SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikola Pražić

KONTINUUMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zvonko Ilja-
zović

Zagreb, studeni 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je izložiti neke rezultate teorije metričkih kontinuuma. U prvom poglavlju izlažu se osnovni pojmovi i rezultati iz topologije i metričkih prostora. U drugom poglavlju uvode se kontinuumi prema knjizi [1] i daje se više primjera, s posebnim naglaskom na topološku sinusoidu kao kontinuum koji nije Peanov. U trećem poglavlju promatraju se lukovi, te se uvode pojmovi rezne točke i generaliziranog segmenta, pomoću kojih se dobiva karakterizacija luka u čisto topološkim pojmovima. U četvrtom poglavlju uvodi se pojam lanca koji zajedno sa sadržajem prethodnog poglavlja omogućuje dokaz većeg rezultata, da je svaki Peanov kontinuum povezan lukovima.

Poglavlje 1

Pregled osnovnih pojmova i rezultata

Ponovimo rezultate iz topologije i metričkih prostora koji će nam trebati za naša razmatranja. Dokazi svih tvrdnji koji u ovom poglavlju nisu dani mogu se naći u [2].

1.1 Ponavljanje osnova topologije

Osnovni pojmovi

Definicija 1.1.1. *Neka je X skup. Za familiju podskupova τ od X kažemo da je topologija ili topološka struktura na X ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in \tau$ *i* $X \in \tau$

2. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$, *za svaku indeksiranu familiju* $\{A_i \mid i \in I\}$ *u* τ

(zatvorenost na uniju)

3. $(\forall A, B \in \tau)(A \cap B \in \tau)$

(zatvorenost na konačan presjek)

Elemente topologije τ zovemo otvoreni skupovi, a uređen par (X, τ) zovemo topološki prostor. Kad je jasno o kojoj topologiji se radi, kraće kažemo da je X topološki prostor.

Definicija 1.1.2. *Neka je (X, τ) topološki prostor i neka je $\mathcal{B} \subset \tau$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ baza topologije τ ako vrijedi*

$$(\forall x \in X)(\forall U \in \tau)(x \in U \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{B})(x \in V \subset U)).$$

Napomena 1.1.3. *Familija podskupova $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ je baza neke topologije na X ako i samo ako vrijedi:*

1. X je jednak uniji svih skupova iz $\mathcal{B}$.

2. Za svaka dva skupa $U, V \in \mathcal{B}$ vrijedi $(\forall x \in U \cap V)(\exists W \in \mathcal{B})(x \in W \subset U \cap V)$.

Nadalje, ako dvije topologije nad istim skupom imaju jednake baze, onda su one jednake.

Definicija 1.1.4. *Neka je X topološki prostor. Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren u topološkom prostoru X ako je njegov komplement otvoren.*

Napomena 1.1.5. *Neka je X topološki prostor. Familija svih zatvorenih skupova $\mathcal{F}$ u X ima sljedeća svojstva:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ i $X \in \mathcal{F}$
2. $(\forall F, G \in \mathcal{F})(F \cup G \in \mathcal{F})$
(zatvorenost na konačnu uniju)
3. $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$, za svaku indeksiranu familiju zatvorenih skupova $\{F_i \mid i \in I\}$
(zatvorenost na presjek)

Definicija 1.1.6. *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Zatvarač skupa A je presjek svih zatvorenih skupova u X koji sadrže A, u oznaci $\overline{A}$.*

Napomena 1.1.7. *Neka je X topološki prostor. Lako se vidi da je $A \subseteq X$ zatvoren skup ako i samo ako je jednak svom zatvaraču.*

Definicija 1.1.8. *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Kažemo da je skup A gust u X ako je $\overline{A} = X$.*

Napomena 1.1.9. *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Skup A je gust u X ako i samo ako svaki neprazan otvoren podskup od X ima neprazan presjek sa skupom A.*

Definicija 1.1.10. *Za topološki prostor X kažemo da je separabilan ako ima prebrojiv gust podskup.*

Definicija 1.1.11. *Neka je X topološki prostor i $S \subseteq X$. Za familiju podskupova $\mathcal{U}$ od X kažemo da je pokrivač skupa S ako njezina unija sadrži S. Za pokrivač kažemo da je otvoren ako su svi njegovi elementi otvoreni skupovi, a konačan ako je familija $\mathcal{U}$ konačan skup. Potfamilija pokrivača $\mathcal{U}$ koja je i sama pokrivač se naziva potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$.*

Definicija 1.1.12. *Za topološki prostor X kažemo da je kompaktan ako svaki otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač.*

Definicija 1.1.13. *Neka je X topološki prostor s topologijom τ i neka je $S \subseteq X$. Familija podskupova od S definirana s*

$$\tau_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$$

je topologija na S i za nju kažemo da je relativna topologija na S naslijeđena od X.

Za topološki prostor S snabdjeven relativnom topologijom, to jest (S, τ_S), kažemo da je topološki potprostor od X, to jest (X, τ).

Definicija 1.1.14. *Neka je X topološki prostor. Za skup $K \subset X$ kažemo da je kompaktan u X ako je (K, τ_K) kompaktan prostor.*

Napomena 1.1.15. *Neka je X topološki prostor. Lako se vidi da je $K \subset X$ kompaktan skup u X ako i samo ako svaki otvoren pokrivač za K, kao podskup od X, ima konačan potpokrivač.*

Definicija 1.1.16. *Neka je (X, τ) topološki prostor i neka je $(a_n)_n$ niz u X.*

Kažemo da niz $(a_n)_n$ konvergira u točku $a \in X$ ako svaki otvoren skup koji sadrži a sadrži i sve elemente niza $(a_n)_n$ od nekog indeksa nadalje, tj.

$$(\forall U \in \tau)((a \in U) \Rightarrow ((\exists n_0 \in \mathbb{N})((n > n_0) \Rightarrow a_n \in U))$$

Za niz koji konvergira kažemo da je konvergentan. Točku a zovemo limes niza $(a_n)_n$.

Definicija 1.1.17. *Za topološki prostor X kažemo da je:*

(a) T_1 prostor, ako za svake dvije točke iz X postoji otvoren skup koji sadrži prvu, a ne sadrži drugu;

(b) T_2 ili Hausdorffov prostor, ako za svake dvije točke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $x \in U$ i $y \in V$.

Očito su svi T_2 prostori također i T_1 prostori.

Napomena 1.1.18. *Topološki prostor X je T_1 prostor ako i samo ako su svi jednočlani podskupovi od X zatvoreni.*

Napomena 1.1.19. *Ako je topološki prostor X Hausdorffov, onda svaki konvergentan niz u njemu ima jedinstven limes, koji se označava*

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Definicija 1.1.20. *Neka su $(X, \mathcal{U})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$. Kažemo da je funkcija f neprekidna ako je praslika po f svakog otvorenog skupa u kodomeni Y otvoren skup u domeni X, to jest ako vrijedi*

$$(\forall V \in \mathcal{V})(f^{-1}(V) \in \mathcal{U}).$$

Definicija 1.1.21. *Neka su X i Y topološki prostori i neka je $f : X \to Y$. Ako je f neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidan, kažemo da je f homeomorfizam između X i Y. Za prostore X i Y tada kažemo da su homeomorfni.*

Definicija 1.1.22. *Neka su X i Y topološki prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ koja je homeomorfizam na svoju sliku kažemo da je ulaganje.*

Definicija 1.1.23. *Neka su* $(X, \mathcal{U})$ *i* $(Y, \mathcal{V})$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$*. Kažemo da je funkcija* f *otvoreno preslikavanje ako je slika po* f *svakog otvorenog skupa prostora* X *otvoren skup u prostoru* Y*.*

Definicija 1.1.24. *Neka je* X *topološki prostor i* $U, V \subset X$*. Kažemo da je uređen par* (U, V) *separacija od* X *ako vrijedi:*

1. $U, V \neq \emptyset$
2. $U \cup V = X$
3. $U \cap V = \emptyset$
4. U *i* V *su oba otvoreni skupovi u* X*.*

Definicija 1.1.25. *Kažemo da je topološki prostor* X *povezan ako ne postoji separacija od* X*.*

Za $S \subseteq X$ *kažemo da je povezan skup ako je povezan kao potprostor od* X*.*

Definicija 1.1.26. *Kažemo da je topološki prostor* X *lokalno povezan ako za svaku točku* $x \in X$ *i svaki otvoren skup* U *koji sadrži* x *postoji povezan otvoren skup* V *koji sadrži* x *i sadržan je u* U*.*

Napomena 1.1.27. *Povezanost i lokalna povezanost ne povlače jedna drugu. Lako je pronaći primjer nepovezanog prostora koji je lokalno povezan (na primjer, dvije disjunktne otvorene kugle u* $\mathbb{R}^n$*), a primjer povezanog prostora koji nije lokalno povezan bit će topološka sinusoida.*

Neki rezultati iz opće topologije

Lema 1.1.28. *Neka su* X *i* Y *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna funkcija. Ako je* $F \subseteq Y$ *zatvoren u* Y*, onda je njegova praslika po* f *zatvorena u* X*.*

Dokaz. Po definiciji zatvorenih skupova, $Y \setminus F$ je otvoren skup, a po definiciji neprekidnosti slijedi da je $f^{-1}(Y \setminus F)$ otvoren u X. Poznato je da je $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$, dakle komplement od $f^{-1}(F)$ je otvoren, što znači da je praslika $f^{-1}(F)$ zatvorena u X. □

Propozicija 1.1.29. *Neka su* X *i* Y *topološki prostori, neka je* $A \subseteq X$ *i neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna funkcija. Tada vrijedi:*

(a) Ako je A *kompaktan, onda je slika* $f(A)$ *kompaktan skup u* Y*.*

(b) Ako je A *povezan, onda je slika* $f(A)$ *povezan skup u* Y*.*

Korolar 1.1.30. *Graf neprekidne funkcije čije je domena povezan skup je i sam povezan.*

Propozicija 1.1.31. *Neka su* X *i* Y *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *homeomorfizam.*

Ako je X *lokalno povezan, onda je i* Y *lokalno povezan. Specijalno, ulaganja čuvaju lokalnu povezanost.*

Propozicija 1.1.32. *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Ako je A povezan skup u X, onda je i njegov zatvarač $\overline{A}$ povezan skup u X.*

Propozicija 1.1.33. *Neka je X topološki prostor, neka je I neki skup i neka je $\{A_i \mid i \in I\}$ familija nepraznih povezanih skupova u X. Ako familija $\{A_i \mid i \in I\}$ ima po parovima neprazan presjek, onda je njezina unija povezan skup.*

Dokaz. Neka je
$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$
Pretpostavimo da postoji separacija (U, V) od A. Zbog povezanosti svih članova familije, $(U \cap A_i, V \cap A_i)$ nije separacija od A_i za nijedan $i \in I$. Kako se navedeni skupovi očito pokrivaju cijeli A_i te su očito disjunktni i otvoreni u A_i, slijedi da jedan od njih mora biti prazan. Dakle, svaki A_i je sadržan ili u U ili u V, a zbog nepraznosti od U i V postoje A_1 i A_2 takvi da je $A_1 \subseteq U$ i $A_2 \subseteq V$. No, U i V su disjunktni, pa slijedi $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, što nije moguće jer promatrana familija ima po parovima neprazan presjek. □

Propozicija 1.1.34. *Neka je X kompaktan prostor, neka je Y Hausdorffov prostor i neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada je f homeomorfizam.*

Definicija 1.1.35. *Za familiju skupova $\mathscr{F}$ kažemo da ima svojstvo konačnog presjeka ako svaka njezina konačna neprazna potfamilija ima neprazan presjek.*

Propozicija 1.1.36. *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako svaka neprazna familija zatvorenih skupova koja ima svojstvo konačnog presjeka (i čitava) ima neprazan presjek.*

Lema 1.1.37. *Neka je X kompaktan prostor. Ako je $A \subset X$ zatvoren, onda je i kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\{U_i \mid i \in I\}$ otvoren pokrivač za A u relativnoj topologiji na A naslijeđenoj od X. Onda za svaki $i \in I$ postoji skup U_i' otvoren u X takav da vrijedi $U_i = A \cap U_i'$. Skup $\{U_i' \mid i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$ je tada otvoren pokrivač za kompaktni X, pa ima konačan potpokrivač $\{V_1, \dots, V_n\}$. Očito je $\{V_1 \dots, V_n\} \setminus \{X \setminus A\}$ neprazan otvoren pokrivač za A u X koji se sastoji od skupova iz familije $\{U_i' \mid i \in I\}$, pa on inducira konačan potpokrivač od početnog $\{U_i | i \in I\}$ za prostor A u relativnoj topologiji naslijeđenoj od X. Dakle, A je kompaktan. □

Definicija 1.1.38. *Neka je S skup. Za niz skupova $(U_n)_n$, $U_n \subseteq S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, kažemo da je ugniježđen ako vrijedi*
$$U_{n+1} \subseteq U_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorem 1.1.39. ***(Cantorov aksiom)***

Neka je X kompaktan prostor. Presjek svakog niza ugniježđenih nepraznih zatvorenih skupova je neprazan.

Dokaz. Kako su elementi niza ugniježđeni, familija svih elemenata tog niza ima svojstvo konačnog presjeka (u svakoj konačnoj potfamiliji je skup s najvišim indeksom u nizu neprazan podskup svih ostalih), pa prema 1.1.36 ima neprazan presjek. □

1.2 Ponavljanje metričkih prostora

Definicija 1.2.1. *Neka je X skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika na X ako ima sljedeća svojstva:*

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$

Uređen par (X, d) zovemo metrički prostor. Kad je jasno o kojoj se metrici radi, kraće kažemo da je X metrički prostor.

Definicija 1.2.2. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Za funkciju $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ kažemo da je norma na X ako ima sljedeća svojstva:*

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ zovemo normirani prostor.

Napomena 1.2.3. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Lako se vidi da je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$,*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

metrika na X. Za tu metriku kažemo da je inducirana normom.

Definicija 1.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

Neka je $x \in X$ i $r > 0$. Skup

$$K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

zovemo otvorena kugla oko točke x radijusa r, a skup

$$\overline{K}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

zovemo zatvorena kugla oko točke x radijusa r.

Napomena 1.2.5. *Neka je* (X, d) *metrički prostor i neka je*

$$\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$$

familija svih otvorenih kugala u X. Lako se vidi da familija $\mathcal{B}$ *zadovoljava uvjete iz Napomene 1.1.3, što znači da je baza neke topologije na X. Tu topologiju zovemo topologija inducirana metrikom d.*

Kada na metričkom prostoru govorimo o kompaktnosti i neprekidnosti, mislimo na kompaktnost i neprekidnost u odnosu na topologiju induciranu metrikom.

Napomena 1.2.6. *Lako se vidi da je svaki metrički prostor s topologijom induciranom metrikom Hausdorffov topološki prostor.*

Napomena 1.2.7. *Podsjetimo, na* $\mathbb{R}^n$ *je, uz oznaku* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*, zadana euklidska norma*

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

i njome je inducirana euklidska metrika

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Topologija inducirana tom metrikom naziva se euklidska topologija na $\mathbb{R}^n$*.* R^n *se kao topološki prostor s tom topologijom naziva euklidski prostor. Isti se nazivi koriste za topologije inducirane euklidskom topologijom na topološkim potprostorima euklidksog prostora* $\mathbb{R}^n$*.*

Propozicija 1.2.8. *Neka je X metrički prostor. Tada je* $F \subseteq X$ *zatvoren ako i samo je limes svakog konvergentnog niza sadržanog u F i sam sadržan u F.*

Napomena 1.2.9. *Ako je X metrički prostor i* $S \subseteq X$*. Kao posljedica prethodne propozicije, lako se vidi da vrijedi*

$$\overline{S} = \{x \in X \mid (a_n)_n \text{ niz u } S \text{ takav da je } \lim_{n\to\infty} a_n = x\}.$$

Propozicija 1.2.10. *Neka je X metrički prostor. Ako je* $K \subseteq X$ *kompaktan u smislu definicije 1.1.14, onda je zatvoren i omeđen.*

Specijalno, ako promatramo euklidski prostor R^n*, vrijedi i obrat:* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.*

Definicija 1.2.11. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori i neka je* $f : X \to Y$*. Kažemo da je funkcija f je neprekidna u točki* $x \in X$ *ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X) \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x, f(y))) < \varepsilon.$$

Propozicija 1.2.12. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori i neka je $f : X \to Y$. Funkcija f je neprekidna ako i samo ako je neprekidna u svakoj točki u smislu prethodne definicije, to jest ako vrijedi*

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X) \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x, f(y))) < \varepsilon.$$

Specijalno, kad su domena i kodomena potprostori euklidskih prostora, pojam neprekidnosti se podudara sa standardnim pojmom neprekidnosti iz analize.

Propozicija 1.2.13. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori i neka je $f : X \to Y$. Funkcija f je neprekidna ako i samo ako za svaki konvergentan niz $(x_n)_n$ u X takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

vrijedi da je niz $(f(x_n))_n$ konvergentan u Y i da je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Propozicija 1.2.14. *Ako je (X, d) kompaktan metrički prostor, onda je on separabilan.*

Definicija 1.2.15. *Neka je X topološki prostor, neka je $\alpha : [0, 1] \to X$ neprekidna i neka je $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$. Tada kažemo da je α put u X od a do b.*

Definicija 1.2.16. *Neka je X topološki prostor, neka su $a, b, c \in X$ te neka je α put u X od a do b i neka je β put u X od b do c.*

Produkt putova α i β je funkcija $\gamma : [0, 1] \to X$ definirana sa

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{, ako je } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t - 1) & \text{, ako je } t \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right]. \end{cases}$$

Nije teško pokazati da je γ put u X od a do c (vidi [2]).

Napomena 1.2.17. *Neka je X topološki prostor. Definiramo relaciju "biti povezane putovima" na skupu X, u oznaci $\sim$, na sljedeći način:*

Ako su $a, b \in X$, onda vrijedi $a \sim b$ ako i samo ako postoji put u X od a do b. Može se pokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije (vidi [2]).

Definicija 1.2.18. *Za topološki prostor X kažemo da je povezan putovima ako za svake dvije točke $x, y \in X$ postoji put u X od x do y.*

Propozicija 1.2.19. *Ako je topološki prostor X povezan putovima, onda je i povezan.*

Propozicija 1.2.20. *Ako je X kompaktan prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna, onda $f(X)$ ima minimum i maksimum.*

Primjer 1.2.21. *Prostor $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ s euklidskom topologijom je kompaktan i povezan prostor. Očito je ograničen i zatvoren, pa je po karakterizaciji kompaktnosti za euklidske prostore 1.2.10 kompaktan.*
Nadalje, I je povezan putovima: za bilo koje dvije točke $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$, funkcija $\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ zadana s $\alpha(t) = x + t(y - x)$ je očito put od x do y u $[0, 1]$, a znamo da povezanost putovima povlači povezanost (1.2.19).

Poglavlje 2

Kontinuumi

2.1 Definicija i primjeri

Definicija 2.1.1. *Za metrički prostor koji je kompaktan i povezan kažemo da je kontinuum. Za kontinuum koji je i lokalno povezan kažemo da je Peanov kontinuum.*

Primjer 2.1.2. ***(Jedinični segment)***
U prethodnom dijelu naveli smo da je $I = [0, 1]$ kompaktan i povezan. Dakle, $[0, 1]$ je kontinuum.

Primjer 2.1.3. *U prostoru $\mathbb{R}^n$, svaki neprazan, omeđen i zatvoren konveksan skup je kontinuum. Naime, prema rezultatu 1.2.10, svaki omeđen i zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$ je kompaktan. S druge strane, po definiciji konveksnosti za svake dvije točke x, y iz takvog skupa vrijedi da je svaka točka oblika*

$$tx + (1 - t)y, \quad t \in [0, 1],$$

i sama sadržana u tom skupu.
Funkcija $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(t) = tx + (1 - t)y,$$

tada je očito put od x do y u zadanom skupu (neprekidnost je jasna zbog 1.2.12). Dakle, skup je povezan putovima, a znamo po 1.2.19 da je onda i povezan. Stoga je svaki takav skup kontinuum.

Sada lako možemo dokazati da su n-dimenzionalna jedinična kocka

$$I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

i n-dimenzionalna zatvorena jedinična kugla

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

kontinuumi u $\mathbb{R}^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Već nam je poznato da su ovi (očito neprazni) skupovi zatvoreni i ograničeni, tj. kompaktni. Pokažimo još da su konveksni:

Za $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in I^n$, i $t \in [0, 1]$:

$$0 \leq \underbrace{tx_i + (1-t)y_i}_{0 \leq x_i, y_i \leq 1} \leq t + (1-t) = 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

pa je $tx + (1-t)y \in I^n$. Dakle I^n je konveksan.

Za $x, y \in B^n$:

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + (1-t) = 1,$$

pa je $tx + (1-t)y \in B^n$. Dakle, B^n je konveksan.

Postoje i jednostavni primjeri nekonveksnih kontinuuma. To su npr. topološki rubovi prethodnih dvaju skupova, n-dimenzionalna jedinična sfera i rub n-dimenzionalne jedinične kocke.

Primjer 2.1.4. ***(Jedinična sfera)***

Skup $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, $n \geq 2$, je kontinuum.

Ograničenost je očita, kao i zatvorenost (praslika je jednočlanog skupa iz $\mathbb{R}$ po neprekidnoj funkciji normi), dakle S^{n-1} je kompaktan.

Također, S^{n-1} je povezana kao slika povezanog skupa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ po neprekidnoj funkciji $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Primjer 2.1.5. ***(Rub kocke)***

Skup $\partial I^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid (\exists i \in \{1, \ldots, n\}) x_i \in \{0, 1\}\}$, $n \geq 2$, je kontinuum.

Pokažimo prvo kompaktnost. Jasno je da je naš skup ograničen. Zatvorenost se lako vidi kada napišemo

$$\partial I^n = \bigcup_{i=1}^{n} \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid x_i \in \{0, 1\}\},$$

a jasno je da je $\{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid x_i \in \{0, 1\}\} = \pi_i^{-1}(\{0, 1\}) \cap I^n$. Dakle, to je presjek kocke i praslike dvočlanog (dakle zatvorenog) skupa $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ po neprekidnoj funkciji projiciranja na i-tu koordinatu π_i. Dakle, ti su skupovi zatvoreni, a ∂I^n je njihova konačna unija pa je prema 1.1.5 i sam zatvoren.

Povezanost pokazujemo preko Propozicije 1.2.19: pokazat ćemo da je ∂I^n *povezan putovima. Za to će nam biti dovoljno pokazati da postoji put od svake točke* $a \in \partial I^n$ *do ishodišta, tj. vrha* 0*.*

Neka je $a \in \partial I^n$*,* $a \neq 0$ *(inače imamo trivijalni fiksni put od* 0 *do samog sebe).*

Tada je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *i postoji* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *takav da* $a_i \in \{0, 1\}$*.*

Označimo onda $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\} =: \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$*. Konstruiramo put od a do* 0 *na sljedeći način:*

Neka je $A_0 := a$*. Definirajmo funkciju* $f : [0, 1] \to \partial I^n$ *kao*

$$f(t) = (a_1, \ldots, a_{j_1-1}, (1-t)a_{j_1}, a_{j_1+1}, \ldots, a_n).$$

Funkcija f očito je neprekidna i $\pi_i(f(a)) = a_i \in \{0, 1\}$*, pa je njena slika sadržana u rubu kocke. Vrijedi da je*

$f(0) = a = A_0$*,*

$f(1) = (a_1, \ldots, a_{j_1-1}, 0, a_{j_1+1}, \ldots, a_n) := A_1$*,*

pa je f put u ∂I^n *od a do* A_1*, koja ima jednu više koordinatu jednaku* 0 *u odnosu na a. Postupak induktivno ponavljamo za* j_2*, …,* $j_n - 1$ *sve dok nakon konačno mnogo koraka ne dođemo do završne točke kojoj su sve koordinate jednake* 0 *osim možda na početku istaknute koordinate* $a_i \in \{0, 1\}$*. Ako je* $a_i = 1$*, na sličan način kao na početku konstruiramo put od završne točke do ishodišta. Uzastopni produkt svih tako dobivenih putova tada nam očito daje put od a do* 0*. Onda prema rezultatu 1.2.17 postoji put između svake dvije točke.*

Lema 2.1.6. *Neka je X kontinuum, Y metrički prostor i* $f : X \to Y$ *neprekidna funkcija.*

Tada je $f(X)$ *kontinuum.*

Nadalje, ako je X Peanov kontinuum i f ulaganje, onda je i $f(X)$ *Peanov kontinuum.*

Dokaz. Iz Propozicije 1.1.29 imamo da je slika kompakta po neprekidnoj funkciji kompakt, kao i da je neprekidna slika povezanog skupa povezan skup. Također, ako je f ulaganje, onda po Propoziciji 1.1.31 znamo da je $f(X)$ lokalno povezan skup. □

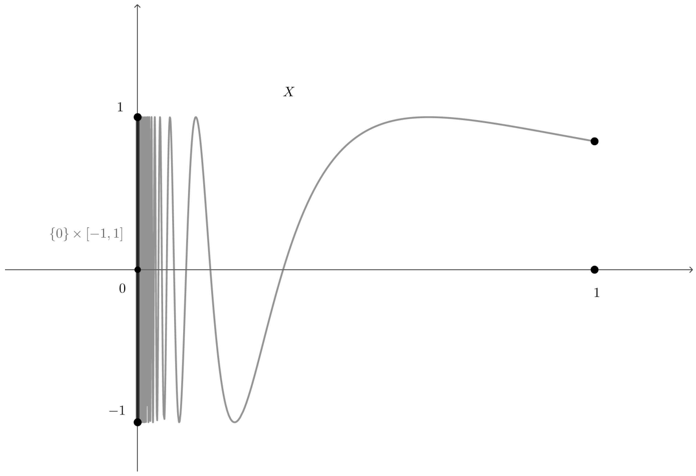
Nije teško pokazati da su svi navedeni kontinuumi lokalno povezani, to jest Peanovi. Dajmo primjer i jednog koji nije:

2.2 Topološka sinusoida

Primjer 2.2.1. *Neka je*

$$X = \{(x, sin\frac{1}{x}) \mid x \in \langle 0, 1]\} \cup \{0\} \times [-1, 1].$$

Skup X zovemo topološka sinusoida.



Slika 2.1: Topološka sinusoida, s podskupom $\{0\} \times [-1, 1]$ označenim crnom bojom i podskupom $\{(x, sin\frac{1}{x}) \mid x \in \langle 0, 1]\}$ označenim sivom bojom.

Tvrdimo da je topološka sinusoida, promatrana kao potprostor od $\mathbb{R}^2$, kontinuum, ali da nije lokalno povezana.

Pokažimo prvo da je kontinuum.

Očito je omeđen skup. Nadalje, neka je

$$\Gamma = \{(x, sin\frac{1}{x}) \mid x \in \langle 0, 1]\}$$

graf funkcije $f(x) = sin\frac{1}{x}$ na $\langle 0, 1]$. Vrijedi da je $X = \Gamma \cup \{0\} \times [-1, 1]$. Tvrdimo da je X ne samo zatvoren, nego i jednak zatvaraču od Γ u $\mathbb{R}^2$. Poslužimo se karakterizacijom 1.2.9.

$\boxed{\overline{\Gamma} \subseteq X}$

Neka je $(a, b) \in \overline{\Gamma}$. Prema karakterizaciji 1.2.9, postoji niz $(x_n, f(x_n))_n$ koji konvergira k (a, b) u $\mathbb{R}^2$. Iz analize nam je poznato da je konvergencija u $\mathbb{R}^2$ ekvivalentna konvergenciji u obje koordinate, pa slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Dakle, koordinata a je limes u $\mathbb{R}$ niza $(x_n)_n$ koji je sadržan u $\langle 0, 1]$, pa ponovo po 1.2.9 slijedi da je

$$a \in \overline{\langle 0, 1]} = [0, 1]\,.$$

Ako je $a \in \langle 0, 1]$, onda je $(x_n)_n$ konvergentan niz u domeni funkcije f s limesom a u toj domeni, pa zbog neprekidnosti od f po 1.2.13 slijedi da je $b = f(a)$. Dakle,

$$a \in \langle 0, 1] \Rightarrow (a, b) \in \Gamma \subseteq X.$$

Preostaje slučaj kada je $a = 0$. *Tada promotrimo niz drugih koordinata* $(f(x_n))_n$ *koji konvergira u b. Kako znamo da je* $f(x) \in [-1,1], \forall x \in \langle 0,1]$, *činjenica da je* $[-1,1]$ *zatvoren skup povlači prema 1.1.7 i 1.2.9 da je i limes b sadržan u* $[-1,1]$. *Dakle,*

$$a = 0 \Rightarrow (a,b) \in \{0\} \times [-1,1] \subseteq X.$$

U svakom slučaju, $(a,b) \in X$.

$\boxed{X \subseteq \overline{\Gamma}}$

Za točke iz X koje su već na grafu nemamo što pokazivati. Promotrimo točke koje nisu na grafu, to jest skup $\{0\} \times [-1,1]$. *Neka je* $(0,t)$ *točka iz tog skupa,* $t \in [-1,1]$. *Neka je* $\alpha = \arcsin(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Vrijedi*

$$\sin(2k\pi + \alpha) = t, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k\to\infty}(2k\pi + \alpha) = \infty,$$

$$\frac{1}{2k\pi + \alpha} \in \langle 0,1] \,.$$

Dakle, $((\frac{1}{2k\pi+\alpha}, \sin(2k\pi + \alpha)))_{k\in\mathbb{N}}$ *je niz u* Γ *koji konvergira u* $(0,t)$, *što znači da je* $(0,t) \in \overline{\Gamma}$. *Dakle,* $\overline{\Gamma} = X$, *pa je X zatvoren, što uz omeđenost po 1.2.10 povlači da je kompaktan.*

Pokažimo povezanost. Kako je domena $\langle 0,1]$ *povezana i funkcija f neprekidna, prema Korolaru 1.1.30, graf* $\Gamma \subseteq X$ *je također povezan. Imamo rezultat 1.1.32 koji nam kaže da je tada i njegov zatvarač X povezan.*

Dakle, topološka sinusoida jest kontinuum.

Pokažimo da X nije lokalno povezan skup. Promotrimo točku $(0,0) \in X$ *i njezinu otvorenu okolinu* $U = K((0,0), \frac{1}{2}) \cap X$.

Pretpostavimo da X jest lokalno povezan. Tada postoji povezan otvoren skup $V \subseteq X$ *takav da je*

$$x \in V \subset U.$$

Označimo s $\gamma : \langle 0,1] \to \Gamma$ *sljedeću parametrizaciju grafa* Γ*:*

$$\gamma(x) = (x, f(x)).$$

Očito je γ *neprekidna funkcija (koordinatne funkcije su joj neprekidne). Vrijede sljedeće dvije pomoćne tvrdnje:*

1. Ako je $0 < r < 1$, *onda je skup* $\gamma(\langle r,1])$ *otvoren u X.*

Zaista, otvorena poluravnina $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > r\}$ *je, znamo, otvoren skup u* $\mathbb{R}^2$, *za* *svaki* $r \in \langle 0,1\rangle$. *Očito je* $\gamma(\langle r,1]) = P \cap X$, *pa je* $\gamma(\langle r,1])$ *otvoren u relativnoj topologiji na* X *naslijeđenoj od* $\mathbb{R}^2$.

2. Za svaki $r \in \langle 0,1]$, *skup* $\gamma([r,1])$ *je zatvoren u* X.

Zaista, $[r,1]$ *je kompaktan skup u domeni* $\langle 0,1]$, *pa je njegova slika kompaktna u* $\mathbb{R}^2$ *(1.1.29), pa i u njegovom potprostoru* X, *koji je i metrički potprostor, pa je po 1.2.10 promatrana slika zatvoren skup u* X.

Sada pokažimo da skup V *ne može biti povezan.*

Kako je V *otvoren skup u* X *koji sadrži* $(0,0)$, *postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$K((0,0),\varepsilon) \cap X \subseteq V.$$

Odaberemo li $k \in \mathbb{N}$ *dovoljno velik da vrijedi* $\frac{1}{2k\pi} < \varepsilon$, *imamo da za* $x = \frac{1}{2k\pi}$ *vrijedi* $f(x) = 0$ *i* $\gamma(x) = (x,0) \in K((0,0),\varepsilon) \cap X \subseteq V$.

Označimo onda $y = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$, $y < x$.

Jasno je da je $f(y) = sin(\frac{1}{y}) = sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$, *pa imamo točku* $\gamma(y) = (y,1) \in \Gamma \subseteq X$.

Kako je $d((0,0),(y,1)) \geq 1$, *točka* $(y,1)$ *ne nalazi se u kugli* $K((0,0),\frac{1}{2})$, *pa ni u njezinom podskupu* V. *Dakle,* $V \subseteq X \setminus \{(y,1)\}$. *Definirajmo:*

$W_1 = \gamma(\langle y,1])$,

$W_2 = \gamma(\langle 0,y\rangle) \cup \{0\} \times [-1,1]$.

Pokažimo da je (W_1,W_2) *separacija od* $X \setminus \{(y,1)\}$.

Neprazni: W_2 *je očito neprazan, a kako je* $y < x < 1$, *vrijedi da je* $\gamma(x) \in W_1$.

Disjunktni: Očito.

Očito je i da je $W_1 \cup W_2 = X \setminus \{(y,1)\}$.

Oba otvoreni: prema 1. pomoćnoj tvrdnji, W_1 *je otvoren. S druge strane,*

$$W_2 = \gamma(\langle 0,y\rangle) \cup \{0\} \times [-1,1] = X \setminus \gamma([y,1]).$$

Prema 2. pomoćnoj tvrdnji, $\gamma([y,1])$ *je zatvoren u* X, *pa je* W_2 *otvoren u* X. *Onda je otvoren i u potprostoru* $X \setminus \{(y,1)\}$, *što smo i trebali pokazati.*

Dakle, (W_1,W_2) *jest separacija od* $X \setminus \{(y,1)\}$, *pa će* $(W_1 \cap V, W_2 \cap V)$ *biti separacija od* V, *što je kontradikcija s povezanosti od* V. *Dakle, topološka sinusoida* X *nije lokalno povezana.*

Poglavlje 3

Lukovi

Kako bismo došli do većeg rezultata o Peanovim kontinuumima, potrebno je proučiti lukove kao alat za daljnja razmatranja.

3.1 Definicija i osnovni rezultati

Definicija 3.1.1. *Za topološki prostor L kažemo da je luk ako je homeomorfna slika jediničnog segmenta $I = [0, 1]$.*

Napomena 3.1.2. *Kako je* $[0, 1]$ *Peanov kontinuum i luk je njegova homeomorfna slika, po 2.1.6 i 1.1.31 vidimo da je svaki luk Peanov kontinuum.*

Cilj nam je izvesti operativnu karakterizaciju lukova.

Definicija 3.1.3. *Neka je X povezan prostor. Za točku $x \in X$ kažemo da je rezna točka od X ako je skup $X \setminus \{x\}$ nepovezan. Za točke koje nisu rezne kažemo da su nerezne.*

Lema 3.1.4. *Neka je X povezan prostor, Y topološki prostor i $f : X \to Y$ homeomorfizam. Točka p je rezna točka od X ako i samo ako je $f(p)$ rezna točka od Y.*

Dokaz. Kako neprekidna funkcija f čuva povezanost, Y je povezan i pojam rezne točke na njemu je definiran.
Neka je (U, V) separacija od $X \setminus \{p\}$. Kako je f homeomorfizam, ona je otvoreno preslikavanje, pa je onda očito $(f(U), f(V))$ separacija od $Y \setminus \{f(p)\}$. Dakle, $f(p)$ jest rezna točka od Y.
S druge strane, ako je (U', V') separacija od $Y \setminus \{f(p)\}$, praslike očito čine separaciju $(f^{-1}(U'), f^{-1}(V'))$ od $X \setminus \{p\}$, pa je p rezna točka od X. □

Primjer 3.1.5. *U jediničnom segmentu* $I = [0, 1]$ *točke* 0 *i* 1 *nisu rezne. Naime,* $I \setminus \{0\} = \langle 0, 1]$*, što je očito skup povezan putevima (za sve* $x, y \in \langle 0, 1]$*, jedan put od* x *do* y *je* $\alpha(t) = x + t(x - y), t \in [0, 1]$*), pa i povezan. Analogno vrijedi za* $I \setminus \{1\}$*.*

S druge strane, za $x \in \langle 0, 1\rangle$ *vrijedi da je*

$$I \setminus \{x\} = [0, x\rangle \cup \langle x, 1] = (I \cap \langle -\infty, x\rangle) \cup (I \cap \langle x, +\infty\rangle),$$

gdje je $([0, x\rangle, \langle x, 1])$ *očito separacija od* $I \setminus \{x\}$*, pa je taj skup nepovezan. Stoga je* x *rezna točka od* I*,* $\forall x \in \langle 0, 1\rangle$*.*

Posljedično, svaki luk ima točno dvije nerezne točke.

Definicija 3.1.6. *Za dvije nerezne točke luka kažemo da su njegove krajnje točke.*

Dakle, svaki luk je kontinuum s točno dvije nerezne točke (i to čak Peanov). Pokazat će se da upravo ta svojstva karakteriziraju lukove, to jest da je svaki kontinuum s točno dvije nerezne točke luk. Krećemo prema dokazu te tvrdnje.

3.2 Generalizirani segment

Radi jednostavnosti, u daljnjem razmatranju u ovom odjeljku pretpostavljamo da su prostori s kojima radimo T_1.

Definicija 3.2.1. *Neka je* X *povezan topološki prostor i neka su* $a, b \in X$*. Za točku* $p \in X$ *kažemo da separira točke* a *i* b *u* X *ako postoji separacija* (U, V) *prostora* $X \setminus \{p\}$ *takva da je* $a \in U$ *i* $b \in V$*.*

Očito, takav p je rezna točka od X.

Definicija 3.2.2. *Neka je* X *povezan topološki prostor i neka su* $a, b \in X$*,* $a \neq b$*. Za skup*

$$S(a, b) = \{a, b\} \cup \{p \in X \mid \ p \text{ separira } a \text{ i } b \text{ u } X\}$$

kažemo da je generalizirani segment određen točkama a *i* b *u* X*.*

Definicija 3.2.3. *Neka je* X *povezan topološki prostor i neka su* $a, b \in X$*,* $a \neq b$*.*
Na skupu $S(a, b)$ *definiramo relaciju* $\leq$ *na sljedeći način:*
za $s_1, s_2 \in S(a, b)$ *vrijedi* $s_1 \leq s_2$ *ako i samo ako*

(1) $s_1 = a$ *ili* $s_2 = b$*, ili*

(2) s_1 *separira* a *i* s_2 *u* X*, ili*

(3) $s_1 = s_2$*.*

Relacija „$\leq$*" naziva se separacijski uređaj na* $S(a, b)$*.*

Propozicija 3.2.4. *Neka je X povezan topološki prostor i neka su $a, b \in X$, $a \neq b$. Separacijski uređaj na $S(a, b)$ je linearan uređaj.*

Za dokaz ove tvrdnje trebaju nam sljedeća tri pomoćna rezultata:

Lema 3.2.5. *Neka je X povezan T_1 prostor. Ne postoje točke $a, b, c \in X$ takve da istovremeno*
1) b separira a i c, i
2) c separira a i b.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoje takve a, b i c. Tada su očito sve različite i vrijedi:
b separira a i $c \Rightarrow$ postoji separacija (U, V) od $X \setminus \{b\}$, gdje je $a \in U$, $c \in V$.
c separira a i $b \Rightarrow$ postoji separacija (U', V') od $X \setminus \{c\}$, gdje je $a \in U'$, $b \in V'$.
Tvrdimo da je $(U \cap U', V \cup V')$ separacija od X:
1) neprazni - očito, $a \in U \cap U'$ i $b, c \in V \cup V'$.
2) disjunktni - očito.
3) otvoreni: X je T_1, pa su zbog 1.1.18 skupovi $X \setminus \{b\}$ i $X \setminus \{c\}$ otvoreni. Kako su U, V, U', i V' otvoreni u relativnim topologijama na navedenim skupovima, slijedi da su otvoreni i u čitavom X.
4) pokrivaju X: Već vidimo da sadrže a, b, c. Neka je $x \in X$, $x \neq a, b, c$. Tada je $x \in X \setminus \{b\}$, pa je $x \in U$ ili $x \in V$. Ako je sadržan u V, onda je i u $V \cup V'$ i gotovi smo. Ako je sadržan u U, iskoristimo $x \in X \setminus \{c\}$ što nam daje $x \in U'$ ili $x \in V'$. U prvom slučaju je sadržan u $U \cap U'$, a drugom slučaju u $V' \subseteq V \cup V'$.
Dakle, $(U \cap U', V \cup V')$ je separacija od X, što dovodi do kontradikcije jer je X povezan. □

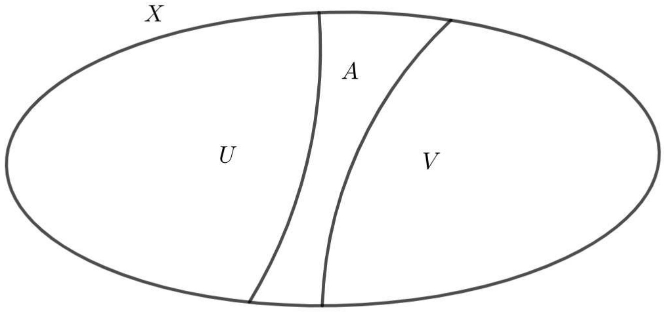
Lema 3.2.6. *Neka je X topološki prostor i neka su $W, Z \subseteq X$. Neka je $U \subseteq X$. Tada:*
a) Ako je U otvoren u W i otvoren u Z, onda je U otvoren u $W \cup Z$.
b) Ako je U zatvoren u W i zatvoren u Z, onda je U zatvoren u $W \cup Z$.

Dokaz. Pokažimo b), dokaz za a) ide analogno.
Kako je U zatvoren u $W \subset X$, postoji zatvoren skup $F \subseteq X$ takav da je $U = W \cap F$.
Isto tako, jer je U zatvoren u $Z \subset X$, postoji zatvoren skup $G \subseteq X$ takav da je $U = Z \cap G$.
Presjek $F \cap G$ je zatvoren u X, i tvrdimo da vrijedi

$$U = (W \cup Z) \cap (F \cap G).$$

Zaista, ako je $x \in U$, onda je $x \in W \cup Z$, te je $x \in F$ i $x \in G$. Obratno, pretpostavimo da je $x \in (W \cup Z) \cap (F \cap G)$. Ako je $x \in W$, onda je specijalno $x \in W \cap F = U$. Slično, ako je $x \in Z$, onda je $x \in Z \cap G = U$.
Dakle, U je zatvoren u $W \cup Z$. □

Propozicija 3.2.7. *Neka je X povezan prostor i neka je $A \subset X$. Ako $X \setminus A$ ima separaciju (U, V) i A je povezan skup, onda je $A \cup U$ povezan skup.*



Slika 3.1: Ilustracija.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $A \cup U$ nepovezan.
Dakle, postoji separacija (C_1, C_2) od $A \cup U$. Kako je A povezan, mora biti cijeli sadržan u jednom od članova separacije (kad bi imao neprazan presjek s oba, inducirali bi separaciju od A u relativnoj topologiji na A, što nije moguće jer je A povezan). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $A \subseteq C_1$. Tada je $C_2 \subseteq U$, jer zbog disjunktnosti sa C_1 ne može sijeći A. Kako je C_2 kao element separacije i otvoren i zatvoren u $A \cup U$, a sadržan je u U, on je otvoren i zatvoren u U. Kako je U kao element separacije od $X \setminus A$ i otvoren i zatvoren u $X \setminus A$, slijedi da je C_2 otvoren i zatvoren u $X \setminus A$. Po prethodnoj lemi, C_2 je otvoren i zatvoren u $X = (A \cup U) \cup (X \setminus A)$ jer je otvoren i zatvoren u oba člana unije. Pritom je C_2 neprazan i nije jednak čitavom X jer je element separacije od $A \cup U \subset X$, pa inducira separaciju $(C_2, X \setminus C_2)$ od X, što je u kontradikciji s povezanosti od X. $\square$

Sada dokažimo Propoziciju 3.2.4.

Dokaz. $\underline{\leq \text{ je parcijalni uređaj}}$
Refleksivnost slijedi iz definicije (uvjet (3)).
Pokažimo antisimetričnost. Neka su $s, t \in S(a, b)$ takvi da je $s \leq t$ i $t \leq s$. Pretpostavimo $s \neq t$. Dakle, $s \leq t$ i $s \neq t$, što znači da vrijedi

$$\begin{aligned} &(1)\ s = a \text{ ili } t = b, \text{ ili} \\ &(2)\ s \text{ separira } a \text{ i } t \text{ u } X. \end{aligned} \tag{3.1}$$

U slučaju da vrijedi (1), imamo $s = a$ ili $t = b$.
Ako vrijedi $s = a$, onda iz $t \leq s$ i $s \neq t$ mora biti zadovoljeno (1) ili (2). Ne može vrijediti

(1), jer ne može biti $t = a$ zato što je $s = a$, a iz istog razloga ne može biti ni $s = b$. Kad bi vrijedilo (2), to bi značilo da t separira a i s, što ne može biti jer je $s = a$. Dakle, ne vrijedi $s = a$.
Znači da mora biti $t = b$. Slično kao u prethodnom slučaju, ne vrijedi (1). Kad bi vrijedilo (2), to bi značilo da b separira a i s. Kako bi to imalo smisla, mora biti $s \neq a, b$, a kako je $s \in S(a, b)$, po definiciji skupa $S(a, b)$ slijedi da s separira a i b. Po Lemi 3.2.5, to je nemoguće, što nas dovodi u kontradikciju. Dakle, uvjet (1) u (3.1) ne vrijedi.
Dakle, vrijedi uvjet (2) u 3.1, što znači da s separira a i t. Iz $t \leq s$ i $s \neq t$ mora biti zadovoljeno (1) ili (2). Ako vrijedi (1), tada je ili $t = a$, što nije moguće jer s separira a i t pa moraju biti različiti, ili je $s = b$, to jest b separira a i t. Međutim, kako bi to imalo smisla, mora biti $t \neq a, b$, pa po definiciji skupa $S(a, b)$ slijedi da t separira a i b, a to je po Lemi 3.2.5 nemoguće.
Dakle, ne vrijedi (1) pa mora vrijediti (2), to jest da t separira a i s, što opet po Lemi 3.2.5 ne može biti.
Dakle, $s \neq t$ vodi u kontradikciju, pa mora biti $s = t$ i relacija $\leq$ jest antisimetrična.
Pokažimo tranzitivnost. Neka su $s, t, u \in S(a, b)$ takvi da je $s \leq t$ i $t \leq u$. Pokazujemo $s \leq u$.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $s \neq t \neq u$ i $s, t, u \neq a, b$, jer inače je zaključak trivijalan.

$$s \leq t \Rightarrow s \text{ separira } a \text{ i } t \Rightarrow X \setminus \{s\} \text{ ima separaciju } (U, V)\text{, gdje je } a \in U \text{ i } t \in V$$

$$t \leq u \Rightarrow t \text{ separira } a \text{ i } u \Rightarrow X \setminus \{t\} \text{ ima separaciju } (U', V')\text{, gdje je } a \in U' \text{ i } u \in V'$$

Tvrdnja: $u \in V$.

Pretpostavimo suprotno, to jest da je $u \in U$. Kako je jednočlan skup $\{s\}$ povezan, X povezan i (U, V) separacija od $X \setminus \{s\}$, iz Propozicije 3.2.7 slijedi da je $\{s\} \cup U$ povezan. Kako $t \notin \{s\} \cup U$, imamo

$$\{s\} \cup U \subseteq X \setminus \{t\} = U' \cup V'.$$

Kako je po pretpostavci $u \in U \subset \{s\} \cup U$ te po konstrukciji $u \in V'$, povezan skup $\{s\} \cup U$ ima neprazan presjek s V', elementom separacije svoga nadskupa $X \setminus \{t\}$, iz čega slijedi da je $\{s\} \cup U \subseteq V'$ (inače bi separacija (U', V') inducirala separaciju od povezanog $\{s\} \cup U$).
Međutim, po konstrukciji, $a \in U \subset \{s\} \cup U \subseteq V'$ i $a \notin V'$, što je kontradikcija.
Dakle, $u \in V$, što znači da je (U, V) separacija od $X \setminus \{s\}$ takva da je $a \in U$ i $u \in V$, pa s separira a i u i zato je zaista $s \leq u$.
Dakle, $\leq$ jest parcijalni uređaj na $S(a, b)$.

Parcijalni uređaj $\leq$ je linearan

Neka su $s_1, s_2 \in S(a, b)$. Tvrdimo da vrijedi $s_1 \leq s_2$ ili $s_1 \geq s_2$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo $s_1 \neq s_2$ i $s_1, s_2 \neq a, b$, jer su u tim slučajevima s_1 i s_2 po definiciji usporedivi.

$$s_1 \in S(a,b) \setminus \{a,b\} \Rightarrow s_1 \text{ separira } a \text{ i } b$$

$$\Rightarrow X \setminus \{s_1\} = U \cup V, \text{ gdje je } (U,V) \text{ separacija od } X \setminus \{s_1\} \text{ takva da je } a \in U \text{ i } b \in V$$

Kako $s_2 \neq s_1$, vrijedi $s_2 \in U$ ili $s_2 \in V$.
1. slučaj: $s_2 \in V$. To znači da je (U,V) separacija od $X \setminus \{s_1\}$ takva da je $a \in U$ i $s_2 \in V$, dakle s_1 separira a i s_2 pa je $s_1 \leq s_2$.
2. slučaj: $s_2 \in U$. Kako je $\{s_1\}$ povezan, X povezan i (U,V) separacija od $X \setminus \{s_1\}$, po Propoziciji 3.2.7 je $\{s_1\} \cup V$ povezan skup.

$$s_2 \in S(a,b) \setminus \{a,b\} \Rightarrow s_2 \text{ separira } a \text{ i } b$$

$$\Rightarrow X \setminus \{s_2\} = U' \cup V', \text{ gdje je } (U',V') \text{ separacija od } X \setminus \{s_2\} \text{ takva da je } a \in U' \text{ i } b \in V'$$

Kako je $s_2 \in U$, očito $s_2 \notin \{s_1\} \cup V$, to jest $\{s_1\} \cup V \subseteq X \setminus \{s_2\}$. Kako je $\{s_1\} \cup V$ povezan i ima zajedničku točku b s elementom separacije V', mora biti $\{s_1\} \cup V \subseteq V'$.
Dakle, $s_1 \in V'$, što znači da s_2 separira a i s_1 preko separacije (U',V') od $X \setminus \{s_2\}$, pa je $s_2 \leq s_1$. □

Primjer 3.2.8. *Na jediničnom segmentu I, $S(0,1) = I$ i separacijski uređaj je jednak standardnom uređaju na I.*

Skupovna jednakost:
Po definiciji generaliziranog segmenta u I, $S(0,1) \subseteq I$. Treba pokazati obratnu inkluziju. Neka je $x \in I$. Ako je $x \in \{0,1\}$, onda je po definiciji $x \in S(0,1)$. Pretpostavimo da $x \neq 0,1$. Jasno je da je $([0,x\rangle, \langle x,1])$ separacija od $I \setminus \{x\}$, pa x separira 0 i 1 u I, što znači da je $x \in S(0,1)$. Dakle, $S(0,1) = I$.

Jednakost uređaja:
Neka su $x,y \in I$. Činjenica da je $x \leq y$ u standardnom uređaju na $I \subseteq \mathbb{R}$ očito je ekvivalentna s tim da vrijedi
(1) $x = 0$ ili $y = 1$, jer su to najmanji i najveći element u I po standardnom uređaju, ili
(2) $x < y$, ili
(3) $x = y$.
Uvjeti (1) i (3) očito su ekvivalentni 1. i 3. uvjetu u definiciji separacijskog uređaja. Ako uvjeti (1) i (3) nisu zadovoljeni, to jest ako je $x \neq y$ i $x \neq 0$, $y \neq 1$, onda tvrdimo da je $x < y$ ekvivalentno tome da x separira 0 i y u I.
Naime, po pretpostavci je $0 < x$. Zato je $[0,x\rangle \neq \emptyset$ te je $([0,x\rangle, \langle x,1])$ očito separacija od $I \setminus \{x\}$, pa x separira 0 i y. Obratno, ako x separira 0 i y u I, postoji separacija (U,V) od $I \setminus \{x\}$ takva da je $0 \in U$ i $y \in V$. Kako je

$$I \setminus \{x\} = [0,x\rangle \cup \langle x,1],$$

očito je $([0, x\rangle, \langle x, 1])$ *separacija od* $I \setminus \{x\}$ *kojoj su oba elementa povezani skupovi. Zato imamo:*

$$[0, x\rangle \subseteq U \cup V, \quad 0 \in [0, x\rangle \cap U \Rightarrow [0, x\rangle \subseteq U.$$

Ne može biti i $\langle x, 1] \subseteq U$*, jer bi tada* V *bio prazan. Dakle, ostaje* $\langle x, 1] \subseteq V$*. S druge strane, neka je* $z \in U$*. Tada je* $z \in I = [0, x\rangle \cup \langle x, 1]$*. Kad bi bilo* $z \in \langle x, 1]$*, to bi značilo da je* $z \in V$*, što nije moguće jer je* (U, V) *separacija. Dakle,* $U \subseteq [0, x\rangle$*, i slično,* $V \subseteq \langle x, 1]$*. Ukupno, to znači da je*

$$U = \langle x, 1] , \quad V = \langle x, 1] .$$

Posebno, vrijedi $x < y$*.*
Dakle, standardni uređaj na I *ekvivalentan je separacijskom uređaju na* $S(0, 1)$*.*

Podsjetimo na neke rezultate o uređenim skupovima koji će nam sada zatrebati.

Napomena 3.2.9. *Neka je* $(X, \leq)$ *parcijalno uređen skup. Neka su* $a, b \in X$*. Ako je* $a \leq b$ *i* $a \neq b$*, pišemo* $a < b$*.*

Definicija 3.2.10. *Neka je* $(X, \leq)$ *parcijalno uređen skup. Za* $L \subseteq X$ *kažemo da je lanac u* X *u smislu uređaja* $\leq$ *ako su svaka dva elementa iz* L *usporedivi po relaciji* $\leq$*.*

Ako su L *i* M *lanci u* X*, kažemo da je* M *nadlanac od* L *ako je* $L \subseteq M$*.*

Za lanac M *u* X *kažemo da je maksimalan ako ne postoji njegov pravi nadlanac.*

Definicija 3.2.11. *Neka je* $(X, \leq)$ *linearno uređen skup. Neka su* $a, b \in X$ *takvi da je* $a < b$*. Za skup*

$$\{x \in X \mid a < x < b\}$$

kažemo da je interval od a *do* b *u odnosu na uređaj* $\leq$*, u oznaci* $\langle a, b\rangle$*, te za skup*

$$\{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$$

kažemo da je segment od a *do* b *u odnosu na uređaj* $\leq$*, u oznaci* $[a, b]$*, a za skupove*

$$\{x \in X \mid a < x\} \text{ i } \{x \in X \mid x < a\}$$

kažemo da su polupravci s ishodištem a *u odnosu na uređaj* $\leq$*.*

Napomena 3.2.12. *Ako je* $(X, \leq)$ *linearno uređen skup, onda je familija koja sadrži skup* X *te sve intervale i sve polupravce u odnosu na uređaj* $\leq$ *baza neke topologije na* X*.*

Definicija 3.2.13. *Neka je* $(X, \leq)$ *linearno uređen skup. Za topologiju na* X *čija je baza familija koja sadrži skup* X *te sve intervale i sve polupravce u odnosu na uređaj* $\leq$ *kažemo da je uređajna topologija na* X*.*

Definicija 3.2.14. *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup i neka je $S \subseteq X$. Za element $m \in X$ kažemo da je gornja međa skupa S ako vrijedi*

$$x \geq s, \ \forall s \in S.$$

Ako je x gornja međa od S takva da je $x \in S$, kažemo da je x maksimalni element od S.

Navodimo sljedeći rezultat iz teorije skupova, koji se može naći u [3]:

Lema 3.2.15. ***(Zornova lema)***
Neka je $(A, \leq)$ parcijalno uređen skup koji ima svojstvo da svaki neprazni lanac iz A ima gornju među u A. Tada $(A, \leq)$ ima barem jedan maksimalni element.

Lema 3.2.16. ***(Kuratowski)***
Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup. Tada svaki lanac u X ima maksimalni nadlanac.

Dokaz. Neka je L lanac u $(X, \leq)$. Neka je

$$\mathscr{M} = \{N \subseteq X \mid N \text{ lanac i } L \subseteq N\}$$

skup svih nadlanaca od L u X. Uredimo $\mathscr{M}$ na sljedeći način:

$$N_1 \preceq N_2 \iff N_1 \subseteq N_2.$$

Tada je $(\mathscr{M}, \preceq)$ očito parcijalno uređen skup. Neka je $\mathscr{C} = \{N_\alpha | \alpha \in A\}$ proizvoljni neprazni lanac u $\mathscr{M}$. Tada je

$$D = \bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha$$

gornja međa za $\mathscr{C}$ u $\mathscr{M}$.
Zaista, činjenica da je D gornja međa za $\mathscr{C}$ je očita. Samo treba pokazati da je $D \in \mathscr{M}$. Očito je da je $L \subseteq D$, jer je D unija elemenata iz $\mathscr{M}$ koji su svi nadskupovi od L. Pokažimo da je D lanac. Neka su $x, y \in D$. Tada postoji $\alpha, \beta \in A$ takvi da je $x \in N_\alpha$ i $y \in N_\beta$. Kako su $N_\alpha, N_\beta \in \mathscr{C}$, a $\mathscr{C}$ je lanac u $(\mathscr{M}, \preceq)$, uzmimo bez smanjenja općenitosti da je $N_\alpha \preceq N_\beta$ (u suprotnom, postupamo analogno). Po definiciji, to znači $N_\alpha \subseteq N_\beta$, iz čega slijedi $x, y \in N_\beta$. Kako je N_β lanac u X, x i y su usporedivi, što je trebalo pokazati.
Dakle, svaki lanac u $(\mathscr{M}, \preceq)$ ima gornju među u $\mathscr{M}$. Po Zornovoj lemi, slijedi da $(\mathscr{M}, \preceq)$ ima maksimalni element. Dakle, postoji $M \in \mathscr{M}$ takav da je

$$N \preceq M \iff N \subseteq M, \quad \forall N \in \mathscr{M}.$$

To upravo znači da postoji maksimalni nadlanac od L. $\square$

To nam je trebalo za dokaz ove leme:

Lema 3.2.17. *Neka je K T_1 kontinuum i $p \in K$ rezna točka. Tada svaka separacija (U, V) od $K \setminus \{p\}$ ima svojstvo da u U i u V postoji bar jedna nerezna točka.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, bez smanjenja općenitosti neka je u U svaka točka rezna. Onda za svaki $x \in U$ imamo separaciju (U_x, V_x) od $K \setminus \{x\}$, bez smanjenja općenitosti takvu da je $p \in V_x$ (jer $p \neq x$). Vrijedi:

$$U_x \subseteq U, \ \forall x \in U.$$

Zaista, kako je K povezan, $\{x\}$ povezan i (U_x, V_x) separacija od $K \setminus \{x\}$, po Propoziciji 3.2.7 su $\underbrace{U_x \cup \{x\}}_{p \notin}$ i $\underbrace{V_x \cup \{x\}}_{p \in}$ povezani.

Kako je (U, V) separacija od $K \setminus \{p\}$, $U_x \cup \{x\} \subseteq K \setminus \{p\}$ povezan i $U \cap U_x \cup \{x\}$ je neprazan (sadrži x), mora biti $U_x \subseteq U, \ \forall x \in U$.

Neka je $\mathscr{U} = \{U_x \mid x \in U\}$ i neka je $\leq$ relacija na $\mathscr{U}$ zadana s

$$U' \leq U'' \iff U' \subseteq U''.$$

Očito je $\leq$ parcijalni uređaj na $\mathscr{U}$.

Neka je $U_x \in \mathscr{U}$ proizvoljan. Skup $\{U_x\}$ je trivijalno lanac u $(\mathscr{U}, \leq)$, te po lemi Kuratowskog postoji neki njegov maksimalni nadlanac, kojeg označimo

$$\mathscr{W} = \{U_{x_\alpha} \mid \alpha \in A\}.$$

Tvrdimo:

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_{x_\alpha} = \emptyset$$

Pretpostavimo suprotno. Neka je $z \in \bigcap_{\alpha \in A} \in U_{x_\alpha}$. Tada je $z \in U_{x_\alpha}, \forall \alpha \in A$.
Po prethodnom dijelu, $z \in U$, pa je z rezna točka; dakle, imamo separaciju (U_z, V_z) od $K \setminus \{z\}$. Također, $V_{x_\alpha} \subseteq K \setminus \{z\}$ i kao što je pokazano, $V_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\}$ je povezan skup. Kako je $p \in V_z \cap (V_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\})$, mora biti

$$V_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\} \subseteq V_z, \forall \alpha \in A.$$

Kako je $K = U_{x_\alpha} \cup V_{x_\alpha} \cup \{x_\alpha\} = U_z \cup V_z \cup \{z\}$, komplementiranjem gornje skupovne nejednakosti u K dobivamo da je

$$U_{x_\alpha} \supseteq U_z \cup \{z\}.$$

Dakle, U_z je pravi podskup od $U_{x_\alpha}, \forall \alpha \in A$, to jest usporediv je sa svakim od njih i nije jednak nijednom od njih (jer ne sadrži z). Iz toga slijedi da je

$$\{U_z\} \cup \{U_{x_\alpha} \mid \alpha \in A\}$$

pravi nadlanac od $\mathscr{W}$, što je u kontradikciji s maksimalnošću od $\mathscr{W}$.

Dakle, vrijedi $\bigcap_{\alpha\in A} U_{x_\alpha} = \emptyset$. Pokažimo sada da vrijedi i

$$\bigcap_{\alpha\in A}(U_{x_\alpha} \cup \{x_a\}) = \emptyset.$$

Pretpostavimo suprotno, da postoji $z \in \bigcap_{\alpha\in A}(U_{x_\alpha} \cup \{x_a\})$.
Znamo, $z \notin \bigcap_{\alpha\in A} U_{x_\alpha} = \emptyset$, pa postoji $\alpha_0 \in A$ takav da $z \notin U_{\alpha_0}$. Onda mora biti $z \in \{x_{\alpha_0}\}$, to jest $z = x_{\alpha_0}$.

$$\Rightarrow x_{\alpha_0} \in \bigcap_{\alpha\in A}(U_{x_\alpha} \cup \{x_a\}) \Rightarrow x_{\alpha_0} \in U_{x_\alpha}, \forall\alpha \neq \alpha_0$$

Kako je $\mathscr{W} = \{U_{x_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ lanac, za svaki $\alpha \neq \alpha_0$ imamo $U_{x_\alpha} \subseteq U_{x_{\alpha_0}}$ ili $U_{x_\alpha} \supseteq U_{x_{\alpha_0}}$. Kako je po konstrukciji $x_{\alpha_0} \notin U_{x_{\alpha_0}}$, mora biti

$$U_{x_\alpha} \supseteq U_{x_{\alpha_0}}, \forall\alpha \neq \alpha_0.$$

Neka je onda $y \in U_{x_{\alpha_0}}$ bilo koji. Tada vrijedi

$$y \in U_{x_\alpha}, \forall\alpha \in A \Rightarrow y \in \bigcap_{\alpha\in A} U_{x_\alpha} = \emptyset,$$

što je kontradikcija.

Dakle, $\bigcap_{\alpha\in A}(U_{x_\alpha} \cup \{x_a\}) = \emptyset$.

Komplementiranjem te jednakosti u K dobivamo

$$\bigcup_{\alpha\in A} V_{x_\alpha} = K,$$

dakle familija $\{V_{x_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ je otvoren pokrivač za K. K je kontinuum, dakle kompaktan, pa iz definicije kompaktnosti slijedi da taj pokrivač ima konačan potpokrivač $\{V_{x_{\alpha_1}}, \dots, V_{x_{\alpha_n}}\}$.
Imamo

$$V_{x_{\alpha_1}} \cup \cdots \cup V_{x_{\alpha_n}} = K \ /()^C$$

$$(U_{x_{\alpha_1}} \cup \{x_{\alpha_1}\}) \cap \cdots \cap (U_{x_{\alpha_n}} \cup \{x_{\alpha_n}\}) = \emptyset,$$

pa je prazan i podskup

$$U_{x_{\alpha_1}} \cap \cdots \cap U_{x_{\alpha_n}} = \emptyset.$$

Svi skupovi koji sudjeluju u gornjem presjeku su iz lanca $\mathscr{W}$, pa su svi usporedivi, a kako ih je konačno mnogo, jedan od njih je najmanji. Dakle, postoji $j \in \{1, \dots, n\}$ takav da je

$$U_{x_{\alpha_j}} \subseteq U_{x_{\alpha_i}}, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dakle, $\emptyset = U_{x_{\alpha_1}} \cap \cdots \cap U_{x_{\alpha_n}} = U_{x_{\alpha_j}}$, ali po konstrukciji, $(U_{x_{\alpha_j}}, V_{x_{\alpha_j}})$ je separacija od $K \setminus \{x_{\alpha_j}\}$, pa $U_{x_{\alpha_j}}$ mora biti neprazan, što nas dovodi do kontradikcije.

Dakle, postoji nerezna točka u U. $\square$

Teorem 3.2.18. *Ako je K kontinuum koji ima točno dvije nerezne točke, a i b, onda vrijedi:*
1. $S(a, b) = K$
2. Ako je p rezna točka od K, onda je $([a, p\rangle, \langle p, b])$, gdje je riječ o poluotvorenim intervalima u odnosu na separacijski uređaj, jedina separacija od $K \setminus \{p\}$ takva da su a i b u različitim elementima separacije.
3. $\langle x, y\rangle \neq \emptyset$, za sve $x, y \in K$ takve da je $x < y$.
4. Topologija separacijskog uređaja na $S(a, b) = K$ je jednaka početnoj topologiji na K.

Dokaz. 1. $S(a, b) = K$

$\boxed{\subseteq}$ Očito, po definiciji.
$\boxed{\supseteq}$ Po definiciji, $a, b \in S(a, b)$.
Neka je $x \in K \setminus \{a, b\}$. Po pretpostavci, tada je x rezna točka od K, pa postoji separacija (U, V) od $K \setminus \{x\}$. Po prethodnoj Propoziciji 3.2.17, i U i V sadrže bar jednu nereznu točku od K. Kako su u K to točno a i b slijedi da jedan od U i V sadrži a, a drugi b. To znači da x separira a i b, pa je $x \in S(a, b)$.

2. Samo jedna pogodna separacija od $K \setminus \{p\}$ za reznu točku p

Neka je $p \neq a, b$ rezna točka. Neka je (U_p, V_p) neka separacija od $K \setminus \{p\}$ takva da je $a \in U_p$, $b \in V_p$. Tvrdimo:

$$U_p = [a, p\rangle = \{x \in K \mid x < p\},$$

$$V_p = \langle p, b] = \{x \in K \mid x > p\}.$$

Pokažimo jednakost za U_p, a za V_p dokaz ide analogno.

$\boxed{[a, p\rangle \subseteq U_p}$

Neka je $x \in [a, p\rangle$. Pretpostavimo $x \notin U_p$. Kako je $x \neq p$, mora biti $x \in V_p$. Dakle, separacija (U_p, V_p) takva je da je $a \in U_p$ i $x \in V_p \Rightarrow$ po definiciji separacijskog uređaja, p separira a i x pa je $p < x$. Međutim, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je

$$x \in [a, p\rangle \iff x < p.$$

$\boxed{U_p \subseteq [a, p\rangle}$

Neka je $z \in U_p$, bez smanjenja općenitosti $z \neq a$ jer već znamo da je $a \in [a, p\rangle$. Pokažimo da z separira a i p. Kako je z rezna točka od K, postoji separacija (U_z, V_z) od $K \setminus \{z\}$ takva da je $a \in U_z$ i $b \in V_z$. Zbog $p \neq z \in U_p$, vrijedi $p \in U_z$ ili $p \in V_z$.
Ako je $p \in U_z$, onda je $V_z \cup \{z\} \subseteq K \setminus \{p\} = U_p \cup V_p$, te je $b \in V_z \cap V_p$. Prema Propoziciji 3.2.7, $V_z \cup \{z\}$ je povezan, i kako siječe V_p iz separacije (U_p, V_p) od $K \setminus \{p\}$, vrijedi $V_z \cup \{z\} \subseteq V_p$. Posebno, slijedi da je $z \in V_p$, ali po pretpostavci je $z \in U_p$, što je kontradikcija.
Ako je $p \in V_z$, onda z separira a i p, pa je $z < p$, što smo i htjeli pokazati.

3. Intervali su neprazni

Neka su $x, y \in K$ takvi da je $x < y$. Tvrdimo da postoji $y' \in \langle x, y\rangle$. Kako je K prikaziv kao disjunktna unija $[a,x] \cup \langle x,y\rangle \cup [y,b]$, kad bi $\langle x,y\rangle$ bio prazan, $([a,x],[y,b])$ bi bila separacija od K: disjunktnost, nepraznost i pokrivanje cijelog K su očiti, a zatvorenost oba skupa proizlazi iz tvrdnje da je uređajna topologija podskup početne topologije, što se dokazuje neovisno od ove tvrdnje u sljedećem dijelu dokaza. No, to je u kontradikciji s povezanosti od K, što znači da je $\langle x,y\rangle \neq \emptyset$.

4. Topologija separacijskog uređaja je jednaka početnoj topologiji
Označimo početnu topologiju na K s $\mathscr{T}$, a uređajnu topologiju na K s $\mathscr{T}'$.
$\boxed{\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}}$
Kako familija

$$\{\langle c,d\rangle \mid c,d \in K\} \cup \{[a,d\rangle \mid d \in K\} \cup \{\langle c,b] \mid c \in K\} \cup \{K\}$$

čini bazu za uređajnu topologiju, dovoljno je pokazati da su skupovi oblika $[a,p\rangle$ i $\langle p,b]$ sadržani u $\mathscr{T}$ (jer njihovi presjeci daju skupove oblika $\langle c,d\rangle$, a unija $[a,b\rangle \cup \langle a,b]$ daje K).

Pokažimo dakle da su skupovi

$$[a,p\rangle = \{x \in K \mid x < p\}$$

$$\langle p,b] = \{x \in K \mid x > p\}$$

otvoreni, za svaki $p \in K$.
Za $p \neq a,b$, p je rezna točka i 2. tvrdnja teorema pokazuje da su pripadni poluotvoreni intervali otvoreni skupovi.
Promotrimo slučaj kad je $p = a$:

$$[a,a\rangle = \{x \in K \mid x < a\} = \emptyset \in \mathscr{T}$$

$$\langle p,b] = \{x \in K \mid x < b\} = K \setminus \{a\},$$

a kako je K T_1 prostor, to je otvoren skup. Analogne rezultate dobivamo za slučaj $p = b$.
$\boxed{\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'}$

Neka je $U \in \mathscr{T}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $U \neq K$, jer već znamo da je $K \in \mathscr{T}'$. Neka je $x \in U$. Pokažimo da postoji interval $\langle c,d\rangle \in \mathscr{T}'$ takav da je $x \in \langle c,d\rangle \subseteq U$, što povlači $U \in \mathscr{T}'$.
Pretpostavimo suprotno. Sljedeća konstrukcija dovest će nas do kontradikcije:
Promotrimo kolekciju skupova

$$\{[p,q] \cap (K \setminus U) \mid [p,q] \text{ segment u } S(a,b) = K \text{ takav da je } x \in \langle p,q\rangle\}.$$

Svaki element te kolekcije je neprazan, jer $[p,q] \cap (K \setminus U) = \emptyset$ povlači

$$x \in \langle p,q\rangle \subset [p,q] \subseteq U,$$

što po pretpostavci ne može biti.
Ta kolekcija ima svojstvo konačnog presjeka. Naime, neka su $[p_i, q_i] \cap (K \setminus U), i \in \{1, \ldots, n\}$. Očito je njihov presjek jednak

$$[p_{max}, q_{min}] \cap (K \setminus U),$$

gdje je

$$p_{max} = \max\{p_1, \ldots, p_n\},\ q_{min} = \min\{q_1, \ldots, q_n\},$$

te je očito $p_{max} < x < q_{min} \Rightarrow [p_{max}, q_{min}] \cap (K \setminus U) \neq \emptyset$.
Kako je K kompaktan, zbog 1.1.36 znamo da je presjek cijele kolekcije $\{[p, q] \cap (K \setminus U)\}$ neprazan. Nazovimo ga P, $P \neq \emptyset$.
Očito, $P \subseteq K \setminus U$ i $P \subseteq [p, q]$, za svaki $[p, q]$ takav da $x \in \langle p, q\rangle$. To znači

$$P \subseteq \bigcap_{x\in\langle p,q\rangle} [p, q].$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$\bigcap_{x\in\langle p,q\rangle} [p, q] = \{x\}.$$

Jasno je da je $x \in \bigcap_{x\in\langle p,q\rangle}[p, q]$,
Pretpostavimo da postoji $y \in \bigcap_{x\in\langle p,q\rangle}[p, q]$ takav da je $y \neq x$. Nalazimo se u $K = S(a, b)$, pa su x i y usporedivi po uređaju $\leq$. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je $x \leq y$. Zbog $x \neq y$, po definiciji separacijskog uređaja vrijedi
1) $x = a$ ili $y = b$, ili
2) x separira a i y u K.

Promotrimo slučaj 1). Tada x ne može biti jednak a, jer a nije sadržan u nijednom intervalu $\langle p, q\rangle, p, q \in K$ (iz istog razloga, $x \neq b$). Dakle, mora biti $y = b$, ali istim argumentom vidimo da y ne može biti jednak b, što nas dovodi u kontradikciju.

U slučaju 2), imamo $x \in \langle a, y\rangle$. Prema 3. tvrdnji, postoji $y' \in \langle x, y\rangle$, i samim tim skup $[a, y']$ ulazi u naš presjek, a taj skup ne sadrži y. Znači, $y \notin \bigcap_{x\in\langle p,q\rangle}[p, q]$, to jest

$$\bigcap_{x\in\langle p,q\rangle} [p, q] = \{x\}.$$

Dakle, $P \subseteq \bigcap_{x\in\langle p,q\rangle}[p, q] = \{x\}$, a kako $x \notin P$ po konstrukciji, slijedi $P = \emptyset$, što nas vodi u kontradikciju i pokazuje da je $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$.

$\square$

3.3 Karakterizacija luka

Podsjetimo na sljedeći rezultat iz teorije skupova:

Definicija 3.3.1. *Neka je* $(A, \leq)$ *uređen skup. Kažemo da je A gust ako*

$$(\forall p, q \in A)(p < q \Rightarrow (\exists r \in A)(p < r < q)).$$

Teorem 3.3.2. ***(uređajna karakterizacija skupa*** $\mathbb{Q}$***, [3, 48]***
Neka je $(A, \leq)$ *linearno uređen skup. Ako je on prebrojiv, gust i nema ni najveći ni najmanji element, onda postoji bijekcija između A i* $\mathbb{Q}$ *koji čuva uređaj takva da i njezin inverz čuva uređaj.*

Napomena 3.3.3. *Bijekcija između dva linearno uređena skupa koja čuva uređaj takva da i njezin inverz čuva uređaj očito je homeomorfizam u odnosu na pripadne uređajne topologije.*

Sada možemo dokazati teorem o karakterizaciji luka.

Teorem 3.3.4. ***(Teorem o karakterizaciji luka)***
Neka je K metrički prostor. Skup K je luk ako i samo ako je kontinuum koji ima točno dvije nerezne točke.

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Već pokazano u diskusiji u prvoj sekciji ovog poglavlja.
$\boxed{\Leftarrow}$ Označimo s a i b nerezne točke kontinuuma K.
Kako je K kompaktan metrički prostor, on je po 1.2.14 separabilan. Neka je B njegov gust prebrojiv podskup. Označimo

$$A = B \setminus \{a, b\}.$$

Očito je A prebrojiv, a tvrdimo da je A gust u $K \setminus \{a, b\}$. Zaista, neka je $x \in K \setminus \{a, b\}$ i neka je U otvoren skup u $K \setminus \{a, b\}$ koji sadrži x. Kako je $K \setminus \{a, b\}$ otvoren u K, onda je U otvoren i u ambijentnom prostoru K. Zbog gustoće skupa B u K, postoji $y \in B$ takav da je $y \in U \subseteq K \setminus \{a, b\}$. Dakle, taj je y iz A, i gustoća od A je dokazana.

Korisno će nam biti i to što je A gust i u čitavom K. Naime, $K \setminus \{a, b\} = \overline{A}_{K \setminus \{a,b\}} \subseteq \overline{A} \subseteq K$, a jedini zatvoren skup u K koji sadrži $K \setminus \{a, b\}$ je čitav K. Dakle, $\overline{A} = K$.

Neka je $\leq$ separacijski uređaj na K.
Tvrdnja: $(A, \leq)$ zadovoljava uvjete uređajne karakterizacije skupa $\mathbb{Q}$.
Prebrojivost već imamo.
Gustoća: neka su $p, q \in A$, $p < q$. Tada po 3. tvrdnji prethodnog teorema 3.2.18 znamo da je $\langle p, q \rangle = \{x \in K \mid p < x < q\}$ otvoren i neprazan skup u ambijentnom prostoru K, a očito je sadržan u $K \setminus \{a, b\}$ pa je otvoren i u njemu. Kako je A gust u $K \setminus \{a, b\}$, postoji $r \in A \cap \langle p, q \rangle$.

Nema ni najmanji ni najveći element: pretpostavimo da ima najmanji element, označimo ga sa c. Očito je $a < c$, jer je a najmanji element čitavog $(K, \leq)$ i $a \notin A$. No, tada je $\langle a, c\rangle$ otvoren skup u K i neprazan je zbog 3. tvrdnje teorema 3.2.18, a očito je i sadržan u $K \setminus \{a, b\}$, pa i otvoren u relativnoj topologiji na njemu. Zbog gustoće A u $K \setminus \{a, b\}$ postoji $y \in A$, $y \in \langle a, c\rangle$. Dakle, $y < c$, što je u kontradikciji s minimalnosti od c.
Nepostojanje najvećeg elementa pokazuje se analogno.

Dakle, A zadovoljava prethodnu propoziciju i homeomorfan je s $\mathbb{Q}$ homeomorfizmom koji čuva uređaj i čiji inverz čuva uređaj. Isto očito vrijedi i za skup

$$D = \{\frac{k}{2^n} \mid 0 < k < n, k, n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, 1],$$

pa prikladnom kompozicijom navedenih homeomorfizama dobivamo homeomorfizam s A u D koji čuva uređaj i čiji inverz čuva uređaj. Nazovimo taj homeomorfizam $h : A \to D$.

Lako vidimo da se h proširuje do $h' : B \to D \cup \{0, 1\}$,

$$h'(x) = \begin{cases} h(x), & x \in A, \\ 0, & x = a, \\ 1, & x = b. \end{cases}$$

koja je i dalje bijekcija koja čuva uređaj i čiji inverz i dalje čuva uređaj (to jest, funkcija h' je strogo rastuća). Tu funkciju proširujemo po uređaju na cijeli skup K na sljedeći način: neka je $H : K \to [0, 1]$ definirana sa

$$H(x) = \sup\{h'(y) \mid y \in B,\ y \leq x\}.$$

Očito je da H proširuje h'. Nadalje, H čuva uređaj: ako je $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2$, zbog gustoće skupa B u K postoji $x \in B$ takav da je $x_1 < x < x_2$. Kako je h' strogo rastuća, vrijedi

$$h'(y) < h'(x), \quad \forall y \in B,\ y \leq x_1 < x$$

$$\Rightarrow H(x_1) = \sup\{h'(y) \mid y \in B,\ y \leq x_1\} \leq h'(x).$$

S druge strane, $x < x_2$ pa je po definiciji

$$h(x) \leq H(x_2) = \sup\{h'(y) \mid y \in B,\ y \leq x_2\}.$$

Dakle, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow H(h_1) \leq H(x_2)$.

Tvrdimo da je ovako definirana funkcija H homeomorfizam između K i $[0, 1]$. Kako je K kompaktan i $[0, 1]$ Hausdorffov, prema rezultatu 1.1.34 dovoljno je pokazati da je H neprekidna bijekcija. Neprekidnost slijedi po konstrukciji, jer kako H čuva uređaj, očito je neprekidna u odnosu na uređajne topologije na K i $[0, 1]$, a te topologije su po Teoremu

3.2.18 jednake početnoj topologiji na K, odnosno euklidskoj topologiji na $[0, 1]$ (što je i zasebno pokazano u Primjeru 3.2.8). Pokažimo bijektivnost.

Injektivnost: pretpostavimo da postoje $x, y \in K$, $x \neq y$ takvi da je $H(x) = H(y)$. Bez smanjenja općenitosti neka je $x < y$, i očito je $x, y \neq a, b$, jer je $H(a) \neq H(b)$ već poznato. Po 3. tvrdnji teorema 3.2.18, $\langle x, y\rangle$ je neprazan otvoren skup, i sadržan je u $K \setminus \{a, b\}$, pa postoji $z \in A \cap \langle x, y\rangle$, a također i $w \in A \cap \langle z, y\rangle$, $z < w$. Kako H po konstrukciji čuva uređaj, vrijedi

$$H(x) \leq H(z) \leq H(w) \leq H(y) \Rightarrow H(z) = H(w).$$

Međutim, $H(z) = h(z)$, $H(w) = h(w)$, a h je injekcija, što nas dovodi u kontradikciju.
Na sličan način dolazimo do istog zaključka u slučaju da je jedan od x i y jednak a ili b.

Surjektivnost: po konstrukciji, H je neprekidna, pa čuva povezanost domene K. Kako je $H(K)$ povezan skup u $[0, 1]$, te po konstrukciji $0 = H(a) \in H(K)$, $1 = H(b) \in H(K)$, mora biti $H(K) = [0, 1]$. U suprotnom, postojala bi točka $t \in \langle 0, 1\rangle$ koja nije pogođena funkcijom H. No, tada je $(H(K) \cap [0, t\rangle, H(K) \cap \langle t, 1])$ separacija od $H(K)$, što je kontradikcija s povezanosti $H(K)$.

Dakle, H jest homeomorfizam između K i $[0, 1]$, što znači da je K luk. $\square$

Poglavlje 4

Teorem o povezanosti lukovima

4.1 Povezanost lukovima

Definicija 4.1.1. *Za topološki prostor X kažemo da je povezan lukovima ako za svake dvije točke $a, b \in X$, $a \neq b$, postoji ulaganje $f : [0,1] \to X$ takvo da je $f(0) = a$ i $f(1) = b$.*

Napomena 4.1.2. *Primijetimo, sjetimo li se činjenica koje smo pokazali o lukovima, da je postojanje puta između točaka a i b koji je ulaganje ekvivalentno postojanju luka čije su krajnje točke upravo a i b.*

Očito je da je svaki prostor koji je povezan lukovima ujedno i povezan putovima, ali povezanost putovima ne povlači povezanost lukovima.

Primjer 4.1.3. ***(Prostor koji je povezan putovima, a nije povezan lukovima.)***
Neka je $X = \{a, b\}$. Indiskretni topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ je povezan putovima, jer su sve funkcije s $[0,1]$ u X trivijalno neprekidne u indiskretnoj topologiji - pa tako i na primjer funkcija

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{, ako je } t = 0, \\ b & \text{, inače.} \end{cases}$$

Međutim, kako je $[0,1]$ neprebrojiv skup, ne postoji injekcija s njega u konačni skup $\{a, b\}$, pa X nije povezan lukovima.

Analognom argumentacijom isto se može pokazati za bilo koji konačan ili prebrojiv X.

Poznato nam je da općenito povezanost ne povlači povezanost putovima, pa ni povezanost lukovima - poznat primjer za to je topološka sinusoida. Međutim, za kontinuume postoji zgodan kriterij: ako je kontinuum Peanov, onda je i povezan lukovima - a posljedično i povezan putovima. Tako ćemo dobiti i široku klasu primjera prostora povezanih lukovima. Krenimo prema dokazu te tvrdnje.

4.2 Lanci

Napomena 4.2.1. *Neka je $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ niz skupova. Uvedimo oznaku*

$$\bigcup \mathscr{C} = C_0 \cup \cdots \cup C_m.$$

Lema 4.2.2. *Neka X topološki prostor i neka je $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ konačan niz podskupova od X. Tada vrijedi*

$$\overline{\bigcup \mathscr{C}} = \overline{C_0} \cup \cdots \cup \overline{C_m}.$$

Dokaz. $\overline{C_0} \cup \cdots \cup \overline{C_m}$ je zatvoren kao konačna unija zatvorenih skupova i sadrži $\bigcup \mathscr{C} = C_1 \cup \cdots \cup C_m$, pa je $\overline{\bigcup \mathscr{C}} \subseteq \overline{C_0} \cup \cdots \cup \overline{C_m}$.

S druge strane, ako je $x \in \overline{C_0} \cup \cdots \cup \overline{C_m}$, onda je postoji $i \in \{0, \ldots, m\}$ takav da je $x \in \overline{C_i}$. Po 1.2.9, tada postoji niz u C_i koji konvergira u x, a to je očito i niz u $\bigcup \mathscr{C}$, pa je po istom rezlutatu $x \in \overline{\bigcup \mathscr{C}}$. □

Definicija 4.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $S \subseteq X$ neprazan. Dijametar skupa S je*

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}.$$

Lema 4.2.4. *Neka je X lokalno povezan metrički prostor i $x \in X$. Za svaki otvoren $S \subseteq X$ takav da je $x \in S$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji povezan otvoren skup U takav da je $\overline{U} \subset S$ takav da je $x \in U$ i $\operatorname{diam} U < \varepsilon$.*

Dokaz. Za svaki $\varepsilon > 0$, $S \cap K(x, \frac{\varepsilon}{2})$ je otvoren skup koji sadrži x, pa zbog lokalne povezanosti X, postoji povezan otvoren skup U, $x \in U' \subseteq S \cap K(x, \frac{\varepsilon}{2})$, i pritom je očito $\operatorname{diam} U' < \varepsilon$. Kako bismo postigli sadržavanje zatvarača, istaknimo da zbog otvorenosti skupa U' postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U'$ i $r < \frac{\varepsilon}{2}$. Stavimo $U = K(x, \frac{r}{2})$. Tada je $x \in U \subset \overline{U} \subset U' \subseteq S$ i $\operatorname{diam} U < \varepsilon$. □

Definicija 4.2.5. *Za konačan niz skupova $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ kažemo da je lanac ako*

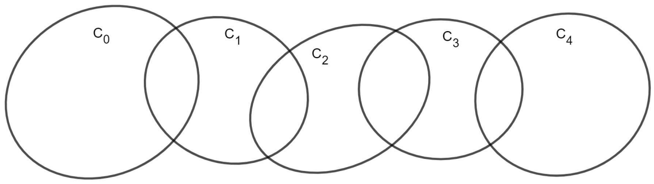
$$C_i \cap C_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1, \forall i, j \in \{0, \ldots, m\}.$$

Skupove C_i, $i \in 0, \ldots, m$, zovemo karike lanca $\mathscr{C}$.

Ako je X skup i $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ lanac takav da su sve karike podskupovi od X, onda kažemo da je $\mathscr{C}$ lanac u X.

Ako je $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ lanac te ako su a i b takvi da je $a \in C_0$ i $b \in C_m$, onda kažemo da je $\mathscr{C}$ lanac od a do b.

Ako je X topološki prostor te $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ lanac u X kojem su sve karike otvoreni skupovi u X, onda kažemo da je $\mathscr{C}$ otvoren lanac u X.



Slika 4.1: Lanac $\mathscr{C} = (C_0, C_1, C_2, C_3, C_4)$.

Propozicija 4.2.6. *Neka je X povezan topološki prostor, neka su $a, b \in X$ i neka je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač od X. Tada postoji lanac $\mathscr{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ od a do b u X za koji vrijedi*

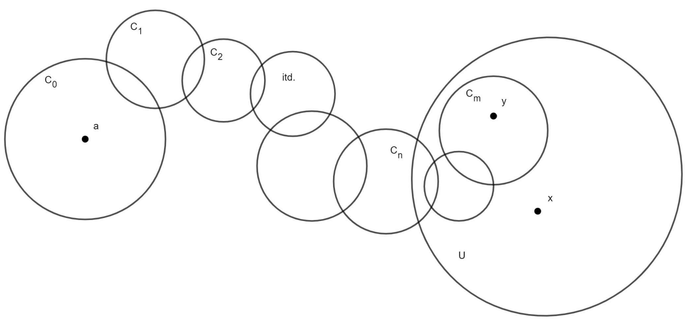
$$C_i \in \mathscr{U}, \forall i \in \{0, \ldots, m\}.$$

Dokaz. Neka je D skup svih $x \in X$ sa sljedećim svojstvom:
postoji lanac $(C_0, \ldots, C_m)$ od a do x, $C_i \in \mathscr{U}$, $\forall i \in \{0, \ldots, m\}$. Pokažimo da je D jednak cijelom X, što uključuje i naš proizvoljni b.

Pokažimo da je D otvoren. Neka je $x \in D$. Tada postoji lanac $(C_0, \ldots, C_m)$ od a do x takav da je $C_i \in \mathscr{U}, \forall i \in \{0, \ldots, m\}$. Očito je $(C_0, \ldots, C_m)$ također lanac od a do y, $\forall y \in C_m$, pa je C_m otvoren skup koji sadrži x i cijeli je sadržan u D. Ova konstrukcija prolazi za sve $x \in D$, dakle D je otvoren.

Pretpostavimo da $D \neq X$. No, to povlači da je $X \setminus D$ otvoren.
Naime, neka je $x \in X \setminus D$. Postoji $U \in \mathscr{U}$ takav da je $x \in U$. Pokažimo da je $U \subseteq X \setminus D$. Pretpostavimo suprotno, neka postoji $y \in U \cap D$. Tada postoji lanac $(C_0, \ldots, C_m)$ od a do y. Imamo $y \in U$ i $y \in C_m$ pa je $U \cap C_m \neq \emptyset$. Definirajmo

$$n = \min\{i \in \{1, \ldots, m\} \mid U \cap C_i \neq \emptyset\}.$$



Slika 4.2: Lanac $(C_0, \ldots, C_m)$ od a do y, $y \in U$.

Tada je $(C_0, \dots, C_n, U)$ lanac od a do x, i očito je $C_0, \dots, C_n, U \in \mathscr{U}$. To znači da je $x \in D$, što je nemoguće, jer je $x \in X \setminus D$. Dakle, $U \subseteq X \setminus D$.
Dakle, za svaki $x \in X \setminus D$ postoji otvoren skup U u X takav da je $x \in U \subseteq X \setminus D$. Stoga je $X \setminus D$ otvoren.

Dakle, D je otvoren i $X \setminus D$ je otvoren. Očito je $a \in D$ pa je $D \neq \emptyset$.

Prema tome,

$$X \setminus D = \emptyset \Rightarrow D = X \Rightarrow b \in D.$$

□

Definicija 4.2.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka su $S, T \subseteq X$ neprazni i neka je $x \in X$.*

Definiramo udaljenost točke x od skupa S kao

$$d(x, S) = \inf\{d(x, y) \mid y \in S\},$$

te udaljenost skupova S i T kao

$$d(S, T) = \inf\{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\}.$$

Lema 4.2.8. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka su $S, T \subseteq X$. Vrijedi*

$$d(S, T) = \inf\{d(x, T) \mid x \in S\}.$$

Dokaz. Označimo

$$a = \inf\{d(x, T) \mid x \in S\},$$

$$b = \inf\{d(x, y) \mid x \in S, y \in T\} = d(S, T).$$

$\boxed{a \leq b}$

Uzmimo proizvoljne $x \in S$, $y \in T$. Po definiciji od a, vrijedi:

$$a \leq d(x, T) \leq d(x, y), \forall x \in S, \forall y \in T$$

$\Rightarrow$ a je donja međa skupa kojem je b infimum $\Rightarrow a \leq b$

$\boxed{b \leq a}$

Za svaki $x \in S$, po definiciji od b, vrijedi:

$$b \leq d(x, y), \forall y \in T.$$

Dakle, $b \leq d(x, T)$, $\forall x \in S$. Znači da je b donja međa skupa kojem je a infimum, pa je $b \leq a$.

□

Lema 4.2.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $S \subseteq X$ neprazan. Tada je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, S)$, neprekidna.*

Dokaz. Pokazat ćemo $|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y), \forall x, y \in X$.

Fiksirajmo $x, y \in X$. Neka je $z \in S$ proizvoljan. Vrijedi:

$$d(x, S) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\Rightarrow d(x, S) - d(x, y) \leq d(y, z), \forall z \in S \ / \inf_{z \in S}$$

$$d(x, S) - d(x, y) \leq \inf\{d(y, z) \mid z \in S\} \overset{4.2.8}{=} d(y, S)$$

$$\iff d(x, S) - d(y, S) \leq d(x, y)$$

Sad zamijenimo uloge x i y i provedemo isti račun, pa dobijemo i

$$d(y, S) - d(x, S) \leq d(x, y),$$

iz čega slijedi $|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo $\delta = \varepsilon$. Tada po gore pokazanom vrijedi:

$$d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow |d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y) < \varepsilon,$$

pa je po 1.2.12 funkcija f neprekidna. □

Lema 4.2.10. *Neka je (X, d) metrički prostor, F neprazan zatvoren skup u X i $x \in X$ takav da $x \notin F$. Tada je $d(x, F) > 0$.*

Dokaz. Kako je $x \in X \setminus F$, što je zbog zatvorenosti skupa F otvoren skup, postoji $r > 0$ tako da je $K(x, r) \subseteq X \setminus F$. Dakle, $d(x, F) \geq r > 0$. □

Propozicija 4.2.11. *Neka je (X, d) metrički prostor. Ako je $S \subseteq X$ kompaktan, $T \subseteq X$ zatvoren i $S \cap T = \emptyset$, onda je $d(S, T) > 0$.*

Dokaz. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = d(x, T).$$

Vidjeli smo da je f neprekidna. Imamo:

$$d(S, T) \overset{4.2.8}{=} \inf\{d(x, T) \mid x \in S\} = \inf\{f(x) \mid x \in S\} = \inf f(S),$$

a znamo iz 1.2.20 da slika kompaktnog skupa S po neprekidnoj funkciji f sadrži minimum, to jest

$$d(S, T) = \min f(S).$$

Dakle, postoji točka $x_0 \in S$ za koju je $f(x_0) = d(S, T)$. Kako su S i T disjunktni, $x_0 \notin T$, a T je zatvoren, pa po Lemi 4.2.10 vrijedi $0 < d(x_0, T) = d(S, T)$. □

Definicija 4.2.12. *Neka je (X, d) metrički prostor. Pretpostavimo da je $\mathscr{C} = (C_0, \dots, C_n)$ konačan niz nepraznih omeđenih skupova u (X, d). Meš od $\mathscr{C}$ definiramo kao*

$$\operatorname{mesh} \mathscr{C} = \max\{\operatorname{diam} C_i \mid 0 \leq i \leq n\}.$$

Definicija 4.2.13. *Ako je $\mathscr{C} = (C_0, \dots, C_m)$ lanac u metričkom prostoru (X, d) te ako je $\varepsilon > 0$ takav da je*

$$\operatorname{diam} C_i < \varepsilon, \ \forall i \in \{0, \dots, m\},$$

onda za $\mathscr{C}$ kažemo da je ε-lanac u (X, d).

Uočimo da za lanac $\mathscr{C}$ vijedi:

$$\mathscr{C} \text{ je } \varepsilon\text{-lanac} \iff \operatorname{mesh} \mathscr{C} < \varepsilon.$$

Lema 4.2.14. *Neka je X metrički prostor. Ako su $A, B \subseteq X$ takvi da je $A \cap B \neq \emptyset$, onda vrijedi*

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B.$$

Dokaz. Neka su $x, y \in A \cup B$. Ako su oba iz istog od dva promatrana podskupa, na primjer A, očito je $d(x, y) \leq \operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B$. U slučaju da nije tako, bez smanjenja općenitosti neka je $x \in A$ i $y \in B$.

Po pretpostavci, postoji $z \in A \cap B$. Zato imamo:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \underbrace{\leq}_{\substack{x,z \in A \\ y,z \in B}} \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B.$$

Dakle, $d(x, y) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B$, za sve $x, y \in A \cup B$, što je i trebalo pokazati. □

Lema 4.2.15. *Neka je X metrički prostor, $a, b \in X$, $a \neq b$, i neka je $\mathscr{C} = (C_0, \dots, C_m)$ lanac od a do b u X. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Ako je $\operatorname{mesh} \mathscr{C} < \frac{1}{k} d(a, b)$, onda $\mathscr{C}$ ima barem $k + 1$ karika, to jest $m \geq k$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $m < k$. Višestrukom primjenom prethodne Leme dobivamo:

$$d(a, b) \leq \operatorname{diam}(C_0 \cup \cdots \cup C_m) \leq \operatorname{diam} C_0 + \cdots + \operatorname{diam} C_m \leq (m+1) \operatorname{mesh} \mathscr{C} < \frac{m+1}{k} d(a, b),$$

a kako je $m < k$, $\frac{m+1}{k} \leq 1$, što povlači $d(a, b) < d(a, b)$, a to je kontradikcija. □

Definicija 4.2.16. *Neka su $(D_0, \dots, D_k)$ i $(C_0, \dots, C_m)$ konačni nizovi skupova. Kažemo da $(D_0, \dots, D_k)$ profinjuje $(C_0, \dots, C_m)$ ako za svaki $i \in \{0, \dots, k\}$ postoji $j \in \{0, \dots, m\}$ takav da je $D_i \subseteq C_j$.*

Kažemo da $(D_0, \dots, D_k)$ strogo profinjuje $(C_0, \dots, C_m)$ ako ga profinjuje i još vrijedi $D_0 \subseteq C_0$ i $D_k \subseteq C_m$.

Lema 4.2.17. *Neka je X skup i neka su $\mathscr{C} = (C_0, \dots, C_m)$ i $\mathscr{D} = (D_0, \dots, D_n)$ lanci u X sa svojstvom da $\mathscr{D}$ profinjuje $\mathscr{C}$.*

Neka su $i, j, k \in \{0, \dots, m\}$ takvi da je $i < k < j$ i neka su $u, v \in \{0, \dots, n\}$ takvi da je $u < v$. Ako vrijedi

$$D_u \subseteq C_i,$$

$$D_v \subseteq C_j,$$

onda postoji $w \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $u < w < v$ i $D_w \subseteq C_k$.

Dokaz. Prvo se uvjerimo da postoje karike između D_u i D_v. Pretpostavimo suprotno, da su D_u i D_v susjedne. To znači da se one sijeku, pa se onda sijeku i njihovi nadskupovi C_i i C_j, što znači da su i te karike susjedne. Međutim, po pretpostavci nije tako.
Dakle, $u < v - 1$.

Promotrimo sve karike lanca $\mathscr{D}$ od u-te do $(v - 1)$-e. Vidimo da je $D_u \subseteq C_i$, gdje je $i < k$, pa je skup $\{l \in \{u, \dots, v - 1\} \mid D_l \subseteq C_k, \text{ za neki } k' \leq k\}$ neprazan. Označimo sa

$$w = \max\{l \in \{u, \dots, v - 1\} \mid D_l \subseteq C_k, \text{ za neki } k' \leq k\}$$

njegov maksimum.

Iz definicije w slijedi da je $u \leq w \leq v - 1$ i $D_w \subseteq C_{k'}$, za neki $k' \leq k$. Tvrdimo da je $k' = k$ i $u < w$.

$\boxed{k' = k}$

Pretpostavimo suprotno, da je $k' < k$. Kad bi bilo $w = v - 1$, karike D_w i D_v lanca $\mathscr{D}$ bile bi susjedne i sijekle bi se, a sadržane su u karikama $C_{k'}$ i C_j lanca $\mathscr{C}$, koje zbog $k' < k < j$ nisu susjedne i ne sijeku se, što je kontradikcija.
Dakle, tada je $w < v - 1$. Stoga je $w + 1 \in \{u, \dots, v - 1\}$. Kako $\mathscr{D}$ profinjuje $\mathscr{C}$, vrijedi $D_{w+1} \subseteq C_{k''}$, za neki k'', a zbog definicije od w, mora biti $k'' > k$.
Sada imamo $D_w \subseteq C_{k'}$ i $D_{w+1} \subseteq C_{k''}$. Zato što su karike D_w i D_{w+1} susjedne, vrijedi:

$$\emptyset \neq D_w \cap D_{w+1} \subseteq C_{k'} \cap C_{k''},$$

no zbog $k' < k < k''$, $C_{k'}$ i $C_{k''}$ nisu susjedne i ne sijeku se, što je kontradikcija.
Dakle, $k' = k$, to jest $D_w \subseteq C_k$.

$\boxed{u < w}$

Pretpostavimo suprotno, da je $u = w$. Tada je $D_u \subseteq C_i$ i $D_u \subseteq C_k \Rightarrow C_i$ i C_k su susjedne, to

jest $k = i + 1$.
Znamo da je $w = u < v - 1$, pa je $w + 1 = u + 1 \in \{u, \ldots, v - 1\}$. Kao u prethodnom dijelu dokaza vidimo da mora biti $D_{u+1} \subseteq C_{k''}$, za neki $k'' > k$, pa imamo:

$$\emptyset \neq D_u \cap D_{u+1} \subseteq C_i \cap C_{k''},$$

ali $i < k < k''$, što znači da C_i i $C_{k''}$ nisu susjedne i ne sijeku se, što nas dovodi do kontradikcije.

Dakle, ukupno za naš w vrijedi $u < w < v$ i $D_w \subseteq C_k$, a upravo takav smo tražili.

□

4.3 Teorem o povezanosti lukovima za Peanove kontinuume

Teorem 4.3.1. *Neka je X kompaktan metrički prostor i neka je $(\mathscr{C}^n)_n$ niz otvorenih lanaca u X, $\mathscr{C}^n = (C_0^n, \ldots, C_{k_n}^n)$, takav da vrijedi:*

1) $(\overline{C_0^{n+1}}, \ldots, \overline{C_{k_{n+1}}^{n+1}})$ strogo profinjuje lanac $\mathscr{C}^n$
(zatvarači karika sljedećeg lanca strogo profinjuju prethodni),
2) $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n \longrightarrow 0$.

Neka je $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup \mathscr{C}^n}$. Vrijede sljedeće dvije tvrdnje:
a) Skup A siječe svaku kariku svakog lanca iz niza $(\mathscr{C}^n)_n$, to jest

$$A \cap C_i^n \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, \ldots, k_n\}.$$

b) A je kontinuum.

Dokaz. Tvrdnja a)

Zatvarači karika sljedećeg lanca $(\overline{C_0^{n+1}}, \ldots, \overline{C_{k_{n+1}}^{n+1}})$ strogo profinjuju prethodni lanac $(C_0^n, \ldots, C_{k_n}^n)$. To znači da je

$$\overline{C_0^{n+1}} \subseteq C_0^n \text{ i } \overline{C_{k_{n+1}}^{n+1}} \subseteq C_{k_n}^n, \forall n \in \mathbb{N},$$

pa su niz zatvarača prvih karika $(\overline{C_0^n})_n$ i niz zatvarača zadnjih karika $(\overline{C_{k_n}^n})_n$ lanaca niza $(\mathscr{C}^n)_n$ ugniježđeni nizovi nepraznih zatvorenih skupova. Prema Cantorovom aksiomu, presjek svakog od ta dva niza je neprazan, pa sadrže neki a, odnosno b. S druge strane, taj je presjek očito podskup od A, pa imamo $a \in A$ sadržan u svim prvim karikama i $b \in A$ sadržan u svim zadnjim karikama.

Pogledajmo ostale karike. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $k \in \{1, \ldots, k_n - 1\}$, takav da C_k^n nije ni prva ni zadnja karika. Tvrdimo da postoji $j \in \{1, \ldots, k_{n+1} - 1\}$ takav da je $\overline{C_j^{n+1}} \subseteq C_k^n$.

Pretpostavimo suprotno, to jest da je $\overline{C_j^{n+1}} \nsubseteq C_k^n$ za sve $j \in \{1, \ldots, k_{n+1} - 1\}$. Kako niz $(\overline{C_0^{n+1}}, \ldots, \overline{C_{k_{n+1}}^{n+1}})$ profinjuje $\mathscr{C}^n$, to znači da je $\overline{C_j^{n+1}} \subseteq C_l^n$ za neki $l \neq k$, za svaki $j \in \{1, \ldots, k_{n+1} - 1\}$.

To možemo zapisati na sljedeći način: za svaki $j \in \{1, \ldots, k_{n+1} - 1\}$, vrijedi:

$$\overline{C_j^{n+1}} \subseteq C_0^n \cup \cdots \cup C_{k-1}^n = U,$$

ili

$$\overline{C_j^{n+1}} \subseteq C_{k+1}^n \cup \cdots \cup C_{k_n}^n = V.$$

Kako se radi o strogom profinjenju, imamo da je $\overline{C_0^{n+1}} \subseteq C_0^n$ i $\overline{C_{k_{n+1}}^{n+1}} \subseteq C_{k_n}^n$, a jer je $\mathscr{C}^n$ lanac, sijeku se samo susjedne karike, pa je $U \cap V = \emptyset$.

Neka je $j_0 = \max\{j \in \{0, \ldots, k_{n+1}\} \mid \overline{C_j^{n+1}} \subseteq U\}$ indeks zadnje karike iz $(n+1)$-og lanca čiji je zatvarač sadržan u uniji svih karika n-tog lanca prije k-te. Indeks j_0 je dobro definiran, jer je $\overline{C_0^{n+1}} \subseteq C_0^n \subseteq U$.

Također, kako je $\overline{C_{k_{n+1}}^{n+1}} \subseteq C_{k_n}^n \subseteq V$, što je disjunktno s U, vrijedi $j_0 < k_{n+1}$. Onda po definiciji od j_0 vrijedi

$$C_{j_0}^{n+1} \subseteq \overline{C_{j_0}^{n+1}} \subseteq U, \text{ i}$$

$$C_{j_0+1}^{n+1} \subseteq \overline{C_{j_0+1}^{n+1}} \subseteq V,$$

a U i V su disjunktni, pa je $C_{j_0}^{n+1} \cap C_{j_0+1}^{n+1} = \emptyset$, što je kontradikcija jer su to susjedne karike u lancu $\mathscr{C}^{n+1}$.

Dakle, postoji $j \in \{1, \ldots, k_{n+1} - 1\}$ takav da je $\overline{C_j^{n+1}} \subseteq C_k^n$. Označimo ga s j_1. Primijenimo Lemu 4.2.17 na lance $\mathscr{C}^{n+1}$ i $\mathscr{C}^{n+2}$ i njihove karike $C_0^{n+2} \subset C_0^{n+1}$, $C_{k_{n+2}}^{n+2} \subset C_{k_{n+1}}^{n+1}$ i $C_{j_1}^{n+1}$, $0 < j_1 < k_{n+1}$ kako bismo dobili kariku $C_{j_2}^{n+2}$ lanca $\mathscr{C}^{n+2}$ takvu da je $0 < j_2 < k_{n+2}$ i $C_{j_2}^{n+2} \subseteq C_{j_1}^{n+1}$.

Induktivno nastavljamo i dolazimo do niza karika $(C_{j_m}^{n+m})_m$ takvog da je

$$C_{j_{m+1}}^{n+m+1} \subseteq C_{j_m}^{n+m}$$

$$\Rightarrow \overline{C_{j_{m+1}}^{n+m+1}} \subseteq \overline{C_{j_m}^{n+m}}.$$

Dakle, $(\overline{C_{j_m}^{n+m}})_m$ je niz nepraznih ugniježđenih zatvorenih skupova, pa je po Cantorovom aksiomu

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{C_{j_m}^{n+m}} \neq \emptyset,$$

a primijetimo da vrijedi

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{C_{j_m}^{n+m}} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup \mathscr{C}^n} = A, \text{ kao i}$$

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{C^{n+m}_{j_m}} \subseteq C^{n+1}_{j_1} \subset \overline{C^{n+1}_{j_1}} \subseteq C^n_k,$$

pa je $C^n_k \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, \ldots, k_n - 1\}$, što je trebalo pokazati.

Tvrdnja b)

Kao presjek zatvorenih skupova, A je zatvoren skup.

Pretpostavimo da A ima separaciju (F, G). Tada su posebno F i G zatvoreni u A i disjunktni, a kako je svaki zatvoren podskup kompaktnog skupa A kompaktan, to možemo reći i za, recimo, F. Direktna primjena rezultata 4.2.11 na F i G pokazuje da je

$$d(F, G) = \mu > 0.$$

Zbog nepraznosti F i G, postoji $x \in F$ i $y \in G$, pri čemu je $d(x, y) > \mu$.
Kako vrijedi $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n \longrightarrow 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{\mu}{2}$. Po definiciji,

$$x, y \in A \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{C}^{n+1}} \subseteq \bigcup \mathscr{C}^n,$$

pa postoje $i, j \in \{0, \ldots, k_n\}$ takvi da je $x \in C^n_i$ i $y \in C^n_j$. Jer je $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < d(F, G) \leq d(x, y)$, x i y ne mogu biti u istoj karici, pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $i < j$. Iz istog razloga,

$$C^n_i \cap F \neq \emptyset \Rightarrow C^n_i \cap G = \emptyset,$$
$$C^n_j \cap G \neq \emptyset \Rightarrow C^n_j \cap F = \emptyset.$$

Označimo $p = \min\{l \in \{i+1, \ldots, j\} \mid C^n_l \cap F = \emptyset\}$. U tom se skupu nalazi barem j.
Pritom, p ne može biti j, jer je po definiciji $C^n_{p-1} \cap F \neq \emptyset$, a znamo prema 4.2.14 da je

$$\operatorname{diam}(C^n_{p-1} \cup C^n_p) \leq \operatorname{diam} C^n_{p-1} + \operatorname{diam} C^n_p < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu.$$

Kad bi bilo $p = j$, postojao bi $x' \in C^n_{j-1} \cap F$, pa zbog $y \in C^n_j \cap G$ mora biti

$$\mu = d(F, G) \leq d(x', y) \leq \operatorname{diam}(C^n_{p-1} \cup C^n_p) < \mu,$$

što je kontradikcija.
Karika C^n_p ne može sijeći ni G. Naime, po definiciji indeksa p, karika C^n_{p-1} siječe F, to jest postoji $x_F \in F \cap C^n_{p-1}$. Kad bi postojao neki $y_G \in G \cap C^n_p$, iz toga bi slijedilo

$$d(x_F, y_G) \leq \operatorname{diam} C^n_{p-1} \cup C^n_p < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu = d(F, G) \leq d(x_F, y_G) \Rightarrow d(x_F, y_G) < d(x_F, y_G),$$

što je kontradikcija.

Dakle, imamo kariku C^n_p lanca $\mathscr{C}^n$ koja ne siječe ni F ni G. Međutim, prva tvrdnja nam kaže da A siječe svaku kariku svakog lanca niza $(\mathscr{C}^n)_n$, što je kontradikcija. Dakle, A je povezan. $\square$

Korolar 4.3.2. *Neka je X kompaktan metrički prostor i neka je $(\mathscr{C}^n)_n$ niz otvorenih lanaca u X koji zadovoljava uvjete Teorema 4.3.1. Tada vrijedi*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall i \in \{0, \ldots, k_n\})(\exists j \in \{0, \ldots, k_{n+1}\}) \quad \overline{C_j^{n+1}} \subseteq C_i^n, \tag{4.1}$$

to jest, u svakom lancu iz niza $(\mathscr{C}^n)_n$ svaka karika sadrži zatvarač neke karike sljedećeg lanca.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Kako niz zatvarača karika sljedećeg lanca strogo profinjuje prethodni lanac, tvrdnja vrijedi za prvu i zadnju kariku lanca $\mathscr{C}^n$, jer je $\overline{C_0^{n+1}} \subseteq C_0^n$ i $\overline{C_{k_{n+1}}^{m+1}} \subseteq C_{k_n}^n$.

Za karike različite od prve i zadnje, C_k^n, $k \in \{1, \ldots, k_n - 1\}$, tvrdnja ovog korolara upravo je pokazana u dokazu tvrdnje a) u prethodnom Teoremu 4.3.1. □

Teorem 4.3.3. *Svaki Peanov kontinuum je povezan lukovima.*

Dokaz. Neka je P Peanov kontinuum i $a, b \in P$, $a \neq b$.

Neka je $\mathscr{U} = \{U \subseteq P \mid U \text{ otvoren, povezan, } \operatorname{diam} U < 1\}$. Po Lemi 4.2.4, svaki $x \in P$ sadržan je u nekom $U \in \mathscr{U}$, dakle $\mathscr{U}$ je otvoreni pokrivač od P.

Iz Propozicije 4.2.6 slijedi da postoji lanac $\mathscr{C}^1 = (C_0^1, \ldots, C_{k_1}^1)$ od a do b takav da je $C_i^1 \in \mathscr{U}, \forall i \in \{0, \ldots, k_1\}$.

Kako je $\mathscr{C}$ lanac, svaki $x \in \bigcup \mathscr{C}$ nalazi se ili u jednoj karici C_i, ili u dvije karike, C_i i C_{i+1}. Neka je

$$T = \bigcap_{i \in \{0, \ldots, m\} \text{ t. d. } x \in C_i} C_i.$$

Kako je $\mathscr{C}$ otvoren lanac, T je svakako otvoren skup, pa po Lemi 4.2.4 postoji otvoren i povezan skup V_x takav da je $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset T$ i da je $\operatorname{diam} V_x < \frac{1}{2}$. Po konstrukciji, vrijedi

$$x \in C_i \Rightarrow \overline{V_x} \subset C_i, \ \forall i \in \{0, \ldots, k_1\},$$

dakle $\{V_x \mid x \in C_i\}$ je otvoren pokrivač za C_i, $\forall i \in \{0, \ldots, k_1\}$.

Za svaki $i \in \{0, \ldots, k_1 - 1\}$ odaberimo točku $x_i \in C_i \cap C_{i+1}$.

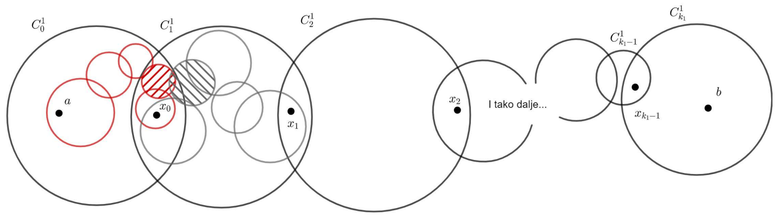
Kako je C_0^1 povezan, po Propoziciji 4.2.6 postoji lanac $\mathscr{D}^0 = (D_0^0, \ldots, D_{m_0}^0)$ od a do x_0 u C_0^1 takav da je $\{D_0^0, \ldots, D_{m_0}^0\} \subseteq \{V_x \mid x \in C_0^1\}$. Isto tako postoji lanac $\mathscr{D}^1 = (D_0^1, \ldots, D_{m_1}^1)$ od x_0 do x_1 u C_1^1 takav da je $\{D_0^1, \ldots, D_{m_1}^1\} \subseteq \{V_x | x \in C_1^1\}$, i tako dalje za sve $i \in \{0, \ldots, k_1 - 1\}$, uz napomenu da je lanac $\mathscr{D}^{k_1 - 1}$ od $x_{k_1 - 1}$ do b.

Neka je

$$n_0 = \min\{i \in \{0, \ldots, m_0\} \mid D_i^0 \cap (D_0^1 \cup \cdots \cup D_{m_1}^1) \neq \emptyset\}$$

(prva karika lanca $\mathscr{D}^0$ koja siječe neku kariku lanca $\mathscr{D}^1$), i neka je

$$p_1 = \max\{j \in \{0, \ldots, m_1\} \mid D_{n_0}^0 \cap D_j^1 \neq \emptyset\}$$



Slika 4.3: U ovoj ilustraciji istaknuti su lanci $\mathscr{D}^0$ i $\mathscr{D}^1$, a karike $D^0_{n_0}$ i $D^1_{p_1}$ su išarane.

(zadnja karika lanca $\mathscr{D}^1$ koja siječe onu $D^0_{n_0}$, koja ih prva siječe iz lanca $\mathscr{D}^0$).

Sada je $(D^0_0, \dots, D^0_{n_0}, D^1_{p_1}, D^1_{p_1+1}, \dots, D^1_{m_1})$ lanac od a do x_1 u $C^1_0 \cup C^1_1$ čije su karike iz skupa $\{V_x \mid x \in \bigcup \mathscr{C}^1\}$ (posebno, otvorene su, povezane, dijametar im je manji od $\frac{1}{2}$ i zatvarač svake od njih je sadržan u nekoj karici C_i lanca $\mathscr{C}^1$) koji strogo profinjuje lanac (C^1_0, C^1_1) od a do x_1.

Neka je onda

$$n_1 = \min\{i \in \{p_1, \dots, m_1\} \mid D^1_i \cap (D^2_0 \cup \dots \cup D^2_{m_2}) \neq \emptyset\}$$

(prva od preostalih karika lanca $\mathscr{D}^1$ koja siječe neku kariku lanca $\mathscr{D}^2$; takva postoji jer je $p_1 \leq m_1$ i $x_1 \in D^1_{m_1} \cap D^2_0 \neq \emptyset$), i neka je

$$p_2 = \max\{j \in \{0, \dots, m_2\} \mid D^1_{n_1} \cap D^2_j \neq \emptyset\}$$

(zadnja karika lanca $\mathscr{D}^2$ koja siječe onu $D^1_{n_1}$, koja ih prva siječe od preostalih karika lanca $\mathscr{D}^1$).

Sada je

$$(D^0_0, \dots, D^0_{n_0}, D^1_{p_1}, \dots, D^1_{n_1}, D^2_{p_2}, \dots, D^2_{m_2})$$

lanac od a do x_2 u $C^1_0 \cup C^1_1 \cup C^1_2$, čije su karike i dalje iz skupa $\{V_x \mid x \in \bigcup \mathscr{C}^1\}$ te koji strogo profinjuje lanac (C^1_0, C^1_1, C^1_2) od a do x_2.

Induktivno nastavljamo ovaj postupak sve dok ne dođemo do posljednjeg koraka gdje se priključuje lanac $\mathscr{D}^{k_1-1}$ od x_{k_1-1} do b, nakon čega smo dobili lanac

$$\mathscr{C}^2 = (C^2_0, \dots, C^2_{k_2}) = (D^0_0, \dots, D^0_{n_0}, D^1_{p_1}, \dots, D^1_{n_1}, D^2_{p_2}, \dots, D^{k_1-1}_{n_{k-1}}, D^k_{p_k}, ..., D^{m_{k_1}}_{m_{k_1}}),$$

od a do b u $\bigcup \mathscr{C}^1$ koji strogo profinjuje $\mathscr{C}^1 = (C^1_0, \dots, C^1_{k_1})$ takav da je

$$\{C^2_0, \dots, C^2_{k_2}\} \subseteq \{V_x \mid x \in \bigcup \mathscr{C}^1\},$$

što znači da su sve karike povezane i otvorene, da je mesh $\mathscr{C}^2 < \frac{1}{2}$ te da je zatvarač svake karike sadržan u nekoj karici prethodnog lanca $\mathscr{C}^1$, iz čega zbog 4.2.2 slijedi i

$$\overline{\bigcup \mathscr{C}^2} \subset \bigcup \mathscr{C}^1.$$

Napomena 4.3.4. *Istaknimo da smo u ovoj konstrukciji birali karike upravo tako da vrijedi sljedeće: ako je j-ta karika sljedećeg lanca sadržana u i-toj karici prethodnog, onda su karike nakon j-te sigurno sadržane u karikama od i-te nadalje.*

Induktivnim ponavljanjem ovog postupka na svakom dobivemon lancu, dolazimo do niza lanaca $(\mathscr{C}^n)_n$, $\mathscr{C}^n = (C_0^n, \ldots, C_{k_n}^n)$, koji po konstrukciji ima sljedeća svojstva:

1. $\mathscr{C}^n$ je lanac od a do b u P, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, karike $C_0^n, \ldots, C_{k_n}^n$ su otvorene i povezane, te je $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{2^{n-1}}$. Dakle,

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n = 0.$$

3. Niz zatvarača karika lanca $(\overline{C_0^{n+1}}, \ldots, \overline{C_{k_{n+1}}^{n+1}})$ strogo profinjuje niz karika njemu prethodnog lanca $(C_0^n, \ldots, C_{k_n}^n)$.

Definirajmo

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup \mathscr{C}^n}.$$

Očito je $a, b \in A$. Tvrdimo da je A luk s krajnjim točkama a i b.

Poslužit ćemo se karakterizacijom luka 3.3.4: pokazat ćemo da je A kontinuum (dakle, kompaktan i povezan) i da su mu a i b jedine nerezne točke.

Po kontrukciji, naš A zadovljava uvjete Teorema 4.3.1, iz kojeg slijedi da je A kontinuum.

Pokažimo da su sve točke osim a i b rezne točke skupa A.

Neka je $x \in A$, $x \neq a, b$. Onda je $d(x, a), d(x, b) > 0$.
Kako vrijedi $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n \to 0$, imamo:

$$(\exists M_1 > 0) \quad n > M_1 \Rightarrow \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{2} d(x, a),$$

$$(\exists M_2 > 0) \quad n > M_2 \Rightarrow \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{3} d(x, b).$$

$\Rightarrow$ Za $M = \max\{M_1, M_2\}$, imamo

$$n > M \Rightarrow \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{2} d(x, a) \text{ i } \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{3} d(x, b).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji jedinstveni $j_n \in \{0, \ldots, k_n\}$ takav da je $C_{j_n}^n$ prva karika lanca $\mathscr{C}^n$ koja sadrži x.
Neka je $n > M$. Kako je $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{2} d(x, a)$ i $a \in C_0^n$, vrijedi

$$\operatorname{diam}(C_0^n \cup C_1^n) < \operatorname{diam} C_0^n + \operatorname{diam} C_1^n < d(x, a),$$

što znači $x \neq C_0^n \cup C_1^n$. Stoga je

$$j_n \neq 0, 1 \Rightarrow j_n \geq 2 \iff j_n - 2 \geq 0.$$

Također, zato što je $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{3} d(x, b)$ i $b \in C_{k_n}^n$, imamo

$$\operatorname{diam}(C_{k_n}^n \cup C_{k_n-1}^n \cup C_{k_n-2}^n) < \operatorname{diam} C_{k_n}^n + \operatorname{diam} C_{k_n-1}^n + \operatorname{diam} C_{k_n-2}^n < d(x, b),$$

što znači $x \neq C_{k_n}^n \cup C_{k_n-1}^n \cup C_{k_n-2}^n$. Stoga je

$$j_n \neq k_n - 2, k_n - 1, k_n \Rightarrow j_n \leq k_n - 3 \iff j_n + 3 \leq k_n.$$

Ne samo da smo time pokazali da se u lancima poslije M-tog točka a ne nalazi u prvoj karici koja sadrži x niti u karici koja joj prethodi, te da se točka b ne nalazi u prvoj karici koja sadrži x niti u dvije karike koje dolaze nakon nje, pokazali smo i da postoje barem dvije prethodne i barem tri naknadne karike poslije j_n-te, koja prva sadrži x, jer je

$$0 \leq j_n - 2 < j_n - 1 < j_n < j_n + 1 < j_n + 2 < j_n + 3 \leq k_n.$$

Pritom se x nalazi ili samo u $C_{j_n}^n$, ili u $C_{j_n}^n \cap C_{j_n+1}^n$.

Dakle, za $n > M$, $x \in A = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup \mathscr{C}^l} \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{C}^{n+1}} \subseteq \bigcup \mathscr{C}^n$ i pritom vrijedi:

$$x \notin C_0^n \cup C_1^n \cup \cdots \cup C_{j_n-2}^n = D_n$$

i

$$x \notin C_{j_n+3}^n \cup C_{j_n+4}^n \cup \cdots \cup C_{k_n}^n = E_n.$$

Kao unije otvorenih skupova, D_n i E_n su otvoreni, te je $a \in D_n$ i $b \in E_n$, $\forall n > M$.
Definiramo:

$$D = \bigcup_{n>M} D_n$$

$$E = \bigcup_{n>M} E_n$$

Tvrdimo da je $(D \cap A, E \cap A)$ separacija od $A \setminus \{x\}$.

Kako je $a \in D \cap A$ i $b \in E \cap A$, oba su neprazni. Otvorenost oba skupa u relativnoj topologiji na A slijedi iz otvorenosti svih skupova D_n i E_n te činjenice da je unija otvorenih skupova otvorena.

Pokažimo da je $(D \cap A) \cup (E \cap A) = A \setminus \{x\}$. Neka je $y \in A \setminus \{x\}$. Tada je $y \neq x$, što povlači $d(x, y) > 0$. Onda postoji $M' > 0$ takav da za sve $n > M'$ vrijedi

$$\operatorname{mesh} \mathscr{C}^n < \frac{1}{3} d(x, y).$$

Na isti način kao u prethodnom dijelu dokaza, vidimo da tada y nije u karici $C^n_{j_n}$ niti u prve dvije karike prije ili poslije nje. Uzmemo li onda $M'' = \max\{M, M'\}$, za sve $n > M''$ vrijedi $y \in D_n$ ili $y \in E_n$, pa je $y \in (D \cap A) \cup (E \cap A)$.

Pokažimo još da su $D \cap A$ i $E \cap A$ disjunktni.
Kako niz zatvarača karika sljedećeg lanca strogo profinjuje prethodni, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirana je funkcija $f_{n+1,n} : \{0, \dots, k_{n+1}\} \to \{0, \dots, k_n\}$,

$$f_{n+1,n}(j) = \min\{i \in \{0, \dots, k_n\} \mid \overline{C^{n+1}_j} \subseteq C^n_i\}.$$

Po konstrukciji niza lanaca $(\mathscr{C}^n)_n$ (vidi napomenu 4.3.4), ova je funkcija rastuća.

Za $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, uzastopnom kompozicijom ovakvih funkcija dobivamo funkciju

$$f_{m,n} := f_{m,m-1} \circ \cdots \circ f_{n+1,n},$$

za koju je očito da ima svojstvo

$$\overline{C^m_j} \subseteq C^n_{f_{m,n}(j)}, \ \forall j \in \{0, \dots, k_m\}.$$

I ova je funkcija rastuća. Pokažimo to matematičkom indukcijom.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Za $m = n + 1$, već znamo da tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $f_{m,n}$ rastuća za neki $m > n$. Neka su $i, j \in \{0, \dots, k_{m+1}\}$, $i < j$. Tada vrijedi:

$$f_{m,n}(i) \leq f_{m,n}(j) \ / \quad f_{m+1,m} \circ ()$$

$$\Rightarrow f_{m+1,n}(i) = f_{m+1,m} \circ f_{m,n}(i) \leq f_{m+1,m} \circ f_{m,n}(j) = f_{m+1,n}(j),$$

jer je $f_{m+1,m}$ rastuća funkcija. Dakle, iz pretpostavke slijedi da je $f_{m+1,n}$ rastuća, stoga po principu matematičke indukcije slijedi da je $f_{m,n}$ rastuća funkcija, za svaki $m > n$, i to vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Sada pokažimo sljedeće: neka je $n > M$. Tada $\forall m \geq n$ vrijedi:
a) $D_n \cap E_m = \emptyset$
b) $D_m \cap E_n = \emptyset$

Primijetimo, po konstrukciji je ova tvrdnja trivijalno točna u slučaju $m = n$.
Neka je $n > M$ i $m > n$. Tada je $x \in C^n_{j_n}$ i $x \in C^m_{j_m}$. Po konstrukciji, $\mathscr{C}^m$ profinjuje $\mathscr{C}^n$, pa je $C^m_{j_m}$ sadržana u nekoj karici od $\mathscr{C}^n$, a kako sadrži x, to mora biti jedna od karika koje ga sadrže, pa vrijedi

$$C^m_{j_m} \subseteq C^n_{j_n} \text{ ili } C^m_{j_m} \subseteq C^n_{j_n+1},$$

jer je, podsjetimo, j_n definiran kao indeks prve karike u lancu $\mathscr{C}^n$ koja sadrži x, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa zbog $\overline{C^m_{j_m}} \subseteq C^n_{f_{m,n}(j_m)}$, funkcija $f_{m,n}$ može poprimiti samo vrijednosti

$$f_{m,n}(j_m) = j_n \text{ ili } f_{m,n}(j_m) = j_n + 1.$$

Radi jednostavnosti zapisa, uvedimo oznaku $f_{m,n} = f$.

a) $\boxed{D_n \cap E_m = \emptyset}$

Kako je

$$D_n \cap E_m = \bigcup_{\substack{i \in \{0,\dots,j_n-2\} \\ l \in \{j_m+3,\dots,k_m\}}} (C_i^n \cap C_l^m),$$

treba pokazati $C_i^n \cap C_l^m = \emptyset$, $\forall i \in \{0, .., j_n - 2\}$, $\forall l \in \{j_m + 3, \dots, k_m\}$.
Neka su dani takvi i, l. Znamo, $C_l^m \subseteq C_{f(l)}^n$, a kako je

$$l \geq j_m + 3 > j_m \text{ i } f(j_m) \in \{j_n, j_n + 1\},$$

zbog monotonosti funkcije f imamo

$$f(l) \geq f(j_m) \geq j_n > j_n - 1 > i \Rightarrow f(l) - i \geq 2,$$

što znači i-ta i $f(l)$-ta karika lanca $\mathscr{C}^n$ nisu susjedne i ne sijeku se. Sada lako vidimo da je

$$C_i^n \cap C_l^m \subseteq C_i^n \cap C_{f(l)}^n = \emptyset.$$

b) $\boxed{D_m \cap E_n = \emptyset}$

Neka je $n > M$ i $m > n$. Kako je pokazano u dokazu tvrdnje a), treba pokazati $C_i^m \cap C_l^n = \emptyset$, $\forall i \in \{0, .., j_m - 2\}$, $\forall l \in \{j_n + 3, \dots, k_n\}$. Znamo, $C_i^m \subseteq C_{f(i)}^n$, a kako je

$$i \leq j_m - 2 < j_m \text{ i } f(j_m) \in \{j_n, j_n + 1\},$$

zbog monotonosti funkcije f imamo

$$f(i) \leq f(j_m) \leq j_n + 1 < j_n + 2 < j_n + 3 \leq l \Rightarrow l - f(i) \geq 2,$$

što znači $f(i)$-ta i l-ta karika lanca $\mathscr{C}^n$ nisu susjedne i ne sijeku se. Sada lako vidimo da je

$$C_i^m \cap C_l^n \subseteq C_{f(i)}^n \cap C_l^n = \emptyset.$$

Dakle, $D_n \cap E_m = \emptyset$, $\forall m, n > M$.

Ovo povlači $E \cap D = \emptyset$. Naime, u suprotnom, postoji $y \in E \cap D$, što znači da postoje $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, takvi da je $y \in D_n$ i $y \in E_m$, a to je kontradikcija s upravo pokazanim.

Dakle, $(E \cap A, D \cap A)$ je separacija od $A \setminus \{x\}$ i x je rezna točka skupa A, $\forall x \in A \setminus \{a, b\}$.

Ostaje pokazati da su a i b nerezne točke, to jest da su $A \setminus \{a\}$ i $A \setminus \{b\}$ povezani skupovi.

Pokažimo da a nije rezna točka (za b dokaz ide analogno). Po pretpostavci vrijedi $a \neq b$, što povlači da je $d(a, b) > 0$. Kako vrijedi $\lim_{n\to\infty} \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n = 0$, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $m \geq m_0$ vrijedi $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^m < \frac{1}{2} d(a, b)$. Onda nam Lema 4.2.15 kaže da lanac $\mathscr{C}^m$ ima barem tri karike, za svaki $m \geq m_0$.

Fiksirajmo $m \geq m_0$. Induktivno konstruiramo niz $(l_n)_{n\geq m}$, koji ovisi o m, na sljedeći način: Neka je $l_m = 2$ (indeks treće karike, koja po konstrukciji postoji). Nadalje, ako imamo l_n, neka je

$$l_{n+1} = \min\{j \in \{0, \dots, k_{n+1}\} \mid \overline{C_j^{n+1}} \subseteq C_{l_n}^n\}$$

indeks prve karike u sljedećem lancu čiji je zatvarač sadržan u $C_{l_n}^n$. Takav indeks zaista postoji, jer po Korolaru (4.1) svaka karika lanca $\mathscr{C}^n$ sadrži zatvarač neke karike iz sljedećeg lanca.

Niz $((C_{l_n}^n, \dots, C_{k_n}^n))_{n\geq m}$ je niz lanaca u P za koji tvrdimo da zadovoljava uvjete Teorema 4.3.1:

1. Već znamo da su zadnje karike u tom nizu lanaca ugniježđene na pogodan način, a indeksi l_n odabrani su upravo tako da je $\overline{C_{l_{n+1}}^{n+1}} \subseteq C_{l_n}^n$. Onda po konstrukciji niza lanaca $(\mathscr{C}^n)_n$ (vidi 4.3.4) vrijedi: ako je $j \in \{l_{n+1} + 1, \dots, k_{n+1}\}$, zatvarač karike C_j^{n+1} sadržan je u nekoj karici C_i^n lanca $\mathscr{C}^n$ takvoj da je $i \geq l_n$. Dakle, zatvarači karika sljedećeg lanca u nizu $((C_{l_n}^n, \dots, C_{k_n}^n))_{n\geq m}$ strogo profinjuju prethodni.
2. Po konstrukciji je $0 \leq \operatorname{mesh}(C_{l_n}^n, \dots, C_{k_n}^n) \leq \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n$. Znamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mesh} \mathscr{C}^n = 0,$$

pa kako su $C_{l_n}^n, \dots, C_{k_n}^n$ karike lanca $\mathscr{C}^n$, iz teoreoma o sendviču slijedi i

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mesh}(C_{l_n}^n, \dots, C_{k_n}^n) = 0.$$

Dakle, uvjeti Teorema su zadovoljeni. Specijalno, on nam govori da je S_m povezan skup, $\forall m \geq m_0$. Definirajmo onda

$$S = \bigcup_{m\geq m_0} S_m.$$

Zbog $b \in S_m, \forall m \geq m_0$, S je unija povezanih skupova s nepraznim presjekom, pa je po 1.1.33 povezan skup. Tvrdimo da je

$$A \setminus \{a\} = S.$$

$\boxed{\supseteq}$ Očito, jer $a \notin S_m, \forall m \geq m_0$.
$\boxed{\subseteq}$ Neka je $x \in A$, $x \neq a$. Odaberimo $m \geq m_0$ takav da je $\operatorname{mesh} \mathscr{C}^m < \frac{1}{4} d(x, a)$. Znamo da $\mathscr{C}^m$ ima podlanac od a do x, i prema rezultatu 4.2.15, taj podlanac ima barem pet karika - to jest, x se sigurno nalazi u karici koja je po redu barem peta u cijelom lancu, a možda se nalazi i u njoj prethodnoj karici, koja je barem četvrta po redu. Tvrdimo da je

$$x \in S_m, \text{ što je ekvivalentno s } x \in C_{l_n}^n \cup \dots \cup C_{k_n}^n, \forall n \geq m.$$

Pretpostavimo suprotno, da postoji $n \geq m$ takav da je $x \notin C^n_{l_n} \cup \cdots \cup C^n_{k_n}$. To znači da je

$$x \in C^n_0 \cup \cdots \cup C^n_{l_n - 1}.$$

Neka je j_n indeks prve karike koja sadrži x, $0 \leq j_n < l_n$. Promotrimo prije uvedenu rastuću funkciju $f_{n,m} = f : \{0, \ldots, k_n\} \to \{0, \ldots, k_m\}$:

$$j_n < l_n \Rightarrow f(j_n) \leq f(l_n).$$

Kako je po definiciji $C^n_{l_n} \subseteq \overline{C^n_{l_n}} \subseteq C^{n-1}_{l_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq C^m_{l_m} = C^m_2$, vrijedi da je

$$f_{n,m}(l_n) = \min\{i \in \{0, \ldots, k_m\} \mid \overline{C^n_j} \subseteq C^m_i\} \leq 2.$$

Dakle, $f(j_n) = \min\{i \in \{0, \ldots, k_m\} \mid C^n_{j_n} \subseteq C^m_i\} \leq f(l_n) \leq 2$, što znači da je

$$x \in C^n_{j_n} \subseteq C^m_0 \cup C^m_1 \cup C^m_2.$$

Međutim, broj m odabrali smo upravo tako da x ne može biti u prve tri karike lanca $\mathscr{C}^m$, što nas dovodi do kontradikcije.
Dakle, $x \in S_m$.

Ukupno, $A \setminus \{a\} = S$ i stoga je $A \setminus \{a\}$ povezan i a nije rezna točka od A.

Dakle, A je kontinuum i a, b su mu jedine dvije nerezne točke, pa iz karakterizacije luka 3.3.4 slijedi da je A zaista luk kojem su a i b krajnje točke. Kako su točke proizvoljno odabrane, slijedi da je Peanov kontinuum P povezan lukovima.

□

Bibliografija

[1] C. O. Christenson i W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., 1977.

[2] S. B. Nadler, *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., 1992.

[3] M. Vuković, *Teorija skupova*, skripta, 2015.

Sažetak

U ovom radu proučavaju se metrički kontinuumi i neka njihova svojstva. Izlažu su rezultati iz područjâ opće topologije i teorije metričkih prostora potrebni za razumijevanje teme, te se navode primjeri Peanovih i ne-Peanovih kontinuuma. Kao pomoćni alat, promatraju se lukovi i izvodi se topološka karakterizacija lukova utemeljena na pojmu reznih točaka. Detaljnije se proučavaju Peanovi kontinuumi, uvodi se pojam lanaca i dokazuje se da su svi Peanovi kontinuumi povezani lukovima.

Summary

Metric continua and some of their properties are studied in this thesis. Results from the areas of point-set topology and metric space theory necessary for understanding the subject are presented, followed by examples of both Peano and non-Peano continua. Arcs are introduced as an auxiliary tool, and a topological characterisation is obtained using the concept of cut points. Peano continua are then studied in more detail, with the introduction of the concept of chains and the proof that all Peano continua are arcwise connected.

Životopis

Rodio sam se u Zagrebu 16. 1. 1998. U ranom djetinstvu obitelj se mnogo selila: iz Zagreba u Kutinu, pa onda u Sisak i najzad u Rijeku. Pohađao sam Osnovnu školu "Eugen Kumičić" u Rijeci, nakon koje sam upisao opći smjer Gimnazije Andrije Mohorovičića Rijeka. Maturirao sam 2016. godine i upisao preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, koji sam završio 2020. i odmah potom upisao diplomski studij Teorijske matematike na istom fakultetu, koji završavam ovim radom.

Još od osnovne škole, isprva na poticaj učiteljice razredne nastave, sudjelovao sam na natjecanjima iz matematike. U gimnaziji sam počeo ostvarivati bolje natjecateljske rezultate i jače se zainteresirao za matematiku: od prvog razreda gimnazije nadalje svake sam godine ostvario plasman na državno natjecanje u B kategoriji, a najbolji sam uspjeh ostvario kao maturant prvim mjestom, što mi je omogućilo direktan upis na željeni fakultet.

U slobodno vrijeme, volim čitati i bavim se prevođenjem.