Sfernosimetrična rješenja u kovarijantnoj f(T) modificiranoj teoriji gravitacije

Sossich, Marko

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Marko Sossich

Sfernosimetrična rješenja u kovarijantnoj $f(T)$ modificiranoj teoriji gravitacije

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Marko Sossich

Sfernosimetrična rješenja u kovarijantnoj $f(T)$ modificiranoj teoriji gravitacije

DOKTORSKI RAD

Mentor:
Izv. prof. dr. sc. Saša Ilijić

Zagreb, 2022

University of Zagreb
Faculty of Science
Department of Physics

Marko Sossich

Spherically symmetric solutions in covariant $f(T)$ theory of gravity

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Izv. prof. dr. sc. Saša Ilijić

Zagreb, 2022

Doktorski rad izrađen je na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva, na Zavodu za Primijenjenu fiziku.

Mentor: Izv. prof. dr. sc. Saša Ilijić

Doktorski rad ima: 110 stranica

Doktorski rad br.: ___________

O mentoru

Saša Ilijić rodio se u Zagrebu 1969. g., a 1998. g. diplomirao je fiziku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu (Sveučilište u Zagrebu) s temom iz područja spektroskopije zvijezda. 1999. g. zaposlio se kao znanstveni novak na Opservatoriju Hvar Geodetskog fakulteta (Sveučilište u Zagrebu) te nešto kasnije na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Stupanj magistra znanosti stekao je obranom rada iz područja spektroskopije dvojnih zvjezdanih sustava na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu 2003. g. Od 2003. g. zaposlen je na Fakultetu elektrotehnike i računarstva gdje je danas izvanredni profesor. Stupanj doktora znanosti stekao je 2007. g. na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu s radom iz područja fizike gravitacije. Akademsku godinu 2006./2007. proveo je na znanstvenom usavršavanju u Institutu za teorijsku fiziku Sveučilišta u Beču, a u više navrata boravio je i na sveučilištu Simon Fraser u Kanadi. Suautor je tridesetak znanstvenih radova najvećim dijelom iz područja fizike gravitacije, a koji su ukupno citirani preko 500 puta. Na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Saša Ilijić između ostalih predmeta predaje i predmet “Kvantna računala” koji je popularan među studentima te sudjeluje u aktivnostima popularizacije znanosti.

Sažetak

Modificirana teorija gravitacije poznata kao $f(T)$ gravitacija oslanja se na torziju kao temeljno svojstvo prostorvremena. Kako bi se istražila predviđanja ove teorije, ona je primijenjena na niz problema iz područja kozmologije, dok su njena predviđanja u području sferno simetričnih problema istražena u znatno manjoj mjeri. Predloženo istraživanje usredotočuje se na konstrukciju sfernosimetričnih rješenja i proučavanje njihovih svojstava u okviru tzv. kovarijantne inačice gravitacije tipa $f(T)$ koja osigurava invarijantnost jednadžbi gibanja u odnosu na odabir tetrade. Izvest će se i analizirati modificirane Einsteinove jednadžbe u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ teorije gravitacije te će se proučiti uloga Lorentzove (spinske) koneksije u njima. Istražit će se statična vakuumska rješenja kao i nevakuumska rješenja poput politropskih kompaktnih objekata i bozonskih zvijezda. Proučit će se i mogućnost nalaženja sfernosimetričnih rješenja ovisnih o vremenu, pri čemu će biti potrebno pronaći odgovarajuće tetrade i odgovarajući oblik Lorentzove (spinske) koneksije. Jednadžbe gibanja će se zbog svoje matematičke složenosti rješavati numeričkim postupcima.

Ključne riječi: Modificirane teorije gravitacije, Crne rupe, Zvijezde

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Motiviran ujedinjenjem elekromagnetizma i gravitacije Albert Einstein je u svojim radovima između 1928. i 1931. godine uveo koncepte apsolutnog paralelizma ili teleparalelizma (njem. *Fernparallelismus*) [1]. U tom pristupu metrička koneksija više nije bila ograničena jedinstvenom koneksijom s iščezavajućom torzijom, koneksijom Levi-Civite, kao što je to bio slučaj u općoj teoriji relativnosti. Naime, s obzirom na to da je u istom prostorvremenu moguće definirati različite koneksije, moguće je koristiti i koneksije u kojima torzija ne iščezava. Osim toga, Einstein je prvi uveo tetradu u kontekstu unificiranih teorija polja [2], odnosno lokalno definirani skup četiriju linearno nezavisnih vektorskih polja, čime je omogućio usporedbu tangentnih vektora na udaljenim točkama mnogostrukosti. Tetrada sadrži 16 linearno nezavisnih komponenti, odnosno stupnjeva slobode, dok metrički tenzor zbog svojstva simetričnosti sadrži njih samo 10. Einsteinova slutnja bila je ta da se 6 dodatnih stupnjeva slobode može iskoristiti za moguće proširenje opće teorije relativnosti uključenjem opisa elektromagnetizma. Kasnija su istraživanja, međutim, pokazala da dodatnih 6 stupnjeva slobode opisuju slobodu izbora promatrača, odnosno da ti stupnjevi slobode odgovaraju stupnjevima slobode Lorentzovih transformacija (3 rotacije i 3 parametra potiska) [3, 4].

Također, s obzirom na uspjehe kvantne teorije polja u opisu ostalih temeljnih sila (elektromagnetizam, slabo i jako nuklearno međudjelovanje), a riječ je o teoriji koja se oslanja na načelo lokalne baždarne invarijantnosti, postavlja se pitanje je li moguće i gravitacijsko međudjelovanje izvesti korištenjem tog načela? U nastojanju da se teorija gravitacije izrazi kao lokalno baždarna teorija uvode se četiri linearno nezavisna polja $h_a = h_a{}^{\mu} \partial_{\mu}$ koja zovemo tetradom i koja u svakoj točki prostorvremena razapinju četverodimenzionalni vektorski tangentni prostor. Time se omogućuje formulacija teorije gravitacije kao baždarne teorije translacija.

Konačno, dinamika prostorvremena dana je raspodjelom mase i energije, odnosno tenzorom energije i impulsa (količine gibanja). Međutim, otvorena je mogućnost i dodatnog međudjelovanja spina materije i prostorvremena. Jedna od prvih klasičnih teorija gravitacije koja uključuje spinsku gustoću u dinamici prostorvremena je Einstein-Cartanova teorija [5, 6, 7, 8, 9], pri čemu se opis samog međudjelovanje oslanja na torziju prostorvremena.

Vrlo rano nakon uspjeha opće teorije relativnosti koja uzima zakrivljenost kao temeljno svojstvo dinamike prostorvremena pokazalo se da je istovjetnu teoriju gravitacije moguće formulirati korištenjem isključivo torzije kao dinamičkog svojstva prostorvremena. Time je nastala alternativna teorija koja je na razini jednadžbi gibanja istovjetna općoj teoriji relativnosti, a poznata je pod imenom Teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti (engl. *Teleparallel Equivalent of General Relativity,* TEGR). Njezini osnivači su Roland Weitzenböck, Élie Cartan i Christian Möller [10, 11, 12]. Formulacija te teorije predstavljala je u svoje vrijeme vrlo zanimljiv iskorak u razumijevanju gravitacijskog međudjelovanja, prvenstveno zbog toga što se nije oslanjala isključivo na zakrivljenost kao glavni i jedini ontološki koncept, već je koristila torziju. Interpretacija gravitacijskog međudjelovanja postala je općenitija, a uvidjelo se i to da se torzija i zakrivljenost mogu ravnopravno smatrati temeljnim pojmovima pri opisu dinamike prostorvremena.

Ipak, vođeni novijim rezultatima kozmoloških istraživanja postoje pokazatelji koji upućuju na moguću nepotpunost opće teorije relativnosti (a time i TEGR-a) [13, 14, 15]. Neki od glavnih problema s kojima se susreće opća teorija relativnosti su pitanja singulariteta (Hawkingovi i Penroseovi teoremi) [16, 17, 18], problem horizonta*, problem finog podešavanja itd., a koji nisu na zadovoljavajući način razriješeni. Također, u području visokih energija postoji nužnost postavljanja kvantne teorije gravitacije. Već u formulaciji kvantne teorije polja u zakrivljenim prostorima susrećemo problem zračenja crnih rupa i tzv. paradoks informacije crnih rupa. Pokušaji renormalizacije gravitacije vođeni metodama kvantne teorije polja nemoćni su pred potrebama uklanjanja divergentnih članova u okviru kvantizacije gravitacije. Istovremeno postoje problemi interpretacije kvantne teorije gravitacije, kao i matematička nekonzistentnost tih teorija, neovisno u kojem se aktualnom programu problematika odvijala.† Nadalje, i uz neupitan doprinos predloženih teorija kvantne gravitacije u razumijevanju gravitacije na kvantnomehaničkoj razini, prisutnom ostaje nemogućnost provjere tih teorija, s obzirom na to da ne postoje opažanja pri dovoljno visokim energijama. U ovom radu se neće ulaziti niti u jednu od predloženih kvantnih teorija gravitacije, već će se razmatrati opća teorija relativnosti i njen teleparalelni ekvivalent (TEGR) koji će biti izmijenjen time što će se dodavanjem torzijskih invarijanti u akciji efektivno prikazati mogući kvantni doprinosi. Takvu izmijenjenu teoriju koja je temeljena na torziji zovemo $f(T)$ modificiranom teorijom gravitacije [20], a njena akcija uz minimalno

*Problem horizonta, koji često nazivamo i problemom homogenosti, bavi se opaženom homogenosti i termodinamičkom ravnotežom kozmičkog pozadinskog zračenja svemira među kauzalno nepovezanim područjima. Postavlja se pitanje koji to posebni mehanizmi dovode do opaženog učinka? Jedan od modela koji nastoji razriješiti problem horizonta jest model inflacije [19].

†Pod programom tu se prvenstveno misli na dvije prevladavajuće struje, jedna polazi od principa kanonske kvantizacije (kvantna gravitacija petlji), dok druga koristi kovarijantnu kvantizaciju (teorije struna).

vezanje s materijom dana je s

$$\mathscr{S} = \int \left(\frac{1}{2\kappa} f(T) + \mathscr{L}_{\text{mat}} \right) h d^4 x, \tag{1.1}$$

gdje je T skalar torzije, f je funkcija koja u slučaju TEGR-a glasi $f(T) = T$, a u modificiranoj teoriji postaje općenita funkcija skalara torzije, $\mathscr{L}_{\text{mat}}$ je lagranžijan materije, $\kappa = 8\pi G/c^4$, a $h d^4 x$ je invarijantni element volumena prostorvremena. Takva modificirana teorija pokazala se uspješnom u opisu kozmoloških opažanja gdje se na elegantan način, bez dodavanja hipotetskih polja, dimenzija, energija i sl., može objasniti neke od postojećih kozmoloških problema [21, 22, 23, 24]. Ovaj alternativni put, u odnosu na ΛCDM (Λ cold dark matter)[‡] ,nastoji opažene proturječnosti interpretirati promjenom geometrije, a ne uvođenjem novih izvora gravitacijskog međudjelovanja. Kako bi $f(T)$ bila valjana alternativna teorija gravitacije ona mora nužno proći standardne testove Sunčevog sustava [25, 26, 27, 28] te mora biti u skladu s kozmološkim opažanjima [29].

Ubrzo nakon postavljanja $f(T)$ gravitacije uočen je problem narušenja Lorentzove invarijantnosti [30], pod čime se misli na izostanak invarijantnosti lagranžijana ove teorije i posljedično jednadžbi gibanja koje iz njega proizlaze, a u odnosu na lokalni odabir opažača, odnosno Lorentzovu transformaciju odabrane tetrade. U međuvremenu je bilo nekoliko pokušaja koji su nastojali shvatiti i analizirati problem loma Lorentzove invarijantnosti [31, 32, 33], no tek je nedavno pokazano da se napuštanjem principa apsolutnog paralelizma te doslijednim uvođenjem spinske koneksije može postaviti tzv. kovarijantnu formulaciju $f(T)$ gravitacije [34]. U toj su formulaciji lagranžijan i jednadžbe gibanja invarijantni s obzirom na odabir, odnosno na lokalnu Lorentzovu transformaciju tetrade. Naime, u ranijim formulacijama $f(T)$ gravitacije, a koje danas nazivamo nekovarijantnim $f(T)$ teorijama, neki su istraživači koristili pojmove poput "dobrih" i "loših" tetrada, ovisno o tome jesu li one vodile prema više ili manje smislenim jednadžbama gibanja. Mnogo novijih radova bavi se proučavanjem uloge spinske koneksije i formulacijom kovarijantne $f(T)$ gravitacije [35, 36, 37, 38]. Između ostalog proučena je Hamiltonova formulacija $f(T)$ gravitacije [39], uloga Bianchijevih identiteta u toj teoriji [40], statična sfernosimetrična vakuumska rješenja [41], kao i aksijalno simetrična vakuumska rješenja [33]. Na žalost, neki od ranih radova u ovom području nisu koristili kovarijantnu inačicu teorije gravitacije tipa $f(T)$ što dovodi u pitanje valjanost nekih njihovih zaključaka u okvirima kovarijantne formulacije. Na primjer, ostao je upitnim status Birkhoffovog teorema [42, 43, 44] kao i postojanja sferno simetričnih konfiguracija koje bi opisivale relativističke zvijezde [45], gdje se čak tvrdilo da takva mogućnost u $f(T)$ gravitaciji ne postoji [46]. Također, navodi prema kojima Schwarzschildovo rješenje iz opće teorije relativnosti ostaje valjanim u okviru

[‡] ΛCDM predstavlja kozmološki model koji se sastoji od tamne energije - u kojem Λ označava kozmološku konstantu, i hladne tamne materije označena s kraticom CDM. Taj je model, zbog svoje jednostavnosti i uspjeha, u znanstvenoj zajednici često smatran standardnim kozmološkim modelom.

$f(T)$ gravitacije [47] pokazali su se netočnima [41].

Ovaj rad će najprije dati pregled osnovnih pojmova i kratak prikaz kovarijantne formulacije $f(T)$ gravitacije, a nakon toga će se usredotočiti na proučavanje statičnih sfernosimetričnih rješenja u okviru te teorije. Najprije će se razmotriti vakuumska rješenja koja je u nekim posebnim situacijama moguće dobiti analitičkim putem, a nakon toga će se prikazati vakuumsko rješenje dobiveno perturbativnim putem kao i neka rješenja dobivena numeričkim postupkom. Zatim će se istražiti neka statična sfernosimetrična rješenja koja opisuju relativističke zvijezde. Prije svega će se razmotriti rješenja dobivena tzv. politropskom jednadžbom stanja koja su u općoj teoriji relativnosti zanimljiva jer su prostorno ograničena u smislu postojanja sferne hiperplohe izvan koje su komponente tenzora energije i impulsa identički jednake nuli. Razmotrit će se odnos mase i broja čestica u takvim modelima i usporedit će ga se s poznatim rezultatima iz opće teorije relativnosti. Dio rezultata ovog dijela istraživanja objavljen je u radu [48]. Nakon politropskih zvijezda razmotrit će se tzv. bozonske zvijezde čiji tenzor energije i impulsa proizlazi iz lagranžijana masivnog kompleksnog skalarnog polja. Nasuprot politropskim zvijezdama, bozonske zvijezde nemaju konačan polumjer, već se prožimaju kroz sav prostor. Ovaj dio istraživanja objavljen je u radu [49].

U pretposljednjem poglavlju diskutirat će se o nekim poteškoćama vezanim uz tetrade ovisne o vremenu u kovarijantnoj $f(T)$ teoriji gravitacije.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju dat će se pregled najvažnijih matematičkih pojmova i identiteta koji se koriste pri formulaciji teorija gravitacije koje se osnivaju na zakrivljenosti i na torziji prostorvremena. Notacija koja se ovdje uvodi koristi se u poglavljima koja slijede, a u potpunosti je usklađena s udžbenikom [11].

2.1 Tetrada

Teorije gravitacije koje su temeljene na geometriji prostorvremena definirane su na četvero-dimenzionalnoj diferencijabilnoj mnogostrukosti. Svakoj točki prostorvremena pridružen je tangentni vektorski prostor s metrikom Minkowskog definiranom s

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1), \tag{2.1}$$

gdje je odabran tzv. negativni potpis metrike. U ovom radu slova grčkog alfabeta ($\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$) koristit ćemo za indekse komponenata tenzora u prostorvremenu, dok ćemo slova latinske abecede ($a, b, \ldots = 0, 1, 2, 3$) koristiti za indekse komponenata tenzora u tangentnom prostoru. Prostorvremenske koordinate označavat ćemo s x^μ, a koordinate tangentnog prostora s x^a. Koordinate prostorvremena definiraju tzv. koordinatnu bazu dx^μ, dok bazu u tangentnom prostoru označavamo s dx^a. Tim bazama odgovaraju i skupovi gradijenata,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}, \tag{2.2}$$

pri čemu vrijedi svojstvo ortogonalnosti

$$dx^\mu \partial_\nu = \delta^\mu_\nu, \qquad dx^a \partial_b = \delta^a_b. \tag{2.3}$$

Svaki vektor ili kovektor možemo izraziti korištenjem tih baza. Bazu u tangentnom, odnosno u kotangentnom prostoru označavamo s e_a i e^a te je nazivamo tetradom (njem. *vierbeine*),

$$e_a = \partial_a, \qquad e^a = dx^a. \tag{2.4}$$

Naravno, bazu tvori i bilo koji drugi skup četiriju linearno nezavisnih polja e'_b za koji vrijedi ortogonalnost

$$e'^a e'_b = \delta^a_b. \tag{2.5}$$

Bitno svojstvo neke mnogostrukosti jest njezina paralelizabilnost koja podrazumijeva da su vektorska polja e_a svugdje neiščezavajuća, jer u protivnom ona ne bi mogla tvoriti bazu. Veza između mnogostrukosti prostorvremena u nekoj njegovoj točki i odgovarajućeg tangentnog prostora dana je s

$$e_a = e_a{}^\mu \, \partial_\mu, \qquad e^a = e^a{}_\mu \, dx^\mu, \tag{2.6}$$

te s

$$\partial_\mu = e^a{}_\mu \, e_a, \qquad dx^\mu = e_a{}^\mu \, e^a. \tag{2.7}$$

Iz uvjeta ortogonalnosti (2.5) vrijedi

$$e^a{}_\mu \, e_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu, \qquad e^a{}_\mu \, e_b{}^\mu = \delta^a_b. \tag{2.8}$$

U prostorvremenu u kojem nisu prisutni učinci gravitacije i čija je metrika dana tenzorom $\eta_{\mu\nu}$, tetrade za koje vrijedi

$$\eta_{ab} = \eta_{\mu\nu} \, e_a{}^\mu \, e_b{}^\nu, \qquad \eta_{\mu\nu} = \eta_{ab} \, e^a{}_\mu \, e^b{}_\nu, \tag{2.9}$$

zvat ćemo trivijalnim tetradama. Općenito, u prostoru u kojem jesu prisutni učinci gravitacije i čiji je tenzor metrike $g_{\mu\nu}$, tetrade $h_a{}^\mu$ za koje vrijedi

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} \, h_a{}^\mu \, h_b{}^\nu, \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \, h^a{}_\mu \, h^b{}_\nu, \tag{2.10}$$

zovemo netrivijalnim tetradama. Netrivijalna tetrada također zadovoljava relacije

$$h^a{}_\mu \, h_a{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu, \qquad h^a{}_\mu \, h_b{}^\mu = \delta_b{}^a. \tag{2.11}$$

Trivijalna tetrada ima svoju ulogu u specijalnoj teoriji relativnosti gdje se pojavljuje isključivo prostorvrijeme Minkowskog, dok je netrivijalna tetrada ključna za uključivanje gravitacijskog međudjelovanja gdje se pojavljuje općenita metrika $g_{\mu\nu}$. Tetrada $h_a{}^\mu$ ima ulogu preslikavanja prostorvremenskih tenzora u tangentni prostor i obrnuto. Na primjer, tenzoru čije su prostorvremenske komponente $A^{\mu\nu}$ u tangentnom prostoru odgovaraju komponente

$$A^{ab} = h^a{}_\mu h^b{}_\nu A^{\mu\nu}. \tag{2.12}$$

Podizanje i spuštanje prostorvremenskih indeksa i indeksa tangentnog prostora postižemo kontrakcijom s odgovarajućim tenzorima metrike, $A^{\mu\nu} = A^\mu{}_\rho g^{\rho\nu}$, $A^{ab} = A^a{}_c \eta^{cb}$. Na primjer, podizanjem i spuštanjem indeksa same tetrade, $h_a{}^\mu = \eta_{ab} h^b{}_\nu g^{\mu\nu}$, dolazimo do izraza za preslikavanje tenzora A^{ab} iz tangentnog prostora u prostorvrijeme,

$$A^{\mu\nu} = h_a{}^\mu h_b{}^\nu A^{ab}. \tag{2.13}$$

U općoj teoriji relativnosti metrika $g_{\mu\nu}$ predstavlja temeljni objekt (stupnjeve slobode) u opisu gravitacijskog međudjelovanja, dok u teorijama osnovanim na torziji tu ulogu će imati tetrada $h_a{}^\mu$.

2.2 Lorentzova (spinska) koneksija

U konstrukcijama baždarnih teorija ključnu ulogu imaju koneksije čija je uloga osigurati kovarijantnost derivacija objekata s obzirom na baždarnu transformaciju u kojoj su ti objekti invarijantni. Npr. baždarna polja u elektromagnetizmu omogućuju kovarijantnost derivacija Diracovog spinora ψ s obzirom na lokalne baždarne transformacije. U modificiranim teorijama gravitacije nužno je razumjeti ulogu koneksija koje znatno mijenjaju strukturu jednadžbi same teorije. Osnovna razlika između baždarnih teorija u standardnom modelu u odnosu na gravitaciju leži u tome što u standardnom modelu govorimo o unutarnjim (internim) simetrijama—lokalnim baždarnim simetrijama—koje se odvijaju na pozornici prostorvremena, dok u gravitaciji osnovu svih simetrija čini samo prostorvrijeme. U teorijama gravitacije uvodimo Lorentzovu ili spinsku koneksiju

$$A_\mu = \frac{1}{2} A^{ab}{}_\mu S_{ab}, \tag{2.14}$$

gdje je S_{ab} zadana reprezentacija Lorentzove grupe $SO(3,1)$. Na primjer, za skalarno polje koristimo $S_{ab} = 0$, za Diracov spinor $S_{ab} = i[\gamma_a, \gamma_b]/4$, gdje su γ_a Diracove matrice, dok za vektor koristimo $(S_{ab})^c{}_d = i(\eta_{bd}\delta^c_a - \eta_{ad}\delta^c_b)$. Sama Lorentzova koneksija antisimetrična je u svoja prva dva indeksa,

$$A_{ab\mu} = -A_{ba\mu}. \tag{2.15}$$

Lorentzova koneksija definira tzv. kovarijantnu derivaciju Fock–Ivanenka,

$$\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A^{ab}{}_\mu S_{ab}, \tag{2.16}$$

koja se, na primjer, u slučaju vektora svodi na

$$\mathscr{D}_\mu \varphi^c = \partial_\mu \varphi^c + A^c{}_{d\mu} \varphi^d. \tag{2.17}$$

Lorentzovoj koneksiji $A^a{}_{b\mu}$ pridružena je linearna koneksija definirana s

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \equiv h_a{}^\rho \mathscr{D}_\nu h^a{}_\mu = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu + h_a{}^\rho A^a{}_{b\nu} h^b{}_\mu \tag{2.18}$$

te vrijedi relacija koju uzimamo kao definiciju kovarijantne derivacije ∇_μ,

$$A^a{}_{b\mu} = h^a{}_\nu \partial_\mu h_b{}^\nu + h^a{}_\nu \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} h_b{}^\rho \equiv h^a{}_\nu \nabla_\mu h_b{}^\nu. \tag{2.19}$$

Za općenito vektorsko polje φ vrijedi

$$\mathscr{D}_\mu \varphi^a = h^a{}_\nu \nabla_\mu \varphi^\nu, \qquad \nabla_\mu \varphi^\nu = h_a{}^\nu \mathscr{D}_\mu \varphi^a. \tag{2.20}$$

Iz jednadžbe (2.18) slijedi jednakost

$$\partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho + A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu = 0 \tag{2.21}$$

koja ima važnu ulogu pri formulacijama teorija gravitacije koje se osnivaju na torziji prostorvremena. Naime, u ranijim formulacijama tzv. teleparalelnih teorija koristio se tzv. uvjet apsolutne paralelizabilnosti koji glasi

$$\nabla_\mu h^a{}_\nu = \partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho = 0. \tag{2.22}$$

Taj uvjet za odabranu tetradu $h^a{}_\nu$ definira tzv. Weitzenböckovu linearnu koneksiju

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu \tag{2.23}$$

kojoj odgovara da je Lorentzova koneksija jednaka nuli. Pokazat će se (vidi poglavlje 4) da se korištenjem Weitzenböckove koneksije ne osigurava lokalna Lorentzova invarijantnost lagranžijana TEGR-a, odnosno invarijantnost lagranžijana u odnosu na odabir tetrade. Ipak, jednadžbe gibanja koje proizlaze iz takvog lagranžijana jesu invarijantne u odnosu na odabir tetrade. Situacija se, međutim, u korijenu mijenja kad se u razmatranje uzmu proširene teorije osnovane na torziji poput teorije gravitacije tipa $f(T)$ gdje se nezaobilazno mora uključiti i Lorentzovu koneksiju. U teorijama gravitacije tipa $f(T)$ napušta se načelo apsolutne paralelizabilnosti te jednadžba (2.21) ima ključnu ulogu u osiguravanju lokalne Lorentzove invarijantnosti teorije.

2.3 Zakrivljenost i torzija

Na istom prostorvremenu moguće je definirati različite koneksije, a shvatimo li zakrivljenost i torziju kao tenzorska svojstva koneksije, na istom je prostorvremenu moguće definirati teorije gravitacije temeljene bilo na zakrivljenosti, bilo na torziji, kao i one u kojima su istovremeno prisutne i zakrivljenost i torzija.

Tenzor zakrivljenosti prostorvremena općenito je definiran s

$$R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}, \tag{2.24}$$

a možemo ga izraziti i korištenjem Lorentzove koneksije,

$$R^{a}{}_{b\nu\mu} = \partial_{\nu}A^{a}{}_{b\mu} - \partial_{\mu}A^{a}{}_{b\nu} + A^{a}{}_{e\nu}A^{e}{}_{b\mu} - A^{a}{}_{e\mu}A^{e}{}_{b\nu}. \tag{2.25}$$

Tenzor torzije definiran je kao antisimetrični dio linearne koneksije,

$$T^{\rho}{}_{\nu\mu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}, \tag{2.26}$$

što također možemo izraziti korištenjem Lorentzove koneksije i tetrade,

$$T^{a}{}_{\nu\mu} = \partial_{\nu}h^{a}{}_{\mu} - \partial_{\mu}h^{a}{}_{\nu} + A^{a}{}_{e\nu}h^{e}{}_{\mu} - A^{a}{}_{e\mu}h^{e}{}_{\nu}. \tag{2.27}$$

Linearna koneksija Levi–Civite,

$$\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}), \tag{2.28}$$

je jedinstvena koneksija s iščezavajućom torzijom, a pripadajući tenzor zakrivljenosti zovemo Riemannovim tenzorom zakrivljenosti i označavamo ga s $\mathring{R}^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu}$.

Tenzor kontorzije definiran je kao razlika općenite koneksije $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ i koneksije Levi–Civite $\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}$,

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}. \tag{2.29}$$

Zakrivljenost i torzija zadovoljavaju identitete

$$\mathscr{D}_{\nu}T^{a}{}_{\rho\mu} + \mathscr{D}_{\mu}T^{a}{}_{\nu\rho} + \mathscr{D}_{\rho}T^{a}{}_{\mu\nu} = R^{a}{}_{\rho\mu\nu} + R^{a}{}_{\nu\rho\mu} + R^{a}{}_{\mu\nu\rho}, \tag{2.30}$$

$$\mathscr{D}_{\nu}R^{a}{}_{b\rho\mu} + \mathscr{D}_{\mu}R^{a}{}_{b\nu\rho} + \mathscr{D}_{\rho}R^{a}{}_{b\mu\nu} = 0, \tag{2.31}$$

koje zovemo Bianchijevim identitetima. U prostorvremenskim indeksima, u posebnom slučaju iščezavajuće torzije gornji identiteti svode se na

$$\mathring{R}^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} + \mathring{R}^{\lambda}{}_{\nu\rho\mu} + \mathring{R}^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = 0, \tag{2.32}$$

$$\nabla_{\nu}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\sigma\rho\mu} + \nabla_{\mu}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_{\rho}\mathring{R}^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = 0, \tag{2.33}$$

što su Bianchijevi identiteti, poznati iz opće teorije relativnosti.

Poglavlje 3

Teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti

U ovom poglavlju pokazat ćemo na koji je način moguće teoriju gravitacije shvatiti kao baždarnu teoriju translacijske grupe. Također, opisat ćemo osnovne crte formulacije TEGR-a te proučiti njen odnos s općom teorijom relativnosti. Konačno, pokazat će se istovjetnost TEGR-a i opće teorije relativnosti na razini jednadžbi gibanja probne čestice i jednadžbi polja koje opisuju vezanje prostovremena i materije.

3.1 Gravitacija kao baždarna teorija

Zanimljivo svojstvo teleparalelnog ekvivalenta opće teorije relativnosti (TEGR) jest da se tu teoriju može shvatiti kao baždarnu teoriju gravitacije u odnosu na grupu translacija. U tom se smislu TEGR razlikuje od opće teorije relativnosti koju ne smatramo baždarnom teorijom. Naime, iako opća teorija relativnosti sadrži simetrije kao što su difeomorfizam i Lorentzova simetrija koje bi mogle imati ulogu baždarne simetrije, njezini stupnjevi slobode nisu baždarna polja ili koneksije kao što je to slučaj u baždarnim teorijama, već je to sama metrika prostorvremena. Ovdje ćemo pokazati da se odstupanje metrike općenitog prostorvremena od metrike prostorvremena Minkowskog, a koje opisujemo netrivijalnom tetradom, može povezati sa zahtjevom za kovarijantnošću transformacija polja i njihovih derivacija u odnosu na grupu translacija u tangentnom prostoru. Iz tog rezultata proizići će vezanje materije i baždarnog polja te preskripcija za uključenje učinaka gravitacije. Sam lagranžijan TEGR-a opisat ćemo kasnije u ovom poglavlju.

Kao baždarnu transformaciju $x' = Ux$ uzimamo lokalnu translaciju u tangentnom prostoru [50]

$$x'^a = x^a + \varepsilon^a(x^\mu), \tag{3.1}$$

gdje je $U(x^\mu) = e^{\varepsilon^a P_a}$, ε^a je parametar transformacije, a generatori infinitezimalnih translacija

$P_a = \partial_a$ zadovoljavaju

$$[P_a, P_b] = \partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a = 0. \tag{3.2}$$

Infinitezimalnu transformaciju možemo izraziti korištenjem razvoja $U = 1 + \delta\varepsilon^a P_a$, što nam daje

$$\delta x^a = \delta\varepsilon^b P_b x^a. \tag{3.3}$$

Pri infinitezimalnoj transformaciji općenitog polja, $\phi' = U\phi$, imamo

$$\delta\phi = \delta\varepsilon^a \partial_a \phi, \tag{3.4}$$

gdje prepoznajemo kovarijantno ponašanje. Međutim, infinitezimalna transformacija derivacije polja dat će

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(U\phi) - \partial_\mu \phi = \delta\varepsilon^a \partial_a \partial_\mu \phi + (\partial_a \phi)(\partial_\mu \delta\varepsilon^a), \tag{3.5}$$

gdje nam prisutnost drugog člana na desnoj strani jednakosti govori da se za lokalnu baždarnu transformaciju $\varepsilon(x^\mu)$ derivacija polja ne transformira kovarijantno. U tom slučaju uvodimo baždarno polje [50]

$$B_\mu = B^a{}_\mu P_a \tag{3.6}$$

s pomoću kojega konstruiramo kovarijantnu derivaciju

$$h_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi + B^a{}_\mu \partial_a \phi, \tag{3.7}$$

a iz zahtjeva da se ona transformira kovarijantno, tj. da vrijedi

$$\delta(h_\mu \phi) = \varepsilon^a \partial_a (h_\mu \phi), \tag{3.8}$$

slijedi da se samo baždarno polje transformira u skladu s

$$B'^a{}_\mu = B^a{}_\mu - \partial_\mu \varepsilon^a. \tag{3.9}$$

Uočavamo kako, prema analogiji s poznatim baždarnim teorijama, drugi član kovarijantne derivacije (3.7) polja ϕ možemo shvatiti kao član međudjelovanja materije opisane poljem ϕ i baždarnog polja. Nadalje, kovarijantnu derivaciju (3.7) možemo izraziti i kao

$$h_\mu \phi = (e^a{}_\mu + B^a{}_\mu)\partial_a \phi = h^a{}_\mu \partial_a \phi, \tag{3.10}$$

gdje je $e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a$ trivijalna tetrada, a $h^a{}_\mu$ je netrivijalna tetrada. Time smo kovarijantnu derivaciju poistovjetili s netrivijalnom tetradom

$$h^a{}_\mu = e^a{}_\mu + B^a{}_\mu \tag{3.11}$$

čiji netrivijalni dio je upravo baždarno polje grupe translacija u tangentnom prostoru. Preskripcija kojom u prostorvremenu uvodimo učinke gravitacije sada se može sažeto izraziti s

$$e^a{}_\mu \ \rightarrow \ h^a{}_\mu = e^a{}_\mu + B^a{}_\mu . \tag{3.12}$$

Konačno, jednakost (3.11) nam govori da će varijacija lagranžijana teorije gravitacije, jednom kada on bude odabran, dati istovjetne rezultate bez obzira provodimo li je varirajući po komponentama netrivijalne tetrade $h^a{}_\mu$ ili po komponentama baždarnog polja $B^a{}_\mu$ grupe translacija. Samim time se teorija gravitacije koja koristi tetradu kao svoje stupnjeve slobode može shvatiti kao baždarna teorija gravitacije.

3.2 Lorentzove transformacije i inercija

U većini teorija u fizici, pri konstrukciji jednadžbi gibanja, zbog jednostavnosti se koriste inercijski referentni sustavi. Međutim, moguće je koristiti i druge sustave. Na primjer, u specijalnoj teoriji relativnosti može se koristiti formalizam spinske ili Lorentzove koneksije kojim opisujemo učinke inercije u neinercijskim sustavima.

Ako je $\Lambda^a{}_b(x)$ lokalna Lorentzova transformacija, koordinate u tangentnom prostoru transformiraju se u skladu s

$$x^a = \Lambda^a{}_b(x) x^{*b}, \tag{3.13}$$

a iz zahtjeva da se trivijalna tetrada $e^{*a}{}_\mu = \partial_\mu x^{*a}$ sustava koji je prema pretpostavci inercijski sustav (oznaka *) transformira kovarijantno,

$$e^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) e^{*b}{}_\mu , \tag{3.14}$$

nalazimo

$$e^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_{b\mu} x^b , \tag{3.15}$$

gdje je

$$A^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^c(x) \tag{3.16}$$

Lorentzova koneksija. Prisutnost Lorentzove koneksije u (3.15), a koja proizlazi iz lokalnosti Lorentzovih transformacija, znači da ta tetrada sada uključuje i učinke inercije. Općenito, polazimo li iz sustava s neiščezavajućom Lorentzovom koneksijom $A^c{}_{d\mu}$, koneksija se transformira u skladu s

$$A'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) A^c{}_{d\mu} \Lambda_b{}^d(x) + \Lambda^a{}_c(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^c(x). \tag{3.17}$$

Prvi član gornjeg izraza nije bio prisutan u izrazu (3.16) jer je u tom izrazu, prema pretpostavci, polazni sustav bio inercijski sustav, odnosno pripadna Lorentzova koneksija bila je jednaka nuli.

Na kovarijantan način transformira se i baždarno polje,

$$B^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) B'^b{}_\mu, \tag{3.18}$$

a netrivijalnu tetradu iz (3.11) sada možemo izraziti s

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_{b\mu} x^b + B^a{}_\mu, \tag{3.19}$$

čime, osim učinaka inercije opisanih s $A^a{}_{b\mu}$, ona uključuje i učinke gravitacije kroz prisutnost baždarnog polja $B^a{}_\mu$. Bažadarnom potencijalu $B^a{}_\mu$ pridružuje se i jakost polja

$$F^a{}_{\mu\nu} P_a = [h_\mu, h_\nu] \tag{3.20}$$

definirana kao komutator kovarijantnih derivacija, iz čega slijedi

$$F^a{}_{\mu\nu} = \mathscr{D}_\mu B^a{}_\nu - \mathscr{D}_\nu B^a{}_\mu, \tag{3.21}$$

gdje je $\mathscr{D}_\mu$ derivacija Focka i Ivanenka definirana u (2.16). Jakost polja $F^a{}_{\mu\nu}$ tenzorska je veličina invarijantna s obzirom na baždarnu transformaciju, $F'^a{}_{\mu\nu} = F^a{}_{\mu\nu}$. Dodamo li u jednadžbu (3.21) iščezavajući komutator $[\mathscr{D}_\mu, \mathscr{D}_\nu] x^a = 0$ možemo napisati

$$F^a{}_{\mu\nu} = \mathscr{D}_\mu(\mathscr{D}_\nu x^a + B^a{}_\nu) - \mathscr{D}_\nu(\mathscr{D}_\mu x^a + B^a{}_\mu), \tag{3.22}$$

gdje izraze u zagradama prepoznajemo kao netrivijalnu tetradu $h^a{}_\mu = \mathscr{D}_\mu x^a + B^a{}_\mu$. To znači da jakost polja možemo napisati kao

$$F^a{}_{\mu\nu} = \mathscr{D}_\mu h^a{}_\nu - \mathscr{D}_\nu h^a{}_\mu = T^a{}_{\mu\nu}, \tag{3.23}$$

gdje prepoznajemo od ranije poznatu definiciju tenzora torzije (2.27). Time smo pokazali da je jakost polja pridružena baždarnom polju $B^a{}_\mu$ upravo tenzor torzije.

Važno svojstvo tenzora metrike prostorvremena jest da je on invarijantan u odnosu na Lorentzovu transformaciju netrivijalne tetrade, $h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_c h^c{}_\mu$, što pokazujemo s

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{ab} h'^a{}_\mu h'^b{}_\nu = \eta_{ab} \Lambda^a{}_c h^c{}_\mu \Lambda^b{}_d h^d{}_\nu = \eta_{ab} \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d h^c{}_\mu h^d{}_\nu = \eta_{cd} h^c{}_\mu h^d{}_\nu = g_{\mu\nu}, \tag{3.24}$$

gdje smo prepoznali $\eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d = \eta_{cd}$, a što proizlazi iz svojstva Lorentzovih transformacija $\Lambda^a{}_c = (\Lambda^{-1})_c{}^a$. Tenzor torzije i tenzor zakrivljenosti transformiraju se kovarijantno

$$T'^a{}_{\mu\nu} = \Lambda^a{}_b(x)T^b{}_{\mu\nu}, \tag{3.25}$$

$$R'^a{}_{b\mu\nu} = \Lambda^a{}_c(x)\Lambda_b{}^d(x)R^c{}_{d\mu\nu}. \tag{3.26}$$

3.3 Kinematika čestice

U općoj teoriji relativnosti kinematika čestice opisana je geodetskom jednadžbom. Ona predstavlja slobodno gibanje čestice u zakrivljenom prostorvremenu te shodno tome govorimo o geometrijskoj interpretaciji gravitacijskog međudjelovanja. U TEGR-u je situacija drugačija. Jednadžba gibanja čestice u gravitacijskom polju više nije geodetska jednadžba, nego se u strukturi jednadžbe prepoznaje sila koja djeluje na česticu. U tom smislu u TEGR-u gravitacijsko međudjelovanje nema geometrijski karakter nego se, slično kao i u elektromagnetizmu, javlja sila kao koncept međudjelovanja. Međutim, pokazat će se da su jednadžbe gibanja čestice istovjetne geodetskim jednadžbama u teoriji temeljenoj na zakrivljenosti.

Polazimo od akcije čestice mase m koja je dana integralom [11]

$$\mathscr{S} = -mc\int_q^p ds, \tag{3.27}$$

gdje je ds element invarijantnog prostorvremenskog intervala

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab}h^a h^b, \tag{3.28}$$

uz notaciju $h^a = h^a{}_\mu dx^\mu$. Četverobrzina dana je izrazom

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \tag{3.29}$$

te nakon što pokažemo da vrijedi $ds = u_a h^a$ akciju možemo napisati kao

$$\mathscr{S} = -mc\int_q^p u_a h^a. \tag{3.30}$$

Uvrštavanjem izraza za tetradu u općenitom Lorentzovom sustavu

$$h^a = dx^a + A^a{}_{b\mu}x^b dx^\mu + B^a{}_\mu dx^\mu \tag{3.31}$$

u akciju ona poprima oblik

$$\mathscr{S} = -mc \int_q^p u_a (dx^a + A^a{}_{b\mu} x^b dx^\mu + B^a{}_\mu dx^\mu). \tag{3.32}$$

Variranjem akcije dobivamo

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{S} = -mc \int_q^p \Big[& \delta u_a \Big(dx^a + A^a{}_{b\mu} x^b dx^\mu + B^a{}_\mu dx^\mu \Big) + \\ & u_a \Big(d(\delta x^a) + \delta(A^a{}_{b\mu}) x^b dx^\mu + A^a{}_{b\mu} \delta x^b dx^\mu + \\ & A^a{}_{b\mu} x^b d(\delta x^\mu) + \delta(B^a{}_\mu) dx^\mu + B^a{}_\mu d(\delta x^\mu) \Big) \Big]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Iz svojstva $\delta ds = u_a \delta h^a + h^a \delta u_a$ te usporedbom s $\delta(ds^2) = \delta(\eta_{ab} h^a h^b)$ nalazimo

$$\delta ds = u_a \delta h^a = u_a \delta h^a + h^a \delta u_a \implies h^a \delta u_a = 0, \tag{3.34}$$

čime prva zagrada u izrazu (3.33) iščezava. Nadalje, integrirajući po dijelovima imamo

$$u_a d\delta x^a = d(u_a \delta x^a) - du_a \delta x^a, \tag{3.35}$$

$$u_a B^a{}_\mu d\delta x^\mu = d(u_a B^a{}_\mu \delta x^\mu) - d(u_a B^a{}_\mu) \delta x^\mu, \tag{3.36}$$

$$u_a A^a{}_{b\mu} x^b d\delta x^\mu = d(u_a A^a{}_{b\mu} x^b \delta x^\mu) - d(u_a A^a{}_{b\mu} x^b) \delta x^\mu, \tag{3.37}$$

te izostavljanjem potpunih diferencijala dobivamo

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{S} = mc \int_q^p \Big[& du_a \delta x^a - u_a \delta A^a{}_{b\mu} x^b dx^\mu - u_a A^a{}_{b\mu} \delta x^b dx^\mu + \\ & d(u_a A^a{}_{b\mu} x^b) \delta x^\mu - u_a \delta B^a{}_\mu dx^\mu + d(u_a B^a{}_\mu) \delta x^\mu \Big]. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Uvrštavanjem varijacija

$$\delta x^a = \partial_\mu x^a \delta x^\mu, \qquad \delta A^a{}_{b\mu} = \partial_\nu A^a{}_{b\mu} \delta x^\nu, \qquad \delta B^a{}_\mu = \partial_\nu B^a{}_\mu \delta x^\nu, \tag{3.39}$$

u (3.38) te korištenjem (3.21) i (3.23) nalazimo jednadžbu gibanja

$$\frac{du_a}{ds} - A^b{}_{a\mu} u_b u^\mu = T^b{}_{a\mu} u_b u^\mu, \tag{3.40}$$

odnosno

$$\frac{du^a}{ds} + A^a{}_{b\mu} u^b u^\mu = T_b{}^a{}_\mu u^b u^\mu, \tag{3.41}$$

u kojoj se pojavljuje tenzor torzije $T^b{}_{a\mu}$. Jednadžba (3.41) predstavlja kinematiku gibanja čestice u TEGR-u te općenito u svim teorijama temeljenima na torziji poput teorije gravitacije tipa

$f(T)$ koju ćemo uvesti u sljedećem poglavlju.

Ovdje se postavlja pitanje odnosa kinematike čestice u TEGR-u i geodetske jednadžbe u općoj teoriji relativnosti. Korištenjem identiteta $T^b{}_{a\mu} u_b u^\mu = -K^b{}_{a\mu} u_b u^\mu$ jednadžba gibanja može se napisati i korištenjem tenzora kontorzije u obliku

$$\frac{du^a}{ds} + A^a{}_{b\mu} u^b u^\mu = K^a{}_{b\mu} u^b u^\mu. \tag{3.42}$$

Nadalje, korištenjem definicije tenzora kontorzije (2.29) i jednakosti (2.18), tenzor kontorzije možemo izraziti u tangentnim indeksima kao

$$K^a{}_{b\mu} = A^a{}_{b\mu} - \mathring{A}^a{}_{b\mu}, \tag{3.43}$$

gdje je $\mathring{A}^b{}_{a\mu}$ Lorentzova koneksija koja odgovara linearnoj koneksiji Levi-Civite. Na taj način jednadžba (3.42) poprima oblik

$$\frac{du^a}{ds} + \mathring{A}^a{}_{b\mu} u^b u^\mu = 0, \tag{3.44}$$

odnosno

$$\frac{du^\mu}{ds} + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = 0, \tag{3.45}$$

gdje je $\mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho}$ linearna koneksija Levi-Civite, što je upravo geodetska jednadžba poznata iz opće teorije relativnosti.

Činjenica da smo gornjim razmatranjem u TEGR-u dobili jednadžbu gibanja čestice koja je istovjetna onoj iz opće teorije relativnosti nas ne iznenađuje. Naime, polazna točka bila je iščezavanje varijacije akcije (3.28), što odgovara traženju krivulje s ekstremnom vlastitom duljinom, upravo kao i u općoj teoriji relativnosti. Međutim, u općenitijim teorijama gravitacije u kojima se koriste različite linearne koneksije, geodetska krivulja definirana je kao krivulja čiji tangentni vektori ostaju paralelni prilikom njihovog paralelnog transporta duž same krivulje, što izražavamo uvjetom

$$(\nabla_\mu u^\nu) u^\mu = \frac{d}{ds} u^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu = 0. \tag{3.46}$$

Putanja koja proizlazi iz gornjeg uvjeta, a koji još možemo shvatiti i kao uvjet iščezavanja kovarijantne četveroakceleracije čestice, ne podudara se nužno s putanjom koja proizlazi iz uvjeta

$$\delta \int ds = 0, \tag{3.47}$$

osim u slučaju kada je koneksija korištena u kovarijantnoj derivaciji u (3.46) koneksija Levi-Civite. Upravo iz toga proizlazi i važna razlika u interpretaciji jednadžbe gibanja (3.45) u okviru opće teorije relativnosti i u okviru TEGR-a. Lako je pokazati krivulju koja proizlazi iz jednadžbe gibanja (3.45), a koju u okviru TEGR-a ne možemo smatrati geodetskom krivuljom.

Naime, kovarijantnu četveroakceleraciju čestice u TEGR-u možemo izraziti kao

$$\begin{aligned}(\nabla_\mu u^\nu)u^\mu = \frac{d}{ds}u^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu &= \frac{d}{ds}u^\nu + \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu + (\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} - \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\mu})u^\lambda u^\mu \\ &= (\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} - \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\mu})u^\lambda u^\mu \\ &= K^\nu{}_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu \end{aligned} \tag{3.48}$$

gdje smo najprije koristili jednadžbu gibanja (3.45), a nakon toga smo razliku linearnih koneksija prepoznali kao tenzor kontorzije. Dok u općoj teoriji relativnosti kovarijantna četveroakceleracija iščezava, u TEGR-u to nije slučaj. Upravo iz gore navedenog razloga smatramo da jednadžba gibanja u TEGR-u, bez obzira na činjenicu što je ona istovjetna jednadžbi gibanja iz opće teorije relativnosti, je jednadžba koja sadrži koncept sile.

3.4 Lagranžijan i jednadžbe polja u TEGR-u

Nakon što je pokazana istovjetnost jednadžbi gibanja čestice u TEGR-u i onih u općoj teoriji relativnosti, ovdje ćemo pokazati kako su jednadžbe gibanja polja u TEGR-u istovjetne onima iz opće teorije relativnosti. Na taj način TEGR i opća teorija relativnosti postaju u potpunosti istovjetne teorije.

Za zadanu tetradu najopćenitiji gravitacijski lagranžijan sačinjen od linearne kombinacije torzijskih invarijanti razmjeran je izrazu

$$aT^\rho{}_{\mu\nu}T_\rho{}^{\mu\nu} + bT^\rho{}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}{}_\rho + cT^\rho{}_{\mu\rho}T^{\nu\mu}{}_\nu, \tag{3.49}$$

gdje su a, b i c konstante. Takav lagranžijan daje čitav niz novih teorija gravitacije temeljenih na torziji, koje nam daju jednadžbe gibanja koje nisu istovjetne onima iz opće teorije relativnosti. U literaturi se takva općenita teorija temeljena na torziji ponekad naziva Novom općom teorijom relativnosti (engl. *New General Relativity*), a problemi povezani s njom su narušenje principa ekvivalencije i nesklad s opažanjima gibanja planeta u Sunčevom sustavu [11]. Naravno, nas ovdje zanima samo slučaj TEGR-a.

Uz izbor konstanti

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad c = -1, \tag{3.50}$$

izraz (3.49) poprima oblik koji zbog njegove važnosti još zovemo skalarom torzije i obilježavamo ga s T,

$$T = \frac{1}{4}T^\rho{}_{\mu\nu}T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^\rho{}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho}T^{\nu\mu}{}_\nu. \tag{3.51}$$

Ključno svojstvo skalara torzije T jest njegova veza s Riccijevim skalarom $\mathring{R} = \mathring{R}^\mu{}_\mu$ koja glasi

[11]

$$\mathring{R} = -T - \frac{2}{h}\partial_\mu(hT^\mu), \tag{3.52}$$

gdje je $T^\mu = T^{\nu\mu}{}_\nu$ tzv. vektor torzije, a drugi član na desnoj strani ima oblik potpune divergencije. Izbor konstanti (3.50) jedinstven je izbor kojim dobivamo svojstvo (3.52) [11]. Ta jednakost nam govori da se skalar torzije i Riccijev skalar razlikuju samo za potpunu divergenciju $2\partial_\mu(hT^\mu)/h = 2\mathring{\nabla}_\mu T^\mu$. To nadalje znači da će pri varijaciji gravitacijske akcije član s potpunom divergencijom prijeći u površinski integral i iščeznuti, a jednadžbe gibanja će posljedično biti istovjetne onima iz opće teorije relativnosti. Akcija u TEGR-u, bez prisutnosti materije, je prema tome dana s

$$\mathscr{S}_{\mathrm{TEGR}} = \int \mathscr{L}_{\mathrm{G}}\, h\, d^4x = \frac{1}{2\kappa}\int T\, h\, d^4x, \tag{3.53}$$

gdje je $\kappa = 8\pi G/c^4$, $h = \det(h^a{}_\mu) = \sqrt{-g}$, a T je skalar torzije (3.51) [51].

Skalar torzije možemo napisati i u obliku

$$T = S^{\rho\mu\nu}T_{\rho\mu\nu}, \tag{3.54}$$

gdje tenzor

$$S^{\rho\mu\nu} = -S^{\rho\nu\mu} = \frac{1}{2}(K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu}T^{\sigma\mu}{}_\sigma + g^{\rho\mu}T^{\sigma\nu}{}_\sigma) \tag{3.55}$$

zovemo superpotencijalom. Oblik (3.54) pogodniji je u procesu varijacije akcije (3.53). Varirajući akciju po tetradi, Euler-Lagrangeove jednadžbe glase*

$$\frac{\delta(h\mathscr{L}_G)}{\delta h_a{}^\mu} \equiv \frac{\partial(h\mathscr{L}_G)}{\partial h_a{}^\mu} - \partial_\rho \frac{\partial(h\mathscr{L}_G)}{\partial(\partial_\rho h_a{}^\mu)}, \tag{3.56}$$

gdje je lagranžijan

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}} = \frac{T}{2\kappa} = \frac{c^4}{16\pi G}S^{\rho\mu\nu}T_{\rho\mu\nu}. \tag{3.57}$$

Također, vrijedi [11]

$$hS_a{}^{\rho\sigma} = -\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\partial(h\mathscr{L}_G)}{\partial(\partial_\sigma h_a{}^\rho)}, \qquad hj_a{}^\rho = -\frac{\partial(h\mathscr{L}_G)}{\partial h^a{}_\rho}, \tag{3.58}$$

gdje Euler–Lagrangeove jednadžbe poprimaju oblik

$$\partial_\sigma(hS_a{}^{\rho\sigma}) - \frac{8\pi G}{c^4}hj_a{}^\rho = 0, \tag{3.59}$$

*S obzirom na to da je želja postaviti baždarnu teoriju gravitacije tada je nužno varirati lagranžijan po baždarnom polju $B_a{}^\mu$, što je jednako variranju po netrivijalnoj tetradi $h_a{}^\mu$ jer vrijedi (3.11).

što konačno možemo napisati u obliku [11]

$$h^{-1}\partial_\sigma(hS_a{}^{\rho\sigma}) - h_a{}^\mu S_b{}^{\nu\rho}T^b{}_{\nu\mu} + \frac{h_a{}^\rho}{4}T = 0, \tag{3.60}$$

gdje je

$$\frac{8\pi G}{c^4}j_a{}^\rho = h_a{}^\mu S_b{}^{\nu\rho}T^b{}_{\nu\mu} + \frac{h_a{}^\rho}{4}T. \tag{3.61}$$

Kraćim računom se pokazuje kako kontrakcija gornjeg izraza s tetradom $h^a{}_\mu$ daje upravo Einsteinov tenzor iz opće relativnosti $\mathring{G}_\mu{}^\rho = \mathring{R}_\mu{}^\rho - \delta_\mu^\rho \mathring{R}/2$. U slučaju minimalnog vezanja gravitacije i materije ukupni lagranžijan je

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\mathrm{G} + \mathscr{L}_\mathrm{M}, \tag{3.62}$$

te uz uobičajenu definiciju tenzora energije i impulsa materije,

$$h\Theta^a{}_\mu \equiv \frac{\delta(h\mathscr{L}_\mathrm{M})}{\delta h_a{}^\mu}, \tag{3.63}$$

odnosno

$$\Theta^a{}_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}_\mathrm{M}}{\partial h_a{}^\mu} + h_\mu{}^a \mathscr{L}_M, \tag{3.64}$$

jednadžba polja koje povezuje učinke gravitacije i danu konfiguraciju materije glasi

$$h^{-1}\partial_\sigma(hS_a{}^{\rho\sigma}) - h_a{}^\mu S_b{}^{\nu\rho}T^b{}_{\nu\mu} + \frac{h_a{}^\rho}{4}T = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_a{}^\rho, \tag{3.65}$$

te je i ona istovjetna jednadžbi gibanja u općoj teoriji relativnosti.

3.5 Svojstva tenzora energije i impulsa u TEGR-u

U minimalnom vezanju gravitacije i materije tenzor energije i impulsa $\Theta^a{}_\mu$ određen je varijacijom akcije po tetradi kao što je definirano u (3.63). Također, ovako definiran tenzor energije i impulsa vrijedi za većinu polja iz kvantne teorije, kao i za spinorna polja koja u općoj teoriji relativnosti traže dodatni tretman [52, 53]. Potražit ćemo lokalnu Lorentzovu transformaciju oblika

$$\Lambda_a{}^b = \delta_a{}^b + \varepsilon_a{}^b(x^\mu), \tag{3.66}$$

gdje je ε transformacijski parametar koji je antisimetričan $\varepsilon_{ab}(x^\mu) = \varepsilon_{[ab]}(x^\mu)$. S obzirom na tu transformaciju, tetrada postaje

$$\delta h_a{}^\mu = \varepsilon_a{}^b h_b{}^\mu. \tag{3.67}$$

Varijacija akcije materije tada je [11]

$$\delta\mathscr{S}_m = \int \Theta^a{}_\mu h \delta h_a{}^\mu dx^4 = \eta^{bc}\int \Theta^a{}_\mu h \varepsilon_{ab} h_c{}^\mu dx^4. \tag{3.68}$$

Iz svojstva antisimetričnosti ε_{ab} tada dobivamo

$$\eta^{bc}\Theta^a{}_\mu h_c{}^\mu = \eta^{ac}\Theta^b{}_\mu h_c{}^\mu \quad \Longrightarrow \quad \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}. \tag{3.69}$$

Drugim riječima, iz zahtjeva lokalne Lorentzove invarijantnosti slijedi simetričnost tenzora energije i impulsa.

Promotrimo sada lokalnu infinitezimalnu koordinatnu transformaciju $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$. S obzirom na ovu transformaciju varijacija tetrade je

$$\delta h_a{}^\mu = h_a{}^\nu \partial_\nu \varepsilon^\mu - \partial_\nu h_a{}^\mu \varepsilon^\nu. \tag{3.70}$$

Varijacija akcije materije sada je

$$\delta\mathscr{S}_m = \int \Big(\partial_\nu (h\Theta^a{}_\lambda h_a{}^\nu) + h\Theta^a{}_\mu \partial_\lambda h^\mu{}_a\Big)\varepsilon^\lambda d^4x. \tag{3.71}$$

Iz zahtjeva da ta varijacija bude jednaka nuli, korištenjem identiteta

$$\partial_\nu h = h\mathring{\Gamma}^\mu{}_{\mu\nu} = h(\Gamma^\mu{}_{\nu\mu} - K^\mu{}_{\nu\mu}), \tag{3.72}$$

$$\partial_\rho h_a{}^\mu = A^b{}_{a\rho} h_b{}^\mu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} h_a{}^\lambda, \tag{3.73}$$

nalazimo

$$h\mathring{\nabla}^\nu \Theta_{\nu\mu} + h\Theta^{\alpha\nu} K_{\alpha\nu\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathring{\nabla}^\nu \Theta_{\nu\mu} = 0, \tag{3.74}$$

pri čemu smo koristili svojstvo simetričnosti $K_{\mu\nu\rho}$ u prva dva indeksa i svojstvo simetričnosti tenzora energije i impulsa. Krajnji rezultat je kovarijantno očuvanje tenzora energije i impulsa gdje je koneksija u kovarijantnoj derivaciji koneksija Levi-Civite.† Ovaj identitet je dobro poznat rezultat iz opće teorije relativnosti gdje nužno vrijedi $\mathring{\nabla}_\mu \mathring{G}^{\mu\nu} = \mathring{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$, što je posljedica Bianchijevih identiteta. U teoriji temeljenoj na torziji bilo bi ispravnije shvatiti taj rezultat kao identitet

$$\partial_\mu \Theta_a{}^\mu + (\Gamma^\mu{}_{\nu\mu} - K^\mu{}_{\nu\mu})\Theta_a{}^\nu - (A^b{}_{a\mu} - K^b{}_{a\mu})\Theta_b{}^\mu = 0, \tag{3.75}$$

†Ovaj zaključak vrijedi i u kvantnoj teoriji polja gdje za istu simetriju slijedi definicija kanonskog tenzora energije i impulsa $\Theta^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N \Big(\delta\mathscr{L}_m/\delta(\partial_\mu f_i)\Big)\partial^\nu f_i - \eta^{\mu\nu}\mathscr{L}_m$ te očuvane struje iz Noetherinog teorema [54]. Treba imati na umu da u kvantnoj teoriji polja vrijedi očuvanje struje i naboja u vremenu pa se često nazivaju pravim zakonima očuvanja, gdje obična derivacija, a ne kovarijantna, definira očuvanu struju ili naboj.

koji je po konstrukciji, odnosno korespondenciji, istovjetan $\mathring{\nabla}^{\nu}\Theta_{\nu\mu} = \mathring{\nabla}^{\nu}\mathring{G}_{\nu\mu} = 0$.

3.6 Odnos opće teorije relativnosti i TEGR-a

U opisu gibanja probnog naboja (čestice) pokazano je da je geodetska jednadžba istovjetna jednadžbi gibanja u geometrijama temeljenima na torziji, s time što u takvim teorijama matematički oblik jednadžbe predstavlja silu koja djeluje na česticu. U općoj teoriji relativnosti učinci gravitacije i učinci inercije (tromosti) vezani su zakrivljenošću prostorvremena te ove dvije pojave nije moguće odvojiti. Nasuprot tome u TEGR-u su inercijski i gravitacijski učinci opisani različitim varijablama, čime se daje bolji uvid u konceptualnu različitost trome i teške mase, kao i u mogućnosti poimanja gravitacijske energije. Geodetska jednadžba opisuje gibanje čestice u općoj teoriji relativnosti samo ako vrijedi načelo ekvivalencije trome i teške mase, dok u teorijama temeljenima na torziji ovo načelo više nije nužno te jednadžba gibanja može ostati konzistentna i u slučaju postojanja razlike među masama.[‡]. Pretpostavimo li različitost trome i teške mase, akciju (3.32) pišemo u obliku [56]

$$\mathscr{S} = -c\int_q^p u_a(m_i dx^a + m_g B^a{}_\mu dx^\mu), \tag{3.76}$$

gdje m_i označava inercijsku masu, a m_g gravitacijsku masu (radi jednostavnosti uzeto je da je Lorentzova koneksija jednaka nuli). Variranjem akcije dobivamo

$$\delta\mathscr{S} = \int_a^b m_i c\Big[\Big(\partial_\mu x^a + \frac{m_g}{m_i}B^a{}_\mu\Big)\frac{du_a}{ds} - \frac{m_g}{m_i}(\partial_\mu B^a{}_\rho - \partial_\rho B^a{}_\mu)u_a u^\rho\Big]ds\delta x^\mu, \tag{3.77}$$

uz definiciju tenzora jakosti (3.20)

$$F^a{}_{\mu\rho} = \partial_\mu B^a{}_\rho - \partial_\rho B^a{}_\mu, \tag{3.78}$$

dobivamo

$$\Big(\partial x^a + \frac{m_g}{m_i}B^a_\mu\Big)\frac{du_a}{ds} = \frac{m_g}{m_i}F^a{}_{\mu\rho}u_a u^\rho. \tag{3.79}$$

S obzirom da B^a_μ i $F^a{}_{\mu\rho}$ ne ovise o omjeru m_i/m_g vidljivo je da ova jednadžba ostaje konzistentna i u slučaju $m_i \neq m_g$. Naravno, ona postaje istovjetna geodetskoj u slučaju $m_i = m_g$. Napišemo li jednadžbu (3.79) korištenjem koneksije Levi-Civite, dobivamo

$$\frac{du_\mu}{ds} - \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\rho}u_\lambda u^\rho = \Big(\frac{m_g - m_i}{m_g}\Big)\partial_\mu x^a\frac{du_a}{ds}, \tag{3.80}$$

[‡]Na razini klasične fizike, te također potvrdom brojnih eksperimenata ovo načelo ostaje očuvano, unatoč tome što na kvantnoj razini postoji mogućnost narušenja načela ekvivalencije [55].

gdje desna strana predstavlja odstupanje od geodetske jednadžbe u slučaju napuštanja načela ekvivalencije. Uzmemo li sada tetradu oblika

$$\bar{h}^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \frac{m_g}{m_i} B^a{}_\mu, \tag{3.81}$$

pripadna će jednadžba uistinu biti geodetska,

$$\frac{d\bar{u}_\mu}{ds} - \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\rho} \bar{u}_\lambda \bar{u}^\rho = 0. \tag{3.82}$$

Međutim, u tom slučaju probne čestice s različitim omjerima m_i/m_g zahtijevale bi koneksije s različitim tenzorima zakrivljenosti kako bi jednadžbe uvijek bile geodetske. U tom smislu govorimo o nekonzistentnosti opće teorije relativnosti u slučaju napuštanja principa ekvivalencije.

3.7 Tenzor energije i impulsa gravitacije u TEGR-u

Jedno od poznatijih pitanja vezanih uz opću teoriju relativnosti je pitanje definicije gravitacijske energije. Po uzoru na ostala temeljna polja prirodno je očekivati da i gravitacija ima svoju lokalno definiranu gustoću energije. Ipak, dosadašnja istraživanja pokazuju kako takvu veličinu nije moguće definirati [57], a najviše što se može postići jest uobičajena kanonska reprezentacija dobivena iz Noetherinog teorema [58],

$$t^{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \mathring{G}^{\mu\nu} + \frac{c^4}{16\pi G(-g)} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \Big((-g)(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \Big). \tag{3.83}$$

U toj definiciji gravitacijska energija predstavljena je pseudotenzorom, što znači da ona ovisi o transformaciji koordinata. Moguće je da za posljedicu načela ekvivalencije koje zahtijeva lokalno iščezavanje gravitacijskog polja imamo nemogućnost definicije gustoće gravitacijske energije [57]. Međutim, s obzirom na to da valjanost TEGR-a ne ovisi o načelu ekvivalencije, u toj se teoriji otvara prilika za bolje razumijevanje gravitacijske energije. Već iz definicije (3.58) gdje smo imali

$$h j_a{}^\rho = -\frac{\partial (h \mathscr{L}_G)}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{c^4}{4\pi G} h h_a{}^\lambda S_\mu{}^{\nu\rho} T^\mu{}_{\nu\lambda} - h_a{}^\rho h \mathscr{L}_G, \tag{3.84}$$

po analogiji s Yang-Mills teorijama vidimo da je veličina $j_a{}^\rho$ dobar kandidat za gustoću gravitacijske energije [59]. Deriviramo li jednadžbu polja (3.59), prvi član u

$$\partial_\rho \Big(\partial_\sigma (h S_a{}^{\rho\sigma}) - \frac{8\pi G}{c^4} h j_a{}^\rho \Big) = 0 \tag{3.85}$$

iščezava zbog antisimetričnosti $S_a{}^{\rho\sigma}$, te nam ostaje

$$\partial_\rho (h j_a{}^\rho) = 0, \tag{3.86}$$

što znači da je $h j_a{}^\rho$ očuvana veličina [60]. Korištenjem identiteta

$$\partial_\rho h = h \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\nu\rho} = h(\Gamma^\nu{}_{\rho\nu} - K^\nu{}_{\rho\nu}), \tag{3.87}$$

iz (3.86) dobivamo

$$\partial_\rho j_a{}^\rho + (\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} - K^\rho{}_{\lambda\rho}) j_a{}^\lambda = 0, \tag{3.88}$$

što predstavlja kovarijantnu derivaciju s koneksijom Levi-Civite, ali u terminima torzije i s Lorentzovim indeksima [61]. Također, tenzor $j_a{}^\rho$ se transformira kovarijantno s obzirom na općenite koordinatne transformacije, te je invarijantan u odnosu na baždarne transformacije. Zbog tog svojstva kažemo da je $j_a{}^\rho$ pravi tenzor, kao i da je baždarni tenzor u smislu Noetherine očuvane struje. Ipak, $j_a{}^\rho$ se transformira kovarijantno samo s obzirom na globalne Lorentzove transformacije u tangentnom prostoru, a ne i u odnosu na lokalne [60].

Napišemo li jednadžbu gibanja (3.59) korištenjem prostornovremenskih indeksa dobivamo

$$\partial_\sigma (h S_\lambda{}^{\sigma\rho}) - \frac{8\pi G}{c^4} h t_\lambda{}^\rho = 0, \tag{3.89}$$

gdje veličina

$$h t_\lambda{}^\rho = -g_{\lambda\mu} \frac{\partial h \mathscr{L}_G}{\partial g_{\mu\rho}} S_\mu{}^{\rho\nu} \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \delta_\lambda{}^\rho h \mathscr{L}_G, \tag{3.90}$$

odgovara kanonski definiranom pseudotenzoru gravitacijskog polja, $\sqrt{-g} t^{\mu\nu} = -\partial(\sqrt{-g}\mathscr{L}_G)/\partial g_{\mu\nu}$. Odnos tenzora $j_a{}^\rho$ i veličine $t_\lambda{}^\rho$ može se izraziti s

$$t_\lambda{}^\rho = h^a{}_\lambda j_a{}^\rho + \frac{c^4}{4\pi G} \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} S_\mu{}^{\nu\rho}, \tag{3.91}$$

gdje uočavamo prisutnost člana koji uključuje koneksiju. S obzirom na to da $j_a{}^\rho$ jest tenzor, prisutnost tog člana nam govori da veličina $t_\lambda{}^\rho$ ne može biti tenzorska veličina.

Gore opisanim pristupom jasnije se vidi problematika definicije tenzora energije i impulsa za gravitacijsko polje. Zanimljivo je što je Möller i prije postavljanja TEGR-a primijetio kako je problem gravitacijske energije bolje formulirati u tetradnom formalizmu [10]. Tako je on predložio tenzor energije i impulsa za gravitacijsko polje oblika

$$h t_\lambda{}^\rho = \frac{\partial (h \mathscr{L}_G)}{\partial(\partial_\rho h^a{}_\mu)} \partial_\lambda h^a{}_\mu + \delta_\lambda^\rho h \mathscr{L}_G, \tag{3.92}$$

koji je istovjetan definiciji kanonskog tenzora energije i impulsa u Noetherinom formalizmu.

Kada bi $\mathscr{L}_G$ bio lagrangijan TEGR-a (3.57), Möllerova bi se definicija točno podudarala s izrazom (3.90). Iako $j_a{}^\rho$ uistinu jest pravi tenzor invarijantan s obzirom na lokalne translacije u tangentnom prostoru, on ipak pati od nedostatka invarijantnosti s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije.[§] U [60] taj se rezultat interpretira kao očitovanje pseudotenzorskog karaktera energije i impulsa gravitacijskog polja u teleparalelnoj formulaciji. Kad se tenzor $j_a{}^\rho$ napiše u terminima prostorvremenskih indeksa, jednadžbe gibanja postaju istovjetne Einsteinovim jednadžbama, te je time opet vraćen pseudotenzorski opis gravitacijske energije. Tim pristupom ponuđen je bolji uvid u nužnost pseudotenzorskog karaktera u općoj teoriji relativnosti. Može se naslutiti da ukoliko bi postojala mogućnosti definicije lokalno invarijantne Lorentzove baždarne struje u TEGR-u, utoliko bi bilo moguće definirati tenzor energije i impulsa gravitacijskog polja.

[§]TEGR je teorija koja je postavljena kao baždarna teorija translacijske grupe, gdje translacije čine lokalnu baždarnu transformaciju. U tom smislu $j_a{}^\rho$ je onda i baždarni tenzor.

Poglavlje 4

$f(T)$ modificirana teorija gravitacije

U ovom poglavlju uvest ćemo modificiranu teoriju tipa $f(T)$ te ćemo sažeto opisati neka njena svojstva. Također, sprovest ćemo varijacijski postupak lagranžijana teorije gravitacije tipa $f(T)$ u njenoj kovarijantnoj formulaciji. Konačno, izvest ćemo jednadžbe gibanja u konkretnom slučaju statičke sfernosimetrične geometrije za općeniti slučaj funkcije $f(T)$.

4.1 Motivacija poopćenja TEGR-a i opće teorije relativnosti

Jedan od uspješnijih pokušaja poopćenja i modifikacije opće teorije relativnosti je tzv. $f(R)$ teorija gravitacije [62]. Krenuvši od Einstein–Hilbertove akcije, takva poopćena teorija nastaje zamjenom linearnog člana R nekom općenitijom funkcijom $f(R)$,

$$\mathscr{S}_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{-g}\,d^4x \quad \longrightarrow \quad \mathscr{S} = \frac{1}{2\kappa}\int f(R)\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{4.1}$$

Samu funkciju $f(R)$ često prikazujemo kao razvoj

$$f(R) = \cdots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} + \cdots\,, \tag{4.2}$$

s ciljem fenomenološkog opisa kozmoloških, visokoenergetskih i sličnih učinaka. Ostale invarijante koje proizlaze iz kontrakcija Riemannovog tenzora, kao npr. $R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$, nisu dopuštene zbog teorema Ostrogradskog [63, 64, 65].

Kada govorimo o teorijama tipa $f(R)$ govorimo o široj obitelji teorija $f(R)$. Naime, postoje međusobno različite formulacije teorija $f(R)$ gdje spadaju npr. metrička, Palatinijeva i metričko-afina formulacija, koje u nekim okolnostima mogu dati različite jednadžbe gibanja.

Iako su modificirane teorije gravitacije tipa $f(R)$ uspješne u kozmologiji [66, 67, 68], one su se pokazale vrlo teško primjenjivima pri opisu sferno-simetričkih objekata. Jedan od problema teorije $f(R)$ je njezina matematička priroda gdje su jednadžbe gibanja često diferencijalne jednadžbe četvrtog reda, zbog čega problem početnih i rubnih uvjeta postaje analitički vrlo kompleksan [69]. Također, u Palatinijevoj formulaciji $f(R)$ gravitacije nailazimo na probleme poput nemogućnosti postojanja sfernosimetričnih rješenja u kojima je materija opisana jednostavnom jednadžbom stanja poput politropske [70, 71].

Postavljanjem TEGR-a kao istovjetne teorije općoj teoriji relativnosti, zakrivljenost i torzija postaju ravnopravni koncepti. U tom smislu jednako je valjano poopćiti Einstein–Hilbertovu akciju funkcijom oblika $f(R)$, kao i akciju TEGR-a općenitom funkcijom $f(T)$ [20],

$$\mathscr{S}_{TEGR} = \frac{1}{2\kappa}\int T h d^4x \quad \longrightarrow \quad \mathscr{S} = \frac{1}{2\kappa}\int f(T) h d^4x. \tag{4.3}$$

Takve proširene teorije gravitacije zovemo teorijama gravitacije tipa $f(T)$ i njima ćemo se opširno baviti u ovom radu na primjerima sfernosimetričnih objekata. Osim već spomenutih prednosti koje imaju teorije gravitacije temeljene na torziji, javljaju se i neke nove prednosti. Pa tako npr. u $f(T)$ teorijama, jednadžbe gibanja uvijek sadrže najviše druge derivacije komponenata metričkog tenzora. Razlog je taj što skalar torzije T ovisi samo o prvim derivacijama metrike odnosno tetrade, zbog čega je u matematičkom smislu teorija $f(T)$ sličnija općoj teoriji relativnosti i TEGR-u nego što su to $f(R)$ teorije.

4.2 Problem lokalne Lorentzove invarijantnosti u $f(T)$ teorijama gravitacije

Iako se poopćenje TEGR-a po uzoru na $f(R)$ može činiti vrlo jednostavnim, detaljnijom analizom pokazalo se da taj korak može narušiti neke temeljne simetrije. Tako je ubrzo pokazano da $f(T)$ teorija gravitacije narušava lokalnu Lorentzovu invarijantnost koja je nužan sastojak opće teorije relativnosti [30, 31]. Naime, ranije formulacije $f(T)$ teorije gravitacije temeljene su na načelu apsolutnog paralelizma (2.22),

$$\nabla_\mu h^a{}_\nu = \partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho = 0, \tag{4.4}$$

gdje je Lorentzova koneksija $A^a{}_{b\mu}$ jednaka nuli. Vođeni tim načelom možemo lako primijetiti da je lokalna Lorentzova invarijantnost lagranžijana narušena. Krenut ćemo od ranije poznate relacije (3.52),

$$\mathring{R} = -T + \frac{2}{h}\partial_\mu (hT^\mu) = -T - 2\nabla^\mu T^\nu{}_{\mu\nu}. \tag{4.5}$$

Riccijev skalar $\mathring{R}$ koji se pojavljuje u gornjoj jednadžbi je kovarijantni i lokalni Lorentzov skalar jednoznačno određen metrikom, što znači da on ne ovisi o odabiru tetrade (referentnog sustava). Međutim, divergencija $\nabla^\mu T^\nu{}_{\mu\nu}$ nije lokalno Lorentzova invarijantna veličina. To se može vidjeti iz lokalne Lorentzove transformacije

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b, \qquad h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_c h^c{}_\mu. \tag{4.6}$$

Tenzor torzije definiran pomoću Weitzenböckove koneksije ima sljedeći oblik

$$T^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu, \tag{4.7}$$

koji je istovjetan obliku (2.27) uz iščezavajuću Lorentzovu koneksiju. Upotrijebimo li sada lokalne Lorentzove transformacije, iz gornjih izraza dobivamo

$$T'^a{}_{\mu\nu} = \Lambda^a{}_b T^b{}_{\mu\nu} + \Lambda^a{}_b (h^c{}_\nu \partial_\mu \Lambda^b_c - h^c{}_\mu \partial_\nu \Lambda^b_c), \tag{4.8}$$

što nam govori da se tenzor torzije ne transformira kovarijantno te se time narušava lokalna Lorentzova invarijantnost. U relaciji (4.5) Riccijev skalar jest lokalno Lorentz invarijantan, te ako član $\nabla^\mu T^\nu{}_{\mu\nu}$ narušava lokalnu Lorentzovu invarijantnost, tada i skalar torzije T mora narušiti lokalnu Lorentzovu invarijantnost.

U TEGR-u ovaj problem nije bio uočen, ili nije imao značajnu ulogu, jer član $\nabla^\mu T^\nu{}_{\mu\nu}$ koji narušava lokalnu Lorentzovu invarijantnost iščezava pri varijaciji akcije. Time su jednadžbe gibanja opće teorije relativnosti i TEGR-a istovjetne bez obzira na činjenicu što im lagranžijani ne sadrže iste simetrije. Međutim u teorijama gravitacije poput $f(T)$ taj član vodi na narušenje lokalne Lorentzove invarijantnosti i ne može se zaobići osim u slučaju $f(T) = T$. Posljedica ovog rezultata jest teorija koja mora sadržavati 16 stupnjeva slobode. Naime, u slučaju lokalne Lorentzove simetrije teorija sadrži samo 10 stupnjeva slobode–10 od 16 komponenti tetrada–dok preostalih 6 ovise o odabiru tetrade. Također, ranije je pokazano da je simetričnost tenzora energije i impulsa rezultat lokalne Lorentzove invarijantnosti, a iz toga slijedi da jednadžbe gibanja u $f(T)$ moraju također biti simetrične s obzirom na zamjenu indeksa jednadžbi gibanja $H_{\mu\nu}$.

Uzet ćemo $f(T)$ akciju minimalno vezanu s materijom

$$\mathscr{S} = \frac{c^4}{16\pi G}\int h f(T)\, d^4x + \int h\mathscr{L}_m\, d^4x, \tag{4.9}$$

gdje je $\mathscr{L}_m$ lagranžijan materije. Variranjem gornje akcije po tetradi dobivamo [30]

$$f_T[h^{-1}\partial_\sigma(hh^\rho{}_a S_\rho{}^{\lambda\sigma}) - h^\sigma{}_a S^{\mu\nu\lambda} T_{\mu\nu\sigma}] + f_{TT} h^\rho{}_a S_\rho{}^{\lambda\sigma}\partial_\sigma T + \frac{1}{2} h^\lambda{}_a f(T) = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^\lambda{}_a, \tag{4.10}$$

gdje je $f_T \equiv \partial f(T)/\partial T$, $f_{TT} \equiv \partial^2 f(T)/\partial T^2$, a $\Theta_a{}^\lambda \equiv h^{-1}\delta\mathscr{L}_m/\delta h^a{}_\lambda$ je tenzor energije i impulsa materije. Jednadžbu (4.10) možemo napisati u prostornovremenskim indeksima na sljedeći način

$$H_{\mu\nu} \equiv f_T \mathring{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}[f(T) - f_T T] + f_{TT} S_{\nu\mu\rho} \nabla^{\rho} T = \frac{8\pi G}{c^4} \Theta_{\mu\nu}, \tag{4.11}$$

gdje je $\mathring{G}_{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor. Jednadžbe gibanja sada se mogu sažeto izraziti kao

$$H_{(\mu\nu)} = \frac{8\pi G}{c^4} \Theta_{\mu\nu} \qquad H_{[\mu\nu]} = 0, \tag{4.12}$$

što uistinu čini sustav od 16 jednadžbi. Kako bi se sustav gornjih jednadžbi riješio potrebno je najprije pronaći tetradu koja bi zadovoljila uvjet iščezavanja antisimetričnog dijela $H_{[\mu\nu]} = 0$. Takve tetrade su se u literaturi ponekad nazivale "dobrim tetradama", dok bi se one tetrade koje ne bi zadovoljile taj uvjet nazivale "lošim tetradama" [72]. Iako bi se tim pristupom dobivale smislene jednadžbe gibanja i dalje je ostao prisutan problem neinvarijantnosti lagranžijana u odnosu na lokalne Lorentzove transformacije. Osim toga, ostaje otvoreno pitanje po čemu su "dobre tetrade" posebne da naizgled zaobilaze problem lokalne Lorentzove neinvarijantnosti.

4.3 Kovarijantna $f(T)$ teorija gravitacije

U ranijim formulacijama TEGR-a jedini dinamički objekt bila je tetrada koja je zadovoljavala uvjet apsolutne paralelizabilnosti (2.22),

$$\nabla_{\mu} h^{a}{}_{\nu} = \partial_{\mu} h^{a}{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} h^{a}{}_{\rho} = 0. \tag{4.13}$$

Teorije temeljene na ovom načelu nazivamo "čisto tetradnim teleparalelnim teorijama gravitacije" (engl. *pure tetrad teleparallel theory of gravity*). One podrazumijevaju da Lorentzova koneksija iščezava, $A^{a}{}_{b\mu} = 0$, neovisno o odabiru tetrade, te se relacija

$$\nabla_{\mu} h^{a}{}_{\nu} = \partial_{\mu} h^{a}{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} h^{a}{}_{\rho} + A^{a}{}_{b\mu} h^{b}{}_{\nu} = 0, \tag{4.14}$$

svodi na (2.22). Međutim, postoje slučajevi odabira tetrade za koje Lorentzova koneksija uistinu iščezava. Takve tetrade, odnosno odgovarajuće referentne sustave, nazvat ćemo "vlastitim tetradama" odnosno "vlastitim sustavima" [34], dok za općeniti izbor referentnog sustava (tetrade) Lorentzova koneksija ne iščezava. Proširivanjem načela apsolutne paralelizabilnosti uvođenjem Lorentzove ili spinske koneksije dobivamo jednadžbu (4.14) te se time otvara mogućnost uspostavljanja lokalne Lorentzove invarijantnosti. Lorentzovu koneksiju također interpretiramo kao mjeru učinaka inercije te je Lorentzova koneksija u referentnim sustavima u kojima učinci inercije nisu prisutni jednaka nuli. Na taj način možemo razumjeti u čemu se sastoji pojam "dobre tetrade". Ona nije ništa drugo nego "vlastita tetrada" koja predstavlja izbor posebnog sustava u kojem nema učinaka inercije.

Promotrimo li sada lokalnu Lorentzovu transformaciju

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b, \tag{4.15}$$

kao što je u ranijim poglavljima prikazano, transformacije tetrade i Lorentzove koneksije su

$$h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_c h^c{}_\mu, \qquad A'^a{}_{\mu b} = \Lambda^a{}_c A^c{}_{\mu d} (\Lambda^{-1})^d{}_b - (\Lambda^{-1})^a{}_c \partial_\mu \Lambda^c{}_b. \tag{4.16}$$

U skladu s tim transformacijama, za općenito neiščezavajuću Lorentzovu koneksiju, dobivamo transformaciju tenzora torzije

$$T'^a{}_{\mu\nu} = \Lambda^a{}_b T^b{}_{\mu\nu}, \tag{4.17}$$

gdje se on transformira kovarijantno s obzirom na lokalnu Lorentzovu transformaciju. Time dobivamo invarijantnost skalara torzije T, odnosno lagranžijana $f(T)$ teorije gravitacije, s obzirom na lokalnu Lorentzovu transformaciju.

Promotrimo sada ulogu Lorentzove koneksije u lagranžijanu. S obzirom na to da se akcije opće teorije relativnosti i TEGR-a razlikuju samo za potpunu divergenciju, te da akcija opće teorije relativnosti ovisi samo o tetradi (a ne i o Lorentzovoj koneksiji), tada vrijedi [73]

$$S(h^a{}_\mu) = S(h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}). \tag{4.18}$$

Te uz jednadžbu $\mathring{R} = T + \partial_\mu (hT^\mu / \kappa)$, gornju jednakost možemo raspisati kao

$$h\mathscr{L}(h^a{}_\mu, 0) + \partial_\mu \left[\frac{1}{\kappa} hT^\mu (h^a{}_\mu, 0) \right] = h\mathscr{L}(h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}) + \partial_\mu \left[\frac{1}{\kappa} hT^\mu (h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}) \right]. \tag{4.19}$$

Vektor torzije $T_\mu = T^\rho{}_{\mu\rho}$ možemo napisati na sljedeći način

$$T_\mu (h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}) = h_a{}^\nu \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\nu \partial_\nu h^a{}_\mu - h_a{}^\nu A^a{}_{b\nu} h^b{}_\mu = T_\mu (h^a{}_\mu, 0) - A_\mu, \tag{4.20}$$

gdje je $A_\mu \equiv A^a{}_{b\nu} h_a{}^\nu h^b{}_\mu$. Uspoređivanjem izraza (4.19) i (4.20) dobivamo odnos lagranžijana

$$\mathscr{L}(h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}) = \mathscr{L}(h^a{}_\mu, 0) + \frac{1}{\kappa} \partial_\mu (hA^\mu). \tag{4.21}$$

Ovaj rezultat jasnije pokazuje zbog čega su jednadžbe gibanja TEGR-a ostale invarijantne s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije, iako lagranžijan to nije bio. Naime, član koji sadrži Lorentzovu koneksiju nalazio se u potpunoj divergenciji te je u varijaciji akcije njegov doprinos iščeznuo.

4.3.1 Jednadžbe gibanja u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ teorije gravitacije

Krećemo od akcije općenite teorije gravitacije temeljene na torzijskom skalaru

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2\kappa}\int f(T)\,h\,d^4x. \tag{4.22}$$

Dinamička varijabla po kojoj moramo varirati akciju je tetrada $h^a{}_\mu$ te računamo

$$\frac{\delta(h\mathscr{L})}{\delta h^a{}_\mu} = \frac{\partial(h\mathscr{L})}{\partial h^a{}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial(h\mathscr{L})}{\partial(\partial_\nu h^a{}_\mu)}, \tag{4.23}$$

gdje je lagranžijan

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2\kappa} f(T). \tag{4.24}$$

Prvi član u (4.23) je

$$\frac{\partial(h\mathscr{L})}{\partial h^a{}_\mu} = \frac{1}{2\kappa}\Big(f(T)hh_a{}^\mu + hf_T\frac{\partial T}{\partial h^a{}_\mu}\Big), \tag{4.25}$$

gdje je korišteno lančano pravilo deriviranja, te identitet

$$\frac{\partial h}{\partial h^a{}_\mu} = hh_a{}^\mu. \tag{4.26}$$

Dok je drugi član u (4.23)

$$\partial_\nu \frac{\partial(hf(T))}{\partial(\partial_\nu h^a{}_\mu)} = \partial_\nu\left[hf_T\frac{\partial T}{\partial(\partial_\nu h^a{}_\mu)}\right] = f_T\partial_\mu\left[h\frac{\partial T}{\partial(\partial_\nu h^a{}_\mu)}\right] + h(\partial_\nu T)f_{TT}\frac{\partial T}{\partial(\partial_\nu h^a{}_\mu)}, \tag{4.27}$$

gdje je također korišteno lančano pravilo deriviranja. Trebamo izračunati derivacije skalara torzije po tetradi i po njenim derivacijama. Raspišemo skalar torzije (3.51)

$$T = \frac{1}{4}T^\rho{}_{\mu\nu}T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^\rho{}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho}T^{\nu\mu}{}_\nu, \tag{4.28}$$

gdje vrijedi

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho T^a{}_{\mu\nu}, \tag{4.29}$$

a tenzor torzije je (2.27)

$$T^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu + A^a{}_{e\nu}h^e{}_\mu - A^a{}_{e\mu}h^e{}_\nu. \tag{4.30}$$

Deriviranjem skalara torzije po tetradi dobivamo

$$\frac{\partial T}{\partial h^a{}_\mu} = \frac{1}{4}\frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} T_c{}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} T^c{}_{\mu\nu} \frac{\partial T_c{}^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} + \frac{1}{4} T^c{}_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_c}{\partial h^a{}_\rho} + \frac{1}{2}\frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} T^{\nu\mu}{}_c - T_{\lambda\mu}{}^\lambda \frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\nu}{\partial h^a{}_\rho} - \frac{\partial T_{\lambda\mu}{}^\lambda}{\partial h^a{}_\rho} T^{\nu\mu}{}_\nu. \quad (4.31)$$

Koristivši definiciju tenzora torzije (2.27) dobivamo relevantne izraze za članove u (4.31) [11]

$$\frac{\partial T^c{}_{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} = A^c{}_{a\mu}\delta^\rho_\nu - A^c{}_{a\nu}\delta^\rho_\mu, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial T_c{}^{\mu\nu}}{\partial h^a{}_\rho} = -h_a{}^\mu T_c{}^{\rho\nu} - g^{\mu\rho} T_{ca}{}^\nu - g^{\nu\rho} T_{ca}{}^\mu - h_a{}^\nu T_c^{\mu\rho} + \eta_{cb} g^{\mu\alpha} g^{\rho\nu} A^b{}_{a\alpha} - \eta_{cb} g^{\mu\rho} g^{\beta\nu} A^b{}_{a\beta}, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial T^{\nu\mu}{}_c}{\partial h^a{}_\rho} = -h_a{}^\nu T^{\rho\mu}{}_c - h^\mu_a T^{\nu\rho}{}_c - h^\rho_c T^{\nu\mu}{}_a - g^{\mu\rho} T^\nu{}_{ac} + h^\nu_b (g^{\mu\lambda} g^{\sigma\rho} - g^{\mu\rho} g^{\sigma\lambda}) A^b{}_{a\lambda}, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial T^{\nu\mu}{}_\nu}{\partial h^a{}_\rho} = -T^{\rho\mu}{}_a - h_a{}^\mu T^{\nu\rho}{}_\nu - g^{\mu\rho} T^\nu{}_{a\nu} + h_b{}^\rho g^{\mu\nu} A^b{}_{a\nu} - h_b{}^\nu g^{\mu\rho} A^b{}_{a\nu}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial T_{\lambda\mu}{}^\lambda}{\partial h^a{}_\rho} = -T^\rho{}_{\mu a} + h_c{}^\rho A^c{}_{a\mu} - h_c{}^\lambda A^c{}_{a\lambda} \delta^\rho{}_\mu. \quad (4.36)$$

Konačno izraz (4.31) dobiva oblik

$$\frac{\partial T}{\partial h^a{}_\mu} = -4 T^b{}_{\nu a} S_b^{\nu\mu} + 4 A^b{}_{a\nu} S_b{}^{\nu\mu}. \quad (4.37)$$

Raspišemo derivacije

$$\frac{\partial T}{\partial(\partial_\nu h^a{}_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}(T_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\mu\nu}) + 2\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}(T_{\rho\mu\nu} T^{\mu\rho\nu}) - \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}(T^\nu{}_{\mu\nu} T^{\lambda\mu}{}_\lambda), \quad (4.38)$$

pa je potrebno izračunati sljedeće članove

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}(T_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\mu\nu}) = 4 T_a{}^{\sigma\rho}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}(T_{\rho\mu\nu}T^{\mu\rho\nu}) = 2(T^{\rho\sigma}{}_a - T^{\sigma\rho}{}_a), \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}(T^\nu{}_{\mu\nu}T^{\lambda\mu}{}_\lambda) = 2T^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho - 2T^{\nu\rho}{}_\nu h_a^\sigma. \tag{4.41}$$

Skupimo i sredimo sve članove i dobivamo

$$\frac{\partial T}{\partial(\partial_\nu h^a{}_\mu)} = -4S_a{}^{\mu\nu}, \tag{4.42}$$

gdje je superpotencijal definiran u (3.55) odnosno

$$S_a{}^{\sigma\rho} = -\frac{1}{2}(T_a^{\sigma\rho} + T^{\rho\sigma}{}_a - T^{\sigma\rho}{}_a - 2T^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho + 2T^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma), \tag{4.43}$$

a kojeg još možemo napisati kao

$$S_a{}^{\sigma\rho} = K^{\sigma\rho}{}_a + T^{\nu\sigma}{}_\nu h_a{}^\rho - T^{\nu\rho}{}_\nu h_a{}^\sigma, \tag{4.44}$$

gdje je $K^{\sigma\rho}$ tenzor kontorzije iz (2.29).

Konačno iz rezultata varijacije akcije (4.22) dobivamo jednadžbe gibanja u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ gravitacije [34]

$$\frac{1}{h}f_T\partial_\nu(hS_a{}^{\mu\nu}) + f_{TT}S_a{}^{\mu\nu}\partial_\nu T - f_T T^b{}_{\nu a}S_b{}^{\nu\mu} + f_T A^b{}_{a\nu}S_b{}^{\nu\mu} + \frac{1}{4}f(T)h_a{}^\mu = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_a{}^\mu, \tag{4.45}$$

gdje je $\Theta_a{}^\mu$ tenzor energije i impulsa materije definiran u (3.63).

Zanimljivo je primijetiti da se nekovarijantna jednadžba gibanja (4.10) svodi na kovarijantnu (4.45) uz zamjenu obične derivacije kovarijantnom derivacijom Fock-Ivanenka

$$\partial_\mu h_a{}^\nu \quad \longrightarrow \quad \mathscr{D}_\mu h_a{}^\nu = \partial_\mu h_a{}^\nu - A^b{}_{\mu a}h_b{}^\nu, \tag{4.46}$$

dok se u kovarijantnom obliku one uopće ne razlikuju, već je razlika među njima sadržana u članovima koji eksplicitno sadrže Lorentzovu koneksiju, npr. tenzor torzije, skalar torzije, superpotencijal itd.

4.3.2 Uloga Lorentzove (spinske) koneksije u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ teorije gravitacije

Jednadžbe gibanja (4.45) možemo napisati u tzv. kovarijantnom obliku na sljedeći način

$$H_{\mu\nu} = f_T\mathring{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[f(T) - f_T T] + f_{TT}S_{\nu\mu}{}^\rho\partial_\rho T = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_{\mu\nu}. \tag{4.47}$$

Lijeva strana gornje jednadžbe, za razliku od odgovarajuće jednadžbe u TEGR-u, ovdje sadrži antisimetrični dio

$$H_{[\mu\nu]} = f_{TT} S_{[\nu\mu]}{}^{\alpha} \partial_{\alpha} T \tag{4.48}$$

koji nije nužno jednak nuli zbog činjenice što tenzor $S_{\nu\mu}{}^{\alpha}$ nije simetričan u prva dva indeksa. Takav se antisimetričan doprinos lijevoj strani jednadžbi gibanja u TEGR-u ne pojavljuje jer u TEGR-u vrijedi $f_{TT} = 0$. U odjeljku 4.2 skupom jednadžbi (4.12) pokazano je kako je potrebno pronaći tzv. "dobre tetrade" koje zadovoljavaju uvjet $H_{[\mu\nu]} = 0$. Uzrok postojanja antisimetričnog dijela jednadžbe gibanja povezujemo s neinvarijantnosti tenzora torzije, pa time i lagranžijana, s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije tetrade vidljivoj u jednadžbi (4.8) [30]. Međutim, u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ gravitacije antisimetrični doprinos lijevoj strani jednadžbe (4.48) iščezava za pravilan odabir Lorentzove koneksije uz odgovarajuću tetradu. U posebno slučaju u kojem u okviru $f(T)$ gravitacije koristimo vlastite tetrade Lorentzova koneksija, po definiciji, jednaka je nuli. Time je vidljivo da teorija sadrži dodatno polje—Lorentzovu koneksiju $A^{a}{}_{b\mu}$—kao dodatne stupnjeve slobode. U skladu s tim bilo bi pravilno varirati $f(T)$ akciju po Lorentzovoj koneksiji i istražiti te dodatne stupnjeve slobode. Najprije je važno naglasiti kako inercijska Lorentzova (spinska) koneksija nije potpuno nezavisna varijabla, nego je dana matricom Lorentzovih transformacija $\Lambda^{c}{}_{b}$. Iz tog zahtjeva varijacija lagranžijana podrazumijeva kako se radi o obitelji inercijskih Lorentzovih koneksija. U suprotnom, kada bi ona bila potpuno slobodna varijabla, pokazano je u [36] da se dobiva trivijalan rezultat $T^{\mu}{}_{\alpha\nu} = 0$. Istovremeno inercijske Lorentzove koneksije moraju zadovoljavati uvjet iščezavajuće zakrivljenosti $R^{a}{}_{b\mu\nu} = 0$, kako bi ona predstavljala isključivo učinke torzije. Tražimo varijaciju akcije po inercijskoj Lorentzovoj koneksiji $A^{ab}{}_{\nu}$ koja je dana

$$A^{a}{}_{\nu b} = -(\Lambda^{-1})^{a}{}_{c} \partial_{\mu} \Lambda^{c}{}_{b}, \tag{4.49}$$

gdje je $\Lambda^{c}{}_{b}$ proizvoljna Lorentzova matrica. Za infinitezimalnu Lorentzovu transformaciju vrijedi

$$\Lambda^{a}{}_{b} = \delta^{a}{}_{b} + \varepsilon^{a}{}_{b}, \tag{4.50}$$

gdje je $\varepsilon^{a}{}_{b}$ infinitezimalna matrica koja zadovoljava algebru Lorentzove grupe sa svojstvom

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}. \tag{4.51}$$

S obzirom na to da inercijska Lorentzova koneksija ovisi samo o matrici lokalnih Lorentzovih transformacija $\Lambda^{a}{}_{b}$ tada je dovoljno varirati samo po ε_{ab} te dobivamo

$$\delta A^{ab}{}_{\mu} = \delta_{\varepsilon} A^{ab}{}_{\mu} = \mathscr{D}_{\mu} \varepsilon^{ab} = \partial \varepsilon^{ab} + A^{a}{}_{c\mu} \varepsilon^{cb} + A^{b}{}_{c\mu} \varepsilon^{ac}. \tag{4.52}$$

Također, kao što je ranije izvedeno vrijedi [73]

$$\mathscr{L}(h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}) = \mathscr{L}(h^a{}_\mu, 0) + \frac{c^4}{8\pi G h}\partial_\mu(hA^\mu), \tag{4.53}$$

odnosno

$$T(h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}) = T(h^a{}_\mu, 0) + \frac{2}{h}\partial_\mu\left(hA^a{}_{b\nu}h_a{}^\nu h_c{}^\mu \eta^{bc}\right). \tag{4.54}$$

Varirajući lagranžijan modificirane $f(T)$ gravitacije po inercijskoj Lorentzovoj koneksiji dobivamo izraz [74]

$$\delta_A \mathscr{L} = \frac{1}{2\kappa} hh_a{}^\mu h_b{}^\nu (\partial_\nu f_T)\delta A^{ab}{}_\mu. \tag{4.55}$$

Koristeći (4.52) i integrirajući po dijelovima te zahtjevom iščezavajuće varijacije akcije dobivamo

$$f_{TT}\partial_\nu T \mathscr{D}_\mu (hh_{[a}{}^\mu h_{b]}{}^\nu) = 0. \tag{4.56}$$

Iz identiteta [75]

$$hS_{[ab]}{}^\mu = \mathscr{D}_\nu (hh_{[a}{}^\mu h_{b]}{}^\nu), \tag{4.57}$$

vidimo da (4.56) postaje upravo uvjet iščezavanja antisimetričnog dijela jednadžbe gibanja

$$f_{TT} S_{[ab]}{}^\mu \partial_\mu T = 0. \tag{4.58}$$

Dakle, stupnjevi slobode koji naizgled proizlaze iz Lorentzove koneksije su posljedica iščezavanja antisimetričnog dijela jednadžbe gibanja u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ gravitacije. Time je osigurana invarijantnost jednadžbi gibanja u odnosu na lokalne Lorentzove transformacije.

4.3.3 Alternativni pristup - Lagrangeovi multiplikatori

Alternativni način konstruiranja teorije temeljene na torziji, uz očuvanje lokalne Lorentzove simetrije, moguć je uz pomoć Lagrangeovih multiplikatora. Razlika je u tome što uvjet koji se nameće Lorentzovoj koneksiji nije više

$$A^a{}_{\nu b} = -(\Lambda^{-1})^a{}_c \partial_\mu \Lambda^c{}_b, \tag{4.59}$$

što predstavlja inercijsku Lorentzovu koneksiju, nego zahtijevamo iščezavanje tenzora zakrivljenosti

$$R^a{}_{b\mu\nu}(A) = 0. \tag{4.60}$$

Gornji uvjet je lokalno istovjetan uvjetu (4.59).

Akcija u tom pristupu glasi [36]

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2\kappa}\int \left(f(T) + \lambda_a{}^{b\mu\nu}R^a{}_{b\mu\nu}\right) h\, d^4x, \tag{4.61}$$

gdje je $\lambda_a{}^{b\mu\nu}$ Lagrangeov multiplikator koji zadovoljava uvjete

$$\lambda^{ab\mu\nu} = -\lambda^{ab\nu\mu} \qquad \lambda^{ab\mu\nu} = -\lambda^{ba\mu\nu}. \tag{4.62}$$

Na taj način akcija sadrži tri dinamičke varijable: tetradu $h^a{}_\mu$, Lorentzovu koneksiju $A^a{}_{b\mu}$ te Lagrangeov multiplikator $\lambda_a{}^{b\mu\nu}$. Po konstrukciji variranjem akcije (4.61) po $\lambda_a{}^{b\mu\nu}$ daje željeni uvjet

$$R^a{}_{b\mu\nu}(A) = 0. \tag{4.63}$$

Nadalje, varijacija po tetradi $h_a{}^\mu$ se može jednostavno izračunati iz prijašnjih rezultata ako se akcija napiše na sljedeći način

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2\kappa}\int hf(T)d^4x + \frac{1}{2\kappa}\int h\lambda_a^{b\mu\nu}R^a{}_{b\mu\nu}d^4x + \mathscr{S}_m = \mathscr{S}_{f(T)} + \mathscr{S}_{Lagrange} + \mathscr{S}_m, \tag{4.64}$$

iz kojeg je vidljivo da prvi i treći član čini jednadžba gibanja (4.45) kojoj treba pribrojiti varijaciju drugog člana

$$\frac{1}{h}\frac{\delta(h\lambda_a^{b\mu\nu}R^a{}_{b\mu\nu})}{\delta h^a{}_\mu} = h_a{}^\mu \lambda_a{}^{b\mu\nu}R^a{}_{b\mu\nu}. \tag{4.65}$$

Konačno dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{h}f_T\partial_\nu(hS_a{}^{\mu\nu}) + f_{TT}S_a{}^{\mu\nu}\partial_\nu T - f_T T^b{}_{\nu a}S_b{}^{\nu\mu} + f_T A^b{}_{a\nu}S_b{}^{\nu\mu} + \frac{1}{4}f(T)h_a{}^\mu + h_a{}^\mu\lambda_a{}^{b\mu\nu}R^a{}_{b\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_a{}^\mu. \tag{4.66}$$

Potrebno je još varirati akciju (4.61) po Lorentzovoj koneksiji $A^a{}_{b\mu}$. Koristiti će nam izraz (2.25)

$$R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu A^a{}_{b\mu} - \partial_\mu A^a{}_{b\nu} + A^a{}_{e\nu}A^e{}_{b\mu} - A^a{}_{e\mu}A^e{}_{b\nu}. \tag{4.67}$$

Rezultat varijacije akcije po Lorentzovoj koneksiji je [36]

$$\partial_\mu(h\lambda_a{}^{b\mu\nu}) + A^a{}_{\mu b}(h\lambda_a{}^{b\mu\nu}) = \mathscr{D}_\mu(h\lambda_a{}^{b\mu\nu}) = 0, \tag{4.68}$$

što predstavlja jednadžbu za izračun Lagrangeovih multiplikatora, te je važno naglasiti kako ona ne ovisi o $f(T)$ teoriji gravitacije temeljenoj na torziji. Lagrangeov multiplikator je prisutan samo u posljednjem članu jednadžbe gibanja $\lambda_a{}^{b\mu\nu}R^a{}_{b\mu\nu}$, te iz uvjeta iščezavajućeg tenzora zakrivljenosti zaključujemo kako jednadžba gibanja ne ovisi o Lagrangeovom multiplikatoru.

S obzirom da Lagrangeovi multiplikatori ne ulaze u jednadžbu gibanja, jednadžbu (4.68) nije potrebno rješavati te može poslužiti samo kao provjera konzistentnosti promatranog sustava.

4.3.4 Bianchijevi identiteti u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ teorije gravitacije

U općoj teoriji relativnosti središnju ulogu imaju tenzori zakrivljenosti. U tom je smislu važno istražiti simetrije koje sadrže tenzori u toj teoriji. Identitete (2.30) i (2.31) zovemo Bianchijevim identitetima. Oni vrijede općenito za prostornovremenske geometrije u kojima su prisutne i torzija i zakrivljenost. Poseban slučaj kad torzija iščezava dovodi do identiteta (2.32) i (2.33), čija je posljedica iščezavanje kovarijantne derivacije Einsteinovog tenzora

$$\mathring{\nabla}_\mu \mathring{G}^{\mu\nu} = 0, \tag{4.69}$$

kojeg često nazivamo kontrahiranim Bianchijevim identitetom. Ti identiteti su posljedica simetrija tenzora u diferencijalnoj geometriji, a u teoriji gravitacije govore o broju nezavisnih komponenti samih tenzora. Osim toga, rezultat (4.69) govori i o očuvanju tenzora energije i impulsa u kovarijantnom smislu

$$\mathring{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{4.70}$$

Taj rezultat nužno vrijedi i u TEGR-u s obzirom na to da su jednadžbe gibanja istovjetne. Međutim, postavlja se pitanje kakav je status kovarijantnog očuvanja tenzora energije i impulsa u modificiranim teorijama gravitacije tipa $f(T)$. Akciju modificirane teorije gravitacije tipa $f(T)$ možemo napisati u obliku

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2\kappa}\int (T + F(T))\, h\, d^4x + \int \mathscr{L}_{mat}\, h\, d^4x, \tag{4.71}$$

gdje vrijedi $f(T) = T + F(T)$, a $\mathscr{L}_{mat}$ predstavlja lagranžijan materije. Variranjem tako napisane akcije po tetradi dobivamo

$$\mathring{G}^{\mu\nu} + \tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu\nu}, \tag{4.72}$$

gdje je $\mathring{G}^{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor koji je rezultat varijacije prvog člana u akciji koji sadrži samo skalar torzije T, a $\tilde{G}^{\mu\nu}$ predstavlja dodatne članove koji proizlaze iz varijacije drugog člana, $F(T)$, te $\Theta^{\mu\nu}$ je tenzor energije i impulsa. Djelujući kovarijantnom derivacijom* nad jednadžbom gibanja (4.72) dobivamo

$$\mathring{\nabla}_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathring{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu}, \tag{4.73}$$

*Kovarijantna derivacija sadrži koneksiju Levi-Civite koja je u kontekstu teorija temeljenima na torziji istovjetna zapisu (3.75).

gdje derivacija prvog člana iz (4.72) iščezava zbog Bianchijevih identiteta. Uvjet (4.73) ne jamči očuvanje kovarijantne derivacije tenzora energije i impulsa jer općenito ne mora vrijediti

$$\mathring{\nabla}_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0, \qquad \mathring{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{4.74}$$

Rezultat (4.73) je u nekovarijantnim formulacijama $f(T)$ gravitacije predstavljao dodatan uvjet nad jednadžbama gibanja kako bi se jednadžbe mogle dosljedno riješiti. Pokazat će se da zapravo vrijede relacije (4.74) samo u slučaju kada je $f(T)$ modificirana teorija gravitacije kovarijantno formulirana. Krećemo od jednadžbe gibanja zapisane u kovarijantnom obliku (4.11)

$$f_T \mathring{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}[f(T) - f_T T] + f_{TT} S^{\nu\mu\rho} \partial_\rho T = \frac{8\pi G}{c^4} \Theta^{\mu\nu}. \tag{4.75}$$

Djelujući kovarijantnom derivacijom $\mathring{\nabla}_\nu$ na gornju jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} f_{TT} \mathring{G}^{\mu\nu} \partial_\nu T - \frac{1}{2} f_{TT} g^{\mu\nu} T \partial_\nu T + f_{TT} \mathring{\nabla}_\nu S^{\nu\mu\rho} \partial_\rho T + f_{TT} S^{\nu\mu\rho} \mathring{\nabla}_\nu \partial_\rho T + \\ f_{TTT} (\partial_\nu T) S^{\nu\mu\rho} \partial_\rho T = \frac{8\pi G}{c^4} \mathring{\nabla}_\nu \Theta^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.76}$$

gdje se koristilo pravilo lančanog deriviranja te identiteti

$$\mathring{\nabla}_\nu \mathring{G}^{\mu\nu} = 0, \qquad \mathring{\nabla}_\nu g^{\mu\nu} = 0. \tag{4.77}$$

Četvrti član

$$f_{TT} S^{\nu\mu\rho} \mathring{\nabla}_\nu \partial_\rho T = -S^{\mu\nu\alpha} (T_{\beta\nu\alpha} - 2K_{\beta\nu\alpha}) \partial^\beta T, \tag{4.78}$$

uz (2.29) postaje

$$-S^{\mu\nu\alpha} (T_{\beta\nu\alpha} - 2K_{\beta\nu\alpha}) \partial^\beta T = S^{\mu\nu\alpha} (T_{\nu\beta\alpha} + T_{\beta\alpha\nu}) \partial^\beta T = 0, \tag{4.79}$$

koji iščezava zbog antisimetričnosti tenzora torzije. S druge strane, Einsteinov tenzor $\mathring{G}^{\mu\nu}$ uz identitet $\mathring{\Gamma}^\beta{}_{\mu\nu} = \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} - K^\beta{}_{\mu\nu}$ možemo raspisati na sljedeći način

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = K_\alpha{}^\mu{}_\rho S^{\alpha\rho\nu} - \mathring{\nabla}_\alpha S^{\mu\alpha\nu} + \frac{1}{2} T g^{\mu\nu}. \tag{4.80}$$

Ubacimo li izraz (4.80) u (4.76) dobivamo

$$-f_{TT} K_\alpha{}^\mu{}_\rho S^{\alpha\rho\nu} \partial_\nu T + f_{TTT} (\partial_\nu T) S^{\nu\mu\rho} \partial_\rho T = \frac{8\pi G}{c^4} \mathring{\nabla}_\nu \Theta^{\mu\nu}, \tag{4.81}$$

drugi član iščezava zbog kontrakcije antisimetričnog tenzora $S^{\nu\mu\rho}$ s gradijentima skalara torzije, te ostaje

$$-f_{TT}K_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\rho}S^{\alpha\rho\nu}\partial_{\nu}T = \frac{8\pi G}{c^4}\mathring{\nabla}_{\nu}\Theta^{\mu\nu}. \tag{4.82}$$

Taj izraz je nula ako je $f_{TT} = 0$, odnosno u dobro poznatom slučaju TEGR-a, $f(T) = T$, no također u slučaju kad antisimetrični dio jednadžbe iščezava s obzirom na to da su i $S^{\mu\nu\rho}$ i $K^{\mu\nu\rho}$ antisimetrični tenzori. Drugim riječima, cijela lijeva strana jednadžbe iščezava ako je zadovoljena lokalna Lorentzova invarijantnost što i jest slučaj u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ gravitacije. U suprotnom dobivamo uvjet $f_{TT} = 0$ što je posljedica nekovarijantne formulacije. Konačno, posljedice kovarijantnosti $f(T)$ teorije gravitacije dovode do uvjeta

$$\mathring{\nabla}_{\mu}\tilde{G}^{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathring{\nabla}_{\mu}\Theta^{\mu\nu} = 0, \tag{4.83}$$

dok u nekovarijantnim formulacijama ostaje uvjet

$$\mathring{\nabla}_{\mu}\tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathring{\nabla}_{\mu}\Theta^{\mu\nu}, \tag{4.84}$$

koji mora biti zadovoljen, no ne i nužno očuvanje tenzora energije i impulsa materije.

4.4 Statička sfernosimetrična tetrada i jednadžbe gibanja u sfernosimetričnim konfiguracijama

U odjeljku koje slijedi izvest ćemo tetradu koja opisuje slučaj statične sfernosimetrične geometrije. U modificiranim teorijama gravitacije tipa $f(T)$ tetrada je dinamički entitet, te krećemo od sfernosimetričnog anzatza koji odgovara statičkoj sfernosimetričnoj metrici. Koristeći sferne koordinate $x^{\mu} = (t, r, \vartheta, \varphi)$ metrika glasi

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(e^{2\Phi(r)}, -e^{2\Lambda(r)}, -r^2, -r^2\sin^2\vartheta). \tag{4.85}$$

Najjednostavnija tetrada koja odgovara metrici (4.85) je dijagonalnog oblika

$$h^{a}{}_{\mu} = \mathrm{diag}(e^{\Phi(r)}, e^{\Lambda(r)}, r, r\sin\vartheta). \tag{4.86}$$

Kako bi jednadžbe gibanja ostale invarijantne s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije odgovarajuća Lorentzova (spinska) koneksija za gornju odabranu tetradu je [34]

$$A^{\hat{r}}{}_{\hat{\vartheta}\vartheta} = -A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{r}\vartheta} = -1, \qquad A^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}\varphi} = -\sin\vartheta, \qquad A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\vartheta}\varphi} = -\cos\vartheta, \tag{4.87}$$

gdje kapica označava ortonormirane indekse. "Dobra", odnosno vlastita tetrada koja također odgovara metrici (4.85) je dobro poznata u literaturi [72] te ima sljedeći oblik

$$\tilde{h}^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e^{\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\Lambda(r)}\cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & -e^{\Lambda(r)}\cos\vartheta & r\sin\vartheta & 0 \\ 0 & e^{\Lambda(r)}\sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta. \end{pmatrix} \tag{4.88}$$

Za vlastite tetrade vrijedi da je Lorentzova koneksija jednaka nuli

$$\tilde{A}^a{}_{b\mu} = 0. \tag{4.89}$$

Može se pokazati da su tetrade (4.86) i (4.88) vezane lokalnom Lorentzovom transformacijom

$$\tilde{h}^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b h^b{}_\mu, \tag{4.90}$$

gdje je matrica lokalnih Lorentzovih transformacija eksplicitno dana

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi \\ 0 & -\cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi. \end{pmatrix} \tag{4.91}$$

Lako je pokazati da je inercijska Lorentzova koneksija jednaka nuli za gornji odabir tetrade iz sljedeće transformacije (3.17)

$$\tilde{A}^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c A^c{}_{d\mu}\Lambda_b{}^d + \Lambda^a{}_c \partial_\mu \Lambda_b{}^c = 0. \tag{4.92}$$

Jednadžba gibanja u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ gravitacije je dana izrazom (4.45)

$$\frac{1}{h} f_T \partial_\nu (h S_a{}^{\mu\nu}) + f_{TT} S_a{}^{\mu\nu}\partial_\nu T - f_T T^b{}_{\nu a} S_b{}^{\nu\mu} + f_T A^b{}_{a\nu} S_b{}^{\nu\mu} + \frac{1}{4} f(T) h_a{}^\mu = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_a{}^\mu, \tag{4.93}$$

kontrahirajući gornji izraz tetradom $h^a{}_\nu$ možemo zapisati jednadžbu s prostornovremenskim indeksima (4.47)

$$H_\nu{}^\mu = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_\nu{}^\mu. \tag{4.94}$$

Također, uvodimo pokrate $A(r) = e^{\Phi(r)}$ i $B(r) = e^{\Lambda(r)}$, tada jednadžbe gibanja glase

$$\begin{aligned} H_t{}^t = \frac{1}{2}f(T) + \frac{2f_T}{AB^3r^2}\Big((B-1)BrA' + A\left(rB' + (B-1)B\right)\Big) - \\ \frac{f_{TT}}{A^2B^5r^4}8(B-1)\Bigg(A(B-1)\Big(B\left(r^2A'' + A(B-1)\right) - \\ ArB'\Big) + ArA'\left((1-B)B - (B-2)rB'\right) + (1-B)Br^2\left(A'\right)^2\Bigg) = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_t{}^t, \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$H_r{}^r = \frac{1}{2}f(T) + \frac{2f_T}{AB^2r^2}\left((B-2)rA' + AB - A\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_r{}^r, \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned} H_\vartheta{}^\vartheta = H_\varphi{}^\varphi = \frac{1}{2}f(T) - \frac{f_T}{AB^3r^2}\left(B\left(r^2A'' + A(B-1)^2\right) - rA'\left(rB' + B(2B-3)\right) - ArB'\right) \\ - \frac{4f_{TT}}{A^3B^5r^4}\left(A(B-1) - rA'\right)\Big(A(B-1)\left(B\left(r^2A'' + A(B-1)\right) - ArB'\right) + \\ ArA'\left((1-B)B - (B-2)rB'\right) + (1-B)Br^2\left(A'\right)^2\Big) = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_\vartheta{}^\vartheta. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Odgovarajući skalar torzije je dan sljedećim izrazom

$$T = -\frac{2(B-1)(A-AB+2rA')}{r^2AB^2}. \tag{4.98}$$

Jednadžbe (4.95) – (4.97) predstavljaju sustav jednadžbi za rješavanje statičkih sfernosimetričnih problema u $f(T)$ gravitaciji.

Poglavlje 5

Vakuumska sfernosimetrična rješenja u kovarijantnoj $f(T)$ teoriji gravitacije

U ovom poglavlju proučit ćemo vakuumska rješenja u teoriji gravitacije tipa $f(T)$. Najprije ćemo se usredotočiti na vakuumska rješenja koja možemo analitički riješiti, te će se za taj skup teorija pojaviti uvjeti za koje rješenje $T = 0$ jest analitičko vakuumsko rješenje. Nakon toga proučit ćemo teoriju tipa $f(T)$ za konkretni oblik funkcije $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Tu ćemo potražiti vakuumska rješenja perturbativnim putem, te nakon toga, i numeričkim metodama s obzirom na to da u ovom slučaju analitičko rješenje nije moguće pronaći.

5.1 Vakuumska rješenja u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ gravitacije

Najprije proučavamo vakuumska rješenja u teorijama gravitacije tipa $f(T)$. Takva rješenja predstavljaju osnovu u astrofizičkim razmatranjima i često služe kao test valjanosti teorije. Tu se prije svega misli na kinematiku objekata koji kruže oko zvijezda ili galaksija, a čija je dinamika određena vakuumskim rješenjem. Također, tu je i pitanje egzistencije i svojstava crnih rupa u tim teorijama.

Za sustav jednadžbi u vakuumu vrijedi

$$\Theta_\nu{}^\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H_\nu{}^\mu = 0. \tag{5.1}$$

Primijetimo da jednadžbe gibanja (4.95) – (4.97) imaju oblik

$$H_t{}^t = A_1 f(T) + B_1 f_T + C_1 f_{TT}, \tag{5.2}$$

$$H_r{}^r = A_2 f(T) + B_2 f_T, \tag{5.3}$$

$$H_\vartheta{}^\vartheta = A_3 f(T) + B_3 f_T + C_3 f_{TT}, \tag{5.4}$$

gdje su $A_i(A,A',A'',B,B',B'')$, $B_i(A,A',A'',B,B',B'')$ i $C_i(A,A',A'',B,B',B'')$ funkcije tetradnih funkcija $A(r)$ i $B(r)$ te njihovih derivacija. Jednostavnim je algebarskim manipulacijama iz jednadžbi (5.2) i (5.4) moguće eliminirati drugu derivaciju f_{TT} te dobivamo

$$\frac{H_t{}^t}{C_1} - \frac{H_\vartheta{}^\vartheta}{C_3} = \Big(\frac{A_1}{C_1} - \frac{A_3}{C_3}\Big) f(T) + \Big(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_3}{C_3}\Big) f_T = 0. \tag{5.5}$$

Sređivanjem gornjih izraza dobivamo

$$\left(r^2AB^2\left(rA' + A(B-1)\right)\right) f(T) + 4\left(r^2(B-1)A'^2 + rA\Big(A'(rB' + B^2 - 2B + 1) - r(B-1)A''\Big) - A^2B(B-1)^2\right) f_T = 0. \tag{5.6}$$

Uz prethodnu jednadžbu ostaje nam i jednadžba $H_r{}^r = 0$,

$$f(T) + \frac{4f_T}{AB^2r^2}\big((B-2)rA' + AB - A\big) = 0, \tag{5.7}$$

čime dobivamo jednostavniji sustav koji treba riješiti za općenitu funkciju $f(T)$. Jednadžba (5.7) kao i skalar torzije ne ovise o derivacijama $B(r)$. Iz toga zaključujemo kako za zadanu funkciju $f(T)$ jednadžba (5.7) je algebarskog tipa po $B(r)$ i može se algebarski riješiti, derivirati,

$$B(r) = f_1(A,A'), \qquad B'(r) = f_2(A,A',A''), \tag{5.8}$$

te uvrstiti u (5.6), čime dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda po $A(r)$. Ovaj pristup ovisi o izboru konkretne funkcije $f(T)$ te je često vrlo teško doći do analitičkog rješenja za $A(r)$. Nasuprot tome, možemo primijetiti da se iz jednadžbi (5.6) i (5.7) može eliminirati npr. $f(T)$ čime dobivamo uvjet [40]

$$4f_T\left(-A^2(B+1)(B-1)^2 + r^2\left(A'\right)^2 + Ar^2\left(A'B' - (B-1)A''\right)\right) = 0, \tag{5.9}$$

koji je neovisan o izboru funkcije $f(T)$. Uočavamo da metrika Minkowskog jest rješenje ove jednadžbe, te uz $B = 1$ slijedi nužan uvjet $A = \textit{konstanta}$. Jednadžba (5.9) se mora shvatiti kao nužan ali ne i dovoljan uvjet koji mora zadovoljiti svako vakuumsko rješenje, što znači da taj uvjet nije dovoljan za nalaženje vakuumskog rješenja. Nije nužno da funkcije $A(r)$ i $B(r)$ koje zadovoljavaju (5.9) istovremeno zadovoljavaju i jednadžbe gibanja (5.2) – (5.4). Zanimljivo je što jednadžba (5.9) jest zadovoljena u slučaju Schwarzchildovog rješenja, naime uvrštavanjem izraza

$$B(r) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}, \qquad A(r) = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}, \tag{5.10}$$

pokazuje se da je uvjet (5.9) zadovoljen. Ipak, uvršavanjem Schwarzchildovog rješenja u jednadžbama gibanja postaje jasno da one nisu rješenja sustava osim u slučaju $f(T) = T$, što odgovara slučaju opće teorije relativnosti.

5.1.1 Vakuumska rješenja iz uvjeta $T = 0$

Kako bi uvjet vakuuma u slučaju statičke sferne simetrije bio zadovoljen dovoljno je zadovoljiti uvjet $H_t{}^t = H_r{}^r = H_\vartheta{}^\vartheta = 0$. Za općeniti izbor funkcije $f(T)$ nije moguće jednostavno pronaći rješenje s obzirom na to da su jednadžbe gibanja vrlo složene. Kao što je napomenuto u prethodnom odjeljku potrebno je riješiti nelinearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda po $A(r)$ čije rješenje se može dalje koristiti u algebarskom izračunu $B(r)$. Međutim, pokazat će se kako je moguće za određene tipove funkcija $f(T)$ doći do jednostavnih, analitičkih rješenja.

Pretpostavimo li da vrijedi uvjet

$$T(A_{vac}, B_{vac}) = 0, \tag{5.11}$$

za neke $A_{vac}(r)$ i $B_{vac}(r)$ tada je nužno da su za obitelji funkcija $f(T)$ koje zadovoljavaju uvjete

$$f(T=0) = 0, \qquad f_T(T=0) = 0, \qquad f_{TT}(T=0) = 0, \tag{5.12}$$

A_{vac} i B_{vac} vakuumska rješenja. U ispravnost ove tvrdnje možemo se jednostavno uvjeriti gledajući jednadžbe gibanja (5.2) – (5.4), gdje ako vrijede uvjeti (5.12), onda iščezavaju sve komponente $H_\mu{}^\nu$ u u slučaju statičke sferne simetrije. Promotrimo li skalar torzije (4.98)

$$T = -\frac{2(B-1)(A-AB+2rA')}{r^2AB^2}, \tag{5.13}$$

uočavamo kako on iščezava u slučaju $B = 1$, što je trivijalan slučaj koji uz $A = konst.$ daje rješenje Minkowskog. Zanimljivije je proučiti slučaj kad druga zagrada u skalaru torzije iščezava, što daje uvjet

$$A - AB + 2rA' = 0. \tag{5.14}$$

Diferencijalna jednadžba (5.14) je jednostavna homogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, čije je rješenje

$$A_{vac}(r) = A_{vac}(r_0)\exp\int_{r_0}^{r}\frac{B_{vac}(r')-1}{2r'}dr', \tag{5.15}$$

gdje je $A_{vac}(r_0)$ konstanta integracije, odnosno rubni uvjet na komponentu metričkog tenzora pri $r = r_0$. Vidljivo je da za proizvoljnu funkciju B_{vac}, pod uvjetom da postoji integral (5.15), postoji funkcija A_{vac} koja predstavlja vakuumsko rješenje. To znači da teorija koja zadovoljava uvjete (5.12) ima beskonačno mnoštvo vakuumskih rješenja. Zbog toga postoji ozbiljna sumnja u valjanost $f(T)$ teorija gravitacije koje zadovoljavaju uvjete (5.12), odnosno one ne sadrže moć predviđanja zbog činjenice što sadrže beskonačan skup vakuumskih rješenja. Takve teorije uz uvjet analitičnosti $f(T)$ funkcije možemo prikazati Taylorovim razvojem u red

$$f(T) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{f^{(n)}(T_0)}{n!}(T-T_0)^n, \tag{5.16}$$

gdje nema konstantnog, linearnog i kvadratnog člana. Ipak, takve teorije nemaju neku važnost s obzirom na to da ne prelaze u limes opće teorije relativnosti za male vrijednosti skalara T.

Zanimaju nas male popravke opće teorije relativnosti. U ovom radu bavit ćemo se najčešće modificiranim teorijama gravitacije tipa $f(T)$ koje imaju sljedeći oblik

$$f(T) = T + \frac{\alpha}{2}T^2. \tag{5.17}$$

U teoriji oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$ vakuumsko rješenje nije zadovoljeno za $T = 0$ osim u slučaju prostorvremena Minkowskog. Rješenje funkcije $A(r)$ za iščezavajući skalar torzije je (5.15)

$$A(r) = A(r_0)\exp\int_{r_0}^{r}\frac{B(r')-1}{2r'}dr', \tag{5.18}$$

s kojim provjeravamo konzistentnost npr. jednadžbe (4.96)

$$H_r{}^r = \frac{1}{2}f(T) + \frac{2f_T}{AB^2r^2}\big((B-2)rA' + AB - A\big) = 0, \tag{5.19}$$

koja se za $T = 0$ i $f(T)$ iz (5.17) svodi na

$$\frac{2}{AB^2r^2}\big((B-2)rA' + AB - A\big) = 0. \tag{5.20}$$

Rješenje gornje diferencijalne jednadžbe je

$$A(r) = A(r_0)\exp\int_{r_0}^{r}\frac{B(r')-1}{r'(2-B(r'))}dr' \tag{5.21}$$

gdje je opet $A(r_0)$ konstanta integracije, odnosno rubni uvjet na komponentu metričkog tenzora pri $r = r_0$. Usporedimo li (5.18) i (5.21) dobivamo da je $B = 0$, koji nesumnjivo narušava konzistentnost jednadžbi gibanja uz pretpostavku $T = 0$, gdje za $B = 0$ proizlazi $T \to \infty$.

Za razliku od $f(R)$ teorija gdje često uvjet $R = 0$ predstavlja vakuumsko rješenje [76], u formulacijama $f(T)$ modificiranih teorija gravitacije temeljenima na torziji analogan uvjet $T = 0$ ne dovodi nužno do vakuumskog rješenja. Upravo obrnuto, za valjane kandidate oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$ uvjet $T = 0$ ne predstavlja vakuumsko rješenje.

5.1.2 Perturbativna statička sfernosimetrična vakuumska rješenja u $f(T)$ gravitaciji

Ovdje ćemo računom smetnji dobiti vakuumsko ponašanje u teorijama gravitacije tipa $f(T)$ za konkretan slučaj $f(T) = T + \alpha T^2/2$ [41]. Pretpostavimo li da je dodatni član $\alpha T^2/2$ u akciji u nekom području prostornovremena mnogo manji od linearnog člana T, dobivamo uvjet

$$|\alpha T| \ll 1. \tag{5.22}$$

U tom dijelu prostorvremena očekujemo da se vakuumsko rješenje neznatno razlikuje od Schwarzschildovog rješenja. Izračunamo li skalar torzije iz Schwarzschildovog rješenja

$$A(r) = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \qquad B(r) = \frac{1}{A(r)}, \tag{5.23}$$

dobivamo

$$T = \frac{2\left(1 - \mu(r)\right)^2}{r^2 \mu(r)} \tag{5.24}$$

gdje je $\mu = \sqrt{1 - 2m/r}$. Vidljivo je da ako je m konstanta, tada skalar torzije asimptotski teži u nulu za $r \to \infty$, iz čega slijedi da za dovoljno veliku vrijednost r uvjet (5.22) može biti zadovoljen. U tom slučaju funkcije A i B možemo napisati kao

$$A(r) = \mu(r) + \alpha a(r), \qquad B(r) = \frac{1}{\mu(r)} + \alpha b(r), \tag{5.25}$$

gdje funkcije $a(r)$ i $b(r)$ predstavljaju odstupanje od Schwarzschildovog rješenja koje je posljedica prisutnosti kvadratnog člana skalara torzije u akciji. Uvrstimo li $A(r)$ i $B(r)$ zapisane na gornji način u jednadžbe gibanja (4.95) – (4.97) dobivamo jednadžbe koje možemo razviti u

Taylorov red po parametru α čiji vodeći članovi nam daju uvjete

$$2r^3\mu^5 b' = -(1-\mu)^3(1+5\mu+10\mu^2) - r^2\mu^3(3-\mu^2)b, \tag{5.26}$$

$$2r^3\mu^3 a' = -1+4\mu-6\mu^2+4\mu^3-\mu^4+r^2\mu(1-\mu^2)a+2r^2\mu^3 b. \tag{5.27}$$

Uvjet (5.26) jest diferencijalna jednadžba po funkciji b koja ne sadrži funkciju a, te je možemo riješiti uz odabir konstante integracije na način da funkcija na putu prema prostornoj beskonačnosti trne u nulu. Njezino rješenje tada je [41]

$$b = -\frac{1+24\mu-12\mu^2-64\mu^3+75\mu^4-24\mu^5+12\ln\mu}{12r^2\mu(1-\mu^2)}. \tag{5.28}$$

Gornje rješenje uvrštavamo u uvjet (5.27) čime dobivamo diferencijalnu jednadžbu za funkciju a. Rješenje te jednadžbe, ponovno, uz takav odabir konstante integracije da funkcija iščezava u prostornoj beskonačnosti, možemo napisati kao

$$a = \frac{13-99\mu^2+128\mu^3-45\mu^4+3\mu^6+(12-36\mu^2)\ln\mu}{12r^2\mu(1-\mu^2)^2}. \tag{5.29}$$

Vodeći članovi u razvoju funkcija a i b u red potencija veličine $1/r$,

$$a(r) = -\frac{2m^3}{5r^5} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{r}\right)^6, \qquad b(r) = \frac{2m^3}{r^5} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{r}\right)^{11/2}, \tag{5.30}$$

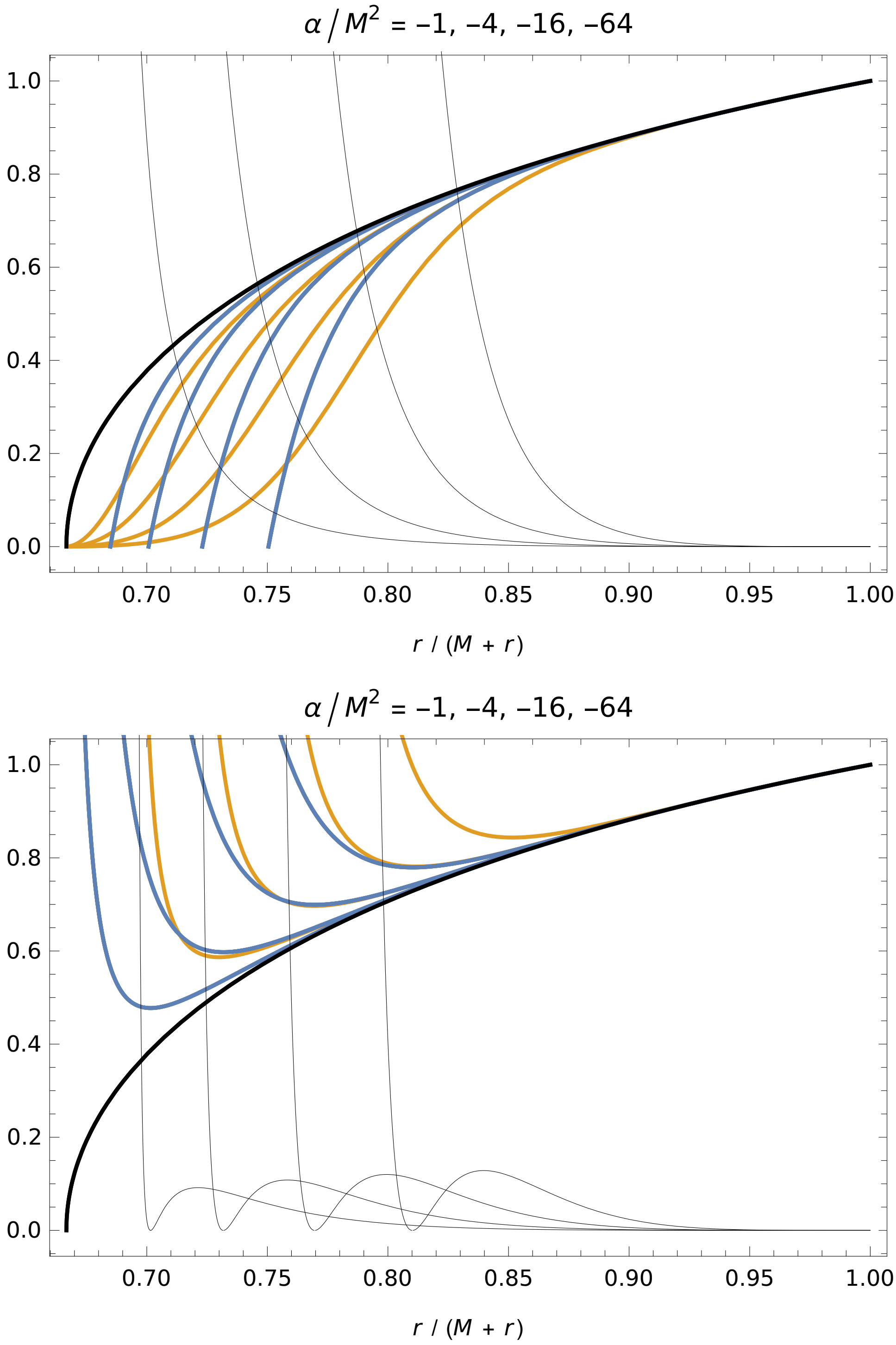
pokazuju nam da aproksimativno vakuumsko rješenje koje smo ovdje konstruirali ne mijenja asimptotsku strukturu Schwarzschildovog rješenja iz opće teorije relativnosti čiji su vodeći članovi

$$A(r) = 1 - \frac{m}{r} - \frac{m^2}{2r^2} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{r}\right)^3, \qquad B(r) = 1 + \frac{m}{r} + \frac{3m^2}{2r^2} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{r}\right)^3. \tag{5.31}$$

Slika 5.1 pokazuje Schwarzschildovo rješenje i perturbativno rješenje dano izrazima (5.28) i (5.29) za niz vrijednosti bezdimenzijskog parametra α/m^2. Na slici su također prikazane vrijednosti veličina $|\alpha T|$ koje govore o razini ispunjenosti uvjeta pod kojim se dobiveno rješenje može smatrati valjanim.

5.1.3 Numerička statička sfernosimetrična rješenja u $f(T)$ gravitaciji

Aproksimativno vakuumsko rješenje (5.28) i (5.29) dobiveno perturbativnim putem i opisano u prethodnom odjeljku smatramo primjenjivim pri velikim udaljenostima od središta simetrije. Odabirom konstanti integracije osigurali smo da njegovo asimptotsko ponašanje bude nalik asimptotskom ponašanju Schwarzschildovog rješenja iz opće teorije relativnosti. Upravo u tom



Slika 5.1: Perturbativno vakuumsko rješenje u $f(T) = T + \frac{\alpha}{2}T^2$. Funkcija $A = 1/B = \sqrt{3 - 2/x}$ Schwarzschildovog rješenja (crna linija), funkcije A (plave linije) i $1/B$ (narančaste linije) aproksimativnih rješenja (5.31) te veličina $|\alpha T|$ (tanke crne linije) za pozitivne (gornji graf) i za negativne vrijednosti omjera α/m^2 (donji graf).

području aproksimativno rješenje možemo iskoristiti za postavljanje početnih uvjeta potrebnih za numeričku evoluciju jednadžbi gibanja, bilo prema središtu simetrije, bilo prema još većim udaljenostima. Rješenja dobivena numeričkim putem nisu egzaktna, ali njihova prednost pred perturbativnim rješenjem leži u tome da ona ne zahtijevaju pojednostavljujuće pretpostavke poput uvjeta $|\alpha T| \ll 1$ na koji se oslanjao perturbativni postupak.

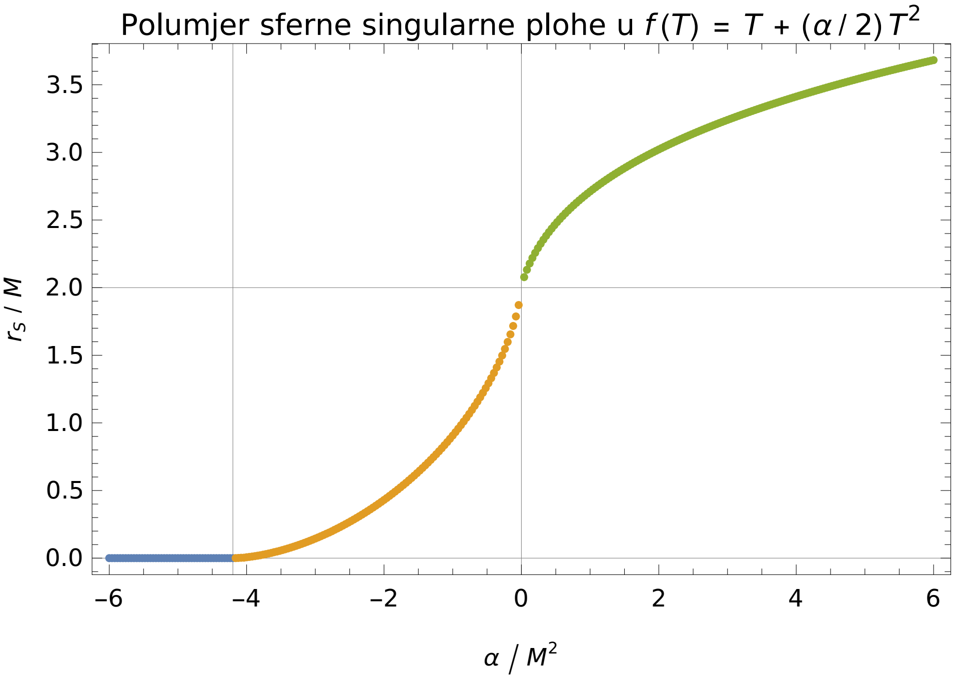
Integraciju provodimo standardnim rutinama namijenjenim rješavanju problema početnih vrijednosti za obične diferencijalne jednadžbe, a zbog jednostavnosti uvodimo novu bezdimenzionalnu koordinatu

$$x = \frac{r}{M+r}, \tag{5.32}$$

kojom problem s domene $0 \leq r < \infty$ preslikavamo na domenu $0 \leq x < 1$. Parametar M u (5.32) poistovjećujemo s parametrom m prisutnim u aproksimativnom rješenju (5.28) i (5.29), odnosno s gravitacijskom masom prostorvremena, nakon čega se u konačnim jednadžbama omjer α/M^2 pojavljuje kao jedini parametar. To znači da uz odabir početnih uvjeta koji proizlazi iz perturbativnog rješenja prikazanog u prethodnom odjeljku, ovdje moramo istražiti jednoparametarski prostor vakuumskih rješenja. Nalazimo tri područja ovisnih o vrijednosti omjera α/M^2 u kojima se vakuumska rješenja kvalitativno različito ponašaju [77].

Za pozitivne vrijednosti omjera α/M^2 integraciju možemo provesti samo do neke konačne vrijednosti koordinate x koju označavamo s x_S, a u kojoj numeričke rutine prijavljuju singularnost u diferencijalnim jednadžbama i nemogućnost daljnje integracije. Jedno od takvih rješenja prikazano je na gornjem grafu slike 5.3. Vrijednost x_S raste s vrijednošću omjera α/M^2 počevši od vrijednosti $2/3$ koju poprima za $\alpha/M^2 \to 0$, a kojoj odgovara polumjer $r_S = 2M$, (vidi sliku 5.2). Proučavanjem svojstava numeričkog rješenja u neposrednoj blizini $x = x_S$, odnosno u limesu $x \to x_S$, uočavamo kako funkcija A poprima konačnu vrijednost što nam govori o tome da sferna ploha polumjera $r_S = Mx_S/(1-x_S)$ ne predstavlja plohu beskonačnog crvenog pomaka poput npr. horizonta događaja Schwarzschildove crne rupe. Međutim, proučavanjem ponašanja Riccijevog i Kretschmannovog skalara (oba izračunata korištenjem koneksije Levi-Civite) nalazimo da oni u limesu $x \to x_S$ divergiraju (teže u pozitivnu beskonačnost). Iz toga proizlazi kako unutar Riemannovog tenzora postoje komponente koje divergiraju, te predstavljaju stvarni singularitet. S obzirom na to da je gibanje čestica u $f(T)$ gravitaciji opisano istim jednadžbama kao i u općoj teoriji relativnosti, zaključujemo da sfernu plohu pri $x = x_S$ ne možemo smatrati regularnom plohom u smislu njezinih fizičkih svojstava. Zbog svega navedenog takvu sfernu plohu smatrat ćemo singularnom.

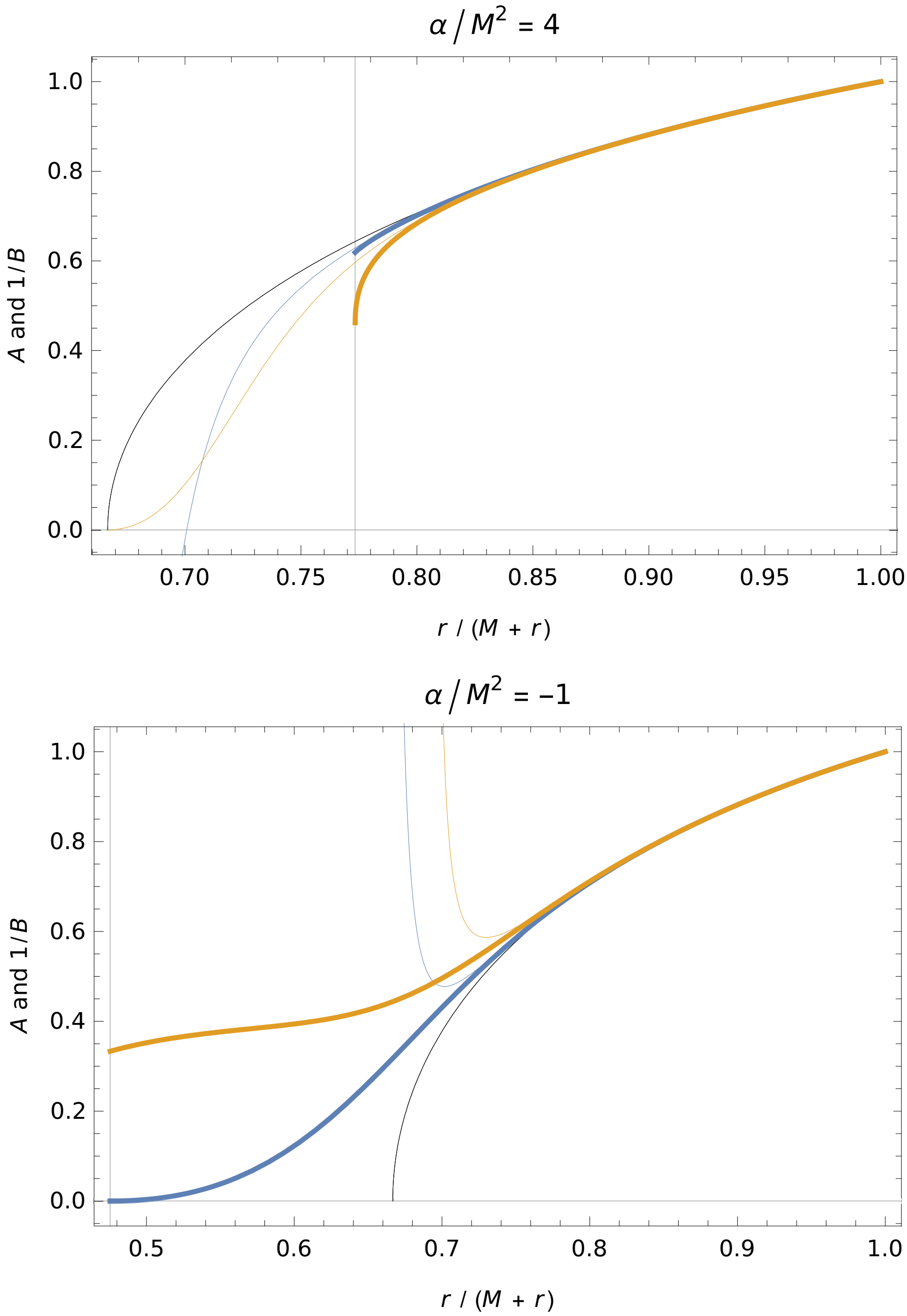
U području $-4.2 \lesssim \alpha/M^2 < 0$, gdje samu donju granicu intervala nije moguće precizno odrediti, nalazimo funkciju A koja iščezava pri konačnoj vrijednosti koordinate $x = x_S$. Primjer takvog rješenja prikazan je na donjem grafu slike 5.3. Vrijednost x_S teži u nulu kad se vrijednost omjera α/M^2 približava donjoj granici intervala, dok za $\alpha/M^2 \to 0$ imamo $x_S \to 2/3$, odnosno $r_S \to 2M$ (vidi sliku 5.2). Činjenica da na sfernoj plohi $x = x_S$ funkcija A iščezava govori nam



Slika 5.2: Polumjer sfernih singularnih ploha u vakuumskim rješenjima teorije $f(T) = T + \frac{\alpha}{2}T^2$: Točkasti singulariteti (plave točke), plohe s beskonačnim crvenim pomakom (narančaste točke), plohe s konačnim crvenim pomakom (zelene točke).

o tome da se radi o plohi beskonačnog crvenog pomaka, međutim, i ovdje analiza dobivenog rješenja u blizini te plohe ukazuje na prisutnost singularnosti [77]. Nalazimo da Riccijev i Kretschmannov tenzor divergiraju, te zaključujemo kako ovu plohu također možemo smatrati singularnom.

U području $\alpha/M^2 \lesssim -4.2$ numeričku integraciju možemo provesti do nadomak samog središta simetrije, dok samo središte ostaje izvan dohvata numeričkog postupka zbog singularnosti koeficijenata u diferencijalnim jednadžbama. Ekstrapolirajući ponašanje funkcija A i B uočavamo da one poprimaju konačne vrijednosti (konkretno $B(0) = 1$), dok Riccijev i Kretschmannov skalar i skalar torzije divergiraju. S obzirom na to da nema naznaka da se ove divergencije događaju na sfernoj plohi konačnog polumjera, ovu grupu rješenja shvaćamo tako da svako od njih sadrži točkasti singularitet (vidi sliku 5.2).



Slika 5.3: Numeričko vakuumsko rješenje u $f(T) = T + \frac{\alpha}{2}T^2$ za $\alpha/M^2 = 4$ (gornji graf) i za $\alpha/M^2 = -1$ (donji graf): Funkcije numeričkog rješenja A (debela plava linija) i $1/B$ (debela narančasta linija), funkcije perturbativnog rješenja A (tanka plava linija) i $1/B$ (tanka narančasta linija), funkcije $A = 1/B$ Schwarzschildovog rješenja (tanka crna linija). Crne uspravne linije označavaju položaj singularne sferne plohe.

Poglavlje 6

Nevakuumska rješenja i kompaktni objekti u $f(T)$ gravitaciji

Ovdje ćemo proučavati primjere nevakuumskih rješenja u gravitaciji tipa $f(T)$ za konkretan slučaj funkcije $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Kompaktne objekte ćemo modelirati politropskom jednadžbom stanja za slučaj $\Gamma = 2$, te ćemo proučiti njihova svojstva. Potom ćemo proučiti bozonsku zvijezdu modeliranu kompleksnim skalarnim poljem, također u gravitaciji oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Konačno, pokazat ćemo zajednička svojstva koje imaju nevakuumska rješenja u teorijama oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$, konkretno politropska i bozonska zvijezda. Ta opća svojstva će se najjasnije iskazati u analizi gustoće energije i tlakova u tim zvijezdama.

6.1 Motivacija i jednadžbe gibanja u nevakuumskim statičkim sfernosimetričnim geometrijama

Vakuumska rješenja predstavljaju jedno od najvažnijih rješenja u teorijama gravitacije. Osim zbog svoje teorijske važnosti uloga tih rješenja je i u opisu kinematike gibanja čestica oko masivnih objekata gdje je gravitacijsko međudjelovanje dominantno u odnosu na druge sile. S druge strane, potrebno je proučiti i nevakuumska rješenja koja su nužna u daljnjem opisu međudjelovanja materije i gravitacije. U tom slučaju prisutnost materije opisujemo tenzorom energije i impulsa koji, za razliku od vakuumskih rješenja, više nije nula.

Promatranjem neba uočavamo niz objekata—planete, zvijezde i galaksije—a detaljnijim astrofizičkim promatranjima nailazimo i na kompleksnije objekte kao što su crne rupe, neutronske zvijezde, dvojni sustavi itd. Objekte čija je gustoća mase značajno viša od gustoće atomske materije nazivamo kompaktnim objektima. Oni mogu biti zvjezdani ostaci u koje svrstavamo bijele patuljke, neutronske zvijezde, crne rupe itd. Jedan od zadataka teorije gravitacije je proučiti svojstva matematičkih modela kojima opisujemo takve objekte, a kad je riječ o modificiranim teorijama gravitacije, proučavamo učinke modifikacija na modele kompaktnih objekata. Ovdje ćemo proučiti neke najvažnije rezultate opće teorije relativnosti, a kasnije ćemo ih usporediti s rezultatima u kovarijantnoj formulaciji gravitacije tipa $f(T)$.

Jedna od većih nepoznanica je upravo jednadžba stanja neutronskih zvijezda gdje je na visokim gustoćama nužno koristiti rezultate kvantne kromodinamike, kvarkovske supravodljivosti itd. [78, 79, 80]. Osim navedenih primjera kompaktnih objekata zanimljivo je i pitanje hipotetskog objekta građenog od bozonskog skalarnog polja. Takve zvijezde nazivamo bozonskim zvijezdama. Treba naglasiti kako skalarna polja imaju važnu ulogu i u kozmologiji gdje npr. u teorijama inflacije skalarna polja predstavljaju bitnu komponentu takvih teorija [81, 82]. Osim u teorijama inflacije skalarna se polja često primijenjuju kao model tamne energije za objašnjenje ubrzanog širenja svemira [83, 84, 85].

Kako bi proučavali novosti i odstupanja modificirane $f(T)$ teorije gravitacije od opće teorije relativnosti (ili TEGR-a) prikladno je zapisati jednadžbu gibanja (4.72) u obliku

$$\overset{\circ}{G}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu\nu}_{eff} = \frac{8\pi G}{c^4}(\Theta^{\mu\nu} + \tilde{\Theta}^{\mu\nu}), \tag{6.1}$$

gdje je

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G}\tilde{G}^{\mu\nu}. \tag{6.2}$$

Time $\Theta^{\mu\nu}_{eff}$ predstavlja efektivni tenzor energije i impulsa u tzv. "slici" opće teorije relativnosti, a $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ su doprinosi članova koji su rezultat modifikacije Einstein-Hilbertove akcije. U daljnjem radu $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ nazivat ćemo "$f(T)$ fluidom" te ga možemo zapisati u standardnoj notaciji idealnog fluida u sfernoj simetriji

$$\tilde{\Theta}_{\nu}{}^{\mu} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{q} \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

gdje je $\tilde{\rho}$ gustoća energije, $\tilde{p}$ radijalni tlak, a $\tilde{q}$ transverzalni tlak $f(T)$ fluida. Korištenjem (4.85) možemo izračunati neiščezavajuće komponente Einsteinovog tenzora poznate iz većine udžbenika opće teorije relativnosti,

$$\mathring{G}_t{}^t = r^{-2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1 - 2r\Lambda'\right)\right), \tag{6.4}$$

$$\mathring{G}_r{}^r = r^{-2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1 + 2r\Phi'\right)\right), \tag{6.5}$$

$$\mathring{G}_\vartheta{}^\vartheta = \mathring{G}_\varphi{}^\varphi = r^{-1}\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(\left(\Lambda' - \Phi'\right)\left(1 + r\Phi'\right) - r\Phi''\right), \tag{6.6}$$

dok $\tilde{\Theta}_\mu{}^\nu$ ovisi o konkretnom izboru funkcije $f(T)$.

U ovom poglavlju će se prije svega proučavati režimi jakih gravitacijskih polja (neutronske i bozonske zvijezde), odnosno jakih torzija, te u tom smislu, očekujemo doprinose viših redova $f(T)$ funkcije. Ako bi neka hipotetska analitička funkcija $f(T)$ opisivala "pravu" teoriju gravitacije ili barem njeno efektivno ponašanje u raznim režimima onda bi ona mogla biti reprezentirana Taylorovim redom

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (T - T_0)^n, \tag{6.7}$$

gdje su koeficijenti

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(T_0)}{n!}. \tag{6.8}$$

Prvi član u akciji $f(T)$ teorije gravitacije koji se nameće u ovom pristupu je kvadratni član uz postojeći linearni član

$$f(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \frac{\alpha_2}{2} T^2. \tag{6.9}$$

Također, u sfernosimetričnim konfiguracijama jake torzije zanemariti ćemo kozmološku konstantu α_0 koja ima svoj značaj u kozmologiji, te ćemo postavit uvjet $\alpha_1 = 1$ kako bi dobili ispravni limes opće teorije relativnosti

$$f(T) = T + \frac{\alpha}{2} T^2, \tag{6.10}$$

gdje smo radi jednostavnosti preimenovali $\alpha_2 = \alpha$ s obzirom na to da se samo taj parametar nalazi u akciji (6.10). Sada možemo napisati neiščezavajuće komponente $\tilde{\Theta}_\mu{}^\nu$

$$\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_t{}^t = -\alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 5\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right) - 4r^2\left(2\Phi'' + \Phi'^2\right)\Big)$$
$$+ 4r\Lambda'\left(3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi'\right)\Big), \tag{6.11}$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_r{}^r = -\alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 2r\Phi' - 1\right)\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda + 3\right) + 2\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi'\Big), \tag{6.12}$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_\vartheta{}^\vartheta = \frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_\varphi{}^\varphi = \alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda + 3\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)^2$$
$$+ 2r\Big(\Phi'\left(\mathrm{e}^\Lambda - 2\mathrm{e}^{2\Lambda} - 4r^2\Phi'' + 1\right) - 2r^2\Phi'^3 + 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)r\Phi'' + 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)r\Phi'^2\Big)\Big)$$
$$+ 2r\Lambda'\Big(r\Phi'\left(2\left(2\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi' - 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\right) - 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)^2\Big)\Big). \tag{6.13}$$

Na taj način dobili smo sve potrebne izraze u statičnoj sfernoj simetriji za konkretan tip $f(T) = T + \alpha T^2/2$ kovarijantne teorije gravitacije. Sustav se može u potpunosti riješiti zadajući tenzor energije i impulsa koji će oblikovati prostornovremenske funkcije $\Lambda(r)$ i $\Phi(r)$, odnosno tetradu.

6.2 Politropska rješenja u kovarijantnoj formulaciji $f(T)$ gravitacije

U modeliranju neutroskih zvijezda i bijelih patuljaka često koristimo politropsku jednadžbu stanja idealnog fluida

$$p = k\rho_0^\Gamma = k\rho_0^{1+1/n}, \tag{6.14}$$

gdje je p tlak, ρ_0 je gustoća barionske materije, k je konstanta, a Γ nazivamo adijabatskim eksponentom. (Ovdje ćemo koristiti geometrijski sustav jedinica $c = G = 1$.) Umjesto adijabatskog eksponenta Γ često koristimo i tzv. politropski indeks $n = 1/(\Gamma - 1)$. Za razliku od jednadžbe stanja idealnog plina, politropska jednadžba stanja fenomenološki opisuje međudjelovanje fermiona, te se takva međudjelovanja pri visokim gustoćama ne mogu smatrati zanemarivim. Pa tako, prvo međudjelovanje koje narušava pretpostavke idealnog plina nije elektromagnetsko, nego je rezultat Paulijevog načela isključenja, prema kojemu se dva identična fermiona ne mogu nalaziti istovremeno u istom kvantnom stanju [86, 87]. Politropska jednadžba stanja (6.14) je poopćeni rezultat koji slijedi iz termodinamike degeneriranog fermionskog plina te na taj način Γ određuje vrstu plina. Tako npr. za nerelativistički degenerirani fermionski plin imamo $\Gamma = 5/3$, dok za relativistički plin imamo $\Gamma = 4/3$. Jednadžbu (6.14) zovemo i Newtonovom politropskom jednadžbom stanja. Međutim, u općoj teoriji relativnosti susrećemo se s dvjema verzijama politropske jednadžbe stanja koje imaju isti Newtonov limes. U mnogim radovima razlika među dvjema mogućnostima nije eksplicitno naznačena zbog čega može doći do zabuna. U nastavku ćemo opisati te dvije mogućnosti.

1. Slučaj $p = k\rho_0^\Gamma$

U ovom slučaju pretpostavljamo da vrijedi jednadžba (6.14) [88, 89, 90, 91]. Općenito, jednadžba stanja izražava tlak fluida p kao funkciju broja čestica po jedinici volumena n i entropije po čestici s. U prvom slučaju pretpostavit ćemo izentropski (adijabatski) proces u kojem je entropija po čestici konstantna te se jednadžba stanja svodi na

$$p(n,s) = p(n). \tag{6.15}$$

Politropska jednadžba stanja slijedi iz pretpostavke nezavisnosti adijabatskog eksponenta Γ o tlaku plina te se proces pri konstantnoj entropiji s može opisati jednadžbom

$$\Gamma = \left.\frac{\partial \ln p}{\partial \ln n}\right|_s. \tag{6.16}$$

Integracijom (6.16) dobivamo politropsku jednadžbu stanja (6.14). S obzirom na to da se u Einsteinovim jednadžbama eksplicitno pojavljuje gustoća energije ρ potrebno je izraziti broj čestica po jedinici volumena n preko gustoće energije ρ. Iz prvog zakona termodinamike $TdS = dE + pdV$ uz $s = S/N$, $E = \rho V$ te $n = N/V$ dobivamo

$$Td(nsV) = d(\rho V) + pdV, \tag{6.17}$$

gdje je T temperatura, a V volumen plina. Slijedi

$$d\left(\frac{\rho + p}{n}\right) - \frac{dp}{n} = Td\left(\frac{s}{n}\right), \tag{6.18}$$

uz definiciju gustoće

$$\rho_0 = nm_0, \tag{6.19}$$

gdje je m_0 masa čestice. Iz izentropske pretpostavke, te pretpostavke o očuvanju broja čestica u volumenu $V \sim 1/n$ dobivamo

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \tag{6.20}$$

Korištenjem jednadžbe (6.14) slijedi

$$k\rho_0^{\Gamma-2} = \frac{d(\rho/\rho_0)}{d\rho_0}. \tag{6.21}$$

Integracijom jednadžbe (6.21) uz uvjet $\Gamma \neq 1$ dobivamo [89]

$$\rho = C\rho_0 + \frac{p}{\Gamma - 1}, \tag{6.22}$$

gdje je C konstanta integracije. U nerelativističkom limesu mora vrijediti $\rho = \rho_0$ iz čega slijedi $C = 1$. Spomenimo i da je barotropska jednadžba stanja

$$\rho = \frac{p}{\Gamma - 1}, \tag{6.23}$$

poseban slučaj politropske jednadžbe uz $C = 0$. S druge strane poseban slučaj $\Gamma = 1$ dovodi do rješenja

$$\rho = p \ln \rho_0 + \rho_0. \tag{6.24}$$

U daljnjem radu razmatranje ćemo ograničiti na jednadžbu stanja s adijabatskim eksponentom $\Gamma \neq 1$. Konačno, u jednadžbu (6.22) uvrštavamo pretpostavljenu jednadžbu (6.14) i dobivamo

$$\rho(p) = \kappa p^{1/\Gamma} + \frac{p}{\Gamma - 1}, \tag{6.25}$$

gdje je $\kappa \equiv mk^{-1/\Gamma}$. Parametar Γ je proizvoljan, no postoje uvjeti koje mora zadovoljiti kako bi fluid imao neka “razumna” ponašanja. Pod "razumnim ponašanjem" podrazumijevamo fluidovo zadovoljenje poznatih energijskih uvjeta iz opće teorije relativnosti. Tu prije svega očekujemo pozitivnu vrijednost energije u svim sustavima, kao i uvjet da brzina širenja zvuka u fluidu mora uvijek biti manja od brzine svjetlosti.

Tenzor energije i impulsa idealnog fluida je

$$\Theta^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu), \tag{6.26}$$

gdje je u^μ četverobrzina. Za ovaj primjer idealnog fluida energijski uvjeti bi glasili

$$\rho + p \geq 0, \qquad \text{svjetlosni (null) energijski uvjet,} \tag{6.27}$$

$$\rho \geq 0, \qquad \rho + p \geq 0, \qquad \text{slabi energijski uvjet,} \tag{6.28}$$

$$\rho \geq |p|, \qquad \text{dominantni energijski uvjet,} \tag{6.29}$$

$$\rho + p \geq 0, \qquad \rho + 3p \geq 0, \qquad \text{jaki energijski uvjet.} \tag{6.30}$$

Kvadrat brzine zvuka idealnog fluida pri konstantnom s je dan jednadžbom ([57], Cjelina 5, Poglavlje 22)

$$c_{zvuk}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)\Bigg|_s = \frac{\Gamma - 1}{1 + (1 - 1/\Gamma)\kappa p^{-(1-1/\Gamma)}}. \tag{6.31}$$

Vidljivo je da je $c^2_{zvuk}(p)$ monotono rastuća funkcija te da je za $p \to \infty$ ograničena s

$$\lim_{p\to\infty} c^2_{zvuk}(p) = \Gamma - 1. \tag{6.32}$$

S obzirom na to da za sve vrijednosti tlaka p brzina zvuka mora biti manja od $c = 1$ tada nužno mora vrijediti $\Gamma \leq 2$. Također, bezdimenzionalna veličina σ koja je definirana s

$$\sigma(p) = \frac{p}{\rho} = \frac{\Gamma - 1}{1 + (\Gamma - 1)\kappa p^{-(1-1/\Gamma)}}, \tag{6.33}$$

je na sličan način ograničena s

$$\lim_{p\to\infty} \sigma(p) = \Gamma - 1, \tag{6.34}$$

iz čega slijedi kako je $\rho \geq p$ za $\Gamma \leq 2$. Zaključujemo da je $\Gamma = 2$ granični slučaj vrijednosti adijabatskog eksponenta koji materija može podnijeti bez da naruši načelo kauzalnosti i dominantni energijski uvjet. Taj će slučaj biti zanimljiv s obzirom da on opisuje ekstremno stanje materije.

2. Slučaj $p = k\rho^\Gamma$

Ovaj slučaj pretpostavlja direktnu vezu tlaka i gustoće energije danu izrazom [92, 93]

$$p = k\rho^\Gamma. \tag{6.35}$$

Tom pretpostavkom je račun nešto jednostavniji i direktniji jer je tlak p izražen kao funkcija gustoće energije ρ. Naime, u jednadžbi (6.25) se može izraziti jedino gustoća energije ρ kao funkcija tlaka p. Ipak, jednadžba stanja (6.35) daje nam

$$\sigma(p) = \frac{p}{\rho} \sim p^{1-1/\Gamma}, \tag{6.36}$$

iz čega je, s obzirom na to da gornji izraz nije ograničen odozgo, razvidno kako ona ne zadovoljava nužno dominantni energijski uvjet za sve vrijednosti tlaka p. Također, nije ograničena niti brzina zvuka $c_{zvuk} \leq 1$,

$$c^2_{zvuk} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \sim p^{1-1/\Gamma}, \tag{6.37}$$

što govori o mogućem narušenju kauzalnosti. Zaključujemo, kako jednostavniji oblik jednadžbe stanja (6.35) ne osigurava očuvanje dominantnog energijskog uvjeta kao ni ispunjenje uvjeta kauzalnosti $c_{zvuk} \leq 1$. Stoga, tek nakon što bi se u nekom konkretnom slučaju riješio sustav jednadžbi i pronašla rješenja, trebalo bi provesti analizu energijskih uvjeta i kauzalnosti. Kombiniranjem jednadžbe (6.18) i (6.35) dobivamo

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1-k\rho_0^{\Gamma-1})^{1/(\Gamma-1)}}, \tag{6.38}$$

te u nerelativističkom limesu jednadžbe (6.25) i (6.38) postaju istovjetne.

Kako bi a priori imali očuvan dominantni energijski uvjet i brzinu zvuka manju od brzine svjetlosti koristiti ćemo slučaj 1. politropske jednadžbe stanja.

6.2.1 Kompaktni objekti u općoj teoriji relativnosti i TOV jednadžbe

Zbog jednostavnosti pretpostavit ćemo statičnu sfernosimetričnu geometriju* u kojoj Einsteinove jednadžbe glase

$$r^{-2}\left(1-\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1-2r\Lambda'\right)\right) = 8\pi\rho, \tag{6.39}$$

$$r^{-2}\left(1-\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1+2r\Phi'\right)\right) = -8\pi p, \tag{6.40}$$

$$r^{-1}\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(\left(\Lambda'-\Phi'\right)\left(1+r\Phi'\right)-r\Phi''\right) = -8\pi p, \tag{6.41}$$

gdje je također korišten geometrijski sustav jedinica $c = G = 1$. Iz očuvanja tenzora energije i impulsa

$$\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0, \tag{6.42}$$

dobivamo

$$\frac{dp}{dr} + (\rho + p)\Phi' = 0, \tag{6.43}$$

te supstitucijom $e^{2\Lambda(r)} = (1-2m(r)/r)^{-1}$ jednadžba (6.39) postaje

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \tag{6.44}$$

Iz jednadžbe (6.40) možemo izraziti $\Phi'(r)$

$$\Phi'(r) = \frac{m(r)+4\pi r^3 p(r)}{r^2-2rm(r)}, \tag{6.45}$$

te uvrstiti $\Phi'(r)$ u (6.43) gdje dobivamo

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{\left(m(r)+4\pi r^3 p(r)\right)\left(p(r)+\rho(r)\right)}{r^2-2rm(r)}. \tag{6.46}$$

*Naravno, zvijezde, crne rupe, galaksije itd. rotiraju, čime je narušena sferna simetrija, te je za modeliranje takvih objekata potrebno relaksirati sfernu simetriju na općenitiju, aksijalnu simetriju. Ipak, kao prvi korak u modeliranju kompaktnih objekata, zbog jednostavnosti, ovdje ćemo koristiti statičku sfernosimetričnu geometriju.

U općoj teoriji relativnosti jednadžbe (6.44) i (6.46) uz jednadžbu stanja $\rho(p)$ definiraju potpuni sustav jednadžbi koje su poznate pod imenom Tolmann-Oppenheimer-Volkoffove jednadžbe (TOV jednadžbe) hidrostatske ravnoteže [94, 95].

6.2.2 Kompaktni objekti u $f(T)$ gravitaciji

U nastavku ćemo istražiti kompaktne objekte u kontekstu modificirane $f(T)$ teorije gravitacije. Naglasak će biti na proučavanju dodatnih doprinosa konkretnog oblika $f(T)$ funkcije gdje je efektivno Einstein-Hilbertovoj akciji dodan kvadratni član u skalaru torzije, naime $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Sustav jednadžbi koje je potrebno riješiti dan je s (6.1)

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = 8\pi(\Theta^{\mu\nu} + \tilde{\Theta}^{\mu\nu}). \tag{6.47}$$

Za statičnu sfernosimetričnu konfiguraciju Einsteinov tenzor je dan izrazima (6.4) – (6.6)

$$\mathring{G}_t{}^t = r^{-2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1 - 2r\Lambda'\right)\right), \tag{6.48}$$

$$\mathring{G}_r{}^r = r^{-2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1 + 2r\Phi'\right)\right), \tag{6.49}$$

$$\mathring{G}_\vartheta{}^\vartheta = \mathring{G}_\varphi{}^\varphi = r^{-1}\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(\left(\Lambda' - \Phi'\right)\left(1 + r\Phi'\right) - r\Phi''\right), \tag{6.50}$$

modificirani tenzor energije i impulsa $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ je dan (6.11) – (6.13)

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_t{}^t = &-\alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 5\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right) - 4r^2\left(2\Phi'' + \Phi'^2\right)\right)\right.\\ &\left.+ 4r\Lambda'\left(3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi'\right)\right),\end{aligned} \tag{6.51}$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_r{}^r = -\alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 2r\Phi' - 1\right)\left(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda + 3\right) + 2\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi'\right), \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_\vartheta{}^\vartheta = \frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_\varphi{}^\varphi = \alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}&\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda + 3\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)^2\\ &+ 2r\Big(\Phi'\left(\mathrm{e}^\Lambda - 2\mathrm{e}^{2\Lambda} - 4r^2\Phi'' + 1\right) - 2r^2\Phi'^3 + 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)r\Phi'' + 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)r\Phi'^2\Big)\Big)\\ &+ 2r\Lambda'\left(r\Phi'\left(2\left(2\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi' - 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\right) - 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)^2\right)\Big),\end{aligned} \tag{6.53}$$

Tenzor energije i impulsa idealnog fluida je određen izrazom (6.26)

$$\Theta^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu). \tag{6.54}$$

Jednadžbe (6.48) – (6.53), uz jednadžbu stanja $\rho(p)$ te skup prigodnih rubnih uvjeta čine strukturu politropske zvijezde u $f(T)$ gravitaciji. Primjećujemo odmah kako jednadžbe u $f(T)$ gravitaciji ne omogućuju eliminaciju $\Phi'(r)$ iz sustava jednadžbi kao što je to slučaj u općoj teoriji relativnosti. U općoj teoriji relativnosti iz jednadžbe (6.40) moguće je izraziti $\Phi'(r)$ te iz jednadžbe očuvanja tenzora energije i impulsa eliminirati potrebu računanja $\Phi'(r)$, s obzirom na to da se u (6.39) $\Phi'(r)$ uopće ne pojavljuje. Nasuprot tome u $f(T)$ jednadžbama funkcija $\Phi'(r)$ sadrži kvadratne članove te nije moguće na jednostavan algebarski način riješiti se funkcije $\Phi'(r)$ iz jednadžbi gibanja kao što je to slučaj u jednadžbama opće teorije relativnosti vidljivo iz jednadžbe (6.45). Ipak, valja primijetiti da se u $f(T)$ jednadžbama pojavljuju samo derivacije $\Phi'(r)$ i $\Phi''(r)$ koje omogućuju smanjenje reda diferencijalnih jednadžbi za jedan u $\Phi(r)$. Konačno, zbog kompleksnosti sustava bit će potrebno numerički riješiti politropsku zvijezdu u $f(T)$ gravitaciji (6.48)-(6.54) kao što je to slučaj s Tolmann-Oppenheimer-Volkoffovim jednadžbama (6.44) i (6.46).

6.2.3 Numeričko rješavanje jednadžbi

Sustav se sastoji od tri jednadžbe polja (6.47) i jednadžbe stanja $\rho(p)$, što ukupno čini četiri jednadžbe. Sustav sadrži ukupno četiri nepoznanice $\Phi(r)$, $\Lambda(r)$, $\rho(r)$ i $p(r)$, iz čega slijedi da na raspolaganju imamo potpun i dovoljan skup jednadžbi. Postoji mogućnost i korištenja jednadžbe očuvanja tenzora energije i impulsa umjesto npr. jednadžbe $\mathring{G}^{\vartheta\vartheta} = 8\pi(\Theta^{\vartheta\vartheta} + \tilde{\Theta}^{\vartheta\vartheta})$, kao što je to bila strategija u općoj teoriji relativnosti u procesu izvođenja TOV jednadžbi. Međutim, u našem pristupu derivirat ćemo jednadžbu $d\mathring{G}^{rr}/dr = 8\pi(d\Theta^{rr}/dr + d\tilde{\Theta}^{rr}/dr)$ i koristiti preostale dvije modificirane Einsteinove jednadžbe u $f(T)$ gravitaciji. Gornju jednadžbu smo derivirali kako bi dobili tlak p deriviran po radijalnoj koordinati r, što je važna strategija u numeričkom rješavanju sustava želimo li postaviti rubni uvjet na $p(r)$, u kontekstu politropskih objekata, odnosno zvijezda. To je svakako nužno želimo li osigurati konačan polumjer zvijezde, te nametnuti iščezavanje tenzora energije i impulsa na površini zvijezde. Zaključno, u našem pristupu koristimo skup jednadžbi

$$\mathring{G}^{tt} = 8\pi(\Theta^{tt} + \tilde{\Theta}^{tt}), \tag{6.55}$$

$$\frac{d}{dr}\mathring{G}^{rr} = 8\pi\left(\frac{d}{dr}\Theta^{rr} + \frac{d}{dr}\tilde{\Theta}^{rr}\right), \tag{6.56}$$

$$\mathring{G}^{\vartheta\vartheta} = 8\pi(\Theta^{\vartheta\vartheta} + \tilde{\Theta}^{\vartheta\vartheta}), \tag{6.57}$$

uz jednadžbu stanja

$$\rho(p) = \kappa p^{1/\Gamma} + \frac{p}{(\Gamma - 1)}. \tag{6.58}$$

Kako bi jednadžbe bile primjerenije za rješavanje numeričkim putem uvodimo transformacije

$$\lambda = \kappa^{-\Gamma/2(\Gamma-1)}, \qquad a = \lambda^{-2}\alpha, \qquad \sigma(r) = \frac{p(r)}{\rho(r)}, \tag{6.59}$$

koje čine bezdimenzionalni sustav. Također, uvodimo bezdimenzionalnu radijalnu koordinatu $x = r/R$ gdje je R polumjer zvijezde. Na taj način je definiran rubni uvjet

$$\sigma(1) = 0, \tag{6.60}$$

koji kaže da je zvijezda konačnog polumjera R, jer na toj koordinati tlak iščezava kao i gustoća energije što je vidljivo iz jednadžbe stanja (6.58). Iz gore navedenog slijedi da tenzor energije i impulsa iščezava u $r = R$ te kažemo kako je zvijezda lokalizirana unutar tog polumjera te se na toj koordinati spaja na vakuumsko rješenje. Rubni uvjet (6.60) će poslužiti kao kontrolni uvjet u rješavanju sustava politropske zvijezde. U našem pristupu nećemo sustav shvatiti kao problem rubnih uvjeta, nego početnih uvjeta. Razlog leži u tome što sustav rješavamo u programskom paketu Mathematica koja ima napredne algoritme rješavanja problema početnih uvjeta. U jednadžbama polja se pojavljuju najviše derivacije Φ'', Λ'' te σ'. Napomenuli smo ranije da se u sustavu diferencijalnih jednadžbi funkcija Φ u svom nederiviranom obliku uopće ne pojavljuje. To znači da red sustava možemo umanjiti za jedan uvedemo li npr. pokratu $\Phi'(x) = \phi(x)$. Sustav jednadžbi tada sadrži prvu derivaciju σ', drugu derivaciju Λ'' te prvu derivaciju ϕ'. Nadalje, uvedemo li pokratu $\Lambda'(x) = \lambda(x)$, odnosno, $\Lambda''(x) = \lambda'(x)$, sustav diferencijalnih jednadžbi sastoji se od jednadžbi (6.55), (6.56), (6.57) i od jednadžbe $\Lambda'(x) = \lambda(x)$, što čini sustav od četiri linearno nezavisne obične diferencijalne jednadžbe prvog reda s četiri nepoznate funkcije $(\sigma, \Lambda, \lambda, \phi)$. U skladu s gore navedenim potrebno je zadati četiri početna uvjeta kako bi imali dobro definiran Cauchyjev problem početnih vrijednosti.

Za saznavanje prigodnih početnih uvjeta razvijamo jednadžbe gibanja u Laurentov red oko nule i promatramo problematične članove $O(x^{-n})$ za $n \in \mathbb{N}$ koji divergiraju u $x = 0$. Prvi najniži član iz jednadžbi (6.55), (6.56) i (6.57) je

$$\frac{ae^{-4\Lambda(0)}\left(e^{\Lambda(0)} - 5\right)\left(e^{\Lambda(0)} - 1\right)^3}{x^4} + O(x^{-3})... \tag{6.61}$$

$$\frac{ae^{-4\Lambda(0)}\left(e^{\Lambda(0)} + 3\right)\left(e^{\Lambda(0)} - 1\right)^3}{x^4} + O(x^{-3})... \tag{6.62}$$

$$\frac{ae^{-4\Lambda(0)}\left(e^{\Lambda(0)} + 3\right)\left(e^{\Lambda(0)} - 1\right)^3}{x^4} + O(x^{-3})... \tag{6.63}$$

gdje (6.56) i (6.57) imaju isti oblik. Vidljivo je da ukoliko želimo izbjeći singularitet u $x=0$, utoliko dolazimo do početnog uvjeta

$$\Lambda(0)=0. \tag{6.64}$$

Primijenimo li uvjet (6.64) te promotrimo li u sljedećem redu jednadžbe gibanja oko nule dobivamo

$$\frac{4\Lambda'(0)\Big(1-4a\Phi'(0)\Lambda'(0)+2a\Lambda'(0)\Big)}{x}+O(x^0)+... \tag{6.65}$$

$$-\frac{2\Big((\Phi'(0)-\Lambda'(0))(1-4a\Phi'(0)\Lambda'(0)+2a\Lambda'(0)^2\Big)}{x}+O(x^0)+... \tag{6.66}$$

$$-\frac{2\Big((\Phi'(0)-\Lambda'(0))(1-4a\Phi'(0)\Lambda'(0)+2a\Lambda'(0)^2\Big)}{x}+O(x^0)+... \tag{6.67}$$

gdje je nužno zahtijevati uvjete

$$\Phi'(0)=0, \qquad \Lambda'(0)=0. \tag{6.68}$$

Zaključujemo kako su potrebni početni uvjeti u rješavanju sustava politropske zvijezde u $f(T)$ gravitaciji

$$\Phi'(0)=0, \qquad \Lambda(0)=0 \qquad \Lambda'(0)=0, \qquad \sigma(0)=\sigma_0, \tag{6.69}$$

gdje je posljednji uvjet proizvoljan. On omogućuje raznolikost zvijezda s obzirom na početnu gustoću u središtu zvijezde.

Zanimljivo je proučiti konstantne članove $O(x^0)$ u kojima se pojavljuju druge derivacije $\Lambda''(0)$ i $\Phi''(0)$. Daljnjim razvijanjem jednadžbi (6.55), (6.56) i (6.57) te uvrštavajući uvjete (6.64), (6.68), (6.69) dobivamo

$$\Lambda''(0)=\frac{8}{3}\pi(\gamma-1)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\sigma(0)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}+\sigma(0)^{\frac{1}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right), \tag{6.70}$$

$$\Phi''(0)=\frac{4}{3}\pi\Bigg(\left(3(\gamma-1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+(\gamma-1)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)\sigma(0)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}+ \\ (\gamma-1)^{\frac{1}{\gamma-1}}\sigma(0)^{\frac{1}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Bigg). \tag{6.71}$$

Konačno, razvijamo funkcije $\Lambda(x)$ i $\Phi'(x)$ u Taylorov red blizu nule gdje funkciju $\Lambda(x)$ razvijamo do kvadratnog člana

$$\Lambda(x) = \Lambda(0) + \Lambda'(0)x + \frac{1}{2}\Lambda''(0)x^2, \tag{6.72}$$

a funkciju $\Phi'(x)$ do linearnog člana

$$\Phi'(x) = \Phi'(0) + \Phi''(0)x. \tag{6.73}$$

U gore navedenim razvojima uvrštavanjem početnih uvjeta (6.69) i drugih derivacija u nuli (6.70) i (6.71) možemo provjeriti ponašanje funkcija Λ i Φ' blizu nule

$$\Lambda(x) = \frac{4}{3}\pi(\gamma-1)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\sigma(0)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} + \sigma(0)^{\frac{1}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)x^2, \tag{6.74}$$

$$\Phi'(x) = \frac{4}{3}\pi\Bigg(\left(3(\gamma-1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + (\gamma-1)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)\sigma(0)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} + \\ (\gamma-1)^{\frac{1}{\gamma-1}}\sigma(0)^{\frac{1}{\gamma-1}}(\gamma-\sigma(0)-1)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Bigg)x, \tag{6.75}$$

što će poslužiti kao ulazni parametar u numeričkom rješavanju sustava diferencijalnih jednadžbi.

6.2.4 Broj čestica i polumjer zvijezde

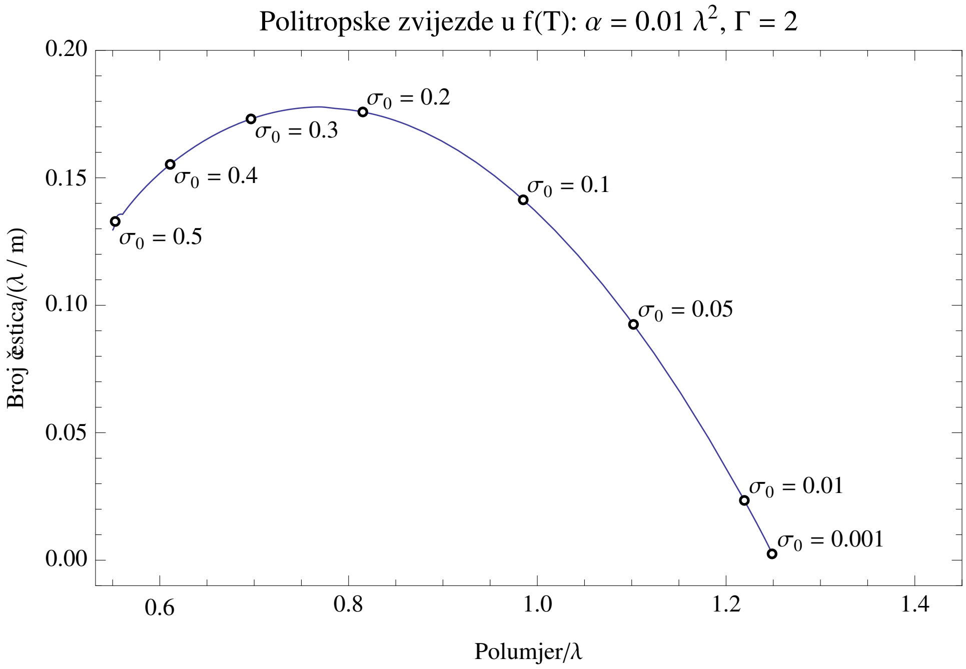
Uobičajeno je uspoređivati masu i polumjer zvijezde koja predstavlja obitelj statičkih sfernosimetričnih rješenja, dobivenih za poseban oblik jednadžbe stanja, kao funkciju središnje gustoće σ_0. Međutim, u $f(T)$ teorijama gravitacije postoji problem definicije mase [48] objekta konačnog polumjera. U općoj teoriji relativnosti pod pojmom mase najčešće koristimo dvije definicije: Arnowitt-Deser-Misnerovu (ADM) definiciju te Komarovu masu. ADM-ova masa zahtijeva asimptotski ravnu geometriju te se onda, uz pomoć Noetherinog teorema, očuvane veličine (masa, energija itd.) definiraju iz asimptotskih simetrija u prostornoj beskonačnosti. S druge strane, Komarova masa se može definirati samo u stacionarnim geometrijama, te također iz Noetherinog teorema, očuvane veličine mogu definirati energiju, masu itd. ADM-ova i Komarova definicija mase ne moraju se nužno podudarati te baš u slučaju $f(T)$ gravitacija taj odnos još nije istražen. U $f(T)$ teorijama gravitacije vakuumsko rješenje koje se veže na geometriju objekta, također nije dovoljno razjašnjeno, te kao što je ranije prikazano ne vrijedi Schwarzschildovo rješenje. Na taj način upitno je kako pojmiti i pronaći neku općeprihvaćenu definiciju mase u tim teorijama u skladu s onim definicijama u općoj teoriji relativnosti.

U okviru ovih nejasnoća u našem pristupu odlučili smo se za pouzdaniji pojam ukupnog broja čestica N u nekom polumjeru R. On se može definirati kao integral gustoće čestica n u unutrašnjosti zvijezde

$$N = 4\pi \int_0^R n(r) e^{\Lambda(r)} r^2 dr, \tag{6.76}$$

po vlastitom volumenu. Potrebno je izračunati $n(r)$ iz $\sigma(r)$ te numerički integrirati (6.76) kako bi se dobio N. U ovom poglavlju analizirat ćemo broj čestica zvijezde N i polumjer zvijezde R. Cilj će nam biti odrediti maksimalnu dozvoljenu vrijednost σ_0 do koje su konfiguracije zvijezda stabilne †. U općoj teoriji relativnosti je ponašanje broja čestica (mase) i polumjera zvijezde dano krivuljom koja, počevši od malih vrijednosti σ_0, pokazuje kako broj čestica zvijezde (masa) raste u skladu sa smanjivanjem polumjera zvijezde. Taj trend se nastavlja do kritične točke nakon kojeg se broj čestica zvijezde počinje smanjivati kako se smanjuje polumjer zvijezde. Kritična točka u kojoj se postiže maksimalna masa za dani polumjer jest granična točka nakon koje sve konfiguracije postaju nestabilne s obzirom na male radijalne smetnje [96, 97]. Sličan obrazac ponašanja ima i broj čestica, gdje se također u maksimumu broja čestica za dani polumjer zvijezde postiže granična točka stabilnosti, razlika je samo u numeričkoj vrijednosti N u odnosu na M, ali kritična točka je ista [96]. Na slici 6.1 predstavljamo ovisnost broja čestice o polumjeru zvijezda za razne σ_0 u konkretnoj teoriji $f(T) = T + \alpha T^2/2$ za $a = 0.01 = \lambda^{-2}\alpha$, te za kritičnu $\Gamma = 2$ pri kojoj su uvjeti DEC-a i $c_{zvuk} < c$ očuvani. Uočavamo da za mala odstupanja od opće teorije relativnosti gdje je α relativno mali broj kvalitativno ponašanje je jednako onom u općoj teoriji relativnosti, a kvantitativno se neznatno razlikuju. U limesu $\sigma \to 0$ rješenja prelaze u nerelativistički slučaj politropa čije je rješenje poznato iz Lane-Emdenove jednadžbe za $\Gamma = 2$. U tom limesu polumjer zvijezde je analitički dan s $R = \sqrt{\pi/2}\lambda$ što se podudara s trendom funkcije koju pokazuje slika 6.1. Kako bi proučili ponašanje teorije oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$ na slici 6.2 predstavljamo krivulje za razne $\alpha = \lambda^2 a$. Ovdje je prikazan čitav spektar slučajeva $a = \pm 0.1, \pm 1, \pm 10$ kako bi se uistinu vidjelo ima li kvalitativnih razlika u odnosu na politrope u općoj teoriji relativnosti. Vidljivo je da je ponašanje politropa za velike pozitivne vrijednosti a slično ponašanju politropa u općoj teoriji relativnosti. Ipak, kritična točka se nalazi na većem polumjeru, odnosno u teorijama s velikim a dozvoljen je manji broj konfiguracija stabilnih zvijezda u odnosu na opću teoriju relativnosti. Također, u teorijama oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$, uz dovoljno velike vrijednosti parametra $a = \lambda^{-2}\alpha$, dobivamo zvijezde s mnogo manjim brojem čestica N u odnosu na one iz opće teorije relativnosti. U slučaju negativnih vrijednosti a dobivamo zanimljivo ponašanje koje se kvalitativno razlikuje od opće teorije relativnosti. Naime, u tim slučajevima krivulja broja čestica i polumjera nema

†Analiza stabilnosti zvijezda u $f(T)$ gravitaciji je upitna s obzirom na to da vremenski ovisne jednadžbe gibanja u slučaju sferne simetrije još nisu pronađene. Zbog toga analiza stabilnosti zvijezda, koja se temelji na analizi malih smetnji, nije provediva. Kako bi proučavali stabilnost zvijezde potrebno je pronaći odgovarajuću vremenski ovisnu tetradu koja predstavlja jedan od glavnih izazova $f(T)$ teorija gravitacije te će o toj temi biti više govora u poglavlju 7.



Slika 6.1: Prikazana je ovisnost broja čestica u zvijezdi N o polumjeru zvijezde za razne konfiguracije zvijezda σ_0 u slučaju $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Numeričko rješavanje kreće od $\sigma_0 = 0.001$ do $\sigma = 0.5$. Ponašanje u kvalitativno ne odstupa od ponašanja u općoj teoriji relativnosti s obzirom da je a relativno malen u ovom slučaju.

globalni maksimum koji interpretiramo kao kritičnu točku. S obzirom da u $f(T)$ teoriji gravitacije nemamo jasan formalizam za analizu stabilnosti modela zvijezda, slijedi da ne možemo sa sigurnošću reći jesu li sve konfiguracije s $a < 0$ stabilne. Ipak, s obzirom na izostanak kritične točke u $f(T)$ teorijama postoji mogućnost da sve takve konfiguracije budu stabilne. Takav zaključak ne možemo uzeti kao strog te je izveden isključivo po analogiji u odnosu na analizu stabilnosti zvijezda u općoj teoriji relativnosti, stoga može poslužiti samo kao svojevrsna slutnja. Također, vidljivo je da u modelima izračunatim u okviru $f(T)$ teorije polumjer zvijezde u limesu $\sigma_0 \to 0$ teži vrijednosti $R = \sqrt{\pi/2}/\lambda$, što je ujedno i rezultat Lane-Emdenove jednadžbe za $\Gamma = 2$ konfiguraciju [98].

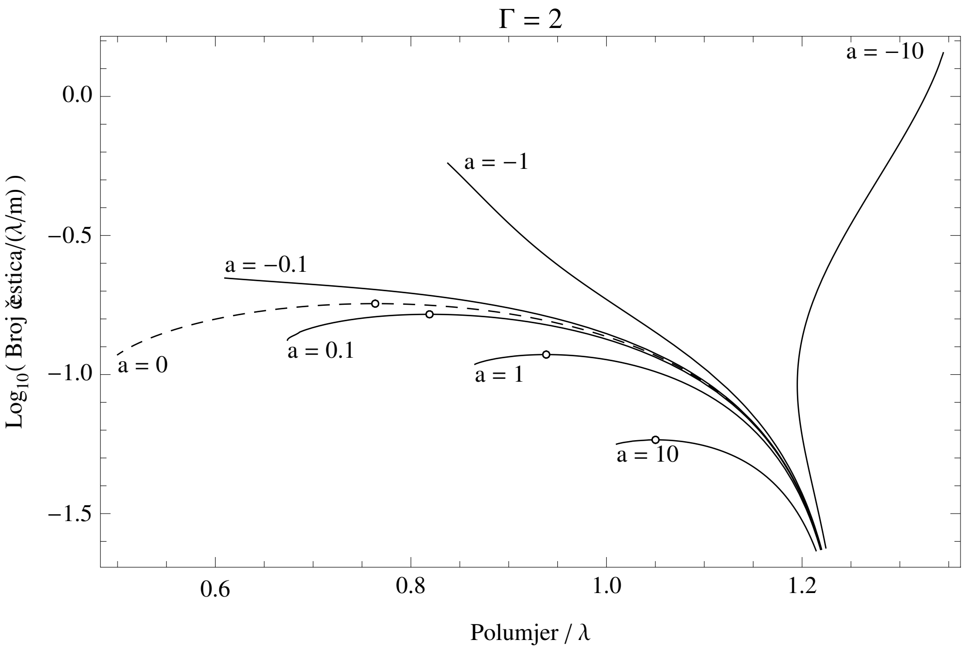
6.2.5 Gustoća energije i tlak

U nastavku ćemo proučavati ponašanje gustoću energije ρ i tlak p u modificiranim teorijama gravitacija oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Kako bi uočili doprinose koji proizlaze iz modifikacije teorije gravitacije same jednadžbe zapisujemo u obliku (6.1)

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = 8\pi(\Theta^{\mu\nu} + \tilde{\Theta}^{\mu\nu}). \tag{6.77}$$

Odnosno

$$\mathring{G}^{tt} = 8\pi(\rho + \tilde{\rho}), \qquad \mathring{G}^{rr} = 8\pi(p + \tilde{p}), \qquad \mathring{G}^{\vartheta\vartheta} = 8\pi(p + \tilde{q}), \tag{6.78}$$



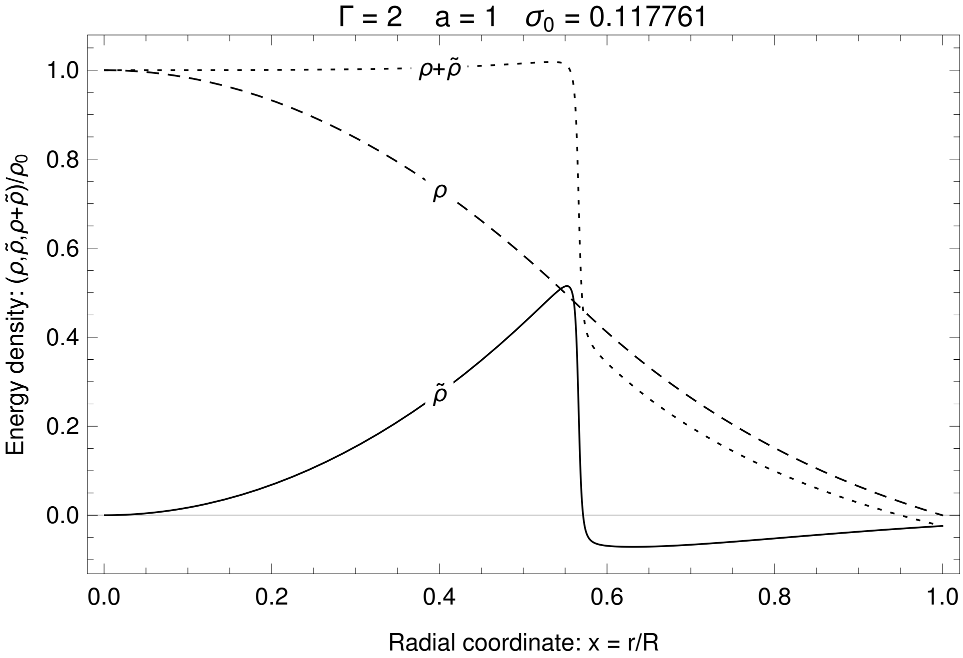
Slika 6.2: Prikazana je ovisnost broja čestica zvijezde o polumjeru zvijezde za teoriju oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$ za razne parametre a i σ_0 pri čemu je fiksiran politropski eksponent $\Gamma = 2$.

gdje je pretpostavljen izotropni fluid zvijezde, a neizotropnosti $\tilde{q} \neq \tilde{p}$ su rezultat modificiranih članova proporcionalnih s α. Na slikama 6.3 i 6.4 predstavljamo ponašanje gustoće energije i tlakova za $a = 1$ u graničnom slučaju našeg numeričkog postupka gdje je postignuta maksimalna vrijednost $\sigma_0 \approx 0.118$. Za veće vrijednosti od $\sigma_0 \approx 0.118$, za $a = 1$ numeričko rješavanje nije bilo moguće. Uočavamo kako se ponašanje gustoće energije i tlaka fluida neznatno razlikuje od onoga u općoj teoriji relativnosti. U središtu zvijezde gustoća energije i tlak fluida su maksimalni te padaju sve do polumjera zvijezde gdje iščezavaju. Ovaj rezultat jamči sklad kvalitativnog ponašanja opće teorije relativnosti i modificiranih $f(T)$ teorija na opažačkoj razini koji predstavlja svojevrsni test teorije. Zanimljivo je promotriti ponašanje komponente Einsteinovog tenzora $\mathring{G}^{tt} \propto \rho + \tilde{\rho}$ čija je vrijednost od središta zvijezde pa do $r \sim R/2$ približno konstantna, pri $r \sim R/2$ ona doživljava nagli pad, a s daljnjim rastom koordinate r nastavlja padati do samog ruba zvijezde pri $r = R$. Primjećujemo da postoji točka u kojoj komponenta $\mathring{G}^{tt}$ Einsteinovog tenzora mijenja predznak (blizu površine zvijezde), taj rezultat je nužan s obzirom na to da na površini zvijezde gustoća energije iščezava te mora vrijediti

$$\mathring{G}^{tt}(r = R) = 8\pi\tilde{\rho}(r = R). \tag{6.79}$$

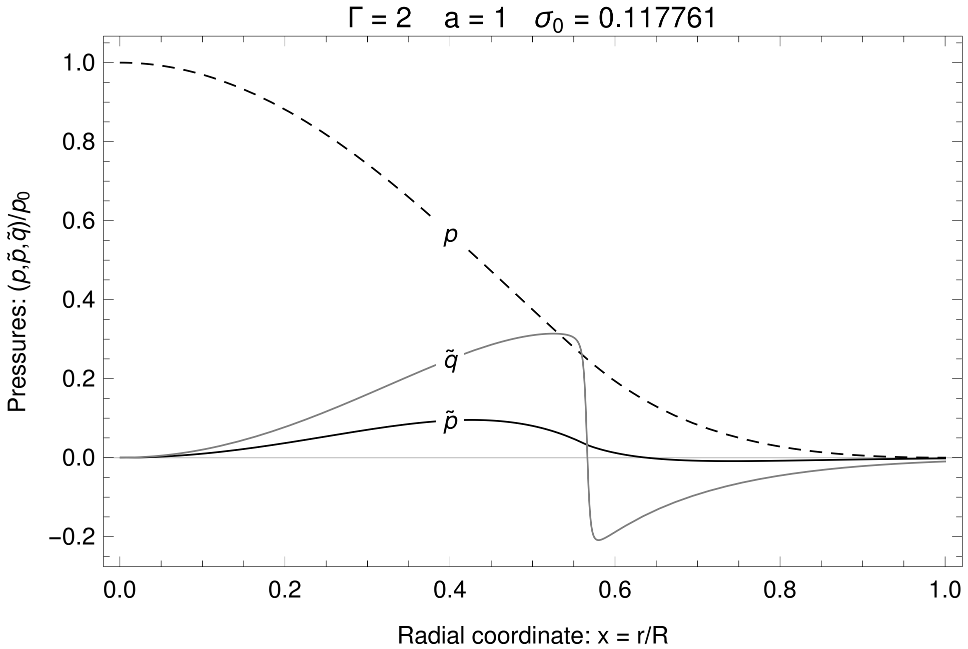
Drugim riječima vakuumsko rješenje je ono za koje vrijedi

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = 8\pi\tilde{\Theta}^{\mu\nu}, \tag{6.80}$$

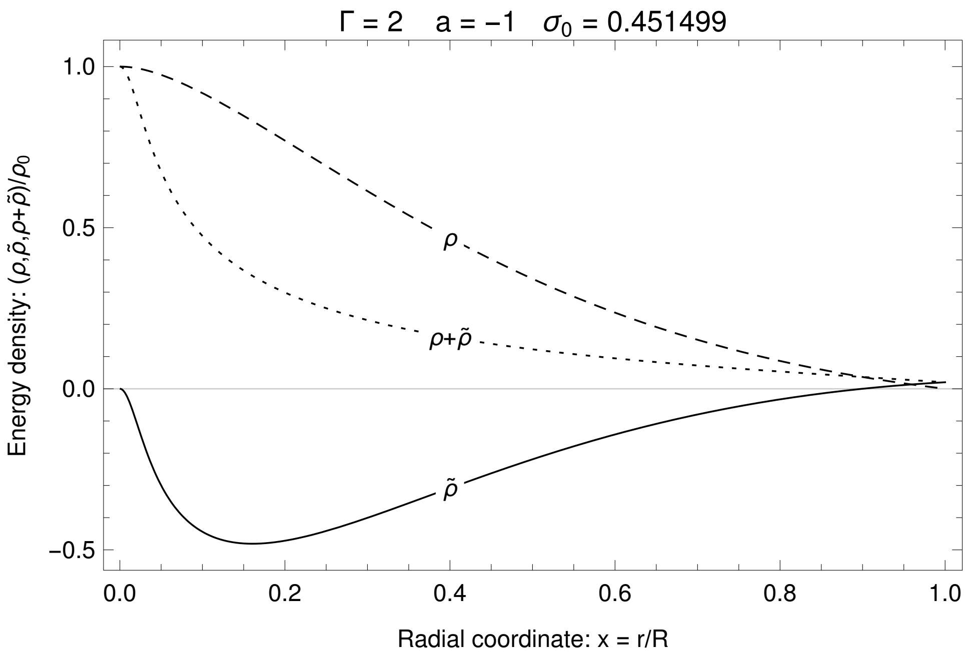


Slika 6.3: Prikazano je ponašanje gustoće energije za konkretnu zvijezdu sa središnjom gustoćom $\sigma_0 = 0.117761$ u slučaju $f(T) = T + \alpha T^2/2$ gdje je $a = \alpha\lambda^{-2} = 1$. Vidljiv je strmi pad $\mathring{G}^{tt}$ komponente Einsteinovog tenzora blizu polovice polumjera zvijezde, te spajanje na vakuum. Gustoća energije politropskog fluida se neznatno razlikuje od onoga u općoj teoriji relativnosti za $\Gamma = 2$.

u modificiranim teorijama gravitacije tipa $f(T)$, a ne nužno $\mathring{G}^{\mu\nu} = 0$. Dapače, $\mathring{G}^{\mu\nu}$ iščazava samo za Schwarzschildovo rješenje, a pokazano je kako modificirani članovi $\tilde{G}^{\mu\nu}$ (odnosno "$f(T)$ fluid" $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$) ne iščezavaju za Schwarzschildovu metriku [41]. S druge strane gustoća energije $f(T)$ fluida $\tilde{\rho}$ kreće od nule te raste do približno polovice polumjera zvijezde gdje naglo pada i prelazi u negativne vrijednosti sve do površine zvijezde spajajući se s vakuumom. Numeričko rješenje veće od $\sigma_0 > 0.118$ (za zadani $a = 1$) nije bilo moguće provesti. Pretpostavka je da $\rho + \tilde{\rho}$ sadrži ekstremni pad, gotovo okomit, koji onemogućuje numerički tretman. Ne možemo isključiti kako u tim režimima ne postoji rješenje, ili ono poprima vrlo različito ponašanje koje bi se tek analitički moglo izraziti. Ipak, vidljivo je da zvijezdu možemo podijeliti u tri područja: unutrašnjost zvijezde ili jezgru, "prijelazno" područje i vanjski sloj zvijezde. U unutrašnjosti zvijezde (jezgri) uočavamo približno konstantnu vrijednost gustoće energije efektivnog fluida $\rho + \tilde{\rho}$ koje možemo shvatiti kao nestlačivu materiju, dok u prijelaznom području zvijezde vrijednosti komponenata tenzora $f(T)$ fluida $\tilde{\rho}$ i $\tilde{q}$ doživljavaju strmi pad te prelaze iz pozitivnih u negativne. U vanjskom sloju vrijednost gustoće energije efektivnog fluida $\rho + \tilde{\rho}$ ima lagani pad gdje blizu površine zvijezde mijenja predznak i spaja se na vakuumsko rješenje. U svrhu analize negativnih vrijednosti a predstavljamo sliku 6.5 gdje je prikazana gustoća energije efektivnog fluida, $f(T)$ fluida i materije. U tom slučaju primjećujemo da je izgubljeno svojstvo strmog prijelaza gustoće energije $f(T)$ fluida i efektivne gustoće energije $\rho + \tilde{\rho}$ u blizini polovice polumjera zvijezde. Politropski fluid se i dalje ponaša slično kao u općoj teoriji relativnosti te u opažačkom smislu teorija s negativnim a nije isključena. Gustoća energije $f(T)$



Slika 6.4: Prikazano je ponašanje tlakova za konkretnu zvijezdu sa središnjom gustoćom $\sigma_0 = 0.117761$ u slučaju $f(T) = T + \alpha T^2/2$ gdje je $a = \alpha\lambda^{-2} = 1$. Anizotropnost $f(T)$ fluida je rezultat modifikacije TEGR-a, a na površini zvijezde se spaja na vakuumsko rješenje gdje su $\tilde{p} \neq 0 \neq \tilde{q}$. Tlak politropskog fluida je izotropan te se neznatno razlikuje od onoga u općoj teoriji relativnosti za $\Gamma = 2$.



Slika 6.5: Prikazano je ponašanje gustoća energije za zvijezdu sa središnjom gustoćom $\sigma_0 = 0.451499$ u slučaju $f(T) = T + \alpha T^2/2$ gdje je $a = \alpha\lambda^{-2} = -1$. Gustoća energije politropa i dalje ima slično ponašanje kao u TEGR-u, dok je gustoća energije efektivnog tenzora energije i impulsa izgubila strmi prijelaz u odnosu na pozitivne a vrijednosti.

fluida $\tilde{\rho}$ je po cijeloj unutrašnjosti zvijezde negativna te tek u blizini površine zvijezde poprima pozitivne vrijednosti. Pozitivna vrijednost $\tilde{\rho}$ je opet rezultat spajanja na vakuumsko rješenje, no sad članovi uz T^2 mijenjaju predznak s obzirom na to da je faktor a promijenio predznak.

Zaključujemo da se model politropa u $f(T)$ gravitaciji, u formi njenog minimalnog odstupanja od TEGR-a, dakle $f(T) = T + \alpha T^2/2$, znatno mijenja u slučaju negativnih parametara α. Ovaj model omogućuje u načelu masivnije zvijezde s manjim polumjerom zvijezde od onih u općoj teoriji relativnosti. Ipak, pitanje stabilnosti nije moguće analizirati u kontekstu sadašnjeg stanja modificiranih $f(T)$ teorija gravitacije, s obzirom na to da nije pronađena vremenski ovisna tetrada, koja čini lagranžijan gravitacije tipa $f(T)$ invarijantnim u odnosu na Lorentzove transformacije tetrade. U tom slučaju nije moguće reći je li maksimum krivulje broja čestica i polumjera zvijezde odgovara kritičnoj točki nakon koje konfiguracije postaju nestabilne. U slučaju pozitivnih vrijednosti parametra α situacija je nešto manje zanimljiva te ona uvodi dodatna ograničenja za dozvoljene mase zvijezda koje za rastući parametar a postaju sve ograničenije, pa se kritična točka postiže vrlo rano. Ipak, matematički oblik rješenja jednadžbi gibanja u slučaju pozitivnih parametra a je vrijedan rezultat. U njemu vidimo egzotično ponašanje efektivnog fluida koji je po cijeloj unutrašnjosti konstantan do polovice polumjera zvijezde te onda naglo pada i prelazi u negativne vrijednosti na površini zvijezde. Ostaje aktualno pitanje interpretacije mase politropa, odnosno svih nevakuumskih rješenja konačnog polumjera (kompaktnih objekata) u $f(T)$ gravitaciji. U modificiranim teorijama $f(T)$ gravitacije nema jedinstvenog analitičkog vakuumskog rješenja te se u vezanju vakuuma i površine kompaktnog objekta ne može odrediti metrička funkcija kojoj odgovara masa zvijezde. Također, definiranje mase iz asimptotskog ponašanja metrike u beskonačnosti ne jamči istovjetnu definiciju ADM-ove mase u općoj teoriji relativnosti s obzirom na to da nije jasno koliki udio gustoće energije $f(T)$ fluida doprinosi asimptotskoj definiciji ADM-ove mase u $f(T)$ gravitaciji.

6.3 Bozonske zvijezde u $f(T)$ modificiranim teorijama gravitacije

U odjeljku koje slijedi ćemo proučavati primjer hipotetskih objekata koje nazivamo bozonskim zvijezdama [99, 100]. One predstavljaju rješenje samogravitirajućih skalarnih polja u teoriji gravitacije. Iako ih je uobičajeno zvati bozonskim zvijezdama zapravo se u većini literature, kao i u ovom radu, pretpostavljaju objekti izgrađeni od skalarnog polja, a ne općenito od bilo kojeg bozonskog polja. Skalarna su polja u standardnoj formulaciji ΛCDM teorije jedna od glavnih komponenti tih teorija, te bi svakako bilo nužno istražiti skalarna polja u kontekstu modificiranih teorija gravitacije, pogotovo u primordijalnim epohama svemira gdje je njihov doprinos značajan [101]. Mogućnost nastanka supermasivnih bozonskih zvijezda u ranom svemiru bi mogla objasniti mnoga svojstva aktivnih galaktičkih jezgri [102]. Također, u početcima proučavanja posljedica novopredloženih teorija često krećemo od njenih najjednostavnijih primjera. Stoga, krećemo od skalarnih polja, koja predstavljaju jedan od najjednostavnijih modela materije, u modeliranju objekata u kovarijantnoj inačici modificiranih teorija $f(T)$ gravitacije. Za skalarna bozonska polja ne vrijedi Paulijevo načelo isključenja, pa se postavlja pitanje kako se bozonske zvijezde mogu oduprijeti gravitacijskom kolapsu? U originalnom članku [103], gdje je bozonska zvijezda nazvana Klein-Gordonovim geonom, prikazan je sustav samogravitirajućeg skalarnog polja koji neće nužno doživjeti kolaps, nego će polje biti raspršeno po cijelom prostoru prema Heisenbergovom načelu neodređenosti. Bozonska zvijezda nije kompaktna, međutim područja najvećih vrijednosti skalarnog polja mogu se smatrati lokaliziranim s obzirom na to da polje brzo opada s udaljenošću. U općoj teoriji relativnosti bozonske su zvijezde modelirane skalarnim neinteragirajućim poljem i prvobitno su istražene u [104]. U tim radovima dobivena je maksimalna masa bozonske zvijezde $M_{max} \sim M^2_{Planck}/m$, gdje je m masa skalarnog polja. Iz tih rezultata zaključujemo da bozonske zvijezde moraju biti iznimno malih masa, pa ih često nazivamo "mini bozonskim zvijezdama" [105]. U tom smislu njihova je astrofizička uloga zanemariva, te se s vremenom izgubio interes za njihovo proučavanje. Iznenađenje je nastupilo radom [106] gdje uvođenjem samointerakcije skalarnog polja dobivamo odnos Chandrasekharovih masa fermionskih zvijezda i bozonskih zvijezda izrazom: $M_{fermion} \sim \lambda^{-1/4} M_{bozon}$ gdje je λ bezdimenzionalna konstanta vezanja samointeragirajućeg skalarnog polja. Ovaj rezultat u načelu omogućuje opažanje takvog objekta asrofizičkim promatranjima, te je time vraćen interes proučavanja bozonskih zvijezda. U ovom ćemo radu pokazati kako je moguće ostvariti bozonsku zvijezdu astrofizičkih dimenzija i bez uvođenja samointerakcije skalarnog polja [49] uz minimalno odstupanje od TEGR-a, $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Također, pokazat će se da kvalitativno ponašanje rješenja jednadžbi gibanja poprima sličan oblik kao u politropskim objektima gdje možemo prepoznati neka opća svojstva teorije gravitacije tipa $f(T) = T + \alpha T^2/2$.

6.3.1 Jednadžbe gibanja bozonske zvijezde u $f(T)$ gravitaciji

Krećemo od akcije u $f(T)$ gravitaciji uz minimalno vezanje s materijom

$$\mathscr{S} = \int \Big(\frac{1}{2\kappa} f(T) + \mathscr{L}_m \Big) h d^4 x, \tag{6.81}$$

gdje je h determinanta tetrade $h^a{}_\mu$, a lagranžijan materije za neinteragirajuće masivno kompleksno skalarno polje je

$$\mathscr{L}_m = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\mathring{\nabla}_\mu \phi^* \mathring{\nabla}_\nu \phi + \mathring{\nabla}_\mu \phi \mathring{\nabla}_\nu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi, \tag{6.82}$$

gdje je $\mathring{\nabla}_\mu$ kovarijantna derivacija definirana koneksijom Levi-Civite. Bozonske zvijezde ćemo rješavati u prirodnom sustavu jedinica $c = 1 = \hbar$, iz čega slijedi $G = 1/M^2_{Planck}$. U literaturi je uobičajeno koristiti prirodni sustav jedinica u analizama bozonskih zvijezda te ćemo se i ovdje držati ovakve prakse. U slučaju statičke sferne simetrije bilo bi prirodno pretpostaviti da skalarno polje ne ovisi o vremenu. Ipak, prema Derrickovom teoremu [107, 108] takva rješenja bi bila nestabilna. Naime, Derrickov teorem tvrdi kako ne postoje regularna, statička, lokalizirana rješenja nelinearnih jednadžbi skalarnih polja (nelinearnih Klein-Gordonovih jednadžbi) u 3 prostorne dimenzije. U skladu s gore navedenim primjenjujemo ansatz skalarnog polja oblika

$$\phi(r,t) = \phi(r) e^{i\omega t}, \tag{6.83}$$

gdje je $\phi(r)$ realna funkcija koja ovisi samo o radijalnoj koordinati r, a ω je frekvencija odnosno kvant energije skalarnog polja. Iako skalarno polje nije statično, geometrija ostaje statična. Moguće je uporabiti i druge metode kako bi se izbjegla ograničenja o kojima govori Derrickov teorem, a koje su dane u [109, 110], te npr. 't Hooftov i Polyakovljev monopol u kvantnoj teoriji polja, no nećemo se njima baviti u ovom radu.

Za statičnu sfernosimetričnu konfiguraciju koristimo tetradu

$$h^a{}_\mu = \mathrm{diag}(e^{\Phi(r)}, e^{\Lambda(r)}, r, r \sin\theta), \tag{6.84}$$

te iz metričke kompatibilnosti slijedi metrika

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(e^{2\Phi(r)}, -e^{2\Lambda(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2\theta). \tag{6.85}$$

Za ovaj izbor tetrade nužno je uvesti odgovarajuću Lorentzovu (spinsku) koneksiju od kojih su neiščezavajuće komponente

$$A^{\hat{r}}{}_{\hat{\vartheta}\vartheta} = -A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{r}\vartheta} = -1, \qquad A^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}\varphi} = -\sin\vartheta, \qquad A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\vartheta}\varphi} = -\cos\vartheta. \tag{6.86}$$

Na taj način za konkretnu $f(T) = T + \alpha T^2/2$ funkciju jednadžbe gibanja postaju opet (6.1)

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu\nu}_{eff} = \frac{8\pi G}{c^4}(\Theta^{\mu\nu} + \tilde{\Theta}^{\mu\nu}), \tag{6.87}$$

gdje je Einsteinov tenzor (6.4) – (6.6)

$$\mathring{G}_t{}^t = r^{-2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1 - 2r\Lambda'\right)\right), \tag{6.88}$$

$$\mathring{G}_r{}^r = r^{-2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(1 + 2r\Phi'\right)\right), \tag{6.89}$$

$$\mathring{G}_\vartheta{}^\vartheta = \mathring{G}_\varphi{}^\varphi = r^{-1}\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(\left(\Lambda' - \Phi'\right)\left(1 + r\Phi'\right) - r\Phi''\right), \tag{6.90}$$

a doprinos $f(T)$ fluida dan je izrazima (6.11) – (6.13)

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_t{}^t = &-\alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 5\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right) - 4r^2\left(2\Phi'' + \Phi'^2\right)\right) \\ &+ 4r\Lambda'\left(3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi'\right)\Big),\end{aligned} \tag{6.91}$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_r{}^r = -\alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 2r\Phi' - 1\right)\left(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda + 3\right) + 2\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi'\right), \tag{6.92}$$

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_\vartheta{}^\vartheta = \frac{8\pi G}{c^4}\tilde{\Theta}_\varphi{}^\varphi = &\,\alpha r^{-4}\mathrm{e}^{-4\Lambda}\Big(\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\left(\left(\mathrm{e}^\Lambda + 3\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)^2\right. \\ &+ 2r\Big(\Phi'\left(\mathrm{e}^\Lambda - 2\mathrm{e}^{2\Lambda} - 4r^2\Phi'' + 1\right) - 2r^2\Phi'^3 + 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)r\Phi'' + 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)r\Phi'^2\Big)\Big) \\ &+ 2r\Lambda'\left(r\Phi'\left(2\left(2\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)r\Phi' - 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 3\right)\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)\right) - 3\left(\mathrm{e}^\Lambda - 1\right)^2\right)\Big).\end{aligned} \tag{6.93}$$

Treba još izraziti tenzor energije i impulsa za skalarno polje koje je dano definicijom (3.63)

$$h\Theta^a{}_\mu \equiv \frac{\delta(h\mathscr{L}_M)}{\delta h_a{}^\mu} \qquad \Longrightarrow \qquad \Theta^a{}_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial h_a{}^\mu} + h_\mu{}^a\mathscr{L}_M, \tag{6.94}$$

iz kojeg slijede jednadžbe

$$\Theta_t{}^t = e^{-2\Lambda}\phi'^2 + \phi^2(m^2 + e^{-2\Phi}\omega^2) = \rho, \tag{6.95}$$

$$\Theta_r{}^r = -e^{-2\Lambda}\phi'^2 + \phi^2(m^2 - e^{-2\Phi}\omega^2) = -p, \tag{6.96}$$

$$\Theta_r{}^r = e^{-2\Lambda}\phi'^2 + \phi^2(m^2 - e^{-2\Phi}\omega^2) = -q. \tag{6.97}$$

Međutim, akciju (6.81) treba varirati i po skalarnom polju iz koje dobivamo Klein-Gordonovu jednadžbu

$$\mathring{\nabla}^{\mu}\partial_{\mu}\phi - m^2\phi = 0, \tag{6.98}$$

te kad je raspišemo dobivamo

$$r\phi(\omega^2 e^{-2\Phi} - m^2) + e^{-2\Lambda}(\phi'(-r\Lambda' + r\Phi' + 2) + r\phi'' = 0. \tag{6.99}$$

Potrebne su nam tri nezavisne jednadžbe kako bi izračunali $\phi(r)$, $\Phi(r)$ i $\Lambda(t)$. U našem pristupu koristimo jednadžbe

$$\mathring{G}^{tt} = \frac{8\pi G}{c^4}(\Theta^{tt} + \tilde{\Theta}^{tt}), \qquad \mathring{G}^{\vartheta\vartheta} = \frac{8\pi G}{c^4}(\Theta^{\vartheta\vartheta} + \tilde{\Theta}^{\vartheta\vartheta}), \tag{6.100}$$

i jednadžbu skalarnog polja (6.99). Ovdje ćemo također zbog složenosti sustava koristiti numeričke metode.

6.3.2 Numerička procedura izračuna bozonskih zvijezda u $f(T)$ gravitaciji

Najviše derivacije koje sadrži sustav (6.100) su $\Phi''(r)$, $\Lambda'(r)$ i $\phi''(r)$. Primjećujemo da se za razliku od politropskog sustava u Klein-Gordonovoj jednadžbi nalazi $\Phi(r)$, te ne možemo smanjiti stupanj funkcije $\Phi(r)$. Iz toga proizlazi kako nam treba ukupno 5 početnih uvjeta nužnih za rješavanje Cauchijevog problema početnih vrijednosti. Također, uvodimo bezdimenzionalne veličine

$$\tilde{r} = mr, \qquad \Omega = \frac{\omega}{m}, \qquad \tilde{\alpha} = \alpha m^2, \qquad \sigma = \sqrt{4\pi G}\phi = \sqrt{4\pi}\phi/M_{Planck}, \tag{6.101}$$

te koordinatu

$$x = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}+1}, \tag{6.102}$$

kako bi suzili prostor s $0 \leq \tilde{r} \leq \infty$ na domenu $0 \leq x < 1$. Razvijamo jednadžbe u Laurentov red oko nule te proučavamo divergentne članove

$$\alpha\, \mathrm{e}^{-4\Lambda(0)}\left(\mathrm{e}^{\Lambda(0)} - 1\right)^3\left(\mathrm{e}^{\Lambda(0)} - 5\right) r^{-4} + \mathscr{O}\left(r^{-3}\right) = 0, \tag{6.103}$$

$$\alpha\, \mathrm{e}^{-4\Lambda(0)}\left(\mathrm{e}^{\Lambda(0)} - 1\right)^3\left(\mathrm{e}^{\Lambda(0)} + 3\right) r^{-4} + \mathscr{O}\left(r^{-3}\right) = 0, \tag{6.104}$$

iz čega zaključujemo da moramo nametnuti uvjet $\Lambda(0) = 0$. U sljedećem redu za $\Lambda(0) = 0$ dobivamo

$$4\Lambda'(0)\Big(1+2\alpha\Lambda'(0)\big(\Lambda'(0)-2\Phi'(0)\big)\Big)\,r^{-1}+\mathscr{O}\big(r^0\big)=0, \tag{6.105}$$

$$\big(\Lambda'(0)-\Phi'(0)\big)\Big(1+2\alpha\Lambda'(0)\big(\Lambda'(0)-2\Phi'(0)\big)\Big)\,r^{-1}+\mathscr{O}\big(r^0\big)=0, \tag{6.106}$$

$$\phi'(0)\,r^{-1}+\mathscr{O}\big(r^0\big)=0, \tag{6.107}$$

za koje mora biti $\Lambda'(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$ i $\phi'(0) = 0$, što su isti uvjeti koji vrijede i u analizi bozonskih zvijezda u općoj teoriji relativnosti [104]. Zanimljivo je primijetiti da u $f(T) = T + \alpha T^2/2$ postoji još jedna alternativna mogućnost, naime uvjet $\Phi'(0) = \Lambda'(0)/2 + 1/(4\alpha\Lambda'(0))$ također zadovoljava uvjete iščezavanja brojnika u gornjem razvoju uz r^{-1}. Ipak, taj uvjet ćemo odbaciti, s jedne strane nastojimo održati sličnost s općom teorijom relativnosti kako bi lakše usporedili rezultate, a s druge strane taj uvjet je problematičan u limesu $\alpha \to 0$. Potencijalno bi mogao biti zanimljiv u slučaju velikih α, no zbog velikih odstupanja u odnosu na opću teoriju relativnosti takva teorija ne bi prošla standardne testove Sunčevog sustava. Konačno dobivamo početne uvjete

$$\Lambda(0)=0, \qquad \Phi'(0)=\Lambda'(0)=\phi'(0)=0, \qquad \phi(0)=\phi_0, \tag{6.108}$$

gdje posljednji uvjet karakterizira gustoću u središtu zvijezde te parametar koji određuje raznolikost bozonskih zvijezda za zadanu $f(T)$ teoriju. Parametar frekvencije Ω je a priori nepoznanica čija je uloga svojstvene vrijednosti u problemu rubnih uvjeta. Dakle, oko točke $x = 0$ promatramo ponašanje jednadžbi polja koje rješavamo, na temelju tih podataka numerički evoluiramo rješenja do $x = 1$. Svojstvena vrijednost se nakon toga fino prilagođava tako da budu zadovoljeni rubni uvjeti

$$\phi(x=1)=0. \qquad \Lambda(x=1)=0, \qquad \Phi(x=1)=0, \tag{6.109}$$

što odgovara asimptotskom približavanju ravnom prostoru gdje nema gravitacijskih učinaka. Valja naglasiti kako postoji čitav skup svojstvenih vrijednosti koje zadovoljavaju isti početni uvjet σ_0, takav skup rješenja uključuje i pobuđena stanja. Također, već su dugo poznata rješenja s čvorovima u skalarnom polju i u slučaju opće teorije relativnosti [104]. Vrijednost Ω_0 definiramo kao osnovno (nepobuđeno) stanje za ono rješenje koje ne sadrži čvorove (nodes). U ovom radu analizirat ćemo samo nepobuđena stanja s obzirom na to da nakon dovoljno dugo vremena zvijezde prelaze u osnovno stanje, te se smatra da su pobuđena rješenja nestabilna [111, 112].

6.3.3 Masa i broj čestica bozonske zvijezde

Za razliku od politropskih zvijezda bozonske zvijezde nisu kompaktne, te metrika asimptotski postaje ravna. Ta činjenica nam omogućuje primjenu definicije iz opće teorije relativnosti, naime gravitacijsku masu u slici opće teorije relativnosti

$$M = 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho_{eff} dr = 4\pi \int_0^\infty r^2 (\rho + \tilde{\rho}) dr. \tag{6.110}$$

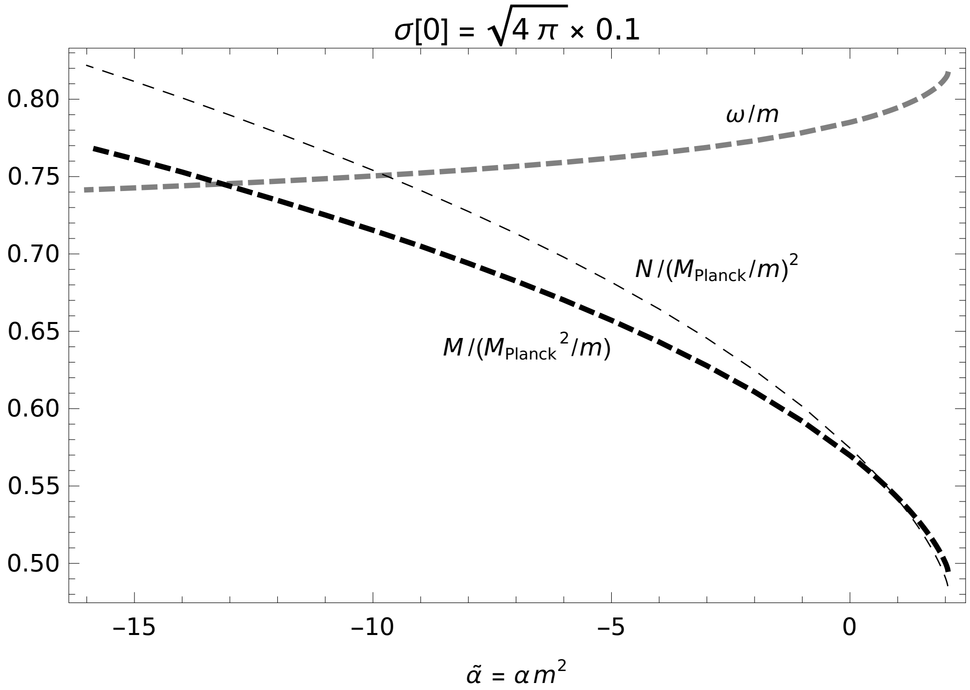
Također, proučit ćemo broj čestica bozonske zvijezde

$$N = \int j^0 h d^3x = 4\pi \int_0^\infty j^0 e^{\Lambda+\Phi} r^2 dr, \tag{6.111}$$

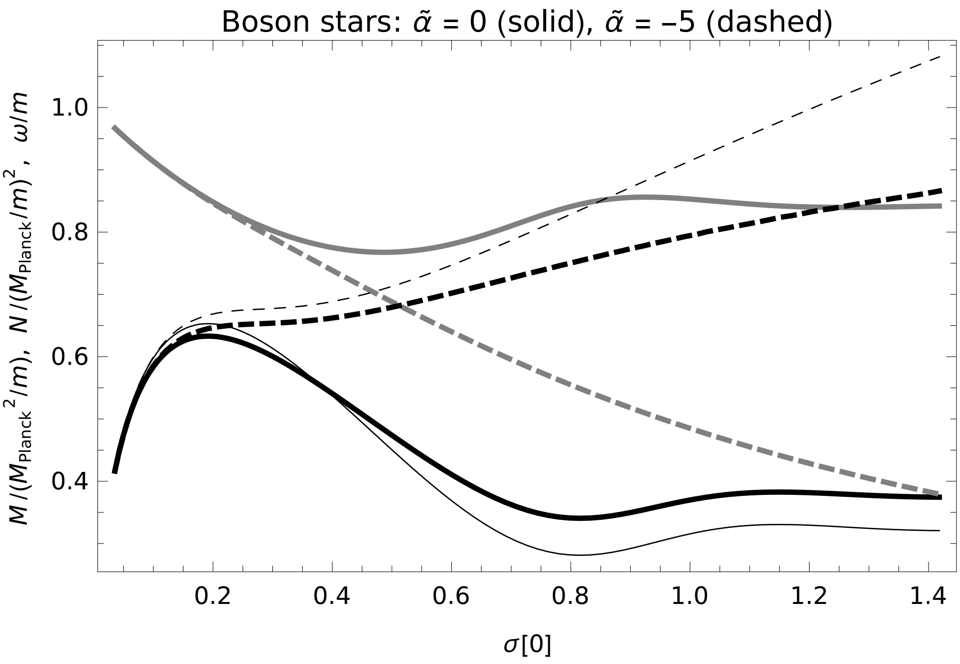
gdje je $h = \det[h^a{}_\mu]$, a j^0 je očuvana Noetherina struja posljedica $U(1)$ simetrije

$$j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) = 2e^{-2\Phi} \omega \phi^2 \delta_0^\mu. \tag{6.112}$$

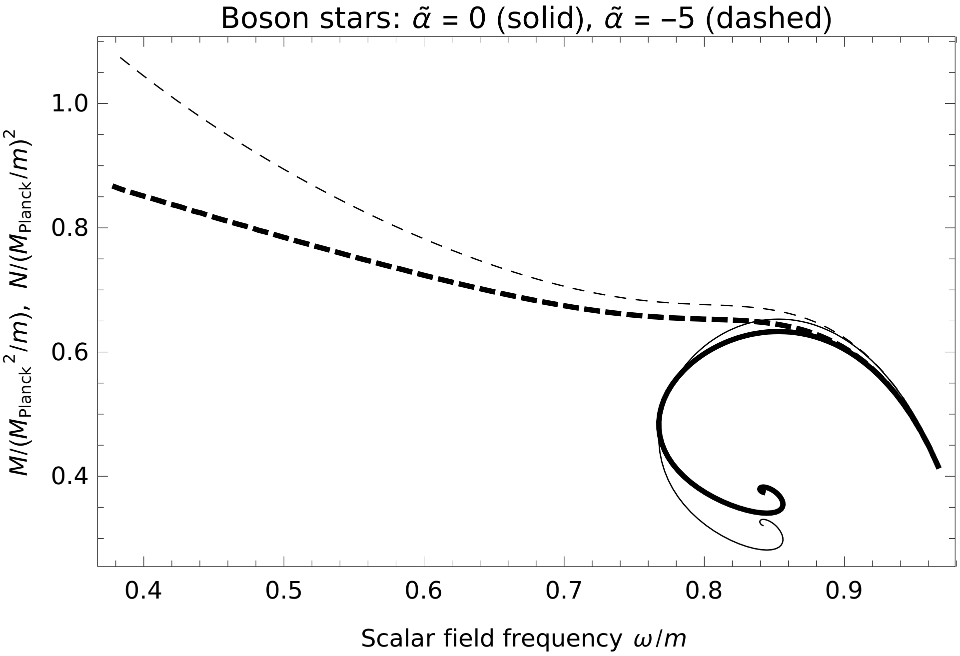
Kako bi usporedili učinke $f(T)$ gravitacije u odnosu na opću teoriju relativnosti najprije fiksiramo $\sigma(0) = \sigma_0 = \sqrt{4\pi}0.1$ te numerički računamo sustav jednadžbi gibanja za razne $\tilde{\alpha}$. Rezultati su vidljivi na slici 6.6. Vidljivo je da masa i broj čestica bozonske zvijezde rastu za negativnije vrijednosti $\tilde{\alpha}$, dok se masa i broj čestica smanjuju povećanjem vrijednosti $\tilde{\alpha}$ za $\sigma_0 = \sqrt{4\pi}0.1$. Zbog toga postoji mogućnost ostvarivanja astrofizičkih dimenzija bozonskih zvijezda ovisno o parametru $\tilde{\alpha} = \alpha m^2$, odnosno parametrima α i m. Taj trend je bio uočen i u slučaju politropskih zvijezda u istoj teoriji tipa $f(T) = T + \alpha T^2/2$. U blizini točke $\tilde{\alpha} = 2$ numeričko rješavanje nije bilo moguće provesti. Promotrimo slučaj fiksnog parametra $\tilde{\alpha} = -5$ za razne vrijednosti σ_0. Učinci su prikazani na slici 6.7. U slučaju opće teorije relativnosti povećanjem središnje gustoće skalarnog polja σ_0, masa i broj čestica opadaju, te ostvaruju maksimum negdje u blizini $\sigma_0 \approx 0.2$. Taj je rezultat poznat iz [104]. Red veličine masa takvih zvijezda u općoj teoriji relativnosti je $M_{max} \sim M_{Planck}^2/m$, te takve zvijezde zovemo "mini bozonskim zvijezdama". Tek uvođenjem samointerakcije skalarnog polja postoji mogućnost ostvarivanja većih masa koje mogu biti usporedive s fermionskim zvijezdama te je red veličine proporcionalan s korijenom parametra samointerakcije $M \sim \lambda^{1/2} M_{Chandrasekhar} = \lambda^{1/2} M_{Planck}^3/m_H^2$ gdje je m_H masa atoma vodika. Nasuprot tome zanimljiv je rezultat u slučaju modificirane $f(T) = T + \alpha T^2/2$ za negativne parametre $\tilde{\alpha}$, konkretno za $\tilde{\alpha} = -5$ povećanjem vrijednosti polja σ_0 u središtu zvijezde, masa i broj čestica rastu. Naša numerička simulacija dostiže vrijednost $\sigma_0 = 1.4$ te se ne može sa sigurnošću reći postoji li maksimum ili je on u beskonačnosti, no u svakom slučaju vidljivo je kako za širi spektar parametra σ_0 masa i broj čestica imaju trend rasta. Zbog toga postoji indikacija da masa bozonske zvijezde nije nužno ograničena, nego može poprimiti po volji velike vrijednosti. Taj rezultat je važan u kontekstu astrofizičkih posljedica skalarnih polja. Iz toga slijedi kako više nije nužno uvođenje samointerakcije ska-



Slika 6.6: Predstavljene su vrijednosti mase, broja čestica i frekvencije za razne $\tilde{\alpha}$ pri fiksnoj središnjoj vrijednosti polja $\sigma_0 = \sqrt{4\pi} \times 0.1$.



Slika 6.7: Predstavljene su vrijednosti mase, broja čestica i frekvencije skalarnog polja u ovisnosti o središnjoj gustoći skalarnog polja σ_0 za $\tilde{\alpha} = 0$ i $\tilde{\alpha} = -5$. Isprekidane linije predstavljaju masu, broj čestica i frekvenciju u $f(T)$ gravitaciji, te analogno tome pune linije predstavljaju mase, broj čestica i frekvenciju u općoj teoriji relativnosti. Deblje linije su mase u jedinicama M^2_{Planck}/m, tanje linije su broj čestica u M^2_{Planck}/m^2, a sive linije su frekvencije ω/m.



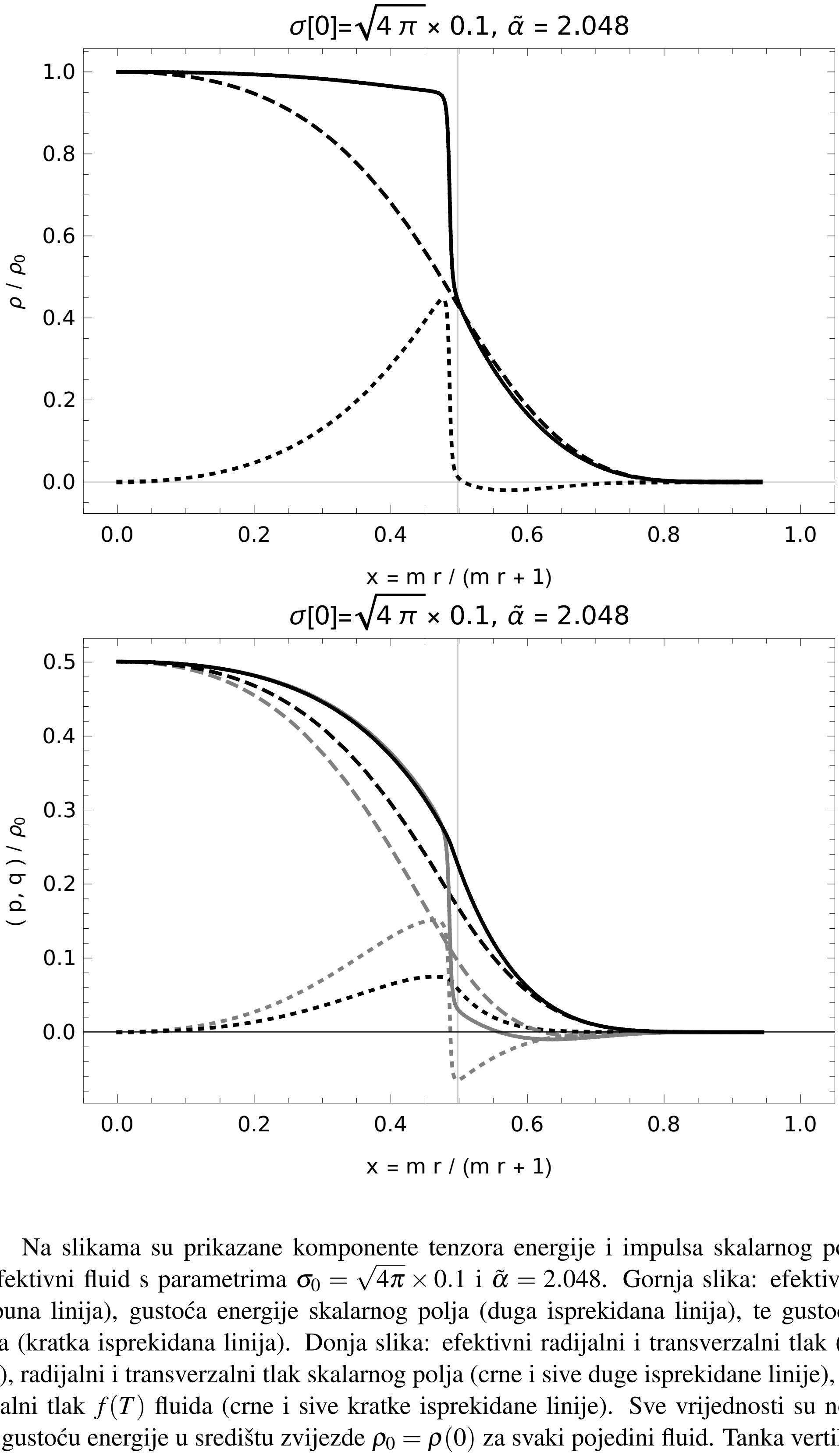
Slika 6.8: Predstavljene su vrijednosti mase i broja čestica u ovisnosti o frekvencijama ω/m za $\tilde{\alpha} = 0$ i $\tilde{\alpha} = -5$. Isprekidane linije predstavljaju masu i broj čestica u $f(T)$ gravitaciji, te analogno tome pune linije predstavljaju mase i broj čestica u općoj teoriji relativnosti. Deblje linije su mase u jedinicama M^2_{Planck}/m, a tanje linije su broj čestica u M^2_{Planck}/m^2.

larnog polja za postizanje astrofizičkih dimenzija bozonskih zvijezda, kao što to zahtjeva opća teorija relativnosti. Primjećujemo kako se na malim vrijednostima σ_0 rezultat opće teorije relativnosti i $f(T)$ gravitacije neznatno razlikuju do točke $\sigma_0 \approx 0.2$ koja predstavlja vrijednost pri kojoj se postiže maksimalna masa (broj čestica) bozonske zvijezde u općoj teoriji relativnosti, dok u $f(T)$ ta točka ne predstavlja nikakav poseban status te nastavlja trend rasta. S druge strane u općoj teoriji relativnosti postoji točka oko $\sigma_0 \approx 0.4$ gdje se masa i broj čestica sijeku, odnosno točka u kojoj vrijedi $M = Nm$. Ta se točka često spominje kao kritična točka stabilnosti [113, 114, 115, 116] ako shvatimo gravitacijsku masu kao zbroj masa konstituenata i energije vezanja. Jer u slučaju $M < Nm$ energija vezanja je negativna što ukazuje na stabilnost sustava, te je taj uvjet zadovoljen približno za $\sigma_0 < 0.4$, dok za $\sigma_0 \geq 0.4$ sustav bi mogao postati nestabilan. Taj problem ne postoji u $f(T) = T + \alpha T^2/2$ teoriji gravitacije jer je masa zvijezde uvijek manja od zbroja masa njenih konstituenata, dapače, rastom središnje vrijednosti skalarnog polja σ_0 ta razlika se još više povećava te energija vezanja postaje negativnija. Situacija je zanimljiva i sa stanovišta frekvencije (kvanta energije) $\Omega = \omega/m$ skalarnog polja gdje je u općoj teoriji njena vrijednost ograničena i blago oscilira, dok u $f(T)$ gravitaciji ona monotono pada. Taj rezultat se može interpretirati na način da je moguće konstruirati bozonske zvijezde s manjom energijom kvanta skalarnog polja, ali s velikim brojem "čestica". Na slici 6.8 je prikazana ovisnost masa i broja čestica zvijezde o frekvenciji skalarnog polja $\Omega = \omega/m$. Tu je jasnije vidljivo da je u općoj teoriji relativnosti kvant energije bozonskih zvijezda ograničen približno u intervalu $0.78 \lesssim \omega/m \lesssim 1$, dok u $f(T) = T + \alpha T^2/2$ za negativne parametre α frekvencija skalarnog polja nema ograničenja i može biti po volji mala. U slučaju pozitivnih vrijednosti α ovaj učinak nije uočen već se frekvencijski raspon smanjio. Samim time taj rezultat ne predstavlja nikakvu kvalitativnu razliku u odnosu na opću teoriju relativnosti.

6.3.4 Gustoća energije i tlak bozonske zvijezde

Kao i u slučaju politropskih objekata, i kod bozonskih zvijezda vrijedi proučiti ponašanje gustoće energije i tlakova kako bi se bolje shvatio učinak doprinosa dodatnog člana $T^2/2$ u akciji. U tom smislu proučavamo rješenja u tzv. slici opće teorije relativnosti gdje komponente tenzora $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ nazivamo "$f(T)$-fluidom". Slično kao kod politropskih zvijezda za pozitivne vrijednosti parametra α numeričko rješavanje ubrzo postaje nestabilno, te nije moguće provesti numerički račun nakon vrijednosti $\tilde{\alpha} \approx 2.05$. Na slikama 6.9 predstavljamo ponašanje gustoća energija i tlakova u kritičnom slučaju $\tilde{\alpha} = 2.048$ kako bi proučili moguće uzroke numeričke nestabilnosti. Opet, kao i u slučaju politropa za pozitivne vrijednosti parametra α efektivna gustoća energije $\tilde{\rho} + \rho$ do polovice zvijezde je približno konstantna, te približno na koordinati $x \approx 1/2$ vrijednost efektivne gustoće energije $\tilde{\rho} + \rho$ počinje naglo padati. Efektivna gustoća energije naglo pada do vrijednosti $\rho \approx \rho_0/2$ te nakon toga nastavlja monotono padati. S druge strane gustoća energije skalarnog polja ρ ima kvalitativno isto ponašanje kao u slučaju opće teorije relativnosti. Nasuprot tome, vrijednost gustoće energije $f(T)$ fluida $\tilde{\rho}$ kreće od nule u središtu zvijezde te njezina vrijednost raste s radijalnom koordinatom doprinoseći približno konstantnoj vrijednosti gustoće energije efektivnog fluida $\rho + \tilde{\rho}$. U blizini točke $x = 1/2$ vrijednost gustoće energije $f(T)$ fluida $\tilde{\rho}$ počinje strmo padati i poprimati negativne vrijednosti te se asimptotski približavati vakuumskom rješenju u $f(T)$ gravitaciji. Taj strmi prijelaz je vjerojatno uzrok numeričkoj nestabilnosti, te je slična onoj u slučaju politropa, iz čega zaključujemo kako su ti rezultati zajednički kompaktnim objektima u modificiranim teorijama gravitacije tipa $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Kao i u slučaju gustoće energije, radijalni i transverzalni tlak $f(T)$-fluida su također iščezavajući u središtu zvijezde. Oni laganim rastom postižu maksimum u blizini $x = 1/2 \implies r = 1/m$. Nakon toga strmo padaju i poprimaju negativne vrijednosti koje asimptotski teže vakuumskom rješenju. Možemo zaključiti kako je u modificiranim teorijama gravitacije tipa $f(T) = T + \alpha T^2/2$ doprinos članova $T^2/2$ zanemariv u odnosu na TEGR u okolini "prijelaznog područja" bozonskih zvijezda modeliranim skalarnim poljem, kao i u slučaju zvijezda modeliranim politropskom jednadžbom stanja. Osim toga vidljivo je iz slike 6.9 kako postoji točka $x \sim 1/2$ u kojoj gustoća energije $f(T)$ fluida ima nultočku (mijenja predznak). Na tom mjestu $\{tt\}$ komponenta jednadžbe gibanja (6.1) ima sljedeći oblik

$$G^{tt}\Big|_{x\sim 1/2} = 8\pi G\rho\Big|_{x\sim 1/2}. \tag{6.113}$$



Slika 6.9: Na slikama su prikazane komponente tenzora energije i impulsa skalarnog polja, $f(T)$-fluida te efektivni fluid s parametrima $\sigma_0 = \sqrt{4\pi} \times 0.1$ i $\tilde{\alpha} = 2.048$. Gornja slika: efektivna gustoća energije (puna linija), gustoća energije skalarnog polja (duga isprekidana linija), te gustoća energije $f(T)$ fluida (kratka isprekidana linija). Donja slika: efektivni radijalni i transverzalni tlak (crna i siva puna linija), radijalni i transverzalni tlak skalarnog polja (crne i sive duge isprekidane linije), te radijalni i transverzalni tlak $f(T)$ fluida (crne i sive kratke isprekidane linije). Sve vrijednosti su normirane u odnosu na gustoću energije u središtu zvijezde $\rho_0 = \rho(0)$ za svaki pojedini fluid. Tanka vertikalna linija na slikama označava vrijednost koordinate x pri kojoj je vrijednost gustoće energije $f(T)$ fluida jednaka nuli.

Nadalje, s obzirom da iz slike 6.6 možemo iščitati da za konfiguraciju prikazanu na slici 6.9 vrijedi $M \sim M_{Planck}^2/2m$, primijećujemo da se promjena predznaka gustoće energije $f(T)$ fluida događa pri vrijednosti radijalne koordinate $r \sim 1/m$ koja približno odgovara radijalnoj koordinati $r_{Sch} = 2M/M_{Planck}^2$ na kojoj bi se u općoj teoriji relativnosti nalazio horizont Schwarzchildove crne rupe čija masa odgovara masi M ovdje konstruirane bozonske zvijezde. Ova slutnja je rezultat numeričkog modeliranja brojnih konfiguracija, no ipak, na temelju toga ne možemo zaključiti i analitički potvrditi općenitu nužnost tih rezultata u svim slučajevima.

Jedno od ključnih pitanja u kontekstu bozonskih zvijezda je pitanje stabilnosti. Uz analizu odnosa energije vezanja i ukupne mase zvijezde potrebno je analizirati stabilnost zvijezde u kontekstu drugih teorija stabilnosti. Postoji nekoliko teorija koje se bave stabilnostima bozonskih zvijezda u općoj teoriji relativnosti. Najčešće provodimo linearnu analizu stabilnosti koja podrazumijeva proučavanje vremenske evolucije infinitezimalnih smetnji oko ravnotežnog položaja. U općoj teoriji relativnosti taj je postupak dan svojstvenom jednadžbom za linearne smetnje koja određuje normalne modove i frekvencije za danu konfiguraciju [117, 118]. Na temelju tih rezultata, te iz teorema o stabilnosti [114], može se zaključiti stabilnost zadane konfiguracije. Za viša energijska stanja (za pobuđena stanja), koristi se često Hamiltonov pristup analizi stabilnosti [119] gdje broj čestica nije nužno očuvan te je pokazano da su pobuđena stanja bozonske zvijezde u općoj teoriji relativnosti nestabilna [111]. Otkrićem teorije o kaosu [120] 60-ih godina nastao je veliki interes usmjeren ka proučavanju dinamičkih sustava. Jedna grana bifurkacijskih teorija je teorija katastrofe [121] iz koje su izvedeni rezultati stabilnosti bozonskih zvijezda koje se podudaraju s rezultatima linearnih analiza smetnji [122, 123]. Od najnovih analiza stabilnosti spomenut ćemo pojam konfiguracijske entropije, [124] koja je također u skladu s ranijim rezultatima analize stabilnosti bozonskih zvijezda. Međutim, najčešće je za takve analize potrebno imati vremenski ovisnu tetradu u $f(T)$ gravitaciji, koja trenutno još nije pronađena. U sljedećem poglavlju bavit ćemo se tim problemom kako bi detaljnije istražili kovarijantnu formulaciju $f(T)$ gravitacije u kontekstu vremenski i prostorno ovisne tetrade.

Poglavlje 7

Vremenski ovisna tetrada u $f(T)$ gravitaciji

Problem vremenske ovisnosti u sfernosimetričnim konfiguracijama predstavlja jedan od većih izazova u $f(T)$ gravitaciji. Ovdje će se proučiti mogućnosti i ograničenja postavljanja takvih jednadžbi gibanja, te će se pokušati jasnije razumjeti uzrok takvog ponašanja teorije.

7.1 Problem neinvarijantnosti jednadžbi gibanja u slučaju vremenske ovisnosti

Jedno od otvorenih pitanja u $f(T)$ gravitaciji je pitanje postojanja jednadžbi gibanja koje su invarijantne s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije tetrade u slučaju nestatičke sferne simetrije [125]. Primjene nestatičkih tetrada su nužne u razumijevanju i opisu gravitacijskog kolapsa u $f(T)$ teorijama gravitacije, no osim toga nemogućnost postavljanja kovarijantnih jednadžbi gibanja u općenitim geometrijama predstavlja veliki teorijski izazov u $f(T)$ teorijama gravitacije. Ako bi takva nemogućnost bila sadržana u samoj teoriji, a ne samo njena tehnička poteškoća, onda bi valjanost takve teorije bila dovedena u pitanje. Drugim riječima slijedilo bi to da se ne može konstruirati kovarijantna teorija $f(T)$ gravitacije. Najnoviji radovi koji se bave pitanjem vremenske i prostorne ovisnosti su uglavnom rađeni u području kozmologije [126, 127, 128]. U kozmologiji je potrebno uvesti prostornu ovisnost u metričkom tenzoru za općenito pozitivne ili negativne zakrivljene prostore na sljedeći način

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -\frac{a(t)^2}{1-kr^2}, -a(t)^2 r^2, -a(t)^2 r^2 \sin^2\vartheta), \tag{7.1}$$

gdje parametar k predstavlja odstupanje od ravnog prostora, odnosno definira pozitivnu zakrivljenosti za $k=+1$, odnosno negativnu zakrivljenost za $k=-1$. Na temu općenitih nestatičkih sfernosimetričnih prostora, čija je metrika oblika

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(A(r,t)^2, -B(r,t)^2, -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta), \tag{7.2}$$

za sada nisu objavljeni radovi koji se eksplicitno bave tom problematikom. U ovom poglavlju usredotočit ćemo se na konkretan oblik nestatičkih sfernosimetričkih geometrija te ćemo potražiti mogućnost postavljanja kovarijantnih jednadžbi gibanja u $f(T)$ gravitaciji.

7.2 Vremenski ovisne jednadžbe gibanja u $f(T)$ gravitaciji

7.2.1 FLRW metrike općenite zakrivljenosti

Krećemo od Friedmann–Lemaître–Robertson–Walkerove (FLRW) metrike koja predstavlja prvi istraženi oblik koji kombinira vremensku ovisnost (faktor skale) i prostornu ovisnost (član koji određuje pozitivnu, negativnu zakrivljenost ili ravni prostor). Metrika FLRW je

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -\frac{a(t)^2}{1-kr^2}, -a(t)^2 r^2, -a(t)^2 r^2 \sin^2 \vartheta), \tag{7.3}$$

te u skladu s tom metrikom možemo konstruirati tetradu jednostavnog oblika

$$h^a{}_\mu = \mathrm{diag}(1, -\frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}, -a(t)r, -a(t)r \sin \vartheta), \tag{7.4}$$

koja naravno, zadovoljava uvjet metričke kompatibilnosti

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu. \tag{7.5}$$

Jednadžbe gibanja možemo izračunati iz kovarijantne formulacije $f(T)$ gravitacije dane u [34] koja je izvedena u odjeljku 4.45

$$\frac{1}{h} f_T \partial_\nu (h S_a{}^{\mu\nu}) + f_{TT} S_a{}^{\mu\nu} \partial_\nu T - f_T T^b{}_{\nu a} S_b{}^{\nu\mu} + f_T A^b{}_{a\nu} S_b{}^{\nu\mu} + \frac{1}{4} f(T) h_a{}^\mu = \frac{8\pi G}{c^4} \Theta_a{}^\mu. \tag{7.6}$$

Primjećujemo da nam nedostaje Lorentzova (spinska) koneksija $A^b{}_{a\nu}$ za proizvoljan izbor tetrade (7.4), te jedan od glavnih izazova s kojima se susreće $f(T)$ gravitacija, kako bi očuvala kovarijantnost, jest upravo problem pronalaska Lorentzove koneksije za proizvoljan izbor tetrade. U [34] autori predlažu uvjet iščezavanja tenzora torzije

$$T^a{}_{\mu\nu}(h^a_{(r)\mu}, A^a{}_{b\mu}) = 0, \tag{7.7}$$

gdje je $h^a_{(r)\mu} = h^a{}_\mu|_{G\to 0}$ što predstavlja referentnu tetradu za koju, po pretpostavci, gravitacijski učinci iščezavaju, te je onda jedino što preostaje inercijska Lorentzova koneksija koja predstavlja neinercijske učinke kao posljedicu Lorentz transformirane tetrade. Tim pristupom odredili smo komponente inercijske Lorentzove koneksije (4.87). Referentna tetrada koja bi predstavljala iščezavanje tenzora torzije je

$$h^a_{(r)\mu} = \mathrm{diag}(1, -1, -r, -r\sin\vartheta), \tag{7.8}$$

koja je rezultat uvjeta $a \to 1$ i $k \to 0$. Za taj izbor dobivamo iste spinske koneksije kao u (4.87)

$$A^{\hat{r}}{}_{\hat{\vartheta}\vartheta} = -A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{r}\vartheta} = -1, \qquad A^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}\varphi} = -\sin\vartheta, \qquad A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\vartheta}\varphi} = -\cos\vartheta, \tag{7.9}$$

te koristivši ovakvu Lorentzovu koneksiju dobivamo jednadžbe gibanja

$$\begin{aligned} H_{tt} = \frac{1}{2r^4a^4}\Bigg(& 4r^2a^2 f_T\left(3r^2\dot{a}^2 + 2kr^2 + \sqrt{1-kr^2} - 1\right) + r^4a^4 f(T) + \\ & 16\left(kr^2\left(\sqrt{1-kr^2} - 3\right) - 4\sqrt{1-kr^2} + 4\right) f_{TT}\Bigg) = 8\pi G\Theta_{tt}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned} H_{rr} = \frac{1}{2r^2a^6}\Bigg(& \left(kr^2 - 1\right)\left(4r^2a^3\ddot{a}f_T + 16\dot{a}^2 f_{TT}\left(3r^2\dot{a}^2 + kr^2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{1-kr^2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{1-kr^2}} - 2\right) + \right. \\ & \left. 4a^2 f_T\left(2r^2\dot{a}^2 + kr^2 + \sqrt{1-kr^2} - 1\right) - 48r^2a\dot{a}^2\ddot{a}f_{TT} + r^2a^4 f(T)\right)\Bigg) = 8\pi G\Theta_{rr}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

$$H_{rt} = -\frac{8\dot{a}f_{TT}}{r^3a^5}\left(\sqrt{1-kr^2}\left(kr^2 + 2\sqrt{1-kr^2} - 2\right)\right) = 0, \tag{7.12}$$

$$H_{tr} = -\frac{8\dot{a}f_{TT}}{r^3a^5}\left(\left(kr^2 + \sqrt{1-kr^2} - 1\right)\left(-3r^2a\ddot{a} + 3r^2\dot{a}^2 + kr^2 + 2\sqrt{1-kr^2} - 2\right)\right) = 0. \tag{7.13}$$

Vidljivo je da su jednadžbe (7.12) i (7.13), odnosno antisimetričnost $H_{[\mu\nu]} = 0$, zadovoljene samo ako vrijedi $f(T) = T + konst.$ ili ako je prostor ravan $k = 0$. Time zaključujemo da (7.9) ne može biti dobar izbor Lorentzove koneksije za tetradu (7.4). Nedavno je predloženo [128] da se promatra Riemannov tenzor kao osnovni kriterij isključivanja gravitacijskog međudjelovanja, dakle ako koneksija zadovoljava uvjet iščezavanja Riemannovog tenzora tada možemo smatrati da nema gravitacijskog međudjelovanja. Drugim riječima možemo izračunati Riemannov tenzor za zadanu metriku, odnosno metrički kompatibilnu tetradu

$$\mathring{R}^a{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu \mathring{A}^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \mathring{A}^a{}_{b\nu} + \mathring{A}^a{}_{e\nu}\mathring{A}^e{}_{b\mu} - \mathring{A}^a{}_{e\mu}\mathring{A}^e{}_{b\nu}. \tag{7.14}$$

Pristup koji predlažu u [128] je pronaći uvjete metričkih funkcija pod kojima $\mathring{R}^a{}_{b\nu\mu}$ iščezava, na taj način je osigurana iščezavajuća zakrivljenost. S druge strane dobivene uvjete nad metričkim funkcijama uvrštavamo u Lorentzovu koneksiju $\mathring{A}^a{}_{b\mu}$ pri čemu ona sad prelazi u čisto inercijsku Lorentzovu koneksiju i predstavlja samo neinercijske učinke. Kao primjer može poslužiti upravo metrika (7.3)

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -\frac{a(t)^2}{1-kr^2}, -a(t)^2 r^2, -a(t)^2 r^2 \sin^2\vartheta), \tag{7.15}$$

čija je odgovarajuća metrički kompatibilna tetrada (7.4)

$$h^a{}_\mu = \mathrm{diag}(1, -\frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}, -a(t)r, -a(t)r\sin\vartheta). \tag{7.16}$$

Najprije iz metričkog tenzora računamo komponente Riemannovog tenzora

$$\mathring{R}^t{}_{rtr} = -\mathring{R}^t{}_{rrt} = \frac{\ddot{a}a}{1-kr^2}, \qquad \mathring{R}^t{}_{\vartheta t\vartheta} = -\mathring{R}^t{}_{\vartheta\vartheta t} = r^2 a\ddot{a}, \qquad \mathring{R}^t{}_{\varphi t\varphi} = -\mathring{R}^t{}_{\varphi\varphi t} = r^2\sin^2\vartheta a\ddot{a}, \tag{7.17}$$

$$\mathring{R}^i{}_{tti} = -\mathring{R}^i{}_{tit} = \frac{\ddot{a}}{a}, \qquad \mathring{R}^r{}_{\vartheta\vartheta r} = -\mathring{R}^r{}_{\vartheta r\vartheta} = -r^2(k+\dot{a}^2), \tag{7.18}$$

$$\mathring{R}^r{}_{\varphi\varphi r} = -\mathring{R}^r{}_{\varphi r\varphi} = \mathring{R}^\vartheta{}_{\varphi\varphi\vartheta} = -\mathring{R}^\vartheta{}_{\varphi\vartheta\varphi} = \mathring{R}^\varphi{}_{\vartheta\vartheta\varphi} = -\mathring{R}^\varphi{}_{\vartheta\varphi\vartheta} = -r^2\sin^2\vartheta(k+\dot{a}^2), \tag{7.19}$$

$$\mathring{R}^\vartheta{}_{r\vartheta r} = \mathring{R}^\vartheta{}_{rr\vartheta} = \mathring{R}^\varphi{}_{r\varphi r} = -\mathring{R}^\varphi{}_{rr\varphi} = \frac{k+\dot{a}^2}{1-kr^2}, \tag{7.20}$$

gdje indeks i opisuje prostorne koordinate, odnosno $i = r, \vartheta, \varphi$. Iz jednadžbe (2.19) Lorentzova koneksija koju dobivamo za zadanu tetradu (7.4) je

$$\mathring{A}^a{}_{b\mu} = h^a{}_\nu \partial_\mu h_b{}^\nu + h^a{}_\nu \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\rho\mu} h_b{}^\rho \equiv h^a{}_\nu \mathring{\nabla}_\mu h_b{}^\nu, \tag{7.21}$$

čije neiščezavajuće komponente glase

$$\mathring{A}^{\hat{t}}{}_{\hat{r}r} = \mathring{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{t}r} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{1-kr^2}}, \qquad \mathring{A}^{\hat{t}}{}_{\hat{\vartheta}\vartheta} = \mathring{A}^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{t}\vartheta} = \dot{a}r, \qquad \mathring{A}^{\hat{t}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = \mathring{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{t}\varphi} = \dot{a}r\sin\vartheta, \tag{7.22}$$

$$\mathring{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{\vartheta}\vartheta} = -\mathring{A}^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{r}\vartheta} = -\sqrt{1-kr^2}, \qquad \mathring{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -\mathring{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}\varphi} = -\sqrt{1-kr^2}\sin\vartheta, \tag{7.23}$$

$$\mathring{A}^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -\mathring{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\vartheta}\varphi} = -\cos\vartheta. \tag{7.24}$$

Tražimo uvjete metričkih funkcija za koje Riemannov tenzor iščezava, što odgovara dobivanju linearne koneksije $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ u kojoj iščezava zakrivljenost. Taj uvjet glasi

$$\ddot{a} = 0, \qquad \dot{a}^2 = -k. \tag{7.25}$$

Rješavanjem gornjih uvjeta dolazimo do

$$a(t) = \sqrt{-k}t. \tag{7.26}$$

Dobiveno rješenje uvrštavamo u Lorentzovu koneksiju (7.27) – (7.29) iz čega slijedi pripadna Lorentzova koneksija s elementima

$$A^{\hat{t}}{}_{\hat{r}r} = A^{\hat{r}}{}_{\hat{t}r} = \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{1-kr^2}}, \qquad A^{\hat{t}}{}_{\hat{\vartheta}\vartheta} = A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{t}\vartheta} = \sqrt{-k}r, \qquad A^{\hat{t}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{t}\varphi} = \sqrt{-k}r\sin\vartheta, \tag{7.27}$$

$$A^{\hat{r}}{}_{\hat{\vartheta}\vartheta} = -A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{r}\vartheta} = -\sqrt{1-kr^2}, \qquad A^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}\varphi} = -\sqrt{1-kr^2}\sin\vartheta, \tag{7.28}$$

$$A^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{\varphi}\varphi} = -A^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\vartheta}\varphi} = -\cos\vartheta. \tag{7.29}$$

Na taj način smo osigurali Lorentzovu koneksiju koja ne sadrži zakrivljenost, te predstavlja isključivo neinercijske doprinose za (7.4) izbor tetrade. Skalar torzije u ovom slučaju je

$$T = -\frac{6(\dot{a}-\sqrt{-k})^2}{a^2}, \tag{7.30}$$

a jednadžbe gibanja glase

$$H_{tt} = \frac{6f_T\dot{a}\left(\dot{a}-\sqrt{-k}\right)}{a^2} + \frac{f(T)}{2}, \tag{7.31}$$

$$H_{rr} = \frac{1}{2a^4}\left(kr^2-1\right)\left(6f_T\left(\sqrt{-k}-\dot{a}\right)^2 + 2f_T\left(2a\ddot{a}+\dot{a}^2+k\right) - \frac{48f_{TT}\left(\sqrt{-k}-\dot{a}\right)^2\left(a\ddot{a}+\sqrt{-k}\dot{a}-\dot{a}^2\right)}{a^2} + f(T)a^2\right), \tag{7.32}$$

te su nedijagonalni članovi jednaki nuli. Na taj način vidimo da su jednadžbe gibanja uistinu invarijantne s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije čija je matrica dana izrazom [128]

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} \sqrt{1-kr^2} & -\sqrt{-k}r & 0 & 0 \\ -\sqrt{-k}r\sin\vartheta\cos\varphi & \sqrt{1-kr^2}\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sqrt{-k}r\sin\vartheta\sin\varphi & \sqrt{1-kr^2}\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sqrt{-k}r\cos\vartheta & \sqrt{1-kr^2}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0, \end{pmatrix} \tag{7.33}$$

za koju dobivamo vlastitu tetradu (posebne tetrade za koju vrijedi $A^a_{b\mu} = 0$)

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{1-kr^2} & -\sqrt{-k}a/\sqrt{1-kr^2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-k}r\sin\vartheta\cos\varphi & a\sin\vartheta\cos\varphi & ra\cos\varphi\cos\vartheta & -ra\sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sqrt{-k}r\sin\vartheta\sin\varphi & -a\sin\vartheta\sin\varphi & ra\cos\vartheta\sin\varphi & ra\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sqrt{-k}r\cos\vartheta & a\cos\vartheta & -ra\sin\vartheta & 0, \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

za koju su jednadžbe gibanja ostale nepromijenjene, kao i skalar torzije.

7.2.2 FLRW-ova metrika s općenitom radijalnom funkcijom

Kako bi proučili postupak predlažen u [128] primijenit ćemo ga na nešto općenitiju geometriju npr.

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -\frac{a(t)^2}{1+f(r)}, -a(t)^2r^2, -a(t)^2r^2\sin^2\vartheta), \tag{7.35}$$

gdje je $f(r)$ neka općenita funkcija radijalne koordinate. Najjednostavnija metrički kompatibilna tetrada je

$$h^a{}_\mu = \mathrm{diag}(1, -\frac{a(t)}{\sqrt{1+f(r)}}, -a(t)r, -a(t)r\sin\vartheta). \tag{7.36}$$

Sljedeći korak je računanje Riemannovog tenzora te traganje pod kojim uvjetima je on jednak nuli. Traženi Riemannov tenzor je

$$\mathring{R}^t{}_{rtr} = -\mathring{R}^t_{rrt} = \frac{\ddot{a}a}{1-f(r)}, \qquad \mathring{R}^t{}_{\vartheta t\vartheta} = -\mathring{R}^t{}_{\vartheta\vartheta t} = r^2a\ddot{a}, \qquad \mathring{R}^t{}_{\varphi t\varphi} = -\mathring{R}^t{}_{\varphi\varphi t} = r^2\sin^2\vartheta a\ddot{a}, \tag{7.37}$$

$$\mathring{R}^i{}_{tti} = -\mathring{R}^i{}_{tit} = \frac{\ddot{a}}{a}, \qquad \mathring{R}^r{}_{\vartheta\vartheta r} = -\mathring{R}^r{}_{\vartheta r\vartheta} = -\frac{1}{2}\Big(2r\dot{a}^2 + \frac{df}{dr}\Big), \tag{7.38}$$

$$\mathring{R}^{r}{}_{\varphi\varphi r} = -\mathring{R}^{r}{}_{\varphi r\varphi} = \mathring{R}^{\vartheta}{}_{\varphi\varphi\vartheta} = -\mathring{R}^{\vartheta}{}_{\varphi\vartheta\varphi} = \mathring{R}^{\varphi}{}_{\vartheta\vartheta\varphi} = -\mathring{R}^{\varphi}{}_{\vartheta\varphi\vartheta} = -\frac{1}{2} - \sin^2\vartheta\left(2r\dot{a}^2 + \frac{df}{dr}\right), \tag{7.39}$$

$$\mathring{R}^{\vartheta}{}_{r\vartheta r} = \mathring{R}^{\vartheta}{}_{rr\vartheta} = \mathring{R}^{\varphi}{}_{r\varphi r} = -\mathring{R}^{\varphi}{}_{rr\varphi} = \frac{2r\dot{a}^2 + f'(r)}{2r - 2rf(r)}. \tag{7.40}$$

Uvjeti pod kojima Riemannov tenzor iščezava su

$$\ddot{a} = 0, \qquad \dot{a}^2 = -\frac{f(r)}{r^2}, \qquad \dot{a}^2 = -\frac{1}{2r}\frac{df}{dr}, \tag{7.41}$$

s obzirom na to da je $a(t)$ funkcija vremena, a $f(r)$ prostorne koordinate r tada su gornji uvjeti zadovoljeni jedino uz $f(r) = kr^2$, što odgovara kozmološkom slučaju općenite zakrivljenosti. Tada slijedi da je izraz za Lorentzovu koneksiju dan kao u (7.27) – (7.29). Računamo antisimetrični dio jednadžbe gibanja i dobivamo

$$\begin{aligned}
H_{[tr]} = \frac{1}{r^3 a^5 \sqrt{f(r)+1}\,(kr^2+1)^{3/2}} 4 f_{TT} \Bigg(&(f(r)+1)\left(\sqrt{k} - \dot{a}\right)\left(\sqrt{k} r^3 \dot{a}\Big(\left(kr^2+1\right) f'(r) - \right.\\
&2kr\Big) - 2f(r)\Big(k^{3/2} r^4 \dot{a} + kr^2\left(\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} - 3\right) + \sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} - \\
&2k^2r^4 - 2\Big) - 2k^2 r^5 f'(r) - 3kr^3 f'(r) + r\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} f'(r) + \\
&kr^3\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} f'(r) - rf'(r) - 4kr^2\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} - \\
&\left. 4\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} + 4k^2r^4 + 6kr^2 + 4\right) - \\
2\left(kr^2+1\right)&\left(\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} - f(r) - 1\right)\Bigg(\sqrt{k} r^2 a\ddot{a}\left(2\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} + f(r) + 1\right) + \\
&3r^2\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1}\,\dot{a}^3 - 2\sqrt{k} r^2 \dot{a}^2\left(2\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} + f(r) + 1\right) + \\
&\dot{a}\Big(-3r^2 a\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1}\,\ddot{a} + f(r)\left(-\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} + 4kr^2 + 2\right) - \\
&2\sqrt{f(r)+1}\sqrt{kr^2+1} + 4kr^2 + 2\Big)\Bigg)\Bigg),
\end{aligned} \tag{7.42}$$

koja ne iščezava, te time narušava lokalnu Lorentzovu invarijantnost jednadžbi gibanja. Gornja jednadžba je nula samo ako je $f(r) = kr^2$, odnosno ograničena je samo na FLRW metriku općenite zakrivljenosti. Time niti kriterij iščezavanja Riemannovog tenzora ne osigurava invarijantnost jednadžbi gibanja s obzirom na izbor tetrade u kovarijantnim formulacijama teorije gravitacije tipa $f(T)$.

7.2.3 Pristup vremenski ovisnih tetrada u vlastitim sustavima

Cilj nam je pronaći vlastitu tetradu kako bismo zadovoljili antisimetrični dio jednadžbe gibanja $H_{[\mu\nu]} = 0$. Postupak je identičan postupcima u ranijim formulacijama temeljenima na načelu apsolutnog paralelizma gdje se nastoji pronaći “dobra" tetrada. Prednost ovih analiza je ta što je Lorentzova koneksija nula, te je u nekim slučajevima taj postupak jednostavniji. Ovaj postupak se u literaturi često spominje kao rješavanje sustava u Weitzenböckovom baždarenju [126]. Ipak, u tom pristupu nešto je teže pronaći metrički kompatibilnu tetradu, te njome računati jednadžbe gibanja. No, jednom kada se pronađe vlastita tetrada, tada možemo Lorentzovom transformacijom ponovno prijeći u sustav s neiščezavajućom Lorentzovom koneksijom, no jednostavnijom tetradom.

Problematičan član koji narušava simetričnost jednadžbi gibanja u $f(T)$ gravitaciji dan je jednadžbom (4.48)

$$H^{[\mu\nu]} = f_{TT} S^{[\nu\mu]\alpha} \partial_\alpha T = 0, \tag{7.43}$$

gdje je ključno razumijeti ponašanje superpotencijala $S^{\nu\mu\alpha}$. Superpotencijal sadrži antisimetričnost u zadnja dva indeksa $S^{\nu\mu\alpha} = -S^{\nu\alpha\mu}$. Osim te simetrije možemo zaključiti da je najlakše zadovoljiti gornji uvjet uz

$$S^{[\nu\mu]t} = 0, \qquad S^{[\nu\mu]r} = 0. \tag{7.44}$$

Članovi $S^{[\nu\mu]\vartheta}$ i $S^{[\nu\mu]\varphi}$ ne moraju nužno iščezavati jer, po pretpostavci skalar torzije ne ovisi o ϑ i φ, iz čega će članovi u kontrakciji $S^{[\nu\mu]\vartheta}\partial_\vartheta T$ i $S^{[\nu\mu]\varphi}\partial_\varphi T$ iščeznuti. Superpotencijal ima upravo takvo ponašanje u slučajevima statične sferne simetrije gdje je dovoljno zadovoljiti $S^{[\nu\mu]r} = 0$.

U skladu s gornjim pretpostavkama krećemo od najopćenitije tetrade u Weitzenböckovom baždarenju [129]

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ C_3 \sin\vartheta\cos\varphi & C_4 \sin\vartheta\cos\varphi & C_5\cos\varphi\cos\vartheta - C_6\sin\varphi & -\sin\vartheta(C_5\sin\varphi + C_6\cos\vartheta\cos\varphi) \\ C_3\sin\vartheta\sin\varphi & C_4\sin\vartheta\sin\varphi & C_5\sin\varphi\cos\vartheta - C_6\cos\varphi & \sin\vartheta(C_5\cos\varphi - C_6\cos\vartheta\sin\varphi) \\ C_3\cos\vartheta & C_4\cos\vartheta & -C_5\sin\vartheta & C_6\sin^2\vartheta, \end{pmatrix} \tag{7.45}$$

gdje su $C_i(t,r)$ funkcije vremena i prostorne koordinate r. Gore navedena tetrada je metrički kompatibilna s metrikom

$$ds^2 = (C_1^2 - C_3^2)dt^2 - 2(C_3C_4 - C_1C_2)dtdr - (C_4^2 - C_2^2)dr^2 - (C_5^2 + C_6^2)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \tag{7.46}$$

gdje zahtijevamo

$$C_5(r)^2 + C_6(r)^2 = r^2, \qquad C_3C_4 - C_1C_2 = 0, \tag{7.47}$$

kako bi dobili općenitu vremenski ovisnu sfernosimetričnu metriku

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(A(t,r), -B(t,r), -r^2, -r^2\sin^2\vartheta). \tag{7.48}$$

Najprije možemo provjeriti slučaj statičke sferne simetrije u kojima funkcije $C_i(r)$ ovise samo o radijalnoj koordinati r. U tom slučaju potrebno je zadovoljiti uvjet $S^{[\nu\mu]r} = 0$. Neiščezavajuće komponente su tada

$$S^{rtr} = -\frac{2C_3(r)C_5(r)}{(C_5(r)^2 + C_6(r)^2)(C_2(r)C_3(r) - C_1(r)C_4(r))^2}, \tag{7.49}$$

$$S^{\vartheta\varphi r} = \frac{C_1(r)C_6(r)}{\sin\vartheta\,(C_5(r)^2 + C_6(r)^2)^2(C_2(r)C_3(r) - C_1(r)C_4(r))}, \tag{7.50}$$

iz čega dobivamo da mora vrijediti ili $C_3 = 0$ i $C_6 = 0$ ili $C_5 = 0$ i $C_1 = 0$. Uz prigodan izbor ostalih funkcija, ovi nas slučajevi dovode do poznatih tetrada u kojima Lorentzova koneksija iščezava (4.88).

Pokušat ćemo primijeniti istu metodu u slučaju vremenski ovisne sferne simetrije gdje proučavamo uvjete (7.44). Nakon kraćeg računa dobivamo

$$S^{trt} = \frac{-2C_4C_5 + 2C_5'C_5 + 2C_6C_6'}{(C_5^2 + C_6^2)(C_2C_3 - C_1C_4)^2}, \qquad S^{rtr} = \frac{-2C_3C_5}{(C_5^2 + C_6^2)(C_2C_3 - C_1C_4)^2}, \tag{7.51}$$

$$S^{\varphi\vartheta t} = -S^{\vartheta\varphi t} = \frac{C_2C_6}{\sin\vartheta\,(C_5^2 + C_6^2)(C_2C_3 - C_1C_4)^2}, \tag{7.52}$$

$$S^{\varphi\vartheta r} = -S^{\vartheta\varphi r} = -\frac{C_1C_6}{\sin\vartheta\,(C_5^2 + C_6^2)(C_2C_3 - C_1C_4)^2}. \tag{7.53}$$

Posljednja dva izraza mogu iščeznuti u slučaju $C_6 = 0$ ili $C_1 = C_2 = 0$, međutim funkcije C_1 i C_2 ne smiju istovremeno biti nula jer bi nazivnik u (7.51) divergirao. Stoga uzimamo uvjet $C_6 = 0$ iz čega slijedi da je $C_5 = r$ iz (7.47). Na taj način slijedi da izrazi (7.51) mogu iščeznuti samo ako su istovremeno funkcije $C_3 = C_4 = 0$, međutim taj odabir uzrokuje problematično ponašanje nazivnika (7.51) te bi, također iz (7.47) uslijedilo da funkcija C_1 ili funkcija C_2 mora iščeznuti. Ova metoda se, nažalost opet pokazuje kao neadekvatna u traganju vremenski ovisne tetrade u modificiranim teorijama gravitacije tipa $f(T)$. Iz toga slijedi da je nužno riješiti sustav

$$f_{TT}S^{[\mu\nu]\rho}\partial_\rho T = 0, \tag{7.54}$$

kako bi se dobile smislene jednadžbe gibanja. Spomenute jednadžbe gibanja, kako je pokazano u gornjim analizama, nije moguće dobiti algebarskim putem nego je potrebno riješiti nelinearne diferencijalne jednadžbe za pomoćne funkcije C_i. Također, nije jasno gubi li se neki broj stupnjeva slobode u izračunu metričkih funkcija kako bi se zadovoljila simetričnost jednadžbi gibanja.

Možemo zaključiti kako se problem Lorentzove neinvarijantnosti jednadžbi gibanja nije u potpunosti riješio kovarijantnom formulacijom $f(T)$ gravitacije te da se primjer vremenski ovisne tetrade pokazao jednako problematičnim kao i u Weitzenböckovom baždarenju. Uvođenjem Lorentzove (spinske) koneksije u $f(T)$ teorijama činilo se da je postavljena kovarijantna formulacija $f(T)$ teorija gravitacije. Taj se pristup pokazao ispravnim u slučaju statičke sferne simetrije (4.85) s rezultirajućim jednadžbama gibanja (4.95) – (4.97) koje su se koristile u ovom radu. Međutim, slučajevi geometrija danih oblikom (7.35) i tetradom oblika (7.45) služe kao protuprimjeri. Jednadžbom (7.42) pokazano je kako nije zadovoljen uvjet iščezavanja antisimetričnog dijela jednadžbe gibanja (7.43). U TEGR-u taj problem nije vidljiv na razini jednadžbi gibanja jer je $f_{TT} = 0$ čime je uvjet (7.43) zadovoljen, a jednadžbe gibanja su invarijantne s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije tetrade. Gore navedene poteškoće upućuju na dublji problem s kojim se suočavaju modificirane teorije gravitacije tipa $f(T)$.

Osim problema nalaženja jednadžbi gibanja u kojima je prisutna vremenska ovisnost, $f(T)$ teorije gravitacije se susreću s još nekim neistraženim područjima. U preglednom članku [130] ukratko su opisani izazovi i perspektive s kojima se susreću teorije gravitacije temeljene na torziji. Spomenut ćemo neke od najvažnijih:

- Problem nalaženja egzaktnih rješenja crnih rupa: Do sada su pronađena numerička i perturbativna rješenja u nekim posebnim slučajevima $f(T)$ teorija, no za sada nisu pronađena egzaktna rješenja crnih rupa. U odjeljku 5.1.1 ovog rada pronađena su egzaktna vakuumska rješenja za slučajeve $f(T)$ gravitacija oblika (5.12), no takve teorije, kao što je ranije rečeno, ne možemo smatrati valjanim teorijama gravitacije.
- Problem nalaženja općenitih aksijalno simetričnih jednadžbi gibanja: U [131] pronađeni su samo posebni slučajevi aksijalno simetričnih rješenja, odnosno jednadžbe gibanja koje opisuju sporo rotirajuće crne rupe. Ipak, nedostaju jednadžbe gibanja koje bi opisivale brzo rotirajuće crne rupe.
- Galaktičke rotacijske krivulje: U ovom polju ima vrlo malo radova, tek npr. [132] gdje su pronađena generička rješenja te nije provedena usporedba sa stvarnim astrofizičkim promatranjima.
- Singulariteti: U teorijama temeljenima na zakrivljenosti analiza singulariteta se najčešće provodi pomoću Kretschmannovog skalara, međutim u teleparalelnim teorijama singu-

lariteti mogu imati različita svojstva od onih u teorijama temeljenima na zakrivljenosti [133]. Zbog toga postoji potreba za konstrukcijom novih skalara s pomoću kojih bismo u teleparalelnim teorijama proučili takve nove tipove singulariteta.

- 3+1 numeričke simulacije: U $f(T)$ teorijama gravitacije za sada nije korišten 3+1 numerički formalizam koji potencijalno može poboljšati numeričko riješavanje jednadžbi u teorijama gravitacije [134].

Poglavlje 8

Zaključak

U ovom radu smo proučavali modificiranu teoriju gravitacije tipa $f(T)$ koja je osnovana na torziji, a ne na zakrivljenosti. Tu smo se prije svega bavili analizom sfernosimetričnih konfiguracija u kojima nalazimo vakuumska rješenja kao i neke primjere nevakuumskih rješenja. U analizu nevakuumskih rješenja ulaze sfernosimetrični objekti modelirani politropskom jednadžbom stanja kao i bozonske zvijezde.

Teorija koju smo koristili je tzv. kovarijantna formulacija $f(T)$ gravitacije gdje je, kako je do sada prikazano, očuvana lokalna Lorentzova invarijantnost u lagranžijanu, kao i u jednadžbama gibanja s obzirom na izbor tetrade.

Proučavanjem vakuumskih rješenja pronašli smo uvjete nad funkcijama $f(T)$ pod kojima je skup vakuumskih rješenja beskonačan. Takve teorije ne prihvaćamo kao valjane teorije te nam zadani uvjeti mogu poslužiti kao jedan od dodatnih testova uz standardne testove Sunčevog sustava. Time smo se ograničili na konkretan oblik $f(T) = T + \alpha T^2/2$ koji potencijalno može ostati valjana modifikacija s obzirom na gore navedene testove. Također, uvedeni kvadratni član u skalaru torzije predstavlja prvi član u Taylorovom razvoju neke hipotetski "prave" funkcije $f(T)$ koja bi pravilno prikazivala učinke kvantne gravitacije. Naravno, ovakav stav očekuje postojanje neke "prave" kvantnogravitacijske funkcije $f(T)$, međutim stav autora ovog rada jest da funkcija $f(T)$ može predstavljati samo efektivne učinke kvantne gravitacije. Kvantizacija gravitacijskog međudjelovanja će vjerojatno zahtijevati temeljnu promjenu razumijevanja prostora i vremena kao i materije.

Nakon analitičkog računa vakuumskih jednadžbi gibanja usredotočili smo se na perturbativnu analizu za konkretnu funkciju oblika $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Naime, za taj oblik nije bilo moguće pronaći analitička rješenja te je prvi korak bio proučiti perturbativno ponašanje. Dobiveno ponašanje je slično Schwarzchildovom rješenju na velikim udaljenostima od središta simetrije, dok u blizini horizonta dobivena rješenja počinju znatno odstupati od Schwarzchildovog. Konačno, kako bi se oplemenilo perturbativno rješenje, posegnuli smo za numeričkim rješavanjem jednadžbi gibanja u vakuumu. Numerička rješenja pokazuju znatna kvalitativna odstupanja od

Schwarzchildovog rješenja ovisno o parametru α. Za slučajeve $\alpha > 0$ i $\alpha < 0$ Riccijev tenzor i Kretschmannov skalar divergiraju, odnosno numeričke rutine ukazuju na prisutne beskonačnosti. Zanimljivo je što se za $\alpha/M^2 < -4.2$ numerička integracija uspijeva provesti do samog središta simetrije, gdje metrika ostaje konačna, no opet u toj točki Riccijev tenzor i Kretschmannov skalar divergiraju što ukazuje na mogućnost postojanja golog singulariteta.

U daljnjim poglavljima analiza teorije gravitacije tipa $f(T)$ se usredotočila na nevakuumska rješenja – politropske i bozonske zvijezde. U tim analizama koristili smo numeričke metode zbog kompleksnosti jednadžbi gibanja u tim teorijama. Kod politropskih zvijezda ograničili smo se na analizu s adijabatskim eksponentom $\Gamma = 2$ koji ujedno predstavlja ektremni slučaj pri čemu su osigurani uobičajeni energijski uvjeti materije. Zbog nejasnog statusa definicije mase objekata konačnih polumjera u teorijama tipa $f(T)$ koristili smo ukupan broj čestica u ovisnosti o polumjeru zvijezde kao mjeru svojstava politropskih zvijezda. Za pozitivne vrijednosti $\alpha > 0$ rješenja se kvantitativno znatno razlikuju u odnosu na politropske zvijezde u općoj teoriji relativnosti, dok je kvalitativno ponašanje ostalo isto. S druge strane, za negativne vrijednosti $\alpha < 0$ rješenja se počinju i kvalitativno razlikovati od ostalih slučajeva gdje je izostala točka koja predstavlja konfiguraciju s maksimalnim brojem čestica. Na taj način politropske zvijezde nisu ograničene brojem čestica nego mogu po volji rasti. Ipak, treba voditi računa o mogućem postojanju nekih drugih fizikalnih razloga koji ograničavaju postojanje takvih zvijezda, kao npr. nestabilnost.

Za pozitivne vrijednosti α dobiveno je zanimljivo ponašanje Einsteinovog tenzora čije su komponente približno konstantne do polovice polumjera zvijezde. Nakon toga primjećujemo nagli, gotovo okomit pad komponenata Einsteinovog tenzora što je jedan od pokazatelja numeričke nemogućnosti daljnje integracije za veće vrijednosti α. Zaključujemo kako se politropske zvijezde u gravitaciji tipa $f(T)$ znatno razlikuju od onih u općoj teoriji relativnosti, no ostaje pitanje statusa definicije mase konačnih objekata kao i stabilnosti tih konfiguracija.

Nakon modela politropskih zvijezda proučili smo bozonske zvijezde modelirane kompleksnim skalarnim poljem. Ovdje smo se također poslužili numeričkim metodama kako bi riješili jednadžbe gibanja te smo proučavali isti oblik teorije gravitacije $f(T) = T + \alpha T^2/2$. Tražili smo rješenja isključivo u osnovnom stanju bozonske zvijezde te smo proučavali odnose masa i broja čestica u ovisnosti o gustoći skalarnog polja u središtu zvijezde. Također, promotrili smo odnos masa i broja čestica u ovisnosti o parametru α koji predstavlja odstupanje od opće teorije relativnosti. Dobivena rješenja pokazuju kako za pozitivne vrijednosti $\alpha > 0$ zvijezda postaje manja od onih zvijezda u općoj teoriji relativnosti. Međutim, u slučaju $\alpha < 0$ mase i brojevi čestica monotono rastu s povećanjem središnje gustoće $\sigma(0)$, kao i povećanjem vrijednosti parametra $-|\alpha|$. Time je postignuta mogućnost astrofizičkih dimenzija bozonskih zvijezda i u slučaju bez samointerakcije skalarnog polja. Zanimljivo je promotriti i ponašanje kvanta energije skalarnog polja ω gdje je u slučaju $\alpha < 0$ pokazano da kvant energije polja može poprimiti bilo koju vrijednost za razliku od slučaja u općoj teoriji relativnosti gdje je parametar ω ograničen.

Konačno, uvjerili smo se da je ponašanje efektivnih gustoća energija i tlakova vrlo slično kao u slučaju politropskih zvijezda za $\alpha > 0$ te ovaj rezultat pokazuje neka zajednička svojstva proučenih konfiguracija.

Za proučavanje stabilnosti zvijezda potrebno je pronaći vremenski ovisnu tetradu koja omogućuje lokalnu Lorentzovu invarijantnost jednadžbi gibanja. Takva tetrada još nije pronađena što predstavlja jedan od glavnih izazova u teorijama gravitacije tipa $f(T)$. Tako smo u poglavlju 7. promotrili mogućnosti dolaska do takve tetrade te detaljnije proučili uvjete Lorentzove koneksije za taj slučaj.

Modificirane teorije gravitacije predstavljaju valjanu alternativu općoj teoriji relativnosti u opisu svemira, kao i u opisu kompaktnih objekata. Također, u pristupu modifikacije opće teorije relativnosti pokazalo se kako je modifikacija moguća i u teorijama gravitacije temeljenima na torziji, a ne samo na zakrivljenosti. Tako je, naizgled, status torzije u odnosu na zakrivljenost postalo samo pitanje konvencije, ipak u samoj modifikaciji teorija primijetili smo važnu razliku između $f(T)$ i $f(R)$ teorija gravitacije. Ta je razlika najizraženija u narušenju lokalne Lorentzove invarijantnosti u $f(T)$ gravitaciji koja se nastoji vratiti u kovarijantnim formulacijama te teorije. Iako je veliki napredak postignut postavljanjem kovarijantne formulacije gravitacije tipa $f(T)$, ipak ostaju neka od važnijih otvorenih pitanja u tim teorijama. Jedan od najvećih izazova predstavlja konstrukcija vremenski ovisnih jednadžbi gibanja koje bi bile invarijantne s obzirom na izbor tetrade. Uvođenje torzije u formulaciji teorije gravitacije predstavlja značajan korak k razumijevanju pojmova prostora i vremena kao i gravitacijskog međudjelovanja. Time je svakako vrijedno istražiti takve teorije čija je perspektiva značajna u razumijevanju Kozmosa u svojoj cjelini.

Literatura

[1] A. Einstein, "Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus," *Preussische Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Sitzungsberichte* (1928) 217–221.

[2] A. Einstein, "Einheitliche Feldtheorie," *Preussische Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Sitzungsberichte* (1929) 2–7.

[3] C. Möller, *The Theory Of Relativity, Osmania University: University of Chicago Press*. 1952.

[4] A. Zakharov, V. Zinchuk, and V. Pervushin, "Tetrad formalism and reference frames in general relativity," *Physics of Particles and Nuclei* **37** (01, 2006) 104–134.

[5] É. Cartan, "Sur les variétés á connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxiéme partie)," *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **3e série, 42** (1925) 17–88. `http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.761/`.

[6] D. W. Sciama, "The physical structure of general relativity," *Rev. Mod. Phys.* **36** (Jan, 1964) 463–469. `https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.463`.

[7] T. W. B. Kibble, "Lorentz invariance and the gravitational field," *Journal of Mathematical Physics* **2** no. 2, (1961) 212–221, `https://doi.org/10.1063/1.1703702`. `https://doi.org/10.1063/1.1703702`.

[8] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester, "General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects," *Rev. Mod. Phys.* **48** (Jul, 1976) 393–416. `https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.48.393`.

[9] F. Cabral, F. S. N. Lobo, and D. Rubiera-Garcia, "Einstein–Cartan–Dirac gravity with $U(1)$ symmetry breaking," *Eur. Phys. J. C* **79** no. 12, (2019) 1023, `arXiv:1902.02222 [gr-qc]`.

[10] C. Möller, "Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity," *Annals of Physics* **12** no. 1, (1961) 118–133. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491661901488`.

[11] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity*, vol. 173. Springer, Dordrecht, 2013.

[12] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, "Teleparallelism: A New Way to Think the Gravitational Interaction," *Ciencia Hoje* **55** (2015) 32, `arXiv:1506.03654 [physics.pop-ph]`.

[13] J. P. Ostriker and P. J. E. Peebles, "A Numerical Study of the Stability of Flattened Galaxies: or, can Cold Galaxies Survive?," *Astrophys. J.* **186** (Dec., 1973) 467–480.

[14] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," *The Astronomical Journal* **116** no. 3, (Sep, 1998) 1009–1038. `https://doi.org/10.1086/300499`.

[15] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, "First-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters," *The Astrophysical Journal Supplement Series* **148** no. 1, (Sep, 2003) 175–194. `https://doi.org/10.1086/377226`.

[16] H. S. William, "The occurrence of singularities in cosmology," *Proc. R. Soc. Lond.* **A294** (1966) 511–521.

[17] H. S. William, "The occurrence of singularities in cosmology III Causality and singularities," *Proc. R. Soc. Lond.* **A300** (1967) 187–201.

[18] R. Penrose, "Gravitational collapse and space-time singularities," *Phys. Rev. Lett.* **14** (Jan, 1965) 57–59. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57`.

[19] A. H. Guth, "Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems," *Phys. Rev. D* **2** no. 23, (1981) 347–356.

[20] R.-J. Yang, "New types of $f(T)$ gravity," *Eur. Phys. J.* **C71** (2011) 1797, `arXiv:1007.3571 [gr-qc]`.

[21] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, and E. N. Saridakis, "$f(T)$ teleparallel gravity and cosmology," *Rept. Prog. Phys.* **79** no. 10, (2016) 106901, `arXiv:1511.07586 [gr-qc]`.

[22] A. Awad, W. El Hanafy, G. Nashed, and E. N. Saridakis, "Phase Portraits of general $f(T)$ Cosmology," *JCAP* **02** (2018) 052, `arXiv:1710.10194 [gr-qc]`.

[23] A. Awad, W. El Hanafy, G. Nashed, S. Odintsov, and V. Oikonomou, "Constant-roll Inflation in $f(T)$ Teleparallel Gravity," *JCAP* **07** (2018) 026, `arXiv:1710.00682 [gr-qc]`.

[24] P. Pavlović and M. Sossich, "The problem of cosmological constant in the effective approach towards quantum gravity," *arXiv e-prints* (Dec., 2021) arXiv:2112.09523, `arXiv:2112.09523 [gr-qc]`.

[25] L. Iorio and E. N. Saridakis, "Solar system constraints on $f(T)$ gravity," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427** (2012) 1555, `arXiv:1203.5781 [gr-qc]`.

[26] L. Iorio, N. Radicella, and M. L. Ruggiero, "Constraining $f(T)$ gravity in the Solar System," *JCAP* **1508** no. 08, (2015) 021, `arXiv:1505.06996 [gr-qc]`.

[27] G. Farrugia, J. L. Said, and M. L. Ruggiero, "Solar System tests in $f(T)$ gravity," *Phys. Rev. D* **93** no. 10, (2016) 104034, `arXiv:1605.07614 [gr-qc]`.

[28] A. K. Ahmed, M. Azreg-Ainou, S. Bahamonde, S. Capozziello, and M. Jamil, "Astrophysical flows near $f(T)$ gravity black holes," *Eur. Phys. J.* **C76** no. 5, (2016) 269, `arXiv:1602.03523 [gr-qc]`.

[29] J.-Z. Qi, S. Cao, M. Biesiada, X. Zheng, and H. Zhu, "New observational constraints on $f(T)$ cosmology from radio quasars," *Eur. Phys. J.* **C77** no. 8, (2017) 502, `arXiv:1708.08603 [astro-ph.CO]`.

[30] B. Li, T. P. Sotiriou, and J. D. Barrow, "$f(T)$ gravity and local Lorentz invariance," *Phys. Rev. D* **83** (2011) 064035, `arXiv:1010.1041 [gr-qc]`.

[31] T. P. Sotiriou, B. Li, and J. D. Barrow, "Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry," *Phys. Rev. D* **83** (2011) 104030, `arXiv:1012.4039 [gr-qc]`.

[32] M. Li, R.-X. Miao, and Y.-G. Miao, "Degrees of freedom of $f(T)$ gravity," *JHEP* **07** (2011) 108, `arXiv:1105.5934 [hep-th]`.

[33] C. Bejarano, R. Ferraro, and M. J. Guzmán, "Kerr geometry in $f(T)$ gravity," *Eur. Phys. J.* **C75** (2015) 77, `arXiv:1412.0641 [gr-qc]`.

[34] M. Krššák and E. N. Saridakis, "The covariant formulation of $f(T)$ gravity," *Class. Quant. Grav.* **33** no. 11, (2016) 115009, `arXiv:1510.08432 [gr-qc]`.

[35] Y. C. Ong and J. M. Nester, "Counting Components in the Lagrange Multiplier Formulation of Teleparallel Theories," *Eur. Phys. J. C* **78** no. 7, (2018) 568, `arXiv:1709.00068 [gr-qc]`.

[36] A. Golovnev, T. Koivisto, and M. Sandstad, "On the covariance of teleparallel gravity theories," *Class. Quant. Grav.* **34** no. 14, (2017) 145013, `arXiv:1701.06271 [gr-qc]`.

[37] M. Hohmann, L. Jarv, and U. Ualikhanova, "Covariant formulation of scalar-torsion gravity," *Phys. Rev. D* **97** no. 10, (2018) 104011, `arXiv:1801.05786 [gr-qc]`.

[38] C. Bejarano, R. Ferraro, F. Fiorini, and M. J. Guzmán, "Reflections on the covariance of modified teleparallel theories of gravity," *Universe* **5** no. 6, (2019) . `https://www.mdpi.com/2218-1997/5/6/158`.

[39] R. Ferraro and M. J. Guzmán, "Hamiltonian formalism for $f(T)$ gravity," *Phys. Rev. D* **97** no. 10, (2018) 104028, `arXiv:1802.02130 [gr-qc]`.

[40] A. Golovnev and M.-J. Guzmán, "Bianchi identities in $f(t)$ gravity: Paving the way to confrontation with astrophysics," *Phys. Lett. B* **810** (2020) 135806. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320306092`.

[41] A. DeBenedictis and S. Ilijić, "Spherically symmetric vacuum in covariant $F(T) = T + \frac{\alpha}{2}T^2 + \mathcal{O}(T^\gamma)$ gravity theory," *Phys. Rev. D* **94** no. 12, (2016) 124025, `arXiv:1609.07465 [gr-qc]`.

[42] X.-H. Meng and Y.-B. Wang, "Birkhoff's theorem in $f(T)$ gravity," *Eur. Phys. J. C* **71** (09, 2011) .

[43] H. Dong, Y.-b. Wang, and X.-h. Meng, "Extended Birkhoff's Theorem in the $f(T)$ Gravity," *Eur. Phys. J.* **C72** (2012) 2002, `arXiv:1203.5890 [gr-qc]`.

[44] H. Dong, Y.-B. Wang, and X.-H. Meng, "Birkhoff's Theorem in $f(T)$ Gravity upto the Perturbative Order," *Eur. Phys. J.* **C72** (2012) 2201, `arXiv:1205.6385 [physics.gen-ph]`.

[45] M. Hamani Daouda, M. E. Rodrigues, and M. J. S. Houndjo, "Static Anisotropic Solutions in $f(T)$ Theory," *Eur. Phys. J.* **C72** (2012) 1890, `arXiv:1109.0528 [physics.gen-ph]`.

[46] C. Deliduman and B. Yapiskan, “Absence of Relativistic Stars in $f(T)$ Gravity,” *ArXiv e-prints* (Mar., 2011) arXiv:1103.2225, `arXiv:1103.2225 [gr-qc]`.

[47] R. Ferraro and F. Fiorini, “Spherically symmetric static spacetimes in vacuum $f(T)$ gravity,” *Phys. Rev. D* **84** (2011) 083518, `arXiv:1109.4209 [gr-qc]`.

[48] S. Ilijić and M. Sossich, “Compact stars in $f(T)$ extended theory of gravity,” *Phys. Rev. D* **98** (Sep, 2018) 064047.
`https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.064047`.

[49] S. Ilijić and M. Sossich, “Boson stars in $f(t)$ extended theory of gravity,” *Phys. Rev. D* **102** (Oct, 2020) 084019.
`https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.084019`.

[50] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, “Gravitational lorentz force and the description of the gravitational interaction,” *Phys. Rev. D* **56** (Oct, 1997) 4689–4695.
`https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.4689`.

[51] J. W. Maluf, “Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity,” *J. Math. Phys.* **35** (1994) 335.

[52] H. Weyl, “Gravitation and the electron,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **15** no. 4, (April, 1929) 323—334.
`https://europepmc.org/articles/PMC522457`.

[53] H. A. Weldon, “Fermions without vierbeins in curved space-time,” *Phys. Rev. D* **63** (2001) 104010, `arXiv:gr-qc/0009086`.

[54] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[55] A. Accioly and R. Paszko, “Conflict between the classical equivalence principle and quantum mechanics,” *Adv. Studies Theor. Phys* **3** (01, 2009) 65–78.

[56] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, and K. H. Vu, “Doing without the equivalence principle,” *The Tenth Marcel Grossmann Meeting* (2006) 1505–1512.
`https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812704030_0142`.

[57] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation, W. H. Freeman and Company, New York*. 1973.

[58] A. Trautman, *Gravitation: an Introduction to Current Research, ed. by L. Witten (Wiley, New York)*. 1962.

[59] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer, 2nd edition (Addison-Wesley, Redwood).* 1989.

[60] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira, "Gravitational energy-momentum density in teleparallel gravity," *Phys. Rev. Lett.* **84** (May, 2000) 4533–4536. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4533.

[61] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, "Torsion and the electromagnetic field," *Int. J. Mod. Phys. D* **08** no. 02, (1999) 141–151. https://doi.org/10.1142/S0218271899000122.

[62] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, "$f(R)$ theories of gravity," *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497, arXiv:0805.1726 [gr-qc].

[63] M. Ostrogradski *Mem. Ac. St. Petersbourg* **VI** no. 4, (1850) 385.

[64] R. P. Woodard, "Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity," *Lect. Notes Phys.* **720** (2007) 403 – 433.

[65] R. P. Woodard, "Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability," *Scholarpedia* **10** no. 8, (2015) 32243, arXiv:1506.02210 [hep-th].

[66] J.-Q. Guo and A. V. Frolov, "Cosmological dynamics in $f(R)$ gravity," *Phys. Rev. D* **88** (Dec, 2013) 124036. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.124036.

[67] P. Pavlovic and M. Sossich, "Cyclic cosmology in modified gravity," *Phys. Rev. D* **95** (May, 2017) 103519. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.103519.

[68] S. Capozziello, C. A. Mantica, and L. G. Molinari, "Cosmological perfect-fluids in $f(R)$ gravity," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **16** no. 01, (2019) 1950008. https://doi.org/10.1142/S0219887819500087.

[69] H. Khodabakhshi, F. Shojai, and A. Shirzad, "On the classification of consistent boundary conditions for $f(R)$-Gravity," *Eur. Phys. J. C* **78** no. 12, (2018) 1003, arXiv:1803.04306 [gr-qc].

[70] E. Barausse, T. P. Sotiriou, and J. C. Miller, "A No-go theorem for polytropic spheres in Palatini f(R) gravity," *Class. Quant. Grav.* **25** (2008) 062001, arXiv:gr-qc/0703132 [GR-QC].

[71] G. J. Olmo, "Re-examination of Polytropic Spheres in Palatini f(R) Gravity," *Phys. Rev. D* **78** (2008) 104026, arXiv:0810.3593 [gr-qc].

[72] N. Tamanini and C. G. Boehmer, "Good and bad tetrads in f(T) gravity," *Phys. Rev. D* **86** (2012) 044009, arXiv:1204.4593 [gr-qc].

[73] M. Krššák, "Holographic renormalization in teleparallel gravity," *Eur. Phys. J. C* **77** no. 1, (Jan., 2017) 44, arXiv:1510.06676 [gr-qc].

[74] M. Krššák, R. J. van den Hoogen, J. G. Pereira, C. G. Böhmer, and A. A. Coley, "Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach," *Class. Quant. Grav.* **36** no. 18, (2019) 183001, arXiv:1810.12932 [gr-qc].

[75] M. Blagojevic and I. A. Nikolic, "Hamiltonian structure of the teleparallel formulation of GR," *Phys. Rev. D* **62** (2000) 024021, arXiv:hep-th/0002022.

[76] M. Jamil Amir and S. Sattar, "Locally Rotationally Symmetric Vacuum Solutions in f(R) Gravity," *Int. J. Theor. Phys.* **53** no. 3, (2014) 773–787, arXiv:1312.1682 [gr-qc].

[77] A. DeBenedictis, S. Ilijić, and M. Sossich, "Spherically symmetric vacuum solutions and horizons in covariant f(T) gravity theory," *Phys. Rev. D* **105** no. 8, (2022) 084020, arXiv:2202.08958 [gr-qc].

[78] J. Cottam, F. Paerels, and M. Mendez, "Gravitationally redshifted absorption lines in the x-ray burst spectra of a neutron star," *Nature* **420** (2002) 51–54, arXiv:astro-ph/0211126.

[79] F. Ozel, "Soft equations of state for neutron-star matter ruled out by EXO 0748 - 676," *Nature* **441** no. 7097, (June, 2006) 1115–1117, arXiv:astro-ph/0605106 [astro-ph].

[80] J. M. Lattimer and M. Prakash, "Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints," *Phys. Rep.* **442** no. 1-6, (Apr., 2007) 109–165, arXiv:astro-ph/0612440 [astro-ph].

[81] A. D. Linde, "A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems," *Phys. Lett. B* **108** no. 6, (Feb., 1982) 389–393.

[82] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, "Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking," *Phys. Rev. Lett.* **48** (Apr, 1982) 1220–1223. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1220.

[83] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, "k - inflation," *Phys. Lett. B* **458** (1999) 209–218, arXiv:hep-th/9904075.

[84] J.-Q. Xia, Y.-F. Cai, T.-T. Qiu, G.-B. Zhao, and X. Zhang, "Constraints on the Sound Speed of Dynamical Dark Energy," *Int. J. Mod. Phys. D* **17** (2008) 1229–1243, `arXiv:astro-ph/0703202`.

[85] M. Li, T. Qiu, Y. Cai, and X. Zhang, "On dark energy models of single scalar field," *JCAP* **04** (2012) 003, `arXiv:1112.4255 [hep-th]`.

[86] S. Chandrasekhar, "The highly collapsed configuration of a stellar mass," *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* no. 91, (1931) 456–466.

[87] M. M. Brodin, G., "Spin magnetohydrodynamics," *New J. Phys.* no. 9, (2007) 277.

[88] R. F. Tooper, "Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity.," *Astrophys. J.* **142** (Nov., 1965) 1541.

[89] L. Herrera and W. Barreto, "General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications," *Phys. Rev. D* **88** (Oct, 2013) 084022. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.084022`.

[90] R. F. Tooper, "The "standard Model" for Massive Stars in General Relativity," *Astrophys. J.* **143** (Feb., 1966) 465.

[91] X. Y. Lai and R. X. Xu, "A Polytropic Model of Quark Stars," *Astropart. Phys.* **31** (2009) 128–134, `arXiv:0804.0983 [astro-ph]`.

[92] R. F. Tooper, "General Relativistic Polytropic Fluid Spheres.," *Astrophys. J.* **140** (Aug., 1964) 434.

[93] U. S. Nilsson and C. Uggla, "General relativistic stars : Polytropic equations of state," *Annals of Physics* **286** (2000) 292–319.

[94] R. C. Tolman, "Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid," *Phys. Rev.* **55** (Feb, 1939) 364–373. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364`.

[95] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, "On massive neutron cores," *Phys. Rev.* **55** (Feb, 1939) 374–381. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374`.

[96] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Chicago: The Clarendon Press*. 1965.

[97] N. K. Glendenning, *Compact stars*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer, 2ed. ed., 2000.

[98] H. J. Lane, “On the theoretical temperature of the sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment,” *American Journal of Science* **s2-50** no. 148, (1870) 57–74, `https://www.ajsonline.org/content/s2-50/148/57.full.pdf`. `https://www.ajsonline.org/content/s2-50/148/57`.

[99] F. E. Schunck and E. W. Mielke, “General relativistic boson stars,” *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) R301–R356, `arXiv:0801.0307 [astro-ph]`.

[100] S. Liebling and C. Palenzuela, “Dynamical boson stars,” *Living Reviews in Relativity* **15** (02, 2012) .

[101] M. S. Madsen and A. R. Liddle, “The cosmological formation of boson stars,” *Physics Letters B* **251** no. 4, (1990) 507–510. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269390907888`.

[102] D. F. Torres, S. Capozziello, and G. Lambiase, “Supermassive boson star at the galactic center?,” *Phys. Rev. D* **62** (Oct, 2000) 104012. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.104012`.

[103] D. J. Kaup, “Klein-gordon geon,” *Phys. Rev.* **172** (Aug, 1968) 1331–1342. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.172.1331`.

[104] R. Ruffini and S. Bonazzola, “Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state,” *Phys. Rev.* **187** (Nov, 1969) 1767–1783. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.187.1767`.

[105] P. Jetzer, “Boson stars,” *Physics Reports* **220** no. 4, (1992) 163 – 227. `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739290123H`.

[106] M. Colpi, S. L. Shapiro, and I. Wasserman, “Boson stars: Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields,” *Phys. Rev. Lett.* **57** (Nov, 1986) 2485–2488. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.2485`.

[107] G. H. Derrick, “Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,” *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1252–1254.

[108] G. Rosen, “Existence of Particlelike Solutions to Nonlinear Field Theories,” *J. Math. Phys.* **7** no. 11, (Nov., 1966) 2066–2070.

[109] A. Diez-Tejedor and A. González-Morales, “No-go theorem for static scalar field dark matter halos with no noether charges,” *Phys. Rev. D* **88** (06, 2013) .

[110] R. Friedberg, T. D. Lee, and Y. Pang, "Mini-soliton stars," *Phys. Rev. D* **35** (Jun, 1987) 3640–3657. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.3640`.

[111] P. Jetzer, "Stability of excited bosonic stellar configurations," *Physics Letters B* **222** no. 3-4, (May, 1989) 447–452.

[112] P. Jetzer, "Stability of combined boson-fermion stars," *Physics Letters B* **243** no. 1-2, (June, 1990) 36–40.

[113] G. B. Cook, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, "Rapidly Rotating Neutron Stars in General Relativity: Realistic Equations of State," *Astrophys. J.* **424** (Apr., 1994) 823.

[114] J. L. Friedman, J. R. Ipser, and R. D. Sorkin, "Turning Point Method for Axisymmetric Stability of Rotating Relativistic Stars," *Astrophys. J.* **325** (Feb., 1988) 722.

[115] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*. 1965.

[116] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. 1984.

[117] M. Gleiser, "Stability of boson stars," *Phys. Rev. D* **38** (Oct, 1988) 2376–2385. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.38.2376`.

[118] P. Jetzer, "Dynamical instability of bosonic stellar configurations," *Nuclear Physics B* **316** no. 2, (Apr., 1989) 411–428.

[119] T. D. Lee and Y. Pang, "Stability of mini-boson stars," *Nuclear Physics B* **315** no. 2, (Mar., 1989) 477–516.

[120] E. N. Lorenz, "Deterministic non-periodic flow," *Journal of the Atmospheric Sciences* **20** no. 2, (1963) 130–141.

[121] E. C. Zeeman, "Catastrophe Theory," *Scientific American* no. 234, (1976) 65–70, 75–83.

[122] F. V. Kusmartsev, E. W. Mielke, and F. E. Schunck, "Gravitational stability of boson stars," *Phys. Rev. D* **43** (Jun, 1991) 3895–3901. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.43.3895`.

[123] T. Tamaki and N. Sakai, "Unified picture of Q-balls and boson stars via catastrophe theory," *Phys. Rev. D* **81** no. 12, (June, 2010) 124041, `arXiv:1105.1498 [gr-qc]`.

[124] M. Gleiser and N. Jiang, "Stability bounds on compact astrophysical objects from information-entropic measure," *Phys. Rev. D* **92** (Aug, 2015) 044046. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.044046`.

[125] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. Levi Said, J. Mifsud, and E. Di Valentino, "Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology," *arXiv e-prints* (June, 2021) arXiv:2106.13793, arXiv:2106.13793 [gr-qc].

[126] M. Hohmann, L. Järv, M. Krššák, and C. Pfeifer, "Modified teleparallel theories of gravity in symmetric spacetimes," *Phys. Rev. D* **100** (Oct, 2019) 084002. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.084002.

[127] A. V. Toporensky and P. V. Tretyakov, "Spin connection and cosmological perturbations in $f(t)$ gravity," *Phys. Rev. D* **102** (Aug, 2020) 044049. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.044049.

[128] E. D. Emtsova, A. N. Petrov, and A. V. Toporensky, "Conserved currents and superpotentials in teleparallel equivalent of GR," *Class. Quant. Grav.* **37** no. 9, (Apr, 2020) 095006. https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab7715.

[129] S. Bahamonde, A. Golovnev, M.-J. Guzmán, J. L. Said, and C. Pfeifer, "Black holes in f(t,b) gravity: exact and perturbed solutions," *JCAP* **2022** no. 01, (Jan, 2022) 037. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2022/01/037.

[130] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. L. Said, J. Mifsud, and E. Di Valentino, "Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology," arXiv:2106.13793 [gr-qc].

[131] L. Järv, M. Hohmann, M. Krššák, and C. Pfeifer, "Flat connection for rotating spacetimes in extended teleparallel gravity theories," *Universe* **5** (2019) 142, arXiv:1905.03305 [gr-qc].

[132] A. Finch and J. L. Said, "Galactic Rotation Dynamics in f(T) gravity," *Eur. Phys. J. C* **78** no. 7, (2018) 560, arXiv:1806.09677 [astro-ph.GA].

[133] C. G. Böhmer and F. Fiorini, "The regular black hole in four dimensional Born–Infeld gravity," *Class. Quant. Grav.* **36** no. 12, (2019) 12LT01, arXiv:1901.02965 [gr-qc].

[134] E. Gourgoulhon and J. L. Jaramillo, "A 3+1 perspective on null hypersurfaces and isolated horizons," *Phys. Rept.* **423** (2006) 159–294, arXiv:gr-qc/0503113.

Životopis

Marko Sossich rođen je 09. srpnja 1987. godine u Puli. Odrastao je u Rovinju gdje završava Prirodoslovno-matematičku gimnaziju Zvane Črnja. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, 2006. godine upisuje studij Fizike, istraživački smjer. Dobitnik je Rektorove nagrade za 2013. godinu zajedno s Petrom Pavlovićem pod mentorstvom prof. Dubravka Horvata. Od 2015. godine je zaposlen na Fakultetu elektrotehnike i računarstva pri Zavodu za primijenjenu fiziku, isprva kao vanjski suradnik, a potom, 2016. kao asistent. Sudjeluje u izvođenju nastave na predmetu Fizika i Fizika 2, za prvu i drugu godinu studija. Također sudjeluje u izvođenju nastave na predmetima Fizika 1 i Fizika 2 na Vojnim studijima. Suosnivač je udruge Instituta za kozmologiju i filozofiju prirode. Kozmologija, teorije gravitacije, crvotočine i filozofija prirode su najuža sfera njegovih interesa. Sudjelovao je na više znanstvenih konferencija. Do sada je objavio više od deset znanstvenih članaka u najrelevantnijim znanstvenim časopisima. Ponosni je otac jednog djeteta.

Popis objavljenih djela

Rad u časopisima

1. Pavlović, P., Sossich, M., "Wormholes in viable $f(R)$ modified theories of gravity and Weak Energy Condition", The European Physical Journal C, Vol. 75, Ožujak 2015., str. 117
2. Bahamonde, S., Jamil, M., Pavlović, P., Sossich, M., "Cosmological wormholes in $f(R)$ theories of gravity" Physical Review D, Vol. 94, Issue 4, Kolovoz 2016., str. 044041
3. Pavlović, P., Sossich, M., "Cyclic cosmology in modified gravity" Physical Review D, Vol. 95, Issue 10, Svibanj 2017., str. 103519
4. Haroon, S., Jamil, M., Lin, K., Pavlović, P., Sossich, M., Wang, A., "The Effects of Running Gravitational Coupling On Rotating Black Holes" The European Physical Journal C Vol. 78, Lipanj 2018., str. 519
5. Ilijić, S., Sossich, M., "Compact stars in $f(T)$ extended theory of gravity" Physical Review D, Vol. 98, Issue 6, Rujan 2018., str. 064047
6. Pavlović, P., Sossich, M., "Effect of vacuum polarization on the magnetic fields around

a Schwarzschild black hole" Physical Review D, Vol. 99, Issue 2, Siječanj 2019., str. 024011

7. Pavlović, P., Saveliev, A., Sossich, M., "Influence of the Vacuum Polarization Effect on the Motion of Charged Particles in the Magnetic Field around a Schwarzschild Black Hole" Physical Review D, Vol. 100, Issue 8, Rujan 2019., str. 084033
8. Ilijić, S., Sossich, M., "Boson stars in $f(T)$ extended theory of gravity" Physical Review D, Vol. 102, Issue 8, Rujan 2020., str. 084019
9. Pavlović, P., Sossich, M., "Dynamic properties of cyclic cosmologies" Physical Review D, Vol. 103, Issue 2, Siječanj 2021., str. 023529
10. DeBenedictis, A., Ilijić, S., Sossich, M., "On spherically symmetric vacuum solutions and horizons in covariant $f(T)$ gravity theory" Physical Review D, Vol. 105, Issue 8, Travanj 2022., str. 084020

Biography

Marko Sossich was born on July 9, 1987 in Pula. He grew up in Rovinj where he completed the Natural Sciences and Mathematics gymnasium called Zvane Črnja. At the Faculty of Science in the University of Zagreb, in 2006 he enrolled in Study of Physics, research course. He won the 2013 Rector's Award together with Petar Pavlović under the mentorship of Prof. Dubravko Horvat. Since 2015, he has been employed at the Faculty of Electrical Engineering and computer science at the Department of Applied Physics, initially as external associate and then, in 2016 as an assistant. He participates in teaching in Physics and Physics 2, for the first and second year of study. He also participates in teaching on Physics 1 and Physics 2 subjects in military studies. He is the co-founder of the association of the Institute of Cosmology and Philosophy of Nature. Cosmology, theories of gravity, wormholes and philosophy of nature are the narrowest sphere of his interests. So far, he published more than ten scientific articles in the most relevant scientific journals. He's a proud father of one child.

Zahvale

Na samom kraju rada htio bih zahvaliti svom mentoru Saši Ilijiću koji je svojim strpljivim pristupom i plodonosnim komentarima bio ključna osoba u ostvarivanju ovog rada. Osim toga, možda i najbitniji rezultat koji mentor može postići jest pobuđivanje interesa kao i njegovanje zajedništva u znanstvenom radu kojeg ovdje nije nimalo nedostajalo.

Htio bih zahvaliti i svojoj dragoj supruzi Nejri koja je bez ustručavanja i sa zanimanjem prihvatila težak posao lekture ovog rada.

Također, htio bih zahvaliti i članovima povjerenstva koji su svojim pažljivim čitanjem i plodonosnim primjedbama uvelike doprinijeli ovom radu.