SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Hana Santro

FUNKCIJE KORISNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Rudi Mrazović

Zagreb, 2022

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima i dečku koji su mi bili najveća podrška tijekom studiranja.
Zahvaljujem se mojoj obitelji i svim prijateljima koji su mi uljepšali studiranje.
Zahvaljujem se mentoru doc. Dr. sc. Rudiju Mrazoviću na trudu i strpljenju pri izradi ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

U mikroekonomiji sve je važnije pitanje kako se izbor potrošača mijenja s obzirom na razne varijable. Varijable mogu biti dohodak, zdravlje, ekonomska ili politička situacija, itd. Primjerice, ako se na tržištu posljednjih godina primijeti znatan pad prodaje karavana i povećanje prodaje manjih automobila, to se može objasniti kao donošenje odluke radi niže cijene manjeg automobila ili niže potrebe za većim automobilima. Većina mikroekonomskih analiza temelji se na individualnom donošenju odluka. Ovaj diplomski rad razrađuje donošenje odluka na temelju potrošačevih preferencija i interpretira ih kroz funkcije korisnosti te na kraju ih objašnjava kroz konkretnu primjenu. U ekonomskim modelima koji objašnjavaju ponašanje potrošača pri donošenju odluka najčešće koriste funkciju korisnost. Preko nje radi analizu i predikciju budućih događaja. U ovom radu pretpostavljamo da je potrošač racionalan. Modele izbora potrošača možemo podijeliti na dvije vrste. Prva vrsta modela izbora potrošača je s poznatim ishodima, kada su potrošaču sve poznate i dostupne informacije. Druga vrsta modela izbora potrošača je tzv. model s neizvjesnošću kada potrošač nema sve dostupne informacije o posljedicama. Neizvjesnost ili rizik je sveprisutan u ekonomiji, rizik je suština posla u financijskim tržištima i osiguranjima. Pa u ovom radu se posebno bavimo objašnjenjem pojma sklonost riziku uz dobivene funkcije korisnosti s neizvjesnošću. Prvo poglavlje rada objašnjava temelje teorija korisnosti kroz potrošačeve preferencije. U drugom poglavlju kroz tri konkretna modela izbora s neizvjesnošću predstavljene su različite interpretacije ponašanja potrošača pri procesu donošenja odluka. U trećem poglavlju provedena je teorija funkcija korisnosti na konkretan primjer područja osiguranja, unutar kojeg je jasno vidljiv značaj i primjena u jednoj od najrasprostranjenijih financijskih djelatnosti.

Poglavlje 1

Preferencija i korisnost

U ovom poglavlju polazimo od izbora potrošača kojeg opisujemo funkcijom. Preko funkcije izbora potrošača dolazimo do preferencije koja označava sklonost potrošača prema jednoj opciji unutar više izbora. Preferencija potrošača unutar istog izbora ovisi o pojedinom potrošaču, a može se mijenjati i s obzirom na vremenski trenutak izbora. Jednostavan primjer preferencije na koji utječe vremenski trenutak izbora je kišobran kojeg nećemo jednako preferirati na sunčan dan u odnosu na kišni dan. Nakon relacije preferencije definiramo funkciju korisnosti. Dalje proučavamo odnose između izbora potrošača, preferencije i funkcije korisnosti te uvodimo dodatna svojstva koja su nam potrebna za dublju analizu.

1.1 Izbor potrošača

Bavimo se izborom potrošača. Potrošač bira unutar skupa X. Skup X sastoji se od dostupnih objekata za koje se potrošač odlučuje. U mikroekonomskim modelima pretpostavljamo da je $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Unutar skupa X nalaze se vektori oblika $x = (x_1, ..., x_n)$ gdje k-ta koordinata vektora označava količinu k-te robe za koju se potrošač odlučio. Primjerice, vektor $(3, 0, 0.5)$ označava da je potrošač odabrao 3 jedinice prve robe, 0 jedinica druge robe, te 0.5 jedinica treće robe. Izbor potrošača opisujemo funkcijom c koja je definirana sljedećom definicijom.

Definicija 1.1.1. *Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X. Izbor potrošača je funkcija $c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ takva da za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi $c(B) \subseteq B$.*

Pretpostavimo da potrošač ima određeni budžet kojeg označavamo s y te neka je cijena robe oznake p. Tada potrošač odabire skup

$$B = \{x \in \mathbb{R}^k : p \cdot x \leq y\}.$$

Izbor potrošača je funkcija koja vraća vektor robe x za koju se potrošač odlučuje s obzirom na cijenu dobra p i razinu prihoda y. Navedena formulacija nije u pravom smislu ekonomski model jer ne sadrži pretpostavke o konzistentnosti izbora potrošača, stoga uvodimo potrebne pretpostavke kako bi dobili ekonomski model.

Prvu pretpostavku konzistentnosti objašnjavamo pojednostavljenim primjerom. Potrošač ima izbor između dvije vrste robe ili dobara, označimo ih s a i b. Između ta dva izbora potrošač odabire primjerice robu a. U drugoj situaciji potrošač ima izbor između tri vrste roba ili dobara, ponovno a i b robe te dodatno i c robe. Kada mu je navedeni izbor u ponudi on se sad odlučuje za robu b. Ovo je primjer nekonzistentnog izbora potrošača. Dakle, prva pretpostavka konzistentnosti je da je izbor u različitim situacijama dovoljno konzistentan da spriječi situaciju objašnjenu u primjeru. Ovo ćemo formalizirati u definiciji 1.2.4. Druga pretpostavka konzistentnosti je da se potrošačev izbor slaže s maksimizacijom korisnosti za neku funkciju korisnosti definiranoj na X, tj. postoji funkcija korisnosti $u : X \to \mathbb{R}$, tako da za svaki B :

$$c(B) = \{x \in B : u(x) \geq u(y) \text{ za svaki } y \in B\}. \tag{1.1}$$

Treća pretpostavka konzistentnosti uključuje relaciju preferencija nad X. Relacija preferencija izražava potrošačevu sklonost unutar parova objekata u X. Tako nam primjerice za par x i y iz X, $x \succeq y$ označava da je x barem jednako dobro kao i y. Općenito, relaciju preferencije označavamo s $\succeq$. Za svaki par x i y postoji jedna od četiri mogućnosti odluke potrošača:

1. Potrošač je ravnodušan prema paru x, y: $x \succeq y$ i $y \succeq x$
2. Potrošač preferira x nad y: $x \succeq y$, ali ne $y \succeq x$
3. Potrošač preferira y nad x: $y \succeq x$, ali ne $x \succeq y$
4. Potrošaču nije izbor niti x, niti y: niti $x \succeq y$ niti $y \succeq x$

Dobivamo oblik funkcije izbora potrošača preko relacije preferencije:

$$c(B) = \{x \in B : x \succeq y \text{ za svaki } y \in B\}. \tag{1.2}$$

Dobili smo dva oblika funkcije izbora potrošača, preko funkcije korisnosti 1.1 te preko relacije preferencije 1.2. U daljnjem dijelu poglavlja razmatramo kako možemo ta dva oblika izbora potrošača usporediti možemo li dobiti jedan iz drugog.

1.2 Preferencija, korisnost i izbor

U ovom dijelu poglavlja pokazat ćemo pod kojim su pretpostavkama dva oblika izbora funkcije potrošača ekvivalentna.

Najprije krećemo od slučaja s konačnim skupom X pa se kasnije bavimo pitanjem ekvivalentnosti za beskonačan skup X. Definiramo potpunost i tranzitivnost relacije preferencije te dva svojstva relacije preferencije (1.2.3,1.2.4).

Definicija 1.2.1. *Relacija preferencije $\succeq$ na skupu X je potpuna ako za svaki $x, y \in X$ vrijedi ili $x \succeq y$ ili $y \succeq x$.*

Potpunost relacija preferencije kaže nam da potrošač ima jasno definirane preferencije među zadanim parovima pa makar to bila ravnodušnost između parova. Definicija 1.2.1 ne isključuje mogućnost $x = y$, stoga iz svojstva potpunosti slijedi da relacije preferencije zadovoljava svojstvo reflektivnosti.

Definicija 1.2.2. *Relacija preferencije $\succeq$ na skupu X je tranzitivna ako vrijedi $x \succeq y$ i $y \succeq z$ tada je $x \succeq z$.*

Tranzitivnost relacije preferencije govori nam da se izbor potrošača može mijenjati unutar skupa objekata prema kojima je on ravnodušan.

Definicija 1.2.3. *Funkcija izbora potrošača $c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ zadovoljava konačnu nepraznost ako je skup $c(B)$ neprazan za svaki konačan $B \in \mathcal{B}$.*

Definicija 1.2.4. *Funkcija izbora potrošača $c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ zadovoljava konzistentnost izbora ako vrijedi $x, y \in A \cap B$, $x \in c(A)$ i $y \notin c(A)$ tada je $x \in c(B)$ i $y \notin c(B)$.*

Sada navodimo glavnu propoziciju ovog poglavlja koja govori o odnosima funkcije izbora potrošača, relacije preferencije te funkcije korisnosti.

Propozicija 1.2.5. *Pretpostavimo da je X konačan skup. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) Postoji funkcija izbora potrošača $c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ koja zadovoljava konzistentnost i konačnu nepraznost

(ii) Postoji relacija preferencija koja zadovoljava tranzitivnost i potpunost te definira izbor potrošača $c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ preko 1.2

(iii) Postoji funkcija korisnosti koja definira izbor potrošača $c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ preko 1.1

Izbor potrošača bit će nam uvijek jednak, bilo da ga definiramo preko funkcije izbora, relacije preferencije ili funkcije korisnosti. Dio propozicije 1.2.5 je istinit za svaki skup X, bio konačan ili ne. Dokaz provodimo preko tri iduće propozicije 1.2.6,1.2.7, 1.2.8 koje vrijede i u slučaju kada je skup X beskonačan.

Propozicija 1.2.6. *Za svaki skup X neka je* $u : X \to \mathbb{R}$*, tada*

(a) relacija preferencije $\succeq_u$ *definirana preko* $x \succeq_u y$ *ako* $u(x) \geq u(y)$ *je potpuna i tranzitivna*

(b) funkcija izbora c_u *definirana s* $c_u(B) = \{x \in B : u(x) \geq u(y)$ *za svaki* $y \in B\}$ *zadovoljava konačnu nepraznost i konzistentnost izbora.*

Dokaz. (a) Dokazujemo potpunost i tranzitivnost. Za bilo koja dva x i y iz X, vrijedi da je $u(x) \geq u(y)$ ili $u(y) \geq u(x)$ budući da su $u(x)$ i $u(y)$ realni brojevi. Tada iz toga slijedi da je ili $x \succeq_u y$ ili $y \succeq_u x$, odnosno relacija preferencije $\succeq_u$ je potpuna.
Pretpostavimo da $x \succeq_u y$ i $y \succeq_u z$, tada po definiciji vrijedi da je $u(x) \geq u(y)$ te $u(y) \geq u(x)$. Slijedi da je $u(x) \geq u(z)$ jer je veće ili jednako $\geq$ tranzitivna za realne brojeve. Konačno iz definicije slijedi da je $x \succeq_u z$, tj. relacija preferencije $\succeq_u$ je tranzitivna.

(b) Pretpostavimo da je $x, y \in A \cap B$ i $x \in c_u(A)$, te $u(x) \geq u(y)$. Dodatno neka je $y \notin c_u(A)$, tada vrijedi stroga nejednakost $u(z) > u(y)$ za neke $z \in A$. Tada vrijedi $u(x) \geq u(z)$ jer je $x \in c_u(A)$ i to preko definicije dobivamo $u(x) \geq u(z)$ za sve $z \in A$ iz čega slijedi $u(x) > u(y)$. Nadalje, kako je $x \in B$, tada je $y \notin c_u(B)$, budući da postoji element u B, primjerice proizvoljno odabrani x, za koji vrijedi $u(y) \not\geq u(x)$. S ovime smo dokazali konzistentnost izbora.
Neka je A konačan podskup od X i neka je skup $B = \{r \in \mathbb{R} : r = u(x)$, za neki $x \in A\}$ konačan skup realnih brojeva. Svaki konačan skup realnih brojeva sadrži maksimalni element, tj. postoji element $r^* = u(x^*)$ u skupu B takav da je $r^* \geq r$ za svaki $r \in B$. Po definiciji skupa B postoji element $x^* \in A$ takav da je $u(x^*) \geq u(x)$ za svaki $x \in A$, što nam daje da $x^* \in c_u(A)$ i skup $c_u(A)$ je neprazan.

□

Propozicija 1.2.7. *Neka je relacija preferencije* $\succeq$ *potpuna i tranzitivna binarna relacija na proizvoljnom skupu X. Funkcija izbora* $c_{\succeq}$ *definirana na familiji podskupova od X*

$$c_{\succeq}(B) := \{x \in B : x \succeq y \text{ za svaki } y \in B\}$$

zadovoljava konačnu nepraznost i konzistentnost izbora.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x, y \in A \cap B$, $x \in c_{\succeq}(B)$ i $y \notin c_{\succeq}(B)$. Kako je $x \in c_{\succeq}(B)$ iz toga slijedi da je $x \succeq y$. Nadalje, kako $y \notin c_{\succeq}(B)$ tada vrijedi $y \not\succeq z$ za neki $z \in B$. Zbog potpunosti relacije preferencije slijedi da je $z \succeq y$. Budući da je $x \in c_{\succeq}(B)$, po definiciji vrijedi $x \succeq z$ i tvrdimo da je tada $y \not\succeq x$. Pretpostavimo suprotno, da je $y \succeq x$ i tada vrijedi $x \succeq z$ pa zbog tranzitivnost $\succeq$ slijedi da je $y \succeq z$, što je suprotno od gore pokazane tvrdnje. Kako je $y \not\succeq x$, te uz $x \in A, y \notin c_{\succeq}(A)$, imamo da $c_{\succeq}$ zadovoljava konzistentnost.
Sada dokazujemo konačnu nepraznost skupa $c_{\succeq}(B)$. Neka je B konačan i neprazan skup gdje trebamo pokazati da postoji element $x \in B$ koji zadovoljava $x \succeq y$ za svaki $y \in B$. Dokaz ide indukcijom po veličini skupa B. Ako skup B sadrži jedan element, primjerice $B = \{x\}$, tada vrijedi $x \succeq x$ jer je relacija preferencije $\succeq$ potpun. Stoga je tvrdnja istinita za svaki skup veličine 1. Pretpostavka indukcije glasi da je tvrdnja istinita za skup veličine $n-1$. U korak indukcije uzimamo da je B skup veličine n. Neka je x_0 proizvoljno odabrani element iz B te označimo skup $B' = B \backslash \{x_0\}$, B' je skup veličine $n-1$. Tada postoji element $x' \in B'$ takav da je $x' \succeq y$ za svaki $y \in B'$. Po potpunosti od relacije preferencije $\succeq$ vrijedi da je ili $x' \succeq x_0$ ili $x_0 \succeq x'$. U prvom slučaju vrijedi da je $x' \succeq y$ za svaki $y \in B$, i gotovi smo s dokazom. U drugom slučaju znamo da vrijedi $x_0 \succeq x_0$ po potpunosti te kako je $x' \succeq y$ pa zbog tranzitivnosti od $\succeq$ dobivamo da je $x_0 \succeq y$. Stoga smo našli skup veličine n za proizvoljno odabrani element koji zadovoljava tvrdnju. Time je dokaz gotov.

□

Propozicija 1.2.8. *Za svaki skup X pretpostavimo da funkcija izbora c zadovoljava konačnu nepraznost te konzistentnost izbora. Definiramo binarnu relaciju $\succeq_c$ na X sa*

$$x \succeq_c y \text{ ako } x \in c(\{x, y\}).$$

Definiramo novu funkciju $c_{\succeq_c}$ sa

$$c_{\succeq_c}(B) = \{x \in B : x \succeq_c y \text{ za svaki } y \in B\}.$$

Tada binarna relacija $\succeq_c$ je potpuna i tranzitivna, $c_{\succeq_c}$ zadovoljava konzistentnost i konačnu nepraznost, i za svaki skup B vrijedi

$$c(B) = \emptyset \text{ ili } c(B) = c_{\succeq_c}(B).$$

Prije dokaza uočimo očitu posljedicu propozicije. Neka je X konačan te neka c zadovoljava konačnu nepraznost, tada je $c(B) \neq \emptyset$ za svaki $B \subseteq X$, stoga je $c(B) = c_{\succeq_c}(B)$ za svaki B.

Dokaz. Budući da c zadovoljava konačnu nepraznost, ili je $x \in c(\{x, y\})$ ili je $y \in c(\{x, y\})$ iz čega slijedi potpunost binarne relacije $\succeq_c$.

Sada dokazujemo tranzitivnost od binarne relacije $\succeq_c$. Neka je $x \succeq_c y$ i $y \succeq_c z$, trebamo pokazati da vrijedi $x \in c(\{x, y, z\})$. Pretpostavimo suprotno, da to ne vrijedi. Tada ne može biti $y \in c(\{x, y, z\})$, jer kad bi to vrijedilo tada x ne bi bio u $c(\{x, y\})$ po konzistentnosti izbora što je u suprotnosti s početnim pretpostavkama. Sada kako znamo da je $y \notin c(\{x, y, z\})$, na sličan način možemo zaključiti da vrijedi $z \notin c(\{x, y, z\})$. Ponovno pretpostavimo suprotno $z \in c(\{x, y, z\}$. Sada iskoristimo da je $y \notin c(\{x, y, z\})$, slično kao i prije znamo da je tada $y \notin c(\{y, z\})$, što je kontradikcija s početnim pretpostavkama. Ali ako x, y i z nisu članovi $c(\{x, y, z\})$, tada je skup prazan što je kontradikcija s nepraznošću. Zaključak je da je x član skupa $c(\{x, y, z\})$. Konačno, koherentnost izbora i konačna nepraznost skupa impliciraju da je $x \in c(\{x, z\})$, $x \succeq_c z$ te da je binarna relacija $\succeq_c$ tranzitivna.

Kako je binarna relacija $\succeq_c$ potpuna i tranzitivna, znamo iz 1.2.7 da $c_{\succeq_c}$ zadovoljava konačnu nepraznost i konzistentnost izbora.

Sada uzmimo bilo koji skup B i bilo koji $x \in c(B)$. Neka je y bilo koji drugi element skupa B. Tada x mora biti u skupu $c(\{x, y\})$, jer kada to ne bi vrijedilo, tada bi y bio jedini element skupa $c(\{x, y\})$ pa zbog konzistentnosti izbora dobili bi kontradikciju s pretpostavkom $x \in c(A)$. Zbog toga je $x \succeq_c y$, to vrijedi za svaki član y iz A. Stoga je $x \in c_{\succeq_c}(B)$, tj. vrijedi $c(B) \subseteq c_{\succeq_c}(B)$.

Konačno, pretpostavimo da je $x \in c_{\succeq_c}(B)$ i da je $c(B)$ neprazan. Neka je x_0 proizvoljno odabrani član iz $c(B)$. Po definiciji od $c_{\succeq_c}(B)$ slijedi da je $x \succeq_c x_0$, što nam govori da je $x \in c(\{x_0, x.\}$. Ali tada $x \notin c(B)$ ne zadovoljava konzistentnost izbora i zbog toga, $x \in c(B)$ uz pretpostavku da $c(B)$ je neprazan, vrijedi $c_{\succeq_c}(B) \subseteq c(B)$. Ovime je dokaz gotov.

□

1.3 Stroga preferencija i indiferencija

Do sada smo koristili znak $\succeq$ da bi označili preferenciju koja zadovoljava potpunost i tranzitivnost. Takvu preferenciju nazivamo slabom preferencijom gdje vrijedi da za $x, y \in X$, potrošaču je x barem jednako dobro kao i y te smo prethodno naveli četiri mogućnosti u tom slučaju. Za svaki par x, y, iz svojstva potpunosti vrijedi da postoje sljedeće relacije među njima:

1. $x \succeq y$ i $y \succeq x$
2. $x \succeq y$, ali $y \not\succeq x$
3. $y \succeq x$, ali $x \not\succeq x$.

Za prvi slučaj kažemo da je potrošač indiferentan između x i y i pišemo $x \sim y$. U drugom slučaju, kažemo da je x strogo preferiran pred y i pišemo $x \succ y$. Te u trećem slučaju, y je strogo preferiran pred x te pišemo $y \succ x$.

Propozicija 1.3.1. *Pretpostavimo da je slaba preferencija $\succeq$ potpuna i tranzitivna. Tada vrijedi:*

(a) $x \succ y$ *ako i samo ako ne vrijedi* $y \succeq x$.

(b) Stroga preferencija je asimetrična. Neka je $x \succ y$, *tada ne vrijedi* $y \succ x$.

(c) Stroga preferencija je negativno tranzitivna. Neka je $x \succ y$, *tada za svaki treći član* z *vrijedi ili* $z \succ y$ *ili* $x \succ z$.

(d) Indiferencija je refleksivna, tj. vrijedi $x \sim x$ *za svaki* x.

(e) Indiferencija je simetrična. Neka je $x \sim y$, *tada vrijedi* $y \sim x$.

(f) Indiferencija je tranzitivna. Neka je $x \sim y$ *i* $y \sim z$, *tada je* $x \sim z$.

(g) Ako je $x \succ y$ *i* $y \succeq z$, *tada je* $x \succ z$.

(h) Stroga preferencija je tranzitivna. Neka je $x \succ y$ *i* $y \succ z$, *tada vrijedi* $x \succ z$.

Dokaz. Asimetričnost stroge preferencije (b) slijedi iz definicije: vrijedi da je $x \succ y$ ako je $x \succeq y$ te ne vrijedi $y \succeq x$, što znači da ne vrijedi $y \succ x$. Nadalje, refleksivnost indiferencije (d) slijedi iz potpunosti relacije preferencije $\succeq$ jer je $x \succeq x$ za svaki x. Simetričnost indiferencije (e) slijedi direktno iz definicije. Da je indiferencija tranzitivna (f) slijedi iz toga što je relacija preferencije $\succeq$ tranzitivna, jer je indiferencija poseban slučaj slabe preferencije. Ostaju nam još dokazati pod a,c,g,h.

Za (g) neka je $x \succ y$ tada vrijedi $x \succeq y$. Neka je uz to još vrijedi i $y \succeq z$, tada po tranzitivnosti vrijedi da je $x \succeq z$. Pretpostavimo da je $z \succeq x$, tada po tranzitivnost od relacije preferencije $\succeq$ imamo da je $y \succeq z \succeq x$ iz čega slijedi da je $y \succeq x$, što je kontradikcija od $x \succ y$. Stoga ne vrijedi $z \succeq x$, tj. vrijedi $x \succ z$.

Za (h), ako pretpostavimo da vrijedi $x \succ y$ i $y \succ z$ pa imamo da je $y \succeq z$. Primijenimo (g) dio na tvrdnju pa je s tim dokaz gotov.

Za (a), ako je $x \succ y$, tada po definiciji vrijedi $x \succeq y$ i ne vrijedi $y \succeq x$. Obrnuto, ako ne vrijedi $y \succeq x$ iz potpunosti relacije preferencije dobivamo da je $x \succeq y$, pa to dvoje zajedno daju $x \succ y$ po definiciji stroge preferencije $\succ$.

Za (c), pretpostavimo da vrijedi $x \succ y$, ali ne vrijedi $z \succ y$. Iz dijela (a) slijedi da je drugi dio je ekvivalentan $y \succeq z$ i tada po dijelu (g) dobivamo je $x \succ z$.

□

1.4 Reprezentacija korisnosti

Intuitivno je razmišljati o izboru preko preferencija kada je riječ o malom broju dobara ili objekata među kojima donosimo izbor, odnosno pojednostavljenom ekonomskom modelu. No nije dovoljno samo znati relacije preferencije među objektima, već su potrebne dodatne analize. Upravo tome služe funkcije korisnosti koje su brojčani opis preferencija objekata. U modernoj teoriji izbora potrošača funkcija korisnosti češće je korišteno sredstvo za opisivanje izbora potrošača u odnosu na preferenciju. Preferencija se smatra kao primitivniji prikaz izbora potrošača. Funkcija korisnosti sažima sve informacije prenesene relacijom preferencije te je primjenjivija za matematičke modele u ekonomiji. Funkcija korisnosti nam govori korisnost svakog dobra $x \in X$, a označava se s $u(x) \in \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija korisnosti u predstavlja potrošačeve preferencije ako

$$u(x) \geq u(y) \text{ ako i samo ako } x \succeq y.$$

To znači da potrošač čini isti izbor bilo da koristi relaciju preferencija $\succeq$ ili funkciju korisnosti $u(x)$.

Teorem 1.4.1 (Teorem reprezentacije korisnosti)**.** *Pretpostavimo da je potrošačeva preferencija $\succeq$ potpuna i tranzitivna, i da je X konačan. Tada postoji funkcija korisnosti $u(x) : X \to \mathbb{R}$ koja reprezentira $\succeq$.*

Prije dokaza uvodimo novi pojam potreban za daljnji dio ovog dijela poglavlja.

Definicija 1.4.2. *Za relaciju preferencije $\succeq$ definiranu na skupu X te za član $x \in X$, nebolji-od x skup (No-Better-Than), oznake $NBT(x)$ definiramo sa:*

$$NBT(x) = \{y \in X : x \succeq y\}.$$

Dokaz. Ideja dokaza je jednostavna. Uzimamo da je korisnost od x broj članova unutar $NBT(x)$ iz definicije 1.4.2.

$$u(x) = |NBT(x)|. \tag{1.3}$$

Sada ostaje pokazati da funkcija korisnosti predstavlja potrošačevu preferenciju. Radimo to u dva koraka: prvo, pokazujemo da ako vrijedi $x \succeq y$ da tada slijedi $u(x) \geq u(y)$; drugo, pokazujemo da ako vrijedi $u(x) \geq u(y)$ da iz toga slijedi $x \succeq y$.

Korak 1 Pretpostavimo da je $x \succeq y$. Odabiremo bilo koji $z \in NBT(y)$. Po definiciji $NBT(y)$, imamo da je $y \succeq z$. Budući da je preferencija potpuna, znamo da je z usporediv s x. Iz tranzitivnosti dobivamo da je $x \succeq z$, iz čega slijedi da je $z \in NBT(x)$. Iz ovoga smo pokazali da svaki element skupa $NBT(y)$ je također element skupa $NBT(x)$, tj. vrijedi $NBT(y) \subseteq NBT(x)$. Kao konačan rezultat dobivamo,

$$u(x) = |NBT(x)| \geq |NBT(y)| = u(y).$$

Korak 2 Pretpostavimo da je $u(x) \geq u(y)$. Iz potpunosti relacije preferencije $\succeq$ znamo da je $x \succeq y$ ili $y \succeq x$. Iz prvog koraka tada mora vrijediti $NBT(y) \subseteq NBT(x)$ ili $NBT(x) \subseteq NBT(y)$. Po definiciji 1.4.2 znamo da je više elemenata u $NBT(x)$ nego u $NBT(y)$, iz čega slijedi da je $NBT(y) \subseteq NBT(x)$. Zbog potpunosti relacije preferencije imamo da je $y \in NBT(y)$. Kako vrijedi da je $NBT(y) \subseteq NBT(x)$, očito je $y \in NBT(x)$. Koristeći definiciju NBT 1.4.2 dobivamo da je $x \succeq y$. Time je dokaz gotov.

□

Iduća propozicija nam daje rezultat za beskonačni skup X.

Propozicija 1.4.3. *Pretpostavimo da je relacija preferencije $\succeq$ potpuna i tranzitivna na skupu X. Relacija preferencije $\succeq$ može biti reprezentirana funkcijom korisnosti u ako i samo ako prebrojivi podskup X oznake X^* ima svojstvo da ako je $x \succ y$ za neke x, y iz X, tada vrijedi $x \succeq x^* \succ y$ za neki $x^* \in X^*$.*

Dokaz ovog teorema je širok i kompleksan pa radi toga nećemo ga obrađivati u ovom radu. Detaljno raspisani teorem može se pronaći u literaturi 11. str. [4].

1.5 Svojstva preferencije i funkcije korisnosti

Do kraja poglavlja navodimo definicije bitnih svojstava preferencije i funkcije korisnosti potrebnih za nastavak rada. Navedena svojstva su tehničke prirode, potrebna ponajprije za dublju matematičku analizu funkcije korisnosti.

Monotonost

Definicija 1.5.1 (Monotonost)**.** *Preferencija $\succeq$ je monotona ili neopadajuća ako za bilo koja dva objekta x, y vrijedi da je $x \geq y$ i $x \succeq y$. Preferencija je strogo monotona ili strogo neopadajuća ako za bilo koja dva objekta x, y vrijedi da je $x > y$ i $x \succ y$.*

Konveksnost

Definicija 1.5.2 (Konveksnost)**.** *(a) Preferencija $\succeq$ je konveksna ako za svaki par x i y iz X sa $x \succeq y$ i za svaki broj $a \in [0, 1]$ vrijedi da je $ax + (1 - a)y \succeq y$.*

(b) Preferencija $\succeq$ je strogo konveksna za svaki x i y, $x \neq y$, takvi da su $x \succeq y$ i za svaki $a \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi da je $ax + (1 - a)y \succ y$.

Propozicija 1.5.3. *Neka je relacija preferencije $\succeq$ reprezentirana funkcijom korisnosti u : $\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Tada je:*

1. *Funkcija korisnosti $u(x)$ je strogo rastuća funkcija ako i samo ako je relacija preferencije $\succeq$ strogo monotona.*
2. *Funkcija korisnosti $u(x)$ je kvazikonkakvna funkcija ako i samo ako je relacija preferencije $\succeq$ konveksna.*
3. *Funkcija korisnosti $u(x)$ je strogo kvazikonkavna funkcija ako i samo ako je relacija preferencije $\succeq$ strogo konveksna*

Neprekidnost

Definicija 1.5.4. *Pretpostavimo da je relacija preferencije potpuna i tranzitivna $\succeq$ na skupu $X = \mathbb{R}^k_+$. Tada kažemo da je relacija preferencije neprekidna ako za svaki par x i y iz X sa svojstvom da je $x \succ y$, možemo naći $\epsilon > 0$ tako da za svaki element $x' \in X$ udaljen od x za manje od ϵ te za svaki element $y' \in X$ udaljen od y za manje od ϵ, vrijedi da je $x' \succ y'$.*

Teorem 1.5.5 (Debreuov Teorem)**.** *Neka je funkcija korisnosti **u** koja reprezentira relaciju preferencije $\succeq$ neprekidna, tada je relacija preferencije $\succeq$ neprekidna. Obrnuto, neka je relacija preferencije $\succeq$ neprekidna tada ima i neprekidnu reprezentaciju funkcije korisnosti **u**.*

Dokazom ovog teorema nećemo se baviti u ovom radu, vrlo je opširan i kompleksan. Detaljan dokaz ovog teorema možete pronaći u [4] str. 36.

Slaba i jaka separabilnost

Sada uvodimo bitna svojstva na koja ćemo se pozivati kasnije u drugom dijelu rada. Definicija je dosta na prvu kompleksna s novim oznakama, stoga ćemo najprije dati definiciju pa zatim pobliže objasniti o čemu govori i što znače pojedine oznake.

Definicija 1.5.6 (Slaba separabilnost)**.** *Neka je $J_1, ..., J_N$ lista od N međusobno isključivih podskupova od K, odnosno $J_n \cap J_m = \emptyset$ za svaki $n \neq m$. Preferencija $\succeq$ je slabo separabilna na $J_1, ..., J_N$ ako za svaki $n = 1, ..., N$, x_{J_n} i x'_{J_n} iz $\mathbb{R}^{J_n}_+$, te $x_{J^c_n}$ i $x'_{J^c_n}$ iz $\mathbb{R}^{J^c_n}_+$ vrijedi*

$$(x_{J_n}, x_{J^c_n}) \succeq (x'_{J_n}, x_{J^c_n}) \text{ ako i samo ako je } (x_{J_n}, x_{J^c_n}) \succeq (x'_{J_n}, x_{J^c_n}).$$

Potrošač, kao što smo već naveli, odabire vektor robe $x = (x_1, .., x_k) \in \mathbb{R}^k_+$ gdje svaka koordinata označava količinu određene robe. Robu koja je međusobno povezana možemo razvrstati unutar kategorija , primjerice: hrana, odjeća, namještaj itd. Vektor x možemo podijeliti na te kategorije tako da uzmemo primjerice do j-te koordinate bude hrana, od $(j+1)$-te koordinate odjeća itd. Neka je K skup svih roba, gdje podskup $J \subseteq K$ čini robu određene kategorije. Tada vektor x_J čini vektor količine robe unutar kategorije J. Standardno, x_{J^c} je vektor količine odabrane robe unutar komplementa skupa kategorije J tj. $J^c = K \backslash J$. Stoga nam definicija 1.5.6 govori kako će vektor količine x_{J_n} kategorije J_n biti preferiran pred vektorom količine x'_{J_n} bez obzira na to koji je vektor količine $x_{J_n^c}$ odabran u komplementu te kategorije, odnosno u ostalim kategorijama J_n^c.

Definicija 1.5.7 (Jaka separabilnost)**.** *Neka je $J_1, ...J_N$ particija na K, odnosno vrijedi da je$J_n \cap J_m = \emptyset$ za svaki $n \neq m$ i $J_1 \cup ... \cup J_N = K$. Preferencija $\succeq$ je strogo separabilna u $J_1, ..., J_N$ ako za svaki skup $L = J_{n_1} \cup J_{n_2} \cup ... \cup J_{n_l}$, za neke indekse $\{n_1, ...n_l\}$ koji dolaze iz $\{1, ..., N\}$ vrijedi $(x_L, x_{L^c}) \succeq (x'_L, x_{L^c})$ za neki x_{L^c}, slijedi da je $(x_L, x'_{L^c}) \succeq (x'_L, x'_{L^c})$ za sve x'_{L^c}.*

Jaka separabilnost nam govori dodatno, Za razliku od slabe separabilnosti, da ne mora nužno biti neovisna samo jedna kategorija u odnosu na sve ostale kategorije, već da vektor količine x_L, gdje je L skup više kategorija, može biti neovisno odabran u odnosu na ostale kategorije L^c.

Propozicija 1.5.8 (Aditivna separabilnost)**.** *Pretpostavimo da je preferencija $\succeq$ neprekidna i strogo separabilna na $J_1, ..., J_N$ ($N \geq 3$). Tada možemo naći neprekidne funkcije $u_n : \mathbb{R}_+^{J_n} \to \mathbb{R}$ takva da je funkcija*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x_{J_n})$$

*reprezentacija korisnosti od relacije preferencije $\succeq$. Obrnuto, ako je preferencija reprezentirana s funkcijom korisnosti **u** koja ima oblik $\sum_{n=1}^{N} u_n(x_{J_n})$, za neke funkcije $u_n : \mathbb{R}^{J_n} \to \mathbb{R}$, tada je preferencija strogo separabilna.*

Zaključak ovoga je da ako imamo strogo separabilnu relaciju preferencije među objektima koje možemo podijeliti na barem tri kategorije, tada funkciju korisnosti možemo dobiti tako da izračunamo za svaku kategoriju njezinu funkciju korisnosti i konačno pozbrojimo sve zajedno.

Kvazi-linearnost

Definicija 1.5.9 (Kvazi-linearnost)**.** *Preferencija $\succeq$ na skupu $\mathbb{R}_+^K$ je kvazi-linearna u K-toj jedinici robe ako može biti reprezentirana funkcijom korisnosti oblika*

$$U(x, m) = u(x) + m,$$

za neku funkciju podkorisnosti $u : \mathbb{R}_+^{K-1} \to \mathbb{R}$. U tom slučaju kažemo da funkcija korisnosti $U(x, m)$ ima kvazi-linearni oblik.

Poglavlje 2

Izbor s neizvjesnošću

Ekonomske odluke često imaju neizvjesne posljedice. Primjerice, kada kupujemo rabljeni automobil ne možemo znati da li je pouzdan. U financijskim i osiguravateljskim tržištima, rizik je suština posla. Temelj financijskih poslova je određivanje vrste rizika, vjerojatnosti događaja rizika te posljedice koje bi mogao donijeti taj rizik. Najpoznatija i najraširenija teorija koja se bavi donošenjem rizičnih odluka je očekivana funkcija korisnosti. U ovom poglavlju predstavljamo modele funkcije korisnosti s neizvjesnošću - kako potrošači donose odluke i kako stvaraju svoje preferencije kada izbori nose određenu nesigurnost. Najprije ćemo predstaviti nekoliko pojednostavljenih primjera donošenja odluka s neizvjesnosti kao motiv za ovo poglavlje. U ovom radu prezentiramo dvije vrste modela s neizvjesnim posljedicama koja se najčešće koriste u ekonomiji. Prva vrsta modela naziva se modelom prostora stanja ili stanja prirode ili model sa subjektivnim neizvjesnostima. Druga vrsta modela naziva se model s objektivnim vjerojatnostima.

Uvodni primjeri

Primjer 2.0.1. *Ulični prodavač mora donijeti odluku o tome koju će robu sutra prodavati. Pretpostavit ćemo da po danu može prodavati samo jednu vrstu robe. Roba može biti sladoled, hot dog, novine, magazini itd. Neto profit od prodaje robe ovisi o sutrašnjem vremenu i može biti negativan ako se roba ne proda. Vremenski uvjeti čine gotovo bezbroj mogućnosti, no mi ćemo promatrati samo tri stanja radi jednostavnosti:* $s1$ *dan bez kiše,* $s2$ *dan s malo kiše te* $s3$ *dan s mnogo kiše. Ne znamo hoće li se dogoditi* $s1$*,* $s2$ *ili* $s3$*. Tablica 2.1 prikazuje profit u dolarima za pojedini artikl ovisno o trima vremenskim stanjima.*

	Nema kiše ($s1$)	Malo kiše ($s2$)	Cijeli dan kiša ($s3$)
x ("sladoled")	400	100	-400
y ("hot dog")	-400	100	400
0 ("slobodan dan")	0	0	0
x+y ("oboje")	100	200	100

Tablica 2.1: Neto dobit ostvarena robom ovisno o vremenskim prilikama

Primjer 2.0.2. *Investitor kalkulira o cijeni bakra u idućem mjesecu. Investitor može kupiti financijski portfelj x po cijeni od* $30K$ *(*$K = 1000\$$*) koji daje povrat od* $80K$ *u slučaju da cijena bakra idući mjesec bude veća od* $2.53\$$*. Portfelj x ima replicirajući portfelj y koji se sastoji od drugih financijskih instrumenata. Replicirajući portfelj y ima istu cijenu od* $30K$ *i daje povrat od* $80K$ *u slučaju da cijena bakra idući mjesec bude ispod* $2.47\$$*. Investitor ima tri opcije ispred sebe; da kupi portfelj x, y ili kombinaciju oba za cijenu od* $30K$*. Tablica 2.2 prikazuje profit u dolarima za pojedini portfelj ovisno o cijeni bakra u idućem mjesecu.*

	Cijena ≥ 2.53$	2.53$ >Cijena ≥ 2.47$	2.47$ > Cijena
x	50K	-30K	-30K
y	-30K	-30K	50K
x+y ("oboje")	20K	-60K	20K

Tablica 2.2: Povrat ostvaren kupljenim portfeljem ovisno o cijeni bakra

2.1 Modeli prostora stanja

U modelu prostora stanja ishod naših odluka ovisi o stanjima u kojima se nalaze relevantni faktori odluka. Primjerice, hoćemo li ponijeti kišobran je naša odluka gdje je ishod pokisnuti ili ne, pri tome je vremenska prilika relevantan faktor. Stanja relevantnih faktora su neizvjesnosti koje trebamo opisati. Model se sastoji od skupa ishoda (posljedica) oznake X i skupa stanja oznake S. Skup stanja S je skup međusobno isključivih događaja, odnosno može se dogoditi točno jedan događaj $s \in S$. Potrošač donosi odluke iz skupa dostupnih izbora tzv. alternativa. Svaka alternativa f opisana je funkcijom iz S u X, tj. skup alternativa je:

$$A = \{f : S \to X : f \text{ je izmjeriva i } f(S) \text{ je konačan}\}$$

gdje $f(s) = x$ znači da alternativa f daje ishod x ako je stanje s.

Potrošač ima danu preferenciju $\geq$ nad skupom alternativa A. Potrošač odabire podskup skupa A. Kao što je opisano u potpoglavlju 1.4, tražimo reprezentaciju relacije preferencije $\geq$ kao funkciju korisnosti $u : A \to R$ takva da je $u(f) \geq u(g)$ ako i samo ako je $f \geq g$.

Prelazimo na konkretan primjer kako bi približili dani model. Često se objašnjavaju ekonomske teorije neizvjesnosti i klađenja preko klađenja na konjske trke jer u mnogim aspektima klađenje na konjske utrke slično je tržištu dionica.

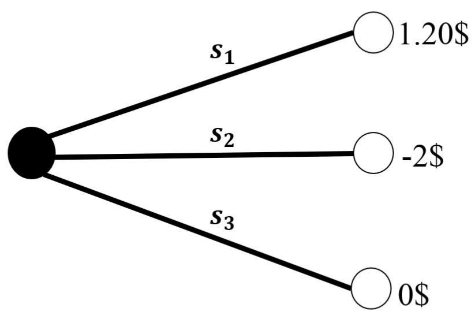
Promatramo utrku konja između konja R i konja K. Iznos dobitka ili gubitka u okladi određen je pobjednikom pri čemu je i mrtva trka (neriješeno) mogući ishod. Naš skup stanja tada je

$$S = \{\text{Konj R pobjeđuje, Konj K pobjeđuje, neriješeno}\} = \{s1, s2, s3\}.$$

Za uložena 2\$ skup nagrada je $X = \{-2\$, 0\$, 1.20\$\}$. U skupu X "$-2\$$" označava gubitak od 2 dolara, "0\$" označava povrat uloga i "1.20\$" označava dobitak u okladi. U slučaju oklade na pobjedu konja R, oklada g ima oblik

$$g = \begin{cases} 1.20\$ & \text{ako } s = s1 \\ \text{-}2\$ & \text{ako } s = s2 \\ 0\$ & \text{ako } s = s3 \end{cases} \tag{2.1}$$

Okladu ćemo prikazati kao stablo odluke, gdje svaka grana predstavlja i označava jedno od tri stanja i na krajevima grana nalaze se nagrade. Na slici 2.1 vidimo prethodno objašnjenu okladu.



Slika 2.1: Opis klađenja

Cilj poglavlja je naći funkciju korisnosti, odnosno reprezentaciju relacije preferencije za ovakve slučajeve. Glavno svojstvo koje ćemo pri tome koristiti je aditivna separabilnost.

Za svako stanje s postoji funkcija $u_s : X \to R$ takva da funkcija oblika

$$u(f) = \sum_{s \in S} u_s(f(s)) \tag{2.2}$$

reprezentira relaciju preferencije $\geq$.
Kada uključimo u funkciju korisnost iz 2.2 vjerojatnosnu distribuciju p na skupu S dobivamo subjektivnu očekivanu korisnost koja ima oblik:

$$u(f) = \sum_{s \in S} p(s)U(f(s)). \tag{2.3}$$

2.2 Savageov model očekivane korisnosti

Najpoznatiji rezultat izbora pod neizvjesnošću pokazao je Savage. Savageov model subjektivne očekivane korisnosti sastoji se od sedam postulata u kojem je najpoznatiji *Savageov Sure-Thing* princip. Jim Savage je predstavio *Sure-Thing* princip prvi put u svom radu 1954. godine kroz iduću priču.
Osoba razmišlja o kupnji određenog posjeda. Za tu odluku smatra da je relevantan ishod sljedećih predsjedničkih izbora. Dakle, razmatra kako bi se odluka o kupnji posjeda promijenila s obzirom na ishod predsjedničkih izbora. Osoba shvaća da bi kupila posjed da zna da će demokratski kandidat pobijediti na idućim predsjedničkim izborima. Isto tako shvaća da bi kupila posjed i da zna da će republikanski kandidat pobijediti na istima. Odlučuje kupiti posjed iako ne zna tko dobiva izbore, odnosno koji je ishod izbora. Zaključak je da osoba ima svoj izbor i odluku iako ne zna koji događaj slijedi. Općenito, neka su f i g dvije alternative. Ako osoba preferira f naspram g, bez obzira na to zna li hoće li se ili neće dogoditi događaj B, tada bi trebao odabrati f.

Sada prelazimo na konkretan Savageov model očekivane funkcije korisnosti. Ponovno vrijede iste oznake: S je skup stanja, X je skup posljedica ili nagrada, A je skup alternativa te $\geq$ je oznaka za relaciju preferencije. Neka je ϵ σ-algebra na skupu S, kojeg nazivamo prostorom događaja. Skup unutar ϵ oznake E nazivamo događajem. Događaji se odnose na dostupne informacije donositelju odluke. U Savageovom modelu neizvjesnost je predstavljena preko vjerojatnosti temeljenoj na subjektivnim uvjerenjima o mogućnosti pojave određenog stanja. Navodimo sedam postulata preko sedam idućih aksioma. Uvodimo najprije nove oznake. Za neki događaj E i za neke dvije alternative f i h, neka je $f_E h$ alternativa tako da je $(f_E h(s)) = f(s)$ kada je $s \in E$, inače neka je $(f_E h(s)) = h(s)$. Događaj E je prazan ako je $f_E h \sim f'_E h$ za svake dvije alternative f i f', inače kažemo da je neprazan. Konstantna alternativa je alternativa koja dodjeljuje istu posljedicu za sva stanja i tada za $f(s) = x$ pišemo samo oznaku x. Prvi postulat nam osigurava da se sve alternative mogu uspoređivati.

Aksiom 2.2.1 (P1). *Relacije preferencije $\succeq$ je tranzitivna, refleksivna i potpuna.*

Drugi postulat je već spomenuti središnji *Savageov Sure-Thing* princip. *Savageov Sure-Thing* princip nam govori da preferencija između dviju alternativa na istim događajima ovisi samo o posljedicama u kojima se razlikuju. Iz toga slijedi da vrednovanje ishoda našeg izbora na nekom događaju je neovisno o vrednovanju ishoda istog izbora na komplementu tog događaja. Formalno:

Aksiom 2.2.2 (P2 *Savageov Sure-Thing* princip)**.** *Neka su f, f', h i h' četiri alternative, te E je skup događaja. Tada vrijedi $f_E h \succeq f'_E h$ ako i samo ako je $f_E h' \succeq f'_E h'$.*

Treći postulat tvrdi da je rangiranje posljedica nezavisno o događaju i alternativi.

Aksiom 2.2.3 (P3 Nezavisnost)**.** *Za svaki neprazni događaj E i konstantnu alternativu x i y vrijedi da je $x \succeq y$ ako i samo ako je $x_E f \succeq y_E f$ za svaku alternativu f.*

Četvrti postulat nam govori da donositelj ima subjektivna uvjerenja o tome da će se dogoditi događaj E u odnosu na E' i da su ta uvjerenja neovisna o posljedicama.

Aksiom 2.2.4 (P4). *Za svaki događaj E i E' i konstantne alternative x, x', y i y' takvi da je $x \succ y$ i $x' \succ y'$ vrijedi da je $x_E y \succeq x_{E'} y$ ako i samo ako je $x'_E y' \succeq x'_{E'} y'$.*

Prva četiri postulata su najbitniji Savageovi postulati, dok su ostala tri tehničke prirode. Prva četiri postulata osiguravaju postojanje potpune i tranzitivne relacije kao opis subjektivnih uvjerenja donositelja odluke. Također govore da su potrošačevi stavovi o riziku neovisni o događaju. Peti postulat isključuje mogućnost da je potrošač indiferentan prema svim posljedicama.

Aksiom 2.2.5 (P5 Netrivijalnost)**.** *Postoje posljedice (ili nagrade) x i x' iz X tako da vrijedi $x \succ x'$.*

Šesti postulat uvodi oblik neprekidnosti relacije preferencija. Idući postulat nam govori da ne postoje posljedice takve da bi zamijenile poredak stroge preferencije među alternativama.

Aksiom 2.2.6 (P6 Neprekidnost)**.** *Za sve alternative f, g i h takve da je $f \succ g$, postoji konačna particija $(E_i)_{i=1}^n$ skupa stanja tako da za svaki i vrijedi $f \succ f_{E_i} h$ i $h_{E_i} f \succ g$.*

Sedmi postulat zahtjev je monotonosti koji tvrdi da ako donositelj odluke smatra prvu alternativu striktno boljom (gorom) od svake moguće posljedice druge alternative, tada je prva alternativa strogo preferirana u odnosu na drugu navedenu alternativu.

Aksiom 2.2.7 (**P7** Monotonost)**.** *Za svaki događaj E i za sve alternative f i f', ako vrijedi da je $f \succ f'(s)$ za svaki $s \in E$, tada je $f \succeq_E f'$ i isto tako, ako vrijedi $f'(s) \succ f$ za svaki $s \in E$, tada je $f' \succeq_E f$.*

Savageov teorem uspostavlja ekvivalenciju između dvaju relacija preferencije. Prva relacija preferencije ima opisana svojstva kroz navedenih sedam postulata, dok je druga inducirana pomoću maksimizacije očekivanja funkcije korisnosti na skupu posljedica svih događaja. Konačno dolazimo do Savageovog teorema.

Teorem 2.2.1 (Savageov teorem)**.** *Neka je $\succeq$ relacija preferencije na skupu A. Tada su iduće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *Relacija preferencije $\succeq$ zadovoljava postulate (P1)-(P7).*

2. *Postoji jedinstvena, konačno aditivna, vjerojatnosna mjera P na S takva da je $P(S) = 0$ ako i samo ako je E prazan te postoji omeđena, jedinstvena do na afine transformacije, realna funkcija u na skupu X takva da za sve alternative f i f' vrijedi*

$$f \succeq f' \iff \int_S u(f(s))dP(s) \geq \int_S u(f'(s))dP(s).$$

Teorem nam govori kada donositelj odluke zadovoljava navedene aksiome da se tada sva neizvjesnost izražava preko vjerojatnosne mjere P koja odražava njegova subjektivna uvjerenja. Nadalje, donositelj odluke rangira poželjne posljedice s obzirom na funkciju korisnosti u koja reprezentira njegove preferencije te na temelju nje donosi odabir alternative. Kritika Savageovom teoremu je da ne daje odgovor kako potrošači donose odluke. Jedna od najpoznatijih kritika Savageovog modela je poznata kao Ellsbergov paradoks gdje se tvrdi da racionalni izbori ne moraju zadovoljavati Savageove postulate. Ovaj paradoks objašnjen je u potpoglavlju 2.5.

2.3 von Neumann-Morgensternova očekivana korisnost

Druga vrsta modela izbora s neizvjesnim posljedicama je model s objektivnim neizvjesnostima ili poznatiji kao von Neumann-Morgensternova očekivana korisnost. U von Neumann-Morgensternovom modelu izbor ili alternative dostupne potrošaču opisane su vjerojatnosnim distribucijama nad prostorom posljedica X s konačnim nosačem koje nazivamo lutrijama. Skup lutrija označavamo s $L(X)$ te je oblika:

$$L(X) = \Big\{p : X \to [0,1] : \sum_{x \in X} p(x) = 1\Big\}.$$

Degenerirana lutrija je lutrija oznake δ_x koja pridružuje vjerojatnost 1 posljedici $x \in X$, a svakoj drugoj posljedici $y \in X$ pridružuje vjerojatnost 0:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{ako } y = x \\ 0 & \text{ako } y \neq x \end{cases} \tag{2.4}$$

Neka su $p, q \in L(X)$ dvije lutrije te $a \in [0, 1]$. Tada konveksnu kombinaciju $ap + (1 - a)q \in L(X)$ nazivamo složenom lutrijom. Sada navodimo potrebne aksiome za von Neumann-Morgensternov model. Prvi aksiom (P1) jednak je prvom aksiomu iz Savage-ovog modela (P1).

Aksiom 2.3.1 (**P2** Nezavisnost)**.** *Neka su $p, q, r \in L(X)$ takvi da je $p \succ q$ i $a \in \langle 0, 1\rangle$ tada vrijedi $ap + (1 - a)r \succ aq - (1 - a)r$.*

Aksiom 2.3.2 (**P3** Neprekidnost)**.** *Neka su $p, q, r \in L(X)$, $p \succ q \succ r$ tada postoje $a, b \in \langle 0, 1\rangle$ tako da vrijedi $ap + (1 - a)r \succ q \succ bp + (1 - b)r$.*

Aksiome (P1),(P2) i (P3)nazivamo aksiomima racionalnog ponašanja. Ponovno kao i u Savageovom modelu postoje razne kritike o tome vrijede li zaista pretpostavke o aksiomima racionalnog ponašanja, više o tome u potpoglavlju 2.5 Ellsbergov parodoks. Prelazimo na iskaz glavnog teorema ovog modela.

Teorem 2.3.1 (von Neumann-Morgensternov teorem)**.** *Neka je $\succeq$ relacija preferencije na $L(X)$. Tada su iduće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *Relacija preferencije $\succeq$ zadovoljava aksiome (P1),(P2) i (P3).*

2. *Postoji jedinstvena do na afine transformacije, realna funkcija $\mathbf{u}$ na $L(X)$ takva da reprezentira relaciju preferencije $\succeq$, odnosno za svake dvije lutrije p, q vrijedi:*

$$p \succeq q \iff u(p) \geq u(q).$$

Von Neumann-Morgensternov teorem korisnosti tvrdi da će potrošač pri izboru s neizvjesnošću odabrati onu alternativu koja maksimizira očekivanu funkciju korisnosti uz pretpostavke aksioma racionalnog ponašanja. Ta funkcija korisnosti definirana je na prostoru potencijalnih ishoda te ju nazivamo von Neumann-Morgensternovom funkcijom korisnosti. Model tvrdi da je donositelj odluke uvijek racionalan te da bira alternativu koja maksimizira njegovu funkciju korisnosti. Prelazimo na dokaz teorema u kojem koristimo iduće dvije leme.

Lema 2.3.2. *Ako relacija preferencije $\succeq$ zadovoljava aksiome (P1) - (P3) tada vrijedi:*

(i) $p \succ q$ *i* $0 \leq a < b \leq 1 \implies bp + (1-b)q \succ ap + (1-a)q$

(ii) $p \succeq q \succeq r$ *i* $p \succ r \implies \exists!\, a^* \in [0,1]$ *tako da je* $q \sim a^* p + (1-a^*)r$

(iii) $p \sim q$ *i* $a \in [0,1] \implies ap + (1-a)r \sim aq + (1-a)r$, $\forall r \in L(X)$.

Dokaz. (i) Prvo razmotrimo slučaj kada je a=0. Tada je $p \succ q$ i $0 \leq b \leq 1$ pa koristeći aksiom P2 slijedi da je $bp + (1-b)q \succ bq + (1-b)q = q = ap + (1-a)q$.

Sada neka je $r = bp + (1-b)q$ i pretpostavimo da je $a > 0$. Tada je $ab < 1$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned} r &= (1-\frac{a}{b})r + \frac{a}{b}r \\ &\succ (1-\frac{a}{b})q + \frac{a}{b}r \\ &= (1-\frac{a}{b})q + \frac{a}{b}(bp + (1-b)q) \\ &= ap + (1-a)q. \end{aligned}$$

(ii) Budući da je $p \succ r$, prvi dio (i) osigurava da ako postoji a^* onda je on jedinstven. Ako je $p \sim q$, tada je $a^* = 1$. Ako je $q \sim r$, tada je $a^* = 0$. Ostaje nam slučaj kad je $p \succ q \succ r$. Definirajmo

$$a^* = \sup\{a \in [0,1] : q \succeq ap + (1-a)r\}.$$

Supremum skupa dobro je definiran jer je $a = 0$ unutar tog skupa.

Po definiciji od a^* ako je $1 \geq a \geq a^*$, tada je $ap + (1-a)r \succ q$. Štoviše iz (i) imamo da ako vrijedi $0 \leq a \leq a^*$, tada je $q \succ ap + (1-a)r$. Posljednje vrijedi iz toga kada uzmemo $0 \leq a \leq a^*$ tada postoji a' tako da je $0 \leq a \leq a' \leq a^*$ i $q \succeq a'p + (1-a')r$ po definiciji od a^*. Uzmemo da je $a < a'$ iz čega slijedi da je $q \succeq a'p + (1-a')r \succ ap + (1-a)r$.

Trebamo pokazati da vrijedi $q \sim a^*p + (1-a^*)r$. Pretpostavimo da je $a^*p + (1-a^*)r \succ q \succ r$. Tada po aksiomu P3, postoji $b \in \langle 0,1 \rangle$ tako da je $b(a^*p + (1-a^*)r) + (1-b)r \succ q$, tj. $ba^*p + (1-ba^*)r \succ q$. Kako je $ba^* < a^*$, imamo da je $q \succ ba^*p + (1-ba^*)r$, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Pretpostavimo da je $p \succ q \succ a^*p + (1-a^*)r$. Tada po aksiomu P3 postoji $b \in \langle 0,1 \rangle$ tako da je $q \succ b(a^*p + (1-a^*)r) + (1-b)p$, tj. $q \succ (1-b(1-a^*))p + b(1-a^*)r$. Budući da je $(1-b(1-a^*)) > a^*$, uz gore dokazanu tvrdnju dobivamo $(1-b(1-a^*))p + b(1-a^*)r \succ q$, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Konačno, ostala nam je samo zadnje opcija $q \sim a^*p + (1-a^*)r$ što smo i htjeli dobiti.

(iii) Tvrdnja je trivijalna za slučaj kada za svaki $s \in L(X)$ vrijedi $p \sim q \sim s$. Stoga pretpostavimo da postoji $s \in L(X)$ takav da je $s \succ p \sim q$ (dokaz ide slično za slučaj $p \sim q \succ s$).

Neka je $r \in L(X)$ i $a \in [0, 1]$. Cilj nam je pokazati da vrijedi $ap+(1-a)r \sim aq+(1-a)r$. Pretpostavimo da vrijedi $ap + (1 - a)r \succ aq + (1 - a)r$. Koristeći aksiom (P2) možemo zaključiti da za svaki $b \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi da je $bs + (1 - b)q \succ bq + (1 - b)q = q \sim p$.

Ponovno koristeći aksiom (P2) dobivamo da vrijedi $a(bs + (1 - b)q) + (1 - a)r \succ ap + (1 - a)r$ za svaki $b \in \langle 0, 1\rangle$. Po pretpostavci vrijedi $ap + (1 - a)r \succ aq + (1 - a)r$ pa koristeći aksiom (P3) slijedi da za svaki b postoji $a^*(b)$ tako da je

$$ap + (1 - a)r \succ a^*(b)(a(bs + (1 - b)q) + (1 - a)r) + (1 - a^*(b))(aq + (1 - a)r).$$

Uzmimo sada neki fiksni b =1/2 i $a^*(1/2)$ (pišemo skraćeno a^*)

$$ap + (1 - a)r \succ [a^*a/2]s + [a^*a/2 + (1 - a^*)a]q + [1 - a]r.$$

Desnu stranu gornje relacije sredimo:

$$ap + (1 - a)r \succ a[(a^*/2)s + (a^*/2 + (1 - a^*/2)q] + (1 - a)r$$

pa mora vrijediti $\succ ap + (1 - a)r$, što je kontradikcija. Dokaz za slučaj kada vrijedi $aq + (1 - a)r \succ ap + (1 - a)r$ slijedi analogno.

Konačno dobivamo da vrijedi $ap + (1 - a)r \sim q + (1 - a)r$. □

Lema 2.3.3. *Pretpostavimo da relacija preferencije $\succeq$ zadovoljava aksiome (P1),(P2) i (P3), tada postoji $\overline{z}$ i $\underline{z}$ u X tako da vrijedi $\delta_{\overline{z}} \succeq p \succeq \delta_{\underline{z}}$ za svaki $p \in L(X)$.*

Dokaz. Kako je X konačan, postoji $\overline{z}$ i $\underline{z}$ u X tako da vrijedi $\delta_{\overline{z}} \succeq \delta_x \succeq \delta_{\underline{z}}$ za svaki $x \in X$. Neka je $p \in L(X)$ i definirajmo skup $S_p = \{x \in X : p(x) > 0\}$. Dokaz ide preko indukcije po kardinalitetu skupa S_p. Neka je $|S_p| = 1$, tada je $p = \delta_x$ za neki $x \in X$. Pretpostavka indukcije je $|S_p| = k$. Fiksirajmo neki $x \in X$, te p možemo zapisati kao

$$p = p(x)\delta_x + (1 - p(x))q$$

gdje je

$$q(z) = \begin{cases} 0 \text{ ako je } z = x \\ \frac{p(z)}{1-p(x)} \text{ ako je } z \neq x \end{cases}$$

Vidimo da je tada $q \in L(X)$ i $|S_q| = k$. Stoga, koristeći pretpostavku indukcije slijedi da je $\delta_{\overline{z}} \succeq q$. Imamo da je $\delta_{\overline{z}} \succeq \delta_x \implies \delta_{\overline{z}}$ ili $\delta_{\overline{z}} \sim \delta_x$ i isto tako za $\delta_{\overline{z}} \succeq q$. Primijenimo aksiom (P2) i lemu (iii) dobivamo

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{z}} &= p(x)\delta_{\overline{z}} + (1 - p(x))q \\ &\succeq p(x)\delta_x + (1 - p(x))q \\ &= p. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Konačno dobivamo da je $\delta_{\overline{z}} \succeq p$. Analogno za $p \succeq \delta_{\underline{z}}$. Time je dokaz gotov.

□

Sada prelazimo na dokaz teorema 2.3.1 koristeći dokazane dvije leme.

Dokaz. Pretpostavimo da relacija preferencije$\succeq$ zadovoljava aksiome (P1),(P2) i (P3). Koristimo lemu 2.3 da bi dobili $\delta_{\bar{z}}$ i $\delta_{\underline{z}}$.

Ako vrijedi $\delta_{\bar{z}} \sim \delta_{\underline{z}}$, tada je $U(p) = \pi$ za svaki $p \in L(X)$, stoga do kraja dokaza se bavimo slučajem $\delta_{\bar{z}} \succeq \delta_{\underline{z}}$. Za svaki $p \in L(X)$ definirajmo

$$U(p) = a \text{ gdje je } a\delta_{\bar{z}} + (1-a)\delta_{\underline{z}} \sim p$$

Po lemi 2.3.2(ii) znamo da postoji takav a i da je jedinstven. Za svaki $p, q \in L(X)$ i svako $a \in [0,1]$ koristeći lemu 2.3.2(iii) slijedi da je

$$\begin{aligned} ap + (1-a)q &\sim a[u(p)\delta_{\bar{z}} + (1-u(p))\delta_{\underline{z}}] + (1-a)[u(q)\delta_{\bar{z}} + (1-u(q))\delta_{\underline{z}}] \\ &= [au(p) + (1-a)u(q)]\delta_{\bar{z}} + [1 - au(p) - (1-a)u(q)]\delta_{\underline{z}}. \end{aligned}$$

Po definiciji od u dobivamo da je $u(ap + (1-a)q) = au(p) + (1-a)u(q)$.

Želimo pokazati da u reprezentira $\succeq$, tvrdimo da tada vrijedi

$$u(p) \geq u(q) \iff u(p)\delta_{\bar{z}} + (1-u(p))\delta_{\underline{z}} \succeq u(q)\delta_{\bar{z}} + (1-u(q))\delta_{\underline{z}}.$$

Ako je $u(p) = u(q)$ tada su te dvije lutrije jednake. Pretpostavimo da vijedi $u(p) > u(q)$, tada po lemi 2.3.2(i) imamo da je

$$u(p)\delta_{\bar{z}} + (1-u(p))\delta_{\underline{z}} \succ u(q)\delta_{\bar{z}} + (1-u(q))\delta_{\underline{z}}.$$

Obrnuto, pretpostavimo da vrijedi $u(p)\delta_{\bar{z}} + (1-u(p))\delta_{\underline{z}} \succeq u(q)\delta_{\bar{z}} + (1-u(q))\delta_{\underline{z}}$. Kada bi vrijedilo $u(q) > u(p)$ tada bi po lemi 2.3.2(i) dobili

$$u(q)\delta_{\bar{z}} + (1-u(p))\delta_{\underline{z}} \succeq u(p)\delta_{\bar{z}} + (1-u(p))\delta_{\underline{z}},$$

što je kontradikcija. Stoga mora vrijediti $u(p) \geq u(q)$, što smo i htjeli dobiti.

Sada pretpostavimo da $\succeq$ ima reprezentaciju, tj. postoji $u : X \to \mathbb{R}$ tako da je

$$u(ap + (1-a)q) = au(p) + (1-a)u(q) \ \forall p, q \in L(X) \text{ i } a \in [0,1]$$

$$\text{i } p \succeq q \text{ ako i samo ako je } u(p) \geq u(q) \ \forall p, q \in L(X).$$

Želimo pokazati da tada vrijede aksiomi (P1),(P2) i (P3).

Neka su p, q, r elementi iz $L(X)$. Očito vrijedi $u(p) \geq u(q)$ ili $u(q) \geq u(p)$, tj. $p \succeq q$ ili $q \succeq p$. Pretpostavimo slučaj kada je $p \succeq q$ i $q \succeq r$, tada vrijedi $u(p) \geq u(q) \geq u(r)$ pa imamo da je $u(p) \geq u(r)$ iz čega slijedi da $p \succeq r$. Zaključak je da $\succeq$ potpuna i tranzitivna pa vrijedi aksiom (P1).

Nadalje, pretpostavimo da je $p \succ q$ i neka je $a \in \langle 0, 1\rangle$, tada vrijedi $u(p) > u(q)$. Znamo da vrijedi

$$u(ap + (1 - a)r) = au(p) + (1 - a)u(r) \text{ i}$$

$$u(aq + (1 - a)r) = au(q) + (1 - a)u(r).$$

Isto tako, ako vrijedi da je $u(p) > u(q)$, tada je $u(ap + (1 - a)r) > u(ap + (1 - a)r)$. Stoga vrijedi $ap + (1 - a)u(r) > au(q) + (1 - a)u(r)$, što zadovoljava aksiom (P2). Konačno, pretpostavimo da je $p \succ q \succ r$ i tada vrijedi $u(p) > u(q) > u(r)$. Neka je $t \in [0, 1]$

$$tu(p) + (1 - t)u(r) > u(q) \text{ ako i samo ako je } t > \frac{u(q) - u(r)}{u(p) - u(r)},$$

$$tu(p) + (1 - t)u(r) < u(q) \text{ ako i samo ako je } t < \frac{u(q) - u(r)}{u(p) - u(r)}.$$

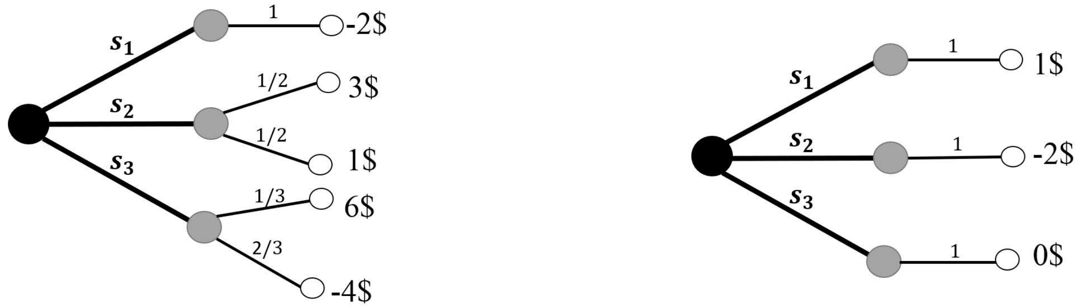
Stoga definirajmo

$$a = \frac{u(p) - u(r) + \epsilon}{u(p) - u(r)} \text{ i } b = \frac{u(q) - u(r) - \epsilon}{u(q) - u(r)}$$

gdje je ϵ dovoljno mali tako da su $a, b \in \langle 0, 1\rangle$. Time smo dokazali da vrijedi aksiom (P3), pa je dokaz teorema gotov. □

2.4 Anscombe-Aumannov model

Do ovog potpoglavlja smo se susreli sa subjektivnom očekivanom korisnosti koristeći Savageov model. U ovom potpoglavlju bavit ćemo se jednostavnijim pristupom koji su razvili Anscombe i Aumann (1963). Anscombe-Aumannov model sadrži karakteristike oba prethodna modela. Tražimo subjektivnu očekivanu korisnost s obzirom na konačan skup stanja S koji predstavlja neizvjesnost kao i u Savagovom modelu, te model sadrži skup lutrija $L(X)$ na skupu posljedica X kao i u von Neumann-Morgensternovom modelu. U Anscombe-Aumannovom modelu, skup alternativa sastoji se od funkcija oblika $h : S \to L(X)$ koja skupu stanja pridružuje objektivnu lutriju neke posljedice x. Skup svih takvih funkcija označavamo s $\mathcal{H}$. Interpretaciju ovog modela promatramo kroz konjsku trku, dok iznos nagrade ovisi o odigranoj igri lutrije koja ima objektivne ishode simetričnih događaja. Stoga se neizvjesnost ishoda određuje u dva koraka. Prvi korak neizvjesnosti je neizvjesnost stanja koje će se dogoditi, dok druga neizvjesnost je odigrana lutrija povezana sa stanjem koje se dogodilo. Primjerice, zamislimo listić za klađenje s uloženih \$2 na pobjedu konja K: u stanju $s1$ (R pobjeđuje) potrošač sigurno gubi \$2, u stanju $s2$ (K pobjeđuje) dobiva \$3 s vjerojatnošću 1/2 i \$1 s vjerojatnošću 1/2, u stanju $s3$ (mrtva trka) dobiva \$6 s vjerojatnošću 1/3 i gubi \$4 s vjerojatnošću 2/3. Slično kao i u potpoglavlju 2.1 slučajeve prikazujemo stablom odluke na slici 2.2, gdje je svaka grana iz početnog čvora jedno stanje, a na kraju stabla nalaze se nagrade. Navedeni primjer vidimo na slici 2.2a



(a) (b)

Slika 2.2: Dvije oklade uvjetovane stanjem

U potpoglavlju 2.1 imali smo model gdje je ishod nakon trke i realizacije stanja s nagrada oblika $x = f(s)$. Ovaj model možemo prikazati kao poseban slučaj Anscombe-Aumannovog modela gdje je vjerojatnost ishoda u lutriji za sva stanja jednaka 1, kao što je prikazano na slici 2.2b. Stoga možemo razmišljati o ovom modelu na način proširenja prostora ishoda na kojem su preferencije potrošača dane kao misaoni eksperiment. Cilj nam je prikazati potrošačeve preferencije na alternative iz $\mathcal{H}$.

U modelu potrošač rangira (preferira) objektivne lutrije $p \in L(X)$. Relacija preferencija na skupu $L(X)$, oznake $\succeq_X$ zadovoljava uvjete teorema 1.4.1 pa postoji numerička reprezentacija preferencije

$$p \to \mathbb{E}_p(u) := \sum_{x \in X} p(x)u(x)$$

za neku funkciju korisnosti $u : X \to \mathbb{R}$. Model dodatno pretpostavlja da potrošač rangira i lutrije na skupu alternativa $\mathcal{H}$ oznake $L(\mathcal{H})$. Relacija preferencija $\succeq$ na skupu $L(\mathcal{H})$ proširenje je relacije preferencije $\succeq_X$. Isto kao i prije, relacije preferencije $\succeq$ zadovoljava uvjete teorema 1.4.1 pa postoji numerička reprezentacija preferencije

$$P \to \sum_{f \in \mathcal{H}} P(f)U(f)$$

za neku funkciju korisnosti $U : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Osim postojanja funkcije korisnosti za obje relacije preferencije, one su dodatno povezane dvama svojstvima: monotonost i nezavisnost redoslijeda u složenoj lutriji. Prvo svojstvo nam govori ako su dvije alternative f i g identične osim u lutrijama $f(s)$ i $g(s)$ za neko stanje s, tada rangiranje tih dviju alternativa s obzirom na relaciju preferencije $\succeq$ određeno je rangiranjem $f(s)$ i $g(s)$ s obzirom na relaciju preferencije $\succeq_X$. Drugo svojstvo nam govori da ako odigramo lutriju prije nego znamo koje se stanje s dogodilo jednako je odigranoj lutriji nakon što se dogodilo stanje s. Odabir lutrije $P \in L(\mathcal{H})$ je jednak odabiru složene lutrije $g(s)$ sastavljene od P te $f(s)$:

$$g(s) := \sum_{f \in \mathcal{H}} P(f) f(s).$$

Uz navedena dva svojstva, Anscombe i Aumann pokazali su da postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera μ na skupu S tako da vrijedi

$$U(f) = \sum_{s \in S} \mu(s) \mathbb{E}_{f(s)}(u).$$

Definirana funkcija naziva se subjektivna očekivana korisnost Anscombe-Aumannovog modela.

Model se temelji na pet aksioma koji su vrlo slična aksiomima definiranima u prethodna dva modela. Tako je prvo svojstvo jednako je prvim aksiomima u prethodno dva objašnjena modela (P1), svojstvo (P2) je svojstvo netrivijalnosti definirano u Savageovom modelu (P2). Druga dva svojstva su kombinacija gore objašnjenog svojstva nezavisnosti redoslijeda u složenoj lutriji, tj. (P3) i (P4) su svojstva nezavisnosti i neprekidnosti koja smo definirali u von Neumann-Morgensternovom modelu (P2) i (P3), jedino što sada uzimamo alternative iz skupa $\mathcal{H}$. Ostaje nam još peti aksiom monotonosti (P5) kojeg iskazujemo u nastavku.

Aksiom 2.4.1 (**P5** Monotonsot)**.** *Za svake dvije alternative f i g iz $\mathcal{H}$ vrijedi da je $f(s) \geq g(s)$ za svaki $s \in S \implies f \geq g$.*

Sada imamo sve potrebno kako bi mogli iskazati Anscombe-Aumannov teorem.

Teorem 2.4.1. *Neka je $\geq$ relacija preferencije na skupu $\mathcal{H}$. Tada su iduće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *Relacija preferencije zadovoljava (P1)-(P5)*

2. *Postoji jedinstvena do na afine transformacije, realna funkcija u i jedinstvena vjerojatnosna distribucija na S, tako da vrijedi*

$$f \geq q \iff \sum_{s \in S} \mu(s) \Big[\sum_{x \in X} f_s(x) u(x) \Big] \geq \sum_{s \in S} \mu(s) \Big[\sum_{x \in X} g_s(x) u(x) \Big].$$

2.5 Ellsbergov paradoks

Daniel Ellsberg je iznio 1961. godine u svom radu "Rizik, dvosmislenost i Savageovi aksiomi" tzv. Ellsbergov paradoks. U teoriji izbora Ellsbergov paradoks je paradoks o tome da izbori racionalnog potrošača nisu u skladu s pretpostavkama teorije očekivanih korisnosti. Ellsberg je u svom radu objasnio paradoks preko rezultata svog eksperimentalnog istraživanja. Urna sadrži 90 loptica od kojih je 30 crvenih, a 60 je plavih ili žutih loptica u nepoznatom omjeru. Označimo s k broj plavih loptica, dakle broj žutih loptica je (60-k). Ellsberg je proveo ispitivanje o izboru u dvjema situacijama.

1. Neka je A oklada na crvenu kuglicu, gdje se za izvučenu crvenu kuglicu dobiva 100$, te neka je B oklada, gdje se za izvučenu plavu kuglicu dobiva 100$.

2. Neka je A' oklada, gdje se za izvučenu crvenu ili žutu kuglicu dobiva 100$, te neka je B' oklada, gdje se za izvučenu plavu ili žutu kuglicu dobiva 100$.

Rezultati ispitivanja bili su da je A preferiran pred B, te B' pred A'. Budući da su svugdje nagrade jednake, to znači da po teoriji očekivane korisnosti samo vjerojatnost događaja ovisi o odabiru. Stoga znamo kad bi u prvom slučaju bile postavljene iste vjerojatnosti tada ne bi postojala jasna preferencija između ta dva slučaja. Objašnjenje dobivenog rezultata je vrlo jednostavno. Ispitanik zna da je u prvom slučaju vjerojatnost da izvuče crvenu kuglicu 1/3, dok vjerojatnost da izvuče plavu kuglicu ne zna. Ispitanik radi neznanja o događaju da plava kuglica bude izvučena u tom slučaju bira crvenu kuglicu. U drugom slučaju potrošač zna da je vjerojatnost za slučaj B' da izvuče plavu ili žutu 2/3 dok za slučaj A' ne zna koliko je točno kuglica crveno ili žuto, može biti bilo koji broj od 30 do 90. Ovo se ne slaže sa Savageovim i Anscombe-Aumannovim modelom izbora. Po Savageovom principu kako je $A \succ B$ te A', B' su transformacija alternativa na istom događaju, moralo bi slijediti $A' \succ B'$, što ne vrijedi. Razlog tome je što postoji razlika između rizika i neizvjesnosti. Rizik je kada znamo izglede pri okladi, dok kod neizvjesnosti ne znamo koji su nam izgledi za pobjedu pri okladi. Poznavanje šansi pri okladi najčešće se temelji na tome da znamo učestalost nekog događaja. Zaključak je da ljudi preferiraju situacije s poznatim vjerojatnostima kada ih uspoređuju sa situacijama nepoznatih vjerojatnosti.

Poglavlje 3

Korisnost novca

U većini primjena modela objašnjenih do sada nagrada je bila iznos novca. Sada analiziramo kako se konkretno mijenjanju funkcija korisnost i preferencije potrošača kada je nagrada novac. Uvodimo pojam sklonost riziku potrošača te gledamo kako se mijenjaju preferencije potrošača ovisno o razini sklonosti riziku. Da bi znali kako se mijenja moramo znati kolika je razina sklonosti riziku pa uvodimo mjeru koja nam to daje. Potrošačeve preferencije dane su nad skupom lutrija $L(X)$ te pretpostavljamo da relacija preferencije $\succeq$ zadovoljava aksiome racionalnog ponašanja (P1),(P2) i (P3).

3.1 Svojstva funkcije korisnosti za novac

U ovom dijelu poglavlja bavimo se pitanjem koja svojstva zadovoljavaju relacija preferencije $\succeq$ kada je nagrada novčana i kako ta svojstva utječu na funkciju korisnosti U. Racionalno je pretpostaviti da je cilj maksimizirati dobiveni novčani iznos, da je veća korisnost više novca. Formalno:

Propozicija 3.1.1 (Stroga monotonost)**.** *Funkcija korisnosti U strogo je rastuća ako i samo ako je za svaki x i y iz X takvi da je $x > y$ vrijedi za degenerirane lutrije $\delta_x \succ \delta_y$.*

Neprekidnost je prirodno i korisno svojstvo za pretpostaviti.

Propozicija 3.1.2 (Neprekidnost)**.** *Funkcija korisnosti U neprekidna je ako i samo ako za svaku nagradu x i lutriju p tako da $p \nsim \delta_x$, postoji $\epsilon > 0$ tako da vrijedi $p \succ \delta_{x'}$ ili $\delta_{x'} \succ p$ za svaki x' unutar $\langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle$.*

Svojstvo neprekidnosti nam kaže da u slučaju da potrošač ima strogu preferenciju između dvije lutrije i da promijenimo nagradu za mali iznos, potrošač će i dalje imati jasnu preferenciju među tim lutrijama.

Neprekidnost možemo promatrati na dva načina: neprekidnost u vjerojatnosti i neprekidnost u nagradama. Neprekidnost u vjerojatnosti osigurana je (P3) aksiomom racionalnog ponašanja iz von Neumann-Morgenternovog modela. Iz neprekidnosti u nagradama slijedi da mala promjena u lutriji p može činiti razliku u vjerojatnosti osvajanja nagrade.

Dokaz. Pretpostavimo da je U neprekidna i da vrijedi $p \succ \delta_x$. Tada je

$$u(p) = \sum_y U(y)p(y) > U(x).$$

Označimo s $\gamma = u(p) - U(x)$, tada postoji zbog neprekidnosti od U ϵ tako da za svaki $x' \in \langle x-\epsilon, x+\epsilon \rangle$ vrijedi $U(x') - U(x) < \gamma$, što slijedi da je $u(p) > U(x')$, odnosno $p \succ \delta_{x'}$, analogno dokazujemo za $\delta_x \succ p$.

Obrnuto, pretpostavimo da U nije neprekidna za neki x. Tada postoji niz $\{x_n\}$ s limesom x takav da postoji $L = lim_n U(x_n)$ i tada vrijedi $lim_n U(x_n) < U(x)$ ili $lim_n U(x_n) > U(x)$. Pretpostavimo da je $L > U(x)$. Neka je $L = \infty$, tada vrijedi $\delta_{x_n} \succ \delta_{x_N} \succ \delta_x$ za svaki dovoljno veliki n i fiksan broj N pa s tim ne vrijedi pretpostavka propozicije. Neka je $L \neq \infty$, označimo s $\gamma = L - U(x)$ te x_N takav da je $|L - U(x_N)| < \gamma/2$, tada lutrija p s nagradama x_N i x vjerojatnošću dobitka svake 1/2 ima očekivanu korisnost koja je veća od $L/2 + U(x)/2 - \gamma/4 = U(x) + \gamma/4$, a manja od $L/2 + U(x)/2 + \gamma/4 = L - \gamma/4$.

Zaključak je da vrijedi $\delta_{x_n} \succ p$ za dovoljno veliki n, što je kontradikcija s pretpostavkom propozicije. Analogan dokaz slijedi za slučaj kada je $L > U(x)$, s tim je dokaz gotov. □

3.2 Nesklonost riziku

U potpoglavju uvodimo novu oznaku, za $p \in L(X)$ neka je $\mathbb{E}_p$ oznaka za očekivanje od p, tj. $\mathbb{E}_p = \sum_x xp(x)$.

Propozicija 3.2.1. *Funkcija korisnosti U je konkavna ako i samo ako za svaku lutriju p vrijedi $\delta_{\mathbb{E}_p} \succeq p$.*

Potrošač koji preferira degeneriranu lutriju $\delta_{\mathbb{E}_p}$ očekivane vrijednosti $\mathbb{E}_p$ umjesto lutrije p za svaku lutriju p i ima konkavnu funkciju korisnosti, kažemo da je nesklon riziku. S druge strane, za potrošače za koje vrijedi $p \succeq \delta_{\mathbb{E}_p}$, za svaku lutriju p, i ima konveksnu funkciju korisnosti, kažemo da je sklon riziku. Također, potrošač može biti neutralan prema riziku ako vrijedi $p \sim \delta_{\mathbb{E}_p}$ i ima afinu funkciju korisnosti.

Dokaz. Pretpostavimo da U nije konkavna funkcija. Tada vrijedi da za neke $x, x' \in \mathbb{R}$ i $a \in [0,1]$, $U(ax + (1-a)x') < aU(x) + (1-a)U(x')$. Neka je p lutrija koja ima nagradu x i x' s vjerojatnošću a i $1-a$. Tada je $\mathbb{E}_p = ax + (1-a)x'$ i očekivana korisnost od $\delta_{\mathbb{E}_p}$ je $U(ax + (1-a)x') < aU(x) + (1-a)U(x')$, što je i očekivana korisnost za p. Iz toga slijedi

da je $p \succ \delta_{\mathbb{E}_p}$.
Obrnuto, pretpostavimo da je U konkavna funkcija. Jednostavno je za pokazati da za niz $x_1, ..., x_n$ realnih brojeva te za $a_1, ..., a_n$ niz brojeva između 0 i 1, takvih da je $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, vrijedi $U(\sum_{i=1}^n a_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n a_i U(x_i)$. Primijenimo ovo na jednostavnu lutriju p uz to da je U konkavna funkcija i dobivamo da je

$$U\Big(\sum_{x \in \mathrm{supp}(p)} p(x)x\Big) \geq \sum_{x \in \mathrm{supp}(p)} p(x)U(x).$$

Lijeva strana nejednakosti je korisnost lutrije $\delta_{\mathbb{E}_p}$, dok je desna strana očekivana korisnost za lutriju p iz toga slijedi $\delta_{\mathbb{E}_p} \succeq p$. Time je dokaz gotov. □

Definicija 3.2.2. *Sigurnosni ekvivalent za lutriju p je nagrada x takva da vrijedi $\delta_x \sim p$.*

Propozicija 3.2.3. *Neka je U neprekidna funkcija korisnosti, tada svaka lutrija p ima barem jedan sigurnosni ekvivalent. Ako je U strogo rastuća funkcija korisnosti, tada svaka lutrija p ima najviše jedan sigurnosni ekvivalent.*

Do kraja poglavlja pretpostavljamo da je promatrana funkcija korisnosti strogo rastuća, neprekidna i konkavna te reprezentira relaciju preferencije koja je rastuća, neprekidna i sklona riziku. Iz gornje propozicije znamo da svaka lutrija p ima najviše jedan sigurnosni ekvivalent, kojeg ćemo označiti sa $C(p)$. Sklonost riziku tada može biti objašnjena kao $C(p) \leq \mathbb{E}_p$. Označavamo s $R(p)$ razliku između $\mathbb{E}_p - C(p)$ i tu razliku nazivamo premiju rizika od p. Stoga nesklonost riziku možemo objasniti preko $R(p) \geq 0$ za svaki p. $R(p)$ je mjera razine sklonosti riziku potrošača. Što je veći $R(p)$, to je veća odbojnost potrošača da preuzme rizik. Potrošač je neutralan prema riziku ako vrijedi $R(p) = 0$. Sada promatramo dva potrošača koji maksimiziraju svoje funkcije korisnosti. Prvi potrošač ima funkciju korisnosti W, a drugi potrošač ima funkciju korisnosti V. Skraćeno ćemo koristiti izraz da je neka od dvije funkcije korisnost (ne)sklona riziku, što ustvari znači da je potrošač koji ima određenu funkciju korisnosti (ne)sklon riziku.

Definicija 3.2.4. *W je barem jednako sklon riziku kao i V ako za svaku lutriju p i neku određenu svotu novaca x vrijedi da W preferira p pred x, da tada to čini i V.*

Propozicija 3.2.5. *W je barem jednako sklon rizika kao i V ako i samo ako je funkcija $W \circ V^{-1}$ konkavna.*

Definicija 3.2.6. *Za dvostruko neprekidno derivabilnu funkciju korisnosti U sa strogo pozitivnom prvom derivacijom, funkciju*

$$\lambda(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

nazivamo koeficijent sklonosti riziku.

Uočimo ako je $U' > 0$ i U je konkavna funkcija da tada je $\lambda(x) \geq 0$. Promotrimo lutriju p i novčani iznos z. Pišemo $p \oplus z$ za lutriju koja daje novčanu nagradu iznosa $x + z$ s vjerojatnošću $p(x)$, tj. $p \oplus z$ je lutrija koja je konstruirana iz p tako da povećava svaku nagradu za iznos z. Ovo je situacija kada potrošač poveća svoj novac nakon kockanja. Prirodno je pretpostaviti da osoba što je bogatija manje brine o riziku u nekom kockanju. Odnosno, kako se z povećava, tako $R(p \oplus z)$ premija rizika ne bi trebala rasti. Formaliziramo objašnjeni pojam i dva nova pojma vezano uz to sa sljedećom definicijom.

Definicija 3.2.7. *Za fiksnog potrošača s funkcijom korisnosti U, ako je $R(p \oplus z)$ nerastuća u z kažemo da je potrošač nerastuće sklon riziku. Ako je $R(p \oplus z)$ konstantno za z kažemo da je potrošač konstantno sklon riziku ili ima konstantnu sklonost riziku. Ako je $R(p \oplus z)$ neopadajući u z tada kažemo da je potrošač neopadajuće sklon riziku.*

Ekonomisti generalno pretpostavljaju da su potrošači nerastuće skloni riziku te da su potrošači pri nagradama koje nisu mnogo veće od njihovih prihoda aproksimativno konstantno skloni riziku. Idućom propozicijom dolazimo do definiranih pojmova preko funkcije korisnosti U.

Propozicija 3.2.8. *Za potrošača koji ima dvostruko neprekidnu diferencijabilnu funkciju korisnosti U takva da je $U' > 0$ i pridružen koeficijent sklonosti riziku $\lambda(\cdot)$, kažemo da je nerastuće (neopadajuće) sklon riziku ako i samo ako je $\lambda(\cdot)$ nerastuća (neopadajuće) funkcija. Potrošač ima konstantnu sklonost riziku ako i samo ako je $\lambda(\cdot)$ konstantna funkcija λ, i u tom slučaju je funkcija korisnosti U pozitivno afino translantirana od funkcije korisnosti $e^{-\lambda x}$. Neka je λ jednaka nuli tada je U pozitivno afina translantacija funkcije x pa kažemo da je potrošač neutralan prema riziku.*

3.3 Primjena u osiguranjima

Najvažnija primjena modela prethodnih poglavlja su primjena na poslove osiguranja i financijska tržišta. Zamislimo potrošača čiji su prihodi nestabilni. Uzmimo slučaj da potrošač ima prihode y s vjerojatnošću π te prihode y' s vjerojatnošću $1 - \pi$, gdje $y > y'$. Razliku $\Delta = y - y'$ tumačimo kao gubitak koji bi se mogao desiti potrošaču iz razloga kao što su nesreća, zdravlje ili slično. Osiguravateljske tvrtke plaćaju iznos gubitka Δ nazad potrošaču ako dođe do gubitka. Potrošač može kupiti policu osiguranja koja pokriva samo dio gubitka Δ, tako da ako plaća iznos $a\delta$ dobit će nazad iznos $a\Delta$ u slučaju gubitka. Pretpostavimo da potrošač zadovoljava uvjete (P1),(P2) i (P3), te da je potrošačeva funkcija korisnosti V strogo rastuća, konkavna i diferencijabilna. Ako potrošač kupi a dio police osiguranja tada njegova očekivana funkcija korisnosti ima oblik:

$$v(a) = \pi V(y - a\delta) + (1 - \pi)V(y' + a\Delta - a\Delta). \tag{3.1}$$

Problem potrošača je maksimizirati svoju funkciju korisnosti v s obzirom na a. Rješenje problema maksimizacije funkcije korisnosti daje iduća propozicija.

Propozicija 3.3.1. *Neka je v funkcija definirana s 3.1 te vrijedi da je $y > y'$, $\Delta = y - y'$ i V konkavna, strogo rastuća i diferencijabilna funkcija. Rješenje maksimizacije funkcije v s obzirom na a je*

1. *ako je $\delta = (1 - \pi)\Delta$, tada je $a = 1$ rješenje,*
2. *ako je $\delta > (1 - \pi)\Delta$, tada je $a < 1$ rješenje.*

Dokaz. v je diferencijabilna funkcija od a. Deriviramo funkciju v po a da bi našli maksimum funkcije zatim izjednačavamo s nulom i dobivamo

$$\pi\delta V'(y - a\delta) = (1 - \pi)(\Delta - \delta)V'(y' + a\Delta - a\delta) \tag{3.2}$$

(1.) Neka je $\delta = (1-\pi)\Delta$, tada je $(1-\pi)(\Delta-\delta) = (1-\pi)\Delta-(1-\pi)\delta = \delta-(1-\pi)\delta = \pi\delta$, pa 3.2 možemo pisati

$$V'(y - a\delta) = V'(y - (1 - a)\Delta - a\delta),$$

što očito vrijedi kada je $a = 1$.

(2.) Neka je $b = \pi\delta/((1 - \pi)(\Delta - \delta))$, tada je $\delta > (1 - \pi)\Delta$ iz čega slijedi da je $b > 1$. Jednakost 3.2 napišem kao

$$bV'(y - a\delta) = V'(y - (1 - a)\Delta - a\delta),$$

Zbog $b > 1$ slijedi da je

$$V'(y - a\delta) < V'(y - (1 - a)\Delta - a\delta)$$

ako je a rješenje. Budući da je V konkavna, derivacija je nerastuća pa iz gornje nejednakosti slijedi

$$y - a\delta > y - (1 - a)\Delta - a\delta,$$

što vrijedi kada je $a < 1$.

□

Uočimo da je vrijednost $(1 - \pi)\Delta$ očekivani iznos isplate osiguranja. Prema tome, ako je $\delta = (1 - \pi)\Delta$ tada osiguranje prosječno plaća jednak iznos kao što uzima premiju od potrošača, kažemo da je ugovor aktuarski korektan. Potrošaču je tada bolje plaćati puno osiguranje. Ako je $\delta > (1 - \pi)\Delta$, osiguravateljska tvrtka uzima više nego što prosječno očekuje da će isplatiti osiguraniku, kažemo da je ugovor aktuarski nekorektan. Osiguravatelj je tada samo djelomično osiguran od gubitka Δ.

Bibliografija

[1] N. I. Al-Najjar i L. De Castro, *Subjective Probability*, (2010).

[2] S. Board, *Preferences and Utility*, (2008), http://www.econ.ucla.edu/sboard/teaching/econ11_09.

[3] E. Karni, *Savages' Subjective Expected Utility Model*, (2005).

[4] D. M. Kreps, *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*, 8.

[5] R. Lamba, *Expected utility and Mixture space theorem*, (2020).

[6] J. Levin, *Choice under Uncertainty*, (2006).

[7] J. Levin i P. Milgrom, *Introduction to Choice Theory*, (2004).

[8] V. F. Martins-da Rocha i R. M. Rosa, *An Anscombe–Aumann Approach to Second-Order Expected Utility*, (2021).

[9] A. Mass-Colell, J. R. Green i M. D. Whinston, *Microeconomic Theory*, 2012.

[10] H. Thai, *Savage's theorem with atoms*, (2019), https://mpra.ub.uni-muenchen.de/94516/.

[11] H. R. Varian, *Intermediate Microeconomics*, 8., 2010.

[12] P. P. Wakker, *Prospect Theory: For Risk and Ambiguity*, 2010.

Sažetak

U ovom radu bavimo se izborom potrošača. Izbor potrošača opisujemo preko preferencija među objektima. U prvom poglavlju opisujemo izbor potrošača preko relacije preferencije, iz koje definiramo funkcije korisnosti svakog potrošača. Iskazujemo glavni teorem poglavlja koji nam govori o ekvivalenciji pojmova izbora potrošača, preferencije te funkcije korisnosti. U drugom poglavlju opisujemo kako se funkcija korisnosti mijenja kada uvedemo neizvjesnost pri donošenju odluka. Objašnjavamo modele koji se razlikuju da li je model temeljen na nekim objektivnim neizvjesnostima, odnosno neizvjesnosti kojima poznajemo učestalost događaja, ili subjektivnim neizvjesnostima tj. neizvjesnosti kod kojih potrošač donosi izbor na temelju svojih subjektivnih uvjerenja. U zadnjem poglavlju promatramo modele funkcije korisnosti za najčešće korištenu primjenu, a to je maksimizacija novca. Uvodimo pojam sklonosti riziku preko kojeg opisujemo funkciju korisnosti potrošača i gledamo kako se mijenja izbor potrošača s obzirom na njegov stav prema riziku, tj. koliko je potrošač spreman preuzeti rizik. Za kraj objašnjavamo kako se funkcija korisnosti može primijeniti u poslovima osiguranja.

Summary

In this thesis we deal with consumer's choice. We describe the consumer's choice using object preferences. In the first chapter, we describe consumer's choice using preference relation, from which we define consumer's utility function. We express the main theorem of the chapter, which explains equivalence between terms of consumer's choice, preferecne and utility function. In the second chapter we describe how the utility function changes when we introduce uncertainty in decision making. We describe models which differ if the model is based on objective uncertainties i.e. uncertainties in which we know the event occurance, or subjective uncertainties, i.e. uncertainties in which the consumer makes decisions based on his subjective beliefs. In the last chapter, we observe utility function models for the most common use, the use of money maximization. We introduce the therm of risk tolerance, through which we describe the consumer's utility function and observe how consumer's decision making is changed based on his risk tolerence i.e. how much risk is the consumer willing to take. In the end, we explain how the utility function can be used in the business insurance.

Životopis

Rođena sam 12.01.1998. godine u gradu Capelle aan den Ijssel u Nizozemskoj. Pohađala sam osnovnu katoličku školu Basisschool Pieter Bas. U drugom osnovne sam se doselila u Zadar, gdje sam završila Osnovnu školu Smiljevac. 2012. godine upisujem Gimnaziju Jurja Barakovića u Zadru. Obrazovanje nastavljam 2016. upisom na Prirodoslovnom matematičkom fakultet na Matematički odsjek. 2020. godine sam završila preddiplomski studij matematike nastavnički smjer nakon čega upisujem studij Financijske i poslovne matematike na istom.