Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ema Požek

Ekviangularni pravci

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, studeni 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Za skup pravaca u $\mathbb{R}^n$ kroz ishodište kažemo da je ekviangularan ako svaka dva pravca iz tog skupa zatvaraju isti kut. Pitanje određivanja maksimalnog broja ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ prvi je proučavao Haantjes [13] još 1948. godine, a 60-ih godina prošlog stoljeća Lint i Seidel [18] formalno su postavili problem. Pritom su posebno proučavali maksimalan broj ekviangularnih pravaca koji zatvaraju neki fiksni kut. Egzaktna formula koja bi riješila ijedan od tih problema za proizvoljan prostor $\mathbb{R}^n$ ni danas nije poznata. U ovom radu obrađujemo osnovne rezultate o ekviangularnim pravcima.

To naizgled geometrijsko pitanje može se svesti na problem algebarske teorije grafova. U drugom poglavlju opisujemo grafove koji predstavljaju skup ekviangularnih pravaca. U korolaru 2.7 dajemo poznatu ocjenu za općenito maksimalan broj ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$, a u teoremu 2.9 predstavljamo *relativnu ocjenu*, tj. gornju ocjenu za broj ekviangularnih pravaca koja ovisi o kutu koji pravci zatvaraju. Također, bez dokaza ćemo navesti i neke druge poznate gornje i donje ocjene za maksimalan broj ekviangularnih pravaca.

U trećem poglavlju prvo definiramo operaciju prespajanja te klase prespajanja. Pokazujemo kako grafovi iz iste klase prespajanja predstavljaju isti skup ekviangularnih pravaca. Potom definiramo grafove prespajanja te dokazujemo bijekciju između klasa prespajanja i grafova prespajanja. U teoremu 3.12 pokazujemo vezu između regularnih grafova prespajanja i relativne ocjene za ekviangularne pravce. Na kraju definiramo posebnu strukturu, dvografe. Cilj poglavlja je strogo matematički, ali i primjerima pokazati bijekcije između klasa prespajanja, grafova prespajanja te dvografa.

Motivirani vezom između regularnih grafova prespajanja i relativnom ocjenom, u četvrtom poglavlju izlažemo svojstva regularnih dvografa. Ključni rezultat poglavlja je teorem 4.23 koji opisuje susjedstva u regularnim grafovima prespajanja kao jako regularne grafove. Stoga na početku poglavlja dokazujemo i brojna svojstva jako regularnih grafova te predstavljamo Paleyeve grafove kao zanimljive primjere jako regularnih grafova.

U posljednjem poglavlju povezujemo glavne rezultate cijelog rada. Prvo koristimo nužna svojstva jako regularnih grafova kako bismo generirali njihove moguće skupove parametara, a time i ograničili parametre regularnih grafova prespajanja. Zatim na primjeru Paleyevih grafova pokazujemo kako se mogu naći ekviangularni pravci koji zadovoljavaju relativnu ocjenu iz teorema 2.9. Na kraju s pomoću jako regularnog grafa $Paley(17)$ nalazimo vektore smjera za 18 ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^9$.

Zahvaljujem profesoru Krčadincu na inspiraciji i velikom strpljenju. Hvala mojoj obitelji na neiscrpnoj emocionalnoj i financijskoj podršci. Hvala i prijateljima. Bez vas bih se shvaćala previše ozbiljno. Vedrane, hvala ti.

2 Ekviangularni pravci

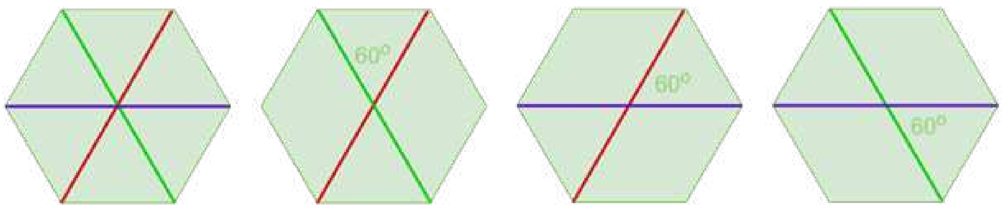
Simpleks (hipertetraedar) je n-dimenzionalna generalizacija pravilnog tetraedra. To je najjednostavniji politop u n-dimenzionalnom prostoru. Na primjer, u prostoru $\mathbb{R}$ simpleks predstavlja dužinu, u $\mathbb{R}^2$ konveksnu ljusku jednakostraničnog trokuta, a u $\mathbb{R}^3$ pravilnog tetraedra. Promotrimo li simpleks u $\mathbb{R}^n$, uočit ćemo da je broj njegovih vrhova $n+1$. Zbog same konstrukcije simpleksa u $\mathbb{R}^n$, to je i kardinalitet najvećeg podskupa S prostora $\mathbb{R}^n$ takvog da je udaljenost $d(x, y)$ između dva proizvoljna elementa $x, y \in S$ jednaka.

Promotrimo sada sličan problem u realnom projektivnom prostoru $PG(n-1, \mathbb{R})$. Točke tog prostora zapravo su pravci koji prolaze kroz ishodište prostora $\mathbb{R}^n$, a udaljenost u tom prostoru definiramo kao kut između njih. Zanima nas koliki je kardinalitet najvećeg podskupa S realnog projektivnog prostora za koji vrijedi da je udaljenost (kut) između prozvoljna dva elementa (pravca) konstantna. Drugim riječima, zanima nas koliki je maksimalan broj pravaca kroz ishodište u $\mathbb{R}^n$ koji u parovima zatvaraju jednak kut. Takve pravce nazivamo *ekviangularnim pravcima*.

Problem maksimalnog broja ekviangularnih pravaca za općeniti prostor $\mathbb{R}^n$ mnogo je složeniji od motivacijskog primjera sa simpleksom. Egzaktno rješenje poznato je za određene dimenzije n, ali formula koja bi dala rješenje za općeniti n nije poznata. Ipak, postoji nekoliko poznatih rezultata koji daju gornju ogradu za rješenje. Ovaj naizgled geometrijski problem jedno je od temeljnih otvorenih pitanja algebarske teorije grafova. Rješenje je zanimljivo i za proučavanje sferičnih kodova, budući da ekviangularni pravci kroz ishodište sijeku sferu sa središtem u ishodištu u ekvidistantnim točkama [8].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
maks	1	3	6	6	10	16	28	28	28	28	28	28	28	28	36

Tablica 1: Maksimalan broj ekviangularnih pravaca u prostoru $\mathbb{R}^n$ [14]



Slika 1: Primjer ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^2$.

Primjer 2.1. *(Konstrukcija 28 ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^8$) Općenito pravac kroz ishodište u $\mathbb{R}^n$ možemo zadati s pomoću njegova vektora smjera. Radi preciznosti, izaberimo jediničan vektor smjera. Uočimo da ovakva reprezentacija i dalje nije jedinstvena jer za svaki pravac postoje dva takva vektora (x i $-x$). Za kut θ koji zatvaraju dva različita pravca reprezentirana jediničnim vektorima x i y vrijedi*

$$x^T y = \pm \cos \theta.$$

Promotrimo jediničan vektor

$$x^T = \frac{1}{\sqrt{24}}(-3, -3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^8.$$

On ima $\binom{8}{2} = 28$ permutacija. Označimo ih s x_i, $i = 1, \ldots, 28$. Primijetimo da za $i \neq j$ vrijedi

$$x_i^T x_j = \pm \frac{1}{3}.$$

Pritom za vektore koji imaju jednu vrijednost -3 na istoj koordinati vrijedi

$$x_i^T x_j = \frac{1}{24}(9 - 3 - 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = \frac{1}{3},$$

a za ostale

$$x_i^T x_j = \frac{1}{24}(-3 - 3 - 3 - 3 + 1 + 1 + 1 + 1) = -\frac{1}{3}.$$

Dakle, konstruirali smo 28 ekviangularnih vektora u $\mathbb{R}^8$. Također, svaki x_i ortogonalan je na $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^8$. Zato je skup $\{x_1, \ldots, x_{28}\}$ podskup sedmodimenzionalnog prostora $\{\mathbb{1}\}^\perp$. Time smo konstruirali skup od 28 ekviangularnih vektora u sedmodimenzionalnom prostoru. Kasnije ćemo pokazati da je 28 i maksimalan broj ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^7$.

U prethodnom smo primjeru skup pravaca kroz ishodište u $\mathbb{R}^n$ reprezentirali s pomoću skupa njihovih jediničnih vektora smjera. Uočili smo da ta reprezentacija nije jedinstvena. U nastavku ćemo svaki takav skup zvati *ekviangularan skup*.

Lema 2.2. *Neka je A pozitivno semidefinitna matrica. Tada postoji matrica B takva da vrijedi $A = B^T B$.*

Dokaz. Budući da je A pozitivno semidefinitna matrica, ona je i simetrična. Stoga postoje ortogonalna matrica L i dijagonalna matrica Λ, pri čemu su elementi matrice Λ svojstvene vrijednosti matrice A, takve da vrijedi

$$A = L^T \Lambda L.$$

A je pozitivno semidefinitna matrica pa su svi elementi matrice Λ nenegativni. Zato postoji matrica D za koju vrijedi

$$\Lambda = D^2.$$

Neka je $B = L^T D L$. Tada vrijedi

$$B^T B = L^T D^T L L^T D L = L^T D^T D L = L^T \Lambda L = A.$$

$\square$

Objasnimo sada kako se ovaj geometrijski problem može ekvivalentno promatrati u terminima teorije grafova. Označimo s $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ skup vektora u $\mathbb{R}^n$. Neka je G Gramova matrica skupa Ω. Po definiciji Gramove matrice, G možemo zapisati kao $G = U^T U$, pri čemu je $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrica čiji je i-ti stupac vektor x_i. Matrica G simetrična je pozitivno semidefinitna matrica, a rang joj je jednak rangu matrice U. Neka je, s druge strane, dana pozitivno semidefinitna matrica G. Prema lemi 2.2, postoji matrica U takva da je $G = U^T U$. Stupce matrice U možemo shvatiti kao vektore koji čine skup Ω. Time smo pokazali da je ekvivalentno proučavati skup Ω i Gramovu matricu G.

Gramova matrica G skupa ekviangularnih pravaca reprezentiranih skupom Ω ima poseban oblik. Označimo elemente matrice G s g_{ij}. Tada vrijedi

$$g_{ij} = x_i^T x_j = \pm \cos \hat{\theta},$$

pri čemu je $\hat{\theta}$ kut između pravaca reprezentiranih vektorima x_i i x_j. U slučaju $i = j$ vrijedi $\hat{\theta} = 0$ pa je $g_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Inače, zbog jednakog kuta između svaka dva različita pravca, vrijedi $\hat{\theta} = \theta$ pa je $g_{ij} = \pm \cos \theta = \pm \alpha$, $\forall i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$. Iz toga slijedi da se matrica G može zapisati kao

$$G = I + \alpha S,$$

pri čemu je S simetrična matrica čiji su dijagonalni elementi 0, a ostali ± 1. Neka je $X = (V, E)$ jednostavan neusmjeren graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ čije bridove konstruirajmo koristeći S na sljedeći način

$$\begin{aligned} s_{ij} = -1 &\Rightarrow \{v_i, v_j\} \in E \\ s_{ij} = 1 &\Rightarrow \{v_i, v_j\} \notin E. \end{aligned}$$

Definicija 2.3. Seidelova matrica S *jednostavnog neusmjerenog grafa* $X = (V, E)$ *simetrična je matrica za koju vrijedi*

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 0, & i &= j \\ s_{ij} &= 1, & \{v_i, v_j\} &\notin E \\ s_{ij} &= -1, & \{v_i, v_j\} &\in E. \end{aligned}$$

Napomena 2.4. *Izvoran naziv Seidelove matrice bio je* $(-1, 1, 0)-$*matrica susjedstva i možemo je smatrati nekom vrstom nestandardne matrice susjedstva grafa* X. *Ako s* A *označimo standardnu matricu susjedstva grafa* X, *a s* J *matricu jedinica u istom prostoru, tada vrijedi* $S = J - I - 2A$.

Iz konstrukcije grafa X slijedi da je S njegova Seidelova matrica. Time smo pokazali da iz skupa m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ možemo konstruirati jednostavan graf X s m vrhova.

S druge strane, neka je $X = (V, E)$ jednostavan graf sa skupom vrhova $V = \{v_1 \dots, v_m\}$. Neka je S Seidelova matrica tog grafa. Budući da je S simetrična matrica, ona je slična dijagonalnoj matrici D čiji su elementi svojstvene vrijednosti matrice S. Stoga je $tr(S) = tr(D)$. Budući da je $tr(S) = 0$ i $S \neq 0$, postoji negativna svojstvena vrijednost matrice S. Neka je njezina najmanja svojstvena vrijednost $-\alpha < 0$. Tada je matrica

$$G \coloneqq I + \frac{1}{\alpha} S \tag{1}$$

pozitivno semidefinitna. Ako je G ranga n, ona predstavlja Gramovu matricu m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$. Time smo iz grafa X dobili pozitivno semidefinitnu Gramovu matricu G iz koje možemo konstruirati skup m ekviangularnih pravaca u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Neka je X graf s m vrhova sa Seidelovom matricom S čija je najmanja svojstvena vrijednost $\lambda = -\alpha$. Pretpostavimo da je ona kratnosti k. Budući da je S simetrična matrica, pa onda i dijagonalizabilna, slijedi da su njezina algebarska i geometrijska kratnost jednake ([2], Korolar 5.5.16). Dakle, vrijedi

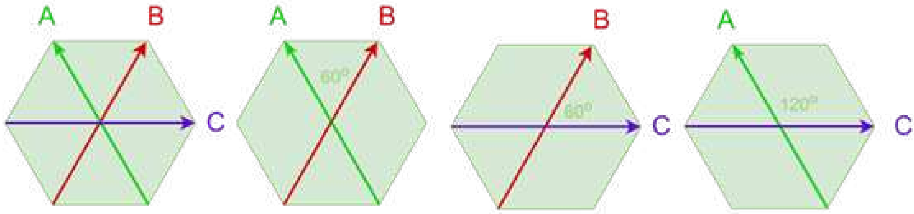
$$\dim(\ker(S - \lambda I)) = \dim(\ker(S + \alpha I)) = k,$$

odnosno

$$m - k = r(S + \alpha I) = r(I + \frac{1}{\alpha} S) = r(G),$$

pri čemu je G Gramova matrica skupa jediničnih vektora koji predstavljaju skup ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^{m-k}$ koji međusobno zatvaraju kut $\arccos(\frac{1}{\alpha})$. Iz ove analize možemo zaključiti da je geometrijski problem pronalaska najmanjeg broja n takvog da postoji m ekviangularnih pravaca u prostoru $\mathbb{R}^n$ (odnosno pronalaska prostora najmanje dimenzije u kojem je moguće pronaći m ekviangularnih pravaca) ekvivalentan problemu pronalaska grafa X s m vrhova takvog da je kratnost najmanje svojstvene vrijednosti njegove Seidelove matrice što veća.

Primjer 2.5. *Promotrimo skup ekviangularnih pravaca u* $\mathbb{R}^2$ *ilustriranih na slici 2. Neka su* $x_1 = A = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $x_2 = B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ *i* $x_3 = C = (1, 0)$ *te*



Slika 2: Primjer triju ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^2$ reprezentiranih jediničnim vektorima (O, A), (O, B) i (O, C).

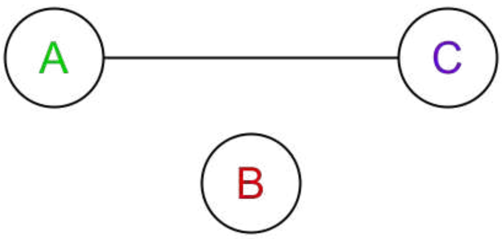
neka je $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. *Tada je Gramova matrica ovog skupa vektora*

$$G = U^T U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Uz $\alpha = \frac{1}{2}$, *Seidelova matrica pripadajućeg grafa* X *je*

$$S = \frac{1}{\alpha}(G - I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo i skicirati graf X.



Slika 3: Graf X.

S druge strane, iz slike 3, odnosno grafa X *koji ima* $m = 3$ *vrha lako dobijemo Seidelovu matricu* (2.5). *Njezine su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 1$ *i* $\lambda_2 = \alpha = -2$, *pri čemu je* λ_2 *kratnosti* 1. *Rang matrice* S *jednak je* 2 *pa zaključujemo da u prostoru* $\mathbb{R}^2$ *postoji skup* 3 *ekviangularna pravca i oni međusobno zatvaraju kut* $\theta = \arccos(\frac{1}{\alpha}) = \pm\frac{\pi}{3}$. *Konkretne pravce možemo dobiti s pomoću leme 2.2.*

U cjelini 2.1 dokazat ćemo neke poznate ocjene za maksimalan broj ekviangularnih pravaca u nekom prostoru te navesti primjere za koje se te ocjene i postižu, a u cjelini 3.1 ćemo detaljnije objasniti vezu između ekviangularnih skupova koji predstavljaju isti skup ekviangularnih pravaca.

2.1 Gornje ocjene za veličinu skupa ekviangularnih pravaca

U ovoj cjelini predstavit ćemo neke poznate gornje granice za veličinu skupa ekviangularnih pravaca. Prvo ćemo dokazati apsolutnu gornju ocjenu za broj ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$. Zovemo je „apsolutna" jer ne koristi nikakve pretpostavke o kutu koji pravci zatvaraju. Apsolutna ocjena također se ponekad zove i Gerzonova ocjena prema Michaelu Gerzonu koji ju je prvi dokazao.

Apsolutna ocjena za veličinu skupa ekviangularnih pravaca slijedit će kao posljedica teorema 2.6. Prije njegova dokaza, izlažemo neke pomoćne tvrdnje. Neka je x jedinični vektor u $\mathbb{R}^n$ te neka je $X = xx^T$. Tada je X simetrična matrica u M_n i vrijedi $X^2 = X$. Stoga je X matrica ortogonalne projekcije na pravac kroz ishodište čiji je vektor smjera x. Neka je y neki drugi jedinični vektor u $\mathbb{R}^n$ i neka je $Y = yy^T$. Raspišimo matricu $A = [a_{ij}] = XY$.

$$A = XY = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1y_1 & y_1y_2 & \dots & y_1y_n \\ y_2y_1 & y_2y_2 & \dots & y_2y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ y_ny_1 & y_ny_2 & \dots & y_ny_n \end{bmatrix}.$$

Iz raspisa slijedi da je

$$a_{ii} = x_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_jy_j\Big)y_i = x_ix^Tyy_i = x^Ty(x_iy_i).$$

Slijedi da je

$$tr(A) = tr(XY) = x^Ty\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = (x^Ty)^2.$$

Ako je θ kut koji zatvaraju vektori x i y, slijedi da je

$$\alpha^2 = (\cos\theta)^2 = tr(XY). \tag{2}$$

Također vrijedi da je

$$tr(X^2) = tr(X) = tr(xx^T) = tr(x^T x) = 1. \tag{3}$$

Teorem 2.6. *Neka su $X_1, \ldots, X_m$ matrice ortogonalnih projekcija na pravce razapete vektorima iz ekviangularnog skupa $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ u $\mathbb{R}^n$. Tada one čine linearno nezavisan skup u prostoru simetričnih matrica.*

Dokaz. Neka je $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ skup ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ koji međusobno zatvaraju kut θ te neka je $\alpha = \cos\theta$. Neka su $X_1, \ldots, X_m$ matrice projekcija na pravce razapete vektorima iz Ω. Ako je $\alpha = 1$, odnosno $m = 1$, tvrdnja trivijalno slijedi. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \neq 1$. Neka je $Y = \sum_i c_i X_i$. Tada slijedi

$$\begin{aligned}
tr(Y^2) &= tr\Big(\sum_{i,j} c_i c_j X_i X_j\Big) \\
&= \sum_{i,j} c_i c_j tr(X_i X_j) \\
&= \sum_i c_i^2 tr(X_i^2) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} c_i c_j tr(X_i X_j) \\
&= \sum_i c_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} c_i c_j \alpha^2 \\
&= \underbrace{\alpha^2 \Big(\sum_i c_i\Big)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\alpha^2)}_{>0} \underbrace{\sum_i c_i^2}_{\geq 0} \geq 0.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $Y = 0$. Tada je $tr(Y^2) = 0$. Budući da je $\alpha \in [0, 1\rangle$, iz računa slijedi da je nužan uvjet za $tr(Y^2) = 0$ uvjet da je $\sum_i c_i^2 = 0$. Taj će uvjet biti zadovoljen jedino ako je $c_i = 0$, $\forall i$. Uočimo da je to i dovoljan uvjet za $tr(Y^2) = 0$. Zaključujemo da je $tr(Y^2) = 0$ ako i samo ako je $c_i = 0$, $\forall i$, tj. X_i su linearno nezavisne matrice.

$\square$

Korolar 2.7. *(Apsolutna ocjena) Neka je $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ skup ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$m \leq \binom{n+1}{2}. \tag{4}$$

Dokaz. Prostor simetričnih matrica $S \subset M_n$ dimenzije je

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

Sada iz teorema 2.6 slijedi tvrdnja. $\square$

Primjer 2.8. *Iskoristimo apsolutnu ocjenu kako bismo našli maksimalne ekviangularne skupove u* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^7$. *Konstruirat ćemo neke skupove ekviangularnih pravaca koji zadovoljavaju apsolutnu ocjenu te ćemo iz toga zaključiti da je riječ o najvećim ekviangularnim skupovima za fiksirani prostor.*

a) *Neka je* $n = 3$. *Prema (4), postoji najviše* $\binom{4}{2} = 6$ *ekviangularnih pravaca u* $\mathbb{R}^3$. *Možemo ih konstruirati u* $\mathbb{R}^3$ *kao glavne dijagonale ikosaedra. Preciznije, riječ je o pravcima reprezentiranima vektorima*

$$(0,1,\phi),(0,1,-\phi),(1,\phi,0),(1,-\phi,0),(\phi,0,1),(-\phi,0,1),$$

pri čemu je $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Dakle, dokazali smo da je najveći ekviangularan skup u* $\mathbb{R}^3$ *onaj sa 6 pravaca.*

b) *Neka je* $n = 7$. *U primjeru (2.1) konstruirali smo 28 ekviangularnih pravaca u* $\mathbb{R}^7$. *Budući da prema apsolutnoj ocjeni postoji najviše* $\binom{8}{2} = 28$ *ekviangularnih pravaca u* $\mathbb{R}^7$, *zaključujemo da je to maksimalan ekviangularan skup u* $\mathbb{R}^7$.

Druga moguća gornja ocjena za broj ekviangularnih pravaca u prostoru $\mathbb{R}^n$ je takozvana *relativna ocjena*. Nazivamo je „relativna" jer ovisi o kutu koji pravci međusobno zatvaraju.

Teorem 2.9 (Relativna ocjena)**.** *Pretpostavimo da postoji* m *ekviangularnih pravaca u* $\mathbb{R}^n$ *koji međusobno zatvaraju kut* $\arccos(\alpha)$. *Ako je* $\frac{1}{\alpha^2} > n$, *tada vrijedi*

$$m \leq \frac{n - n\alpha^2}{1 - n\alpha^2}.$$

Nadalje, ako su $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *matrice ortogonalnih projekcija na te pravce, jednakost se postiže ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{m}{n} I.$$

Dokaz. Neka su $X_1, X_2 \ldots, X_m$ matrice ortogonalnih projekcija na ekviangularne pravce. Definiramo

$$Y = I - \frac{n}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i.$$

Budući da su $X_1, \ldots, X_m$ simetrične matrice, i matrica Y je simetrična. Vrijedi

$$Y^2 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_{1i}^2 & & & \\ & \sum_{i=1}^n y_{2i}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^n y_{ni}^2 \end{bmatrix}$$

iz čega zaključujemo da je $tr(Y^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 \geq 0$ te da je $tr(Y^2) = 0$ ako i samo ako je $Y = 0$. Uočimo,

$$\begin{aligned} Y^2 &= \Big(I - \frac{n}{m}\sum_{i=1}^m X_i\Big)\Big(I - \frac{n}{m}\sum_{i=1}^m X_i\Big) \\ &= I^2 - 2\Big(\frac{n}{m}\sum_{i=1}^m X_i\Big) + \Big(\frac{n}{m}\sum_{i=1}^m X_i\Big)^2 \\ &= I - \frac{2n}{m}\sum_{i=1}^m X_i + \frac{n^2}{m^2}\Big(\sum_{i=1}^m X_i\Big)^2, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} 0 \leq tr(Y^2) &= tr(I) - \frac{2n}{m}\sum_{i=1}^m tr(X_i) + \frac{n^2}{m^2} tr\Big(\Big(\sum_{i=1}^m X_i\Big)^2\Big) \\ &= n - \frac{2n}{m}(m) + \frac{n^2}{m^2}\Big(\sum_{i=1}^m tr(X_i^2) + \sum_{i\neq j} tr(X_i X_j)\Big). \end{aligned}$$

Koristeći pomoćne rezultate (2) i (3), dolazimo do nejednakosti

$$0 \leq -n + \frac{n^2}{m^2}(m + m(m-1)\alpha^2).$$

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{n^2}{m}(1 + (m-1)\alpha^2) \\ m &\leq n(1 + (m-1))\alpha^2 \\ m(1 - n\alpha^2) &\leq n - n\alpha^2 \end{aligned}$$

Iz raspisa slijedi relativna ograda za m

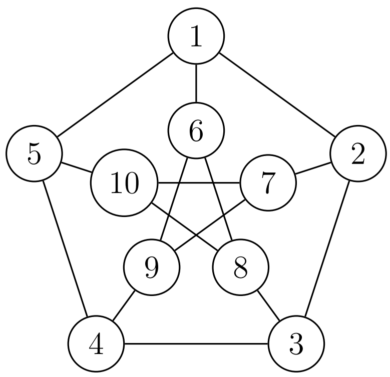
$$m \leq \frac{n - n\alpha^2}{1 - n\alpha^2},$$

za sve kutove takve da $\frac{1}{\alpha^2} > n$. Jednakost se postiže ako i samo ako je $Y = 0$, odnosno ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{m}{n} I.$$

$\square$

Primjer 2.10 (Petersenov graf)**.** *Neka je X Petersenov graf.*



Njegova Seidelova matrica dana je s

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti te matrice su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -3 = -\alpha$, obje kratnosti 5*. Slijedi da je*

$$G = I + \frac{1}{3} S(X)$$

Gramova matrica 10 *ekviangularnih pravaca u* $\mathbb{R}^5$ *koji međusobno zatvaraju kut* $\arccos(\frac{1}{3})$. *Budući da je na ovaj način postignuta relativna gornja ocjena iz teorema 2.9, zaključujemo da je u prostoru* $\mathbb{R}^5$ *moguće konstruirati* 10 *ekviangularnih pravaca koji međusobno zatvaraju kut* $\arccos(\frac{1}{3})$ *te da je to maksimalan ekviangularan skup u* $\mathbb{R}^5$ *takav da pravci međusobno zatvaraju kut* $\arccos(\frac{1}{3})$.

2.2 Neke druge poznate ocjene

U ovoj cjelini dat ćemo neke druge poznate ocjene za maksimalan broj ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$. Rezultate u ovoj cjelini predstavit ćemo bez dokaza, s ciljem davanja povijesnog pregleda rezultata. Označimo maksimalan broj ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ s $v(n)$.

Prvo ćemo iskazati neke donje ograde za $v(n)$. Donje ograde koje u ovoj cjelini predstavljamo slijede treću cjelinu članka koji su 1971. godine objavili Lemmens i Seidel [16]. Svi rezultati načelno govore da je donja ograda za $v(n)$ reda veličine $n^{\frac{3}{2}}$.

Teorem 2.11. *Za n oblika $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, vrijedi $v(n^2+n+1) \geq n(n^2+n+1)$.*

Dokaz. Vidi [16, teorem 3.1]. □

Teorem 2.12. *Za n oblika $n = p^k$, pri čemu je p prost broj različit od 2, vrijedi $v(n^2 - n + 1) \geq n^3 + 1$.*

Dokaz. Vidi [16, teorem 3.2]. □

Teorem 2.13. *Ako je $n > 5$ i $n \neq 14$, vrijedi $v(n) > 2n$.*

Dokaz. Vidi [16, teorem 3.3]. □

Relativna ocjena predstavljena u teoremu 2.9 nije jedina gornja ocjena za maksimalan broj ekviangularnih pravaca koja ovisi o kutu između pravaca. Označimo s $v_\alpha(n)$ maksimalan broj ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ koji međusobno zatvaraju kut $\arccos(\alpha)$. U članku iz 2016. godine [6] Bukh je dokazao da za svaki kut $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ postoji konstanta $C = C(\alpha)$ koja ovisi samo o α takva da je

$$v_\alpha(n) \leq Cn.$$

Idući bitan rezultat objavljen je 2018. godine [3], a mi ga iskazujemo u teoremu 2.14.

Teorem 2.14. *Neka je $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Za dovoljno veliki n vrijedi*

- $v_{\frac{1}{3}}(n) = 2n - 2$

- *za* $\alpha \neq \frac{1}{3}$, $v_\alpha(n) \leq 1.93n$.

Drugim riječima, vrijedi da je, za dovoljno velike n, $v_\alpha(n)$ maksimiziran kada je $\alpha = \frac{1}{3}$.

3 Grafovi prespajanja i dvografi

3.1 Prespajanje

Za m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ možemo na više načina odabrati ekviangularan skup. Podsjetimo, svaki pravac u $\mathbb{R}^n$ možemo predstaviti s pomoću njegovog jediničnog vektora smjera. Ekviangularan skup za m ekviangularnih pravaca je skup m jediničnih vektora pri čemu svaki predstavlja jedan od ekviangularnih pravaca. Neka imamo m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ te neka je $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ neki njihov ekviangularni skup. Budući da za svaki pravac možemo na dva načina odabrati jediničan vektor smjera (x_i ili $-x_i$), postoji ukupno 2^m ekviangularnih skupova koji predstavljaju ove pravce. Nejedinstvenost ekviangularnog skupa mogla bi naizgled predstavljati problem u našoj teoriji. Naime, različiti skupovi mogu rezultirati različitim Gramovim matricama te posljedično i različitim grafovima. Ipak, pokazat ćemo da Seidelove matrice grafova različitih ekviangularnih skupova za isti skup ekviangularnih pravaca imaju jednake svojstvene vrijednosti (i jednakih kratnosti), a na početku cjeline 2 komentirali smo kako nam je za proučavanje problema maksimalnog broja ekviangularnih pravaca interesantna samo kratnost najmanje svojstvene vrijednosti Seidelove matrice grafa. U nastavku formalno definiramo vezu između ekviangularnih skupova istog skupa pravaca te u lemi 3.2 dokazujemo tvrdnju o jednakosti svojstvenih vrijednosti.

Neka je $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ekviangularan skup za skup m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$. Neka je Ω' neki drugi ekviangularni skup za isti skup pravaca. Uočimo da Ω' možemo iz Ω dobiti tako da izaberemo skup indeksa $\sigma \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ te zamijenimo x_i iz Ω s $-x_i$ za svaki $i \in \sigma$. Neka je G Gramova matrica dobivena iz Ω te neka je G' Gramova matrica dobivena iz Ω'. Gramovu matricu G' možemo dobiti množenjem i-tog retka i i-tog stupca matrice G s -1, za svaki $i \in \sigma$. Također, neka su $X = (V, E)$ i $X' = (V', E')$ grafovi dobiveni iz Ω i Ω' redom. Tada vrijedi $V = V'$, a E' možemo dobiti tako da iz E maknemo sve bridove koji spajaju vrhove indeksirane sa σ i ostale vrhove te dodamo bridove koji spajaju vrhove indeksirane sa σ i ostale vrhove, a koji ne postoje u E. Tu operaciju zvat ćemo *prespajanjem* (eng. *switching*) na podskupu σ. Graf X' dobiven prespajanjem iz X na σ označavat ćemo s X^σ.

Definicija 3.1. *Neka je $X = (V, E)$ graf. Skup svih grafova koji se mogu dobiti prespajanjem iz X, tj. skup $\{X^\sigma \mid \sigma \subseteq V\}$, nazivamo* klasom prespajanja *nad X. Ako je neki graf Y jednak grafu X^σ za neki $\sigma \subseteq V$, onda su X i Y* ekvivalentni s obzirom na prespajanje*.*

Drugim riječima, klasa prespajanja nad X je skup svih grafova koji mogu predstavljati jedan skup ekviangularnih pravaca. Sada smo spremni iskazati i dokazati lemu 3.2.

Lema 3.2. *Neka je $X = (V, E)$ graf te neka je $\sigma \subseteq V$. Tada Seidelove matrice $S(X)$ i $S(X^\sigma)$ imaju jednake svojstvene vrijednosti s jednakim kratnostima.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da su $S(X)$ i $S(X^\sigma)$ slične matrice. Neka je D dijagonalna matrica čiji su redci i stupci indeksirani vrhovima grafa X takva da je $D_{ii} = -1$ za $i \in \sigma$ te $D_{ii} = 1$ za $i \notin \sigma$. Uočimo da je $D = D^{-1}$ (jer je $D^2 = I$). Budući da se $S(X^\sigma)$ iz $S(X)$ dobiva množenjem redaka i stupaca indeksiranih sa σ s -1, vrijedi

$$S(X^\sigma) = DS(X)D.$$

Slijedi da su $S(X)$ i $S(X^\sigma)$ slične matrice pa imaju i jednake svojstvene vrijednosti jednakih kratnosti. $\square$

Motivirani lemom 3.2 definiramo *svojstvene vrijednosti klase prespajanja* nad X kao svojstvene vrijednosti Seidelove matrice $S(X)$.

3.2 Grafovi prespajanja

U ovoj ćemo cjelini definirati grafove prespajanja te ćemo proučavati njihovu povezanost s problemom određivanja maksimalnog broja ekviangularnih pravaca u euklidskom prostoru.

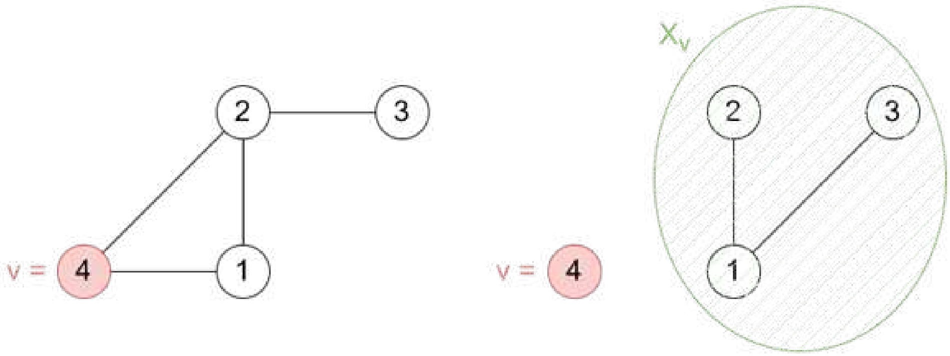
Neka je $X = (V, E)$ graf s m vrhova. Za svaki vrh v grafa X postoji jedinstveni graf oblika X^σ koji je ekvivalentan grafu X s obzirom na prespajanje za koji je v izoliran vrh. Naime, ako želimo da je X^σ graf u kojem je v izoliran, skup σ možemo odabrati na dva načina:

- ako σ ne sadrži v, nužno je da sadrži točno sve njegove susjede kako X^σ više ne bi sadržavao bridove koji spajaju v s njegovim susjedima u X, a da ne bismo niti dodali bridove koji bi postali novi susjedi od v,
- ako σ sadrži v, ne smije sadržavati njegove susjede (kako bi se izbacili bridovi koji ih spajaju) te mora sadržavati nesusjedne vrhove od v (kako se ne bi stvorili novi susjedi od v).

Uočimo da oba odabira skupa σ rezultiraju istim grafom, budući da su mogući skupovi σ točno komplementarni. Dakle, za svaki $v \in V$ postoji jedinstveni graf Y u klasi prespajanja grafa X u kojem je v izoliran vrh. Označimo s X_v graf koji dobijemo iz Y izbacivanjem izoliranog vrha v. Tada zaključujemo da skup grafova

$$\{X_v \mid v \in V(X)\}$$

ne ovisi o izboru grafa X, već samo o njegovoj klasi prespajanja.



Slika 4: Graf X i X_v, za $v = 4$.

Sada ćemo iz grafa X definirati graf $Sw(X)$ s $2m$ vrhova.

Definicija 3.3. *Neka je* $X = (V(X), E(X))$ *graf s* m *vrhova. Neka je* $Sw(X) = (V(Sw(X)), E(Sw(X)))$ *graf za koji je skup vrhova definiran s*

$$V(Sw(X)) = V(X) \times \{0, 1\},$$

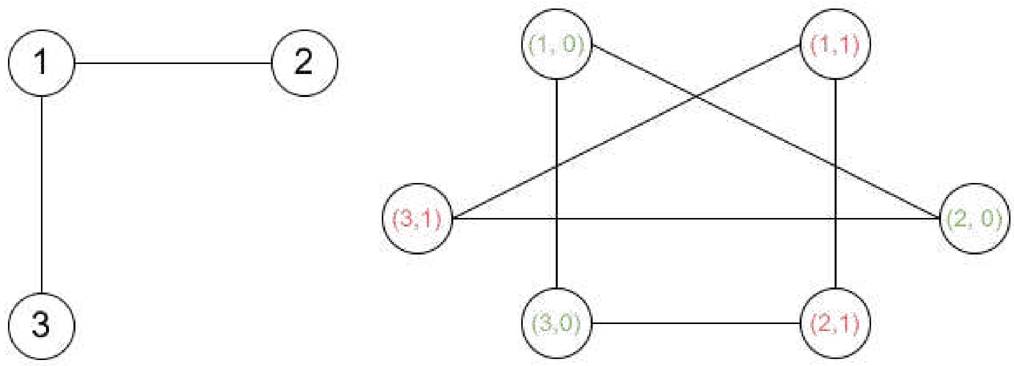
a skup bridova ekvivalencijama

$$\begin{aligned} \{(x,i),(y,i)\} \in E(Sw(X)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \{x,y\} \in E(X) \\ \{(x,i),(y,1-i)\} \in E(Sw(X)) \quad &\Longleftrightarrow \quad x \neq y \text{ i } \{x,y\} \notin E(X), \end{aligned}$$

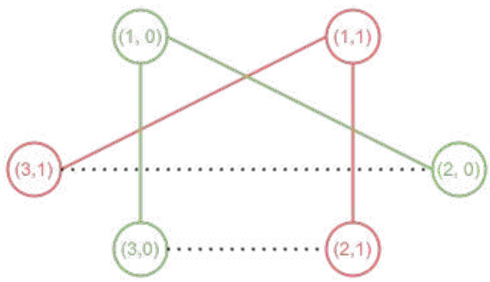
za $i \in \{0, 1\}$. *Tada* $Sw(X)$ *nazivamo* grafom prespajanja *grafa* X.

Uočimo da su svi vrhovi grafa $Sw(X)$ stupnja $m - 1$. Stoga je $Sw(X)$ regularan graf. Dva podgrafa inducirana vrhovima $V(X) \times \{i\}$ možemo promatrati kao kopije grafa X koje $Sw(X)$ sadrži. Za daljnju diskusiju potrebno je definirati pojam *susjedstva* vrha u grafu.

Definicija 3.4. *Neka je* $X = (V, E)$ *te neka je* $v \in V$ *vrh grafa* X. Susjedstvo *vrha* v *u grafu* X *je podgraf induciran svim susjedima vrha* v *u grafu* X.



Slika 5: Graf X i odgovarajući graf prespajanja $Sw(X)$.



Slika 6: $Sw(X)$ sadrži dvije kopije grafa X.

Propozicija 3.5. *Neka je $Sw(X)$ graf prespajanja grafa X. Za proizvoljan $v \in V(X)$ vrhovi $(v, 0)$ i $(v, 1)$ iz $Sw(X)$ imaju disjunktna susjedstva u $Sw(X)$. Ta susjedstva su izomorfna s X_v.*

Dokaz. Neka je $V(X) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Tada su vrhovi grafa prespajanja $Sw(X)$ oblika $\{v_1, \ldots, v_n\} \times \{0, 1\}$. Bez smanjenja općenitosti promatrajmo susjedstva vrhova $(v_1, 0)$ i $(v_1, 1)$. Iz definicije 3.3 zaključujemo da su ta susjedstva disjunktna. Budući da je vrh $(v_1, 0)$ susjedan vrhu $(v_j, i_j) \in V(Sw(X))$, za proizvoljan $j \in \{2, \ldots, n\}$ ako i samo ako je vrh $(v_1, 1)$ susjedan vrhu $(v_j, 1 - i_j)$, susjedstva vrhova $(v_1, 0)$ i $(v_1, 1)$ su izomorfna. Stoga je dovoljno dokazati da je susjedstvo vrha $(v_1, 0)$ izomorfno s X_{v_1}.

Iz definicije 3.3 slijedi da je vrh $(v_1, 0)$ u grafu $Sw(X)$ ili susjedan vrhu $(v_j, 0)$ ili vrhu $(v_j, 1)$, za svaki $j \in \{2, \ldots, n\}$. To znači da je susjedstvo vrha $(v_1, 0)$ podgraf grafa $Sw(X)$ induciran vrhovima $\{(v_2, i_2), \ldots, (v_n, i_n)\}$, pri čemu je svaki $i_j \in \{0, 1\}$. Označimo taj podgraf s Y. Neka su $(v_j, i_j), (v_k, i_k) \in V(Y)$ proizvoljni. Dovoljno je dokazati da su vrhovi (v_j, i_j) i (v_k, i_k) susjedni u Y ako i samo ako su vrhovi v_j i v_k susjedni u X_{v_1}. Podsjetimo da vrijedi

$X_{v_1} = X^\sigma$, pri čemu je σ skup svih vrhova u X koji su susjedni vrhu v_1.

Postoji 8 mogućih odnosa između vrhova v_1, v_j i v_k u grafu X pa tako i između vrhova $(v_1, 0)$, (v_j, i_j) i (v_k, i_k) u grafu $Sw(X)$. Prvo navodimo slučajeve za koje su vrhovi (v_j, i_j) i (v_k, i_k) susjedni u $Sw(X)$.

- $(v_j, 0), (v_k, 0) \in V(Y)$ i $(v_j, 0) \sim (v_k, 0)$ u Y

  $\iff v_1 \sim v_j,\ v_1 \sim v_k,\ v_j \sim v_k$ u X

  $\implies v_j, v_k \in \sigma$ i $v_j \sim v_k$ u X

  $\implies v_j \sim v_k$ u X_{v_1}

- $(v_j, 0), (v_k, 1) \in V(Y)$ i $(v_j, 0) \sim (v_k, 1)$ u Y

  $\iff v_1 \sim v_j,\ v_1 \nsim v_k,\ v_j \nsim v_k$ u X

  $\implies v_j \in \sigma,\ v_k \notin \sigma$ i $v_j \nsim v_k$ u X

  $\implies v_j \sim v_k$ u X_{v_1}

- $(v_j, 1), (v_k, 0) \in V(Y)$ i $(v_j, 1) \sim (v_k, 0)$ u Y, analogno prošlom

- $(v_j, 1), (v_k, 1) \in V(Y)$ i $(v_j, 1) \sim (v_k, 1)$ u Y

  $\iff v_1 \nsim v_j,\ v_1 \nsim v_k,\ v_j \sim v_k$ u X

  $\implies v_j, v_k \notin \sigma$ i $v_j \sim v_k$ u X

  $\implies v_j \sim v_k$ u X_{v_1}

Zaključujemo da vrijedi: ako su vrhovi (v_j, i_j) i (v_k, i_k) susjedni u Y, onda su vrhovi v_j i v_k susjedni u X_{v_1}. Promotrimo sada slučajeve za koje vrhovi (v_j, i_j) i (v_k, i_k) nisu susjedni u $Sw(X)$.

- $(v_j, 0), (v_k, 0) \in V(Y)$ i $(v_j, 0) \nsim (v_k, 0)$ u Y

  $\iff v_1 \sim v_j,\ v_1 \sim v_k,\ v_j \nsim v_k$ u X

  $\implies v_j, v_k \in \sigma$ i $v_j \nsim v_k$ u X

  $\implies v_j \nsim v_k$ u X_{v_1}

- $(v_j, 0), (v_k, 1) \in V(Y)$ i $(v_j, 0) \nsim (v_k, 1)$ u Y

  $\iff v_1 \sim v_j,\ v_1 \nsim v_k,\ v_j \sim v_k$ u X

  $\implies v_j \in \sigma,\ v_k \notin \sigma$ i $v_j \sim v_k$ u X

  $\implies v_j \nsim v_k$ u X_{v_1}

- $(v_j, 1), (v_k, 0) \in V(Y)$ i $(v_j, 1) \nsim (v_k, 0)$ u Y, analogno prošlom

- $(v_j, 1), (v_k, 1) \in V(Y)$ i $(v_j, 1) \nsim (v_k, 1)$ u Y

  $\iff v_1 \nsim v_j,\ v_1 \nsim v_k,\ v_j \nsim v_k$ u X

  $\implies v_j \nsim v_k$ u X i $v_j, v_k \notin \sigma$

  $\implies v_j \nsim v_k$ u X_{v_1}

Zaključujemo da vrijedi: ako vrhovi (v_j, i_j) i (v_k, i_k) nisu susjedni u Y, onda vrhovi v_j i v_k nisu susjedni u X_{v_1}. Slijedi da je susjedstvo proizvoljnog vrha (v, i) u $Sw(X)$ izomorfno s X_v. □

Propozicija 3.6. *Graf prespajanja $Sw(X)$ u potpunosti je određen susjedstvom bilo kojeg vrha $(v, i) \in V(Sw(X))$.*

Dokaz. Neka je $\{v_1, \dots, v_n\}$ skup vrhova grafa X. Tada su vrhovi grafa prespajanja $Sw(X)$ oblika $\{v_1, \dots v_n\} \times \{0, 1\}$. Dovoljno je dokazati da susjedstvo proizvoljnog vrha grafa $Sw(X)$ određuje $Sw(X)$. Bez smanjenja općenitosti proučavamo susjedstvo vrha $(v_1, 0)$. Cilj nam je konstruirati $Sw(X)$.

Iz definicije 3.3 slijedi da je vrh $(v_1, 0)$ u grafu $Sw(X)$ ili susjedan vrhu $(v_j, 0)$ ili vrhu $(v_j, 1)$, za svaki $j \in \{2, \dots, n\}$. To znači da je susjedstvo vrha $(v_1, 0)$ podgraf Y induciran vrhovima $\{(v_2, i_2), \dots, (v_n, i_n)\}$, pri čemu je svaki $i_j \in \{0, 1\}$. Dodajemo podgrafu Y neki vrh oblika (v_1, i_1), $i_1 \in \{0, 1\}$ koji je susjedan svim vrhovima iz Y. To činimo jer znamo da je Y susjedstvo nekog vrha tog oblika u $Sw(X)$. Novonastali graf ima n vrhova. Označimo ga s Y_1. Neka je Y_2 graf s n vrhova koji je isti kao Y_1 (kopija), samo svaki vrh označen s (v_j, i_j) u Y_1 preimenujemo u $(v_j, 1 - i_j)$.

Graf prespajanja $Sw(X)$ sastoji se od podgrafova Y_1 i Y_2 koji zbog definicije 3.3 moraju biti povezani na sljedeći način. Vrhovi (v_j, i_j) i $(v_k, 1 - i_k)$ susjedni su ako i samo ako vrhovi (v_j, i_j) i (v_k, i_k) nisu susjedni i $j \neq k$. Iz proizvoljnog susjedstva grafa $Sw(X)$ rekonstruirali smo $Sw(X)$ čime je tvrdnja dokazana. □

Neka je X graf s m vrhova te neka je $Sw(X)$ graf prespajanja grafa X. Iz propozicije 3.6 slijedi da je $Sw(X)$ u potpunosti određen susjedstvom bilo kojeg vrha $(v, i) \in V(Sw(X))$. To susjedstvo i graf X_v su izomorfni (propozicija 3.5) pa zaključujemo da je $Sw(X)$ u potpunosti određen bilo kojim grafom X_v. Iz ranije diskusije znamo da je skup $\{X_v \mid v \in V(X)\}$ u potpunosti određen klasom prespajanja grafa X pa slijedi da je i $Sw(X)$ u potpunosti određen klasom prespajanja grafa X, a ne određenim izborom grafa X. Iz toga slijedi da su grafovi X i Y ekvivalentni s obzirom na prespajanje ako i samo ako su njihovi grafovi prespajanja $Sw(X)$ i $Sw(Y)$ izomorfni. Zbog komentara iz cjeline 3.1 zaključujemo da postoji bijekcija između skupova m ekviangularnih pravaca u euklidskom prostoru i klasa prespajanja grafova s

m vrhova. Budući da grafovi iz iste klase prespajanja rezultiraju izomorfnim grafovima prespajanja, slijedi da postoji bijekcija između grafova prespajanja s $2m$ vrhova i skupova m ekviangularnih pravaca. Drugim riječima, za proizvoljan skup ekviangularnih pravaca u prostoru možemo u potpunosti definirati graf prespajanja koji neće ovisiti o izboru ekviangularnog skupa, već samo o skupu ekviangularnih pravaca!

Proučimo sada svojstvene vrijednosti grafa prespajanja $Sw(X)$. Neka je X graf s matricom susjedstva A te neka je $\bar{X}$ komplement od X s matricom susjedstva $\bar{A}$. Iz definicije $Sw(X)$ slijedi da je matrica susjedstva grafa $Sw(X)$ oblika

$$\begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ \bar{A} & A \end{bmatrix}.$$

Ako sa $S(X)$ označimo Seidelovu matricu grafa X, a s J matricu jedinica, lako se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned} S(X) &= \bar{A} - A, \\ A + \bar{A} &= J - I. \end{aligned}$$

Budući da vrijedi

$$\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

te da je

$$\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ \bar{A} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \bar{A} & \bar{A} + A \\ \bar{A} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J - I & 0 \\ \bar{A} & -S(X) \end{bmatrix},$$

slijedi da su

$$\begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ \bar{A} & A \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} J - I & 0 \\ \bar{A} & -S(X) \end{bmatrix}$$

slične matrice. Matrica $J - I$ je matrica susjedstva potpunog grafa pa slijedi da je karakteristični polinom grafa $Sw(X)$ jednak umnošku karakterističnog polinoma potpunog grafa K_m i karakterističnog polinoma matrice $-S(X)$. Budući da matrica $J - I$ ima svojstvene vrijednosti -1 (kratnosti $m - 1$) i $m-1$ (kratnosti 1), graf $Sw(X)$ ima svojstvene vrijednosti -1 (kratnosti $m-1$), $m - 1$ (kratnosti 1) te svojstvene vrijednosti matrice $S(X)$. Podsjetimo, svojstvene vrijednosti matrice $S(X)$ upravo su svojstvene vrijednosti klase prespajanja grafa X. Motivirani tom opservacijom definiramo netrivijalne svojstvene vrijednosti grafa prespajanja.

Definicija 3.7. *Svojstvene vrijednosti klase prespajanja grafa X nazivamo* netrivijalnim svojstvenim vrijednostima *grafa prespajanja $Sw(X)$ od X.*

Definicija 3.8. *Graf prespajanja $Sw(X)$ je* regularan graf prespajanja *ako ima samo dvije netrivijalne svojstvene vrijednosti.*

Dakle, $Sw(X)$ je regularan graf prespajanja ako odgovarajuća klasa prespajanja ima samo dvije različite svojstvene vrijednosti. Nakon što smo definirali grafove prespajanja i regularnost grafova prespajanja te pokazali njihovu povezanost sa skupom ekviangularnih pravaca, cilj nam je objasniti zašto je ova struktura korisna za proučavanje problema maksimalnog broja ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$. Ključni rezultat iskazujemo u teoremu 3.12, a slijedit će direktno iz lema 3.10 i 3.11 koje ćemo i dokazati. Lemu 3.9 koristit ćemo u dokazu leme 3.10.

Lema 3.9. *Neka su A i B kvadratne matrice istih dimenzija. Tada matrice AB i BA imaju jednake svojstvene vrijednosti različite od nule s jednakim kratnostima.*

Dokaz. Neka je $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost od AB te neka je v njoj odgovarajući svojstveni vektor. Prema definiciji svojstvenog vektora vrijedi $v \neq 0$ te $ABv = \lambda v$. Stoga vrijedi

$$(BA)(Bv) = B(ABv) = B\lambda v = \lambda Bv.$$

Iz toga slijedi da $Bv \neq 0$. Naime, u suprotnom bi vrijedilo da je $ABv = \lambda v = 0$, što ne vrijedi budući da je $\lambda \neq 0$. Zaključujemo da je Bv svojstveni vektor od BA, a λ je svojstvena vrijednost od BA. $\square$

Lema 3.10. *Neka su $X_1, \ldots, X_m$ matrice projekcija na skup ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ koji zatvaraju kut* $\arccos(\alpha)$. *Ako je*

$$I = \sum_{i=1}^{m} c_i X_i,$$

onda je $c_i = n/m$ za sve i te vrijedi

$$m = \frac{n - n\alpha^2}{1 - n\alpha^2}.$$

Klasa prespajanja koja odgovara ovim ekviangularnim pravcima ima svojstvene vrijednosti

$$-\frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{m-n}{n\alpha}$$

s kratnostima $m - n$ i n redom. Ako vrijedi $m \neq 2n$, onda je $1/\alpha$ cijeli broj.

Dokaz. Neka su $X_1, \dots, X_m$ matrice projekcija na skup ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ sa zajedničkim kutom $\arccos(\alpha)$ te neka za njih vrijedi pretpostavka teorema

$$I = \sum_{i=1}^{m} c_i X_i.$$

Za proizvoljan indeks $j \in \{1, \dots, m\}$ vrijedi

$$X_j = X_j I = X_j \sum_{i=1}^{m} c_i X_i = \sum_{i=1}^{m} c_i X_i X_j.$$

Sada zbog jednakosti (2) i (3) slijedi

$$1 = tr(X_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i tr(X_i X_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} c_i \alpha^2 + c_j = \alpha^2 \sum_{i=1}^{m} c_i + (1 - \alpha^2) c_j,$$

iz čega slijedi da je za svaki $j \in \{1, \dots, m\}$

$$c_j = \frac{1 - \alpha^2 (\sum_{i=1}^{m} c_i)}{1 - \alpha^2}. \tag{5}$$

Dakle, svi c_i su jednaki. Budući da vrijedi

$$n = tr(I) = tr\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} c_i tr(X_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i = m c_i$$

slijedi da je $c_i = \frac{n}{m}$, za svaki $i \in \{1, \dots, m\}$. Sada zbog (5) slijedi

$$\frac{n}{m} = \frac{1 - \alpha^2 n}{1 - \alpha^2},$$

iz čega slijedi da je $m = \frac{n - n\alpha^2}{1 - n\alpha^2}$.

Neka je sada $\Omega = \{x_1, \dots, x_m\}$ neki ekviangularan skup za ekviangularne pravce iz pretpostavki teorema. Tada je $X_i = x_i x_i^T$. Neka je U matrica dimenzija $n \times m$ čiji su stupci vektori iz Ω te neka je S Seidelova matrica određena ekviangularnim skupom Ω. Znamo da vrijede jednakosti

$$UU^T = \sum_{i=1}^{m} x_i x_i^T = \sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{I}{c_i} = \frac{m}{n} I,$$
$$U^T U = I + \alpha S.$$

Zbog leme 3.9 vrijedi da UU^T i $U^T U$ imaju jednake netrivijalne svojstvene vrijednosti jednakih kratnosti. Budući da UU^T ima svojstvene vrijednosti

0 i m/n, kratnosti $m-n$ i n redom, zaključujemo da U^TU ima jednake netrivijalne svojstvene vrijednosti jednakih kratnosti. Ako s λ označimo svojstvenu vrijednost od U^TU, iz raspisa

$$\begin{aligned}\det(S-\mu I) &= \det\Big(\frac{1}{\alpha}U^TU - \Big(\frac{1}{\alpha}+\mu\Big)I\Big)\\ &= \frac{1}{\alpha}\det(U^TU-(1+\alpha\mu)I)\end{aligned}$$

slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice S oblika $\frac{\lambda-1}{\alpha}$. Stoga su svojstvene vrijednosti od S

$$-\frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{m-n}{n\alpha}$$

s kratnostima $m-n$ i n redom. Budući da su elementi matrice S cijeli brojevi, svojstvene vrijednosti od S su korijeni polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Stoga su ove svojstvene vrijednosti ili konjugirano kompleksni par ili cijeli brojevi. Ako su kratnosti svojstvenih vrijednosti različite, odnosno ako je $m \neq 2n$, obje svojstvene vrijednosti su cijeli brojevi pa je u tom slučaju posebno i $\frac{1}{\alpha}$ cijeli broj. □

Lema 3.11. *Graf prespajanja $Sw(X)$ ima dvije netrivijalne svojstvene vrijednosti ako i samo ako skup ekviangularnih pravaca koji određuje postiže relativnu ocjenu iz teorema 2.9.*

Dokaz. Ako neki skup ekviangularnih pravaca $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ postiže relativnu ocjenu iz teorema 2.9, tada prema tom teoremu slijedi da za matrice projekcija na te pravce $X_1, \ldots, X_m$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{m}{n} I.$$

Iz toga zaključujemo da se I nalazi u linearnoj ljuski tih projekcija. Sada prema lemi 3.10 slijedi da odgovarajuća klasa prespajanja ima dvije svojstvene vrijednosti pa odgovarajući graf prespajanja ima dvije netrivijalne svojstvene vrijednosti.

Obrnuto, pretpostavimo da je $Sw(X)$ graf prespajanja s m vrhova koji ima dvije netrivijalne svojstvene vrijednosti te neka on predstavlja skup ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ sa zajedničkim kutom $\arccos(\alpha)$. Neka je S Seidelova matrica nekog odgovarajućeg ekviangularnog skupa $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Prema diskusiji iz cjeline 2 slijedi da je najmanja svojstvena vrijednost od S jednaka $-1/\alpha$ te je ona kratnosti $m-n$. Neka je λ_2 druga netrivijalna svojstvena vrijednost. Budući da je S simetrična matrica, slična je dijagonalnoj matrici D čiji su elementi svojstvene vrijednosti matrice S. Kako slične matrice imaju jednak trag, slijedi da je zbroj svojstvenih vrijednosti matrice S jednak 0. Dakle, vrijedi

$$-\frac{1}{\alpha}(m-n)+\lambda_2 n=0,$$

odnosno

$$\lambda_2=\frac{m-n}{\alpha n}.$$

Pretpostavimo da je $1/\alpha^2 > n$. Neka su $X_1,\ldots,X_m$ matrice projekcija na skup m ekviangularnih pravaca. Tada za svaki i vrijedi $X_i = x_i x_i^T$. Sada prema teoremu 2.9 vrijedi

$$m\leq\frac{n-n\alpha^2}{1-n\alpha^2},$$

a jednakost se postiže ako i samo ako je

$$\sum_{i=1}^{m} X_i=\frac{m}{n}I.$$

Neka je U matrica čiji su stupci vektori $x_1,\ldots,x_m$. Tada je

$$UU^T=\sum_{i=1}^{m} x_i x_i^T=\sum_{i=1}^{m} X_i.$$

Također vrijedi da je

$$G=U^TU=I+\alpha S$$

Gramova matrica vektora iz Ω. Prema lemi 3.9, UU^T i U^TU imaju jednake netrivijalne svojstvene vrijednosti jednakih kratnosti. Slično kao u dokazu leme 3.10 možemo pokazati da činjenica da S ima svojstvene vrijednosti $-1/\alpha$ i λ_2 kratnosti $m-n$ i n redom implicira da U^TU ima svojstvene vrijednosti 0 i m/n kratnosti $m-n$ i n redom. Dakle, UU^T je matrica dimenzija $n\times n$ sa svojstvenom vrijednosti m/n kratnosti n. Slijedi da nužno vrijedi

$$UU^T=\sum_{i=1}^{m} X_i=\frac{m}{n}I,$$

pa zaključujemo da je zadovoljena jednakost u relativnoj ocjeni iz teorema 2.9, odnosno da vrijedi

$$m=\frac{n-n\alpha^2}{1-n\alpha^2}.$$

$\square$

Iz leme 3.11 direktno slijedi tvrdnja teorema 3.12.

Teorem 3.12. *Neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ te neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Neka je*

$$m = \frac{n - n\alpha^2}{1 - n\alpha^2}.$$

Postoji skup m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ koji međusobno zatvaraju kut $\arccos(\alpha)$ *ako i samo ako postoji regularan graf prespajanja s $2m$ vrhova čija je najmanja svojstvena vrijednost $\frac{-1}{\alpha}$ kratnosti $m - n$.*

3.3 Dvografi

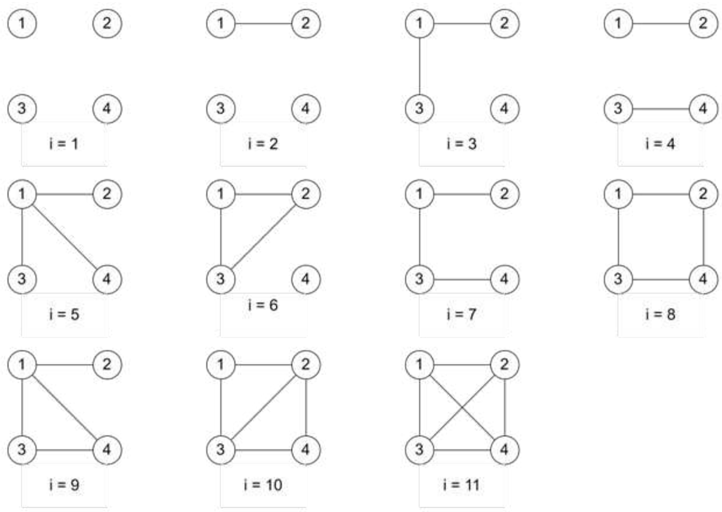
U ovoj cjelini uvodimo pojam *dvografa*. Definirat ćemo dvografe i regularne dvografe, objasniti definiciju na primjeru te povezati uvedene pojmove s pojmovima iz cjeline 3.2.

Definicija 3.13. *Neka je V konačan skup te neka je Δ familija tročlanih podskupova od V za koju vrijedi da svaki četveročlani podskup od V sadrži paran broj podskupova iz familije Δ. Uređeni par $\Gamma = (V, \Delta)$ nazivamo* dvograf. *Za skupove iz familije Δ kažemo da su* koherentni.

Uočimo da iz proizvoljnog grafa $X = (V, E)$ možemo konstruirati dvograf $\Gamma = (V, \Delta)$ tako da definiramo familiju Δ kao familiju tročlanih podskupova od V koji u X induciraju podgraf s neparnim brojem bridova. Naime, postoji 11 fundamentalno različitih grafova s 4 vrha. To znači da će za proizvoljan četveročlani podskup $S \subseteq V$ podgraf u X induciran vrhovima iz S imati neki od 11 mogućih (do na izomorfizme) različitih oblika. Prebrojimo li za svaki mogući oblik broj podgrafova s 3 vrha koji imaju neparno mnogo bridova, dobit ćemo paran broj takvih podgrafova.

Pokažimo da svaki graf s 4 vrha zaista ima paran broj podgrafova s 3 vrha koji imaju neparan broj bridova. Na slici 7 ilustrirani su svi fundamentalno različiti grafovi s 4 vrha. Označimo s δ_i familije tročlanih podskupova vrhova i-tog grafa na slici koji induciraju podgraf i-tog grafa s neparnim brojem bridova. Tada slijedi da je

- $\delta_1 = \emptyset$,
- $\delta_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$,
- $\delta_3 = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$,
- $\delta_4 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$,



Slika 7: Fundamentalno različiti grafovi s 4 vrha.

- $\delta_5 = \emptyset$,
- $\delta_6 = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$,
- $\delta_7 = \{\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$,
- $\delta_8 = \emptyset$,
- $\delta_9 = \{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$,
- $\delta_{10} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}$,
- $\delta_{11} = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$.

Uočimo da je $|\delta_i|$ paran za svaki i.

Definicija 3.14. *Neka je $X = (V, E)$ graf te neka je Δ familija svih tročlanih podskupova od V koji u X induciraju podgraf s neparnim brojem bridova. Tada $\Gamma = (V, \Delta)$ zovemo* dvograf pridružen grafu X.

Dvografi su struktura koja se često koristi pri proučavanju problema ekviangularnih pravaca. Naime, skup ekviangularnih pravaca u euklidskom prostoru može se shvatiti kao dvograf. U cjelini 3.2 objasnili smo kako postoji jedan-jedan korespondencija između skupova ekviangularnih pravaca i grafova prespajanja. Ključan rezultat ove cjeline, teorem 3.15, tvrdi da su graf prespajanja i dvograf ekvivalentni pojmovi.

Teorem 3.15. *Postoji bijekcija između grafova prespajanja i dvografa.*

Dokaz. Neka je $X = (V, E)$ proizvoljan graf s grafom prespajanja $Sw(X)$. Prema diskusijama iz cjeline 3.2, dovoljno je dokazati ekvivalenciju klase prespajanja grafa X i dvografa pridruženog grafu X.

Uočimo da operacijom prespajanja na bilo kojem podskupu $\sigma \subseteq V$ ne mijenjamo parnost broja bridova niti jednog podgrafa od X s tri vrha. Naime, operacijom prespajanja možemo iz induciranog podgrafa s 3 vrha izbaciti $k \in \{0, 1, 2\}$ bridova, ali moramo istovremeno i dodati $2 - k$ bridova u taj podgraf. Iz toga slijedi da grafovi X, Y koji su ekvivalentni s obzirom na prespajanje imaju isti pridruženi dvograf pa tako jedna klasa prespajanja ima točno jedan pridruženi dvograf.

Obrnuto, neka je $\Gamma = (V, \Delta)$ dvograf. Definirajmo bridove grafa $X = (V, E)$ kojemu je Γ pridruženi dvograf na sljedeći način. Za proizvoljan vrh $v \in V$ neka su dva vrha $x, y \in V \setminus \{v\}$ susjedna u grafu X ako je $\{x, y, v\} \in \Delta$ te neka je v izolirani vrh u X. Da bismo dokazali da je Γ zaista pridruženi dvograf tako definiranog grafa X, dovoljno je dokazati da podgraf induciran proizvoljnim skupom $\{a, b, c\} \in \Delta$ ima neparan broj bridova u X. Ako je $v \in \{a, b, c\}$, tvrdnja je očita. Pretpostavimo stoga da vrijedi $v \notin \{a, b, c\}$. Prema definiciji dvografa, četveročlani skup $\{a, b, c, v\}$ mora sadržavati $0, 2$ ili 4 tročlana podskupa iz Δ. Budući da je $\{a, b, c\} \in \Delta$, slijedi da ili točno jedan ili točno tri od skupova $\{a, b, v\}, \{a, c, v\}, \{b, c, v\}$ moraju biti koherentni. Stoga podgraf induciran skupom $\{a, b, c\}$ u X ima jedan ili tri brida u Γ. $\square$

Primjer 3.16. *Neka su*

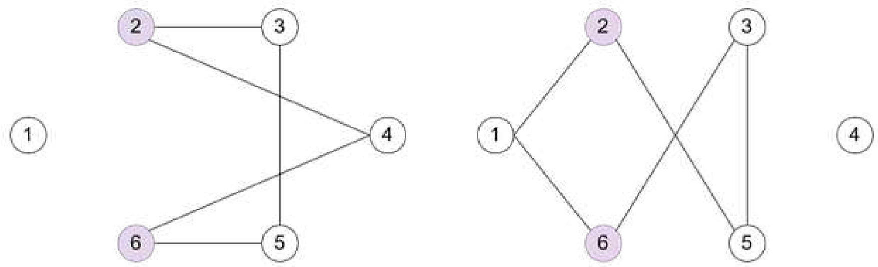
$$\begin{aligned} &V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ i \\ &\Delta = \{123, 124, 135, 146, 156, 236, 245, 256, 345, 346\}, \end{aligned}$$

pri čemu s „abc" skraćeno označavamo tročlani podskup $\{a, b, c\} \subseteq V$. Pokažimo prvo da je $\Gamma = (V, \Delta)$ zaista dvograf. Postoji 15 četveročlanih podskupova skupa V. U tablici 3.16 navedeni su svi četveročlani podskupovi od V te tročlani skupovi iz Δ koje sadrže. Možemo uočiti da zaista svaki četveročlani podskup od V sadrži paran broj skupova (preciznije, svaki sadrži 2 skupa) iz Δ iz čega prema definiciji zaključujemo da je Γ dvograf.

Konstruirajmo sada graf $X = (V, E)$ takav da je $\Gamma = (V, \Delta)$ njemu pridruženi dvograf prema konstrukciji iz dokaza teorema 3.15. Neka je $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Odaberimo vrh $v = 1$. Vrh 1 bit će izoliran u grafu X. Dva vrha $a, b \in V$ bit će susjedni u X ako se skup $1ab$ nalazi u Δ. Odavde dobivamo skup bridova $E = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$. Time smo definirali $X = (V, E)$. Odaberimo sada na primjer $\sigma = \{2, 6\} \subseteq V$ te konstruirajmo graf $X^\sigma = (V, E')$ koji je ekvivalentan s obzirom na prespajanje grafu X. Oba grafa prikazana su na slici 8.

$1234 \supseteq 123, 124$	$1256 \supseteq 156, 256$	$2345 \supseteq 245, 345$
$1235 \supseteq 123, 135$	$1345 \supseteq 135, 345$	$2346 \supseteq 236, 346$
$1236 \supseteq 123, 236$	$1346 \supseteq 146, 346$	$2356 \supseteq 236, 256$
$1245 \supseteq 124, 245$	$1356 \supseteq 135, 156$	$2456 \supseteq 245, 256$
$1246 \supseteq 124, 146$	$1456 \supseteq 146, 156$	$3456 \supseteq 345, 346$

Tablica 2: Svi četveročlani podskupovi od V te tročlani skupovi iz Δ koje sadrže.



Slika 8: Grafovi X i X^σ za $\sigma = \{2, 6\}$.

Sa slike možemo naći dvograf $\Gamma' = (V, \Delta')$ *pridružen grafu* X^σ *tako što* Δ' *definiramo kao familiju tročlanih podskupova od* V *koji u* X^σ *induciraju podgrafe s jednim ili tri brida. Na taj način dobivamo* $\Delta' = \Delta$, *odnosno dvograf* Γ' *pridružen grafu* X^σ *zaista je jednak dvografu* Γ.

Uočimo da graf koji konstruiramo iz dvografa ovisi o izboru vrha v koji će biti izoliran u X. Ipak, koji god vrh odaberemo, dobit ćemo graf iz iste klase prespajanja. Podgraf $X \setminus v$ grafa X koji dobijemo iz dvografa Γ odabirom vrha $v \in V$ koji će biti izoliran u X koristit ćemo u kasnijim rezultatima. Iz cjeline 3.2 znamo da za odabran $v \in V$ postoji jedinstveni graf u klasi prespajanja za koji je v izoliran. Graf koji dobijemo iz tog grafa izbacivanjem vrha v označili smo s X_v, a sada ćemo ga zvati *potomkom* dvografa Γ s obzirom na v.

Zbog ekvivalencije pojma dvografa i klase prespajanja, kada govorimo o svojstvenim vrijednostima dvografa Γ, mislit ćemo na svojstvene vrijednosti klase prespajanja grafa X kojem je Γ pridružen, odnosno na svojstvene vrijednosti Seidelove matrice bilo kojeg grafa iz odgovarajuće klase prespajanja. Prema defnciji 3.7, to su netrivijalne svojstvene vrijednosti odgovarajućeg grafa prespajanja $Sw(X)$.

Preostalo nam je uvesti pojam *regularnog dvografa*.

Definicija 3.17. *Dvograf* $\Gamma = (V, \Delta)$ *je* regularan dvograf stupnja b *ako je svaki dvočlani podskup od* V *sadržan u točno* b *skupova iz* Δ.

Sljedeći rezultat navodimo bez dokaza, prema [7, str. 878]. Teorem 3.18 implicira da je dvograf regularan ako i samo ako je regularan i njemu ekvivalentan graf prespajanja.

Teorem 3.18. *Dvograf* $\Gamma = (V, \Delta)$ *je regularan ako i samo ako ima dvije svojstvene vrijednosti* $\lambda_{1,2}$ *takve da vrijedi* $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ *i* $\lambda_1 \lambda_2 = 1 - |V|$.

Ako je $\Gamma = (V, \Delta)$ dvograf te ako je ∇ familija tročlanih podskupova od V koji nisu u Δ, tada je $\bar{\Gamma} = (V, \nabla)$ dvograf. Dvograf $\bar{\Gamma}$ nazivamo *komplementom* dvografa Γ. Ako je $|V| = n$ te ako je $\Gamma = (V, \Delta)$ regularan dvograf stupnja b, onda je $\bar{\Gamma}$ regularan dvograf stupnja $n - 2 - b$.

4 Regularni dvografi

4.1 Jako regularni i jaki grafovi

Definicija 4.1. *Graf* $X = (V, E)$ *je* jako regularan *s parametrima* (n, k, a, c) *ako zadovoljava*

- X *nije ni prazan ni potpun,*
- $|V| = n$,
- X *je* k*-regularan graf,*
- *svaki par susjednih vrhova u* X *ima* a *zajedničkih susjeda te*
- *svaki par nesusjednih vrhova u* X *ima* c *zajedničkih susjeda.*

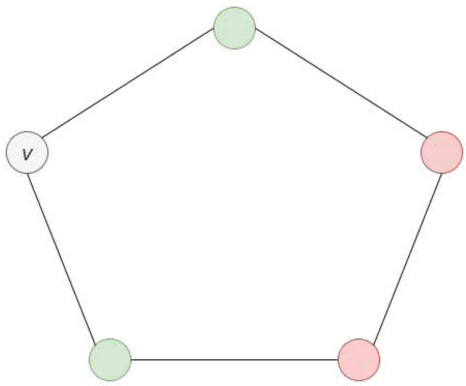
Jako regularne grafove možemo nazivati i pravim jako regularnim grafovima. U nastavku ćemo sintagmu *moguće nepravi jako regularan graf* koristiti za graf koji je prazan, potpun ili jako regularan.

Primjer 4.2. *Ciklički graf s* 5 *vrhova jako je regularan s parametrima* $(5, 2, 0, 1)$.

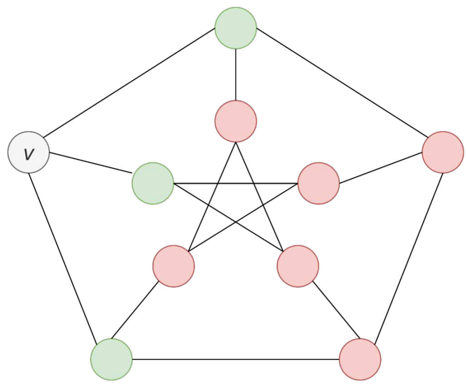
Primjer 4.3. *Petersenov graf je jako regularan graf s parametrima* $(10, 3, 0, 1)$.

Primjer 4.4. *Neka je* $q = p^n$, *pri čemu je* p *prost broj, a* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $q \equiv 1 \pmod 4$. *Definiramo* Paleyev graf *s parametrom* q, *u oznaci* $QR(q)$ *kao graf čiji su vrhovi elementi Galoisova polja* $GF(q)$, *a čiji su bridovi definirani na sljedeći način: vrhovi* v_1 *i* v_2 *su susjedni ako i samo ako je njihova razlika kvadrat u* $GF(q) \setminus \{0\}$.

Promotrimo prvo Paleyev graf za $q = 13$. *Budući da je* 13 *prost broj, jednostavno dobivamo da su u* $GF(13)$ *nenul kvadrati* $\pm 1, \pm 3, \pm 4$ *iz čega*

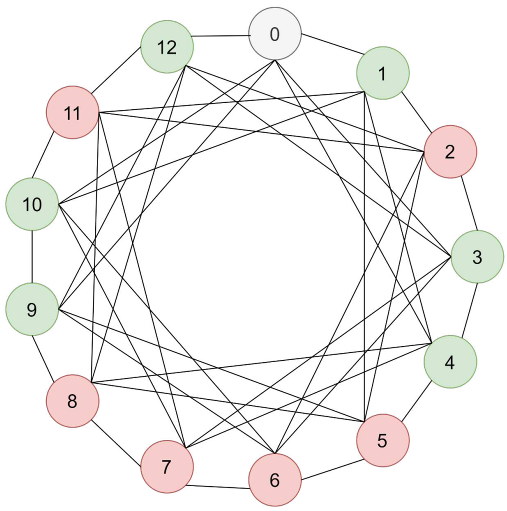


Slika 9: Ciklički graf.



Slika 10: Petersenov graf.

Slika 11: Primjeri jako regularnih grafova s označenim susjednim (zeleno) i nesusjednim (crveno) vrhovima od v.



Slika 12: Graf $QR(13)$ s označenim susjednim (zeleno) i nesusjednim (crveno) vrhovima od vrha 0.

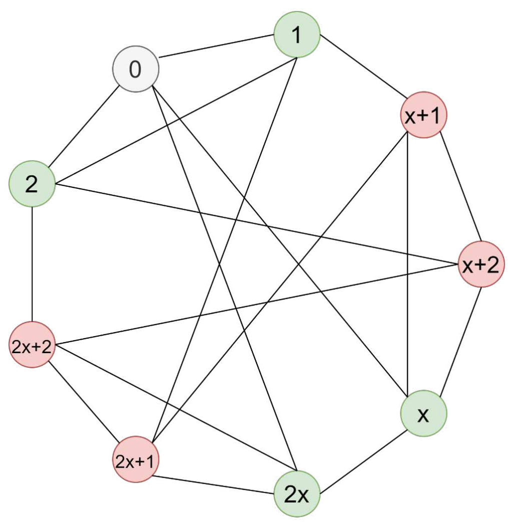
slijedi da će svaki vrh $v \in V(QR(13)) = \{0, \dots, 12\}$ *biti povezan s vrhovima* $v \pm 1 \pmod{13}$, $v \pm 3 \pmod{13}$, $v \pm 4 \pmod{13}$. *Na taj način dobivamo graf prikazan na slici 12. On je jako regularan graf s parametrima* $(13, 6, 2, 3)$.

Konstruirajmo sada $QR(9) = QR(3^2)$. *Slijedimo konstrukciju konačnog polja* $GF(p^2)$ *za prosti broj* p. *Prvo moramo naći ireducibilan polinom stupnja* 2. *Budući da je* $p = 3$ *neparan prost broj, znamo da postoji* $r \in GF(3)$ *takav da je* $x^2 - r$ *ireducibilan polinom. Također znamo da je* $x^2 - r$ *ireducibilan*

v	v^2	v	v^2
0	0	$\alpha+2$	$\alpha^2+\alpha+1=\alpha$
1	1	2α	$\alpha^2=2$
2	1	$2\alpha+1$	α
α	$\alpha^2=r=2$	$2\alpha+2$	2α
$\alpha+1$	$\alpha^2+2\alpha+1=2\alpha$		

polinom nad $GF(3)$ ako i samo ako r nije kvadrat modulo 3. Slijedi da je $r=2$, odnosno da je traženi ireducibilan polinom $x^2-2\equiv x^2+1 \pmod 3$. Označimo sada s α simbol za koji vrijedi $\alpha^2=r$ (slično kao što je $i=\sqrt{-1}$). Sada znamo da su elementi Galoisova polja $GF(9)$ oblika $a+b\alpha$, pri čemu su $a,b\in GF(3)$. U tablici 4.4 prikazano je kvadriranje elemenata u $GF(9)$. Iz toga zaključujemo da su nenul kvadrati u $GF(9)$ elementi $1,2,\alpha$ i 2α.

Zaključujemo da će svaki vrh $v\in V(QR(9))$ biti povezan s vrhovima $v+1$, $v+2$, $v+\alpha$ te $v+2\alpha$. Odavde dobivamo Paleyev graf $QR(9)$ koji je prikazan na slici 13. Napominjemo da je na grafu oznaka α zamijenjena oznakom x. Paleyev graf $QR(9)$ je jako regularan graf s parametrima $(9,4,1,2)$.



Slika 13: Graf $QR(9)$ s označenim susjednim (zeleno) i nesusjednim vrhovima (crveno) od vrha 0.

Paleyevi grafovi su jako regularni. Dapače, moguće je pokazati da je proizvoljan $QR(q)$ jako regularan graf s parametrima

$$(q,(q-1)/2,(q-5)/4,(q-1)/4).$$

Paleyevi grafovi bit će nam kasnije korisni za pronalazak primjera regularnih grafova prespajanja.

Sljedeći rezultati govore o svojstvima jako regularnih grafova, a navodimo ih prema [5, cjelina 9] i [11, cjelina 10].

Lema 4.5. *Neka je X jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c) te neka je $\bar{X}$ njegov komplement. Tada je $\bar{X}$ jako regularan graf s parametrima $(n, \bar{k}, \bar{a}, \bar{c})$, pri čemu je*

$$\begin{aligned}\bar{k} &= n - k - 1,\\ \bar{a} &= n - 2 - 2k + c,\\ \bar{c} &= n - 2k + a.\end{aligned}$$

Iz leme 4.5 slijedi lema 4.6.

Lema 4.6. *Neka je X jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c). Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}n &\geq 2k - c + 2,\\ n &\geq 2k - a.\end{aligned}$$

Lema 4.7. *Neka je $X = (V, E)$ jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c). Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) X nije povezan,

b) $c = 0$,

c) $a = k - 1$,

d) X je izomorfan grafu mK_{k-1}, za neki $m > 1$.

Dokaz. Neka je $X = (V, E)$ jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c) te pretpostavimo da X nije povezan graf. Neka su C_1, C_2 dvije različite komponente povezanosti od X. Neka su $v_1 \in C_1$ i $v_2 \in C_2$. Budući da v_1 i v_2 nisu susjedni vrhovi, slijedi da je $c = 0$. Pretpostavimo sada da je $c = 0$. Neka su $w, z \in V$ proizvoljni susjedi vrha $v \in V$. Pretpostavimo da w i z nisu susjedni. Tada vrijedi da je $c \geq 1$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $c = 0$. Slijedi da su dva proizvoljna susjeda od v nužno susjedna pa iz činjenice da je graf X k-regularan zaključujemo da je $a = k-1$. Pretpostavimo da je $a = k - 1$. Tada je svaka komponenta povezanosti grafa X potpuni graf K_{k+1}. Prema definiciji jako regularnog grafa znamo da X nije potpuni graf pa on ima barem dvije komponente povezanosti. Zaključujemo da je X izomorfan mK_{k+1} za neki $m > 1$. Ako je $X = mK_{k+1}$ za neki $m > 0$, onda X nije povezan graf. $\square$

Lema 4.8. *Neka je $X = (V, E)$ jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c). Tada je*

$$k(k - a - 1) = c(n - k - 1).$$

Dokaz. Neka je $v \in V$. Tada v ima k susjednih i $n-1-k$ nesusjednih vrhova. Koristit ćemo kombinatorni dokaz — na dva ćemo načina prebrojiti koliko postoji bridova između susjednih i nesusjednih vrhova od v. Označimo taj broj s e. Svaki od k susjeda od v je susjedan s vrhom v te s a susjeda od v, iz čega slijedi da je susjedan s $k - a - 1$ vrhova koji nisu susjedni s v. Dakle, $e = k(k - a - 1)$. S druge strane, svaki od $n - 1 - k$ nesusjednih vrhova od v je susjedan s c susjeda od v pa slijedi da je $e = (n - k - 1)c$. □

Za iskaz teorema 4.10 potrebno je definirati prave svojstvene vrijednosti matrice.

Definicija 4.9. *Kažemo da je svojstvena vrijednost* prava *ako ima svojstveni vektor koji je okomit na vektor jedinica $\mathbb{1}$.*

Teorem 4.10. *Neka je $X = (V, E)$ graf s n vrhova koji nije ni potpun ni prazan. Neka je A njegova matrica susjedstva. Tada je ekvivalentno:*

a) X je jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c),

b) $A^2 = (a - c)A + (k - c)I + cJ$, za neke $k, a, c \in \mathbb{N}_0$,

c) A ima točno dvije različite prave svojstvene vrijednosti.

Dokažimo prvo pomoćnu lemu. Ona predstavlja jedan od osnovnih rezultata teorije grafova.

Lema 4.11. *Neka je A matrica susjedstva grafa G. Tada element a_{ij} matrice A^k predstavlja broj šetnji duljine k u grafu koje počinju u vrhu i, a završavaju u vrhu j.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom. Za $k = 1$ je $A^k = A$ pa tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = n$. Uočimo da je $A^{n+1} = A^n A$. Ako su i i j vrhovi grafa čija je matrica susjedstva A, tada je broj šetnji duljine $n + 1$ između i i j jednak broju šetnji duljine n između vrha i i svakog od vrhova v koji je susjedan vrhu j. To je upravo element na mjestu (i, j) u matrici $A^{n+1} = A^n A$ jer su netrivijalni elementi u stupcu matrice A koji odgovara vrhu v upravo susjedi od v. □

Dokaz teorema 4.10. (a)⇒(b): Zbog leme 4.11 znamo da se na mjestu (u, v) matrice A^2 nalazi broj šetnji duljine 2 iz vrha u u vrh v. Budući da je X

jako regularan graf, taj će broj biti potpuno određen informacijom jesu li u i v jednaki, susjedni ili su različiti nesusjedni elementi. Naime, ako je $u = v$, broj šetnji duljine 2 jednak je broju susjeda od u, tj. jednak je k. Inače će broj šetnji duljine 2 od u do v biti jednak broju zajedničkih susjeda od u i v.

$$A^2_{u,v} = \begin{cases} k, & u = v, \\ a, & u \sim v, \\ c, & \text{inače}. \end{cases}$$

Iz toga slijedi

$$A^2 = kI + aA + c(J - I - A), \tag{6}$$

odnosno

$$A^2 = (a - c)A + (k - c)I + cJ. \tag{7}$$

(b)⇒(a): Pretpostavimo da vrijedi jednadžba (6). Na mjestu (u, v) matrice A^2 nalazi se broj šetnji duljine 2 iz u u v u X. Za svaki vrh u, na mjestu (u, u) matrice A^2 nalazi se k pa zaključujemo da je X k-regularan graf. Pretpostavimo da $u \neq v$. Ako su u i v susjedni u grafu A (odnosno $A_{u,v} = 1$), onda postoji a šetnji duljine 2 od u do v pa u i v imaju a zajedničkih susjeda. Slično, u i v nisu susjedni u X ako i samo ako su susjedni u njemu komplementarnom grafu pa nesusjedni vrhovi u i v imaju c zajedničkih susjeda.

(b)⇒(c): Neka je λ prava svojstvena vrijednost od A te neka je z njoj pripadni svojstveni vektor. Budući da je λ prava svojstvena vrijednost, slijedi da je $Jz = 0$. Sada iz b) slijedi

$$\begin{aligned} \lambda^2 z = A^2 z &= (a - c)Az + (k - c)Iz + cJz = \\ &= (a - c)Az + (k - c)Iz = \\ &= \lambda(a - c)z + \lambda(k - c)z, \end{aligned}$$

iz čega za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ slijedi

$$\lambda^2 z_i = \lambda(a - c)z_i + (k - c)z_i,$$

odnosno

$$\lambda^2 - (a - c)\lambda - (k - c) = 0. \tag{8}$$

Dakle, prave svojstvene vrijednosti od A upravo su rješenja kvadratne jednadžbe (8). Postoje dva rješenja te kvadratne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\Big((a - c) + \sqrt{\Delta}\Big), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\Big((a - c) - \sqrt{\Delta}\Big), \end{aligned}$$

pri čemu je $\Delta = (a-c)^2 + 4(k-c)$.

(c)⇒(b): Neka su λ_1 i λ_2 prave svojstvene vrijednosti. Tada postoji broj $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I) = \alpha J$. Drugim riječima, A^2 je linearna kombinacija matrica A, I i J. Budući da su elementi matrice A^2 sigurno iz $\mathbb{N}_0$, slijedi tvrdnja b).

□

Koristit ćemo lemu 4.12 kako bismo opisali sve svojstvene vrijednosti jako regularnog grafa.

Lema 4.12. *Neka je A realna simetrična matrica. Ako su x i y svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima matrice A, onda su x i y ortogonalni vektori.*

Dokaz. Neka su λ, μ dvije različite svojstvene vrijednosti od matrice A te neka su x, y redom njima odgovarajući svojstveni vektori. Budući da za realnu matricu A vrijedi

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$$

te da je A simetrična, odnosno $A = A^T$, slijedi da je

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Iz toga slijedi

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0,$$

a budući da je $\lambda \neq \mu$, zaključujemo da je $\langle x, y\rangle = 0$. □

Napomena 4.13. *Neka je X jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c) i matricom susjedstva A. Tada je $\lambda_0 := k$ svojstvena vrijednost matrice A sa svojstvenim vektorom $\mathbb{1}$. Matrica A je realna i simetrična pa iz leme 4.12 možemo zaključiti da su ostale svojstvene vrijednosti matrice A prave svojstvene vrijednosti. U dokazu teorema 4.10 opisali smo prave svojstvene vrijednosti jako regularnog grafa. Sada zaključujemo da su svojstvene vrijednosti grafa X koji je jako regularan s parametrima (n, k, a, c) dane s*

- $\lambda_0 = k$,
- $\lambda_1 = \frac{1}{2}\Big((a-c) + \sqrt{\Delta}\Big)$ *i*
- $\lambda_2 = \frac{1}{2}\Big((a-c) - \sqrt{\Delta}\Big)$,

pri čemu je $\Delta = (a-c)^2 + 4(k-c)$.

Pokazali smo kako iz parametara jako regularnog grafa možemo naći njegove svojstvene vrijednosti. Možemo učiniti i obrnuto — ako su nam poznate svojstvene vrijednosti jako regularnog grafa, možemo naći njegove parametre. O tome govori lema 4.14.

Lema 4.14. *Neka je X povezan jako regularni graf s parametrima (n, k, a, c) te sa svojstvenim vrijednostima k, λ_1 i λ_2. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} n &= \frac{(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)}{k+\lambda_1\lambda_2} \\ a &= k+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2 \\ c &= k+\lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

Dokaz. Uvrštavanjem izraza za λ_1 i λ_2 iz napomene 4.13 dobivamo izraze za a i c.

$$\begin{aligned} k+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2 &= k+(a-c)+\frac{1}{4}((a-c)^2-\Delta) = \\ &= k+(a-c)+\frac{1}{4}(-4(k-c)) = a, \\ k+\lambda_1\lambda_2 &= k+\frac{1}{4}((a-c)^2-\Delta) = c. \end{aligned}$$

S pomoću tih izraza raspisujemo izraz za n.

$$\begin{aligned} \frac{(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)}{k+\lambda_1\lambda_2} &= (1/c)[k^2-\lambda_1 k-\lambda_2 k+\lambda_1\lambda_2] = \\ &= (1/c)[(c-\lambda_1\lambda_2)^2-\lambda_1(c-\lambda_1\lambda_2)-\lambda_2(c-\lambda_1\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2] = \\ &= (1/c)[(c-\lambda_1\lambda_2)(c-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2] = \\ &= (1/c)[(c-(c-k))(c+(k-a))+(c-k)] = \\ &= (k/c)(c+k-a)+1-(k/c) = \\ &= (k/c)(k-a-1)+k+1 = \\ &= (n-k-1)+k+1 = \\ &= n \end{aligned}$$

Predzadnja jednakost slijedi iz leme 4.8. □

Teorem 4.15 daje dodatna svojstva pravih svojstvenih vrijednosti jako regularnog grafa.

Teorem 4.15. *Neka je $X = (V, E)$ jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c) te s matricom susjedstva A. Neka su λ_1 i λ_2 prave svojstvene vrijednosti od A takve da je $\lambda_1 < \lambda_2$ te neka su k_1, k_2 redom njihove kratnosti. Tada vrijedi* *a)* $k_1, k_2 = \frac{1}{2}(n - 1 \pm \frac{(\lambda_1+\lambda_2)(n-1)+2k}{\lambda_2-\lambda_1})$,

b) ako λ_1 *i* λ_2 *nisu cijeli brojevi, onda vrijedi* $k_1 = k_2$ *te je* $(n, k, a, c) = (4t + 1, 2t, t - 1, t)$, *za neki* $t \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Vidi [5, teorem 9.1.3]. □

Zbog teorema 4.10 znamo da je graf X (moguće nepravi) jako regularan graf ako i samo ako za njegovu matricu susjedstva A vrijedi $A^2 \in [\{A, I, J\}]$. Budući da se Seidelova matrica S grafa X može zapisati kao $S = J - I - 2A$, vrijedi da je $[\{A, I, J\}] = [\{S, I, J\}]$. Ako je $A^2 \in [\{A, I, J\}]$, tada je i $S^2 \in [\{S, I, J\}]$. Naime, na mjestu (i, j) matrice AJ nalazi se suma i-tog retka matrice A, a na mjestu (i, j) matrice JA nalazi se suma j-tog stupca matrice A. Budući da su za sve i, j suma i-tog retka matrice A i suma j-tog stupca matrice A jednake stupnju regularnosti k, slijedi da je $AJ = JA = kJ$. Sada iz raspisa

$$\begin{aligned}
S^2 &= (J - I - 2A)(J - I - 2A) = \\
&= J^2 - J - 2AJ - J + I + 2A - 2JA + 2A + 4A^2 = \\
&= (n - 2)J + I + 4A + 4A^2 - 2AJ - 2JA = \\
&= (n - 2 - 4k)J + I + 4A + 4A^2
\end{aligned}$$

slijedi da je $S^2 \in [\{A, I, J, A^2\}] = [\{A, I, J\}] = [\{S, I, J\}]$. Motivirani tim rezultatom definiramo *jaki* graf.

Definicija 4.16. *Graf sa Seidelovom matricom S za koju vrijedi $S^2 \in [\{S, I, J\}]$ zovemo* jaki *graf.*

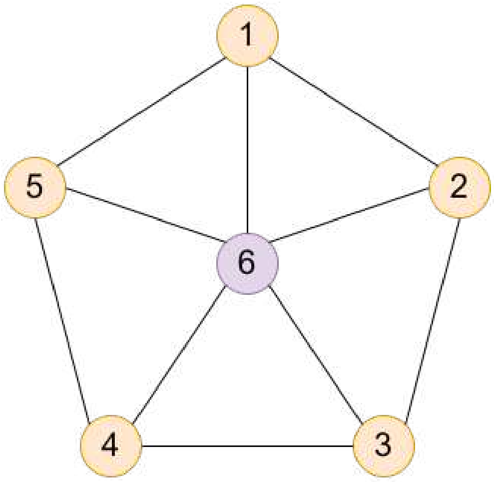
Iz prethodne diskusije slijedi da je svaki (moguće nepravi) jako regularan graf također i jaki graf. To implicira da je svaki pravi jako regularan graf i jaki graf. Ipak, obrat ne vrijedi. Dapače, jaki graf ne mora biti ni regularan. Ali vrijedi da je svaki regularan jaki graf također (moguće nepravi) jako regularan graf.

U nastavku ćemo koristiti operacije unije i zbroja grafova.

Definicija 4.17. Zbroj *grafova $X = (V_x, E_x)$ i $Y = (V_y, E_y)$ je graf $Z = (V_z, E_z)$ za koji vrijedi*

$$\begin{aligned}
V_z &= V_x \dot{\cup} V_y, \\
E_z &= E_x \cup E_y \cup \{\{x, y\} \mid x \in V_x, y \in V_y\}.
\end{aligned}$$

Graf Z označavamo s $X + Y$.



Slika 14: Graf $C_5 + K_1$ nije regularan — stupanj vrha 6 jednak je 5, a svi ostali vrhovi su stupnja 3.

Definicija 4.18. Unija *grafova* $X = (V_x, E_x)$ *i* $Y = V_y, E_y$ *je graf* $Z = (V_z, E_z)$ *za koji vrijedi*

$$V_z = V_x \dot{\cup} V_y,$$
$$E_z = E_x \cup E_y.$$

Graf Z *označavamo s* $X \cup Y$.

Primjer 4.19. *Neka je* C_5 *oznaka za ciklički graf s pet vrhova. Graf* $C_5 + K_1$ *primjer je jakog grafa koji nije regularan. Naime, Seidelova matrica* S *tog grafa je oblika*

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

pa za S^2 *vrijedi*

$$S^2 = 5I.$$

Stoga je $C_5 + K_1$ *jaki graf. Ipak, iz slike 14 očito je da graf nije regularan. Posebno, graf nije ni jako regularan.*

Sljedeća propozicija govori o svojstvenim vrijednostima jako regularnih i jakih grafova. Navodimo je bez dokaza.

Propozicija 4.20. *Neka je* $X = (V, E)$ *graf s* n *vrhova čija je Seidelova matrica* S. *Tada vrijedi*

a) X *je jaki graf ako i samo ako* S *ima najviše dvije prave svojstvene vrijednosti* (λ_1 *i* λ_2). *U tom slučaju vrijedi* $(S - \lambda_1 I)(S - \lambda_2 I) = (n - 1 + \lambda_1\lambda_2)J$.

b) X *je regularan i jaki graf ako i samo ako je* X *(moguće nepravi) jako regularan graf. U tom slučaju svojstvena vrijednost* λ_0 *od* S *sa svojstvenim vektorom* $\mathbb{1}$ *zadovoljava* $(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2) = n(n - 1 + \lambda_1\lambda_2)$.

c) Ako je X *jaki graf s pravim svojstvenim vrijednostima* λ_1, λ_2 *te ako je* $n - 1 + \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, *onda je* X *regularan pa posebno i (moguće nepravi) jako regularan graf.*

d) S *ima samo jednu pravu svojstvenu vrijednost ako i samo ako je* $S = \pm(J - I)$, *tj. ako i samo ako je* X *potpun ili prazan graf.*

Dokaz. Vidi [5, propozicija 10.1.1]. □

4.2 Svojstva regularnih dvografa

Cilj nam je povezati pojmove uvedene u cjelini 4.1 s grafovima prespajanja i dvografima te ih iskoristiti za dokaze zanimljivih svojstava regularnih dvografa. S pomoću tih svojstava moguće je naći neke nužne uvjete za parametre grafova čiji su grafovi prespajanja regularni te uvjete za svojstvene vrijednosti regularnih dvografa. Ključan rezultat ove cjeline dan je u teoremu 4.23. On povezuje regularne grafove prespajanja i jako regularne grafove. U dokazu tog teorema koristit ćemo lemu 4.21 koja je poseban slučaj Hamilton–Cayleyeva teorema.

Lema 4.21. *Neka je* A *realna simetrična matrica te neka je* $p(\lambda)$ *njezin karakteristični polinom. Tada je* $p(A) = 0$.

Dokaz. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A. Budući da je A realna i simetrična matrica, ona je dijagonalizabilna, odnosno postoji matrica P takva da je $A = P^{-1}DP$, pri čemu je D dijagonalna matrica čiji su elementi upravo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Karakteristični polinom od A je oblika

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = a_n\lambda^n + \cdots a_1\lambda + a_0,$$

za neke $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Budući da su A i D slične matrice, vrijedi da su $p(A)$ i $p(D)$ slične matrice. Možemo raspisati $p(D)$:

$$\begin{aligned}
p(D) &= a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0 I \\
&= a_n \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix} + \cdots + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Budući da je $p(\lambda_i) = 0$, za $i = 1, 2, \ldots, n$, zaključujemo da je $p(D)$ nulmatrica. Slijedi da je $p(A) = P^{-1}p(D)P$ također nulmatrica.

□

Za dokaz teorema 4.23 trebat ćemo osnovno razumijevanje teorije *taktičkih particija* koju ovdje izlažemo prema [5, cjelina 2]. Pretpostavimo da je A simetrična realna matrica čiji su redci i stupci indeksirani s $X = \{1, \ldots, n\}$. Neka je $\{X_1, \ldots, X_m\}$ particija skupa X. Particionirajmo matricu A u skladu s particijom skupa indeksa:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{bmatrix},$$

pri čemu $A_{i,j}$ predstavlja blok matricu koju čine redci matrice A indeksirani s X_i i stupci indeksirani s X_j. Matrica $Q = [q_{i,j}]$ dimenzija $m \times m$ čiji elementi $q_{i,j}$ predstavljaju prosječnu sumu redaka bloka $A_{i,j}$ nazivamo *kvocijentnom matricom* matrice A. Ako je u svakom bloku $A_{i,j}$ suma redaka konstantna, onda particiju nazivamo taktičkom. Sljedeći rezultat navodimo prema [1].

Teorem 4.22. *Neka je A kvadratna matrica te neka je Q kvocijentna matrica koja pripada nekoj njezinoj taktičkoj particiji. Tada spektar matrice A sadrži spektar matrice Q.*

Teorem 4.23. *Neka je $Sw(X)$ netrivijalni graf prespajanja za graf X s $n+1$ vrhova (dakle, $Sw(X)$ ima $2(n+1)$ vrhova). Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) $Sw(X)$ je regularan graf prespajanja, *b) susjedstvo svakog vrha iz $Sw(X)$ je regularan graf,*

c) susjedstvo svakog vrha iz $Sw(X)$ je jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c), pri čemu je $k = 2c$,

d) postoji vrh čije je susjedstvo u $Sw(X)$ jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c), pri čemu je $k = 2c$.

Dokaz. (a)⇒(b): Neka je $Sw(X)$ regularan graf prespajanja te neka je v proizvoljan vrh tog grafa. Neka je S Seidelova matrica grafa Y koji je susjedstvo vrha v u $Sw(X)$. Podgraf koji induciraju v i njemu susjedni vrhovi u $Sw(X)$ izomorfan je nekom grafu X' za koji je $Sw(X') = Sw(X)$. Identificirajmo zato taj podgraf s X, $X \coloneqq (Y + K_1)$. Tada je Seidelova matrica grafa X oblika

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1}^T \\ -\mathbb{1} & S \end{bmatrix}.$$

Budući da je $Sw(X)$ regularan graf prespajanja, matrica T ima samo dvije svojstvene vrijednosti pa karakteristični polinom matrice T ima dva realna korijena. Matrica T je realna i simetrična pa zbog leme 4.21 zaključujemo da je

$$T^2 + aT + bI = 0,$$

za neke konstante $a, b \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$\begin{aligned} 0 = T^2 + aT + bI &= T(T + aI) + bI = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1}^T \\ -\mathbb{1} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -\mathbb{1}^T \\ -\mathbb{1} & S + aI \end{bmatrix} + bI = \\ &= \begin{bmatrix} n + b & -\mathbb{1}^T S - a\mathbb{1}^T \\ -S\mathbb{1} - a\mathbb{1} & J + S^2 + aS + bI \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je $S\mathbb{1} = -a\mathbb{1}$. Dakle, suma svih redaka od S jednaka je $-a$ pa je S Seidelova matrica regularnog grafa. Zbog proizvoljnog odabira susjedstva grafa $Sw(X)$, slijedi tvrdnja b).

(b)⇒(c): Neka je Y neko k-regularno susjedstvo u grafu prespajanja $Sw(X)$ te neka je $v \in V(Y)$ proizvoljan vrh iz Y. Cilj nam je pokazati da je podgraf Y jako regularan s parametrima (n, k, a, c). Podgraf Y ima n vrhova. Neka je $N(v)$ skup vrhova iz Y koji su susjedni vrhu v te neka je $\bar{N}(v)$ skup vrhova iz Y koji nisu susjedni vrhu v. Budući da $Sw(X)$ nije trivijalan graf prespajanja, skupovi $N(v)$ i $\bar{N}(v)$ su neprazni. Također, vrijedi

$$V(Y) = \{v\} \cup N(v) \cup \bar{N}(v).$$

Uz odabir $\sigma = N(v)$ vrijedi da je graf dobiven prespajanjem $(Y \cup K_1)^\sigma = Z \cup K_1$ za neko susjedstvo Z u $Sw(X)$. Grafovi Y i Z su regularni zbog pretpostavke b). Prespajanjem izoliranom vrhu u $(Y \cup K_1)$ dodajemo $|N(v)| = k$ bridova pa on nakon prespajanja pripada grafu Z (jer nije izoliran). Zaključujemo da su i Y i Z regularni stupnja k.

Neka je w izolirani vrh u $Y \cup K_1$. U grafu $Z \cup K_1$ vrh w susjedan je svim vrhovima iz $N(v)$, a vrh v je izolirani vrh. Neka je $z \in N(v)$ vrh koji je susjedan s r vrhova iz $\bar{N}(v)$ u grafu Y. Tada vrh z pri prespajanju gubi r, a dobiva $\bar{N}(v) - r$ novih susjeda pa je stupanj vrha z u grafu Z jednak

$$k - r + (|\bar{N}(v)| - r) = k + |\bar{N}(v)| - 2r = k,$$

iz čega slijedi da je broj $r = |\bar{N}(v)|/2$ konstantan. Zato je svaki vrh iz $N(v)$ susjedan s r vrhova iz $\bar{N}(v)$ pa tako i s $k - r$ vrhova iz $N(v)$. Dakle, vrh v i svaki njegov susjedni vrh imaju $a \coloneqq k - r$ zajedničkih susjednih vrhova. Budući da je

$$|\bar{N}(v)| = n - 1 - |N(v)| = n - 1 - k,$$

dobivamo

$$a = k - r = k - \frac{n-1-k}{2} = \frac{1}{2}(3k - n + 1).$$

Slično, neka je sada $z \in \bar{N}(v)$ vrh koji je susjedan sa s vrhova iz $N(v)$ u grafu Y. Tada je z stupnja

$$k + |N(v)| - 2s = k$$

u Z, iz čega slijedi da je $|N(v)|/2 = k/2 = s$. Zato je svaki vrh iz $\bar{N}(v)$ susjedan sa $s = k/2$ vrhova iz $N(v)$ te s $k/2$ vrhova iz $N(v)$. Dakle, vrh v i svaki njegov nesusjedni vrh imaju $c \coloneqq k/2$ zajedničkih susjednih vrhova. Zbog proizvoljnog odabira vrha v slijedi da je Y jako regularan graf s parametrima (n, k, a, c), pri čemu je $k = 2c$.

(c)$\Rightarrow$(d): očito vrijedi.

(d)$\Rightarrow$(a): Neka je Y susjedstvo nekog vrha iz grafa $Sw(X)$ koje je jako regularno s parametrima (n, k, a, c), pri čemu je $k = 2c$. Neka je A matrica susjedstva grafa Y sa svojstvenim vrijednostima λ_0, λ_1 i λ_2 (oznake prema napomeni 4.13). Seidelova matrica grafa Y je oblika $S = J - I - 2A$. Vrijedi da je $Sw(X) = Sw(Y + K_1)$ te je Seidelova matrica grafa $Y + K_1$ oblika

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1}^T \\ -\mathbb{1} & S \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Pretpostavimo da je z svojstveni vektor od S za neku pravu svojstvenu vrijednost μ. Tada vrijedi

$$Tz = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1}^T \\ -\mathbb{1} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbb{1}^T z \\ Sz \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}$$

pa zaključujemo da je vektor $(0, z^T)^T$ svojstveni vektor matrice T sa svojstvenom vrijednosti μ. Svojstvena vrijednost λ_0 matrice A je kratnosti 1 pa postoji $n-1$ svojstvenih vektora matrice A koji su okomiti na $\mathbb{1}$ i svi su pripadni pravim svojstvenim vrijednostima matrice A, tj. λ_1, λ_2. Stoga postoji $n-1$ svojstvenih vektora Seidelove matrice $S = J - I - 2A$ koji su okomiti na $\mathbb{1}$ i pripadaju svojstvenim vrijednostima $\mu \in \{-1-2\lambda_1, -1-2\lambda_2\}$. Stoga matrica T ima $n-1$ svojstvenih vektora sa svojstvenim vrijednostima $-1-2\lambda_1$ ili $-1-2\lambda_2$. Particija (9) matrice T na blok matrice je taktička particija s kvocijentnom matricom

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ -1 & n-1-2k \end{bmatrix}.$$

Zbog teorema 4.22 vrijedi da su svojstvene vrijednosti matrice Q također svojstvene vrijednosti matrice T. Svojstveni vektori koji pripadaju svojstvenim vrijednostima matrice Q su konstantni na ovoj particiji matrice T pa onda sigurno nisu okomiti na $\mathbb{1}$. Zato svojstvene vrijednosti od Q nisu prave svojstvene vrijednosti u T. Dakle, dvije svojstvene vrijednosti matrice Q su točno one svojstvene vrijednosti matrice T koje još nismo pronašli. Zbog leme 4.14 i pretpostavke da je $k = 2c$, parametre n, k, a i c možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} c &= -\lambda_1\lambda_2, \\ a &= k + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2, \\ k &= 2c = -2\lambda_1\lambda_2, \\ n &= \frac{(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)}{k+\lambda_1\lambda_2} = -(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1). \end{aligned}$$

Odavde dobivamo zapis (10) matrice Q.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & (2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1) \\ -1 & -2(\lambda_1+\lambda_2+1) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Iz raspisa

$$\begin{aligned} \det(Q-\mu I) &= -\mu(-2(\lambda_1+\lambda_2+1)-\mu) + (2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1) = \\ &= \mu^2 + \mu(2\lambda_1+2\lambda_2+2) + (4\lambda_1\lambda_2+2\lambda_1+2\lambda_2+1) = \\ &= (\mu+2\lambda_1+1)(\mu+2\lambda_2+1) \end{aligned}$$

zaključujemo da su $-2\lambda_1 - 1$ i $-2\lambda_2 - 1$ svojstvene vrijednosti matrice Q. Slijedi da T ima točno dvije svojstvene vrijednosti. Svojstvene vrijednosti matrice T su netrivijalne svojstvene vrijednosti grafa prespajanja $Sw(X)$ pa je $Sw(X)$ regularan graf prespajanja. $\square$

Korolar 4.24. *Broj vrhova netrivijalnog regularnog grafa prespajanja višekratnik je broja* 4.

Dokaz. Neka je $Sw(X)$ netrivijalan regularan graf prespajanja pri čemu je X graf s $n+1$ vrhova. Neka je Y neko jako regularno susjedstvo u $Sw(X)$ s parametrima (n,k,a,c) te neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti od Y koje nisu jednake k. Iz dokaza teorema 4.23 slijedi da su netrivijalne svojstvene vrijednosti grafa prespajanja $Sw(X)$ vrijednosti $-2\lambda_1-1$ i $-2\lambda_2-1$. Također vrijedi da je

$$n = -(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1) = -(4\lambda_1\lambda_2+2\lambda_1+2\lambda_2+1). \tag{11}$$

Budući da su elementi matrice susjedstva $A(Y)$ cijeli brojevi, slijedi da su λ_1 i λ_2 ili cijeli brojevi ili algebarski konjugirani brojevi. Zato su $\lambda_1\lambda_2$ i $\lambda_1+\lambda_2$ cijeli brojevi. Iz (11) slijedi da je n neparan broj. Stoga je $n+1$ (broj vrhova grafa X) paran pa graf prespajanja ima broj vrhova koji je višekratnik broja 4. □

Teorem 4.25. *Neka je X graf s n vrhova te neka je Γ njemu pridruženi dvograf. Neka je X_v proizvoljan potomak dvografa Γ. Tada je ekvivalentno*

a) X je jaki graf s dvije svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2,

b) Γ je regularan dvograf stupnja b,

c) X_v je (moguće nepravi) jako regularan graf s parametrima $(n-1,k,a,c)$, pri čemu je $k=2c$.

Označimo li prave svojstvene vrijednosti Seidelove matrice za potomak X_v s λ_1 i λ_2, vrijedi

- $n = 1-\lambda_1\lambda_2$,
- $b = k = 2c = -(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)/2$,
- $a = (3k-n)/2$,
- $\lambda_1+\lambda_2 = n-2b-2$.

Dokaz. Neka je X graf s n vrhova s pridruženim dvografom Γ te neka je X_v proizvoljan potomak dvografa Γ. Ekvivalencija (b) $\iff$ (c) slijedit će iz teorema 4.23. Naime, graf X_v dobivamo iz nekog grafa Y koji je ekvivalentan s obzirom na prespajanje grafu X, a kojemu je v izolirani vrh. Uz odabir $\sigma=\{v\}$ možemo konstruirati graf Y^σ koji je u istoj klasi prespajanja kao Y, a dobiva se iz Y spajanjem vrha v sa svim ostalim vrhovima grafa Y.

Grafovi Y^σ i X imaju jednak graf prespajanja $Sw(X)$. Iz teorema 3.18 i pretpostavke da je Γ regularan dvograf slijedi da je $Sw(X)$ regularan graf prespajanja. Zbog teorema 4.23 znamo da je svako susjedstvo u $Sw(X)$ regularno s parametrima $(n-1, k, a, c)$, pri čemu je $k = 2c$. Posebno, susjedstvo vrha $(v, 0)$ je regularno s istim parametrima, a ono je i izomorfno s X_v. Iz toga slijedi ekvivalencija tvrdnji (b) i (c). Preostaje nam dokazati da je $k = b$. Dvograf Γ je regularan stupnja b ako je svaki dvočlani podskup od V sadržan u b podskupova iz Δ. Neka je $x \neq v$. Tada je b jednak broju tročlanih podskupova iz Δ koji sadrže $\{x, v\}$, a to je točno broj bridova iz X_v koji sadrže vrh x. Dakle, x ima b susjeda u X_v pa zaključujemo da je $k = b$.

Dokažimo sada smjer (a) $\Rightarrow$ (c). Neka je S_v Seidelova matrica potomka X_v. Tada vrijedi da je Seidelova matrica grafa X oblika

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}^T \\ \mathbb{1} & S_v \end{bmatrix}.$$

Znamo da je $(S - \lambda_1)(S - \lambda_2) = 0$ pa iz raspisa

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \mathbb{1}^T \\ \mathbb{1} & S_v - \lambda_1 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & \mathbb{1}^T \\ \mathbb{1} & S_v - \lambda_2 I \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 + (n-1) & -\lambda_1 \mathbb{1}^T + \mathbb{1}^T(S_v - \lambda_2 I) \\ (-\lambda_2 + S_v - \lambda_1)\mathbb{1} & J + (S_v - \lambda_1 I)(S_v - \lambda_2 I) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

slijedi da je $(S_v - \lambda_1 I)(S_v - \lambda_2 I) = -J$. S pomoću propozicije 4.20 zaključujemo da je X_v jako regularan graf s $n - 1 = -\lambda_1\lambda_2$ vrhova te s pravim Seidelovim svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2. Iz $S = J - 2A - I$ zaključujemo da su svojstvene vrijednosti matrice susjedstva A_v za potomak X_v dane s $-(\lambda_1 + 1)/2$ i $-(\lambda_2 + 1)/2$. Parametre jako regularnog grafa sada dobivamo iz leme 4.14.

(c) $\Rightarrow$ (a) Pretpostavimo da je X_v jako regularan graf s parametrima $(n-1, 2c, a, c)$ te sa Seidelovom matricom S_v. Svojstvene vrijednosti matrice susjedstva A_v su $\mu_{1,2} = -\frac{1}{2}(\lambda_{1,2} + 1)$. Koristimo lemu 4.14 kako bismo našli izraz za $n - 1$. Označimo $C := -(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)$. Tada slijedi

$$\begin{aligned} c &= k + \mu_1\mu_2 \\ -c &= \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)}{4} \\ 4c &= 2k = C. \end{aligned}$$

Daljnjim raspisom dobivamo

$$\begin{aligned} n-1 &= \frac{(k-\mu_1)(k-\mu_2)}{c} = \\ &= \frac{(k+\frac{\lambda_1+1}{2})(k+\frac{\lambda_2+1}{2})}{\frac{C}{4}} = \\ &= \frac{(2k+\lambda_1+1)(2k+\lambda_2+1)/4}{C/4} = \\ &= \frac{(C+\lambda_1+1)(C+\lambda_2+1)}{C} = \\ &= C+(\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)-1 = \\ &= -(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1+\lambda_2+1)+\lambda_1+\lambda_2+1 = -\lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $(n-1)-1+\lambda_1\lambda_2 = -1$ pa iz propozicije 4.20 slijedi da je

$$(S_v-\lambda_1)(S_v-\lambda_2) = -J.$$

Također, vrijedi

$$\begin{aligned} S_v\mathbb{1} &= (-2c+(n-2-2c))\mathbb{1} = \\ &= (n-2-C)\mathbb{1} = \\ &= (-\lambda_1\lambda_2-1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1+\lambda_2+1)\mathbb{1} = \\ &= (\lambda_1+\lambda_2)\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$(S-\lambda_1 I)(S-\lambda_2 I) = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2+(n-1) & -\lambda_1\mathbb{1}^T+\mathbb{1}^T(S_v-\lambda_2 I) \\ (-\lambda_2+S_v-\lambda_1)\mathbb{1} & J+(S_v-\lambda_1 I)(S_v-\lambda_2 I) \end{bmatrix} = 0$$

pa zaključujemo da je $(S-\lambda_1 I)(S-\lambda_2 I) = 0$.

□

Sljedeće dvije propozicije navodimo bez dokaza, prema [5, propozicija 10.3.2].

Propozicija 4.26. *Neka je X jako regularan graf s parametrima (n,k,a,c). Pridruženi dvograf Γ je regularan ako i samo ako je $n = 2(2k-a-c)$. U tom slučaju, regularan je stupnja $b = 2(k-c)$, a svaki potomak X_v je jako regularan s parametrima $(n-1, 2(k-c), k+a-2c, k-c)$.*

Propozicija 4.27. *Neka je X regularan graf stupnja k. Ako je njemu pridruženi dvograf Γ regularan stupnja b, onda je X jako regularan graf s parametrima $a = k-(n-b)/2$ i $c = k-b/2$ te vrijedi $2k^2-(n+2b)k+(n-1)b = 0$.*

5 Konstrukcija optimalnih ekviangularnih skupova

U ovoj ćemo cjelini povezati rezultate o grafovima prespajanja i relativnu ocjenu za ekviangularne pravce. Preciznije, preko teorema 4.23 koji povezuje jako regularne grafove s regularnim grafovima prespajanja konstruirat ćemo konkretne primjere ekviangularnih pravaca koji postižu relativnu ocjenu iz teorema 2.9 u smislu jednakosti. Prvo ćemo ograničiti skup parametara koje susjedstvo regularnog grafa prespajanja može imati, zatim odabrati konkretan primjer jako regularnog grafa i opisati njemu odgovarajući graf prespajanja. Konačno, pronaći ćemo ekviangularan skup koji on opisuje.

5.1 Mogući parametri jako regularnog grafa

Cilj je iskoristiti nužne uvjete za parametre jako regularnih grafova koje smo uveli u cjelini 4.1. Na taj način možemo znatno smanjiti moguće kombinacije parametara koje susjedstvo nekog regularnog grafa prespajanja može imati. U programskom jeziku Python generirat ćemo potencijalne četvorke parametara $(m-1, k, a, c)$ za sve $m \leq 100$. Pritom ćemo koristiti leme 4.5, 4.6 i 4.8, korolar 4.24 te niz tvrdnji koje očito moraju biti zadovoljene — cjelobrojnost parametara i kratnosti svojstvenih vrijednosti grafa. Iz korolara 4.24 slijedi da je m paran broj. Zbog teorema 4.23 mora vrijediti $k = 2c$. Odavde i iz činjenice da tražimo pravi jako regularan graf slijedi da je $c = \frac{1}{2}k < \frac{1}{2}(m-1)$. Sada iz leme 4.8 raspisom dobivamo izraz za a:

$$\begin{aligned} k(k-a-1) &= c(m-1-k-1) \\ 2c-a-1 &= \frac{1}{2}(m-2c-2) \\ a &= 2c-1-\frac{1}{2}(n-2c-2) \\ a &= 3c-\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Provjeravamo i nužne uvjete iz leme 4.6 te cjelobrojnost parametra a. Želimo ignorirati slučajeve za koje dobivamo neprave jako regularne grafove pa provjeravamo i vrijedi li $k \notin \{0, m-2\}$. Zadnja provjera koju činimo jest provjera cjelobrojnosti kratnosti svojstvenih vrijednosti grafa. Svojstvene vrijednosti možemo dobiti kao u napomeni 4.13, a njihove kratnosti računamo prema formuli iz teorema 4.15. Svi tako dobiveni skupovi parametara za $m \leq 100$ prikazani su u tablici 3.

Napomenimo da uvjeti koje koristimo nisu dovoljni uvjeti za postojanje jako regularnog grafa s parametrima $(m-1, k, a, c)$. Stoga u zadnjem stupcu tablice 3 navodimo postoji li graf s tim parametrima (ako je poznato). Detaljna objašnjenja egzistencija jako regularnih grafova s određenim parametrima dostupna su na [4].

$m-1$	k	a	c	λ_1	λ_2	postoji li?
5	2	0	1	0.61803	-1.61803	DA
9	4	1	2	1	-2	DA
13	6	2	3	1.30278	-2.30278	DA
15	6	1	3	1	-3	DA
15	8	4	4	2	-2	DA
17	8	3	4	1.56155	-2.56155	DA
21	10	4	5	1.79129	-2.79129	NE
25	12	5	6	2	-3	DA
27	10	1	5	1	-5	DA
27	16	10	8	4	-2	DA
29	14	6	7	2.19258	-3.19258	DA
33	16	7	8	2.37228	-3.37228	NE
35	16	6	8	2	-4	DA
35	18	9	9	3	-3	DA
37	18	8	9	2.54138	-3.54138	DA
41	20	9	10	2.70156	-3.70156	DA
45	22	10	11	2.85410	-3.85410	DA
49	24	11	12	3	-4	DA
53	26	12	13	3.14005	-4.14005	DA
57	28	13	14	3.27492	-4.27492	NE
61	30	14	15	3.40512	-4.40512	DA
63	22	1	11	1	-11	NE
63	30	13	15	3	-5	DA
63	32	16	16	4	-4	DA
63	40	28	20	10	-2	NE
65	32	15	16	3.53113	-4.53113	DA
69	34	16	17	3.65331	-4.65331	NE
73	36	17	18	3.77200	-4.77200	DA
75	32	10	16	2	-8	NE
75	42	25	21	7	-3	NE
77	38	18	19	3.88748	-4.88748	NE
81	40	19	20	4	-5	DA
85	42	20	21	4.10977	-5.10977	NIJE POZNATO
89	44	21	22	4.21699	-5.21699	DA
93	46	22	23	4.32183	-5.32183	NE

95	40	12	20	2	-10	NE
95	54	33	27	9	-3	NE
97	48	23	24	4.42443	-5.42443	DA
99	48	22	24	4	-6	DA
99	50	25	25	5	-5	DA

Tablica 3: Mogući parametri $(m-1, k, a, c)$ za jako regularan graf koji je susjedstvo u nekom regularnom grafu prespajanja s $2m$ vrhova.

Prema teoremu 4.23 znamo da jako regularan graf Y s parametrima $(m-1, 2c, a, c)$ možemo shvatiti kao susjedstvo nekog regularnog grafa prespajanja $Sw(X)$ s $2m$ vrhova. Slično kao u propoziciji 3.6 možemo definirati graf X kao $Y + K_1$. Svojstvene vrijednosti grafa Y računamo prema napomeni 4.13. Koristeći dokaz teorema 4.23 iz λ_1, λ_2 možemo naći i svojstvene vrijednosti $\mu_{1,2} = -1-2\lambda_{1,2}$ Seidelove matrice grafa X pa tako i grafa prespajanja $Sw(X)$. Izrazi za njihove kratnosti k_1, k_2 mogu se dobiti sofisticiranim tehnikama koje prelaze opseg ovog rada. Navodimo ih bez dokaza, prema [12]:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{m\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}, \\ k_2 &= \frac{m\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}. \end{aligned}$$

Sada možemo iskoristiti teorem 3.12 kako bismo našli parametre n i α takve da postoji skup m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ koji međusobno zatvaraju kut $\arccos(\alpha)$. Naime, trebamo definirati

$$\begin{aligned} \mu_i &:= \min\{\mu_1, \mu_2\}, \\ \alpha &:= -1/\mu_i, \\ n &:= m - k_i. \end{aligned}$$

Ako vrijedi $1/\alpha^2 > n$ te ako je

$$m = \frac{n - n\alpha^2}{1 - n\alpha^2},$$

iz teorema 2.9 zaključujemo da u $\mathbb{R}^n$ postoji maksimalno m pravaca koji međusobno zatvaraju kut $\arccos(\alpha)$.

Možemo doći do analognih zaključaka za sve jako regularne grafove s parametrima iz tablice 3 za koje znamo da postoje. Skraćeno ih zapisujemo u tablici 4.

m	λ_1	λ_2	n	$\arccos(\alpha)$ (stupnjevi)
6	0.61803	-1.61803	3	63.43
10	1	-2	5	73.53
14	1.30278	-2.30278	7	73.90
16	1	-3	6	70.53
16	2	-2	10	78.46
18	1.56155	-2.56155	9	75.96
26	2	-3	13	78.46
28	1	-5	7	70.53
28	4	-2	21	83.62
30	2.19258	-3.19258	15	79.30
36	2	-4	15	78.46
36	3	-3	21	81.79
38	2.54138	-3.54138	19	80.54
42	2.70156	-3.70156	21	81.02
46	2.85410	-3.85410	23	81.43
50	3	-4	25	81.79
54	3.14005	-4.14005	27	82.10
62	3.40512	-4.40512	31	82.64
64	3	-5	28	81.79
64	4	-4	36	83.62
66	3.53113	-4.53113	33	82.87
74	3.77200	-4.77200	37	83.28
82	4	-5	41	83.62
90	4.21699	-5.21699	45	83.92
98	4.42443	-5.42443	49	84.17
100	4	-6	45	83.62
100	5	-5	55	84.78

Tablica 4: U prostoru $\mathbb{R}^n$ postoji maksimalno m ekviangularnih pravaca koji zatvaraju kut $\arccos(\alpha)$.

5.2 Paleyevi grafovi i regularni grafovi prespajanja

Neka je $Y = QR(p)$ Paleyev graf, za prost broj $p = m - 1$. U primjeru 4.4 komentirali smo kako je Y jako regularan graf. Neka je $X \coloneqq Y + K_1$. Prema teoremu 4.23 zaključujemo da je $Sw(X)$ regularan graf prespajanja. Ako su n i α takvi da je zadovoljena jednakost u relativnoj ocjeni iz teorema 2.9, onda postoji maksimalno m ekviangularnih pravaca u $\mathbb{R}^n$ s kutom $\arccos(\alpha)$, odnosno $v_\alpha(n) = m$. Graf X predstavlja neki ekviangularan skup za te pravce. U nastavku nalazimo konkretni skup jediničnih vektora $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ koji X predstavlja.

Iz definicije Paleyeva grafa konstruiramo Seidelovu matricu za $QR(m-1)$, odnosno matricu $S(Y)$. Tada je Seidelova matrica grafa X oblika

$$S(X) = \begin{bmatrix} -1 & \mathbb{1}^T \\ \mathbb{1} & S(Y) \end{bmatrix}.$$

Iz nje možemo naći Gramovu matricu G ekviangularnog skupa

$$G = I + \frac{1}{\alpha} S,$$

pri čemu je $-\alpha$ najmanja svojstvena vrijednost matrice $S(X)$.

Tražimo vektore oblika $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$, za $i = 1, \ldots, m$. Konstruirajmo prvo x_1. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je vektor $x_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Iz Gramove matrice G zaključujemo da su prve koordinate svih ostalih vektora u potpunosti određene ovako odabranim vektorom x_1. Naime, mora vrijediti

$$g_{1,i} = x_1^T x_i = x_{i,1}, \qquad i = 2, \ldots, m$$

pa je $x_{i,1} = g_{1,i}$, za svaki $i = 2, \ldots, m$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se vektor x_2 nalazi u ravnini $[\{e_1, e_2\}]$. Budući da je $x_2 = g_{1,2}e_1 + x_{2,2}e_2$ jedinični vektor, zaključujemo da je

$$x_{2,2} = \sqrt{1 - g_{1,2}^2}.$$

Iz jednakosti

$$g_{2,i} = x_2^T x_i, \qquad i = 3, \ldots, m$$

možemo odrediti druge koordinate preostalih vektora. Postupak iteriramo n puta, dok ne odredimo sve koordinate svih vektora smjera. Na taj način dobivamo algoritam 1.

Algoritam 1 Konstrukcija ekviangularnog skupa

Require: $m \geq n$

$x_{1,1} \leftarrow 1$

$x_{1,k} \leftarrow 0, \qquad k = 2, \ldots, n$

$x_{j,1} \leftarrow g_{1,j}$

$i \leftarrow 2$

while $i \leq n$ **do**

$\quad x_{i,i} \leftarrow \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} x_{i,j}^2}$

$\quad x_{i,j} \leftarrow 0, \qquad j = i+1, \ldots, n$

$\quad x_{k,i} \leftarrow \frac{g_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} x_{i,j} x_{k,j}}{x_{i,i}}, \qquad k = i+1, \ldots, m$

$\quad i \leftarrow i + 1$

end while

Primjer 5.1. *Neka je* $m = 18$*. Tada se relativna ocjena postiže za* $n = 9$ *i* $\alpha = 0.24253563$*. Dakle, u prostoru* R^9 *postoji maksimalno* 18 *ekviangularnih pravaca koji zatvaraju kut* $\arccos(0.24253563)$*. Budući da je* $QR(17)$ *jako regularan graf s* $m - 1$ *vrhova, iz njega možemo naći graf* X *koji predstavlja neki ekviangularan skup za te pravce. Iz prethodne rasprave znamo da možemo odabrati* $X = QR(17) + K_1$*. Koristeći algoritam 1 s pomoću programskog jezika Python (vidi dodatak B) dolazimo do ekviangularnog skupa* $\Omega = \{x_1, \ldots, x_{18}\}$*, pri čemu vrijedi*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
x_2 &= (-0.2425, 0.9701, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
x_3 &= (-0.2425, -0.3106, 0.9191, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
x_4 &= (-0.2425, -0.3106, -0.4329, 0.8107, 0, 0, 0, 0, 0), \\
x_5 &= (-0.2425, 0.1894, -0.2639, -0.4401, 0.8013, 0, 0, 0, 0), \\
x_6 &= (-0.2425, -0.3106, 0.0949, -0.4401, -0.5131, 0.6154, 0, 0, 0), \\
x_7 &= (-0.2425, 0.1894, -0.2639, 0.1583, -0.4209, -0.5912, 0.5330, 0, 0), \\
x_8 &= (-0.2425, 0.1894, 0.2639, -0.1583, 0.1845, -0.3941, -0.7465, 0.2530, 0), \\
x_9 &= (-0.2425, 0.1894, 0.2639, 0.4401, -0.0923, 0.5912, -0.0499, -0.4919, 0.1990), \\
x_{10} &= (-0.2425, -0.3106, 0.0949, 0.1583, 0.4209, -0.1971, 0.5688, 0.1058, -0.5098), \\
x_{11} &= (-0.2425, -0.3106, -0.4329, -0.1236, 0.0923, 0.1971, -0.3413, 0.5655, 0.3980), \\
x_{12} &= (-0.2425, 0.1894, -0.2639, -0.4401, -0.1441, 0, 0.1636, -0.7449, 0.1990), \\
x_{13} &= (-0.2425, 0.1894, 0.2639, -0.1583, -0.4209, -0.1107, 0, 0.3447, -0.7088), \\
x_{14} &= (-0.2425, 0.1894, 0.2639, 0.4401, -0.0923, -0.1971, -0.0140, 0.3034, 0.7088),
\end{aligned}
$$

$x_{15} = (-0.2425, -0.3106, 0.0949, 0.1583, 0.4209, -0.1971, -0.3413, -0.6623, -0.1990),$
$x_{16} = (-0.2425, 0.1894, -0.2639, 0.1583, 0.1845, 0.7018, 0.1138, 0.3357, -0.3980),$
$x_{17} = (-0.2425, -0.3106, 0.0949, -0.4401, 0.0923, -0.1107, 0.5828, 0.1472, 0.5098),$
$x_{18} = (-0.2425, -0.3106, -0.4329, -0.1236, -0.5131, -0.3077, -0.4691, -0.1562, -0.1990).$

Na kraju provjeravamo da za matricu U čiji su stupci vektori $x_1, \ldots, x_{18}$ zaista vrijedi $U^T U = G$. Možemo zaključiti da smo našli ekviangularan skup za 18 pravaca u prostoru $\mathbb{R}^9$. Napomenimo da prema teoremu 2.13 taj skup sigurno nije općenito maksimalan ekviangularan skup u $\mathbb{R}^9$ ako kut između pravaca nije fiksiran.

A Prvi dodatak

Navodimo kod u programskom jeziku Python koji smo koristili u poglavlju kako bismo dobili rezultate iz tablica 3 i 4.

```
# provjera osnovnih uvjeta
def test1(m, a, c):
    cond1 = (a < 0 or not(a.is_integer()))
    cond2 = (2 * c == m - 2 or c == 0)
    cond3 = (m < 3 * c + 2)
    cond4 = (m < 4 * c - a)
    return (cond1 or cond2 or cond3 or cond4)

def parametri(maks):
    lista = []
    for m in range(2, maks, 2):
        for c in range(0, int(m/2), 1):
            cont = 1

            # izraz za a
            a = 3 * c - m/2

            # prolazi li osnovne uvjete
            if test1(m, a, c):
                cont = 0

            # svojstvene vrijednosti i kratnosti jako reg grafa
            delta = (a - c)**2 + 4 * c
            lam1 = 1/2 * (a - c + math.sqrt(delta))
            lam2 = 1/2 * (a - c - math.sqrt(delta))

            # Brouwer TM 9.1.3
            temp = ((lam1 + lam2)*(m - 2) + 4 * c)/abs(lam1 - lam2)
            k_lam1 = 1/2 * (m - 2 - temp)
            k_lam2 = 1/2 * (m - 2 + temp)

            # provjera da su kratnosti cijeli brojevi
            if (abs(k_lam1 - round(k_lam1)) > 0.0000001
                or abs(k_lam2 - round(k_lam2)) > 0.0000001):
                cont = 0
```

```
        if cont:
            lista.append((m - 1, 2 * c, a, c, lam1, lam2))
    return lista
```

Neka je $X = (m-1, k, a, c)$ neki jako regularan graf sa svojstvenim vrijednostima (λ_1, λ_2). Funkcija `rel_ocjena` kao ulazne parametre uzima parametre m i λ_1, λ_2 grafa X, a vraća parametre n i α za koje je zadovoljena relativna ocjena iz teorema 2.9 u vidu jednakosti.

```
# R^n, m pravaca, arccos(alfa)
def rel_ocjena(m, lam1, lam2):
    # sv vrijednosti Seidelove matrice i njihove kratnosti
    mi1 = -1 - 2 * lam1
    mi2 = -1 - 2 * lam2

    k_mi1 = m * mi2/(mi2 - mi1)
    k_mi2 = m * mi1/(mi1 - mi2)

    alfa = -1/min(mi1, mi2)
    if(mi1 <= mi2):
        krat_alfa = k_mi1
    else:
        krat_alfa = k_mi2

    n = m - krat_alfa
    if not(abs(m - (n - n * alfa**2)/(1 - n * alfa**2)) > 0.000001)
            and alfa**2 < 1/n:
        return (n, alfa)
    else:
        return 0
```

B Drugi dodatak

Navodimo kod u programskom jeziku Python koji generira vektore smjera za m ekviangularnih pravaca u prostoru $\mathbb{R}^n$ kojem odgovaraju grafovi oblika $Paley(p) + K_1$, pri čemu je $p = m - 1$ prost broj. U ovom kodu je definirano $m = 18$, $n = 9$.

```
import math
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
from sympy import isprime

m = 18
n = 9

def kvad(x):
    kvadrati = set(())
    for i in range(x):
        kvadrati.add(i**2 % x)
        kvadrati.add(-(i**2 % x))
    return kvadrati

# konstrukcija Seidelove matrice za X za X = Paley(m - 1) + K_1
# nulti vrh je povezan sa svima
# ostali su medusobno povezani kao u Paley(m - 1)
pom = np.zeros((m - 1, m - 1))
for red in range(m - 1):
    for stupac in range(red + 1, m - 1):
        if red - stupac in kvad(m - 1):
            pom[red, stupac] = -1
            pom[stupac, red] = -1
        else:
            pom[red, stupac] = 1
            pom[stupac, red] = 1

S = np.zeros((m, m))
S[1:, 1:] = pom
S[0, :] = -1
S[:, 0] = -1
S[0, 0] = 0
```

```python
# izracun Gramove matrice
I = np.diag(np.diag(np.ones((m, m))))
alfa = -min(LA.eigvalsh(S))
G = I + 1/alfa * S

# konstrukcija ekviangularnih pravaca (konkretni vektori smjera)

vektori = np.zeros((m, n))

for dim in range(n):
    # dim-ti vektor je odreden s prvih dim-1 koordinata
    # dim-ti vektor je norme 1
    suma_kv = 0
    for i in range(dim):
        suma_kv += (vektori[dim][i])**2
    vektori[dim][dim] = np.sqrt(1 - suma_kv)

    # ostali vektori zatvaraju odgovarajuci kut s dim-tim
    for ostali in range(dim + 1, m):
        suma_prod = 0
        for j in range(dim):
            suma_prod += vektori[dim][j]*vektori[ostali][j]
        pom = G[dim, ostali]
        vektori[ostali][dim] = (pom - suma_prod)/vektori[dim][dim]

# provjera: usporedba skalarnih produkata s G
U = np.transpose(vektori)
if not(np.any(abs(np.transpose(U) @ U - G) > 0.00000000001)):
    print("Skup je dobar!")
```

Literatura

[1] F. Atik, P. Panigrahi. „On the distance spectrum of distance regular graphs". *Linear Algebra and its Applications* 478 (2015.), str. 256–273. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379515002177.

[2] D. Bakić. *Linearna algebra*. Školska knjiga, 2008.

[3] I. Balla i dr. „Equiangular Lines and Spherical Codes in Euclidean Space". (2016.). URL: https://arxiv.org/abs/1606.06620.

[4] A. E. Brouwer. *Parameters of Strongly Regular Graphs*. (studeni 2022.) URL: https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html.

[5] A. E. Brouwer, W. H. Haemers. *Spectra of Graphs*. Springer-Verlag New York, 2012.

[6] B. Bukh. *Bounds on equiangular lines and on related spherical codes*. 2015. URL: https://arxiv.org/abs/1508.00136.

[7] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz. *Handbook of combinatorial designs*. 2nd ed. Chapman Hall/Taylor Francis, 2007.

[8] J. H. Conway, N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. 3ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften v. 290. Springer, 1998.

[9] A. J. Duncan. „Powers of the adjacency matrix and the walk matrix". (2004.).

[10] J. Fickenscher. „Multiplicity of Eigenvalues compared to the Dimension of its Eigenspace". (2012.).

[11] C. Godsil, G. F. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics Book 207. Springer, 2001.

[12] S. Gosselin. „Regular Two-Graphs and Equiangular Lines". Disertacija. 2004.

[13] J. Haantjes. „Equilateral point-sets in elliptic two- and three-dimensional spaces". *Nieuw Arch. Wiskunde* 2 (1948.), str. 355–362.

[14] O. F. Inc. *Entry A002853 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. (listopad 2022.) URL: https://oeis.org/A002853.

[15] Z. Jiang i dr. „Equiangular lines with a fixed angle". *Annals of Mathematics* 194.3 (2021.). URL: https://doi.org/10.4007%2Fannals.2021.194.3.3.

[16] P. Lemmens, J. Seidel. „Equiangular lines". *Journal of Algebra* 24.3 (1973.), str. 494–512. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021869373901233`.

[17] S. Pillai, T. Suel, S. Cha. „The Perron-Frobenius theorem: some of its applications". *IEEE Signal Processing Magazine* 22.2 (2005.), str. 62–75.

[18] J. van Lint, J. Seidel. „Equilateral point sets in elliptic geometry". *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: Series A: Mathematical Sciences* 69.3 (1966.), str. 335–348.

Sažetak

U ovom radu obrađeni su ekviangularni pravci. Interpretirani su s gledišta algebarske teorije grafova. Dokazane su apsolutna i relativna ocjena za veličinu ekviangularnog skupa. Definirani su operacija prespajanja, klase prespajanja, grafovi prespajanja te dvografi. Primjerima i strogo matematički pokazane su bijekcije između klasa prespajanja, grafova prespajanja i dvografa. Uveden je pojam regularnog dvografa i opisana njegova važnost u proučavanju ekviangularnih pravaca. Dokazana su osnovna svojstva jako regularnih grafova. S pomoću primjera opisani su Paleyevi grafovi kao klasa jako regularnih grafova. Opisana je veza između jako regularnih grafova i regularnih dvografa. Navedeni su mogući parametri jako regularnih grafova i regularnih grafova prespajanja. Opisana je metoda pronalaska optimalnog ekviangularnog skupa s pomoću Paleyevih grafova. Koristeći $Paley(17)$ konstruiran je ekviangularan skup u $\mathbb{R}^9$.

Summary

In this thesis equiangular lines are discussed. They are interpreted in terms of algebraic graph theory. The absolute bound and the relative bound for maximum number of equiangular lines are proved. Switching, switching classes, switching graphs and two-graphs are defined. Rigorously, as well as through examples, the one-to-one correspondence between switching classes, switching graphs and two-graphs is demonstrated. Regular two-graphs and their significance in the analysis of equiangular lines are introduced. The basic properties of strongly regular graphs are proved. Through examples, Paley graphs are described as a class of strongly regular graphs. The relation between strongly regular graphs and regular two-graphs is depicted. Feasible parameters of strongly regular graphs and regular switching graphs are listed. The method of finding the optimal equiangular set using Paley graphs is described. Using $Paley(17)$, an equiangular set in $\mathbb{R}^9$ is constructed.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 24. travnja 1999. godine. Pohađala sam informatički smjer XV. gimnazije u Zagrebu te srednjoškolski program Glazbene škole Pavla Markovca, smjer glazbenik violist. Preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu upisala sam 2017., a diplomski studij Matematička statistika 2020. godine. Tijekom sve tri godine preddiplomskog studija primala sam STEM stipendiju Ministarstva znanosti i obrazovanja. Sudjelovala sam u projektima udruge Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić" kojima je cilj edukacija djece i mladih te popularizacija matematike. U slobodno vrijeme bavim se penjanjem te sviram violu u orkestru. Ponosna sam vlasnica srebrne značke Hrvatske planinarske obilaznice.