HQET i QCD konstanti raspada prema izrazu (5.33). Tako se može konzistentnim razvojem svih parametara računati po  $1/m_c$  doprinos lokalnih operatora  $\tilde{R}_i^q$  i nelokalnih operatora  $\tilde{M}_{i,\pi}^q$  i  $\tilde{M}_{i,G}^q$  apsorbirati u QCD konstantu raspada  $f_D$ , što pokazuje ekvivalentnost QCD baze i HQET baze za operatore dimenzije 5, 6 i 7, do reda u kojem se računati. Isti argument vrijedi i za matrične elemente u širini raspada od izmjene  $W$  bozona i anihilacije.



## 6 Rezultati

### 6.1 Širine raspada i vremena života

U ovom poglavlju prikazan je način računanja i dobiveni rezultati širina raspada i vremena života. Računalo se u Mathematica programu [22]. U ovom radu smo se ograničili na vodeći red (skraćeno ćemo dalje pisati LO-QCD, od engl. *leading order*) u razvoja po QCD konstanti vezanja  $\alpha_s$ . Kasnije u tekstu su navedeni i diskutirani rezultati koji uključuju NLO-QCD korekcije. U računima se koristi pol masa  $c$  kvarka iznosa  $m_c^{\text{Pole}} = 1.48 \text{ GeV}$ . Za Wilsonove koeficijente, koji ovise o skali  $\mu_1$ , koristi se njihov iznos na skali  $\mu_1 = m_c = 1.48 \text{ GeV}$  u LO-QCD, koji je (iz [19])

$$C_1(\mu_1 = 1.48 \text{ GeV}) = 1.24 \quad \text{i} \quad C_2(\mu_1 = 1.48 \text{ GeV}) = -0.48. \quad (6.1)$$

Za neperturbativne matrične elemente  $\mu_\pi^2$ ,  $\mu_G^2$  i  $\rho_D^3$  i konstantu raspada  $f_D$  uzete su vrijednosti iz [19], koje su sljedeće:

$$\mu_G^2(D^{+,0}) = (0.34 \pm 0.10) \text{ GeV}^2, \quad \mu_G^2(D_s^+) = (0.36 \pm 0.10) \text{ GeV}^2, \quad (6.2)$$

$$\mu_\pi^2(D^{+,0}) = (0.465 \pm 0.198) \text{ GeV}^2, \quad \mu_\pi^2(D_s^+) = (0.555 \pm 0.232) \text{ GeV}^2, \quad (6.3)$$

$$\rho_D^3(D^{+,0}) = (0.075 \pm 0.034) \text{ GeV}^3, \quad \rho_D^3(D_s^+) = (0.110 \pm 0.050) \text{ GeV}^3, \quad (6.4)$$

$$f_D(D^{+,0}) = (0.2120 \pm 0.0007) \text{ GeV}, \quad f_D(D_s^+) = (0.2499 \pm 0.0005) \text{ GeV}, \quad (6.5)$$

gdje su vrijednosti  $D^0$  i  $D^+$  mezona jednake. Vrijednost mase  $s$  kvarka, masa  $D$  mezona ( $M_{D^0}$ ,  $M_{D^+}$  i  $M_{D_s^+}$ ), te elemenata CKM matrice su uzete iz PDG [4].

Ako se u izraz za širinu raspada (5.9) ubaci izraz (5.11), dobije se sljedeći izraz za raspad  $D$  mezona

$$\Gamma(D) = \Gamma_0 \left[ c_3 + \frac{c_\pi \mu_\pi^2 + c_G \mu_G^2}{m_c^2} + \frac{c_\rho \rho_D^3}{m_c^3} + \dots + \frac{16\pi^2}{2M_D} \left( \sum_{i,q} \frac{c_{6,i}^q \langle D | O_i^q | D \rangle}{m_c^3} \right) \right] \quad (6.6)$$

$$+ \sum_i \frac{c_{7,i}^q \langle D | P_i^q | H \rangle}{m_c^4} + \dots \Bigg], \quad (6.7)$$

gdje koeficijenti u sebi sadrže sumu po svim mogućim konačnim stanjima raspada, te je

$$\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_c^5}{192\pi^3} |V_{cs}|^2. \quad (6.8)$$

U računu širina raspada pojedinog mezona su uzeti članovi do onog potisnutog s  $1/m_c^4$  za članove s dvokvarkovskim operatorima, a za članove s četverokvarkovskim operatorima uzeti su i članovi potisnuti s  $1/m_c^4$  (njihov doprinos je numerički povećan za  $16\pi^2$  naprema dvokvarkovskim članovima) u razvoju (6.7).

Vodeći član u razvoju (6.7) se može zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned}\Gamma_3^{(0)} &= \Gamma_0 c_3 = \Gamma_0 (c_3^{\text{SL}} + |V_{\text{CKM}}|^2 c_3^{\text{NL}}) \\ &= \Gamma_0 [f(z_s, z_e, z_{\nu_e}) + f(z_e, z_\mu, z_{\nu_\mu}) + |V_{ud}|^2 \mathcal{N}_a f(z_s, z_u, z_d) + \dots],\end{aligned}\quad (6.9)$$

gdje se koriste omjeri masa  $z_q = m_q^2/m_c^2$ , a ovisnost o Wilsonovim koeficijentima je sadržana u  $\mathcal{N}_a \equiv 3C_1^2 + 2C_1C_2 + 3C_3^2$ . Funkcije  $f(z_i, z_j, z_k)$  opisuju masene korekcije u raspadima. U računu za  $\Gamma_3^{(0)}$  se zanemaruju mase neutrina, elektrona, te  $u$  i  $d$  kvarka, tj.  $z_\nu = z_e = z_u = z_d = 0$ , dok su  $z_s \neq 0 \neq z_\mu$ . Račun vodećeg člana, počevši od efektivnog hamiltonijana i korištenjem optičkog teorema, je napravljen u Dodatku A, za raspad  $c \rightarrow sud$ . Funkcija  $f(z_s, 0, 0)$  je izraz u zagradi u jednadžbi (A.23), tj.

$$f(z_s, 0, 0) = 1 - 8z_s - 12z_s^2 \log(z_s) + 8z_s^3 - z_s^4. \quad (6.10)$$

Vrijedi  $f(0, 0, 0) = 1$ , a funkcija  $f(z_s, z_\mu, 0)$ , s dvije različite mase, je dana u [23]. Kada se sve ubaci u izraz (6.9), za vodeći član se u LO-QCD-u dobije

$$\Gamma_3^{(0)} = 1.46 \text{ ps}^{-1}, \quad (6.11)$$

a preko njega se dobije vrijeme života

$$\tau_c = 0.68 \text{ ps}. \quad (6.12)$$

Dobivena vrijednost od  $\tau_c$  se može usporediti s eksperimentalnim vrijednostima u tablici 3.1. Uzimajući u obzir da je  $\Gamma_3^{(0)}$  samo vodeći član u razvoju teškog kvarka i samo vodeći član u razvoju po  $\alpha_s$ , te da širina raspada ima veliku ovisnost o definiciji mase  $c$  kvarka ( $\propto m_c^5$ ), dobivena vrijednost za  $\tau_c$  je iznenađujuće blizu eksperimentalnih vrijednosti vremena života za  $D^0$  i  $D_s^+$  mezone, što znači da će korekcije višeg reda imati relativno mali utjecaj na vremena života ta dva  $D$ -mezona. Za  $D^+$  mezon je situacija obrnuta, korekcije višeg reda će imati značajan utjecaj. Uz korekcije od viših

redova u razvoju po  $1/m_c$  postoji i utjecaj viših redova QCD korekcija na vrijednost  $\Gamma_3$  i ostale članove u razvoju teškog kvarka koji će biti diskutiran kasnije u tekstu.

Iduća dva člana član u razvoju (6.7) su članovi dimenzije 5 koji dolaze od doprinosa kinetičkog i kromomagnetskog operatora. Koeficijent kinetičkog operatora je povezan s koeficijentom vodećeg člana izrazom

$$c_{\mu\pi} = -\frac{c_3}{2} = -3.12. \quad (6.13)$$

Kromomagnetski koeficijent  $c_G$  je za neleptonske modove dan u [17], a za semileptonske u [23]<sup>2</sup>. Za koeficijent  $c_G$  se dobije

$$c_G = c_G^{SL} + c_G^{NL} = -3.12 + 3.47 = 0.35. \quad (6.14)$$

Sljedeći član u razvoju (6.7) je dvokvarkovski član dimenzije 6, koji sadrži Darwinov operator<sup>3</sup>. Darwinov koeficijent  $c_{\rho D}$  se može zapisati u sljedećem obliku

$$c_{\rho D} = 3C_1^2 \mathcal{C}_{\rho D,11} + 2C_1 C_2 \mathcal{C}_{\rho D,12} + 3C_2^2 \mathcal{C}_{\rho D,22} + \mathcal{C}_{\rho D,SL} \quad (6.15)$$

Analitički izrazi za neleptonske koeficijente  $\mathcal{C}_{\rho D, nm}$  su dani u [19] za sve modove neleptonskih raspada, dok se koeficijenti za semileptonske raspade dobiju iz koeficijenata za neleptonske kada se stavi da je  $N_C = 1$ ,  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ . Za raspad  $c \rightarrow s\mu^+\nu_\mu$ , koji sadrži dvije čestice konačne mase u produktu raspada, se koristi aproksimacija  $z_s = z_\mu$ . Time se za koeficijent  $c_{\rho D}$  dobije

$$c_{\rho D} = c_{\rho D}^{SL} + c_{\rho D}^{NL} = 12.69 + 48.83 = 61.52. \quad (6.16)$$

Kako se vidi iz (6.13), (6.14) i (6.16), doprinos od Darwinovog člana, iako potisnut s  $1/m_c^3$ , je puno veći od doprinosa članova niže dimenzije, potisnutih s  $1/m_c^2$ .

Četverokvarkovski član dimenzije 6 u razvoju (6.7), tj. razvoju (3.2), se može rastaviti na 3 doprinosa različitog tipa,

$$16\pi^2 \tilde{\Gamma}_6 \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_6 \rangle}{m_c^3} = \Gamma_6^{\text{PI}} + \Gamma_6^{\text{WE}} + \Gamma_6^{\text{WA}}. \quad (6.17)$$

<sup>2</sup>U spomenutim referencama su dani izrazi za raspad B mezona, no pošto u ovom redu razvoja nema IR divergencija, rezultati vrijede i za  $c$  sektor, uz zamjenu  $m_b \rightarrow m_c$ ,  $m_c \rightarrow m_s$ , te  $m_\tau \rightarrow m_\mu$ .

<sup>3</sup>Utjecaj spin-orbit operatora (5.16) iščezava u primijenjenoj konvenciji.

gdje PI označava doprinos od dijagrama Paulijeve interferencije (slika 5.6), WE doprinos od dijagrama izmjene  $W$  bozona (slika 5.5), te WA doprinos od dijagrama anihilacije (slika 5.7). Za svaki tip posebno može se napisati njegov doprinos na sljedeći način

$$\begin{aligned}
\Gamma_6^{\text{PI}} &= \frac{G_F^2 m_c^2}{6\pi} \sum_{d'=d,s} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 |V_{ud'}|^2 \left( F^{qu} \frac{\langle \tilde{Q}_1^{d'} \rangle}{2m_{D_q}} + F_S^{qu} \frac{\langle \tilde{Q}_2^{d'} \rangle}{2m_{D_q}} + G^{qu} \frac{\langle \tilde{T}_1^{d'} \rangle}{2m_{D_q}} + G_S^{qu} \frac{\langle \tilde{T}_2^{d'} \rangle}{2m_{D_q}} \right), \\
\Gamma_6^{\text{WE}} &= \frac{G_F^2 m_c^2}{6\pi} \sum_{q=d,s} \sum_{q'=d,s} |V_{cq}|^2 |V_{uq'}|^2 \left( F^{qq'} \frac{\langle \tilde{Q}_1^u \rangle}{2m_{D_q}} + F_S^{qq'} \frac{\langle \tilde{Q}_2^u \rangle}{2m_{D_q}} + G^{qq'} \frac{\langle \tilde{T}_1^u \rangle}{2m_{D_q}} + G_S^{qq'} \frac{\langle \tilde{T}_2^u \rangle}{2m_{D_q}} \right), \\
\Gamma_6^{\text{WA}} &= \frac{G_F^2 m_c^2}{6\pi} \sum_{s'=d,s} |V_{cs'}|^2 \left[ \sum_{q'=d,s} |V_{uq'}|^2 \left( \tilde{F}^{uq'} \frac{\langle \tilde{Q}_1^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{F}_S^{uq'} \frac{\langle \tilde{Q}_2^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{G}^{uq'} \frac{\langle \tilde{T}_1^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{G}_S^{uq'} \frac{\langle \tilde{T}_2^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=e,\mu} \left( \tilde{F}^{\nu l} \frac{\langle \tilde{Q}_1^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{F}_S^{\nu l} \frac{\langle \tilde{Q}_2^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{G}^{\nu l} \frac{\langle \tilde{T}_1^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{G}_S^{\nu l} \frac{\langle \tilde{T}_2^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} \right) \right], \tag{6.18}
\end{aligned}$$

gdje je uvedena pokrata  $\langle Q_i^q \rangle \equiv \langle D_q | Q_i^q | D_q \rangle$ . Koeficijenti u jednadžbama (6.18) su funkcije omjera masa  $z = m_s^2/m_c^2$  i  $\mu_0/m_c$ , gdje je  $\mu_0$  renormalizacijska skala. Označke  $qq'$  u koeficijentima  $F^{qq'}$ ,  $F_S^{qq'}$ ,  $G^{qq'}$  i  $G_S^{qq'}$  se odnose na okuse kvarkova u petlji za slikama 5.5, 5.6 i 5.7. U Dodatku B su izvedene širine raspada za svaki od tih doprinosa u limesu kada sve mase u konačnom stanju idu u nulu. Analitički izrazi za koeficijente Paulijeve interferencije,  $F^{qu}$ , ...,  $G_S^{qu}$ , i izmjene  $W$  bozona,  $F^{qq'}$ , ...,  $G_S^{qq'}$ , s konačnom masom  $s$  kvarka su dani u [24]. Koeficijenti anihilacije neleptonskih modova,  $F^{uq'}$ , ...,  $G_S^{uq'}$ , mogu se dobiti iz koeficijenata izmjene  $W$  bozona zamjenom  $C_1 \leftrightarrow C_2$ . Koeficijenti anihilacije za semileptonske modove su dani u [25]. Matrični elementi četverokvarkovskih operatora dani su u jednadžbama (5.30) i (5.31). U tablici 6.1 prikazanu su doprinosi dijagrama Paulijeve interferencije,  $W$  izmjene i anihilacije širini raspada, te ukupni doprinos četverokvarkovskog člana dimenzije 6 širini raspada. Prikazani su posebno doprinosi u kojima su uzete vrijednosti parametara modela vreće u VIA i posebno kada su ti parametri izračunati preko HQET pravila sume. U VIA, doprinos izmjene  $W$  bozona iščezava za  $D^+$  i  $D_s^+$  mezon, a doprinosi Paulijeve interferencije i anihilacije iščezavaju za  $D^0$  mezon. U računu s parametrima izračunatim preko HQET sprava sume, ti doprinosi imaju konačne iznose.

Doprinosi četverokvarkovskih članova dimenzije 6 su za  $D^0$  mezon mali, dok za  $D^+$  i  $D_s^+$  mezone ti članovi imaju značajan doprinos ukupnoj širini raspada. Za  $D^+$  mezon taj član je i veći od vodećeg člana  $\Gamma_3^{(0)}$ . On dolazi zbog velikog doprinosa

	WE	PI	WA	dim-6
VIA				
$D^0$	$7.9 \times 10^{-5}$	/	/	$7.9 \times 10^{-5}$
$D^+$	/	-1.718	0.001	-1.72
$D_s^+$	/	-0.134	0.012	-0.12
HQET SR sume				
$D^0$	0.050	-0.009	-0.024	0.02
$D^+$	0.002	-1.890	-0.022	-1.91
$D_s^+$	0.003	-0.154	-0.013	-0.16

Tablica 6.1: Numeričke vrijednosti doprinosa četverokvarkovskih članova dimenzije 6 ukupnoj širini raspada. Posebno su prikazani doprinosi od izmjene  $W$  bozona (WE), Paulijeve interferencije (PI) i anihilacije (WA). Prikazane su vrijednosti u kojima su parametri modela vreće dani u VIA i vrijednosti u kojima su ti parametri izračunati preko HQET pravila sume (HQET SR). Vrijednosti su dane u  $\text{ps}^{-1}$ .

Paulijeve interferencije. Za  $D_s^+$  mezon, najveći doprinos dolazi isto od Paulijeve interferencije, iako je Paulijeva interferencija za  $D_s^+$  mezon CKM potisnuta naprema članu anihilacije. Anihilacijski doprinos je očekivano mali zbog potisnuća helicitetom. Kada bi se u računalo u VIA i uzelo da je masa  $s$  kvarka nulu, anihilacijski član bi iščezavao, zato što bi stanja heliciteta bila jednaka kiralnim stanjima, a za pseudo-skalarne mezone je tada anihilacija preko V-A interakcije zabranjena. Kada se uzme konačna masa  $s$  kvarka, član anihilacije ima konačan iznos, ali je potisnut.

	$D^0$	$D^+$	$D_s^+$
$16\pi^2 \tilde{\Gamma}_6 \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_6 \rangle}{m_c^3}$ (VIA)	$7.9 \times 10^{-5}$	-1.72	-0.12
$16\pi^2 \tilde{\Gamma}_6 \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_6 \rangle}{m_c^3}$ (HQET SR)	0.02	-1.91	-0.16
$16\pi^2 \tilde{\Gamma}_7^{D_q} \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_7^{D_q} \rangle}{m_c^4}$	$4.2 \times 10^{-7}$	1.17	0.10

Tablica 6.2: Numeričke vrijednosti doprinosa četverokvarkovskih članova dimenzije 6 i 7 ukupnoj širini raspada. Za dimenziju 6 su prikazane u vrijednosti u kojima su parametri modela vreće dani u VIA i vrijednosti u kojima su ti parametri izračunati preko HQET pravila sume (HQET SR). Vrijednosti su dane u  $\text{ps}^{-1}$ .

Za četverokvarkovski član dimenzije 7 vrijedi sličan zapis kao i za dimenzije 6, pa

se ukupni doprinos može rastaviti na tri člana,

$$16\pi^2 \tilde{\Gamma}_7 \frac{\langle \tilde{\mathcal{O}}_7 \rangle}{m_c^4} = \Gamma_7^{\text{PI}} + \Gamma_7^{\text{WE}} + \Gamma_7^{\text{WA}}. \quad (6.19)$$

Svaki tip se ponovo zapisuje na sličan način

$$\begin{aligned} \Gamma_7^{\text{PI}} &= \frac{G_F^2 m_c}{6\pi} \sum_{d'=d,s} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 |V_{ud'}|^2 \sum_{i=1}^3 \left( g_i^{qu} \frac{\langle \tilde{P}_i^{d'} \rangle}{2m_{D_q}} + h_i^{qu} \frac{\langle \tilde{S}_i^{d'} \rangle}{2m_{D_q}} \right), \\ \Gamma_7^{\text{WE}} &= \frac{G_F^2 m_c}{6\pi} \sum_{q=d,s} \sum_{q'=d,s} |V_{cq}|^2 |V_{uq'}|^2 \sum_{i=1}^3 \left( g_i^{qq'} \frac{\langle \tilde{P}_i^u \rangle}{2m_{D_q}} + h_i^{qq'} \frac{\langle \tilde{S}_i^u \rangle}{2m_{D_q}} \right), \\ \Gamma_7^{\text{WA}} &= \frac{G_F^2 m_c}{6\pi} \sum_{s'=d,s} |V_{cs'}|^2 \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{q'=d,s} |V_{uq'}|^2 \left( \tilde{g}_i^{uq'} \frac{\langle \tilde{P}_i^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{h}_i^{uq'} \frac{\langle \tilde{S}_i^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=e,\mu} \left( \tilde{g}_i^{\nu l} \frac{\langle \tilde{P}_i^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} + \tilde{h}_i^{\nu l} \frac{\langle \tilde{S}_i^{s'} \rangle}{2m_{D_q}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Matrični elementi operatora su dani s izrazima (5.48)-(5.50) i analogno za bojnoktete. U matričnim elementima se za HQET konstantu raspada koristi izraz  $F(\mu) = f_D \sqrt{m_D}$  jer smo ograničeni do LO-QCD-a. Svi koeficijenti  $g_i^{q_1 q_2}$ ,  $h_i^{q_1 q_2}$ ,  $\tilde{g}_i^{q_1 q_2}$ ,  $\tilde{h}_i^{q_1 q_2}$ ,  $\tilde{g}_i^{\nu l}$  i  $\tilde{h}_i^{\nu l}$  su dani u [25]. Parametri modela vreće za dimenzije 7 nisu još izračunati neperturbativnim računom, stoga se u računu koristi VIA. Doprinosi članova dimenzije 7 širini raspada prikazani su u zadnjem redu u tablici 6.2, a u prva dva su, radi usporedbe, prikazani doprinosi četverokvarkovskih članova dim. 6.

Kada se zbroje svi doprinosi širina raspada dobiju se sljedeće vrijednosti za ukupne širine raspada u vodećem redu QCD-a

$$\Gamma^{\text{LO}}(D^0) = (1.66 \pm 0.23) \text{ps}^{-1}, \quad (6.21)$$

$$\Gamma^{\text{LO}}(D^+) = (0.90 \pm 0.43) \text{ps}^{-1}, \quad (6.22)$$

$$\bar{\Gamma}^{\text{LO}}(D_s^+) = (1.70 \pm 0.27) \text{ps}^{-1}. \quad (6.23)$$

Kod raspada  $D_s^+$  mezona, veliki omjer grananja ima leptonski raspad  $D_s^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau$ , koji se ne može opisati pomoću HQE, pošto je  $\tau$  lepton masivniji od  $c$  kvarka. Eksperimentalna vrijednost omjera grananja tog raspada (prema PDG [4]) je

$$\text{Br}(D_s^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau) = (5.48 \pm 0.23)\%, \quad (6.24)$$

zbog čega se definiramo reduciranu širinu raspada  $D_s^+$  mezona,  $\bar{\Gamma}(D_s^+)$ , čija eksperimentalna vrijednost iznosi

$$\bar{\Gamma}(D_s^+) \equiv \Gamma(D_s^+) - \Gamma(D_s^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau) = (1.88 \pm 0.02) \text{ps}^{-1}. \quad (6.25)$$

Iz izračunatih širina raspada se dobiju vremena života za  $D^0$ ,  $D^+$  i  $D_s^+$  mezone u vodećem redu QCD-a

$$\tau^{\text{LO}}(D^0) = (0.60 \pm 0.08) \text{ps}, \quad (6.26)$$

$$\tau^{\text{LO}}(D^+) = (1.11 \pm 0.53) \text{ps}, \quad (6.27)$$

$$\bar{\tau}^{\text{LO}}(D_s^+) = (0.59 \pm 0.09) \text{ps}. \quad (6.28)$$

Kako bi vidjeli doprinos pojedinih članova, promotrimo raspis širine raspada po članovima. Promotrimo prvo raspis za  $D^0$  mezon:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{LO}}(D^0) = 6.23\Gamma_0 \left[ 1 - 0.106 \frac{\mu_\pi^2(D)}{0.465} + 0.009 \frac{\mu_G^2(D)}{0.34} + 0.228 \frac{\rho_D^3(D)}{0.075} + \underbrace{0.0001}_{\text{dim-6, VIA}} \right. \\ - 0.0002 \frac{\delta \tilde{B}_1^q}{0.02} + 0.0002 \frac{\delta \tilde{B}_2^q}{0.02} + 0.0847 \frac{\tilde{\epsilon}_1^q}{-0.04} - 0.0852 \frac{\tilde{\epsilon}_2^q}{-0.04} \\ - 0.0036 r_1^{qq} - 0.0004 r_2^{qq} - 0.0028 r_3^{qq} + 0.0000 r_4^{qq} \\ \left. - 0.0092 r_1^{sq} - 0.0065 r_2^{sq} - 0.0000 r_3^{sq} + 0.0001 r_4^{sq} + \underbrace{0.00}_{\text{dim-7, VIA}} \right]. \quad (6.29) \end{aligned}$$

U prethodnom izrazu normalizirani su HQE parametri  $\mu_\pi^2(D)$ ,  $\mu_G^2(D)$  i  $\rho_D^3(D)$  na njihove srednje vrijednosti. Kod parametara modela vreće, kao odraz izospinske simetrije, koristi se oznaka  $q$  i za  $u$  i za  $d$  kvarkove. Koristi se i zapis  $\tilde{B}_1^q = 1 + \delta \tilde{B}_1^q$ , kako bi se istaknula odstupanja od VIA vrijednosti i koeficijenti  $\delta \tilde{B}_i^q$  su normalizirani na 0.002. Matrični elementi bojno-oktetnih operatora,  $\tilde{\epsilon}_i^q$ , su normalizirani na  $-0.04$  (oni imaju velike neodređenosti, stoga je teško procijeniti njihovu vrijednost). Koriste se i omjeri  $r \equiv \tilde{\delta}_i^{q'q} / \langle \tilde{\delta}_i^{q'q} \rangle$ , gdje su  $\langle \tilde{\delta}_i^{q'q} \rangle$  srednje vrijednosti dane u dodatku C.

Za  $D^0$  mezon, prema (6.29), najveći doprinos širini raspada, iza vodećeg člana, daje doprinos Darwinovog operatora. Zbog potisnuća helicitetom dobiju se samo mali doprinosi od dijagrama izmjene  $W$  bozona. U VIA ti doprinosi iščezavaju.

Ovisno o veličini  $\tilde{\epsilon}_i$ , doprinosi bojno-oktetnih operatora mogu biti jednake veličine kao i doprinosi kinetičkog operatora. Prema HQET pravila sume, numerički doprinosi *eye*-korekcija nisu značajni.

Za širinu raspada  $D^+$  mezona raspisanu po članovima imamo

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{LO}}(D^+) = 6.23\Gamma_0 \left[ 1 - 0.106 \frac{\mu_\pi^2(D)}{0.465} + 0.009 \frac{\mu_G^2(D)}{0.34} + 0.228 \frac{\rho_D^3(D)}{0.075} - \underbrace{1.1801}_{\text{dim-6, VIA}} \right. \\ - 0.0278 \frac{\delta \tilde{B}_1^q}{0.02} + 0.0042 \frac{\delta \tilde{B}_2^q}{0.02} - 0.2771 \frac{\tilde{\epsilon}_1^q}{-0.04} - 0.0007 \frac{\tilde{\epsilon}_2^q}{-0.04} \\ - 0.0000 r_1^{qq} - 0.0000 r_2^{qq} - 0.0008 r_3^{qq} + 0.0006 r_4^{qq} \\ \left. - 0.0092 r_1^{sq} - 0.0065 r_2^{sq} - 0.0000 r_3^{sq} + 0.0001 r_4^{sq} + \underbrace{0.8034}_{\text{dim-7, VIA}} \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Doprinos četverokvarkovskih članova dimenzije 6 je ovdje veći od vodećeg člana, zbog velike Paulijeve interferencije. Doprinos dimenzije 7 je također veliki, čak  $\approx 80\%$  od vodećeg člana. Ta tri člana, vodeći član, VIA doprinos od četverokvarkovskih doprinosa dim. 6 i dim. 7, se skoro pokrate, stoga ukupna širina raspada  $D^+$  mezona ima veću osjetljivost na  $\Gamma_5$ ,  $\Gamma_6$  i doprinose od  $\tilde{\Gamma}_6$  koji dolaze od odstupanja parametara modela vreće od VIA vrijednosti. Zbog tog kraćenja, utjecaj viših redova u razvoju po  $\alpha_s$  također ima veći utjecaj na ukupnu širinu raspada  $D^+$  mezona nego kod  $D^0$  i  $D_s^+$  mezona.

Kada se na isti način raspiše širina raspada za  $D_s^+$  mezona, dobije se

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{\text{LO}}(D_s^+) = 6.23\Gamma_0 \left[ 1 - 0.127 \frac{\mu_\pi^2(D)}{0.555} + 0.009 \frac{\mu_G^2(D)}{0.36} + 0.335 \frac{\rho_D^3(D)}{0.110} - \underbrace{0.0837}_{\text{dim-6, VIA}} \right. \\ - 0.1074 \frac{\delta \tilde{B}_1^s}{0.02} + 0.1057 \frac{\delta \tilde{B}_2^s}{0.02} - 0.0039 \frac{\tilde{\epsilon}_1^s}{-0.04} - 0.0177 \frac{\tilde{\epsilon}_2^s}{-0.04} \\ \left. - 0.0047 r_1^{qs} - 0.0005 r_2^{qs} - 0.0028 r_3^{qs} + 0.0009 r_4^{qs} + \underbrace{0.0702}_{\text{dim-7, VIA}} \right]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ovdje, jednako kao i za  $D^0$  mezon, najveća korekcija vodećem članu dolazi od doprinosa Darwinovog operatora. Kako se doprinosi od četverokvarkovskog člana dim. 6 skoro pokrate s dim. 7 članom, doprinosi koji dolaze od odstupanja parametara modela vreće od VIA vrijednosti isto mogu imati značajan utjecaj.



Izračunate vrijednosti za vremena života (6.26), (6.27) i (6.28) možemo usporediti s eksperimentalnim, navedenim u tablici 3.1. Eksperimentalne vrijednosti vremena života za  $D^+$  i  $D_s^+$  mezone su unutar greški računa, dok je za  $D^0$  mezon dobiveno vrijednost koja je veća od eksperimentalne. No korištenje isključivo račun u LO-QCD nije dovoljno, jer korekcije vodećeg reda mogu biti velike, u slučaju četverokvarkovskih operatora i veće od vodećeg člana (kasnije u tekstu su dodatno komentirane te korekcije).

## 6.2 Omjeri vremena života

Širine raspada slobodnog kvarka, tj. vodeći člana u HQE razvoji ima veliku ovisnost o masi kvarka ( $\propto m_c^5$ ), stoga se često promatraju omjeri vremena života, kako bi se ta ovisnost pokratala. Omjere vremena života ćemo računati sljedećom formulom

$$\frac{\tau(D_{(s)}^+)}{\tau(D^0)} = 1 + \left[ \Gamma^{\text{HQE}}(D^0) - \Gamma^{\text{HQE}}(D_{(s)}^+) \right] \tau^{\text{exp}}(D_{(s)}^+), \quad (6.32)$$

gdje su  $\Gamma^{\text{HQE}}(D^0)$  teorijski dobivene širine raspada, a  $\tau^{\text{exp}}(D_{(s)}^+)$  je eksperimentalno dobivena vrijednost vremena života. Razlikom širina raspada u prethodnoj formuli se postigne da se vodeći članovi pokrate, a članovi dimenzije 5 i dvokvarkovski članovi dimenzije 6 se pokrate do na slamanje  $SU(3)_{\text{okus}}$  simetrije sadržane u neperturbativnim matričnim elementima,

$$\begin{aligned} \Gamma(D^0) - \Gamma(D_{(s)}^+) = & \cancel{\Gamma_3} - \cancel{\Gamma_3} + \Gamma_5 \frac{1}{m_c^2} \left( \langle \mathcal{O}_5 \rangle_{D^0} - \langle \mathcal{O}_5 \rangle_{D_{(s)}^+} \right) + \Gamma_6 \frac{1}{m_c^3} \left( \langle \mathcal{O}_6 \rangle_{D^0} - \langle \mathcal{O}_6 \rangle_{D_{(s)}^+} \right) \\ & + 16\pi^2 \left[ \frac{1}{m_c^3} \left( \tilde{\Gamma}_6(D^0) \langle \tilde{\mathcal{O}}_6 \rangle_{D^0} - \tilde{\Gamma}_6(D_{(s)}^+) \langle \tilde{\mathcal{O}}_6 \rangle_{D_{(s)}^+} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Stoga bi u omjerima vremena života doprinos četverokvarkovskih članova trebao biti dominantan. Izračunati omjeri vremena života i njihove eksperimentalne vrijednosti dani su u tablici 6.3. Za oba omjera su dobivene vrijednosti manje od eksperimentalnih. U računima koji uključuju i korekcije u razvoju po  $\alpha_s$ , te vrijednosti se približe eksperimentalnim, pogotovo za  $\tau(D^+)/\tau(D_0)$ , što je komentirano u sljedećem poglavlju.

	HQE vrijednosti	eksperiment
$\tau(D^+)/\tau(D_0)$	$1.79 \pm 0.92$	$2.54 \pm 0.02$
$\bar{\tau}(D_s^+)/\tau(D_0)$	$0.97 \pm 0.21$	$1.30 \pm 0.01$

Tablica 6.3: Vrijednosti omjera vremena života šarmantnih mezona izračunate u formalizmu HQE i njihove eksperimentalne vrijednosti.

### 6.3 Korekcije višeg reda QCD-a

Ovdje smo radili samo račun u vodećem redu razvoja po  $\alpha_s$  (samo prvi član u izrazu 3.3). Korekcije vodećem redu su velike i nikako nisu zanemarive. U [19] napravljen je račun i za više redove razvoja. Tamo je za  $\Gamma_3$  napravljen račun do NLO člana, za  $\Gamma_5$  do LO, jer NLO korekcije nisu još dostupne za neleptonske raspade i isto za  $\Gamma_6$ , dvokvarkovski doprinos dimenziji 6, za  $\tilde{\Gamma}_6$ , četverokvarkovski doprinos dimenziji 6, je napravljen račun do NLO člana, dok je za  $\tilde{\Gamma}_7$  do LO. Da bi pokazali koliko značajne mogu biti NLO korekcije, promotrimo formulu (2.17) iz [19], gdje su s pol-masom  $m_c^{\text{pol}} = 1.48 \text{ GeV}$  dobili:

$$\Gamma_3 = \Gamma_3^{\text{LO}} \left[ 1 + \left( \underbrace{1.84}_{\text{diag.}} - \underbrace{0.74}_{\text{WC}} - \underbrace{0.67}_{\text{SL}} \right) \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right) \right] = \Gamma_3^{\text{LO}} \left[ 1 + 0.43 \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right) \right]. \quad (6.34)$$

U tom izrazu posebno su istaknuti NLO doprinosi neleptonskim raspadima, označeni s NL, te NLO doprinosi semileptonskim raspadima, označeni sa SL. Kod doprinosa NLO korekcija neleptonskim raspadima je posebno istaknut doprinos NLO korekcija dijagramu vodećeg člana sa slike 5.3, označen s diag., i posebno doprinos od QCD korekcija Wilsonovih koeficijenata, označeno s WC. NLO korekcija vodećeg člana, kada se koristi pol-masa, povećava širinu raspada vodećeg člana za oko 5%. Utjecaj NLO korekcija ovisi o definiciji mase, te mogu biti vrlo velike. Npr. u kinetičkoj shemi, tj. za kinetičku masu  $m_c^{\text{kin}}(0.5 \text{ GeV}) = 1.363 \text{ GeV}$ , u [19] je dobiveno da je NLO korekcija od vodećeg člana iznosi skoro 50% iznosa vodećeg člana.

U [19] su također dobili da kromomagnetski koeficijent  $c_G$  mijenja predznak (na određenim vrijednostima renormalizacijske skale  $\mu$ ) kada se računaju NLO korekcije (tj. NLO korekcije Wilsonovih koeficijenata, jer potpune NLO korekcije koeficijenta  $c_G$  još nisu dostupne). Za četverokvarkovske doprinose dimenzija 6 dobili su da NLO

korekcije mogu biti skoro jednake kao i LO član, a u  $\overline{MS}$  shemi i veće od LO doprinosa.

U tablici 6.4 su navedeni rezultati iz [19] za ukupnu širinu raspada u shemi kinetičke mase. U tablici su i prikazani rezultati dobiveni iz ovog rada u LO-QCD-u i eksperimentalne vrijednosti širina raspada.

	račun u LO-QCD, u ovog rada	račun s višim redovima, iz [19]	eksperiment (iz PDG [4])
$\Gamma(D^0)$ [ps <sup>-1</sup> ]	$1.66 \pm 0.23$	$1.59 \pm 0.36^{+0.45+0.01}_{-0.36-0.01}$	$2.44 \pm 0.01$
$\Gamma(D^+)$ [ps <sup>-1</sup> ]	$0.90 \pm 0.43$	$-0.15 \pm 0.76^{+0.58+0.25}_{-0.27-0.10}$	$0.96 \pm 0.01$
$\overline{\Gamma}(D_s^+)$ [ps <sup>-1</sup> ]	$1.70 \pm 0.27$	$1.57 \pm 0.43^{+0.51+0.02}_{-0.40-0.01}$	$1.88 \pm 0.02$
$\tau(D^+)/\tau(D_0)$	$1.79 \pm 0.92$	$2.80 \pm 0.85^{+0.01+0.11}_{-0.14-0.26}$	$2.54 \pm 0.02$
$\overline{\tau}(D_s^+)/\tau(D_0)$	$0.97 \pm 0.21$	$1.01 \pm 0.15^{+0.02+0.01}_{-0.03-0.01}$	$1.30 \pm 0.01$

Tablica 6.4: Vrijednosti širina raspada i omjera vremena života šarmantnih mezona. U prvom stupcu je račun napravljen samo u vodećem redu razvoja po  $\alpha_s$  (LO-QCD). U drugom stupcu su vrijednosti preuzete iz [19], gdje je u račun uključen NLO-QCD (u članovima gdje su oni poznati). Zadnji stupac prikazuje eksperimentalne vrijednosti istoga.

Zbog svega navedenog i iz tablice 6.4, se može zaključiti da računanje u LO-QCD-u nije nikako dovoljno. Uz dostupne korekcije, u [19] su dobili da se izračunata širina raspada za  $D_s^+$  mezon i izračunati omjer  $\tau(D^+)/\tau(D_0)$  slaže s eksperimentalnom vrijednosti. Za vrijednosti širine raspada od  $D^+$  i  $D^0$  mezona su dobili da su manje od eksperimentalnih vrijednosti, no greške su velike i pokrivaju eksperimentalne rezultate. Za širinu raspada  $D^+$  mezona, koja je zbog kraćenja vodećeg člana, člana dimenzije 6 i dimenzije 7 jako osjetljiva na QCD korekcije višeg reda, su dobili negativnu vrijednost. Međutim, greška, koja dolazi od velike negativne vrijednosti Paulijeve interferencije, je jako velika. Za omjer  $\tau(D_s^+)/\tau(D_0)$  su dobili vrijednost koja je bliže jedinici nego eksperimentalna, a razlog tome bi mogao biti nedovoljno precizno poznavanje neperturbativnih parametara  $\mu_G^2$ ,  $\mu_\pi^2$  i  $\rho_D^3$ . Stoga su potrebne i daljnje QCD korekcije, posebno za vodeći član i član Paulijeve interferencije. Iz izraza (6.34) se može vidjeti da u NLO-QCD korekcijama dolazi do kraćenja, do kojeg

ne mora nužno doći u NNLO-QCD, stoga bi te korekcije mogle biti važne za ukupnu širinu raspada. Koeficijent  $c_{\rho_D}$  uz Darwinov operator je veliki (vidi (6.29), (6.30) i (6.31)), stoga bi i NLO-QCD korekcija koeficijenta  $c_{\rho_D}$  za neleptonski slučaj mogla imati značajan utjecaj na širinu raspada. Također, NLO-QCD korekcije koeficijenta  $c_G$  bi mogle imati važne, pošto je i sam predznak tih korekcija upitan. Daljnje potencijalno poboljšanje teorijskih rezultata bi bilo i preciznije poznavanje neperturbativnih parametara  $\mu_G^2$ ,  $\mu_\pi^2$  i  $\rho_D^3$  (posebno za  $\tau(D_s^+)/\tau(D_0)$ ). Poznavanje daljnjih članova u razvoju  $\Gamma_7^{(0)}$ ,  $\Gamma_8^{(0)}$  i  $\tilde{\Gamma}_8^{(0)}$  bi dalo dodatne informacije o konvergenciji HQE u  $c$  sektoru. Detaljna diskusiju o mogućem unaprjeđenju dana je u [19].

## 7 Zaključak

U ovom diplomskom radu proučavani su slabi raspadi i inkluzivne širine raspada teških hadrona, te vremena života  $D$  mezona. Za račun inkluzivnih širina raspada koristio se formalizam poznat kao razvoj po masi teške čestice (HQE).

Prvo je opisan lagranžijana QCD-a i svojstva jake sile. Promatrani su kvarkovski modeli dobiveni pretpostavkom okusne simetrije. Kvarkovski modeli, iako jednostavni i zanemaruju utjecaj gluona u hadronu, mogu opisati neka osnovna svojstva  $l = 0$  hadrona. Opisan je i lagranžijan slabih međudjelovanja. Diskutirane su eksperimentalne vrijednosti vremena života teških mezona i opisan je način mjerenja vremena života.

Za opis slabih raspada teških hadrona koristi se efektivna teorija slabih raspada koja se dobije razvojem operatorskog umnoška. Opisani je efektivni hamiltonijan za slabi raspad  $c$  kvarka s dodatnim operatorom koji uključuje QCD korekcije. Opisana je simetrija teškog kvarka iz koje prirodno slijedi efektivna teorija teškog kvarka, te je razmatran lagranžijan teorije. Prikazan je način na koji se pomoću HQET dobiju matrični elementi u razvoju inkluzivne širine raspada. Formula za razvoj širine raspada po masi teškog kvarka dobivena je preko optičkog teorema i razvoja operatorskog produkta. Proučeni su operatori u tom razvoju i matrični elementi tih operatora.

Opisani teorijski formalizam primijenjen je na šarmantne mezone  $D^0$ ,  $D^+$  i  $D_s^+$ . Predstavljani su rezultati vremena života i širina raspada šarmantnih mezona u vodećem redu razvoja po QCD konstanti vezanja  $\alpha_s$ . Proučeni su doprinosi pojedinačnih članova u razvoju širine raspada. Vrijednosti članovi operatora dimenzije 6 su izračunati na dva načina. Tako da su im matrični elementi određeni pomoću aproksimacije zasićenja vakuumom i pomoću HQET pravila sume. Izračunati su i omjeri vremena života šarmantnih mezona.

Prikazani su zadnji objavljeni rezultati inkluzivnih širina raspada i omjera vremena života šarmantnih mezona izračunatih u HQE formalizmu, koji uključuju i NLO-QCD korekcije, te je napravljena usporedba tih rezultata s izračunatim rezultatima u ovom radu u LO-QCD. Za širinu raspada  $D_s^+$  mezona i omjer  $\tau(D^+)/\tau(D_0)$  ti rezultati se slažu s eksperimentalnim rezultatima. Za širine raspada  $D^0$  i  $D^+$  mezona izračunate širine raspada su manje od eksperimentalnih, dok je za omjer  $\tau(D_s^+)/\tau(D_0)$  dobivena vrijednost koja je bliže jedinici nego eksperimentalna vrijed-

nost. Međutim, unutar velike greške računa, slaganje s eksperimentom je zadovoljavajuće.

Postoje mnogo načina unaprjeđenja HQE predviđanja. Poznavanje NNLO-QCD korekcija vodećeg člana i daljnje korekcije Paulijeve interferencije bi moglo biti važno u izračunima ukupne širine raspada. Korekcije koeficijenata  $c_G$  i  $c_{\rho_D}$  bi potencijalno isto mogle imati značajan utjecaj. Poznavanje daljnjih članova  $\Gamma_7^{(0)}$ ,  $\Gamma_8^{(0)}$  i  $\tilde{\Gamma}_8^{(0)}$  u razvoju po  $1/m_c$  bi dalo dodatne informacije o konvergenciji HQE u  $c$  sektoru.

# Dodaci

## Dodatak A Račun širine raspada vodećeg člana

Vodeći član u razvoju (6.7) opisuje raspad slobodnog kvarka, te daje jednaki doprinos za sve hadrone istog teškog kvarka. Dijagram inkluzivnog raspada vodećeg člana prikazan je na slici 5.3.

Ovdje ćemo izvesti račun za neleptonski slabi raspad CKM dominantnog moda raspada  $c$  kvarka, počevši od efektivnog hamiltonijan

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cq_1} V_{q_2q_3}^* [C_1(\mu)O_1 \pm C_2(\mu)O_2] + h.c. , \quad (\text{A.1})$$

gdje su

$$\begin{aligned} O_1 &= [\bar{s}^i \gamma_\mu P_L c_i][\bar{u}^j \gamma^\mu P_L d_j] , \\ O_2 &= [\bar{s}^i \gamma_\mu P_L c_j][\bar{u}^j \gamma^\mu P_L d_i] . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Prelazom na dijagonalnu bazu operatora,  $O_\pm = O_1 \pm O_2$  i  $C_\pm = C_1 \pm C_2$ , dobije se

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{4G_F}{2\sqrt{2}} V_{cq_1} V_{q_2q_3}^* [C_+(\mu)O_+ + C_-(\mu)O_-] + h.c. . \quad (\text{A.3})$$

Širina raspada se dobiva iz optičkog teorema:

$$\Gamma(D) = \frac{1}{2M_D} \text{Im} \langle D | \mathcal{T} | D \rangle , \quad (\text{A.4})$$

gdje je

$$\mathcal{T} = i \int d^4x T \{ \mathcal{H}_{\text{eff}}(x), \mathcal{H}_{\text{eff}}(0) \} . \quad (\text{A.5})$$

Raspisom hamiltonijana i zadržavanjem na Cabibbo vodećim doprinosima, tj. raspadu  $c \rightarrow s\bar{u}d$ , dobije se sljedeći izraz za širinu raspada

$$\Gamma(D) = \frac{2G_F^2}{M_D} |V_{cs}|^2 |V_{ud}|^2 \text{Im} \langle D | i \int d^4x T \left\{ [C_+O_+ + C_-O_-]_{(x)}^\dagger, [C_+O_+ + C_-O_-]_{(0)} \right\} | D \rangle . \quad (\text{A.6})$$

Izraz pod vremenskim uređenjem se može dalje ispisati, te se dobije izraz

$$\Gamma(D) = \frac{2G_F^2}{M_D} |V_{cs}|^2 |V_{ud}|^2 \text{Im} [(C_- + C_+)^2 A_1 + (C_- - C_+)^2 A_2 + (C_-^2 - C_+^2) B_1 + (C_-^2 - C_+^2) B_2], \quad (\text{A.7})$$

gdje su

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{i}{16} \int d^4x \langle D | T \{ (\bar{d}_x \Gamma_\mu u_x) (\bar{c}_x \Gamma^\mu s) \otimes (\bar{s}_0 \Gamma_\nu c_0) (\bar{u}_0 \Gamma^\nu d_0) \} | D \rangle, \\ A_2 &= \frac{i}{16} \int d^4x \langle D | T \{ (\bar{c}_x \Gamma_\mu u_x) (\bar{d}_x \Gamma^\mu s) \otimes (\bar{s}_0 \Gamma_\nu d_0) (\bar{u}_0 \Gamma^\nu c_0) \} | D \rangle, \\ B_1 &= \frac{i}{16} \int d^4x \langle D | T \{ (\bar{d}_x \Gamma_\mu u_x) (\bar{c}_x \Gamma^\mu s) \otimes (\bar{s}_0 \Gamma_\nu d_0) (\bar{u}_0 \Gamma^\nu c_0) \} | D \rangle, \\ B_2 &= \frac{i}{16} \int d^4x \langle D | T \{ (\bar{c}_x \Gamma_\mu u_x) (\bar{d}_x \Gamma^\mu s) \otimes (\bar{s}_0 \Gamma_\nu c_0) (\bar{u}_0 \Gamma^\nu d_0) \} | D \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

uz  $\Gamma_\mu \equiv \gamma_\mu (1 - \gamma_5)$ , te su uvedene pokraze za kvarkovska polja  $q_x \equiv q(x)$ .

Iz slike 5.3 se može vidjeti da se polja svih lakih kvarkova moraju kontrahirati. Promotrimo prvo matrični element  $A_1$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle D^+ | a_1 | D^+ \rangle, \\ a_1 &\sim \bar{d}_\alpha^i(x) (\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} u_\beta^i(x) \bar{c}_\gamma^j(x) (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} s_\delta^j(x) \otimes \bar{u}_\epsilon^k(0) (\Gamma_\nu)^{\epsilon\theta} d_\theta^k(0) \bar{s}_\xi^l(0) (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l(0), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

gdje su grčkim slovima označeni Diracovi indeksi, a s latinskim slovima indeksi boje pojedinih kvarkovskih polja. Koriste se sljedeći izrazi za kontrakciju polja u fermionske propagatore:

$$\begin{aligned} T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \} &= i [S_F(x, 0)]_{\alpha\beta+} : \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) : \\ T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0) \} &= -T \{ \psi_\beta(0) \bar{\psi}_\alpha(x) \} = -i [S_F(x, 0)]_{\beta\alpha-} : \psi_\beta(0) \bar{\psi}_\alpha(x) : . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Normalno uređenje daje nulu u matričnom elementu, stoga se drugi član u prethodnim izrazima može odmah odbaciti u računima. Za kvarkovsko polje  $c$  kvarka se uzima

$$\bar{c}(x) = c(0) e^{ipx}, \quad (\text{A.11})$$

gdje je  $p^\mu$  4-impuls  $c$  kvarka. Kvarkovski propagator u koordinatnom prostoru za



slobodni kvark mase  $m$  je dan izrazom

$$S_0^q(x) = -\frac{i}{4\pi^2} \frac{m^2 K_1(m\sqrt{-x^2})}{\sqrt{-x^2}} - \frac{\not{x}}{4\pi^2} \frac{m^2 K_2(m\sqrt{-x^2})}{x^2}, \quad (\text{A.12})$$

gdje su  $K_{1,2}$  modificirane Besselove funkcije drugog reda. Za propagator  $u$  i  $d$  kvarka se uzima limes kada  $m \rightarrow 0$ . Uz izraze

$$\lim_{m \rightarrow 0} m^2 K_1(m\sqrt{-x^2}) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} m^2 K_2(m\sqrt{-x^2}) = -\frac{2}{x^2}, \quad (\text{A.14})$$

bezmaseni kvarkovski propagator za  $u$  i  $d$  polja ima sljedeći oblik

$$[S_F^q(x, 0)]_{\alpha\beta}^{ij} = \frac{1}{2\pi^2} \delta_{ij} \frac{\not{x}_{\alpha\beta}}{x^4}. \quad (\text{A.15})$$

Kada se kontrahiraju polja  $u$ ,  $d$  i  $s$  kvarkova u jednadžbi za  $a_1$  dobije se

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{i}{16} \int d^4x e^{ipx} (-i) [S_F^d(0, x)]_{\theta\alpha}^{ik} (\Gamma_\nu)^{\alpha\beta} i [S_F^u(x, 0)]_{\beta\epsilon}^{ik} (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} i [S_F^s(x, 0)]_{\delta\xi}^{jl} (\Gamma_\nu)_{\epsilon\theta} (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} \bar{c}_\gamma^j c_\eta^l \\ &= \frac{1}{16} \int d^4x e^{ipx} \delta^{ik} \frac{\not{x}_{\theta\alpha}}{2\pi^2 x^4} (\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} \delta^{ik} \frac{\not{x}_{\beta\epsilon}}{2\pi^2 x^4} (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} \left[ -\frac{i}{4\pi^2} \frac{m_s^2 K_1(m_s \sqrt{-x^2})}{\sqrt{-x^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\not{x}}{4\pi^2} \frac{m_s^2 K_2(m_s \sqrt{-x^2})}{x^2} \right] (\Gamma_\nu)_{\epsilon\theta} (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} \bar{c}_\gamma^j c_\eta^l \\ &= \frac{N_c}{64\pi^4} \int d^4x \frac{e^{ipx}}{x^8} \text{Tr}[\Gamma_\mu(x \cdot \gamma) \Gamma_\nu(x \cdot \gamma)] \left\{ \bar{c} \Gamma^\mu \left[ -\frac{i}{4\pi^2} \frac{m_s^2 K_1(m_s \sqrt{-x^2})}{\sqrt{-x^2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\not{x}}{4\pi^2} \frac{m_s^2 K_2(m_s \sqrt{-x^2})}{x^2} \right] \Gamma^\nu c \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

U drugoj jednakosti se iskoristila jednadžba (A.11) za polje  $\bar{c}$ , jednadžba (A.15) za propagator  $u$  i  $d$  kvarka, jednadžba (A.12) za propagator  $s$  kvarka, te da je  $\delta^{ik} \delta^{ik} = N_c = 3$ . Prvi član u uglatoj zagradi u izrazu (A.16) iščezava zbog ortogonalnosti projektora, tj.  $\Gamma^\mu \Gamma^\nu = \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) = \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma_5) (1 - \gamma_5) = \gamma^\mu \gamma^\nu P_R P_L = 0$ . Trag u istom izrazu je jednak

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (1 - \gamma_5) (x \cdot \gamma) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) (x \cdot \gamma)] &= 8x^\rho x^\sigma (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - i\epsilon_{\mu\rho\nu\sigma}) \\ &= 8(2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Izraz (A.16) sada poprima sljedeći oblik

$$a_1 = \frac{N_c}{64\pi^4} \int d^4x \frac{e^{ipx}}{x^8} 8(2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \left( \frac{-\not{x} m_s^2 K_2(m_s \sqrt{-x^2})}{4\pi^2 x^2} \right) \gamma^\nu (1 - \gamma_5). \quad (\text{A.18})$$

U prethodnom izrazu se može pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu})(\Gamma^\mu \not{x} \Gamma^\nu) &= 2(1 + \gamma_5) \not{x} \not{x} \not{x} (1 - \gamma_5) - x^2 \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \not{x} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \\ &= 2x^2 (1 + \gamma_5) \not{x} (1 - \gamma_5) - x^2 (1 + \gamma_5) (-2\not{x}) (1 - \gamma_5) \\ &= 4x^2 (1 + \gamma_5) \not{x} (1 - \gamma_5) = 8x^2 \not{x} (1 - \gamma_5). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

U drugoj jednakosti smo iskoristili izraze  $\not{x} \not{x} = x^2$  i  $\gamma_\nu \not{x} \gamma^\nu = -2\not{x}$ . Time izraz za  $a_1$  poprima sljedeći oblik

$$a_1 = \frac{N_c}{4\pi^6} \int d^4x \frac{e^{ipx}}{x^8} \bar{c} \not{x} (1 - \gamma_5) m_s^2 K_2(m_s \sqrt{-x^2}) c. \quad (\text{A.20})$$

Računom na isti način se može pokazati da vrijedi  $A_1 = A_2$  i  $B_1 = B_2 = \frac{1}{N_C} A_1$ .

U računu širine raspada, prema formuli (A.7), treba uzeti imaginarni dio od  $a_1$ . Stoga se može iskoristiti relacija (iz [26])

$$\text{Im} \left\{ \int \frac{d^4x}{4\pi^4} e^{-ip \cdot x} \frac{m_c^2 K_2(m_c \sqrt{-x^2})}{x^8} \not{x} \right\} = \frac{\pi}{3072} p^4 \not{p} (1 - 8\rho - 12\rho^2 \log \rho + 8\rho^3 - \rho^4), \quad (\text{A.21})$$

gdje je  $\rho = m_c^2/p^2$ . Uvrstivši da je  $p^2 = m_c^2$ , te koristeći Diracovu jednadžbu za  $c$  kvark,  $(\not{p} - m_c)c = 0$ , matrični element koji se pojavljuje u  $A_1$  se može izraziti na sljedeći način

$$\begin{aligned} \langle D | \bar{c} \not{p} (1 - \gamma_5) c | D \rangle &= \langle D | \bar{c} (1 + \gamma_5) \not{p} c | D \rangle \\ &= m_c \langle D | \bar{c} c | D \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

i za širinu raspada vodećeg člana tada slijedi iz (A.7), zbrajanjem svih članova,

$$\begin{aligned} \Gamma_3(D) &= \frac{G_F^2 m_c^5}{768\pi^3 M_D} |V_{cs} V_{ud}^*|^2 (1 - 8\rho - 12\rho^2 \log \rho + 8\rho^3 - \rho^4) \left[ N_C (C_+ - C_-)^2 \right. \\ &\quad \left. + N_C (C_+ - C_-)^2 + (C_+^2 - C_-^2) + (C_+^2 - C_-^2) \right] \frac{\langle D | \bar{c} c | D \rangle}{2M_D} \\ &= \frac{G_F^2 m_c^5}{192\pi^3} |V_{cs} V_{ud}^*|^2 (2C_+^2 + C_-^2) (1 - 8\rho - 12\rho^2 \log \rho + 8\rho^3 - \rho^4) \frac{\langle D | \bar{c} c | D \rangle}{2M_D} \\ &= \frac{G_F^2 m_c^5}{192\pi^3} |V_{cs} V_{ud}^*|^2 \mathcal{N}_a (1 - 8\rho - 12\rho^2 \log \rho + 8\rho^3 - \rho^4) \frac{\langle D | \bar{c} c | D \rangle}{2M_D}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

gdje se ponovo iskoristi  $p^2 = m_c^2$  i u zadnjoj jednakosti smo Wilsonove koeficijente prebacili u početnu bazu, uz  $\mathcal{N}_a = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2$ . Širina raspada vodećeg člana kada su mase kvarkova u konačnom stanju nula se dobije kada se uzme limes  $\rho \rightarrow 0^+$ .

## Dodatak B Širine raspada četverokvarkovskih članova dimenzije 6

Četverokvarkovski operatori dimenzije 6 opisuju utjecaj lakog kvarka iz valentne strukture teškog hadrona na raspad hadrona. Oni izravno ovise o valentnoj strukturi teškog hadrona, zato su ovi operatori presudni za objašnjenje hijerarhije vremena života teških hadrona. Sa slika 5.5, 5.6 i 5.7 se vidi da dijagrami raspada za četverokvarkovske operatore sadrže samo jednu petlju, zato je njihov doprinos povećan faktorom  $16\pi^2$  u odnosu na operatore čiji dijagrami raspada sadrže dvije petlje. Ovdje je proveden račun operatora dimenzije 6 koji dolazi od četverokvarkovskih operatora kada se uzme da su mase kvarkova u konačnom stanju nula.

### B.1 Paulijeva interferencija

Doprinosi širini raspada dimenzije 6 koji dolaze od četverokvarkovskih operatora dobivaju se iz formule (A.7) za širinu raspada, kada se u matričnim elementima definiranim u (A.8) kontrahiraju dva kvarkovska polja, a druga dva ostaju nekontrahirana.

Prvo ćemo izračunati doprinos Paulijeve interferencije, koji je prikazan na slici 5.6. Račun je napravljen za  $D^+$  mezon, a njegov kvarkovski sastav je  $(c\bar{d})$ . Dijagram Paulijeve interferencije za Cabibbo vodeći doprinos  $D^+$  mezona dan je na slici 5.6, kada je  $q_1 = s$  i  $\bar{q}_2 = \bar{d}$ . Širina raspada je dana izrazom (A.7). Promotrimo prvo matrični element  $A_1$ :

$$A_1 = \langle D^+ | a_1 | D^+ \rangle , \tag{B.1}$$

$$a_1 \sim \bar{d}_\alpha^i(x)(\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} u_\beta^j(x)\bar{c}_\gamma^k(x)(\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} s_\delta^l(x) \otimes \bar{u}_\epsilon^k(0)(\Gamma_\nu)^{\epsilon\theta} d_\theta^k(0)\bar{s}_\xi^l(0)(\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l(0) ,$$

gdje su grčkim slovima označeni Diracovi indeksi, a latinskim slovima indeksi boje pojedinih kvarkovskih polja. Za polje  $\bar{c}$  se uzima izraz (A.11). Za  $d$  kvark se uzima  $\bar{d}(x) \simeq \bar{d}(0)$ . Kada se kontrahiraju polja  $s$  i  $u$  kvarka u propagatore pomoću (A.10), te

se ti izrazi ubace u jednadžbu za  $a_1$ , dobije se (koriste se pokrate  $\bar{d} \equiv \bar{d}(0)$  i  $\bar{c} \equiv \bar{c}(0)$ )

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{i}{16} \int d^4x e^{ipx} \bar{d}_\alpha^i (\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} i [S_F^u(x, 0)]_{\beta\epsilon}^{ik} (\Gamma_\nu)_{\epsilon\theta} d_\theta^k \bar{c}_\gamma^j (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} i [S_F^s(x, 0)]_{\delta\xi}^{jl} (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l \\
&= -\frac{i}{16} \frac{1}{4\pi^4} \int d^4x e^{ipx} \bar{d}_\alpha^i (\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} \frac{1}{x^4} \not{x}_{\beta\epsilon} \delta^{ik} (\Gamma_\nu)_{\epsilon\theta} d_\theta^k \bar{c}_\gamma^j (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} \frac{1}{x^4} \not{x}_{\delta\xi} \delta^{jl} (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l \quad (\text{B.2}) \\
&= \frac{-i}{64\pi^4} \int d^4x \frac{1}{x^8} e^{ipx} (\bar{c} \Gamma^\mu (x \cdot \gamma) \Gamma^\nu c) \otimes (\bar{d} \Gamma_\mu (x \cdot \gamma) \Gamma_\nu d) .
\end{aligned}$$

U drugoj jednakosti se iskoristile relacije (A.15) za propagatore, a u trećoj su iskoristene Kronecker delta funkcije i napravljena je kontrakcija po Diracovim indeksima. U sljedećem koraku se koristi  $\Gamma^\mu (x \cdot \gamma) \Gamma^\nu = 2\gamma^\mu (x \cdot \gamma) \gamma^\nu (1 - \gamma_5)$ , te se dvostrukim deriviranjem izraza

$$I_n = \int d^4x e^{ipx} \frac{1}{(x^2)^n} = \frac{i(-1)^n 2^{4-2n} \pi^2}{\Gamma(n-1)\Gamma(n)} (p^2)^{n-2} \ln(-p^2), \quad (\text{B.3})$$

po 4-impulsu dobije integral koji se javlja u izrazu za  $a_1$ ,

$$\int d^4x \frac{e^{ipx}}{x^8} x_\rho x_\sigma = -i \frac{\pi^2}{3 \cdot 2^4} (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) \ln(-p^2). \quad (\text{B.4})$$

Time se dobije

$$a_1 = -\frac{\ln(-p^2)}{64\pi^2 \cdot 12} (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) [(\bar{c} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu (1 - \gamma_5) c) \otimes (\bar{d} \gamma_\mu \gamma^\omega \gamma_\nu (1 - \gamma_5) d)] . \quad (\text{B.5})$$

Korištenjem izraza

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = \gamma^\mu g^{\rho\nu} - \gamma^\rho g^{\mu\nu} + \gamma^\nu g^{\mu\rho} + i\epsilon^{\eta\mu\rho\nu} \gamma_\eta \gamma^5, \quad (\text{B.6})$$

izrazi u zagradama u jednadžbi (B.5) se mogu pojednostaviti,

$$(2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) [(\bar{c} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu (1 - \gamma_5) c) \otimes (\bar{d} \gamma_\mu \gamma^\omega \gamma_\nu (1 - \gamma_5) d)] = 24p^2 \Gamma^\mu \otimes \Gamma_\mu . \quad (\text{B.7})$$

Ubacivanjem prethodne jednadžbe u (B.5) dobije se

$$a_1 = -\frac{\ln(-p^2)}{32\pi^2} p^2 (\bar{c} \Gamma^\mu c) \otimes (\bar{d} \Gamma_\mu d) . \quad (\text{B.8})$$

Time se za matrični element  $A_1$  dobije

$$A_1 = -\frac{\ln(-p^2)}{32\pi^2} p^2 \langle D^+ | (\bar{c}\Gamma^\mu c) \otimes (\bar{d}\Gamma_\mu d) | D^+ \rangle . \quad (\text{B.9})$$

Istim postupkom se računa matrični element  $A_2$ ,

$$A_2 = \langle D^+ | a_2 | D^+ \rangle , \quad (\text{B.10})$$

$$a_2 \sim \bar{c}_\alpha^i(x)(\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} u_\beta^i(x) \bar{d}_\gamma^j(x)(\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} s_\delta^j(x) \otimes \bar{s}_\epsilon^k(0)(\Gamma_\nu)^{\epsilon\theta} d_\theta^k(0) \bar{u}_\xi^l(0)(\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l(0) .$$

Kontrakcijom polja i korištenjem izraza (A.15) za propagatore dobije se da je izraz za matrični element  $A_2$  jednak izrazu za matrični element  $A_1$ .

Sljedeći na redu je računa za  $B_1$ ,

$$B_1 = \langle D^+ | b_1 | D^+ \rangle , \quad (\text{B.11})$$

$$b_1 \sim \bar{d}_\alpha^i(x)(\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} u_\beta^i(x) \bar{c}_\gamma^j(x)(\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} s_\delta^j(x) \otimes \bar{s}_\epsilon^k(0)(\Gamma_\nu)^{\epsilon\theta} d_\theta^k(0) \bar{u}_\xi^l(0)(\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l(0) .$$

Kontrakcijom polja  $s$  i  $u$  kvarka, te korištenjem izraza (A.15), dobije se

$$b_1 = -\frac{i}{16} \int d^4x \frac{e^{ipx}}{4\pi^4 x^8} (\bar{d}\Gamma_\mu(x \cdot \gamma)\Gamma^\nu c) \otimes (\bar{c}\Gamma^\mu(x \cdot \gamma)\Gamma_\nu d)$$

$$= -\frac{\ln(-p^2)}{64\pi^2 \cdot 12} (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) (\bar{d}\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\nu (1 - \gamma_5) c) \otimes (\bar{c}\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu (1 - \gamma_5) d) \quad (\text{B.12})$$

$$= -\frac{\ln(-p^2)}{32\pi^2} p^2 (\bar{d}\Gamma_\mu c) \otimes (\bar{c}\Gamma^\mu d) .$$

U drugoj jednakosti se iskoristio izraz (B.4) za integraciju, a u trećoj se iskoristio izraz (B.7). Za matrični element  $B_1$  se tada dobije

$$B_1 = -\frac{\ln(-p^2)}{32\pi^2} p^2 \langle D^+ | (\bar{d}\Gamma_\mu c) \otimes (\bar{c}\Gamma^\mu d) | D^+ \rangle . \quad (\text{B.13})$$

Zadnji matrični element  $B_2$ ,

$$B_2 = \langle D^+ | b_2 | D^+ \rangle , \quad (\text{B.14})$$

$$b_2 \sim \bar{c}_\alpha^i(x)(\Gamma_\mu)^{\alpha\beta} u_\beta^i(x) \bar{d}_\gamma^j(x)(\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} s_\delta^j(x) \otimes \bar{s}_\epsilon^k(0)(\Gamma_\nu)^{\epsilon\theta} c_\theta^k(0) \bar{u}_\xi^l(0)(\Gamma^\nu)_{\xi\eta} d_\eta^l(0) ,$$

se računa na isti način kao i prethodni, te se dobije da je  $B_2 = B_1$ . Sad se pomoću izraza za matrične elemente može izraziti širina raspada za Paulijevu interferenciju.

No prije se iskoristi

$$\text{Im}(\ln(-p^2)) = \text{Im}(\ln(-p^2 - i\epsilon)) = -\pi, \quad (\text{B.15})$$

te kada se iskoristi jednakost  $p^2 = m_c^2$  u izrazima za matricele elemente, dobije se širinu raspada Paulijeve interferencije za Cabibbo vodeći raspad  $D^+$  mezona:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Pauli}}(D^+) = \frac{G_F^2 m_c^2 |V_{cs}|^2 |V_{ud}|^2 [(C_- + C_+)^2 \frac{\langle D^+ | \bar{c} \Gamma_\mu c \otimes \bar{d} \Gamma^\mu d | D^+ \rangle}{2M_{D^+}} + \\ + (C_-^2 - C_+^2) \frac{\langle D^+ | \bar{d} \Gamma_\mu c \otimes \bar{c} \Gamma^\mu d | D^+ \rangle}{2M_{D^+}}] . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Sada se mogu Wilsonovi koeficijenti vratiti u početnu bazu,  $C_+, C_- \rightarrow C_1, C_2$  i matricele elementi se mogu prebaciti u Neubertovu bazu, (5.18), pomoću relacije  $(T^a)_{ij}(T^b)_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{2N_c}\delta_{ij}\delta_{kl}$ . Kada se to napravi dobije se sljedeći izraz za širinu raspada dijagrama Paulijeve interferencije, za Cabibbo vodeći raspad  $D^+$  mezona

$$\Gamma_{\text{Pauli}}(D^+) = \frac{G_F^2 m_c^2 |V_{cs}|^2 |V_{ud}|^2 [C_{\text{PI}}^S \frac{O_1^q}{2M_{D^+}} + C_{\text{PI}}^O \frac{T_1^q}{2M_{D^+}}], \quad (\text{B.17})$$

gdje su se iskoristile jednakosti  $C_{\text{PI}}^S = C_1^2 + C_2^2 + 6C_1C_2$  i  $C_{\text{PI}}^O = 6(C_1^2 + C_2^2)$ . Na isti način se računa širinu raspada dijagrama Paulijeve interferencije za  $D_s^+$  mezon, gdje je taj doprinos Cabibbo potisnut, kao i za ostale Cabibbo modove raspada  $D^+$  mezona.

## B.2 Izmjena $W$ bozona

Račun doprinosa člana izmjene  $W$  bozona radi se slično kao i za Paulijevu interferenciju. Dijagram izmjene  $W$  bozona za Cabibbo vodeći doprinos  $D^0$  mezona prikazan je na slici 5.5 kada je  $q_1 = s$  i  $q_2 = d$ .

Račun širine raspada krećemo od izrazom (A.7). Prvo računamo matricele element  $A_1$ , dan izrazom (B.1). Za kontrakciju polja u fermionske propagatore koriste se izrazi (A.10). Kontrahiraju se polja  $d$  kvarka i  $s$  kvarka (kao na slici 5.5) u izrazu za  $a_1$  i iskoristi izraz (A.11) za kvarkovsko polje  $c$  kvarka. Za  $u$  kvark se uzima

$u(x) \simeq u(0)$ . Dobije se sljedeći izraz za  $a_1$  (uz pokrate  $\bar{c} \equiv \bar{c}(0)$  i  $u \equiv u(0)$ )

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{i}{16} \int d^4x e^{ipx} (-i) [S_F^d(x, 0)]_{\theta\alpha}^{ik} (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta^i \bar{c}_\gamma^j (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} i [S_F^s(x, 0)]_{\delta\xi}^{jl} \bar{u}_\epsilon^k (\Gamma_\nu)_{\epsilon\theta} (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l \\
&= -\frac{i}{16 \cdot 4\pi^4} \int d^4x e^{ipx} \frac{1}{x^4} (-\not{x}_{\theta\alpha}) \delta^{ik} (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta^i \bar{c}_\gamma^j (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} (\not{x})_{\delta\xi} \delta^{jl} \bar{u}_\epsilon^k (\Gamma_\mu)_{\xi\eta} c_\eta^l \\
&= \frac{i}{64\pi^4} \int d^4x \frac{1}{x^8} e^{ipx} (\bar{c} \Gamma^\mu (x \cdot \gamma) \Gamma^\nu c) \otimes (\bar{u} \Gamma_\mu (x \cdot \gamma) \Gamma_\nu u) .
\end{aligned} \tag{B.18}$$

U drugoj jednakosti se iskoristio izraz (A.15) za propagatore, a u trećoj se napravila kontrakcija Diracovih indeksa. U idućem koraku se iskoristi izraz (B.4) za računanje integrala i  $\Gamma^\mu (x \cdot \gamma) \Gamma^\nu = 2\gamma^\mu (x \cdot \gamma) \gamma^\nu (1 - \gamma_5)$ , te se dobije

$$a_1 = \frac{\ln(-p^2)}{64\pi^2 \cdot 12} (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) [(\bar{c} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu (1 - \gamma_5) c) \otimes (\bar{u} \gamma_\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u)] . \tag{B.19}$$

Korištenjem izraza (B.6), te množenjem i raspisom Diracovih matrica dobije se jednakost

$$(2p^\mu p_\nu + p^2 g_\nu^\mu) [(\bar{c} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu (1 - \gamma_5) c) \otimes (\bar{u} \gamma_\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u)] = 8p^\eta p_\rho \Gamma_\eta \otimes \Gamma^\rho + 4p^2 \Gamma^\mu \otimes \Gamma_\mu \tag{B.20}$$

Ubacivanjem prethodnog izraza u izraz za  $a_1$  dobije se

$$a_1 = \frac{\ln(-p^2)}{64\pi^2 \cdot 3} (p^2 g_\nu^\mu + 2p^\mu p_\nu) (\bar{c} \Gamma_\mu c) \otimes (\bar{u} \Gamma^\nu u) . \tag{B.21}$$

Matrični element  $A_1$  je tada

$$A_1 = \frac{\ln(-p^2)}{64\pi^2 \cdot 3} (p^2 g_\nu^\mu + 2p^\mu p_\nu) \langle D^0 | \bar{c} \Gamma_\mu c \otimes \bar{u} \Gamma^\nu u | D^0 \rangle . \tag{B.22}$$

Koeficijent  $A_2$  je dan izrazom (B.10). Nakon kontrakcije  $s$  i  $d$  polja u fermionske propagatore, te ubacivanjem izraza za polje  $c$  kvarka dobije se sljedeći izraz

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{i}{16} \int d^4x e^{ipx} \bar{c}_\alpha^i (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta^i (-i) [S_F(0, x)]_{\theta\gamma}^{jl} (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} i [S_F(x, 0)]_{\delta\epsilon}^{jl} (\Gamma_\nu)_{\epsilon\theta} \bar{u}_\xi^k (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^k \\
&= -\frac{i}{16} \int d^4x \frac{e^{ipx}}{4\pi^4 x^8} (\bar{c} \Gamma_\mu u) \delta^{jl} \delta^{jl} (\bar{u} \Gamma^\nu c) \text{Tr}[\not{x} \Gamma^\mu \not{x} \Gamma_\nu] \\
&= -\frac{1}{64\pi^2} \frac{\ln(-p^2)}{3 \cdot 2^4} 3(2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) (\bar{c} \Gamma_\mu u) (\bar{u} \Gamma^\nu c) \text{Tr}[\gamma^\rho \Gamma^\mu \gamma^\sigma \Gamma_\nu]
\end{aligned} \tag{B.23}$$

U trećoj jednakosti se iskoristio izraz (B.15) i da je  $\delta^{jl} \delta^{jl} = N_c = 3$ . Trag u (B.23) je

jednak

$$\text{Tr}[\gamma^\rho \Gamma^\mu \gamma^\sigma \Gamma_\nu] = 2\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu] - 2\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma_5], \quad (\text{B.24})$$

te vrijedi

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu] &= 4(g^{\rho\mu} g^\sigma_\nu - g^{\rho\sigma} g^\mu_\nu + g^\rho_\nu g^{\mu\sigma}), \\ \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma_5] &= 4i\epsilon^{\rho\mu\sigma}_\nu. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Tragovi se tada ubace u izraz za  $a_2$  i dobije se

$$a_2 = -\frac{1}{128\pi^2} \ln(-p^2) (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) [g^{\rho\mu} g^\sigma_\nu - g^{\rho\sigma} g^\mu_\nu + g^\rho_\nu g^{\mu\sigma} - i\epsilon^{\rho\mu\sigma}_\nu] (\bar{c}\Gamma_\mu u) \otimes (\bar{u}\Gamma^\nu c). \quad (\text{B.26})$$

Zagrade se mogu svesti na

$$\begin{aligned} (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) [g^{\rho\mu} g^\sigma_\nu - g^{\rho\sigma} g^\mu_\nu + g^\rho_\nu g^{\mu\sigma} - i\epsilon^{\rho\mu\sigma}_\nu] \Gamma_\mu \otimes \Gamma^\nu &= \\ = (-4p^2 g^\mu_\nu + 4p^\mu p_\nu) \Gamma_\mu \otimes \Gamma^\nu - 2ip_\rho p_\sigma \epsilon^{\rho\mu\sigma}_\nu \Gamma_\mu \otimes \Gamma^\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

pa se izraz za  $a_2$  svede na

$$a_2 = -\frac{1}{64\pi^2} \ln(-p^2) (-2p^2 g^\mu_\nu + 2p^\mu p_\nu - ip_\rho p_\sigma \epsilon^{\rho\mu\sigma}_\nu) (\bar{c}\Gamma_\mu u) \otimes (\bar{u}\Gamma^\nu c). \quad (\text{B.28})$$

Koeficijent  $B_1$  je dan izrazom (B.11). Kontrahiraju se  $d$  i  $s$  polja u propagatore i iskoristi se izraz (A.15). Ponovo se koristi integral (B.4), te se dobije

$$b_1 = \frac{1}{64\pi^2 \cdot 48} \ln(-p^2) (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) (\bar{c}\Gamma^\mu \gamma^\rho \Gamma_\nu \gamma^\sigma \Gamma_\mu u) (\bar{u}\Gamma^\nu c). \quad (\text{B.29})$$

Može se pokazati da vrijedi

$$\Gamma^\mu \gamma^\rho \Gamma_\nu \gamma^\sigma \Gamma_\mu = -8 (g^\sigma_\nu \Gamma^\rho - g^\sigma_\rho \Gamma_\nu + g_\nu^\rho \Gamma^\sigma + i\epsilon^\sigma_\nu{}^\rho{}_\tau \gamma_5 \Gamma^\tau), \quad (\text{B.30})$$

te isto vrijedi

$$\begin{aligned} (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) (g^\sigma_\nu \Gamma^\rho - g^\sigma_\rho \Gamma_\nu + g_\nu^\rho \Gamma^\sigma + i\epsilon^\sigma_\nu{}^\rho{}_\tau \gamma_5 \Gamma^\tau) \otimes \Gamma^\nu &= \\ = (4p_\nu p_\mu - 4p^2 g_{\nu\mu} + 2i\epsilon^\sigma_\nu{}^\rho{}_\tau p_\rho p_\sigma g^\tau_\mu) \Gamma^\mu \otimes \Gamma^\nu. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Za  $b_1$  se time dobije

$$b_1 = \frac{1}{96\pi} \ln(-p^2) (-4p_\nu p_\mu + 4p^2 g_{\nu\mu} - 2i\epsilon^\sigma_\nu{}^\rho{}_\tau p_\rho p_\sigma g^\tau_\mu) \bar{c}\Gamma^\mu u \otimes \bar{u}\Gamma^\nu c. \quad (\text{B.32})$$



Zadnji matrični element koji ostaje za izračunati je  $B_2$ . On je dan izrazom (B.14). Nakon kontrakcijom  $d$  i  $s$  polja u propagatore odmah se može vidjeti da je izraz za  $b_2$  jednak onome za  $b_1$ .

Sada se može izraziti širina raspada za član izmjene  $W$  bozona. Ponovo se iskoristi izraz (B.15) i  $p^2 = m_c^2$  u matričnim elementima. Ubacivanjem izračunatih matričnih elemenata u izraza (A.7) za širinu raspada, dobije se sljedeća jednadžba za širinu raspada izmjenom  $W$  bozona, za Cabibbo vodeći raspad  $D^0$  mezona

$$\Gamma_{\text{WE}} = -\frac{G_F^2}{24\pi} |V_{cs}|^2 |V_{ud}|^2 m_c^2 \left[ \frac{1}{2} (C_+ + C_-)^2 \left( g_\nu^\mu + 2 \frac{p^\mu p_\nu}{m_c^2} \right) \frac{\langle D^0 | \bar{c} \Gamma_\mu c \otimes \bar{u} \Gamma^\nu u | D^0 \rangle}{2M_{D^0}} - (5C_+^2 + C_-^2 - 6C_+ C_-) \left( \frac{p^\mu p_\nu}{m_c^2} - g_\nu^\mu \right) \frac{\langle D^0 | \bar{c} \Gamma_\mu u \otimes \bar{u} \Gamma^\nu c | D^0 \rangle}{2M_{D^0}} \right]. \quad (\text{B.33})$$

Na isti način se računa širina raspada od dijagrama izmjene  $W$  bozona za ostale Cabibbo modove raspada u  $D^0$

### B.3 Anihilacija

Račun širine raspada koji dolazi od dijagrama anihilacije sličan je kao i račun izmjene  $W$  bozona, tj. Paulijeve interferencije. Dijagram inkluzivnih raspada koji prikazuje doprinos anihilacije prikazan je na slici 5.7. Kao i u prethodnim računima, počnemo s jednadžbom (A.7). Ovdje ćemo izvesti račun za  $D_s^+$  mezon, za Cabibbo vodeći član, tj. kada su  $d$ -kvark i  $\bar{u}$ -antikvark u petlji na slici 5.7. Trebaju se kontrahirati polja  $d$  i  $\bar{u}$  (anti)kvarkova u izrazu (A.7). Matrični element  $A_1$  dan je izrazom (B.1). Za kontrakciju polja koriste se izrazi (A.10), te se koristi izraz (A.11) za polje  $c$  kvarka, a za  $s$  kvark se koristi  $s(x) \simeq s(0)$ . Za  $a_1$  se tada dobije

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i}{16} \int d^4x e^{ipx} (-i) [S_F^d(x, 0)]_{\theta\alpha}^{ik} i [S_F^u(x, 0)]_{\beta\epsilon}^{jk} \bar{c}_\gamma^j (\Gamma^\mu)_{\gamma\delta} s_\delta^j (\Gamma_\nu)_{\epsilon\theta} \bar{s}_\xi^l (\Gamma^\nu)_{\xi\eta} c_\eta^l (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{i}{16} \int d^4x e^{ipx} \frac{x_\rho c_\sigma}{4\pi^4 x^8} \delta^{ik} \delta^{jk} \text{Tr}[\gamma^\rho \Gamma_\mu \gamma^\sigma \Gamma_\nu] (\bar{c} \Gamma^\mu s) (\bar{s} \Gamma^\nu c). \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

U drugom redu se iskoristio izraz (A.15) i napravljena je kontrakcija po Diracovim indeksima. Prethodni izraz je jednak kao i  $a_2$  iz izmjene  $W$  bozona, izraz u drugom radu u (B.23), uz zamjenu  $u \rightarrow s$ . Stoga, za  $a_1$  se odmah može pisati

$$a_1 = -\frac{1}{64\pi^2} \ln(-p^2) (-2p^2 g^{\mu\nu} + 2p_\mu p_\nu) (\bar{c} \Gamma^\mu s) \otimes (\bar{s} \Gamma^\nu c), \quad (\text{B.35})$$

gdje smo izostavili član koji sadrži  $\epsilon$ -tenzor jer doprinos od tog člana iščezava. Za  $b_1$  se na sličan način može pokazati da je jednak kao i  $b_1$  u izmjeni  $W$  bozona, do na zamjenu kvarkova,

$$b_1 = \frac{1}{64\pi^2 \cdot 48} \ln(-p^2) (2p_\rho p_\sigma + p^2 g_{\rho\sigma}) (\bar{c} \Gamma^\mu \gamma^\rho \Gamma_\nu \gamma^\sigma \Gamma_\mu u) (\bar{u} \Gamma^\nu c). \quad (\text{B.36})$$

Može se pokazati da vrijedi  $a_2(\text{anihi.}) = a_1(\text{izmjena})$  i  $b_2(\text{anihi.}) = b_1(\text{izmjena})$ , do na zamjenu  $u(\bar{u}) \rightarrow s(\bar{s})$ . Zbrajanje svih doprinosa daje sljedeći izraz za širinu raspada anihilacije, za Cabibbo vodeći raspad  $D_s^+$  mezona

$$\Gamma_{\text{WA}} = -\frac{G_F^2}{24\pi} |V_{cs} V_{ud}^*|^2 m_c^2 \left[ \frac{1}{2} (C_+ - C_-)^2 \left( g_\nu^\mu + 2 \frac{p^\mu p_\nu}{m_c^2} \right) \frac{\langle D_s^+ | \bar{c} \Gamma_\mu c \otimes \bar{s} \Gamma^\nu s | D_s^+ \rangle}{2M_{D_s^+}} \right. \\ \left. + (5C_+^2 + C_-^2 + 6C_+ C_-) \left( g_\nu^\mu - \frac{p^\mu p_\nu}{m_c^2} \right) \frac{\langle D_s^+ | \bar{c} \Gamma_\mu s \otimes \bar{s} \Gamma^\nu c | D^0 \rangle}{2M_{D_s^+}} \right]. \quad (\text{B.37})$$

Na isti način se računa širina raspada dijagrama anihilacije za ostale Cabibbo modove raspada  $D_s^+$  mezona, kao i za Cabibbo potisnute raspade za  $D^+$  mezon.

Koristeći bazu  $C_1, C_2$  Wilsonovih koeficijenata može se lako pokazati da je  $\Gamma_{\text{WE}} = \Gamma_{\text{WA}}$  uz zamjenu  $C_1 \leftrightarrow C_2$  u izrazima.

## Dodatak C Vrijednosti parametara modela vreće računatih preko HQET pravila sume

HQET, $\mu_0 = 1.5 \text{ GeV}$	$\tilde{B}_1$	$\tilde{B}_2$	$\tilde{\epsilon}_1$	$\tilde{\epsilon}_2$
$D^{+,0}$	$1.0026^{+0.0198}_{-0.0106}$	$0.9982^{+0.0052}_{-0.0066}$	$-0.0165^{+0.0209}_{-0.0346}$	$-0.0004^{+0.0200}_{-0.0326}$
$D_s^+$	$1.0022^{+0.0185}_{-0.0099}$	$0.9983^{+0.0052}_{-0.0067}$	$-0.0104^{+0.0202}_{-0.0330}$	$-0.0001^{+0.0199}_{-0.0324}$
HQET, $\mu_0 = 1.5 \text{ GeV}$	$\tilde{\delta}_1$	$\tilde{\delta}_2$	$\tilde{\delta}_3$	$\tilde{\delta}_4$
$\langle D_q   \tilde{O}^q   D_q \rangle$	$0.0026^{+0.0142}_{-0.0092}$	$-0.0018^{+0.0047}_{-0.0072}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0024}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$
$\langle D_s   \tilde{O}^q   D_q \rangle$	$0.0025^{+0.0144}_{-0.0093}$	$-0.0018^{+0.0047}_{-0.0072}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0024}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$
$\langle D_q   \tilde{O}^s   D_q \rangle$	$0.0023^{+0.0140}_{-0.0091}$	$-0.0017^{+0.0046}_{-0.0070}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0023}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$

Tablica C.1: Vrijednosti parametara modela vreće izračunate preko HQET pravila sume u [20, 21].

## Literatura

- [1] Thomson, M. Modern Particle Physics. Cambridge University Press, 2013.
- [2] Amsler, C. The Quark Structure of Hadrons: An Introduction to the Phenomenology and Spectroscopy. 2018 in Cham by Springer.
- [3] Buras, A.J. Weak Hamiltonian, CP Violation and Rare Decays, [hep-ph/9806471].
- [4] Particle Data Group Collaboration, P. Zyla et al., Review of Particle Physics, PTEP 2020, 083C01 (2020).
- [5] Lenz, A.; Witzel, O.; Piscopo, M.L.; Rusov, A. Spezielle Kapitel der QFT. // TP1, CPPS, Physik, Universität Siegen, February 2021.
- [6] Lenz, A. Lifetimes and HQE, [hep-ph/1405.3601].
- [7] Fael, M.; Mannel, T.; Vos, K.K. The Heavy Quark Expansion for Inclusive Semi-leptonic Charm Decays Revisited, [arXiv:1910.05234].
- [8] Shifman, M.A.; Voloshin, M.B. Hierarchy of Lifetimes of Charmed and Beautiful Hadrons, Sov. Phys. JETP 64 (1986) 698. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.91,1180(1986)].
- [9] Shifman, M., Quark-Hadron Duality, [hep-ph/0009131].
- [10] Jubb, T.; Kirk, M; Lenz, A.; Tetlalmatzi-Xolocotzi, G. On the ultimate precision of meson mixing observables, Nucl. Phys. B915 (2017) 431–453, [arXiv:1603.07770].
- [11] de Marino, G.  $D^0$  Lifetime Measurement with Belle II Early Data. Pisa: Università di Pisa, 2019.
- [12] Belle-II Collaboration, F. Abudinén et al., Precise measurement of the  $D^0$  and  $D^+$  lifetimes at Belle II, [arXiv:2108.03216].
- [13] Štefančić, H. Hijerarhija vremena života hadrona s teškim kvarkovima. Doktor-ski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2002.
- [14] Melić, B. Efektivne teorije polja i fizika teških kvarkova, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2007-2010.

- [15] Neubert, M. B Decays and the Heavy-Quark Expansion // Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.15:239-293,1998, [hep-ph/9702375].
- [16] Bigi, I.I.; Shifman, M.; Uraltsev, N.G.; Vainshtein, A. Sum Rules for Heavy Flavor Transitions in the SV Limit // Phys.Rev.D52:196-235,1995
- [17] Lenz, A.; Piscopo, M.L.; Rauh, T; Rusov, A.V. Contribution of the Darwin operator to non-leptonic decays of heavy quarks,JHEP12(2020)199, [arXiv:2004.09527].
- [18] Novikov, V.A.; Shifman, M.A.; Vainshtein, A.I.; Zakharov, V.I. Calculations in External Fields in Quantum Chromodynamics. Technical Review, Fortsch. Phys. 32 (1984) 585.
- [19] King, D.; Lenz, A.; Piscopo, M.L.; Rauh, T; Rusov, A.V.; Vlahos, C. Revisiting Inclusive Decay Widths of Charmed Mesons, [arXiv:2109.13219].
- [20] Kirk, M.; Lenz, A.; Rauh, T. Dimension-six matrix elements for meson mixing and lifetimes from sum rules, JHEP 12 (2017) 068, [arXiv:1711.02100].
- [21] King, D.; Lenz, A.; Rauh, T. SU(3) breaking effects in  $B$  and  $D$  meson lifetimes, [hep-ph/2112.03691].
- [22] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 12.0, Champaign, IL (2019).
- [23] Mannel, T.; Rusov, A.V.; Shahriaran, F. Inclusive Semileptonic B Decay to Order  $\mathcal{O}(\lambda_{\text{QCD}}^3/m_b^3)$ , Nuclear Physics B 921 (2017) 211-224, [arXiv:1702.01089].
- [24] Franco, E.; Lubicz, V.; Mescia, F.; Tarantino, C. Lifetime ratios of beauty hadrons at the next-to-leading order in QCD, Nucl. Phys. B633 (2002) 212–236, [hep-ph/0203089].
- [25] Lenz, A.; Rauh, T. D-meson lifetimes within the heavy quark expansion, Phys. Rev. D88 (2013) 034004, [arXiv:1305.3588].
- [26] Blok, B.; Shifman, M. The rule of discarding  $1/N_c$  in inclusive weak decays (I), Nucl.Phys. B399 (1993) 441-458, [arXiv:hep-ph/9207236].