Decimalni zapis realnog broja

Gložinić, Nataša

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nataša Gložinić

DECIMALNI ZAPIS REALNOG BROJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Andrej Dujella

Zagreb, studeni 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Od srca zahvaljujem:

Svom mentoru na strpljivosti i velikodušnoj pomoći kod izrade ovog diplomskog rada.

Svim prijateljima koji su bili uz mene tijekom studija.

Bratu Darku na primjetnim i neprimjetnim znakovima podrške.

Zaručniku Filipu bez čijih bi riječi podrške i potpore moj studij i pisanje ovog diplomskog rada bili značajno teži.

Najveća hvala ide MOJIM RODITELJIMA:

Dali ste mi sve, a ja vam vraćam ovim radom i uspjehom!

HVALA VAM ZA SVE!

Sadržaj

Uvod

Jedno od češćih pitanja koje učenici postavljaju u nastavi matematike je "Što će nam ovo u stvarnom životu?" Decimalni brojevi elementarni su primjer kako nam matematika zaista služi u svakodnevnim situacijama. Iako su decimalni brojevi nešto s čime se susrećemo i računamo svakodnevno, trebalo je dosta vremena da bi oni nastali.

Počeci matematike vezani su uz brojanje. Drevne su civilizacije koristile različite brojevne sustave za brojanje pa su tako stari Egipćani koristili hijeroglifski brojevni sustav (baza je broj 10), Babilonci su koristili babilonski brojevni sustav (primarna baza 60, a sekundarna 10), Grci su prvotno koristili atički brojevni sustav (baza 10), a kasnije alfabetski brojevni sustav (baza 24), dok su Arapi prvotno koristili seksagezimalni brojevni sustav (baza 60), a kasnije dekadski sustav (baza 10). Pojam razlomka bio je poznat već starim Egipćanima koji su koristili razlomke za praktične probleme poput pravedne podjele kruhova. Međutim, još će proći neko vrijeme do zapisa razlomka kao što to činimo danas, a zapis decimalnih brojeva bit će dan još kasnije. Prvi matematičar kod kojeg se mogu pronaći izračuni s decimalnim brojevima bio je njemački matematičar Christoff Rudolff. On je u svojoj knjizi "Exempelbüchlin" 1530. godine predstavio 293 problema u kojima je za izračune koristio decimalne brojeve. Zapis decimalnog broja kod Christoffa Rudolffa ne izgleda mnogo drugačije nego je to danas. Naime, on umjesto decimalne točke koristi vertikalnu crtu kako bi razdvojio cjelobrojni dio od decimalnog dijela (prema [12]).

Pedeset godina kasnije decimalne brojeve možemo pronaći i kod flamanskog matematičara Simona Stevina. Zapis decimalnih brojeva može se pronaći u njegovoj knjižici "De Thiende" ("Desetina") iz 1585. godine. Današnjih 47.85 kod njega izgleda ovako (prema [1]):

$$47\textcircled{0}8\textcircled{1}5\textcircled{2}.$$

Primijetimo da je decimalna točka kod njega bila zaokružena nula. Zaokruženi broj 1 iza broja 8 označavao je da je 8 prva znamenka iza decimalne točke (na mjestu desetinki), a zaokruženi broj 2 iza znamenke 5 označavao je da se 5 nalazi na drugom mjestu iza decimalne točke (na mjestu stotinki). Dvjesto godina kasnije, proučavajući Stevinove decimalne razlomke, prvi koji je uveo decimalnu točku za podjelu decimalnog broja na njegov cijeli dio i decimalni dio bio je John Napier. Tako su nastali decimalni brojevi u obliku kakav danas poznajemo.

Ovaj će se rad baviti decimalnim prikazom realnim brojeva u proizvoljnoj bazi b. U prvom poglavlju bit će dano kako općenito prikazujemo i zapisujemo decimalne brojeve. Definirat ćemo funkciju najveće cijelo, a potom dokazati da svaki realan broj ima barem jedan prikaz u decimalnom obliku (prema [15]). Na kraju poglavlja dat ćemo algoritam za određivanje decimalnog zapisa realnih brojeva. U drugom ćemo se poglavlju baviti decimalnim prikazom prirodnih i cijelih brojeva pa ćemo pokazati da se svaki prirodan broj može prikazati u decimalnom obliku (prema [15]) te dati primjer kako prikazati prirodne i cijele brojeve u decimalnom obliku. Treće poglavlje sadrži svojstva decimalnog zapisa racionalnih brojeva pa ćemo prvenstveno definirati skup racionalnih brojeva (prema [10]), a potom ćemo pokazati da je broj x racionalan kada mu je zapis konačan i obratno (prema [15]). Analizirat ćemo kada je decimalni zapis racionalnog broja konačan, kada je čisto periodičan, a kada je mješovito periodičan (prema [15]). Zatim ćemo u četvrtom poglavlju iskazati karakterizaciju decimalnog zapisa iracionalnih brojeva (prema [15]) te dokazati iracionalnost nekih brojeva. U šestom ćemo poglavlju dati neke zanimljivosti vezane uz decimalni zapis realnih brojeva. Opisat ćemo što su to cikličke permutacije te pokazati kada decimalni zapis ima period kojem su znamenke ciklički permutirane (prema [19] i [3]). Iskazat ćemo i dokazati Midyjev teorem (prema [2] i [11]). Na kraju rada dat ćemo prikaz ishoda učenja decimalnih brojeva u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici (prema [20]) te će biti riješeni odabrani zadaci vezani uz decimalne brojeve.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Poglavlje 1

Općenito o decimalnom zapisu

Svatko se dosad u životu nebrojeno puta susreo s decimalnim prikazom brojeva. Svaki decimalni broj sastoji se od *decimalne točke* i brojeva koji se nalaze ispred i iza nje. Dio ispred točke je *cjelobrojni dio* decimalnog broja, dok se dio iza decimalne točke naziva *decimalni dio*.

Kao što je spomenuto u uvodnom dijelu, tokom povijesti razni su narodi koristili mnoge brojevne sustave za prikaz brojeva i računanje s njima. Danas koristimo dekadski pozicijski sustav te znamo da svaki prirodan broj ima odgovarajući dekadski rastav na jedinice, desetice, stotice, tisućice itd. Tako primjerice broj 134 možemo zapisati u obliku

$$134 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Općenito, svaki broj oblika $\overline{A_n A_{n-1} ... A_0}$ ima odgovarajući rastav u traženoj bazi b i on je oblika

$$\left(\overline{A_n A_{n-1} ... A_0}\right)_b = A_n \cdot b^n + A_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + A_1 \cdot b + A_0.$$

Možemo se pitati ima li decimalni broj oblika $\overline{A_n A_{n-1} ... A_0 . a_1 a_2 a_3 ...}$ odgovarajući rastav u bazi b? Kako bismo decimalni broj prikazali u obliku rastava na potencije u danoj bazi b, trebaju nam negativne potencije baze b pa rastav izgleda ovako:

$$\left(\overline{A_n A_{n-1} ... A_0 . a_1 a_2 a_3 ...}\right)_b = A_n \cdot b^n + A_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + A_1 \cdot b + A_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{a_3}{b^3} + ...$$

pri čemu su brojevi $0 \leq a_i < b,\ i = 1, 2, ...$ te $A_n \neq 0$.

Često možemo vidjeti decimalne brojeve oblika 37.90 i 37.899. Ovakvi prikazi mogu pokrenuti debatu jesu li dani decimalni brojevi jednaki pa ćemo dokazati da svaki realan broj ima barem jedan prikaz u obliku decimalnog broja u proizvoljnoj bazi b. Nadalje, polemike (pogotovo kod učenika) mogu nastati i kad trebamo prikazati prirodne ili cijele brojeve u decimalnom obliku, npr. kod oduzimanja brojeva 100 i 65.456. Pitamo se možemo li broj 100 prikazati u decimalnom obliku. Potaknuti navedenim pitanjima, pokažimo da svaki realan broj ima prikaz u obliku decimalnog broja i da ima barem jedan takav prikaz, no prije iskaza i dokaza teorema (prema [15]), definirajmo funkciju najveće cijelo (prema [18]).

Definicija 1.0.1. *Funkcija najveće cijelo od realnog broja x je funkcija koja svakom realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj koji nije veći od x. Pišemo:* $\lfloor x \rfloor$.

Teorem 1.0.2. *Svaki realan broj x ima barem jedan prikaz u obliku decimalnog broja u proizvoljnoj bazi* $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$. *Drugim riječima, svaki se realan broj x može prikazati kao*

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} + ... \tag{1.1}$$

pri čemu je $0 \leq a_n < b$, $\forall\, n = 1, 2, ...$.

Dokaz. Pokažimo najprije da za svaki realan broj postoji zapis u obliku decimalnog broja. Neka je x realan broj i neka je $b \in \mathbb{N},\ b > 1$ proizvoljna baza. Označimo sada s x_1 broj oblika

$$x_1 = x - \lfloor x \rfloor.$$

Očito je $0 \leq x_1 < 1$.
Nadalje, neka je x_2 broj oblika

$$x_2 = bx_1 - \lfloor bx_2 \rfloor.$$

Ponovo vrijedi da je $0 \leq x_2 < 1$.
Nastavimo li provoditi ovaj postupak, kreirat ćemo sljedeći niz brojeva:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x - \lfloor x \rfloor\,,\ 0 \leq x_1 < 1\\
x_2 &= bx_1 - \lfloor bx_1 \rfloor\,,\ 0 \leq x_2 < 1\\
x_3 &= bx_2 - \lfloor bx_2 \rfloor\,,\ 0 \leq x_3 < 1\\
&\vdots\\
x_n &= bx_{n-1} - \lfloor bx_{n-1} \rfloor\,,\ 0 \leq x_{n-1} < 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dakle, kreirali smo niz brojeva dan formulama:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x - \lfloor x \rfloor\\
x_n &= bx_{n-1} - \lfloor bx_{n-1} \rfloor\,,\ n = 1, 2, ...
\end{aligned} \tag{1.2}$$

za koji vrijedi

$$0 \leq x_n < 1, \ \forall n = 1, 2, ... \tag{1.3}$$

Definirajmo sada brojeve

$$a_n = \lfloor bx_n \rfloor, \ n = 1, 2, ... \tag{1.4}$$

Iz (1.3) slijedi $0 \leq bx_n < b$, a odatle pak zbog (1.4) dobivamo da vrijedi $0 \leq a_n < b$. Brojevi a_n su (prema Definiciji 1.0.1 funkcije najveće cijelo) cijeli brojevi pa zaključujemo da vrijedi

$$0 \leq a_n \leq b - 1, n = 1, 2, ... \tag{1.5}$$

Tada iz (1.2) i (1.4) slijedi

$$\begin{aligned}
x &= \lfloor x \rfloor + x_1 \\
x_1 &= \frac{x_2 + \lfloor bx_1 \rfloor}{b} = \frac{x_2 + a_1}{b} \\
x_2 &= \frac{x_3 + \lfloor bx_2 \rfloor}{b} = \frac{x_3 + a_2}{b} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{x_{n+1} + \lfloor bx_n \rfloor}{b} = \frac{x_{n+1} + a_n}{b}.
\end{aligned}$$

Uzmemo li sada x_n i uvrstimo ga u izraz za x_{n-1}, dobit ćemo

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= \frac{x_n + a_{n-1}}{b} \\
&= \frac{\frac{x_{n+1} + a_n}{b} + a_{n-1}}{b} \\
&= \frac{x_{n+1}}{b^2} + \frac{a_n}{b^2} + \frac{ba_{n-1}}{b^2} \\
&= \frac{a_{n-1}}{b} + \frac{a_n}{b^2} + \frac{x_{n+1}}{b^2}.
\end{aligned}$$

Nastavimo li postupak dalje (uvrstimo dobiveni izraz za x_{n-1} u izraz za x_{n-2} itd.), doći ćemo do sljedeće formule

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} + \frac{x_{n+1}}{b^n}. \tag{1.6}$$

Promotrimo sada izraz $\frac{x_{n+1}}{b^n}$. S obzirom da je prema (1.3) $0 \leq x_{n+1} < 1$, onda je i $0 \leq \frac{x_{n+1}}{b^n} < \frac{1}{b^n}$ (jer je $b > 1$ pa je i $b^n > 1$ za $n = 1, 2, ...$). Dakle, kada n raste, $\frac{1}{b^n}$ pada pa je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b^n} = 0.$$

Prema teoremu o sendviču zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{b^n} = 0. \tag{1.7}$$

Konačno, prema (1.6) i (1.7) možemo realan broj x prikazati kao sumu beskonačnog reda, tj.

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} + ... \tag{1.8}$$

Dakle, pronašli smo jedan prikaz realnog broja x u decimalnom obliku te smo time dokazali da za svaki realan broj x postoji prikaz u decimalnom obliku. Ono što nam još preostaje dokazati je da taj prikaz ne mora biti jedini mogući.

Neka je dan realan broj x u svom decimalnom obliku (1.8) te neka je za neki $n = 1, 2, ...$

$$r_n = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n}. \tag{1.9}$$

Oduzmemo li r_n od x, dobit ćemo

$$x - r_n = \frac{a_{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{b^{n+2}} + \frac{a_{n+3}}{b^{n+3}} + ...$$

S obzirom da je $0 \leq a_i \leq b - 1$, $i = 1, 2, ..., n, n + 1, ...$, onda je

$$0 \leq x - r_n \leq \frac{b-1}{b^{n+1}} + \frac{b-1}{b^{n+2}} + ... \tag{1.10}$$

Kako je $b - 1 < b$, onda je i $b - 1 < b^i$, $i = n + 1, n + 2, n + 3, ...$ pa je $|\frac{b-1}{b^i}| < 1$. Odatle slijedi da suma reda $\frac{b-1}{b^i}$ postoji i jednaka je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^i} &= (b-1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b^i} - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{b^i} \right) \\
&= (b-1) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{b}} - \frac{1 - \frac{1}{b^{n+1}}}{1 - \frac{1}{b}} \right) \\
&= (b-1) \cdot \left(\frac{1 - 1 + \frac{1}{b^{n+1}}}{\frac{b-1}{b}} \right) \\
&= (b-1) \cdot \frac{b}{(b-1) \cdot b^{n+1}} \\
&= \frac{b}{b^{n+1}} \\
&= \frac{1}{b^n}.
\end{aligned}$$

Tada je prema (1.10)

$$0 \leq x - r_n \leq \frac{b-1}{b^{n+1}} + \frac{b-1}{b^{n+2}} + ... = \frac{1}{b^n}.$$

Jednakost $x - r_n = \frac{1}{b^n}$ je moguća jedino u slučaju kada je $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = b - 1$, tj. kada su sve znamenke decimalnog prikaza jednake $b - 1$ od određenog decimalnog mjesta n nadalje.

Ako je m najmanji prirodan broj takav da je $a_n = b - 1$ za $n \geq m$, onda bismo u slučaju $m = 1$ imali $x = \lfloor x \rfloor + 1$, a to je nemoguće.

Ako je $m > 1$, onda je $a_{m-1} \neq b - 1$ pa je (zbog $0 \leq a_n \leq b - 1$, $n = 1, 2, ..., m, ...$) $a_{m-1} \leq b - 2$. Tada je broj $a'_{m-1} = a_{m-1} + 1$ također decimalna znamenka u bazi b. Sukladno tome, realan broj x ima sljedeći prikaz

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_{m-2}}{b^{m-2}} + \frac{a'_{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{0}{b^m} + \frac{0}{b^{m+1}} + ... \tag{1.11}$$

Primijetimo da su prikazi (1.8) i (1.11) različiti. Dakle, pronašli smo još jedan decimalni prikaz realnog broja x pa je time teorem dokazan. □

Brojeve a_n iz prethodnog teorema nazivat ćemo *decimalama* te ćemo ih zapisivati iza *decimalne točke*. Dakle, decimalan zapis realnog broja x u bazi b možemo skraćeno pisati u obliku

$$x = \lfloor x \rfloor + \left(\overline{0.a_1a_2a_3...a_n...}\right)_b.$$

Svojstva decimalnog zapisa neće ovisiti o cjelobrojnom dijelu broja x pa ćemo u većini slučajeva promatrati samo njegov decimalni dio (iza decimalne točke).

Primijetimo da smo u dokazu ovog teorema, osim što smo dokazali da svaki realan broj ima barem jedan decimalan prikaz, pronašli i algoritam za traženje decimalnog zapisa realnog broja, a on se provodi na sljedeći način:

1. Odredimo $x_1 = x - \lfloor x \rfloor$. Stavimo $a_1 = \lfloor bx_1 \rfloor$.
2. Odredimo $x_2 = bx_1 - \lfloor bx_1 \rfloor$. Stavimo $a_2 = \lfloor bx_2 \rfloor$.
3. Odredimo $x_3 = bx_2 - \lfloor bx_2 \rfloor$. Stavimo $a_3 = \lfloor bx_3 \rfloor$.
4. Ponavljamo navedeni postupak sve dok ne dobijemo da je $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = 0$ ili dok se jedna od znamenki a_n (ili niz znamenki $a_n, a_{n+1}, ..., a_t$) ne počne ponavljati.

Primjer 1.0.3. *Odredite barem jedan decimalni prikaz broja $\frac{3}{7}$ u bazama:*
a) $b = 10$
b) $b = 5$.

Rješenje: *Primijenimo algoritam iz Teorema 1.0.2 te dobijemo sljedeće:*

a)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{7} - \left\lfloor \frac{3}{7} \right\rfloor = \frac{3}{7} - 0 = \frac{3}{7},\ a_1 = \left\lfloor 10 \cdot \frac{3}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4 \\
x_2 &= \frac{30}{7} - \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = \frac{30}{7} - 4 = \frac{30-28}{7} = \frac{2}{7},\ a_2 = \left\lfloor 10 \cdot \frac{2}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = 2 \\
x_3 &= \frac{20}{7} - \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = \frac{20}{7} - 2 = \frac{20-14}{7} = \frac{6}{7},\ a_3 = \left\lfloor 10 \cdot \frac{6}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{60}{7} \right\rfloor = 8 \\
x_4 &= \frac{60}{7} - \left\lfloor \frac{60}{7} \right\rfloor = \frac{60}{7} - 8 = \frac{60-56}{7} = \frac{4}{7},\ a_4 = \left\lfloor 10 \cdot \frac{4}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{40}{7} \right\rfloor = 5 \\
x_5 &= \frac{40}{7} - \left\lfloor \frac{40}{7} \right\rfloor = \frac{40}{7} - 5 = \frac{40-35}{7} = \frac{5}{7},\ a_5 = \left\lfloor 10 \cdot \frac{5}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = 7 \\
x_6 &= \frac{50}{7} - \left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = \frac{50}{7} - 7 = \frac{50-49}{7} = \frac{1}{7},\ a_6 = \left\lfloor 10 \cdot \frac{1}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 1 \\
x_7 &= \frac{10}{7} - \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = \frac{10}{7} - 1 = \frac{10-7}{7} = \frac{3}{7},\ a_7 = \left\lfloor 10 \cdot \frac{3}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4
\end{aligned}
$$

Primijetimo da je $x_1 = x_7$ te $a_1 = a_7$ pa tu algoritam staje, a razlomak $\frac{3}{7}$ u decimalnom obliku zapisujemo kao

$$\frac{3}{7} = 0.428571428571... = \left(0.\overline{428571}\right)_{10},$$

tj. iznad niza znamenki koji se ponavlja stavimo crtu.

b) *Opet primijenimo algoritam, ali umjesto baze $b = 10$ moramo uvrštavati bazu $b = 5$:*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{7} - \left\lfloor \frac{3}{7} \right\rfloor = \frac{3}{7} - 0 = \frac{3}{7},\ a_1 = \left\lfloor 5 \cdot \frac{3}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor = 2 \\
x_2 &= \frac{15}{7} - \left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor = \frac{15}{7} - 2 = \frac{15-14}{7} = \frac{1}{7},\ a_2 = \left\lfloor 5 \cdot \frac{1}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{7} \right\rfloor = 0 \\
x_3 &= \frac{5}{7} - \left\lfloor \frac{5}{7} \right\rfloor = \frac{5}{7} - 0 = \frac{5-0}{7} = \frac{5}{7},\ a_3 = \left\lfloor 5 \cdot \frac{5}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{25}{7} \right\rfloor = 3 \\
x_4 &= \frac{25}{7} - \left\lfloor \frac{25}{7} \right\rfloor = \frac{25}{7} - 3 = \frac{25-21}{7} = \frac{4}{7},\ a_4 = \left\lfloor 5 \cdot \frac{4}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = 2 \\
x_5 &= \frac{20}{7} - \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = \frac{20}{7} - 2 = \frac{20-14}{7} = \frac{6}{7},\ a_5 = \left\lfloor 5 \cdot \frac{6}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4
\end{aligned}
$$

$$x_6 = \frac{30}{7} - \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = \frac{30}{7} - 4 = \frac{30-28}{7} = \frac{2}{7},\ a_6 = \left\lfloor 5 \cdot \frac{2}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 1$$
$$x_7 = \frac{10}{7} - \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = \frac{10}{7} - 1 = \frac{10-7}{7} = \frac{3}{7},\ a_7 = \left\lfloor 5 \cdot \frac{3}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor = 2$$

Primijetimo da je $x_1 = x_7$ *te* $a_1 = a_7$ *pa algoritam staje, a decimalni oblik zadanog razlomka u bazi* $b = 5$ *je sljedeći*

$$\frac{3}{7} = \left(0.\overline{203241}\right)_5$$

Poglavlje 2

Decimalni zapis prirodnih i cijelih brojeva

Skup prirodnih brojeva podskup je skupa realnih brojeva pa zaključujemo da svaki prirodan broj ima svoj decimalni prikaz. Očito je da svaki prirodan broj možemo zapisati u obliku decimalnog broja na način da mu s desne strane stavimo decimalnu točku te iza nje dopišemo proizvoljan broj nula. Iako je ta činjenica poprilično banalna i lako shvatljiva, djeci u nastavi često predstavlja problem kako prirodne brojeve zapisati u obliku decimalnih. Nastavno na prvo poglavlje, u ovom ćemo poglavlju dati dokaz teorema koji nam daje jedinstvenost zapisa prirodnih brojeva u bazi b (prema [15]), a potom ćemo dati primjer u kojem ćemo pronaći decimalni zapis prirodnih brojeva koristeći spomenuti algoritam iz sljedećeg teorema.

Teorem 2.0.1. *Svaki se prirodan broj $N \in \mathbb{N}$ može jedinstveno prikazati u obliku decimalnog broja u proizvoljnoj bazi $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$. Drugim riječima, svaki se prirodan broj N može prikazati u obliku*

$$N = A_m \cdot b^m + A_{m-1} \cdot b^{m-1} + ... + A_1 \cdot b + A_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} + ... \tag{2.1}$$

pri čemu su $a_n = 0$, $\forall n = 1, 2, \dots, 0 \leq A_i < b$, $i = 0, 1, 2, ..., m$, $A_m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz. Prvo dokažimo da ako postoji decimalni prikaz prirodnog broja, onda je on jedinstven.
Pretpostavimo, dakle, da se prirodan broj N može prikazati u obliku

$$N = A_m \cdot b^m + A_{m-1} \cdot b^{m-1} + ... + A_1 \cdot b + A_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} + ...$$

tj.

$$N = A_m \cdot b^m + A_{m-1} \cdot b^{m-1} + ... + A_1 \cdot b + A_0 \tag{2.2}$$

jer su svi $a_n = 0,\ \forall n = 1, 2, ...$.
Podijelimo li (2.2) s $b^n,\ n < m$, dobivamo

$$\frac{N}{b^n} = A_m \cdot b^{m-n} + A_{m-1} \cdot b^{m-n-1} + ... + A_n + \frac{A_{n-1}}{b} + \frac{A_{n-2}}{b^2} + ... + \frac{A_0}{b^n}.$$

Kako je $0 \leq A_i \leq b-1,\ i = 0, 1, 2, ..., m$, tada vrijedi

$$0 \leq \frac{A_{n-1}}{b} + \frac{A_{n-2}}{b^2} + ... + \frac{A_0}{b^n} \leq \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + ... + \frac{b-1}{b^n}.$$

Izraz $\frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + ... + \frac{b-1}{b^n}$ je suma prvih n članova geometrijskog niza čiji je opći član $q_n = \frac{b-1}{b^n}$ pa imamo

$$\begin{aligned}
\frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + ... + \frac{b-1}{b^n} &= \frac{b-1}{b} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{b} \right)^i \right) \\
&= \frac{b-1}{b} \cdot \frac{1 - \frac{1}{b^n}}{1 - \frac{1}{b}} \\
&= \frac{b-1}{b} \cdot \frac{b \cdot (b^n - 1)}{b^n \cdot (b-1)} \\
&= \frac{b^n - 1}{b^n} \\
&= 1 - \frac{1}{b^n}.
\end{aligned}$$

Tada je

$$0 \leq \frac{A_{n-1}}{b} + \frac{A_{n-2}}{b^2} + ... + \frac{A_0}{b^n} \leq 1 - \frac{1}{b^n}$$

pa prema (2.2) zaključujemo

$$\left\lfloor \frac{N}{b^n} \right\rfloor = A_m \cdot b^{m-n} + A_{m-1} \cdot b^{m-n-1} + ... + A_n. \tag{2.3}$$

Analogno, podijelimo li N s b^{n+1} dobivamo

$$\left\lfloor \frac{N}{b^{n+1}} \right\rfloor = A_m \cdot b^{m-n-1} + A_{m-1} \cdot b^{m-n-2} + ... + A_{n+1}. \tag{2.4}$$

Pomnožimo li (2.4) s b i oduzmemo od (2.3), dobijemo

$$A_n = \left\lfloor \frac{N}{b^n} \right\rfloor - b \cdot \left\lfloor \frac{N}{b^{n+1}} \right\rfloor. \tag{2.5}$$

Sada prema (2.1) imamo

$$\begin{aligned}
b^m \leq N &\leq (b-1)\cdot b^m + (b-1)\cdot b^{m-1} + ... + (b-1)\\
&\leq (b-1)\cdot \left(b^m + b^{m-1} + ... + 1\right)\\
&\leq (b-1)\cdot \frac{1-b^{m+1}}{1-b}\\
&\leq b^{m+1}-1\\
&< b^{m+1}.
\end{aligned}$$

Djelujemo li logaritamskom funkcijom na nejednakost $b^m \leq N \leq b^{m+1}$ te primjenimo svojstva logaritma, dobivamo

$$\begin{aligned}
\log\left(b^m\right) \leq \log N &< \log\left(b^{m+1}\right)\\
m\cdot\log(b) \leq \log N &< (m+1)\cdot\log(b)\\
m \leq \frac{\log N}{\log b} &< m+1.
\end{aligned}$$

Iz definicije funkcije najveće cijelo (1.0.1) i prethodne nejednakosti slijedi

$$\left\lfloor \frac{\log N}{\log b} \right\rfloor = m. \tag{2.6}$$

Dakle, iz (2.1) došli smo do formula (2.5) i (2.6), a one nam pokazuju da su brojevi A_n jedinstveno određeni s N koji je dan svojim prikazom (2.1) u bazi b. Tada je jasno da je prikaz (2.1) prirodnog broja N jedinstven.
Da bismo dovršili dokaz ovog teorema, potrebno je još pokazati da postoji prikaz broja N u iskazanom obliku. Definirajmo u tu svrhu brojeve N_1 i A_0 kao kvocijent i ostatak pri dijeljenju broja N brojem b redom. Prema Teoremu o dijeljenju s ostatkom (vidi [2, str. 22]), broj N možemo prikazati kao

$$N = b\cdot N_1 + A_0.$$

Nastavimo li dijeljenje dalje, dobit ćemo kvocijent N_2 i ostatak A_1 te ćemo to prikazati u obliku

$$N_1 = b\cdot N_2 + A_1.$$

Provodeći ovaj postupak dalje dolazimo do niza kvocijenata

$$\begin{aligned}
N &= b\cdot N_1 + A_0\\
N_1 &= b\cdot N_2 + A_1\\
N_2 &= b\cdot N_3 + A_2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Kvocijenti N_i postepeno padaju jer je očito $N_{i+1} \leq \frac{N_i}{b}$. S obzirom da su kvocijenti $N_i \geq 0$, u jednom će trenutku za neki $k \geq 1$ biti $N_k = 0$. Uzmimo da je $m \in \mathbb{N}$ najveći broj za koji je $N_m \neq 0$, tj. svi će ostali kvocijenti od mjesta $m + 1$ biti 0. Dakle, $N_{m+1} = N_{m+2} = ... = 0$. Tada imamo konačan niz brojeva

$$\begin{aligned} N &= b \cdot N_1 + A_0 \\ N_1 &= b \cdot N_2 + A_1 \\ N_2 &= b \cdot N_3 + A_2 \\ &\vdots \\ N_m &= A_m. \end{aligned}$$

Krenemo li od kvocijenta N_m i uvrstimo ga u N_{m-1}, dobivamo $N_{m-1} = b \cdot a_m + a_{m-1}$. Nastavimo li s uvrštavanjem, dolazimo do sljedećeg rastava broja N

$$N = b^m \cdot A_m + b^{m-1} \cdot A_{m-1} + ... + b \cdot A_1 + A_0.$$

Pronašli smo jedan prikaz prirodnog broja u decimalnom obliku pa je time dokaz dovršen.

□

Primjer 2.0.2. *Odredite decimalni prikaz broja 1435 u zadanim bazama:*
a) $b = 10$
b) $b = 5$.

Rješenje: *Prema teoremu 2.0.1 imamo sljedeće decimalne prikaze broja* 1435*:*

a)

$$\begin{aligned} 1435 &= 10 \cdot 143 + 5, \; A_0 = 5 \\ 143 &= 10 \cdot 14 + 3, \; A_1 = 3 \\ 14 &= 10 \cdot 1 + 4, \; A_2 = 4 \\ 1 &= 10 \cdot 0 + 1, \; A_3 = 1 \\ 0 &= 10 \cdot 0 + 0, \; a_1 = 0 \end{aligned}$$

Dakle, decimalni prikaz broja 1435 *u bazi* $b = 10$ *je*

$$1435 = (1435.0000...)_{10}.$$

b)

$$\begin{aligned}
1435 &= 5 \cdot 287 + 0,\ A_0 = 0\\
287 &= 5 \cdot 57 + 2,\ A_1 = 2\\
57 &= 5 \cdot 11 + 2, A_3 = 2\\
11 &= 5 \cdot 2 + 1,\ A_4 = 1\\
2 &= 5 \cdot 0 + 2,\ A_5 = 2\\
0 &= 5 \cdot 0 + 0,\ a_1 = 0
\end{aligned}$$

Decimalni prikaz broja 1435 *u bazi* $b = 5$ *je oblika*

$$1435 = (21220.0000...)_5\,.$$

Skup cijelih brojeva unija je skupa prirodnih brojeva, skupa brojeva suprotnih prirodnim brojevima te nule. U dekadskom sustavu jasno je da kada želimo pretvoriti neki negativan broj u decimalni broj, prvo moramo pretvoriti prirodan broj iste apsolutne vrijednosti u decimalni broj te ispred njega samo staviti minus. Isto možemo učiniti i u proizvoljnoj bazi b. Dakle, cijeli broj $-\overline{A_n A_{n-1} ... A_0}$ ima sljedeći prikaz u bazi b:

$$\left(-\overline{A_n A_{n-1} ... A_0}\right)_b = -\left(A_n \cdot b^n + A_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + A_1 \cdot b + A_0\right)$$

pri čemu je $0 \leq A_i < b,\ i = 0, 1, 2, ..., n,\ A_n \neq 0$.

Primjer 2.0.3. *Odredite decimalni prikaz broja* -1435 *u zadanim bazama:*
a) $b = 10$
b) $b = 5$.

Rješenje: *Kako smo u Primjeru 2.0.2 odredili decimalne prikaze prirodnog broja iste apsolutne vrijednosti, onda možemo samo staviti minus ispred decimalnog zapisa da bismo dobili odgovarajući decimalni zapis pripadnog negativnog broja. Prikazi broja* -1435 *u bazama* $b = 10$ *i* $b = 5$ *tada su sljedeći:*

a)

$$-1435 = (-1435.0000...)_{10}$$

b)

$$-1435 = (-21220.0000...)_5$$

Poglavlje 3

Decimalni zapis racionalnih brojeva

Prije nego krenemo promatrati svojstva decimalnog zapisa racionalnih brojeva, definirajmo što su to racionalni brojevi (prema [10]):

Definicija 3.0.1. *Neka je* $(m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$*. Racionalan broj* $\frac{m}{n}$ *je klasa ekvivalencije određena s* (m, n)*, odnosno*

$$\frac{m}{n} = [(m, n)] = \{(m', n') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mid (m, n) \sim (m', n'),\ \text{tj. } m \cdot n' = m' \cdot n\}.$$

Vrijedi sljedeća karakterizacija racionalnih brojeva (prema [15] i [2]):

Teorem 3.0.2. *Realan broj x je racionalan ako i samo ako mu je decimalni zapis konačan ili periodičan.*

Dokaz. Neka je $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, racionalan broj. Pokazali smo da svaki realan broj ima decimalan prikaz u proizvoljnoj bazi $b \in \mathbb{N}, b > 1$ pa neka je prikaz racionalnog broja $x = \frac{p}{q}$ dan s

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...,\ 0 \leq a_n < b, n = 1, 2, ...$$

Algoritam za pretvaranje realnog broja u decimalan broj daje niz brojeva

$$x_1 = x - \lfloor x \rfloor,\ x_{n+1} = bx_n - \lfloor bx_n \rfloor,\ 0 \leq x_n < 1,\ n = 1, 2, ...$$

Brojevi $a_n = \lfloor x_n \rfloor$, $n = 1, 2, ...$ su decimale u decimalnom zapisu realnog broja. Uvrstimo sada u dane formule $\frac{p}{q}$ umjesto x. Dobit ćemo sljedeći niz brojeva

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p}{q} - \lfloor x \rfloor \\ x_2 &= bx_1 - \lfloor bx_1 \rfloor \\ x_3 &= bx_2 - \lfloor bx_2 \rfloor \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pomnožimo li svaku jednakost s q, dobit ćemo

$$\begin{aligned} qx_1 &= p - q\lfloor x \rfloor \\ qx_2 &= qbx_1 - q\lfloor bx_1 \rfloor \\ qx_3 &= qbx_2 - q\lfloor bx_2 \rfloor \\ &\vdots \end{aligned}$$

Opći član ovog niza brojeva dan je s $qx_{n+1} = qbx_n - q\lfloor bx_n \rfloor,\ n = 1, 2, ...$
Primijetimo da su svi brojevi oblika qx_n cijeli brojevi, a zbog $0 \leq x_n < 1$, zadovoljavaju nejednakost $0 \leq qx_n < q,\ n = 1, 2, ...$
Ako za neki x_n vrijedi $x_n = 0$, onda je svaki sljedeći kvocijent x_j jednak 0, tj. $x_j = 0, \forall j \geq n$. S obzirom da je $a_j = \lfloor bx_j \rfloor = 0$, zaključujemo da je svaka decimala a_j jednaka 0 od n-tog mjesta nadalje. Tada racionalan broj x ima decimalan prikaz u obliku

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_{n-1}}{b^{n-1}},\ 0 \leq a_i < b, i = 1, 2, ..., n-1$$

Zaključujemo da je decimalni zapis racionalnog broja konačan.
Ako je $x_n \neq 0,\ n = 1, 2, ...$, onda zbog $0 < qx_n < q$, brojevi qx_n mogu poprimiti najviše q različitih vrijednosti u rasponu od 0 do $q - 1$. Iz tog razloga postoje cijeli brojevi $s \geq 0$ i $t \geq 1$ takvi da je $s + t \leq q$ i $qx_s = qx_{s+t}$, tj. $x_s = x_{s+t}$. Odatle slijedi da je $x_n = x_{n+t},\ n > s$ i $a_n = a_{n+t},\ n \geq s$. Dakle, za svakih t mjesta decimale se ponavljaju pa je x periodičan.
Preostaje nam još dokazati obrat.
Ako je x broj s konačnim decimalnim zapisom, onda je x oblika

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n}.$$

Definirajmo brojeve $x'_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} x'_0 &= \lfloor x \rfloor \\ x'_1 &= \frac{a_1}{b} \\ x'_2 &= \frac{a_2}{b^2} \\ &\vdots \\ x'_n &= \frac{a_n}{b^n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Brojevi $x'_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n$ su po konstrukciji racionalni brojevi, a broj x možemo prikazati kao njihov zbroj. Dakle, x možemo prikazati kao sumu konačno mnogo racionalnih brojeva

pa je onda i x racionalan broj (jer je skup racionalnih brojeva zatvoren za zbrajanje).
Ako je x broj s periodičnim decimalnim zapisom, onda je x oblika

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_s}{b^s} + \frac{y_1}{b^{s+1}} + \frac{y_2}{b^{s+2}} + ... + \frac{y_t}{b^{s+t}} + \frac{y_1}{b^{s+t+1}} + \frac{y_2}{b^{s+t+2}} + ... + \frac{y_t}{b^{s+2t}} + ...$$

pri čemu vrijedi $0 \leq a_i < b,\ i = 1, 2, ..., s,\ 0 \leq y_j < b,\ j = 1, 2, ..., t$.
Pomnožimo li broj x prvo s b^{s+t}, a potom s b^s, dobit ćemo

$$\begin{aligned} b^{s+t}x &= b^{s+t}\lfloor x \rfloor + b^t \left(b^{s-1}a_1 + ... + a_s\right) + \left(b^{t-1}y_1 + ... + y_t\right) + \left(\frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2} + ... + \frac{y_t}{b^t} + ...\right) \\ b^s x &= b^s\lfloor x \rfloor + \left(b^{s-1}a_1 + ... + a_s\right) + \left(\frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2} + ... + \frac{y_t}{b^t} + ...\right). \end{aligned}$$

Označimo

$$\begin{aligned} c &= b^{s+t}\lfloor x \rfloor + b^t \left(b^{s-1}a_1 + ... + a_s\right) + b^{t-1}y_1 + ... + y_t \\ c' &= b^s\lfloor x \rfloor + b^{t-1}y_1 + ... + y_t. \end{aligned}$$

Oduzmemo li $b^s x$ od $b^{s+t}x$, dobijemo

$$\begin{aligned} \left(b^{s+t} - b^s\right) x &= c - c' \\ x &= \frac{c - c'}{b^{s+t} - b^s}. \end{aligned}$$

S obzirom da su c i c' po konstrukciji cijeli brojevi, onda je razlika ta dva broja cijeli broj. Nadalje, $b^{s+t} - b^s$ je prirodan broj. Dakle, x smo prikazali u obliku razlomka kojemu je brojnik cijeli broj, a nazivnik prirodan broj pa je x po definiciji racionalan broj. Time je dokaz dovršen. $\square$

Iz ovog teorema proizlazi jedna zanimljiva činjenica (prema [2]) koju vežemo uz racionalne brojeve. Naime, pokazali smo ako je x racionalan broj u čijem decimalnom zapisu ponavljanje počinje nakon prvih s mjesta i duljine je t, onda su $s \geq 0$ i $t > 1$ najmanji cijeli brojevi za koje vrijedi

$$b^s \equiv b^{s+t} \pmod{q}.$$

Dakle, duljina perioda ne ovisi o brojniku, već samo o nazivniku danog razlomka. Iz te činjenice proizlaze svojstva decimalnog zapisa racionalnih brojeva koja ga karakteriziraju. Znamo da postoje konačni decimalni zapis i periodični decimalni zapis koji se dijeli na čisto periodičan i mješovito periodičan decimalni zapis. U konačnom se decimalnom zapisu niz znamenki ne ponavlja. U čisto periodičnom decimalnom zapisu postoji znamenka ili niz znamenki iza decimalne točke koji se ponavlja. Mješovito periodični decimalni zapis sadrži znamenku ili niz znamenki koji se ne ponavlja (*pretperiod*) te niz znamenki koji se ponavlja (*period*).

Pogledajmo sada neka svojstva racionalnih brojeva ovisno o rastavu nazivnika na proste faktore i o rastavu baze b na proste faktore. Prvo ćemo pokazati kada je decimalni prikaz racionalnog broja konačan (prema [15]):

Teorem 3.0.3. *Neka je $b \in \mathbb{N}, b > 1$ proizvoljno odabrana baza te neka je $b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ rastav od b na proste faktore. Decimalni zapis racionalnog broja $x = \frac{p}{q}$ u bazi b je konačan ako i samo ako rastav na proste faktore od q sadrži samo brojeve p_1, p_2, ..., p_n.*

Dokaz. Dokažimo nužnost uvjeta ovog teorema. Neka je b proizvoljno odabrana baza te neka je $b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ njezin rastav na proste faktore. Neka je $x = \frac{p}{q}$ racionalan broj čiji je decimalni zapis konačan, tj.

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} \\ x &= \frac{a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + ... + a_n}{b^n} \\ \frac{p}{q} &= \frac{a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + ... + a_n}{\left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\right)^n}. \end{aligned}$$

Očito je da q dijeli b^n, odnosno q dijeli $\left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\right)^n$. Dakle, q u svom rastavu sadrži samo brojeve $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$.
Obratno, neka je q dan svojim rastavom na proste faktore $q = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$. Tada $x = \frac{p}{q}$ ima oblik

$$x = \frac{p}{p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}}.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k \cdot \alpha_i \geq \beta_i,\ i = 1, 2, ..., n$. Tada je $b^k = \left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\right)^k$ te vrijedi $q \mid b^k$. S obzirom da q dijeli b^k, onda postoji prirodan broj $l \in \mathbb{N}$ takav da je $b^k = l \cdot q$, tj. $q = \frac{b^k}{l}$. Odatle slijedi

$$x = \frac{p}{q} = \frac{p}{\frac{b^k}{l}} = \frac{p \cdot l}{b^k}$$

te je jasno da je decimalan zapis od x konačan. □

Direktno iz ovog teorema slijedi za bazu $b = 10$, tj. za dekadski sustav, sljedeći korolar (prema [2]):

Korolar 3.0.4. *Neka je $b = 10$ dana baza. Njezin rastav na proste faktore je oblika $b = 2 \cdot 5$. Decimalni zapis racionalnog broja $x = \frac{p}{q}$ u bazi $b = 10$ je konačan ako i samo ako rastav na proste faktore od q sadrži samo brojeve 2 i 5.*

Primjer 3.0.5. *Je li decimalni prikaz broja $\frac{3}{16}$ konačan u danim bazama:*
a) $b = 10$
b) $b = 7$
c) $b = 6$*?*

Rješenje: *Pogledajmo rastav nazivnika na proste faktore*

$$16 = 2^4$$

a) *Rastav baze $b = 10$ na proste faktore je oblika*

$$10 = 2 \cdot 5$$

pa je prema Korolaru 3.0.4 decimalni zapis broja $\frac{3}{16}$ konačan. Želimo li se računski uvjeriti u ovaj postupak, primijenimo algoritam iz Teorema 2.0.1 i dobivamo

$$\frac{3}{16} = (0.1875)_{10}\,.$$

b) *Rastav baze $b = 7$ na proste faktore sadrži samo faktor 7. S obzirom da nazivnik 16 u svom rastavu na proste faktore ne sadrži broj 7, prema Teoremu 3.0.3 zaključujemo da decimalni zapis broja $\frac{3}{16}$ u bazi $b = 7$ nije konačan.*

c) *Rastav baze $b = 6$ na proste faktore sadrži faktore 2 i 3. Nazivnik 16 u svom rastavu sadrži broj 2, ali ne sadrži broj 3 pa prema Teoremu 3.0.3 zaključujemo da decimalni zapis broja $\frac{3}{16}$ u bazi $b = 6$ nije konačan.*

Pogledamo li prethodni primjer, primijetit ćemo da rastav nazivnika na proste faktore u b) dijelu primjera ne sadrži nijedan od faktora koji se nalaze u rastavu baze na proste faktore. Valjano je pitati se kakav će tada biti decimalni zapis u bazi b? Odgovor na to pitanje daje sljedeći teorem (prema [15] i [3]):

Teorem 3.0.6. *Neka je $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ proizvoljno odabrana baza te neka je $b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ rastav od b na proste faktore. Decimalni zapis racionalnog broja $x = \frac{p}{q}$ u bazi b je čisto periodičan ako i samo ako rastav nazivnika q na proste faktore ne sadrži nijedan od brojeva $p_1, p_2, ..., p_n$.*

Dokaz. Neka je $x = \frac{p}{q}$ racionalan broj čiji je decimalni zapis čisto periodičan, odnosno decimalni zapis broja x ne sadrži pretperiod. Dakle, x možemo prikazati kao

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} + \frac{a_1}{b^{n+1}} + \frac{a_2}{b^{n+2}} + ... + \frac{a_n}{b^{2n}} + ...\\
x &= \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n}\right) + \frac{1}{b^n}\left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n}\right) + \frac{1}{b^{2n}}\left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n}\right) + ...\\
x &= \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{2n}} + \frac{1}{b^{3n}} + ...\right)
\end{aligned}$$

Izraz $1 + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{2n}} + \frac{1}{b^{3n}} + ...$ je suma geometrijskog reda čiji je opći član $\frac{1}{b^n}$. S obzirom da vrijedi $|\frac{1}{b^n}| < 1$, onda dani red konvergira i njegova suma je

$$1 + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{2n}} + \frac{1}{b^{3n}} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{b^n}} = \frac{1}{\frac{b^n - 1}{b^n}} = \frac{b^n}{b^n - 1}.$$

Tada je x oblika

$$x = \frac{a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + ... + a_n}{b^n} \cdot \frac{b^n}{b^n - 1}$$
$$\frac{p}{q} = \frac{a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + ... + a_n}{b^n - 1}.$$

Očigledno q dijeli $b^n - 1$ pa vrijedi $b^n - 1 \equiv 0 \pmod{q}$, a odatle pak slijedi $b^n \equiv 1 \pmod{q}$. To znači da je najveći zajednički djelitelj brojeva b^n i q broj 1, odnosno da su b^n i q relativno prosti brojevi. Odatle zaključujemo da rastav broja q na proste faktore ne sadrži nijedan od prostih faktora koji se nalaze u rastavu broja b^n.

Obratno, neka je $x = \frac{p}{q}$ racionalan broj čiji nazivnik ne sadrži u svom rastavu nijedan od prostih faktora $p_1, p_2, ..., p_n$. Tada je najveći zajednički djelitelj brojeva q i b broj 1, odnosno q i b su relativno prosti brojevi.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj takav da je $b^n \equiv 1 \pmod{q}$ (n je red od b modulo q prema Definiciji 3.0.11). To znači da b^n pri dijeljenju s q daje ostatak 1 pa prema Teoremu o dijeljenju s ostatkom (vidi [2, str. 22]) postoji cijeli broj m takav da je $b^n = m \cdot q + 1$. Pomnožimo li x s b^n dobit ćemo

$$b^n x = \frac{b^n \cdot p}{q} = \frac{(m \cdot q + 1) \cdot p}{q} = m \cdot p + \frac{p}{q} = m \cdot p + x. \tag{3.2}$$

Decimalni prikaz broja x dan je s

$$x = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_n}{b^n} + \frac{a_{n+1}}{b^{n+1}} + ... \tag{3.3}$$

Pomnožimo li izraz (3.3) s b^n dolazimo do

$$b^n x = \left(a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + ... + a_n\right) + \left(\frac{a_{n+1}}{b} + \frac{a_{n+2}}{b^2} + ... + \frac{a_{2n}}{b^n}\right) + ... \tag{3.4}$$

Usporedimo li izraze (3.2) i (3.4) dobivamo da je

$$x = \frac{a_{n+1}}{b} + \frac{a_{n+2}}{b^2} + ... + \frac{a_{2n}}{b^n} + ... \tag{3.5}$$

Usporedimo li sada izraze (3.3) i (3.5) dolazimo do sljedećih jednakosti

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 \\ a_{n+2} &= a_2 \\ a_{n+3} &= a_3 \\ &\vdots \\ a_{2n} &= a_n \end{aligned}$$

Primijetimo da se nakon n mjesta decimale počinju ponavljati pa zaključujemo da je decimalni zapis broja x čisto periodičan. $\square$

Iz ovog teorema direktno slijedi korolar za bazu $b = 10$ (prema [2]):

Korolar 3.0.7. *Neka je $b = 10$ dana baza. Njezin rastav na proste faktore je oblika $b = 2 \cdot 5$. Decimalni zapis racionalnog broja $x = \frac{p}{q}$ u bazi $b = 10$ je čisto periodičan ako i samo ako rastav nazivnika q na proste faktore ne sadrži ni broj 2 ni broj 5.*

Vratimo li se ponovo na c) dio Primjera 3.0.5, pitamo se kakav će biti decimalni zapis racionalnog broja u danoj bazi, ako rastav nazivnika na proste faktore sadrži iste proste faktore kao i rastav baze na proste faktore, ali i još neke proste faktore koje rastav baze ne sadrži. U Teoremu 3.0.2 dokazali smo da je decimalni zapis racionalnog broja konačan ili periodičan. Prema Teoremu 3.0.3 rastav je konačan kada rastav nazivnika sadrži samo one faktore koje sadrži i rastav baze na proste faktore. Zatim smo pokazali u Teoremu 3.0.6 da je decimalni zapis čisto periodičan kada rastav nazivnika na proste faktore ne sadrži nijedan od faktora koje sadrži rastav baze na proste faktore. Sada nam je još preostala mogućnost da rastav nazivnika sadrži faktore koje sadrži baza i još neke. Tada će decimalni prikaz broja biti mješovito periodičan. Dakle, iz Teorema 3.0.2, Teorema 3.0.3 i Teorema 3.0.6 slijedi teorem (prema [3]):

Teorem 3.0.8. *Neka je $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ proizvoljno odabrana baza te neka je $b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ rastav od b na proste faktore. Decimalni zapis racionalnog broja $x = \frac{p}{q}$ u bazi b je mješovito periodičan ako i samo ako rastav nazivnika q na proste faktore uz brojeve $p_1, ..., p_n$ sadrži i faktor $Q > 1$ takav da je $\mathrm{nzd}\,(b, Q) = 1$.*

Direktno iz Teorema 3.0.8 slijedi korolar (prema [2]):

Korolar 3.0.9. *Neka je $b = 10$ dana baza. Njezin rastav na proste faktore je oblika $b = 2 \cdot 5$. Decimalni zapis racionalnog broja $x = \frac{p}{q}$ u bazi $b = 10$ je mješovito periodičan ako i samo ako rastav nazivnika q na proste faktore uz brojeve 2 i 5 sadrži i faktor $Q > 1$ takav da je $\mathrm{nzd}\,(10, Q) = 1$.*

Primjer 3.0.10. *Je li decimalni prikaz broja $\frac{4}{15}$ mješovito periodičan u danim bazama:*
a) $b = 10$
b) $b = 7$*?*

Rješenje: *Rastav nazivnika* 15 *na proste faktore sadrži brojeve* 5 *i* 3.

a) *Rastav baze* $b = 10$ *na proste faktore sadrži brojeve* 2 *i* 5. *S obzirom da rastav nazivnika na proste faktore sadrži broj* 2 *i* 3 *te su* 3 *i* 10 *relativno prosti brojevi, prema Korolaru 3.0.9 zaključujemo da je decimalni zapis broja* $\frac{4}{15}$ *mješovito periodičan. Želimo li se računski uvjeriti u to, primjenom algoritma iz Teorema 1.0.2 dolazimo do*

$$\frac{4}{15} = \left(0.2\overline{6}\right)_{10}.$$

b) *Rastav baze* $b = 7$ *na proste faktore sadrži samo broj* 7. *Tada je prema Korolaru 3.0.7 decimalni zapis broja* $\frac{4}{15}$ *čisto periodičan. Primijenimo li algoritam iz Teorema 1.0.2, dobivamo*

$$\frac{4}{15} = \left(0.\overline{16031}\right)_{7}.$$

Osim određivanja je li decimalni zapis racionalnog broja konačan, čisto periodičan ili mješovito periodičan, možemo mu odrediti duljinu perioda i pretperioda. U tu svrhu definirajmo pojmove *reda od b modulo q* i *Eulerove funkcije* (prema [2]):

Definicija 3.0.11. *Neka je skup* $M = \{a \mid a \in \{1, 2, 3, ..., m\},\ \mathrm{nzd}(a, m) = 1\}$ *reducirani sustav ostataka modulo m. Broj* $\varphi(m)$ *je broj elemenata skupa M, a funkcija* φ *se naziva Eulerova funkcija.*

Definicija 3.0.12. *Neka su b i q relativno prosti prirodni brojevi. Najmanji prirodni broj d sa svojstvom da je* $b^d \equiv 1 \pmod{q}$ *zove se red od b modulo q. Još se kaže da b pripada eksponentu d modulo q.*

Promatramo racionalni broj $x = \frac{p}{q}$, $0 < p < q, \mathrm{nzd}(p, q) = 1$. Neka je $q = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n} \cdot Q$, $Q > 1$ rastav nazivnika na proste faktore. Ako je x čisto periodičan decimalni broj, onda je duljina perioda jednaka redu od b modulo q. Ako je x mješovito periodičan, onda je duljina perioda jednaka redu od b modulo Q, a duljina pretperioda je jednaka $\max(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ (prema [3]).

Primjer 3.0.13. *Odredite duljinu perioda i pretperioda decimalnog zapisa danih brojeva u danim bazama:*
a) $x = \frac{3}{13}$, $b = 10$,
b) $x = \frac{3}{14}$, $b = 10$,

c) $x = \frac{3}{13}$, $b = 8$,
d) $x = \frac{3}{14}$, $b = 8$.

Rješenje: *Rastav baza na proste faktore je* $10 = 2 \cdot 5$ *i* $8 = 2^3$*, a rastav danih nazivnika ma proste faktore je* $13 = 13$ *i* $14 = 2 \cdot 7$*. Analizirajmo duljinu perioda i pretperioda danih brojeva u traženim bazama:*

a) *S obzirom da rastav nazivnika* 13 *na proste faktore ne sadrži ni* 2 *ni* 5*, prema Korolaru 3.0.7 decimalni zapis broja* $\frac{3}{13}$ *bit će čisto periodičan. Dakle, duljina perioda njegovog decimalnog zapisa bit će jednaka redu od* 10 *modulo* 13 *pa ga odredimo:*

$$\begin{aligned}
10^1 &\equiv 10 \pmod{13}\\
10^2 &\equiv 9 \pmod{13}\\
10^3 &\equiv 12 \pmod{13}\\
10^4 &\equiv 3 \pmod{13}\\
10^5 &\equiv 4 \pmod{13}\\
10^6 &\equiv 1 \pmod{13}.
\end{aligned}$$

Red od 10 *modulo* 13 *jednak je* 6 *pa će se period sastojati od* 6 *znamenaka. Računski odredimo decimalni zapis primjenom algoritma iz Teorema 1.0.2 da bismo se uvjerili u istinitost tvrdnje pa dobivamo*

$$\frac{3}{13} = \left(0.\overline{230769}\right)_{10}.$$

Uistinu je period duljine 6.

b) *Nazivnik* 14 *u svom rastavu na proste faktore sadrži broj* 2 *i broj* 7 *(*$Q = 7$*) pa će prema Korolaru 3.0.9 njegov decimalni zapis biti mješovito periodičan. Tada će mu duljina pretperioda biti jednaka* 1*, a duljinu perioda ćemo odrediti nakon što pronađemo red od* 10 *modulo* 7*:*

$$\begin{aligned}
10^1 &\equiv 3 \pmod{7}\\
10^2 &\equiv 2 \pmod{7}\\
10^3 &\equiv 6 \pmod{7}\\
10^4 &\equiv 4 \pmod{7}\\
10^5 &\equiv 5 \pmod{7}\\
10^6 &\equiv 1 \pmod{7}.
\end{aligned}$$

Uvjerimo se računski da broj $\frac{3}{14}$ *ima pretperiod duljine* 1 *i period duljine* 6*:*

$$\frac{3}{14} = \left(0.2\overline{142857}\right)_{10}.$$

c) *Rastav nazivnika* 13 *na proste faktore ne sadrži broj* 2 *pa će decimalni zapis razlomka* $\frac{3}{13}$ *u bazi* $b = 8$ *prema Teoremu 3.0.6 biti čisto periodičan. Duljina perioda bit će jednaka redu od* 8 *modulo* 13 *pa ga odredimo*

$$\begin{aligned} 8^1 &\equiv 8 \pmod{13} \\ 8^2 &\equiv 12 \pmod{13} \\ 8^3 &\equiv 5 \pmod{13} \\ 8^4 &\equiv 1 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Pronašli smo red od 8 *modulo* 13 *te je on jednak* 4*. Slijedi da će duljina perioda u decimalnom zapisu broja* $\frac{3}{13}$ *u bazi* $b = 8$ *biti* 4*. Primjenom algoritma iz Teorema 1.0.2 dolazimo do decimalnog zapisa*

$$\frac{3}{13} = \left(0.\overline{1661}\right)_8.$$

d) *Rastav nazivnika* 14 *na proste faktore sadrži broj* 2 *i broj* 7 *pa će prema Teoremu 3.0.8 decimalni zapis broja* $\frac{3}{14}$ *u bazi* $b = 8$ *biti mješovito periodičan s duljinom pretperioda* 1 *i duljinom perioda jednakom redu od* 8 *modulo* 7*. Ponovo provodimo isti postupak određivanja reda te dobivamo*

$$8^1 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Dakle, duljine pretperioda i perioda jednake su 1*, a primjenom algoritma iz Teorema 1.0.2 vidimo da je to uistinu tako*

$$\frac{3}{14} = \left(0.1\overline{5}\right)_8.$$

Poglavlje 4

Decimalni zapis iracionalnih brojeva

Poznato svojstvo iracionalnih brojeva je da je njihov decimalni zapis beskonačan neperiodičan, a ono slijedi iz prethodno dokazanog Teorema 3.0.2 iz poglavlja o decimalnom zapisu racionalnih brojeva (prema [15]):

Teorem 4.0.1. *Decimalni zapis broja koji nije niti konačan niti periodičan odgovara iracionalnom broju.*

Primjer 4.0.2. *Dokažite da je broj* $x = 0.12345678910111213141516171819 20...$ *iracionalan.*

Rješenje: *(prema [15]) Pretpostavimo da x nije iracionalan, tj. da je racionalan. S obzirom da su brojevi iza decimalne točke prirodni brojevi, u decimalnom dijelu broja x se nalaze svi brojevi* $10,\ 100,\ 1000,\ ...$*, tj. svi brojevi oblika* 10^n, $n \geq 0$*. Dijeljenjem brojnika p nazivnikom q dobivamo najviše q različitih ostataka, tj. period je najviše duljine q i sastoji se od brojeva* $0,\ 1,\ 2, ...,\ q-1$*. No, u decimalnom dijelu broja u jednom će se trenutku pojaviti broj* 10^n, $n \geq q$ *što znači da će se period sastojati samo od nula, a to je nemoguće zato što se u broju pojavljuje beskonačno mnogo znamenki* 1*. Dakle, broj x mora biti iracionalan.*

Broj iz Primjera 4.0.2 naziva se *Champernowneova konstanta*. Matematičar David G. Champernowne (vidi [13]) prvi je opisao pojam *normalnih brojeva* (vidi [3, str. 124]), a najjednostavniji normalan broj koji se može konstruirati upravo je broj 0.12345678910... što je Champernowne objavio 1933. godine. Četiri godine kasnije Kurth Mahler je dokazao da je Champernowneova konstanta transcedentalan broj (prema [14]).

Primjeri poznatih iracionalnih brojeva čije dokaze ne navodimo su broj π, Eulerova konstanta e te zlatni rez $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Poglavlje 5

Zanimljivosti o decimalnom zapisu realnih brojeva

5.1 Cikličke permutacije decimala

Dosad smo promatrali svojstva decimalnih brojeva u proizvoljnoj bazi b pa smo onda posebno promatrali decimalni prikaz u bazi $b = 10$. U ovom ćemo potpoglavlju krenuti od primjera u bazi $b = 10$ pa ćemo onda promatrano svojstvo proširiti na proizvoljno odabranu bazu $b \in \mathbb{N}, b > 1$. U tu svrhu, promotrimo sljedeći primjer:

Primjer 5.1.1. *Odredite decimalni zapis sljedećih brojeva u bazi* $b = 10 : \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$.

Rješenje: *Primijenimo li algoritam za određivanje decimalnog zapisa iz Teorema 1.0.2, dolazimo do sljedećih decimalnih prikaza danih brojeva:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0.\overline{142857}\\
\frac{2}{7} &= 0.\overline{285714}\\
\frac{3}{7} &= 0.\overline{428571}\\
\frac{4}{7} &= 0.\overline{571428}\\
\frac{5}{7} &= 0.\overline{714285}\\
\frac{6}{7} &= 0.\overline{857142}.
\end{aligned}$$

Pogledajmo decimalni prikaz traženih razlomaka. Uočimo da su 1, 2, 4, 5, 7 i 8 jedine znamenke koje se javljaju u periodu. Također, možemo primijetiti da se one javljaju u obliku cikličkih permutacija. Odgovor na pitanje zašto je to tako daje sljedeći teorem (prema [3] i [19]), no definirajmo prije toga pojam *primitivnog korijena* (prema [2]):

Definicija 5.1.2. *Ako je red od a modulo n jednak $\varphi(n)$, onda se a naziva primitivni korijen modulo n.*

Teorem 5.1.3. *Ako je q prost broj i ako je* 10 *primitivni korijen modulo q, onda decimalni zapisi brojeva $\frac{p}{q}$, $p = 1, 2, ..., q-1$ imaju period duljine $q-1$ te im se periodi razlikuju jedino po cikličkim permutacijama znamenki.*

Dokaz. Neka je q prost broj i neka je 10 primitivni korijen modulo q. Pokažimo najprije da se tada period decimalnog zapisa broja $\frac{1}{q}$ sastoji od $q-1$ znamenki. Iz definicije primitivnog korijena znamo da su q i 10 relativno prosti brojevi, tj. $\mathrm{nzd}(q, 10) = 1$.
Neka je duljina perioda decimalnog zapisa broja $\frac{1}{q}$ jednaka t. Tada je t najmanji prirodan broj za koji je $\frac{10^t-1}{q}$ cijeli broj. Točnije, t je najmanji prirodan broj takav da q dijeli izraz $10^t - 1$. Odatle slijedi da je $10^t - 1 \equiv 0 \pmod{q}$, tj.

$$10^t \equiv 1 \pmod{q}. \tag{5.1}$$

Iz Eulerovog teorema (vidi [2, str. 52]) slijedi da je

$$10^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod{q}. \tag{5.2}$$

Prema (5.1) i (5.2) zaključujemo

$$t = \varphi(q).$$

Kako je q prost broj, onda je $\varphi(q) = q-1$ pa je $t = q-1$. Dokazali smo da je period broja $\frac{1}{q}$ duljine $q-1$.
Još je potrebno dokazati da se periodi brojeva $\frac{p}{q}$, $p = 1, 2, ..., q-1$ razlikuju jedino po cikličkim permutacijama znamenki. S obzirom da je $q-1$ red od 10 modulo q, to znači da za svaki $p \in \{1, 2, ..., q-1\}$ postoji prirodan broj k takav da je $10^k \equiv p \pmod{q}$. Tada su decimalni zapisi brojeva $\frac{10^k}{q}$ i $\frac{p}{q}$ jednaki. Točnije, period broja $\frac{p}{q}$ sadrži iste znamenke kao i period broja $\frac{1}{q}$, ali im se razlikuju početne znamenke. □

Ilustrirajmo drugi dio dokaza ovog teorema na početnom primjeru ovog potpoglavlja. Znamo da je decimalni zapis broja $\frac{1}{7}$ jednak

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}.$$

Želimo li odrediti decimalni zapis broja $\frac{3}{7}$, moramo pronaći koja potencija baze 10 je kongruentna broju 3 modulo 7. To je prva potencija baze 10, tj. $10^1 \equiv 3 \pmod 7$. Prema dokazanom teoremu, decimalni dio decimalnog zapisa broja $\frac{3}{7}$ jednak je decimalnom dijelu zapisa broja $10^1 \cdot \frac{1}{7}$, tj.

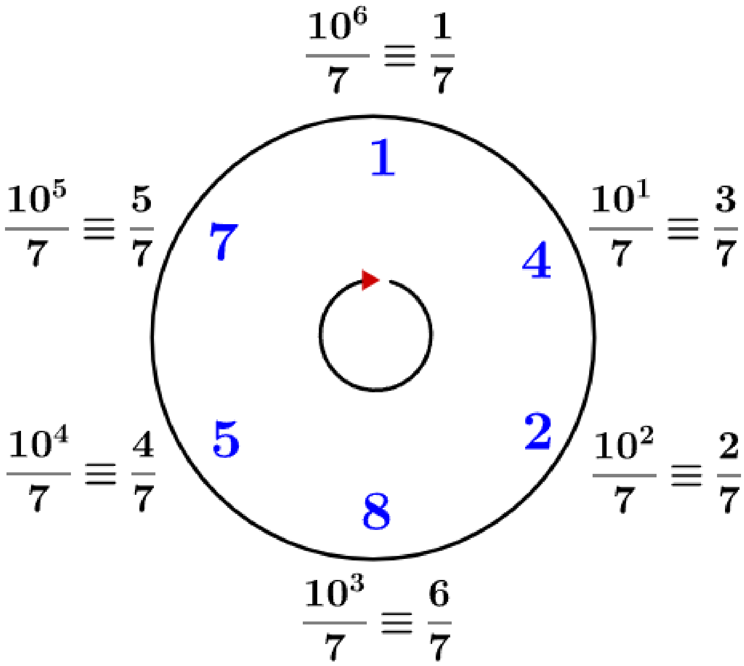
$$10^1 \cdot \frac{1}{7} = 10 \cdot 0.\overline{142857} = 1.\overline{428571},$$

odnosno

$$\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}.$$

Pogledamo li Primjer 5.1.1, vidimo da se decimalni zapisi podudaraju.

Ovo svojstvo možemo zornije prikazati cikličkim dijagramom koji su osmislili sveučilišni profesori Lawrence Brenton i Richard Pineau (prema [19]):



Slika 5.1: Dijagram cikličkih permutacija brojeva $\frac{p}{7}$ u bazi $b = 10$.

Unutar kruga je kod svakog razlomka broj kojim počinje period njegovog decimalnog zapisa. Krećemo se u smjeru kazaljke na satu.

Svojstvo cikličkih permutacija decimala može se činiti poprilično neobično pa bismo mogli zaključiti da takvih brojeva kojima se decimalni zapisi ciklički ponavljaju ima jako malo. Međutim, takvih brojeva ima oko 37% što je naslutio Emil Artin (prema [19]). Navedimo nekoliko prvih brojeva manjih od 100 za koje je 10 primitivni korijen:

$$7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, ...$$

S obzirom da smo u prethodnim poglavljima obrađivali decimalne prikaze u različitim bazama, pitamo se je li moguće poopćiti svojstvo cikličkih permutacija decimala na proizvoljnu bazu b. Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 5.1.4. *Odredite decimalne prikaze brojeva $\frac{p}{7}$, $p = 1, 2, ..., 6$ u bazi $b = 3$.*

Rješenje: *Primijenimo algoritam za pretvaranje realnih brojeva u decimalne u proizvoljnoj bazi b:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{7} - \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor = \frac{1}{7},\ a_1 = \left\lfloor \frac{3}{7} \right\rfloor = 0\\
x_2 &= \frac{3}{7} - \left\lfloor \frac{3}{7} \right\rfloor = \frac{3}{7},\ a_2 = \left\lfloor \frac{9}{7} \right\rfloor = 1\\
x_3 &= \frac{9}{7} - \left\lfloor \frac{9}{7} \right\rfloor = \frac{2}{7},\ a_3 = \left\lfloor \frac{6}{7} \right\rfloor = 0\\
x_4 &= \frac{6}{7} - \left\lfloor \frac{6}{7} \right\rfloor = \frac{6}{7},\ a_4 = \left\lfloor \frac{18}{7} \right\rfloor = 2\\
x_5 &= \frac{18}{7} - \left\lfloor \frac{18}{7} \right\rfloor = \frac{4}{7},\ a_5 = \left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor = 1\\
x_6 &= \frac{12}{7} - \left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor = \frac{5}{7},\ a_6 = \left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor = 2\\
x_7 &= \frac{15}{7} - \left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor = \frac{1}{7},\ a_7 = \left\lfloor \frac{3}{7} \right\rfloor = 0.
\end{aligned}$$

Algoritam ovdje staje jer je $x_7 = x_1$ i $a_7 = a_1$. Dakle, decimalni zapis broja $\frac{1}{7}$ u bazi $b = 3$ je

$$\frac{1}{7} = \left(0.\overline{010212}\right)_3.$$

Analogno dobivamo sljedeće decimalne prikaze:

$$\frac{2}{7} = \left(0.\overline{021201}\right)_3$$
$$\frac{3}{7} = \left(0.\overline{010212}\right)_3$$
$$\frac{4}{7} = \left(0.\overline{120102}\right)_3$$
$$\frac{5}{7} = \left(0.\overline{201021}\right)_3$$
$$\frac{6}{7} = \left(0.\overline{212010}\right)_3 .$$

Možemo primijetiti da se periodi u decimalnim prikazima brojeva $\frac{p}{7}$, $p = 1, 2, ..., 6$ sastoje od znamenaka 0, 1 i 2 i to u cikličkom poretku te su duljine 6. Također, broj 3 je primitivni korijen modulo 7. Dakle, naslućujemo da bi se svojstvo cikličkih permutacija koje vrijedi u bazi $b = 10$ moglo prenijeti i na ostale proizvoljne baze što iskazujemo u sljedećem teoremu (prema [19]):

Teorem 5.1.5. *Ako je q prost broj i ako je b primitivni korijen modulo q, onda decimalni zapisi brojeva $\frac{p}{q}$, $p = 1, 2, ..., q-1$ u bazi b imaju period duljine $q-1$ te im se periodi razlikuju jedino po cikličkim permutacijama znamenki.*

Dokaz. Neka je q prost broj i neka je b primitivni korijen modulo q. Pokažimo najprije da se tada period decimalnog zapisa broja $\frac{1}{q}$ sastoji od $q-1$ znamenki. Iz definicije primitivnog korijena znamo da su q i b relativno prosti brojevi, tj. $\operatorname{nzd}(q, b) = 1$.
Neka je duljina perioda decimalnog zapisa broja $\frac{1}{q}$ jednaka t. Tada je t najmanji prirodan broj za koji je $\frac{b^t-1}{q}$ cijeli broj. Točnije, t je najmanji prirodan broj takav da q dijeli izraz $b^t - 1$. Odatle slijedi da je $b^t - 1 \equiv 0 \pmod{q}$, tj.

$$b^t \equiv 1 \pmod{q} . \tag{5.3}$$

Iz Eulerovog teorema (vidi [2, str. 52]) slijedi da je

$$b^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod{q} . \tag{5.4}$$

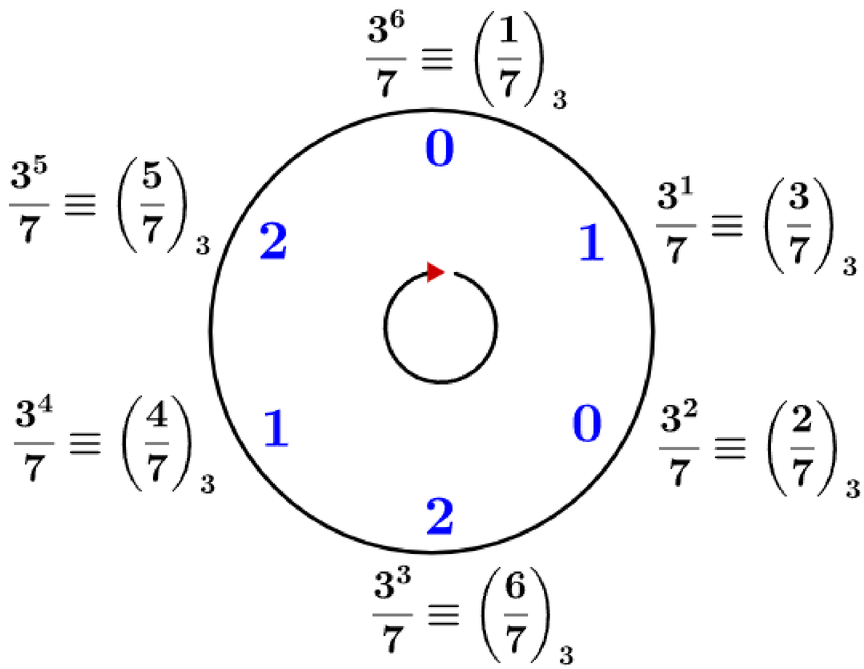
Prema (5.3) i (5.4) zaključujemo

$$t = \varphi(q) .$$

Kako je q prost broj, onda je $\varphi(q) = q - 1$ pa je $t = q - 1$. Dokazali smo da je period broja $\frac{1}{q}$ duljine $q - 1$.
Ono što je potrebno još dokazati je da se periodi brojeva $\frac{p}{q}$, $p = 1, 2, ..., q-1$ razlikuju

jedino po cikličkim permutacijama znamenki. S obzirom da je $q-1$ red od b modulo q, to znači da za svaki $p \in \{1, 2, ..., q-1\}$ postoji prirodan broj k takav da je $b^k \equiv p \pmod{q}$. Tada su decimalni zapisi brojeva $\frac{b^k}{q}$ i $\frac{p}{q}$ jednaki. Točnije, period broja $\frac{p}{q}$ sadrži iste znamenke kao i period broja $\frac{1}{q}$, ali im se razlikuju početne znamenke. □

Dakle, želimo li odrediti period decimalnog prikaza broja $\frac{6}{7}$ u bazi $b = 3$, moramo pronaći potenciju baze b koja je kongruentna 6 modulo 7. To je potencija 3^3, tj. $3^3 \equiv 6 \pmod{7}$. Odatle slijedi da je $\frac{3^3}{7} \equiv \frac{6}{7} \pmod{7}$ pa moramo pomnožiti decimalni zapis broja $\frac{1}{7}$ s 3^3 u bazi $b = 3$ da bismo dobili decimalni zapis broja $\frac{6}{7}$. Ciklički prikaz permutacija brojeva $\frac{p}{q}$, $p = 1, 2, ..., 6$ u bazi $b = 3$ možemo prikazati sljedećim dijagramom:



Slika 5.2: Dijagram cikličkih permutacija brojeva $\frac{p}{7}$ u bazi $b = 3$.

Nakon što smo prošli proste brojeve za koje je 10 primitivni korijen, možemo se pitati vrijedi li isto cikličko ponavljanje decimala za proste brojeve za koje 10 nije primitivni korijen. U tu svrhu pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 5.1.6. *Odredite decimalne zapise brojeva* $\frac{p}{13}$, $p = 1, 2, ..., 12$ *u bazi* $b = 10$.

Rješenje: *Primjenjujući algoritam iz Teorema 1.0.2 za traženje decimalnog zapisa danih racionalnih brojeva u bazi* 10 *dolazimo do sljedećeg:*

$$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923} \qquad \frac{7}{13} = 0.\overline{538461}$$
$$\frac{2}{13} = 0.\overline{153846} \qquad \frac{8}{13} = 0.\overline{615384}$$
$$\frac{3}{13} = 0.\overline{230769} \qquad \frac{9}{13} = 0.\overline{692307}$$
$$\frac{4}{13} = 0.\overline{307692} \qquad \frac{10}{13} = 0.\overline{769230}$$
$$\frac{5}{13} = 0.\overline{384615} \qquad \frac{11}{13} = 0.\overline{846153}$$
$$\frac{6}{13} = 0.\overline{461538} \qquad \frac{12}{13} = 0.\overline{923076}$$

Analiziramo li ovaj primjer, primijetit ćemo da postoje dvije grupe znamenki od kojih se sastoje periodi decimalnih zapisa. Prva grupa znamenki sastoji se od brojeva $0,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9$, a druga se grupa znamenki sastoji od brojeva $1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8$. Neka je A skup svih ostataka pri dijeljenju broja 10^n brojem 13. Tada se A sastoji od sljedećih elemenata:

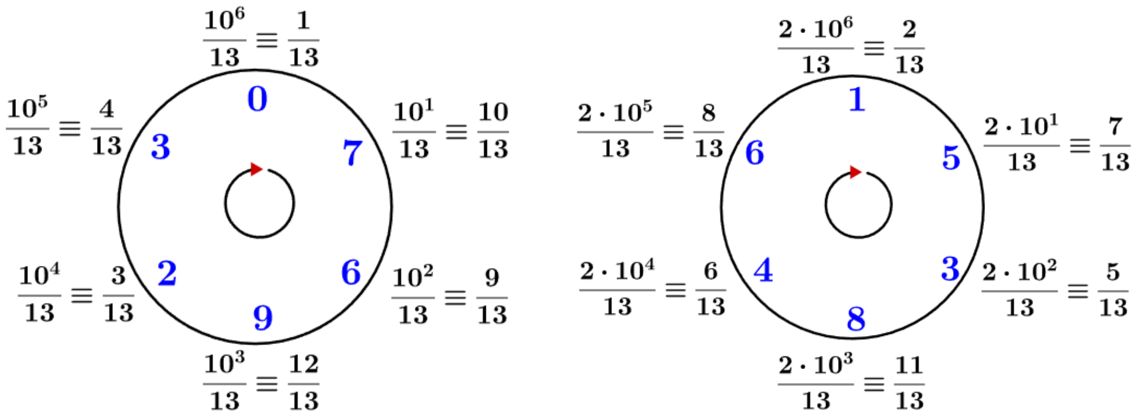
$$A = \{10,\ 9,\ 12,\ 3,\ 4,\ 1\}.$$

Dakle, periodi razlomaka $\frac{10}{13},\ \frac{9}{13},\ \frac{12}{13},\ \frac{3}{13},\ \frac{4}{13},\ \frac{1}{13}$ sadrže isti skup znamenki u cikličkim permutacijama kao što je to kod broja $\frac{1}{13}$, odnosno sadrže skup znamenki 076923.

Pomnožimo li svaki element skupa A brojem 2, dobijemo skup B čiji su elementi također ostaci pri dijeljenju brojeva $2a,\ a \in A$, brojem 13, tj.

$$B = \{7,\ 5,\ 11,\ 6,\ 8,\ 2\}.$$

Analogno zaključujemo da periodi razlomaka $\frac{7}{13},\ \frac{5}{13},\ \frac{11}{13},\ \frac{6}{13},\ \frac{8}{13},\ \frac{2}{13}$ sadrže skup znamenki 153846 u cikličkim permutacijama. Cikličke permutacije razlomaka iz Primjera 5.1.6 prikazujemo sljedećim dijagramima:



Slika 5.3: Cikličke permutacije brojeva $\frac{p}{13}$ u bazi $b = 10$.

Općenito ćemo kod razlomaka oblika $\frac{p}{q}$, $p = 1, 2, ..., q - 1$, pri čemu je q prost broj, u bazi $b = 10$ moći podijeliti ostatke pri dijeljenju s q u $\frac{\varphi(q)}{d}$ skupova pri čemu je φ Eulerova funkcija, a d red od $b = 10$ modulo q. Svaki od tih skupova bit će skup znamenki koje ciklički određuju periode odgovarajućih racionalnih brojeva.

Za kraj ovog potpoglavlja, pogledajmo primjer u bazi $b = 3$.

Primjer 5.1.7. *Odredi decimalni prikaz brojeva* $\frac{p}{11}$, $p = 1, 2, ..., 10$ *u bazi* $b = 3$.

Rješenje: *Primijenimo li algoritam za određivanje decimalnog zapisa u proizvoljnoj bazi, dolazimo do sljedećih decimalnih prikaza brojeva* $\frac{p}{11}$, $p = 1, 2, ..., 10$ *u bazi* $b = 3$*:*

$$\frac{1}{11} = \left(0.\overline{00211}\right)_3 \qquad \frac{6}{11} = \left(0.\overline{11220}\right)_3$$
$$\frac{2}{11} = \left(0.\overline{01122}\right)_3 \qquad \frac{7}{11} = \left(0.\overline{12201}\right)_3$$
$$\frac{3}{11} = \left(0.\overline{02110}\right)_3 \qquad \frac{8}{11} = \left(0.\overline{20112}\right)_3$$
$$\frac{4}{11} = \left(0.\overline{10021}\right)_3 \qquad \frac{9}{11} = \left(0.\overline{21100}\right)_3$$
$$\frac{5}{11} = \left(0.\overline{11002}\right)_3 \qquad \frac{10}{11} = \left(0.\overline{22011}\right)_3$$

Analizirajmo prvo odnos brojeva 3 i 11. Oni su međusobno relativno prosti, tj. nzd $(3, 11) = 1$. Potencija $d = 5$ baze 3 je najmanja potencija za koju vrijedi

$$3^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

pa zaključujemo da je red od 3 modulo 11 jednak 5. Nadalje, broj brojeva u nizu $1, 2, ..., 11$ koji su relativno prosti s 11 je 10, tj.

$$\varphi(11) = 10.$$

S obzirom da je $d \neq \varphi(11)$, 3 nije primitivni korijen modulo 11.

Pogledamo li periode iz prethodnog primjera, vidimo da su oni duljine $d = 5$, a sastoje se od dva skupa znamenki koje se ciklički ponavljaju:

$$A = \{0,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1\}$$
$$B = \{0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2\}.$$

Periodi brojeva $\frac{1}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{9}{11}$ sadrže ciklički permutirane znamenke iz skupa A, dok periodi brojeva $\frac{2}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{10}{11}$ sadrže ciklički permutirane znamenke iz skupa B. Dakle, podijelili smo znamenke koje se javljaju u periodu u $\frac{\varphi(11)}{d} = \frac{10}{5} = 2$ skupa.

Općenito ćemo kod razlomaka oblika $\frac{p}{q}$, $p = 1, 2, ..., q-1$, pri čemu je q prost broj, u bazi b moći podijeliti ostatke pri dijeljenju s q u $\frac{\varphi(q)}{d}$ skupova pri čemu je φ Eulerova funkcija, a d red od b modulo q. Svaki od tih skupova će biti skup znamenki koje ciklički određuju periode odgovarajućih racionalnih brojeva.

5.2 Midyjev teorem

Promotrimo decimalni zapis broja $\frac{2}{7}$ u bazama $b_1 = 10$ i $b_2 = 3$:

$$\frac{2}{7} = \left(0.\overline{285714}\right)_{10}$$
$$\frac{2}{7} = \left(0.\overline{021201}\right)_{3}.$$

Grupirajmo sada znamenke perioda u dvije jednakobrojne skupine. Ako je decimalni zapis broja $\frac{2}{7}$ jednak $0.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, neka onda prva skupina znamenki budu znamenke $a_1,\ a_2,\ a_3$, a druga znamenke $a_4,\ a_5,\ a_6$. Kreirajmo od tih znamenki dva broja te ih zbrojimo, tj.

$$(\overline{a_1a_2a_3})_b + (\overline{a_4a_5a_6})_b\,.$$

Dakle, grupiramo li znamenke perioda na opisani način te ih zbrojimo, dobit ćemo sljedeće:

$$(285)_{10} + (714)_{10} = (999)_{10}$$
$$(21)_3 + (201)_3 = (222)_3\,.$$

Kao rezultat dobili smo brojeve koji se sastoje samo od znamenki $b - 1$.

Ovo svojstvo decimalnih prikaza određenih razlomaka dao je slabo poznati matematičar Midy iz Nantesa u jednom pamfletu koji je izdan 1836. godine. Prikazano svojstvo iskazujemo u obliku teorema (prema [11] i [2]):

Teorem 5.2.1. *Neka je $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ proizvoljno odabrana baza. Neka je q prost broj takav da je $\operatorname{nzd}(b, q) = 1$ te neka je $p \in \mathbb{N}$ takav da je $0 < p < q$, $\operatorname{nzd}(p, q) = 1$. Ako je decimalni zapis broja $\frac{p}{q}$ u bazi b oblika*

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_t}{b^t} + ... + \frac{a_1}{b^{t+1}} + \frac{a_2}{b^{t+2}} + ... + \frac{a_t}{b^{2t}} + ...$$

pri čemu je t duljina perioda i t je paran broj, onda je

$$\overline{a_1a_2...a_u} + \overline{a_{u+1}a_{u+2}...a_2u} = b^u - 1,\ t = 2u.$$

Dokaz. Neka je $\frac{p}{q}$ oblika

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_u}{b^u} + \frac{a_1}{b^{u+1}} + \frac{a_2}{b^{u+2}} + ... + \frac{a_u}{b^{2u}} + ...\\ &= \frac{a_1b^{u-1} + ... + a_u}{b^u} + \frac{a_{u+1}b^{u-1} + ... + a_u}{b^{2u}} + \frac{a_1b^{u-1} + ... + a_u}{b^{3u}} + \frac{a_{u+1}b^{u-1} + ... + a_u}{b^{4u}} + ...\end{aligned}$$

Označimo s A i B brojeve:

$$\begin{aligned}A &= \overline{a_1a_2...a_u} = a_1b^{u-1} + a_2b^{u-2} + ... + a_u\\ B &= \overline{a_{u+1}a_{u+2}...a_{2u}} = a_{u+1}b^{u-1} + a_{u+2}b^{u-2} + ... + a_u.\end{aligned}$$

Sada decimalni zapis broja $\frac{p}{q}$ poprima oblik

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{A}{b^u} + \frac{B}{b^{2u}} + \frac{A}{b^{3u}} + \frac{B}{b^{4u}} + ...\\ &= \left(\frac{A}{b^u} + \frac{B}{b^{2u}}\right) + \frac{1}{b^{2u}}\left(\frac{A}{b^u} + \frac{B}{b^{2u}}\right) + \frac{1}{b^{4u}}\left(\frac{A}{b^u} + \frac{B}{b^{2u}}\right) + ...\\ &= \frac{Ab^u + B}{b^{2u}} \cdot \left(1 + \frac{1}{b^{2u}} + \frac{1}{b^{4u}} + ...\right).\end{aligned}$$

Primijetimo da se u drugoj zagradi nalazi geometrijski red čiji je opći član $\frac{1}{b^{2u}}$. S obzirom da je $\left|\frac{1}{b^{2u}}\right| < 1$, onda je red konvergentan i suma mu je jednaka $\frac{b^{2u}}{b^{2u}-1}$ pa $\frac{p}{q}$ poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{Ab^u + B}{b^{2u}} \cdot \frac{b^{2u}}{b^{2u} - 1}\\ \frac{p}{q} &= \frac{Ab^u + B}{b^{2u} - 1}.\end{aligned}$$

Primijenimo na nazivnik izraz za razliku kvadrata i dobijemo

$$\frac{p}{q} = \frac{Ab^u + B}{(b^u - 1) \cdot (b^u + 1)}$$

tj.

$$p \cdot (b^u - 1) \cdot (b^u + 1) = q \cdot (Ab^u + B)\,. \tag{5.5}$$

S obzirom da je $Ab^u + B$ cijeli broj, onda q dijeli ili $b^u - 1$ ili $b^u + 1$ (ne može dijeliti p jer je $\mathrm{nzd}\,(p, q) = 1$).
Ako q dijeli $b^u - 1$, onda je $b^u - 1 \equiv 0 \pmod q$, tj. $b^u \equiv 1 \pmod q$. Tada je red od b modulo q manji ili jednak u. S obzirom da je duljina perioda broja $\frac{p}{q}$ jednaka redu od b modulo q, onda je duljina perioda u ovom slučaju manja ili jednaka u. No, pretpostavka je da je duljina perioda $2u$ pa ovdje nailazimo na kontradikciju. Dakle, $q \nmid (b^u - 1)$.
Tada q dijeli $b^u + 1$ pa iz (5.5) slijedi da $b^u - 1$ dijeli $Ab^u + B$. Odatle slijedi da je

$$A + B \equiv 0 \;\; (b^u - 1) \tag{5.6}$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &\le A \le b^u - 1 \\ 0 &\le B \le b^u - 1. \end{aligned}$$

A i B ne mogu istovremeno biti 0 jer bi tada bilo $\frac{p}{q} = 0$, a odatle bi slijedilo $p = 0$ što je konradikcija s činjenicom da je $p \in \mathbb{N}$.
Također, A i B ne mogu istovremeno biti $b^u - 1$ jer bi u tom slučaju vrijedilo

$$\frac{p}{q} = \frac{(b^u - 1) \cdot b^u + b^u - 1}{b^{2u} - 1} = \frac{b^{2u} - b^u + b^u - 1}{b^{2u} - 1} = \frac{b^{2u} - 1}{b^{2u} - 1} = 1$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je $0 < p < q$. Zbog toga je

$$0 < A + B < 2 \cdot (b^u - 1) \tag{5.7}$$

Tada iz (5.6) i (5.7) dolazimo do

$$A + B = b^u - 1.$$

Time je dokaz dovršen. □

Možemo se pitati hoćemo li također kao rezultat dobiti brojeve koji se sastoje isključivo od znamenaka oblika $b - 1$, ako znamenke perioda redom grupiramo u 3 skupine, od njih načinimo brojeve te ih zbrojimo? Pogledajmo što će se desiti sa zbrojem kada primijenimo opisani postupak na broj $\frac{2}{7}$:

$$\begin{aligned}(28)_{10} + (57)_{10} + (14)_{10} &= (99)_{10}\\ (2)_3 + (12)_3 + (1)_3 &= (22)_3\,.\end{aligned}$$

Dakle, Midyjev teorem možemo proširiti tako da period decimalnog zapisa podijelimo na k blokova duljine $\frac{d}{k}$ pri čemu je d red od baze b modulo q (q je nazivnik razlomka). Proširenje Midyjevog teorema navodimo bez dokaza (prema [11]):

Teorem 5.2.2. *Neka je $b \in \mathbb{N},\ b > 1$ proizvoljno odabrana baza. Neka je $\frac{p}{q}$ razlomak takav da je q prost i $\operatorname{nzd}(p, q) = 1$. Neka je d red od b modulo q takav da je $d = k \cdot l,\ k,\ l \in \mathbb{N}$. Ako je decimalni zapis broja $\frac{p}{q}$ u bazi b oblika*

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ... + \frac{a_d}{b^d} + ... + \frac{a_1}{b^{d+1}} + \frac{a_2}{b^{d+2}} + ... + \frac{a_d}{b^{2d}} + ...$$

onda period $\overline{a_1 a_2 ... a_d}$ možemo podijeliti na l blokova duljine k tako da je

$$\overline{a_1 a_2 ... a_k} + \overline{a_{k+1} a_{k+2} ... a_{2k}} + ... + \overline{a_{(l-1)k+1} ... a_{l \cdot k}} = r \cdot \left(b^k - 1\right),\ r \in \mathrm{N}.$$

Drugim riječima, suma l blokova duljine k bit će višekratnik broja $b^k - 1$.

Poglavlje 6

Decimalni zapis u nastavi matematike

Predmetnim kurikulumom predmeta Matematika propisani su ishodi učenja koje učenici moraju usvojiti po razredima. U ovom ćemo poglavlju dati pregled ishoda po godinama učenja koji su vezani uz decimalni zapis brojeva te ćemo dati izbor zadataka koji se pojavljuju u osnovnoškolskim i srednjoškolskim udžbenicima. Svakom ishodu propisanom kurikulumom pripada oznaka MAT što označava da ishod pripada nastavnom predmetu Matematika, oznaka OŠ ili SŠ što označava odrađuje li se propisani ishod u osnovnoj ili srednjoj školi, zatim jedna od oznaka A, B, C, D ili E koje označavaju domenu kojoj pripada pojedini ishod (vidi [20]) te dvije brojke od kojih prva označava razred u kojem se ishod ostvaruje, a druga brojka označava koji je ishod po redu u pripadajućoj domeni.

Sljedećim su popisom dani ishodi vezani uz decimalni zapis realnog broja po godinama učenja te njihova razrada (prema [20]):

MAT OŠ A.5.4 Povezuje i primjenjuje ekvivalentne zapise decimalnoga broja.

- Opisuje i zapisuje decimalne brojeve.
- Opisuje, predočava i primjenjuje jednakost među različitim zapisima brojeva (prirodnih brojeva, decimalnih brojeva, decimalnih razlomaka, razlomaka, mješovitih brojeva, postotaka i promila).
- Otkriva beskonačne decimalne brojeve.
- Odabire odgovarajući oblik zapisa broja u problemu.
- Opisuje i određuje udio u skupu istovrsnih podataka.
- Tumači dobiveno rješenje u kontekstu problema.

MAT OŠ A.5.5. Računa s decimalnim brojevima.

- Zbraja, oduzima, množi (povezuje umnožak dvaju jednakih decimalnih brojeva s kvadratom decimalnoga broja) i dijeli decimalne brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija.
- Čita, zapisuje i tumači znakove $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$, $\neq$ pri uspoređivanju decimalnih brojeva.
- Otkriva beskonačne decimalne brojeve.
- Pridružuje točke pravca decimalnim brojevima i očitava ih.
- Računa vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza.
- Rješava problemsku situaciju.

MAT OŠ A.5.6. Zaokružuje prirodne i decimalne brojeve.

- Primjenjuje pravila zaokruživanja, smisleno zaokružuje prirodne i decimalne brojeve prema uvjetima zadatka.
- Uočava pogrešku pri zaokruživanju i procjenjuje njezin utjecaj na rješenje.
- Tumači dobiveno rješenje u kontekstu problema.

MAT OŠ A.6.3. Primjenjuje različite zapise nenegativnih racionalnih brojeva.

- Matematičkim jezikom opisuje, predočava i primjenjuje jednakost među različitim zapisima nenegativnih racionalnih brojeva (prirodnih brojeva, decimalnih brojeva, decimalnih razlomaka, pravih razlomaka, nepravih razlomaka, mješovitih brojeva, postotaka i promila).
- Povezuje omjer dviju veličina s razlomkom.
- Odnos dviju veličina prikazanih omjerom u problemskoj situaciji prikazuje razlomkom.
- Odabire prikladan zapis pri rješavanju brojevnih izraza i problemskih situacija.

MAT OŠ A.7.3. Primjenjuje različite zapise racionalnih brojeva.

- Matematičkim jezikom opisuje, predočava i primjenjuje jednakost među različitim zapisima racionalnih brojeva (prirodnih brojeva, decimalnih brojeva, decimalnih razlomaka, pravih razlomaka, nepravih razlomaka, mješovitih brojeva, postotaka i promila).

- Odabire prikladan zapis pri rješavanju brojevnih izraza i problemskih situacija.

MAT OŠ A.7.5. Primjenjuje računanje s racionalnim brojevima.

- Zbraja, oduzima, množi (povezuje umnožak dvaju jednakih racionalnih brojeva s pojmom kvadrata) i dijeli racionalne brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija.
- Prošireni sadržaj: Rješava složeni dvojni razlomak.

MAT OŠ B.8.1. Računa s algebarskim izrazima u $\mathbb{R}$.

- Pojednostavnjuje algebarske izraze u skupu $\mathbb{R}$ zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem primjenjujući svojstva računskih operacija.
- Množi monom binomom i binom binomomom.
- Računa vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza.
- Izlučuje zajednički faktor.
- Pojednostavnjuje algebarske izraze.
- Prikazuje veličine matematičkim formulama.

MAT SŠ A.4.1. Analizira skup realnih brojeva.

- Razlikuje i opisuje prirodne, cijele, racionalne, iracionalne i realne brojeve. Uočava i obrazlaže potrebu proširenja skupova brojeva.
- Navodi i obrazlaže svojstva računskih operacija zbrajanja i množenja.
- Prošireni sadržaj: Dokazuje da je korijen iz prostoga broja iracionalni broj.

Učenici u petom razredu otkrivaju skup prirodnih brojeva i uče o pozitivnim razlomcima. Tada prvi puta spominju pojam decimalnog broja, a preporučuje se decimalne brojeve povezivati sa slikovnim prikazima. Uče i uvježbavaju računanje s decimalnim brojevima te rješavaju problemske zadatke. Problemskim zadacima bi se trebala ostvariti korelacija sa situacijama iz stvarnog života kako bi učenici prepoznali primjenu matematike izvan okvira školstva. U šestom razredu otkrivaju skup cijelih brojeva i nenegativnih razlomaka te uče kako prelaziti iz prikaza nenegativnih racionalnih brojeva u obliku razlomaka u decimalni zapis i obratno. Naglasak je na mentalnom računanju i pretvaranju razlomaka u decimalni oblik kad god je to moguće. Skup racionalnih brojeva učenici u potpunosti upoznaju u sedmom razredu, a kod računanja s racionalnim brojevima preporuka je da se naglasak stavi na račun s decimalnim zapisom. Definiraju konačno periodičan, čisto periodičan i mješovito periodičan decimalni zapis. Skup realnih brojeva uvodi se u osmom razredu i podrazumijeva se da su učenici usvojili račun s decimalnim prikazom brojeva. Proširuje se znanje o decimalnom prikazu brojeva i detaljnije se obrađuju svojstva kada je decimalni zapis konačan, čisto periodičan i mješovito periodičan u dekadskom sustavu. Uvodi se pojam iracionalnog broja te se on definira kao broj koji ima beskonačni neperiodični decimalni zapis i ne može se prikazati u obliku razlomka (prema [21]). U srednjoj školi dokazuje se da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj i općenito da je korijen prostog broja iracionalan broj.

Sada ćemo dati prikaz odabranih primjera koji se mogu koristiti u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici kako bi učenici uvježbali prelazak iz razlomaka u decimalni zapis brojeva i obratno te usvojili svojstva periodičnosti decimalnih brojeva.

Primjer 6.0.1. *Izračunaj vrijednost izraza*

$$0.35 + \frac{4}{7} \cdot 1.4 - \frac{9}{20} : 2.5.$$

Rješenje: *U ovakvim tipovima zadataka učenici trebaju odlučiti hoće li sve razlomke pretvarati u decimalni oblik ili će sve decimalne brojeve pretvarati u razlomke. Prema Korolaru 3.0.7 razlomak $\frac{4}{7}$ je čisto periodičan jer rastav od 7 na proste faktore ne sadrži ni 2 ni 5. Iz tog je razloga praktičnije pretvoriti decimalne brojeve u razlomke i nastaviti račun s razlomcima jer će račun biti precizniji:*

$$\begin{aligned} 0.35 + \frac{4}{7} \cdot 1.4 - \frac{5}{20} : 2.5 &= \frac{35}{100} + \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{10} - \frac{9}{20} : \frac{25}{10} \\ &= \frac{7}{20} + \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{5} - \frac{9}{20} : \frac{5}{2} \\ &= \frac{7}{20} + \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{5} - \frac{9}{20} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{7}{20} + \frac{4}{5} - \frac{9}{50} \\ &= \frac{35 + 80 - 18}{100} \\ &= \frac{97}{100} \\ &= 0.97 \end{aligned}$$

Primjer 6.0.2. *(prema [16]) Jakost električne struje jednaka je omjeru količine naboja i vremena, odnosno $I = \frac{Q}{t}$. Podsjetimo se: mjerna jedinica za jakost električne struje je amper (A), za količinu naboja kulon (C), a za mjerenje vremena sekunda (s).*

a) *Žicom teče električna struja. Tijekom deset sekundi kroz presjek neke žice prođe električni naboj od* 0.6 C*. Kolika je jakost električne struje? Rezultat izrazi u obliku razlomka. Kakav će zapis imati taj razlomak u decimalnom obliku? Objasni.*
b) *Žicom teče električna struja. Tijekom tri sekunde kroz presjek neke žice prođe električni naboj od* 0.06 C*. Kolika je jakost električne struje? Rezultat izrazi u obliku razlomka. Kakav će zapis imati taj razlomak u decimalnom obliku? Objasni.*
c) *Kroz presjek žice u nekom vremenskom intervalu prođe električni naboj od* 0.13 C *jakosti* 0.15 A*. Tijekom kojeg intervala je tom žicom tekla struja? Rezultat izrazi u obliku razlomka. Kakav će zapis imati taj razlomak u decimalnom obliku? Objasni.*

Rješenje: *Ovakav zadatak može se učenicima dati kao primjer gdje se decimalni brojevi mogu koristiti u stvarnom životu, a onda je zgodno uklopiti i periodičnost decimalnih brojeva za utvrđivanje naučenog.*

a) *Uvrstimo li* $t = 10$ s *i* $Q = 0.6$ C *u formulu za jakost struje, dobivamo:*

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{0.6}{10} = \frac{\frac{6}{10}}{10} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}A.$$

Rastav nazivnika na proste faktore je $50 = 2 \cdot 5^2$ *pa je prema Korolaru 3.0.4 decimalni zapis razlomka* $\frac{3}{50}$ *konačan, točnije*

$$\frac{3}{50} = (0.06)_{10}\,.$$

b) *Uvrstimo sada* $t = 3$ s *i* $Q = 0.06$ C *u formulu za jakost struje, dobivamo:*

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{0.06}{3} = \frac{\frac{6}{100}}{3} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50}A.$$

Rastav nazivnika na proste faktore je $50 = 2 \cdot 5^2$ *pa je prema Korolaru 3.0.4 decimalni zapis razlomka* $\frac{3}{50}$ *konačan, točnije*

$$\frac{1}{50} = (0.02)_{10}\,.$$

c) *Za* $Q = 0.13$ C *i* $I = 0.15$ A *dobivamo vremenski interval*

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{0.13}{0.15} = \frac{\frac{13}{100}}{\frac{15}{100}} = \frac{13}{15}s.$$

Rastav nazivnika na proste faktore sadrži u sebi brojeve 3 i 5 pa je prema Korolaru 3.0.9 decimalni zapis razlomka $\frac{13}{15}$ mješovito periodičan, točnije

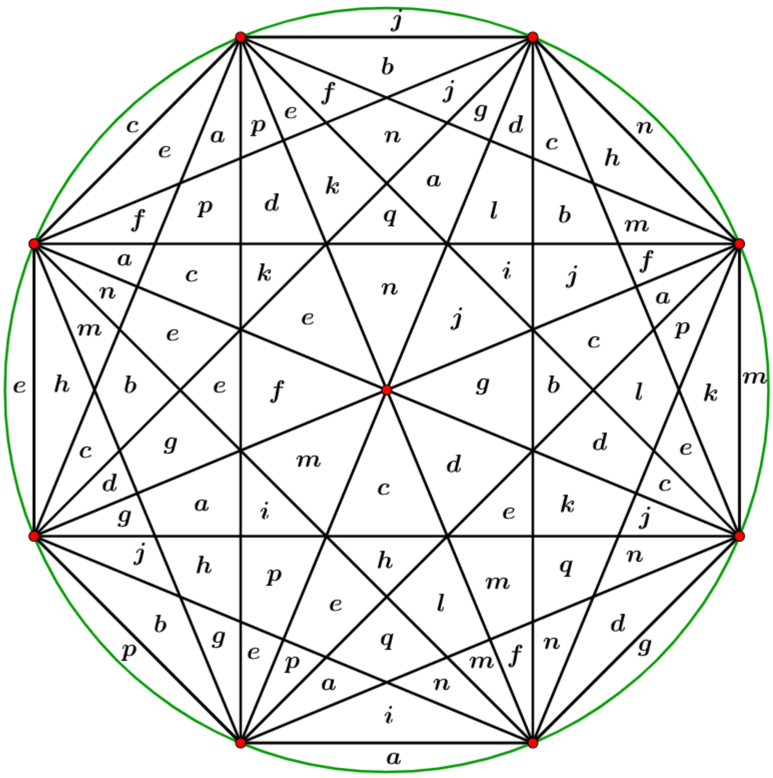
$$\frac{13}{15} = \left(0.8\overline{6}\right)_{10}$$

Primjer 6.0.3. *(prema [17]) Zadani su sljedeći brojevi:*

a) $\frac{1}{35}$, ***b)*** $\frac{3}{4}$, ***c)*** $\frac{2}{3}$, ***d)*** $\frac{73}{35}$, ***e)*** $\frac{8}{65}$, ***f)*** $\frac{1}{9}$, ***g)*** $\frac{2}{9}$, ***h)*** $\frac{5}{8}$, ***i)*** $\frac{19}{20}$, ***j)*** $\frac{1}{55}$, ***k)*** $\frac{15}{50}$, ***l)*** $\frac{8}{625}$, ***m)*** $\frac{1}{65}$, ***n)*** $\frac{1}{3}$, ***p)*** $\frac{5}{9}$, ***q)*** $\frac{18}{30}$.

Na danoj slici oboji područja na sljedeći način:

- *Ako broj ima konačan decimalni zapis, područje oboji crveno.*
- *Ako broj ima beskonačno periodičan zapis, područje oboji žuto.*
- *Ako broj ima beskonačan mješovito periodičan zapis, područje oboji plavo.*



Rješenje: *Ovaj se zadatak može riješiti pretvaranjem svakog od danih brojeva u decimalni zapis. Međutim, puno je brže i jednostavnije provjeriti jesu li razlomci skraćeni do kraja, a potom pogledati rastav svakog od nazivnika na proste faktore. Svi razlomci su skraćeni do kraja, osim razlomaka* $\frac{15}{50}$ *koji skraćen do kraja poprima oblik* $\frac{3}{10}$ *te* $\frac{18}{30}$ *koji skraćen do kraja poprima oblik* $\frac{3}{5}$. *Pogledajmo sada rastave nazivnika na proste faktore razlomaka* $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{19}{20}, \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \frac{8}{625}, \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$:

$$4 = 2^2 \qquad 8 = 2^3 \qquad 20 = 2^2 \cdot 5$$
$$10 = 2 \cdot 5 \qquad 625 = 5^4 \qquad 5 = 5.$$

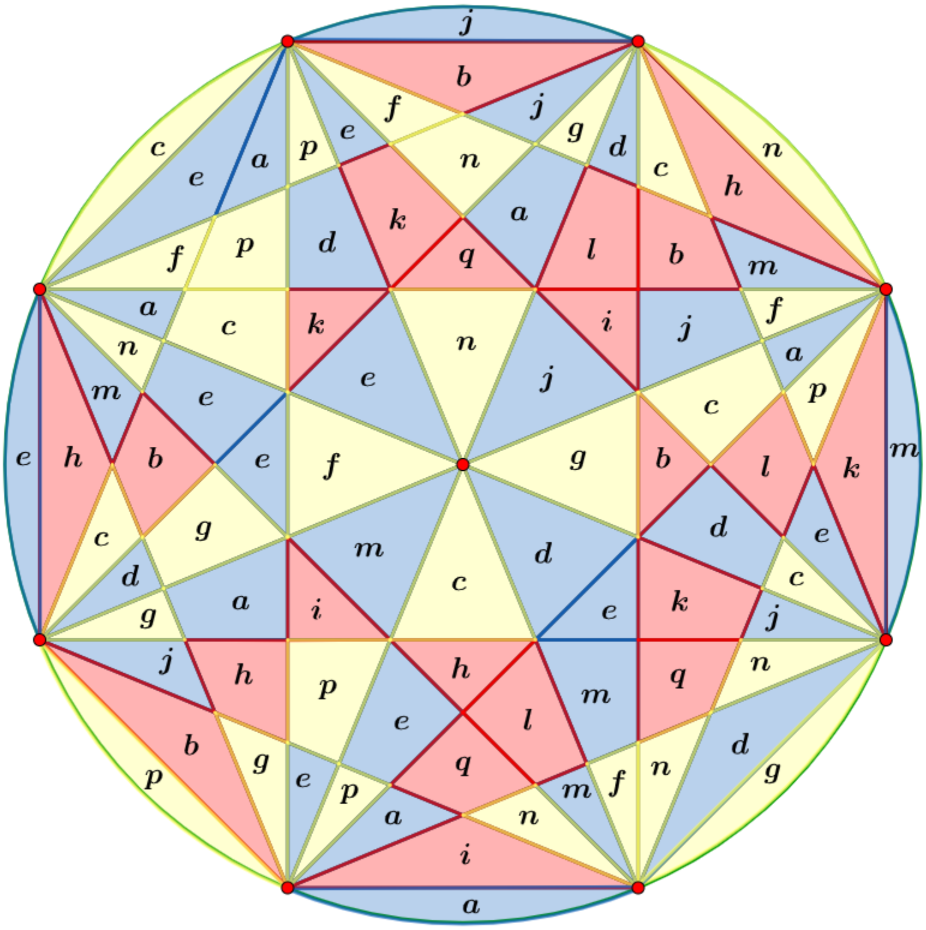
Primijetimo da oni u svom rastavu sadrže samo brojeve 2 i 5 pa je prema Korolaru 3.0.4 njihov decimalni zapis konačan. Dakle, polja koja su označena slovima b, h, i, k, l te q bojamo crvenom bojom. Nadalje, pogledajmo rastave nazivnika na proste faktore razlomaka $\frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$:

$$3 = 3^1 \qquad 9 = 2^2.$$

Vidimo da oni u sebi ne sadrže ni faktor 2 ni faktor 5 pa je prema Korolaru 3.0.7 njihov decimalni zapis čisto periodičan. Polja koja su označena slovima c, f, g, n te p bojamo žutom bojom. Preostaje nam razmotriti nazivnike razlomaka $\frac{1}{35}, \frac{73}{35}, \frac{8}{65}, \frac{1}{55}, \frac{1}{65}$:

$$35 = 5 \cdot 7 \qquad 65 = 5 \cdot 13 \qquad 55 = 5 \cdot 11.$$

Oni u svom rastavu sadrže broj 5 i brojeve 7, 11 i 13 koji su relativno prosti s brojem 10. Tada su prema Korolaru 3.0.9 njihovi decimalni zapisi mješovito periodični pa polja označena slovima a, d, e, j te m bojamo plavom bojom.
Sada obojana figura izgleda ovako:



Primjer 6.0.4. *(prema [9]) Koja je 2021. znamenka iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{20}{21}$?*

Rješenje: *Rastav nazivnika na proste faktore je oblika* $21 = 3 \cdot 7$ *pa je decimalni zapis razlomka* $\frac{20}{21}$ *čisto periodičan prema Korolaru 3.0.7. Koristeći algoritam za određivanje decimalnog zapisa realnih brojeva iz Teorema 1.0.2, dobivamo decimalni zapis razlomka* $\frac{20}{21}$*:*

$$\frac{20}{21} = 0.952380952380... = 0.\overline{952380}.$$

Ponavlja se period od 6 znamenki pa želimo provjeriti koliko puta se može ponoviti prije 2021. mjesta. Podijelimo 2021 sa 6 i dobijemo:

$$2021 = 6 \cdot 336 + 4.$$

Dakle, period se ponovi 336 puta i onda se ponove još prve četiri znamenke perioda pa zaključujemo da se na 2021. mjestu nalazi znamenka 3.

Primjer 6.0.5. *(prema [8]) Koja je 2019. znamenka iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{21}{26}$?*

Rješenje: *Rastav nazivnika na proste faktore je oblika* $26 = 2 \cdot 13$ *pa je decimalni zapis razlomka $\frac{21}{26}$ mješovito periodičan prema Korolaru 3.0.9. Koristeći algoritam za određivanje decimalnog zapisa realnih brojeva iz Teorema 1.0.2, dobivamo decimalni zapis razlomka $\frac{21}{26}$:*

$$\frac{21}{26} = 0.8076923076923... = 0.8\overline{076923}$$

Ponavlja se period od 6 znamenki pa želimo provjeriti koliko puta se može ponoviti prije 2019. mjesta. Podijelimo 2019 sa 6 i dobijemo:

$$2021 = 6 \cdot 336 + 3.$$

Period se ponovi 336 puta, ali moramo pripaziti jer prije perioda imamo jednu znamenku koja se ne ponavlja. Dakle, imamo pretperiod duljine 1, onda imamo 336 puta period i još 2 znamenke perioda pa je na 2019. mjestu znamenka 7.

Primjer 6.0.6. *(prema [6]) Koliko iznosi zbroj prvih 450 decimala u decimalnom zapisu razlomka $\frac{11}{700}$?*

Rješenje: *Prvo ćemo pretvoriti razlomak u decimalni broj. S obzirom da je rastav nazivnika sljedećeg oblika*

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

onda je prema Korolaru 3.0.9 decimalni zapis razlomka $\frac{11}{700}$ mješovito periodičan. Primijenimo algoritam za određivanje decimalnog zapisa iz Teorema 1.0.2 te dobijemo

$$\frac{11}{700} = 0.01571428571428... = 0.01\overline{571428}$$

Odredimo koja je 450. znamenka decimalnog zapisa danog broja. Ponavlja se period od 6 znamenki, ali mu prethodi pretperiod duljine 2. Podijelimo 450 sa 6 i dobijemo

$$450 = 6 \cdot 75.$$

Period se do 450. znamenke ponovi 6 puta, međutim moramo pripaziti jer imamo i pretperiod. Dakle, na 450. mjestu neće biti znamenka 8, nego znamenka 4. Kako bismo odredili zbroj prvih 450 znamenki iza decimalne točke, moramo odrediti zbroj znamenki perioda *koji se ponovi 74 puta te mu dodati zbroj znamenki pretperioda i zbroj znamenki 5, 7, 1 i 4. Kako je* $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ a_5 = 1,\ a_6 = 4,\ a_7 = 2,\ a_8 = 8$*, onda je zbroj prvih 450 znamenki iza decimalne točke jednak*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{450} a_i &= (a_1 + a_2) + \sum_{i=3}^{446} a_i + a_{447} + (a_{448} + a_{449} + a_{450}) \\
&= (a_1 + a_2) + \sum_{i=3}^{446} a_i + (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \\
&= (0 + 1) + 74 \cdot (5 + 7 + 1 + 4 + 2 + 8) + (5 + 7 + 1 + 4) \\
&= 1 + 74 \cdot 27 + 17 \\
&= 1 + 1998 + 17 \\
&= 2016.
\end{aligned}$$

Zbroj prvih 450 znamenki iza decimalne točke iznosi 2016.

Primjer 6.0.7. *(prema [5]) Koliko najmanje uzastopnih decimala (počevši od desetinke) treba zbrojiti iz decimalnog zapisa razlomka* $\frac{11}{21}$ *da bi rezultat bio 2016?*

Rješenje: *Pretvorimo li razlomak* $\frac{11}{21}$ *u decimalni zapis, dobit ćemo čisto periodičan decimalni zapis jer rastav nazivnika na proste faktore ne sadrži ni broj 2 ni broj 5 (prema Korolaru 3.0.7), tj.*

$$\frac{11}{21} = 0.523809523809... = 0.\overline{523809}.$$

Zbroj znamenki perioda iznosi

$$5 + 2 + 3 + 8 + 0 + 9 = 27.$$

Podijelimo li 2016 s 27, dobijemo

$$2016 = 74 \cdot 27 + 18.$$

Dakle, da bismo dobili rezultat 2016, moramo zbrojiti 74 ponavljanja perioda od 6 znamenki i onda još 4 znamenke koje u zbroju daju 18, odnosno $5 + 2 + 3 + 8$*. Sveukupno moramo zbrojiti* $74 \cdot 6 + 4 = 444 + 4 = 448$ *znamenki.*

Primjer 6.0.8. *(prema [7]) Odredite periodične brojeve* $0.\overline{x},\ 0.\overline{xy}$ *i* $0.\overline{xyz}$ *za koje vrijedi*

$$0.\overline{x} + 0.\overline{xy} + 0.\overline{xyz} = \frac{445}{333} \tag{6.1}$$

gdje su x, y, z (ne nužno različite) znamenke.

Rješenje: *Dosad smo kroz ovaj rad najčešće pretvarali razlomke u decimalne brojeve. U ovom ćemo zadatku provesti obrnuti postupak, odnosno pretvorit ćemo decimalne brojeve u razlomke pa krenimo redom. Označimo s $a = 0.xxx...$, $b = 0.xyxyxy...$, $c = 0.xyzxyzxyz....$ Pomnožimo li broj a s 10, dobijemo*

$$\begin{aligned} 10a &= x.xxx... \\ 10a &= x + 0.xxx... \end{aligned}$$

S obzirom da smo definirali a kao $a = 0.xxx...$, onda možemo uvrstiti a umjesto $0.xxx...$ pa dobijemo:

$$\begin{aligned} 10a &= x + a \\ 10a - a &= x \\ 9a &= x \\ a &= \frac{x}{9} \end{aligned}$$

Primijenimo isti postupak na brojeve b i c, ali b množimo sa 100, dok c množimo s 1000 pa dobijemo

$$\begin{aligned} b &= \frac{\overline{xy}}{99} = \frac{10x + y}{99} \\ c &= \frac{\overline{xyz}}{999} = \frac{100x + 10y + z}{999}. \end{aligned}$$

Uvrstimo li dobivene vrijednosti za a, b i c u (6.1), dobit ćemo

$$\begin{aligned} \frac{x}{9} + \frac{10x + y}{99} + \frac{100x + 10y + z}{999} &= \frac{445}{333} \\ \frac{11 \cdot 111 \cdot x + 111 \cdot (10x + y) + 11 \cdot (100x + 10y + z)}{9 \cdot 11 \cdot 111} &= \frac{445}{333}, \end{aligned}$$

a kad pomnožimo obje strane s $9 \cdot 11 \cdot 111$, ostane

$$11 \cdot 111 \cdot x + 111 \cdot (10x + y) + 11 \cdot (100x + 10y + z) = 445 \cdot 3 \cdot 11. \tag{6.2}$$

S obzirom da je desna strana jednakosti djeljiva s 11, onda mora i lijeva strana jednakosti biti djeljiva s 11, odnosno svaki od pribrojnika mora biti djeljiv s 11. Primijetimo da prvi i treći pribrojnik iz jednakosti sadrže u sebi faktor 11 pa su oba djeljva s 11. Broj 111 iz pribrojnika $111 \cdot (10x + y)$ nije djeljiv s 11 pa slijedi da $(10x + y)$ =

$\overline{xy}$ mora biti djeljiv s 11*. Kako je $\overline{xy}$ dvoznamenkasti broj, onda mora vrijediti da je $x = y$ jer su jedini dvoznamenkasti brojevi djeljivi s* 11 *oni koji imaju jednake znamenke (*$11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$*). Uvrstimo tada $x = y$ u jednakost* (6.2) *pa dobijemo*

$$\begin{aligned}
11 \cdot 111 \cdot x + 111 \cdot (10x + x) + 11 \cdot (100x + 10x + z) &= 445 \cdot 3 \cdot 11 \\
11 \cdot 111 \cdot x + 111 \cdot 11 \cdot x + 11 \cdot (110x + z) &= 445 \cdot 3 \cdot 11 \\
111 \cdot x + 111 \cdot x + 110x + z &= 445 \cdot 3 \\
332x + z &= 1335 \\
z &= 1335 - 332x.
\end{aligned}$$

Iz uvjeta zadatka z mora biti znamenka, odnosno mora vrijediti

$$0 \leq z \leq 9,$$

tj.

$$\begin{aligned}
0 \leq 1335 - 332x \leq 9 \\
0 - 1335 \leq -332x \leq 9 - 1335 \\
\frac{1335}{332} \geq x \geq \frac{1326}{332} \\
4.02 \geq x \geq 3.99.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $x = 4$ pa slijedi da je $y = 4$ te konačno

$$\begin{aligned}
z &= 1335 - 332 \cdot x \\
z &= 1335 - 1328 \\
z &= 7.
\end{aligned}$$

Traženi su decimalni brojevi oblika

$$\begin{aligned}
0.\overline{x} &= 0.\overline{4} \\
0.\overline{xy} &= 0.\overline{44} \\
0.\overline{xyz} &= 0.\overline{447}.
\end{aligned}$$

Primjer 6.0.9. *(prema [4]) Razlika recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih prirodnih brojeva je* $0.0aaa... = 0.0\overline{a}$*. Koje vrijednosti može poprimiti znamenka a?*

Rješenje: *Pretvorimo dani decimalni broj u razlomak. U tu svrhu označimo $x = 0.0\overline{a}$. Pomnožimo li x s* 10*, dobijemo*

$$\begin{aligned}
10 \cdot x &= 0.\overline{a} \\
10 \cdot x &= 0.a + 0.0\overline{a} \\
10 \cdot x &= 0.a + x \\
9 \cdot x &= 0.a.
\end{aligned}$$

Pomnožimo posljednju jednakost s 10 *te podijelimo s* 90 *kako bismo dobili*

$$\begin{aligned} 90 \cdot x &= a \\ x &= \frac{a}{90}. \end{aligned}$$

Zapis decimalnog broja $0.0\overline{a}$ *je oblika* $\frac{a}{90}$.
Označimo sada s n *proizvoljan prirodan broj, a s* $n+1$ *njegov sljedbenik. S obzirom da je* $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, *iz uvjeta zadatka slijedi*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \frac{a}{90} \\ \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} &= \frac{a}{90} \\ \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \frac{a}{90} \\ a \cdot n \cdot (n+1) &= 90 \\ a &= \frac{90}{n \cdot (n+1)}. \end{aligned}$$

Kako je a *znamenka, to znači da mora vrijediti* $a \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Sada možemo redom uvrštavati vrijednosti za* $n = 1, 2, 3, ...$ *te vidjeti kada će* a *poprimiti neku od mogućih vrijednosti:*

$$\begin{aligned} n = 1 : \ a &= \frac{90}{2} = 45 \notin A \\ n = 2 : \ a &= \frac{90}{6} = 15 \notin A \\ n = 3 : \ a &= \frac{90}{12} = 7.5 \notin A \\ n = 4 : \ a &= \frac{90}{20} = 4.5 \notin A \\ n = 5 : \ a &= \frac{90}{30} = 2 \in A \\ n = 6 : \ a &= \frac{90}{42} = 2.14 \notin A \\ n = 7 : \ a &= \frac{90}{56} = 1.61 \notin A \\ n = 8 : \ a &= \frac{90}{72} = 1.25 \notin A \\ n = 9 : \ a &= \frac{90}{90} = 1 \in A. \end{aligned}$$

Primijetimo da će za sve $n \geq 10$ broj a biti manji od 1 *pa nema smisla razmatrati daljnje slučajeve. Dakle, a može poprimiti ili vrijednost* 1 *ili vrijednost* 3.

Bibliografija

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike*, 2022, https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/skripta.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[2] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright et al., *An introduction to the theory of numbers*, Oxford university press, 1979.

[4] Hrvatsko matematičko društvo, *Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 4. razred srednje škole, A varijanta*, 2011, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-SS-opc-1234-AB-zad+rj/2011-SS-opc-1234-A-zad.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[5] ———, *Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 8. razred*, 2016, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2016/2016-OS-skolsko-45678-zad+rj/2016-OS-skolsko-45678-zad.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[6] ———, *Županijsko natjecanje iz matematike, 6. razred*, 2017, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2017/2017-OS-zupanijsko-45678-zad+rj/2017-OS-zupanijsko-6-zad.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[7] ———, *Državno natjecanje iz matematike, 1. razred srednje škole, B varijanta*, 2018, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2018/2018-SS-drzavno-1234-zad+rj/2018-SS-drzavno-B-1234-zad.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[8] ———, *Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 7. razred*, 2019, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2019/2019-OS-skolsko-45678-zad+rj/2019-OS-skolsko-7-zad.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[9] ______, *Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 7. razred*, 2021, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-OS-skolsko-45678-zad+rj/2021-OS-skolsko-7-zad.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[10] D. Ilišević i G. Muić, *Uvod u matematiku*, 2022, https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/UMskripta.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[11] J. Lewittes, *Midy's theorem for periodic decimals*, Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory **7** (2006), br. 1, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/INTEGERS/papers/h2/h2.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[12] J. J. O'Connor i E. F. Robertson, *Christoff Rudolff*, 2012, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rudolff/, Pristupljeno: studeni 2022.

[13] ______, *David Gawen Champernowne*, 2014, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Champernowne/, Pristupljeno: studeni 2022.

[14] G. Pomstra, *The Constant of Champernowne*, 2018, https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/17907/1/The%20Constant%20of%20Champernowne.pdf.

[15] W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers: Second English Edition (edited by A. Schinzel)*, Elsevier, 1988.

[16] R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie i I. Kokić, *Tajni zadatak 007-udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole+ CD*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[17] ______, *Tajni zadatak 008-radna bilježnica iz matematike za osmi razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[18] T. Tadić, *Najveće cijelo [x] i njegovi prijatelji*, PlayMath **2** (2004), br. 4, 13–17.

[19] M. Wright, *Cycles of Digits*, 2014, https://www.mlwright.org/docs/cycles.pdf, Pristupljeno: studeni 2022.

[20] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, 2019, https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html, Pristupljeno: studeni 2022.

[21] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, Z. Lobor, M. Milić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, *Matematika 8, udžbenik za osmi razred osnovne škole, 1. svezak*, Profil Klet d.o.o, Zagreb, 2022.

Sažetak

Decimalni zapis realnog broja često je prisutan u svakodnevnim situacijama. Učenici se u nastavi s decimalnim zapisom prvi puta susreću u petom razredu, a u kasnijim godinama upoznaju neka svojstva decimalnog zapisa realnih brojeva. U prvom poglavlju opisan je decimalni zapis realnog broja. Dokazano je da svaki realan broj ima barem jedan zapis u decimalnom obliku te je dan algoritam za određivanje decimalnog zapisa. Drugo poglavlje sadrži decimalni zapis prirodnih i cijelih brojeva te dokaz da svaki prirodan broj ima decimalni prikaz. U trećem je poglavlju razrađen decimalni zapis racionalnih brojeva. Iskazana je i dokazana karakterizacija racionalnih brojeva promatranjem perioda decimalnog zapisa. Također su iskazana i dokazana te primjerima potkrijepljena svojstva konačnosti i periodičnosti decimalnog zapisa racionalnih brojeva. U kratkim je crtama razmatrana duljina perioda i pretperioda. Četvrto poglavlje bavi se decimalnim zapisom iracionalnih brojeva pa je iskazana karakterizacija iracionalnih brojeva promatranjem decimalnog zapisa te je dokazana iracionalnost Champernowneove konstante. U petom su poglavlju dane odabrane zanimljivosti o decimalnom zapisu realnih brojeva poput cikličkih permutacija decimala te Midyjev teorem. Šesto, ujedno i posljednje poglavlje, bavi se decimalnim zapisom realnih brojeva u nastavi matematike. Ukratko su opisani propisani ishodi učenja te riješeni odabrani primjeri zadataka korištenih u nastavi matematike u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju.

Summary

The decimal notation of a real number is often present in everyday situations. Students encounter decimal notation for the first time in the fifth grade and in later years they get to know some properties of the decimal notation of real numbers. The decimal notation of a real number is described in the first chapter. It is proved that every real number has at least one notation in decimal form and an algorithm for determining the decimal notation is given aswell. The second chapter contains the decimal notation of natural numbers and integers and a proof that every natural number has a decimal representation. In the third chapter, the decimal notation of rational numbers is elaborated. The characterization of rational numbers is presented and proven by observing the period of the decimal notation. The properties of finiteness and periodicity of the decimal notation of rational numbers are also stated and proved and supported by examples. The length of the period and the prepe-riod was briefly considered. The fourth chapter deals with the decimal notation of irrational numbers, so the characterization of irrational numbers is shown by observing the decimal notation and the irrationality of Champernowne's constant is proven. In the fifth chapter, selected interesting facts about the decimal notation of real numbers are given, such as cyclic permutations of decimals and Midy's theorem. The sixth, also the last chapter, deals with the decimal notation of real numbers in mathematics lessons. Prescribed learning outcomes are briefly described and selected examples of tasks used in mathematics teaching in primary and secondary education are solved.

Životopis

Rođena sam 19.11.1997. godine u Varaždinu. Pohađala sam Osnovnu školu Sveti Đurđ, a po završetku osnovne škole 2012. godine srednjoškolsko obrazovanje nastavljam u Prvoj gimnaziji Varaždin. Fakultetsko obrazovanje započinjem 2016. godine upisom nastavničkog smjera Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike stječem 2020. godine. Iste godine upisujem prvu godinu diplomskog studija nastavničkog smjera Matematike. Tijekom posljednje godine studija radila sam u tvrtki Microblink, a od rujna 2022. godine radim u III. osnovnoj školi Varaždin kao nastavnica matematike.