Algebra u nastavi matematike

Blazinarić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Blazinarić

ALGEBRA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, studeni, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svim ljudima koji su me podržavali tijekom cijelog mog obrazovanja.

Zahvaljujem se i svojim prijateljima Anamariji, Vinku i Ivi, te svim kolegama i profesorima.

Također, hvala mom mentoru doc.dr.sc. Matiji Bašiću na susretljivosti i spremnom odgovoru na sva moja pitanja.

Posebnu zahvalu upućujem dečku Filipu na vjeri, strpljenju i podršci pruženoj tijekom cijelog školovanja i pisanja ovog rada.

Za kraj, najveća hvala mojoj obitelji - mami Mirjani, tati Marijanu i bratu Marku kojima posvećujem ovaj diplomski rad.

"Matematika ima ljepotu i romantiku. Svijet matematike nije dosadno mjesto. To je izvanredno mjesto; Tamo je vrijedno trošiti vrijeme."

Marcus du Sautoy

Sadržaj

Uvod **1**

1 Algebra i algebarsko mišljenje **2**
1.1 Što je to algebra? 2
1.2 Algebarsko mišljenje 5
1.2.1 Pojam jednakosti 5
1.2.2 Nepoznanice i jednadžbe 6
1.2.3 Funkcije i nejednakosti 8
1.2.4 Generalizacija i apstrakcija 9
1.3 Uloga tehnologije u poučavanju algebre 12

2 Algebra u kurikulumu **15**
2.1 Hrvatski kurikulum 15
2.2 Finski kurikulum 20

3 Algebarsko mišljenje i nejednakosti **26**
3.1 Nejednakosti među sredinama 26
3.2 Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost 32
3.3 Optimizacija kvadratnom funkcijom 35

Bibliografija **42**

Uvod

Od samog početka školovanja, matematika se smatra jednim od temeljnih predmeta u cjelokupnom obrazovanju. Ona predstavlja jednu složenu znanost sastavljenu od više komponenti koje se, iako naizgled zasebne, međusobno isprepliću. Svaka od tih komponenti nadograđuje se jedna na drugu počevši od aritmetike, algebre, analize, geometrije i drugih. U ovom radu fokus je isključivo na algebri koja kroz povijest poprima brojne karakteristike kroz koje se prezentira u nastavi.

Algebra kakvu poznajemo danas dugo se razvijala kroz povijest. Početak razvoja algebre počinje još u doba Babilonaca te se nastavlja do 19. stoljeća u kojem se spominje apstraktna algebra. Danas postoje mnoge vrste algebre: elementarna, apstraktna, Booleova, linearna i druge. U primarnom obrazovanju često se spominje samo elementarna algebra koja je uz aritmetiku najviše zastupljena u osnovnoj školi.

U ovom diplomskom radu govorit će se prvenstveno o algebri kroz nastavu matematike. U prvom poglavlju spominje se algebra kroz povijest te uloga algebarskog mišljenja u nastavi. Također, spominje se uloga tehnologije usko povezane uz algebru poput Computer Algebra Systems (CAS). U drugom poglavlju možemo pratiti razvoj algebre kroz kurikulum osnovne i srednje škole po razredima te usporedbu s finskim kurikulumom. Treće poglavlje bazira se na nejednakostima i njihovoj primjeni te ulozi algebarskog mišljenja u učenikovom razumijevanju i rješavanju zadataka. Spominju se i razne nejednakosti te optimizacija kvadratne funkcije na primjerima.

Algebra i algebarsko mišljenje

Algebarsko mišljenje vrlo je važno za učenikovo matematičko obrazovanje, stoga učitelji moraju pronaći način kako ga poticati. Pitanja poput ”Kako si riješio ovaj zadatak?”, ”Možemo li uvijek primijeniti ovaj način rješavanja?”, ”Kako znamo da je ovo ispravno?” uvelike nam pomažu u tome, te bi ih učitelji trebali koristiti u svakodnevnoj nastavi matematike.

1.1 Što je to algebra?

Pojam algebra potječe od arapske riječi ”al-gabr”, što znači rekompozicija, reintegracija. Prvi se puta spominje u naslovu Al-Hwarizmijeva djela *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr wa'lmukabala* iz 825. godine koje opisuje različite načine rješavanja jednadžbi. Samo djelo sastoji se od pet glavnih poglavlja, te sadrži četrdeset različitih zadataka vezanih uz rješavanje problema s kojima su se ljudi u to vrijeme susretali (podjela imovine, nasljedstvo, trgovina, mjerenje zemljišta...). O važnosti i utjecaju tog djela na tadašnje poznavanje matematike dovoljno je spomenuti kako je cijela matematička disciplina po njemu dobila ime ”Algebra”, te se vjeruje da upravo njime počinje razvoj algebre. Promotrimo sada neke definicije algebre u širem smislu. U Matematičkom rječniku algebra se opisuje kao *grana matematike koja proučava operacije koje imaju svojstva kakva imaju operacije na brojevima,...pri tom se koriste opći simboli.* (Gusić, 1995.) Druga definicija koju možemo naći u online enciklopediji glasi: *Algebra je grana matematike koja proučava opće brojeve i operacije među njima, umijeće računanja s nepoznatim veličinama, za razliku od aritmetike koja računa s poznatim veličinama.* (Proleksis enciklopedija online) Algebra je *grana matematike u kojoj se aritmetičke operacije i formalne manipulacije primjenjuju na apstraktne simbole, a ne na određene brojeve.* (Enciklopedija Britannica)
Kao što možemo vidjeti, u ovim definicijama algebra se ne razlikuje puno od aritmetike, možemo čak reći da je algebra *generalizirana* aritmetika. Bitna razlika je zapravo u tome da su u algebri brojevi reprezentirani nekim drugim simbolom, za razliku od aritmetike u kojoj imamo konkretne brojeve.

Načelno, algebru možemo promatrati na dvije razine: elementarna algebra i apstraktna algebra. U elementarnoj algebri samo promatramo algebarske izraze koji predstavljaju neku vrstu brojeva te koristimo uglavnom polinome koje često promatramo funkcijski, dok u apstraktnoj algebri aksiomatski definiramo strukture i proučavamo svojstva koja proizlaze iz aksioma na općenit način.

Elementarna algebra je najviše je zastupljena u osnovnoškolskom obrazovanju, za razliku od apstraktne algebre koja je primjerenija za srednju školu i fakultetsko obrazovanje. Bavi se temeljnim operacijama, faktorizacijom algebarskih izraza te rješavanjem jednostavnih jednadžbi. Dok se u aritmetici učenici susreću s brojevima i računskim operacijama u skupovima brojeva, u algebri je uz brojeve naglasak na uvođenju nepoznanica ($x, y, a, b...$), to jest varijabli. Te nepoznanice i varijable korisne su jer omogućavaju proučavanje matematičkih odnosa među različitim veličinama. Promotrimo sljedeći zadatak: *"Mario prodaje jabuke na tržnici. Kada proda jabuke u vrijednosti od 60kn, njegova zarada poveća se 4 puta. Kolika je bila njegova zarada prije prodaje?"* U ovom zadatku potrebno je prilikom prevođenja zadatka na matematički zapis, uvesti nepoznanicu koja će nam označavati traženu veličinu. Ako sa x označimo Mariovu zaradu prije prodaje, tada možemo napisati jednadžbu $x + 60 = 4 \cdot x$, iz koje lako izračunamo x. S pomoću varijabli možemo od konkretnog pojma prijeći na općenitiji (generalizirani). Na primjer, već u nižim razredima osnovne škole učenici uče da je $2 + 3$ isto što i $3 + 2$. Generalizacija tog svojstva poznatija je kao komutativnost zbrajanja, a isto vrijedi i za svojstva asocijativnosti i distributivnosti. Ta svojstva vrijede za sve realne brojeve. Navesti ćemo ta svojstva ovdje:

Asocijativnost zbrajanja $(a + b) + c = a + (b + c)$, za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$
Asocijativnost množenja $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$
Komutativnost zbrajanja $a + b = b + a$, za sve $a, b \in \mathbb{R}$
Komutativnost množenja $a \cdot b = b \cdot a$, za sve $a, b \in \mathbb{R}$
Distributivnost množenja prema zbrajanju $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, odnosno $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$

S druge strane, **apstraktna algebra** bavi se proučavanjem algebarskih struktura. Algebarske strukture uključuju grupe, polja, prstene, vektorske prostore i drugo. Da bismo bolje razumjeli pojam apstraktne algebre, vratimo se u prošlost. Godina je 1800. i već neko vrijeme ljudi su znali kako se rješavaju linearne, kvadratne, kubne pa čak i jednadžbe 4. stupnja. No, što je s jednadžbama stupnja većeg od 4? Evariste Galois bavio se tim pitanjem i s tom motivacijom uveo grupe. Ubrzo je postalo jasno kako su grupe vrlo važno otkriće u matematici. Ljudi su se počeli pitati mogu li im grupe pomoći i u rješavanju drugih problema. Tako je došlo do razvoja novih apstraktnih pojmova: prstena, polja, vektorskih prostora... Naravno, trebalo je mnogo godina i truda kako bi se uočila važnost generalnog i apstraktnog pristupa tim svojstvima. Također, pronađene su i nove strukture koje funkcioniraju po istim principima. Promotrimo sada definiciju algebre u užem smislu, u kojem se pod nazivom "algebra" podrazumijevaju određene algebarske strukture:

Asocijativna algebra nad poljem K je vektorski prostor $(V, +, \cdot)$ na kojem je definirano množenje $\times$ asocijativno, i takvo da je $(V, +, \times)$ prsten. Podsjetimo se sada što znače pojedini pojmovi koji se pojavljuju u našoj definiciji. Krenimo od pojma grupe kojeg smo već spomenuli kao osnovnu algebarsku strukturu.

Neprazan skup G s binarnom operacijom $\cdot$ naziva se **grupa** ako zadovoljava svojstva zatvorenosti, asocijativnosti, postojanja neutralnog elementa i postojanje inverznog elementa. Kažemo da je G Abelova ili komutativna grupa ako je zadovoljena komutativnost.

Za razliku od grupa gdje postoji samo jedna binarna operacija, kod prstena možemo naći dvije. **Prsten** je neprazan skup R s dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ koje nazivamo zbrajanje i množenje, koje za svaki $a, b, c \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju sljedeća svojstva: $(R, +)$ je Abelova grupa, množenje je asocijativno i distributivno u odnosu na zbrajanje slijeva i zdesna.

Posebna vrsta prstenova su polja. Najčešća polja s kojima se susrećemo u školi su polje racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva. **Polje** je komutativan prsten u kojem svaki element ima inverz u odnosu na množenje.

Vektorski prostor je Abelova grupa na kojoj je dano preslikavanje koje zovemo množenje skalarom, koje ima svojstva kvaziasocijativnosti, distributivnosti i neutralnosti jedinice.

Takve strukture pojavljuju se već i u školi, samo ih učenici ne nazivaju tako, poput prirodnih, cijelih i racionalnih brojeva. Ono što želimo reći algebra u užem smislu kao matematička struktura je jedan takav objekt.

1.2 Algebarsko mišljenje

Algebra je jedno od najopsežnijih i najviše istraženih područja u matematičkom obrazovanju. Tijekom proteklih godina mnogi su se matematičari bavili problemima vezanim s učenjem i poučavanjem algebre. Ukoliko se osvrnemo na primjere zadataka u raznim udžbenicima, uočit ćemo da je najčešće dan samo jedan način rješavanja zadataka. Zbog toga mnogi učenici formiraju mišljenje kako je samo navedeni način rješavanja točan te šablonski rješavaju zadatke vođeni danim primjerom. Takav pristup nije primjeren iz razloga što ne postoji univerzalni obrazac koji bi se mogao primijeniti u rješavanju svih zadataka. Iz navedenog proizlazi potreba da se učenike potiče na samostalno razmišljanje i razumijevanje procesa rješavanja zadataka, a ne samo slijepo učenje postupaka i formula napamet. Ovakav pristup učenju predstavlja početak razvoja algebarskog mišljenja; međutim, algebarsko mišljenje koje poznajemo danas podrazumijeva i više od navedenog. **Algebarsko mišljenje** je, sudeći po literaturi koja govori o tome, veoma teško u potpunosti razjasniti. Ono uključuje sposobnost prepoznavanja uzoraka, opisivanja odnosa među objektima te formiranje generalizacija najčešće vezanih uz temeljna svojstva brojeva. Promotrimo četiri aspekta algebarskog mišljenja s kojima se učenici susreću u nastavi matematike:

- pojam jednakosti,
- nepoznanice i jednadžbe,
- funkcije i nejednakosti,
- generalizacija i apstrakcija.

1.2.1 Pojam jednakosti

Znak jednakosti smatra se jednim od bitnijih simbola u matematici. Vrlo često u aritmetici i algebri nije usvojen na prikladan način, pa mnogi učenici smatraju izraze oblika $a + 8$ nepotpunima zbog izostanka znaka jednakosti. Kao što je navedeno iznad, znak jednakosti u aritmetici može predstavljati znak kojeg učenici interpretiraju kao uputu da se izraz s lijeve strane jednakosti tumači kao pitanje na koje se treba dati odgovor nakon znaka jednakosti, što je zapravo operacijsko shvaćanje znaka jednakosti. (Kieran, 1981.) Pogotovo u nižim razredima osnovne škole, učitelji često postavljaju zadatke oblika $46 + 91 = \boxed{}$ sa znakom jednakosti na kraju koji nam govori gdje trebamo napisati odgovor. Shvaćanje znaka jednakosti samo kao objekta koji nam govori da trebamo nešto izračunati nije prikladan za algebru. U algebri znak = može predstavljati i relaciju, to jest da objekti s lijeve i desne strane imaju jednaku vrijednost te jedan može zamijeniti drugi. Relacijsko razumijevanje znaka jednakosti vrlo je bitno u algebri budući da učenici bez takvog načina razmišljanja ne

shvaćaju izraze oblika $4 = 1 + 3$ jer je 4 odgovor, a ne pitanje. (Behr, Erlwanger, i Nichols 1980.) Također pojavljuju se problemi i u zadacima oblika $2 \cdot 6 + 3$, koje poneki učenici zapisuju kao $2 \cdot 6 = 12 + 3 = 15$, ili $4 + 3 = \square + 6$ gdje učenici umjesto 1 upišu u kvadratić 7 jer je to broj koji se dobije kada se izvrši operacija zbrajanja. Svi izrazi $1 + 2 = 3$, $3 = 1 + 2$, $3 = 3$. $1 + 2 = 2 + 1$, $1 + 2 = 1 + 2$ su ispravni, no mnogi učenici prihvaćaju samo prvi izraz, upravo zbog ne shvaćanja relacijskog pristupa znaku jednakosti. (Matić, Tutnjević 2013.)
Pojedini učenici s višim nivoom shvaćanja algebre ipak daju točne odgovore, no do tih odgovora dolaze na način da u zadacima oblika $9 + 5 = \square + 6$ razmišljaju kako je $9 + 5 = 14$, a budući da treba vrijediti $14 = \square + 6$, tada je $\square = 8$. S relacijskim razumijevanjem znaka jednakosti učenici mogu gledati jednakost kao cijelu te obrazložiti budući da je 6 za jedan više od 5, a dvije strane su jednake, $\square$ mora biti za jedan manje od 9, to jest 8. (Arcavi, Drijvers, Stacey 2017.) Iako se shvaćanje znaka jednakosti od operacijskog do relacijskog gradi kroz učenje matematike, taj proces iziskuje mnogo vremena i predanog rada. Učenike treba usmjeravati prema pravom zaključivanju, pa ćemo navesti neke zadatke koji nam pomažu u tome.

Primjer 1.2.1. *Zadaci istina/laž i izrazi otvorenog tipa:*

a) $4 = 1 + 3$	e) $5 = \square$
b) $5 + 1 = 7$	f) $6 = 8 - \square$
c) $9 = 9$	g) $\square + 4 = 6 + 3$
d) $6 + 2 = 7 + 1$	h) $9 = 3 + \square$ ili $6 + 3 = \square$

Zadaci oblika "Utvrdi je li dan izraz istinit ili lažan?" ostavljaju puno mogućnosti za diskusiju u cijelom razredu, dok izrazi otvorenog tipa mogu pružiti nastavnicima uvid u učenikovo razumijevanje znaka jednakosti, a oznaka $\square$ prethodi uvođenju nepoznanice. (Matić, Tutnjević 2013.)

1.2.2 Nepoznanice i jednadžbe

Već u prva četiri razreda osnovne škole učenici se upoznaju s aritmetikom i osnovnim računskim operacijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje). Problemi nastaju kada se s aritmetike prelazi na algebru budući da se aritmetika bavi računanjem s poznatim brojevima, dok se u algebri suočavamo s nepoznanicama i varijablama. U osnovnoškolskoj matematici učenici se susreću s gotovim procesima i konceptima rješavanja zadataka, bez razumijevanja teorijske i praktične pozadine. Učenici su u nižim razredima osnovne škole stekli znanja iz aritmetike koja prethode i potrebna su za razumijevanje algebre i razvijanje algebarskog mišljenja. U 5. i 6. razredu počinje se uvoditi pojam nepoznanice i jednadžbe, što je u našem obrazovnom sustavu zapravo trenutak gdje počinje algebra. Do tog trenutka, na mjestu nepoznanice, pojavljivali su se kvadratići ili upitnici. Tako smo na primjer imali zadatke oblika:

Primjer 1.2.2. *Izračunaj:*

$$78 + 20 = \boxed{} \qquad\qquad 50 + 41 = \boxed{}$$

Također, kvadratić je mogao biti i na nekom drugom mjestu, na primjer:

Primjer 1.2.3. *Izračunaj:*

$$34 + \boxed{} = 64 \qquad\qquad \boxed{} + 40 = 88$$

Važno je da učenici shvate kako zapravo nema nikakve razlike ukoliko umjesto kvadratića koristimo neko slovo, najčešće x. Iako nama sada ta jednakost izgleda kao $78 + 20 = x$, i dalje se ništa nije promijenilo, budući da i dalje tražimo jedan broj koji može doći na to mjesto x odnosno mjesto kvadratića.

Linearne jednadžbe prvi puta spominju se u 5. razredu osnovne škole. Često se koriste pri rješavanju problemskih zadataka, ponajviše zadataka s riječima. Učenicima često prevođenje riječi u matematički zapis predstavlja problem. U takvim zadacima prvo treba utvrditi što je nepoznanica te zatim postaviti i riješiti jednadžbu. Promotrimo primjer:

Primjer 1.2.4. *Ivan je zamislio neki broj. Pomnožio je taj broj s 8 i dodao mu 5 te dobio isti rezultat kao da je tom broju dodao 5 i rezultat pomnožio s 3. Koji je broj Ivan zamislio?*

Kod poučavanja linearnih jednadžbi, mnogi nastavnici koriste jednostavne primjere poput $x + 4 = 9$, koje učenici lako mogu riješiti intuitivnim pogađanjem. Broj koji treba dodati broju 4 da se dobije 9 učenicima je odmah očit, te ne razmišljaju kako bi trebali oduzeti 4 od 9 da bi dobili rješenje. Također, kod zadataka oblika $4x - 3 = 13$ učenici često oduzimaju 3 s obje strane jednadžbe kako bi se riješili broja 3 s lijeve strane, te dolaze do pogrešnog rješenja. Do takvih pogrešaka dolazi zbog pogrešnog shvaćanja da se na lijevoj strani jednadžbe treba "riješiti" svega osim nepoznanice, umjesto razmišljanja da trebaju djelovati suprotnom operacijom kako bi poništili oduzimanje. Sustavi linearnih jednadžbi obrađuju se u osmom razredu osnovne škole. Sustavi dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice rješavaju se s dvije metode: metodom supstitucije te metodom suprotnih koeficijenata. Važno je učenicima zadati što više primjera kako bi lakše odredili koja metoda više odgovara zadanom zadatku. Učenici na početku rješavaju već unaprijed postavljene sustave, dok se kasnije pojavljuju zadaci s riječima iz kojih treba postaviti sustav.

U 2. razredu srednje škole obrađuju se kvadratne jednadžbe, dok se kasnije spominju i logaritamske, trigonometrijske te eksponencijalne. Kvadratne jednadžbe učenici rješavaju na razne načine: faktorizacijom, koristeći formulu, metodom nadopunjavanja do potpunog kvadrata te grafički. Promotrimo neke od pogrešaka koje se pojavljuju kod rješavanja jednadžbi:

Primjer 1.2.5. *Riješi zadanu jednadžbu:* $x^2 - 9x = 0$.

Učenikovo rješenje:	Ispravno rješenje:
$x^2 - 9x = 0$	$x^2 - 9x = 0$
$x^2 = 9x \quad / : x$	$x \cdot (x - 9) = 0$
$x = 9$	$x = 0$ ili $x = 9$

Možemo primijetiti kako je učenik riješio zadatak dijeljenjem s x, te tako izgubio jedno rješenje $x = 0$. Nakon što učenici nauče formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe, često se podvrgavaju rješavanju zadataka koristeći samo nju bez obzira na to što možda postoji jednostavniji način. Učenici smatraju kako je formula uvijek prikladan način budući da nas uvijek dovodi do ispravnog rješenja. Učenike treba poticati na razmišljanje o različitim vrstama rješavanja, poput faktorizacije, a ne da se oslanjaju samo na formulu. Kao i kod ostalih tipova jednadžbi, zadaci s riječima, odnosno primjena učenicima predstavlja problem budući da im jednadžba više nije dana, već je moraju sami napisati. Pogledajmo primjer zadatka s riječima.

Primjer 1.2.6. *Bazen se puni s crvenom i plavom cijevi 8 sati. Kada bi se bazen punio samo crvenom cijevi trebalo bi 3 sata duže nego s obje. Za koliko vremena bi se bazen napunio kada bismo koristili samo plavu cijev?*

Zadaci ovakvog tipa predstavljaju učenicima problem budući da mnogi ne znaju kako započeti. Kod rješavanja ovakvih zadataka trebamo promatrati što se događa u jedinici vremena, to jest u jednome satu.

1.2.3 Funkcije i nejednakosti

Učenici se po prvi put s pojmom funkcije susreću u sedmom razredu, iako taj dio spada u prošireni sadržaj. Naime, u sedmom razredu obrađuje se samo pojam linearne ovisnosti koji se vrlo lako može povezati s funkcijom, no linearna funkcija definira se tek u prvom razredu srednje škole. Postoje različite reprezentacije linearne ovisnosti dviju veličina: simbolički, riječima, tablicom pridruženih vrijednosti ili grafički. Kvadratna funkcija počinje se uvoditi u drugom razredu srednje škole. Osim kvadratne funkcije, pojavljuju se i inverzne funkcije te ostale elementarne funkcije. U 3. razredu uvode se eksponencijalne, logaritamske funkcije te trigonometrijske funkcije, dok se u 4. razredu obrađuje pojam funkcije općenito. Iako je koncept funkcije jedna od fundamentalnih ideja moderne matematike, mnogi ga učenici teško shvaćaju. Kod učenja funkcije u školi dolazi do mnogih miskoncepcija. Promotrimo neke primjere koji učenicima predstavljaju problem:

Primjer 1.2.7. *Odredi $f(x+2)$ ako je $f(x) = x^2 + 3x - 4$.*

Učenikovo rješenje:	Ispravno rješenje:
$f(x) = x^2 + 3x - 4$	$f(x) = x^2 + 3x - 4$
$f(x+2) = x^2 + 3x - 4 + 2$	$f(x+2) = (x+2)^2 + 3(x+2) - 4$
$f(x+2) = x^2 + 3x - 2$	$f(x) = x^2 + 4x + 4 + 3x + 6 - 4$
	$f(x) = x^2 + 7x + 6$

Vidimo kako je učenik riješio zadatak samo dodavajući +2 na kraju, iz čega možemo vidjeti kako učenik nije dovoljno dobro shvatio pojam funkcije.

Primjer 1.2.8. *Zadana je funkcija $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Odredi vrijednost funkcije za $x = 3$.*

Učenikovo rješenje:	Ispravno rješenje:
$f(x) = x^2 + 3x + 2$	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
$f(x) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 2$	$f(3) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 2$
$f(x) = 9 + 9 + 2$	$f(3) = 9 + 9 + 2$
$f(x) = 20$	$f(3) = 20$

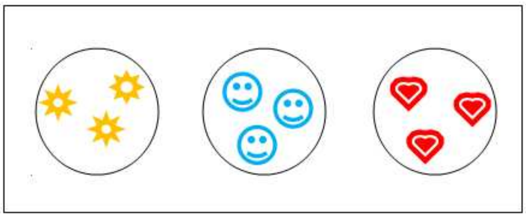
Ovo rješenje govori nam kako učenik razumije kako riješiti zadatak, no $f(x)$ promatra kao formulu ili pravilo. Učenik nije usvojio kako je $f(1)$ vrijednost funkcije u točki $x = 1$.

Nejednakosti se u obrazovanju pojavljuju još u nižim razredima osnovne škole. Počinje se s jednostavnim primjerima uspoređivanja brojeva, pa sve do rješavanja nejednadžbi i dokaza. Nejednakosti se rijetko ili vrlo malo spominju u udžbenicima za srednju školu, no zato ih možemo naći kao dodatan sadržaj te kao temu za natjecanje. Za što bolje razumijevanje nejednakosti, vrlo je bitno usvojiti vještinu manipuliranja algebarskim izrazima koja nam može pomoći u rješavanju i dokazivanju kompliciranijih zadataka. U 3. poglavlju ovog rada posvetit ćemo se malo više nejednakostima.

1.2.4 Generalizacija i apstrakcija

Generalizacija ili poopćavanje je prijelaz s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegovog nadskupa. (Z. Kurnik, Generalizacija 2000.) Prvo se kreće od nekog pojma kome je pridružen određen skup objekata, njegov opseg te se utvrđuje svojstvo svih elemenata zadanog skupa. Nakon toga promatra se općenitiji pojam, te se svojstvo prenosi na sve elemente dobivenog nadskupa ili se izgrađuje općenitije svojstvo. Budući da nije odmah jasno hoće li pri prenošenju to svojstvo ostati sačuvano, nužno je dokazati da to svojstvo vrijedi za sve elemente nadskupa. Prema tome, generalizacija ili poopćavanje je metoda kojom se izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje. [2] Od konkretnih situacija gradimo nove pojmove kroz generalizaciju i apstrakciju.

U osnovnoj školi nastava je većinom konkretna i induktivna, to jest učitelj razmatranjem konkretnih objekata i primjera te induktivnim zaključivanjem dolazi do apstrahiranih tvrdnji i generalizacija. Budući da se opća svojstva promatranih objekata izdvajaju pomoću generalizacije, iz toga možemo zaključiti kako je apstrakcija usko povezana s generalizacijom. Apstrakcija je misaono odvlačenje općeg bitnog svojstva promatranog objekta ili pojave od ostalih svojstava, nebitnih za određeno proučavanje, i odbacivanje tih nebitnih svojstava. (Z. Kurnik, Znanstveni okviri nastave matematike) Promotrimo jedan primjer gdje se učenici po prvi puta susreću s apstrakcijom:



Slika 1.1: Uzorci

Primjer 1.2.9. *Što je zajedničko skupovima sa slike?*

Svima im možemo pridružiti broj 3 budući da svi skupovi imaju jednak broj elemenata. U ovom razmišljanju koristili smo nekoliko razina apstrakcije: zapažanje, predodžba o broju 3 te formiranje apstraktnog pojma.

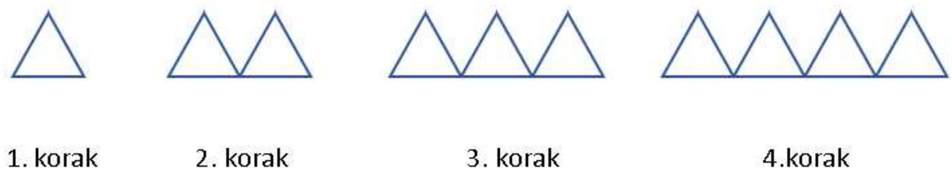
U nižim razredima osnovne škole nastavnik pomoću konkretnih primjera uvodi nove pojmove, te pomoću njihovih svojstava izvodi jednostavne generalizacije. Kasnije generalizacije postaju sve složenije, te mnogi učenici taj misaoni proces prijelaza s konkretnog na opće teško svladavaju. Uzorci imaju važnu ulogu kao most između generalizacije i algebre na osnovnoj razini obrazovanja, te omogućuju formiranje algebarskog mišljenja koje je osnova formalne algebre. Uzorak se može vidjeti kao prvi korak za generalizaciju, dok je generalizacija srce algebre (Hargreaves, Shorrocks-Taylor i Threlfall, 1998). Prema Reys, Suydam, Lindquist i Smith (1998) obrasci pomažu učenicima u razvoju vještina računanja, sređivanja i strukturiranja svojih strategija razmišljanja. Osim toga, oni imaju važnu ulogu u poboljšanju vještina komunikacije, zaključivanju i rješavanju problema (Tanışlı i Özdaş, 2009). Osim što generalizacija pomaže učenicima da razumiju simboliku reprezentacije i međusobno povezuju prethodno znanje o aritmetici, ona olakšava prijelaz s aritmetike na formalnu algebru. Budući da je prelazak na algebru lakši kroz generalizaciju aritmetike, učenici trebaju imati iskustva vezana uz uzorke iz predškolskog odgoja, te u poučavanje treba uključiti zadatke koji su usmjereni na figurativno i numeričko razumijevanje generalizacije.

Da bi se izveo istinit zaključak potrebno je pronaći uzorak u prikupljenim podacima te napraviti generalizaciju. Glavna karakteristika induktivnog zaključivanja je da se počinje s nizom posebnih (specifičnih) podataka te se oni koriste za stvaranje opće slike. Promotrimo neke zadatke vezane uz induktivni način zaključivanja primjerene za osnovnu školu.

Primjer 1.2.10. *Napiši pravilo za obrazac dan u tablici.*

BROJ	ČLAN NIZA
1	4
2	7
3	10
...	...
n	

Primjer 1.2.11.



a) Dovršite 5. i 6. korak uzorka.
b) Odredite koliko je štapića potrebno za 20. korak.
c) Pronađite opću formulu niza.

U skupu prirodnih brojeva također se uspostavljaju generalizacije tako da se razmatraju konkretni primjeri, a onda se izvode opće formule, poput zakona asocijativnosti, komutativnosti i drugih. Također se ti zakoni postupno iz skupa $\mathbb{N}$ prenose u šire skupove.

Kao što možemo vidjeti, postoji mnogo različitih generalizacija te su nam one veoma korisne u nastavi matematike. Naravno, svaku generalizaciju trebamo i dokazati budući da one ne moraju biti istinite. Promotrit ćemo primjer generalizacije u kojem vidimo da induktivni način zaključivanja može dovesti do neistinite tvrdnje.

Primjer 1.2.12. *Dana je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 - n + 41$. Dokažite da je vrijednost funkcije $f(n)$ prost broj za svaki nenegativni prirodni broj n.*

Promatrajmo početne vrijednosti funkcije: $f(1) = 1 - 1 + 41 = 41$, $f(2) = 4 - 2 + 41 = 43$, $f(3) = 9 - 3 + 41 = 47$, $f(4) = 16 - 4 + 41 = 53$, ...
Sve dobivene vrijednosti su prosti brojevi, pa možemo postaviti hipotezu: Vrijednost funkcije $f(n)$ prost je broj za svaki nenegativni prirodan broj n.
Promotrimo sada vrijednost funkcije za $n = 41$: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, što nije prost broj. Vidimo da je naša opća hipoteza pogrešna.

1.3 Uloga tehnologije u poučavanju algebre

U današnje vrijeme sve se više spominju prednosti tehnologije u svakodnevnom životu, ali i u nastavi. Kalkulatori, tableti, e-knjige, ali i različiti računalni programi poput CAS (Wolfram Mathematica, Geogebra...) nam uvelike pomažu u rješavanju problemskih zadataka te modeliranju. Tehnologija također omogućuje učenicima da se usredotoče na matematičke ideje i rješavanje problema na načine koji su često nemogući bez upotrebe takvih alata. Tehnologija je ključna i nastavnicima kojima omogućuje bržu pripremu te različite reprezentacije nastavnog sadržaja u svrhu olakšanja učenja. Iako nam korištenje tehnologije uveliko pomaže, korištenje kalkulatora nije uvijek ključno za nastavu, pogotovo na osnovnoškolskoj razini. U nekim trenutcima bolje je da učenici pokažu svoje znanje bez korištenja digitalnih alata, kako bi stekli vještine računanja. Kod učenja i vježbi računanja učenici ne bi trebali koristiti kalkulator, no s druge strane prilikom istraživanja te problemskih zadataka kalkulator će ubrzati proces rješavanja i dolaženja do raznih zaključaka. Osim kalkulatora, mnoge e-knjige i online udžbenici mogu biti korisni učenicima za dublje razumijevanje nastavnog sadržaja i daljnji razvoj matematičkog znanja. Također, na internetu su dostupni mnogi animirani sadržaji, videozapisi i igre za vježbu kod kuće ili samoprocjenu znanja. Kao što je već spomenuto, tehnologija nam uvelike pomaže pri stvaranju raznih zaključaka te formuliranju pretpostavki.
Promotrimo primjer korištenja tehnologije kao poveznicu pri rješavanju jednog problema na različite načine:

Primjer 1.3.1. *Riješi sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:*

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ y - x &= -3 \end{aligned}$$

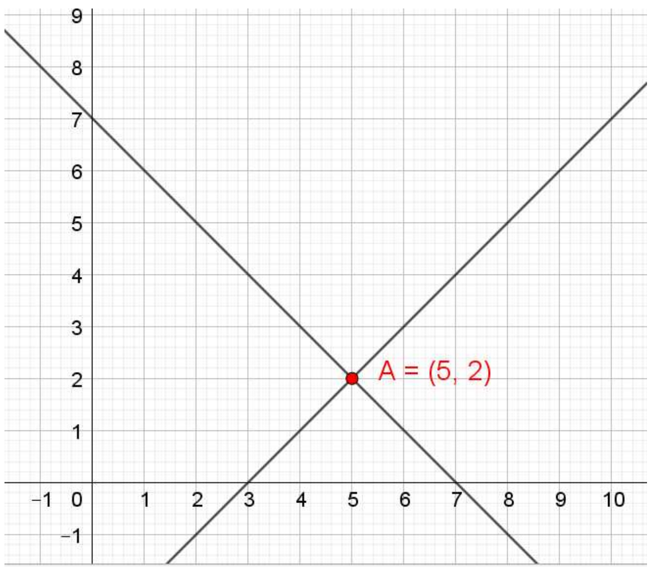
Rješenje:

<u>Prvi način (algebarski)</u>

$$
\begin{array}{c}
x + y = 7 \\
\underline{y - x = -3} \\
x = 7 - y \\
\underline{y - x = -3} \\
y - (7 - y) = -3 \\
y - 7 + y = -3 \\
2y = 4 \rightarrow y = 2 \\
x = 7 - 2 = 5 \\
\text{Rješenje je uređeni par } (5, 2)
\end{array}
$$

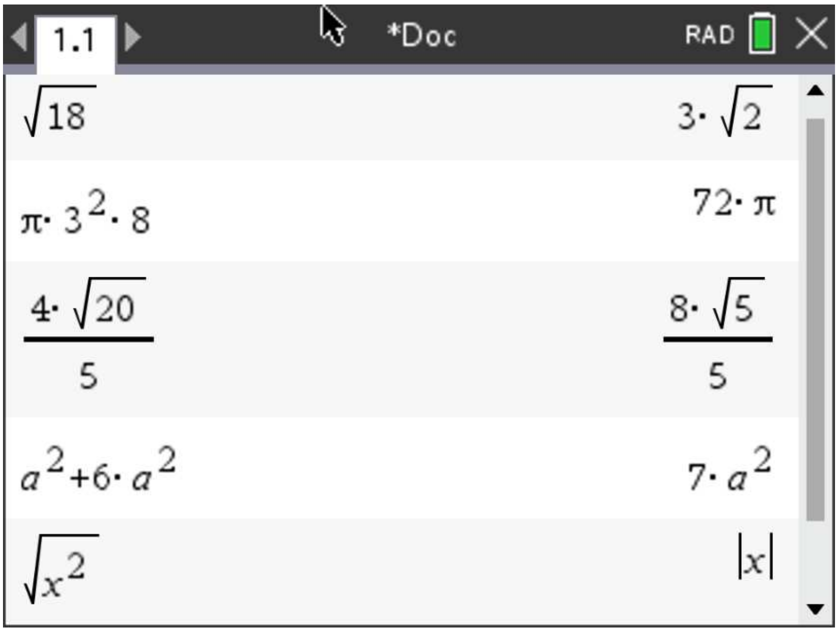
<u>Drugi način (grafički, korištenjem tehnologije)</u>

Pretvorimo prvo jednadžbe u eksplicitni oblik jednadžbe pravca. $y = -x + 7$ i $y = x - 3$. Zatim nacrtajmo te pravce u koordinatnom sustavu koristeći Geogebru. Koristeći kvadratnu mrežu možemo očitati koordinate točke presjeka $(5, 2)$, što znači da je rješenje sustava $x = 5, \quad y = 2$.



Slika 1.2: Prikazano korištenjem programa dinamične geometrije

Geogebra je samo jedan od programa koji nam može pomoći u nastavi. Postoje razni računalni algebarski sustavi (CAS) poput Wolfram Mathematica, Mathlab, Maple i drugi, koji prema (Drijvers, 2003.) vrše algebarske izračune i manipulacije formulama kako bi poboljšali nastavu matematike. Promotrimo neke primjere koji nam bolje ilustriraju razliku između kalkulatora s i bez CAS sustava.



Slika 1.3: TI Nspire CX CAS Premium Teacher Software

Mnogi današnji kalkulatori već imaju opciju racionalizacije korijena te skraćivanja razlomaka bez pretvaranja u decimalni broj. Ipak, mnogi kalkulatori ne mogu vršiti operacije s algebarskim izrazima, to jest većinom se u zapisima oblika $a^2 + 6a^2$ traži konkretna vrijednost za a kako bi kalkulator mogao izvršiti naredbu, što za CAS kalkulator nije problem kao što možemo vidjeti na slici. Također, kod CAS sustava možemo primijetiti kako naredbu $\sqrt{x^2}$ vraća kao $|x|$, dok obični kalkulatori ne prepoznaju takav zapis. Sposobnost da se s jednadžbama računa simbolično, a ne numerički je zapravo glavna razlika između kalkulatora s i bez CAS sustava. Osim primjera koje smo već spomenuli CAS sustavi nam omogućuju proširivanje i faktorizaciju izraza, pojednostavljivanje, uvođenje supstitucije, određivanje kompozicije funkcija i drugo.

Algebra u kurikulumu

Ciljevi, očekivani ishodi učenja i sadržaj matematičkog obrazovanja nalaze se u matematičkom kurikulumu. Sve više zemalja posljednjih godina podlaže svoje kurikulume matematike promjeni kako bi naglasak stavili na kompetencije, vještine te primjenu matematike u svakodnevnom životu.

2.1 Hrvatski kurikulum

U matematičkom kurikulumu objavljenom u Narodnim novinama 2019., domene su podijeljene po srodnim područjima pa možemo vidjeti kako algebra nije samostalna domena, već obuhvaća i koncept funkcije. U ovom poglavlju navesti ćemo ishode propisane u kurikulumu za domenu Algebra i funkcije po razredima, kako bismo mogli usporediti hrvatski kurikulum s finskim.
Ishodi od 1. do 4. razreda uglavnom se odnose na domenu Brojevi, što se odnosi na znanja iz aritmetike, a budući da uvođenje algebre u nastavu matematike zapravo počinje tek u višim razredima osnovne škole taj dio bit će nam fokus. U 5. i 6. razredu po prvi puta možemo vidjeti početak uvođenja algebre u nastavu, iako se pojam nepoznanice spominje i ranije u obrazovanju.

Osnovnoškolsko (primarno) obrazovanje

Na početku 5. razreda učenici većinom ponavljaju nastavni sadržaj 4. razreda, te počinju s nekim lakšim primjerima uvođenja slovnog prikaza nepoznanice. Promotrit ćemo primjere u kojima se umjesto "kvadratića" pojavljuju slova kao nepoznanice, koji se provlače kroz obrazovanje, te predstavljaju bitan sadržaj od 5. do 8. razreda osnovne škole. Promotrimo prvo peti razred, te primjere koji nam prikazuju učenikovo razumijevanje nepoznanice te prevođenje zadataka u simbolički jezik:

Primjer 2.1.1. *Koji izraz pokazuje 5 puta x?*

a) $5x$ *b)* $5 + x$ *c)* $x - 5$

Primjer 2.1.2. *Koji izraz pokazuje 6 manje od zbroja 7 i m?*

a) $7 - 6 + m$ *b)* $(7 + m) - 6$ *c)* $7m - 6$

Razred	Odgojno-obrazovni ishodi
5.	MAT OŠ B.5.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu. MAT OŠ B.5.2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.
6.	MAT OŠ B.6.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.

Tablica 2.1: Tablica ishoda vezanih uz algebru za 5. i 6. razred OŠ

Uvođenje linearnih jednadžbi kreće u 5. razredu, iako učenici već u nižim razredima osnovne škole rješavaju jednadžbe pomoću kvadratića kao što je opisano, a da toga nisu ni svjesni. Poučavanje linearnih jednadžbi započinje s problemskim zadacima. Pojavljuju se zadaci s duljinama pločica, kao što se može vidjeti u sljedećem primjeru iz udžbenika za 5. razred:

Primjer 2.1.3. *Luka slaže lego kocke. Želi uz žutu pločicu kojoj je duljina 12 čepića položiti dvije pločice različitih boja tako da budu iste duljine kao žuta pločica. Dodao je plavu pločicu duljine 8 čepića. Kolika bi trebala biti duljina druge pločice izražena u broju čepića?*

Učenici zapisuju taj problem koristeći "kvadratiće" što im je poznato iz nižih razreda.
Taj broj otkrivamo pitajući se koliko nam treba od 8 do 12, ili koliko je 12 umanjeno za 8, te se lako vidi da je traženi broj 4.

$$8 + \blacksquare = 12$$

Naravno, ovaj najjednostavniji primjer predstavlja samo uvod u jednadžbe. Kasnije zadaci postaju složeniji te, dolazi do zamjene ”kvadratića” s prikladnijim slovnim simbolom. U 5. razredu učenici se susreću i sa skupovima brojeva te korištenjem Vennovih dijagrama za prikazivanje veza i odnosa među tim skupovima. Važno je da učenici savladaju pojam praznog skupa te broj elemenata skupa odnosno kardinalitet skupa.
U 6. razredu učenici upoznaju cijele i pozitivne racionalne brojeve. Naravno, jednadžbe koje se pojavljuju tada uključuju koeficijente iz skupova $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}^{+}$, poput sljedećeg primjera.

Primjer 2.1.4. *Riješi jednadžbu:* $\frac{2}{3}(x-4) = \frac{1}{4}(x-2)$.

Također, počinju se pojavljivati jednostavne jednadžbe s apsolutnom vrijednošću. Apsolutna vrijednost je učenicima novi pojam, pa im razumijevanje tog koncepta predstavlja izazov, što se vidi i kasnije kod rješavanja nejednadžbi s apsolutnom vrijednošću.

U 7. i 8. razredu učenici se susreću s mnogim problemima poput algebarskih izraza u skupu racionalnih brojeva ili sustava dviju linearnih jednadžbi ukoliko nisu usvojili prijašnja znanja iz aritmetike i algebre. Počinju se pojavljivati jednadžbe koje imaju više rješenja,ili pak nemaju rješenja.

Razred	Odgojno-obrazovni ishodi
7.	MAT OŠ B.7.1. Računa s algebarskim izrazima u Q. MAT OŠ B.7.2. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu. MAT OŠ B.7.3. Primjenjuje proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost. MAT OŠ B.7.4. Primjenjuje linearnu ovisnost.
8.	MAT OŠ B.8.1. Računa s algebarskim izrazima u R. MAT OŠ B.8.2. Primjenjuje razmjer. MAT OŠ B.8.3. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu. MAT OŠ B.8.4. Rješava i primjenjuje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. MAT OŠ B.8.5. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu.

Tablica 2.2: Tablica ishoda vezanih uz algebru za 7. i 8. razred OŠ

Kao što možemo vidjeti, u 7. razredu uvode se algebarski izrazi u skupu racionalnih brojeva. U algebarskim izrazima kao i kod jednadžbi, koristimo se slovima koja predstavljaju neki broj. Taj broj možemo mijenjati, te se zato naziva varijabla. Učenici u 7. razredu počinju upotrebljavati naziv koeficijent, te uče kako je koeficijent broj koji se množi varijablom. Napominje se razlika između jednočlanih izraza oblika (x, $4a$, $-5b$...) i dvočlanih izraza oblika ($x + y$, $3x - 5b$, $2 - x$...). U 7. razredu uvode se i omjeri te proporcionalne veličine. Proporcionalnost se uvodi na različitim primjerima iz svakodnevnog života kako bi učenici naučili zaključivati pomoću omjera. Nakon proporcionalnosti radi se obrnuta proporcionalnost te primjeri obrnuto proporcionalnih veličina poput vremena potrebnog da se obavi neki posao te broja radnika koji rade taj posao.

Primjer 2.1.5. *Radnici grade neboder. Ako radi samo jedan radnik, neboder će izgraditi za 45 dana. Koliko je dana potrebno da se izgradi neboder ako radi 4,5 ili 6 radnika?*

Kao što možemo primijetiti, veličine u ovom zadatku su obrnuto proporcionalne. Ako je ukupni posao konstantan, te ga radi više radnika, neboder će se brže izgraditi pod pretpostavkom da svi radnici rade jednakom brzinom. Na kraju se uvodi pojam i zapis linearne ovisnosti, te veličine koje su zavisne ili nezavisne. Učenici tablično prikazuju linearnu ovisnost, te ju crtaju grafički u koordinatnom sustavu u ravnini. U 8. razredu proširujemo skup racionalnih brojeva do skupa realnih brojeva. Tako ponavljamo već naučeno, s tim da dozvoljavamo da koeficijenti i rješenja jednadžbe budu iz većeg skupa. Posebna pažnja pridaje se sustavima dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Kod uvođenja sustava bitno je učenicima objasniti kako rješenje našeg sustava mora zadovoljavati obje jednadžbe. Pojavljuju se i neodređeni i nemogući sustavi jednadžbi. Kod neodređenih sustava bitno je naglasiti kako nepoznanice (varijable) mogu poprimiti bilo koju vrijednost, a sustav može imati i beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 2.1.6. *Riješi dani sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:*

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 3x - y &= 6 \end{aligned}$$

Kvadratna jednadžba i njezina primjena također ulazi u nastavni sadržaj 8. razreda. Učenici uče razliku između linearne i kvadratne jednadžbe te kako postoje dva rješenja jednadžbe $x^2 = k$ gdje je k nenegativan realni broj. Tim putem zapravo malo po malo dolazimo do pojma funkcije, koja se prvi puta spominje u 1. razredu srednje škole. U tablici 2.3 promotrimo ishode vezane uz domenu algebra i funkcije za srednjoškolsko gimnazijsko obrazovanje.

Razred	Odgojno-obrazovni ishodi
1.	MAT SŠ B.1.1. Primjenjuje potencije s cjelobrojnim eksponentima. MAT SŠ B.1.2. Računa s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima. MAT SŠ B.1.3. Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave. MAT SŠ B.1.4. Primjenjuje linearne nejednadžbe. MAT SŠ B.1.5. Povezuje različite prikaze linearne funkcije.
2.	MAT SŠ B.2.1. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu. MAT SŠ B.2.2. Analizira funkciju. MAT SŠ B.2.3. Analizira grafički prikaz funkcije. MAT SŠ B.2.4. Primjenjuje kvadratnu funkciju.
3.	MAT SŠ B.3.1. Primjenjuje pravila za računanje s potencijama racionalnoga eksponenta. MAT SŠ B.3.2. Analizira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju. MAT SŠ B.3.3. Primjenjuje eksponencijalnu i logaritamsku funkciju. MAT SŠ B.3.4. Modelira eksponencijalnom i logaritamskom jednadžbom. MAT SŠ B.3.5. Primjenjuje svojstva trigonometrijskih funkcija. MAT SŠ B.3.6. Analizira graf trigonometrijske funkcije. MAT SŠ B.3.7. Primjenjuje trigonometrijske funkcije. MAT SŠ B.3.8. Primjenjuje trigonometrijske jednadžbe.
4.	MAT SŠ B.4.1. Primjenjuje aritmetički i geometrijski niz. MAT SŠ B.4.2. Računa limes niza. MAT SŠ B.4.3. Analizira svojstva funkcija. MAT SŠ B.4.4. Tumači značenje limesa funkcije u točki. MAT SŠ B.4.5. Povezuje definiciju derivacije funkcije u točki s problemom tangente i brzine. MAT SŠ B.4.6. Primjenjuje derivaciju funkcije u problemskim situacijama. MAT SŠ B.4.7. Povezuje derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije.

Tablica 2.3: Tablica ishoda vezanih uz algebru za SŠ

Kao što možemo vidjeti u 1. razredu srednje škole počinju se uvoditi potencije te učenici uče pravila za množenje i dijeljenje potencija jednakih baza i eksponenata. Također, uz algebarske izraze pojavljuju se i algebarski razlomci. Napominje se kako u algebarskim razlomcima pretpostavljamo da je nazivnik različit od nule budući da s nulom nema smisla dijeliti što učenici znaju iz osnovne škole. S algebarskim razlomcima računa se na isti način kao i s običnim razlomcima koje su učenici naučili u 7. razredu. Nakon algebarskih razlomaka ponavlja se proporcionalnost te linearne jednadžbe i sustavi. To predstavlja uvod u linearne nejednadžbe. Kod linearnih nejednadžbi učenici se susreću s raznim izazovima kod rješavanja. Mnogi učenici zaborave promijeniti znak nejednakosti kod množenja s negativnim brojem, ili pak ne pridaju pažnju uvjetima. U 2. razredu srednje škole, učenici primjenjuju kvadratnu jednadžbu te ju rješavaju koristeći formulu. Također se kvadratne jednadžbe rješavaju nadopunjavanjem do potpunog kvadrata ili faktorizacijom. Važno je da učenik nauči različite načine rješavanja, a ne samo koristeći formulu. Učenici promatraju i različite oblike kvadratnih jednadžbi te njezina rješenja povezuju sa diskriminantom. Pojavljuju se i različite funkcije te njihovi grafovi. Govori se o domeni, kodomeni, nultočkama te tjemenima funkcije. Na kraju, učenici primjenjuju kvadratnu funkciju u zadacima iz svakodnevnog života. Treći razred srednje škole fokusira se na potencije, te eksponencijalne i logaritamske funkcije. Naravno, crtaju se i proučavaju i njihovi grafovi i svojstva. Također počinju se uvoditi trigonometrijske funkcije. Kao i u 2. razredu, rješavaju se zadaci u kojima treba primijeniti naučeno. U 4. razredu dolazimo do nizova, limesa te derivacija funkcije. Važno je dobro uvježbati pravila za deriviranje funkcija kako bi učenici s lakoćom savladali problemske zadatke. Učenici povezuju derivacije s problemima tangente i brzine s kojima su već upoznati u fizici.

2.2 Finski kurikulum

Finski obrazovni sustav prepoznaje značajne utjecaje matematičkog obrazovanja na intelektualni rast učenika. Prema nacionalnom temeljnom kurikulumu za osnovno obrazovanje, svrha nastave matematike je potaknuti učenike na razvoj matematičkog mišljenja te ih podučiti matematičkim konceptima i metodama rješavanja problema. Primarno obrazovanje u Finskoj traje 9 godina, te nakon njega slijedi više srednje obrazovanje u trajanju od 3 godine koje nije obavezno. Visoko obrazovanje odvija se na veleučilištima, a dostupno je i obrazovanje odraslih. Reforma koja se pojavila 1994. godine smatra se glavnom obrazovnom reformom u Finskoj. Jedna od glavnih promjena bila je to da je izrada kurikuluma i provedba promjena u obrazovnom sustavu pripala školama. Rezultati prvog PISA testiranja pojavili su se 2001. godine, te je Finska u području matematike bila jedna od zemalja koje su postigle najbolje rezultate. Nakon objave rezultata, svjetski mediji htjeli su saznati princip rada finskih škola te tajnu finskog obrazovanja. Finsko obrazovanje postalo je predmet rasprave diljem Europe. Pomoglo je i to što je Finska zadržala svoje izvanredne rezultate i sljedeća 3 kruga PISA testiranja 2003., 2006. i 2009. godine.
Finci su do 1970. godine bili slabije obrazovani te su mnoge reforme i izmjene koje su provedene dovele su do obrazovne politike koju možemo vidjeti danas. Također, društveno nepristran i inkluzivan odgojno-obrazovni sustav svim građanima omogućio je pravo na obrazovanje, te jednake obrazovne mogućnosti. Velika važnost u učenju matematike pridaje se razvijanju pozitivnih stavova prema matematici te postizanju učeničkog samopouzdanja. U finskom kurikulumu naslov Algebra koristi se za početne razrede, a Algebra i Funkcije za nižu sekundarnu razinu u trajanju od 3 godine, to jest od 7. – 9. razreda.

Osnovnoškolsko (primarno) obrazovanje

Na temelju nedavnog istraživanja o ranoj algebri i napredovanju učenja, Hemmi i ostali (2015) identificirali su pet takozvanih velikih ideja povezanih s algebarskim razmišljanjem. Ove velike ideje sastoje se od sljedećih kategorija:

- ekvivalencije, izrazi, jednadžbe i nejednadžbe (EEEI),
- osnovna aritmetika (GA),
- funkcijsko razmišljanje (FT),
- matematičko rasuđivanje (PR),
- varijable (VAR).

Promotrimo tablice raspodjela tema povezanih sa svakom od kategorija:

RAZRED	1	2	3	4	5	6	7	8	9
EEEI			Rješavanje i proučavanje jednadžbi eksperimentiranjem i logičkim zaključivanjem.				Formiranje i rješavanje jednadžbi prvog stupnja. Sastavljanje i rješavanje nepotpunih jednadžbi drugog stupnja. Rješavanje sustava jednadžbi grafički i algebarski. Rješavanje nejednadžbi prvog stupnja. Pojam varijable. Izračunavanje vrijednosti matematičkog izraza. Formiranje i sređivanje eksponencijalnih izraza. Pojam polinoma. Zbrajanje, oduzimanje i množenje polinoma. Modeliranje i rješavanje problema. Sastavljanje i rješavanje jednadžbi prvog stupnja i nepotpunih kvadratnih jednadžbi. Korištenje algebarskog razmišljanja u rješavanju problema.		

Tablica 2.4: Ekvivalencije, izrazi, jednadžbe i nejednadžbe

Možemo primijetiti kako u prvom i drugom razredu nisu zastupljene ekvivalencije, izrazi, jednadžbe i nejednadžbe. Od 3. do 6. razreda počinje uvođenje jednadžbi te rješavanje jednostavnih jednadžbi. Možemo vidjeti kako su proučavanje i eksperimentiranje primarne metode rješavanja, te se eksplicitno potiče logičko razmišljanje. Također, upotreba inverznih operacija važna je za provjeru rješenja i zaključivanja kod rješavanja jednadžbi. Od 7. – 9. razreda od učenika se očekuje da će prijeći na sofisticiranije i formalnije metode rješavanja jednadžbi. Obrađuje se i analitički i grafički pristup rješavanju jednadžbi prvog i drugog stupnja, kao i sustava jednadžbi. Posebna značajka finskog nižeg sekundarnog kurikuluma je to što se spominje rješavanje nejednadžbi prvog stupnja, što se u hrvatskom matematičkom kurikulumu pojavljuje tek u srednjoj školi. Kao što možemo vidjeti, kod uvođenja polinoma, učenici zbrajaju, oduzimaju i množe polinome dok je dijeljenje isključeno. Povezano s tim, spominje se formiranje i sređivanje eksponencijalnih izraza. Naglasak je na rješavanju problema u svim razredima u finskom kurikulumu, ali rješavanje problema nije povezano s algebrom na osnovnoj razini (1. – 6. razred). Na toj se razini obrađuju problemi povezani s poznatim situacijama i od učenika se očekuje da prezentiraju i raspravljaju o različitim rješenjima. Istraživački grupni rad također je propisan kroz sve razrede te je zastupljen najviše od 7. – 9. razreda. Na nižoj sekundarnoj razini, modeliranje i rješavanje problema obrađuje se općenitim primjerima, a učenici trebaju oblikovati i rješavati jednadžbe prvog stupnja i nepotpune jednadžbe drugog stupnja. Algebarsko razmišljanje također se spominje u vezi s primjenom matematike i programiranja u rješavanju problema.

<table>
<tr><td>RAZRED</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>GA</td><td colspan="3">Načela i karakteristike osnovnih računskih operacija.
Odnos množenja i dijeljenja.
Komutativnost i asocijativnost u odnosu na zbrajanje i množenje.</td><td colspan="3">Relacije među računskim operacijama.
Mentalno i pisano računanje korištenjem svojstava računskih operacija.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tablica 2.5: Osnovna aritmetika

U prvim razredima 1. – 3. proučavaju se svojstva operacija. Tako se obrađuje odnos množenja i dijeljenja kao i u hrvatskom kurikulumu. Pojavljuju se zadaci tipa $2 \cdot 3 = 6$ jer je $6 : 3 = 2$. Spominje se korištenje komutativnosti i asocijativnosti za zbrajanje i množenje. U finskim udžbenicima, jednakosti i nejednakosti su predstavljene formalnim znakovima ($>, <, =$) od samog početka 1. razreda i koriste se dosljedno kroz sva tri razreda. Prvo se uspoređuju samo brojevi, a kasnije se uspoređuju i izrazi. U 4. razredu pojavljuje se mentalno i pisano računanje korištenjem svojstava asocijativnosti i komutativnosti. Na primjer, od učenika se traži da smisle dva različita izraza koji su međusobno jednaki popunjavanjem praznih mjesta ili s izrazima u kojima nedostaju operacije, kao što je prikazano u sljedećem primjeru:

Primjer 2.2.1.

$$\square + \square = \square + \square$$
$$2 + \square = 5$$
$$3 \square 4 = 7$$

Naravno, u primarnom obrazovanju još uvijek se ne spomiju generalizacije ni pravila. Kao što možemo vidjeti, ne koriste se nepoznanice, nego praznine ili razni oblici.

RAZRED	1	2	3	4	5	6	7	8	9
FT PR	Pronalaženje pravilnosti.			Uočavanje pravilnosti nizova brojeva. Nastavak niza brojeva slijedeći njegovo pravilo.			Uvježbavanje i produbljivanje vještina sa nizovima. Pojam funkcije. Interpretacija i crtanje grafa funkcija prvog i drugog stupnja. Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost. Pojam nagiba pravca. Pojam slobodnog člana. Određivanje nultočki funkcija. Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost. Korištenje proporcionalnosti u rješavanju problema.		

Tablica 2.6: Funkcijsko razmišljanje i matematičko rasuđivanje

Radi bolje preglednosti, Funkcijsko razmišljanje i matematičko rasuđivanje stavili smo u jednu tablicu, budući da se matematičko rasuđivanje sastoji samo od dvije teme koje već možemo naći u funkcijskom razmišljanju. Kod funkcijskog razmišljanja učenici se prvo susreću s obrascima-finski kurikulum naglašava aktivnosti povezane s pravilnostima kao što su brojčani nizovi kroz sve razrede, 1-9. Jasno je da postoji progresija kroz razrede: u 1.-2. razredu učenici uče pronaći pravilnosti; u 3. – 6. razredu uče nastaviti brojevne nizove sljedeći pravila; a u 7.–9. razredu produbljuju svoje vještine oblikovanja i ispitivanja brojčanih nizova. Funkcijske relacije detaljno se obrađuju od 7.-9. razreda. Linearne funkcije spominju se eksplicitno, dok se od kvadratnih funkcija obrađuju samo osnove i crtanje grafova. Iako se tablice i dijagrami obrađuju paralelno sa statistikom, koordinatni sustav pojavljuje se već od 4.-9. razreda. Izrazito se naglašavaju nultočke funkcije te ovisnost o položaju i obliku grafova funkcije, te koncept nagiba pravca. Kao što je već spomenuto, počinje se uvoditi proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost, koja je više zastupljena u ideji matematičkog rasuđivanja.

RAZRED	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VAR				Pojam(koncept) nepoznanice.			Koncept nepoznanice i varijable.		

Tablica 2.7: Varijable

VAR se sastoji od dvije podteme - nepoznanice i varijable. U finskom kurikulumu nepoznanice se razmatraju od 4. do 6. razreda, dok se u 7. razredu počinje uvoditi koncept varijable koji se proteže sve do 9. razreda.

Kao što se može vidjeti, finsko osnovnoškolsko obrazovanje ne razlikuje se puno od hrvatskog. U prva 3 razreda spominje se većinom aritmetika, dok se algebra i algebarski način razmišljanja počinje pojavljivati od 7. do 9. razreda. Najveće razlike pojavljuju se kod pojma funkcije, koji se u finskom kurikulumu uvodi već u osnovnoškolskom obrazovanju, dok se u hrvatskom kurikulumu spominje tek u srednjoj školi. Obrađuje se funkcijska ovisnost, nultočke, te crtanje grafova funkcija prvog i drugog stupnja. Također, u finskom kurikulumu pojavljuju se i polinomi te operacije s njima, izuzev dijeljenja koje se javlja u srednjoj školi.

Srednješkolsko (sekundarno) obrazovanje

Budući da u Finskoj svaka srednja škola ili gimnazija izrađuje svoj kurikulum, u ovom radu osvrnut ćemo se na kurikulum srednje škole u Lahti. Kao što je već spomenuto, srednja škola sastoji se od 3 razreda, a u školi koju promatramo postoji deset predmeta standardne matematike. Njih šest (MAB1-MAB6) je obvezno i podijeljeno po razredima. Obvezni predmeti moraju se polagati prije ispita državne mature koji se provodi na kraju srednje škole. Promotrit ćemo i proučiti obavezne tečajeve koji su potrebni za polaganje državne mature, dok ćemo neobavezne tečajeve samo navesti. U prvom razredu gimnazije u Finskoj može se primijetiti izrazita sličnost s hrvatskim kurikulumom. Poneke razlike možemo primijetiti u finskom kurikulumu gdje algebarski izrazi i razlomci nisu toliko izraženi. Također, nejednadžbe se ne spominju u prvom razredu dok su u hrvatskom kurikulumu zastupljene zajedno s njihovom primjenom.

Već u drugom razredu srednje škole mogu se vidjeti jasne razlike između finskog i hrvatskog kurikuluma. Dok je u hrvatskom kurikulumu fokus na kvadratnoj funkciji i njenoj primjeni, u Finskoj se uz to proučavaju i derivacije i nizovi. Također, prisutni su i polinomi stupnja većeg od 2, te se obrađuje minimum i maksimum funkcije na segmentu, dok se u hrvatskom kurikulumu ispitivanje toka funkcije pojavljuje tek u 4. razredu. Linearne jednadžbe dviju varijabli te sustavi jednadžbi, a čak i nejednadžbe mogu se naći u drugom razredu finskog obrazovnog sustava.

Treći razred, te ujedno i zadnji prije mature usporedit ćemo s hrvatskim trećim i četvrtim razredom. Možemo primijetiti kako se u Finskoj ekonomska matematika uvodi čak i u gimnazijama, dok se u Hrvatskoj pronalazi samo u strukovnim školama. To učenicima uvelike pomaže u svakodnevnom životu te omogućuje ekonomsku i financijsku pismenost. Neke od tema koje se uče uključuju: izračune indeksa, troškove, novčane transakcije, kredite ali i oporezivanje. Također produbljuje se znanje o pojmu postotaka. Učenici koji iz srednje škole izlaze sa znanjem kako koristiti bankovni sustav ostvaruju bolje prilike za ranije osamostaljenje te donošenje promišljenih odluka. (Pravilnik srednje škole u Lahti) Vektori i trigonometrija pojavljuju se u sklopu matematičkih modela 3, što je i u hrvatskom kurikulumu glavni sadržaj 3. razreda. U četvrtom razredu srednje škole u hrvatskom kurikulumu pojavljuju se nizovi, limesi i derivacije, što je u finskom kurikulumu rasprostranjeno kroz sva tri razreda. Kao glavnu razliku možemo primijetiti da se u finskom obrazovnom sustavu uvodi poseban predmet-Ususret maturi, koji učenicima služi kao priprema za nadolazeću državnu maturu i ponavljanje naučenog.

S obzirom na gore opisani sadržaj, hrvatski i finski kurikulum zapravo su vrlo različiti. Razlike se mogu primijetiti većinom u raspodjeli nastavnog sadržaja po razredima. Jedna od glavnih razlika finskog kurikuluma u odnosu na hrvatski je ta što su finski ciljevi obrazovanja usmjereni na različitost odgoja i obrazovanja, sudjelovanje u društvu te zapošljavanje i cjeloživotno učenje, dok se hrvatska fokusira na stjecanje znanja i vještina važnih za život i individualni razvoj učenika. (V. Buljubašić-Kuzmanović, 2006.) Također, mnogi učitelji u Finskoj koriste razna pomagala i aktivnosti u nastavi kako bi približili nastavni sadržaj učenicima, što se u hrvatskom obrazovnom sustavu ne može toliko primijetiti. Bitno je naglasiti važnost domaće zadaće u finskom obrazovnom sustavu. Na početku svakog sata provjerava se zadaća te učenici koji su riješili sve zadatke prezentiraju ostalim učenicima kako bi ponovili gradivo prošlog sata. Učeničko vrednovanje također je veoma bitan čimbenik u finskim školama, budući da se od 2001. godine ne provode standardizirani završni ispiti znanja kao u Hrvatskoj. Finska vlada primijetila je da učenici uče napamet kako bi položili ispit, a učitelji poučavaju s namjerom da učenici polože ispit, te zbog toga postoje razni oblici vrednovanja umjesto ispita. Učenici se vrednuju kako bi se poboljšao proces ne samo učenja već i poučavanja od strane učitelja, no vrednuju se i učitelji kako bi se dobila povratna informacija o sustavu. Sva djeca diljem Finske ocjenjuju se na individualiziranoj osnovi i sustavu ocjenjivanja od strane njihovog učitelja.

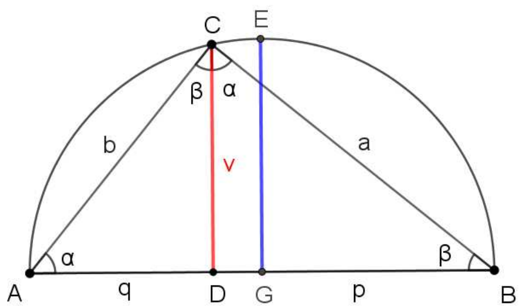
Algebarsko mišljenje i nejednakosti

Kao što je već spomenuto, zadaci iz nejednakosti najčešće se pojavljuju na raznim natjecanjima, dok su u školskoj nastavi matematike manje zastupljeni. U ovom poglavlju promotrit ćemo neke zadatke s natjecanja te primjenu nejednakosti među njima. Također, spomenuti ćemo i Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost te optimizaciju kvadratnom funkcijom.

3.1 Nejednakosti među sredinama

Jedna od najosnovnijih nejednakosti je upravo $x^2 \geq 0$, koja nam kaže kako su kvadrati realnih brojeva uvijek ne negativni. To nam zapravo predstavlja osnovnu ideju koju i učenici na redovnoj nastavi mogu savladati te nam ona predstavlja temelj od kojeg krećemo promatrati osnovne nejednakosti.

Aritmetička sredina poznata nam je još od nižih razreda osnovne škole. Mnogi učenici koriste je kako bi izračunali prosjek ocjena na kraju školske godine. Geometrijska, harmonijska i kvadratna sredina malo su nam manje poznate. Promotrimo zašto se tako zovu te kako ih računamo.

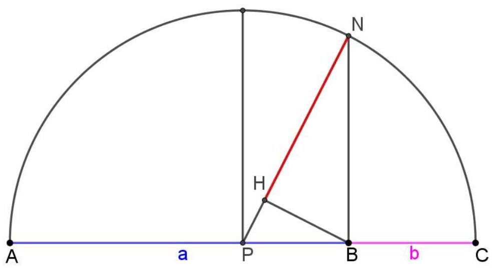


Slika 3.1: Geometrijska sredina, izrađeno u programu dinamične geometrije Geogebra

Neka je ABC pravokutan trokut duljine kateta a, b i duljine hipotenuze c. Označimo s D nožište visine spuštene na hipotenuzu trokuta, a s p i q ortogonalne projekcije kateta na hipotenuzu. Budući da su trokuti ABC i CDB slični, slijedi $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$, odnosno $a = \sqrt{cp}$. Na isti način dolazimo do preostalih tvrdnji $b = \sqrt{cq}$ i $v = \sqrt{pq}$. Na slici također možemo primijetiti i aritmetičku sredinu označenu plavom bojom.

Definicija 3.1.1. *Neka su a, b, g pozitivni realni brojevi. Broj g jest* ***geometrijska sredina*** *brojeva a i b ako i samo ako vrijedi $\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$, to jest $g = \sqrt{ab}$. (Geometrijska sredina, Edutorij)*

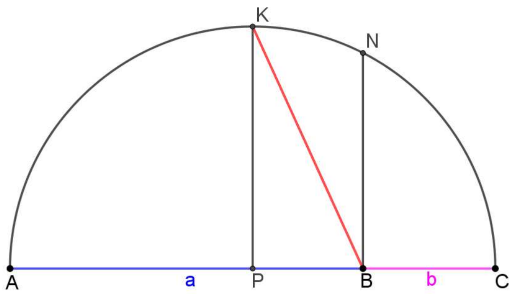
Neka su dane dvije dužine $|AB| = a$ i $|BC| = b$, te neka je P polovište kružnice promjera $\overline{AC}$. Točka N je sjecište kružnice i okomice povučene iz B na AC. Povučemo li okomicu it točke B na pravac PN, dobit ćemo sjecište H. Dužina HN naziva se harmonijska sredina dužina $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$.



Slika 3.2: Harmonijska sredina, izrađeno u programu dinamične geometrije Geogebra

Definicija 3.1.2. *Recipročna vrijednost aritmetičke sredine recipročnih vrijednosti zadanih brojeva naziva se* ***harmonijska sredina****. (Harmonijska sredina, Struna)*

Neka su dane dvije dužine $|AB| = a$ i $|BC| = b$, te neka je P polovište kružnice promjera $\overline{AC}$. Točka K sjecište je okomice iz polovišta dužine $\overline{AC}$ na tu dužinu. Duljina dužine $\overline{BK}$ naziva se kvadratna sredina dužina $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$.



Slika 3.3: Kvadratna sredina, izrađeno u programu dinamične geometrije Geogebra

Definicija 3.1.3. *Srednja vrijednost koja je kvadratni korijen zbroja kvadrata zadanih vrijednosti podijeljen s brojem vrijednosti naziva se* ***kvadratna sredina****. (Kvadratna sredina, Hrvatska enciklopedija)*

Najpoznatije nejednakosti su upravo one među kvadratnom, aritmetičkom, harmonijskom i geometrijskom sredinom. Promotrimo generalizacije tih sredina:

Definicija 3.1.4. *Neka su dani pozitivni realni brojevi $x_1, ..., x_n$. Tada imamo:*

Kvadratna sredina	$K = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$
Geometrijska sredina	$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$
Aritmetička sredina	$A = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$
Harmonijska sredina	$H = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$

Teorem 3.1.5. *Za pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ vrijedi sljedeća nejednakost među sredinama*

$$K \geq A \geq G \geq H,$$

pritom, jednakost vrijedi za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

A-G nejednakost može se dokazati na više načina: analitički, geometrijski i algebarski. U srednjoj školi najčešće se koriste sredine između dva ili tri broja, a u kasnijem obrazovanju njihove generalizacije.
Promotrimo algebarski dokaz A-G nejednakosti za slučaj kada je $n = 2$, to jest nejednakosti

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Za svaka dva pozitivna realna broja a_1 i a_2 vrijedi nejednakost $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$.
Kvadriranjem dobivamo: $a_1 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} + a_2 \geq 0$.
Sada slijedi: $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 \cdot a_2}$.
Kada podijelimo s 2, dobijemo: $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$. Geometrijski dokaz već smo vidjeli na slici; plava dužina nije kraća od crvene.
Promotrimo sada neke primjere nejednakosti u zadacima s natjecanja, te algebarski način razmišljanja kod rješavanja.

Primjer 3.1.6. *Dokaži da za bilo koja dva realna broja x i y vrijedi:*

$$3x(x+2y) \leq (2x+y)^2.$$

Rješenje:

$$\begin{gathered}
3x(x+2y) \leq (2x+y)^2 \\
3x^2 + 6xy \leq 4x^2 + 4xy + y^2 \\
x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\
(x-y)^2 \geq 0
\end{gathered}$$

Kod rješavanja važno je prvo pročitati zadatak te razumjeti što se traži. Prvi instinkt kod rješavanja nam je sve izmnožiti te prebaciti na jednu stranu i srediti. Posljednje treba prepoznati kako smo dobili kvadrat razlike te da je kvadrat nekog broja uvijek veći ili jednak nuli.

Primjer 3.1.7. *Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi*

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-b+1).$$

(Državno natjecanje 2012., 1. razred SŠ, A varijanta)

Prvo rješenje:
Transformirajmo desnu stranu nejednakosti:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-b+1) &= a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 \\
&= (a+1)^2 + (b-1)^2 + c^2
\end{aligned}$$

Koristeći nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine, dobivamo

$$\sqrt{\frac{(a+1)^2+(b-1)^2+c^2}{3}} \geq \frac{(a+1)+(b-1)+c}{3}$$

odnosno

$$(a+1)^2 + (b-1)^2 + c^2 \geq \tfrac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Na prvi pogled, kod ovog zadatka prva ideja koju pomislimo nam je "riješiti" se zagrada ili raspisati nešto. Budući da u zadatku imamo kvadrat trinoma što ne želimo raspisivati zbog mješovitih članova koje ćemo dobiti, promotrimo desnu stranu. Vidimo da možemo lijepo grupirati dan izraz kako bismo dobili $(a+1)^2+(b-1)^2+c^2$. Možda nije odmah jasno što treba učiniti, no budući da vidimo kvadrate brojeva, to bi nas moglo asocirati na K-A nejednakost. Nakon primjene nejednakosti, dobije se upravo ono što je trebalo dokazati.

Drugo rješenje:

Dana nejednakost ekvivalentna je s

$$3(a^2+b^2+c^2+2(a-b+1))-(a+b+c)^2 \geq 0$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
&3(a^2+b^2+c^2+2(a-b+1))-(a+b+c)^2\\
&=3(a^2+b^2+c^2+2a-2b+2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)\\
&=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc+6a-6b+6\\
&=(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ac)+6a-6b+6\\
&=(a^2+b^2-2ab+4a-4b)+(b^2+c^2-2bc-2b+2c)+(c^2+a^2-2ac-2c+2a)+6\\
&=(a^2+b^2-2ab+4a-4b+4)+(b^2+c^2-2bc-2b+2c+1)+(c^2+a^2-2ac-2c+2a+1)\\
&=(a-b+2)^2+(b-c-1)^2+(c-a-1)^2
\end{aligned}$$

Ova suma je očito nenegativna, čime je jednakost dokazana.

Drugi način dokazivanja ove nejednakosti, ipak se svodi na raspisivanje kvadrata trinoma. Prebacimo sve na jednu stranu te raspišemo sve što se može. Ovaj način rješavanja odmah nas asocira na nenegativnost, to jest dokaz da je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan. Pokušajmo sada grupirati pribrojnike kako bismo dobili kvadrate. Težina ovog načina rješavanja je zapravo u tom grupiranju. Učenici često uspiju raspisati sve, no problem nastaje kod toga što grupirati zajedno kako bi dobili kvadrate. Već kod kvadrata binoma učenicima je teško grupirati pribrojnike, dok se u ovom zadatku radi čak o trinomima. Neki učenici možda će pokušati grupirati ove pribrojnike kako bi dobili kvadrate binoma, no ubrzo će uvidjeti kako to nije dobar način budući da će uvijek ostati nešto "negrupirano". Ovaj zadatak učenicima bi se možda činio jednostavan, no zapravo taj zadnji korak, to jest grupiranje predstavlja velik problem te učenici često nemaju dovoljno iskustva u rješavanju.

Primjer 3.1.8. *Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi* $xyz = 1$. *Dokaži nejednakost:*

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

(Državno natjecanje 2016., 3. razred SŠ, A varijanta)

Rješenje:
Na lijevoj strani nejednakosti možemo razlomke rastaviti i grupirati članove istog oblika. Tako dobivamo izraz:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right)$$

Možemo vidjeti da je ovaj zadatak puno kompliciraniji od prethodnog. Učenicima je možda prva ideja da probaju "srediti" obje strane, no ubrzo shvaćaju kako to ne vodi do rješenja. Iz A-G nejednakosti slijedi

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^3y^3z^3}} = 3$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} &\geq x^3 + y^3 + z^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + 3 \\
&= \left(x^3 + \frac{1}{y^3} + 1\right) + \left(y^3 + \frac{1}{z^3} + 1\right) + \left(z^3 + \frac{1}{x^3} + 1\right) \\
&\overset{\text{A-G}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}} + 3\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3}} + 3\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3}} \\
&= 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right).
\end{aligned}$$

Sljedeća ideja je lijevu stranu nejednakosti zapisati kao što je to prikazano u rješenju. Vidimo kako se sada pojavljuje $x^3 + y^3 + z^3$, a u zagradi $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}$ što nas asocira na H-A ili A-G nejednakost. Učenicima je većinom bliža A-G nejednakost pa je primjenimo. Ako A-G nejednakost primjenimo na $x^3 + y^3 + z^3$ na kraju sređivanja dobit ćemo kako je lijeva strana početne nejednakosti veća ili jednaka 9, što nam očito nije dovoljno dobra ocjena. Pokušajmo onda sa $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}$. Kada primjenimo A-G nejednakost dobijemo $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^3y^3z^3}} = 3$. Naravno, učenicima je tada prirodno zapisati $\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3} \geq x^3+y^3+z^3+6$. Sada se možemo pitati vrijedi li $x^3+y^3+z^3+6 \geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$. To nije baš jednostavno pokazati da ne vrijedi, ali možemo pronaći kontraprimjer $x=1$, $y=\frac{3}{2}$ i $z=\frac{2}{3}$. Ako rastavimo $2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)$ na $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}$ i samo na jedan izraz primjenimo $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^3y^3z^3}} = 3$, dobit ćemo $\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3} \geq x^3+y^3+z^3+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+3$. Sljedeće, možemo primjetiti kako trebamo dokazati da je lijeva strana veća ili jednaka $3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$, to jest, trebamo grupirati dobiven izraz kako bi nam se u ponovnoj primjeni A-G nejednakosti pojavljivali pribrojnici $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ i $\frac{z}{x}$. Budući da su nam potrebna tri pribrojnika, to nas asocira na primjenu tri A-G nejednakosti. Zapišimo tri kao $1+1+1$ kako bi mogli lakše kombinirati. Za prvi pribrojnik $\frac{x}{y}$ kombinirati ćemo x^3, $\frac{1}{y^3}$ i 1, za drugi pribrojnik $\frac{y}{z}$, kombinirat ćemo y^3, $\frac{1}{z^3}$ i 1 a za treći pribrojnik preostalo. Primjenom A-G nejednakosti dobivamo nejednakost koju je i trebalo dokazati.

3.2 Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost

Do sada smo spomenuli nejednakosti među sredinama, no postoji još jedna zanimljiva nejednakost o kojoj ćemo više ispričati u ovom poglavlju. Ta nejednakost zove se Cauchy-Schwarz-Bunjakovski (CSB). Koristi se u mnogim dijelovima matematike poput matematičke analize, linearne algebre te euklidskih prostora.

Promotrimo iskaz CSB nejednakosti:

Teorem 3.2.1. *Za sve realne brojeve a_i i b_i, $i = 1, ..., n$ vrijedi:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = k \cdot b_i$, za neki $k \in \mathbb{R}^+$, za sve $1 \leq i \leq n$.

Dokaz (I.Ilišević, 1996.):
Promotrimo kvadratnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Budući da je f nenegativna funkcija ($f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$), njena diskriminanta D ne može biti pozitivna, tj.

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

odakle slijedi tražena nejednakost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

Promotrimo sada neke od zadataka koji pri rješavanju koriste CSB nejednakost:

Primjer 3.2.2. *Neka su a i b realni brojevi takvi da je* $3a + 4b = 1$. *Pokažimo da je tada* $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{25}$.

Rješenje:

U ovom zadatku možemo vidjeti direktnu primjenu CSB nejednakosti. Vrijedi

$$\begin{aligned} 1 = (3a + 4b)^2 &\leq (3^2 + 4^2)(a^2 + b^2) \\ 1 &\leq 25(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{25}.$$

Primjer 3.2.3. *Riješite sustav jednadžbi:*

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 38, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 38. \end{aligned}$$

Rješenje:

Budući da se u ovom zadatku pojavljuje sustav jednadžbi, nije nam očita ideja da ćemo koristiti nejednakosti. Prirodnije nam je pokušati riješiti zadatak koristeći slučaj jednakosti, no imamo dvije jednadžbe s tri nepoznanice što je također kognitivno zahtjevno. Rješavanje koristeći CSB nejednakost rijetko će se pronaći u matematičkim tekstovima, no promotrimo što dobivamo uvrstimo li potonje u CSB nejednakost:

$$(3x + 2y + 5z)^2 \leq (3^2 + 2^2 + 5^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$$

to jest,

$$\begin{aligned}(3x + 2y + 5z)^2 &\leq (9 + 4 + 25) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)\\(3x + 2y + 5z)^2 &\leq 38 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)\\38^2 &\leq 38 \cdot 38\end{aligned}$$

Dakle, $38 = 38$.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5} = k, \ k \in \mathbb{R}$$

to jest, $x = 3k, \ y = 2k, \ z = 5k, \quad k \in \mathbb{R}$. Tada iz $3x + 2y + 5z = 38$ dobivamo $9k + 4k + 25k = 38$, dakle $k = 1$. Stoga je uređena trojka $(3, 2, 5)$ jedino rješenje danog sustava. Provjerimo rješenje uvrštavanjem u početni sustav:

$$\begin{aligned}3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 &= 38\\9 + 4 + 25 &= 38\\38 &= 38\\3^2 + 2^2 + 5^2 &= 38\\9 + 4 + 25 &= 38\\38 &= 38.\end{aligned}$$

3.3 Optimizacija kvadratnom funkcijom

Optimizacijom se koristimo kod problema s različitim opcijama od koje trebamo izabrati najbolju, tj. optimalnu uz poštivanje zadanih ograničenja. Najčešće tražimo minimum ili maksimum neke funkcije na danom intervalu. Počnimo s klasičnim primjerom:

Primjer 3.3.1. *Zemljište pravokutnog oblika potrebno je ograditi s 3 strane ogradom zadane duljine, tako da je njegova površina najveća.*

Rješenje (prvi način):

Označimo zadanu duljinu ograde s D. Tada imamo: $x + 2y = D$. Izrazimo li $x = D - 2y$ i uvrstimo u formulu za površinu $P = x \cdot y$ dobivamo izraz kojim možemo interpretirati površinu kao funkciju jedne varijable $P = (D - 2y) \cdot y$.
Učenici 4. razreda srednje škole, ovaj zadatak mogli bi riješiti primjenom derivacije, dok će učenici 2. razreda rješavati zadatak koristeći tjeme kvadratne funkcije.
Tjeme računamo po formuli:

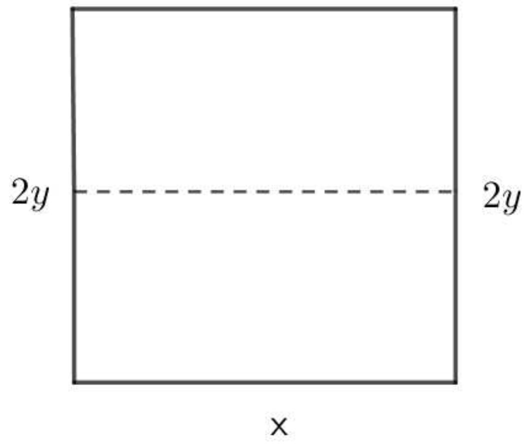
$$T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

gdje su a, b, i c koeficijenti u kvadratnoj funkciji $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Uvrstimo li vrijednosti za a, b, c dobivamo da su koordinate tjemena: $T = \left(\frac{D}{4}, \frac{D^2}{8} \right)$.

Budući da je $a < 0$, funkcija će imati maksimum, te učenici uočavaju kako je za stranicu $y = \frac{D}{4}$, površina najveća i iznosi $P_{max} = \frac{D^2}{8}$. Druga stranica tada iznosi $x = D - 2y = D - 2 \cdot \frac{D}{4} = \frac{D}{2}$, tj. $x = 2y$.
Ako zadatak rješavamo primjenjujući A-G nejednakost, zaključujemo sljedeće. Znamo da vrijedi $x \cdot 2y \leq \frac{1}{4} \cdot (x+2y)^2 = \frac{D^2}{4}$, tj. $P = x \cdot y \leq \frac{D^2}{8}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 2y$.

Rješenje (drugi način):
Drugi način rješavanja ovog problema, svodi se na traženje pravokutnika maksimalne površine sa duljinama stranica x i $2y$ koje smo dobili tako što smo dodali još jedan sukladan pravokutnik, kao što je prikazano na slici.



Možemo vidjeti da iako nam je zadan poluopseg, to je zapravo ekvivalentno sa zadatkom kada je zadan cijeli opseg. Složili smo dva pravokutnika u jedan veliki pravokutnik kojem je sada zadan cijeli opseg $2x + 4y = 2D$.
Sada možemo opet pomoću A-G nejednakosti ili kvadratne funkcije zaključiti da je najveća površina upravo kada je taj veći pravokutnik kvadrat, što neki učenici mogu nagađati i na temelju simetrije. Dakle, treba vrijediti $x = 2y$.
Naravno, ovaj zadatak predstavlja nam samo uvod u optimizaciju. Takvi problemi sada se nastavljaju analogonima u tri dimenzije. Promotrimo prvo slučaj za valjak.

Primjer 3.3.2. *Farmer gradi silos u koji će spremiti pšenicu. Koji je najveći volumen koji može dobiti uz zadano oplošje ako je silos u obliku valjka?*

Rješenje(prvi način):
Oplošje i volumen valjka računaju se sljedećim formulama:

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi h$$
$$V = r^2\pi h$$

Budući da nam je oplošje zadano, označimo ga sa O, to jest $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$.

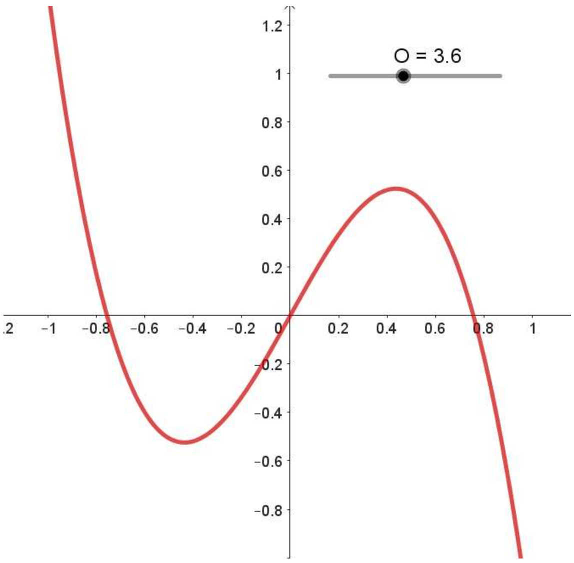
Izrazimo sada visinu h te ju uvrstimo u formulu za volumen.

$$2r\pi(r + h) = O$$
$$r + h = \frac{O}{2r\pi}$$
$$h = \frac{O}{2r\pi} - r$$

Uvrštavanjem u formulu za volumen dobivamo:

$$V = r^2\pi\frac{O}{2r\pi} - r^3\pi$$
$$V = \frac{rO}{2} - r^3\pi$$

Dobili smo funkciju trećeg stupnja u ovisnosti o r. Učenicima je možda teško računski odrediti nultočke i tok funkcije, pa graf mogu dobiti pomoću tehnologije.



Slika 3.4: Graf funkcije $\frac{rO}{2} - r^3\pi$, Geogebra

Derivirajmo funkciju kako bismo odredili njezine ekstreme:

$$V(r) = \frac{O}{2}r - r^3\pi$$
$$V'(r) = \frac{O}{2} - 3r^2\pi$$

Kada izjednačimo funkciju s 0 dobit ćemo ekstreme:

$$0 = \frac{O}{2} - 3r^2\pi$$
$$r^2 = \frac{O}{6\pi}$$
$$r = \mp\sqrt{\frac{O}{6\pi}}$$

Budući da tražimo maksimum funkcije, iz grafa, ali i budući da r mora biti pozitivan, možemo uočiti da trebamo uzeti $r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}$.

Promotrimo vrijednost volumena u toj točki, to jest maksimalni volumen koji se traži u zadatku:

$$V(r) = \frac{O}{2}r - r^3\pi$$

Nakon uvrštavanja $r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}$, dobivamo:

$$V\left(\sqrt{\frac{O}{6\pi}}\right) = \frac{\sqrt{O^3}}{3\sqrt{6\pi}}$$

Rješenje (drugi način):
Ovaj zadatak također možemo riješiti primjenom A-G nejednakosti. Znamo formule za oplošje i volumen, te da nam je oplošje konstantno, pa ga označimo sa O. Pitanje nam je kako rasporediti izraze u formuli za oplošje kako bismo dobili volumen. Promotrimo oplošje: $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$. Učenici će možda kao prvi način pokušati s dvije baze i plaštom:

$$\frac{r^2\pi + r^2\pi + 2r\pi h}{3} \geq \sqrt[3]{2r^5\pi^3 h},$$

što nam neće dati vezu s obujmom budući da ispod korijena želimo dobiti nešto oblika r^2h.

Promotrimo sada jednostavniji problem,u kojem nam je zadan kvadar s oplošjem O te mu treba maksimizirati volumen. Taj problem pomoći će nam kao strategija rješavanja problema valjka.

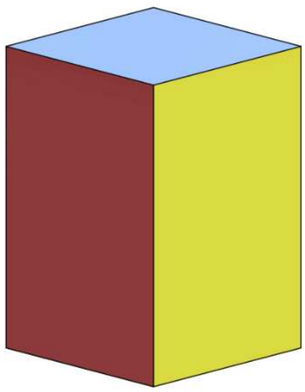
Formule za oplošje i obujam kvadra su:

$$O = 2(ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$

Možemo primjetiti kako je vrlo jednostavno primjeniti A-G nejednakost na ”baze” kvadra *ab*, *bc* i *ac*.

$$\frac{ab + bc + ac}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}$$
$$\frac{\frac{O}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$
$$\frac{O}{6} \geq \sqrt[3]{(abc)^2} \geq \sqrt[3]{V^2}$$

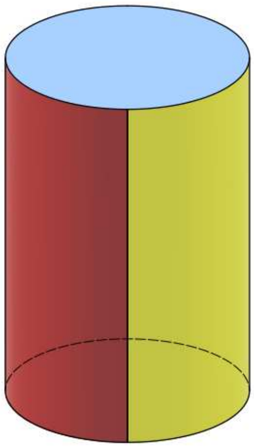
Jednakost vrijedi ako: $\frac{O}{6} = \sqrt[3]{V^2}$ to jest, $V = \sqrt{\frac{O^3}{216}}$



Slika 3.5: Kvadar, izrađeno u programu Autodesk Inventor 2022

Ova 3 člana koja smo koristili u A-G nejednakosti zapravo nam predstavljaju 3 ”baze” kvadra, na slici crvenu, plavu i žutu. Isto možemo primijeniti i na valjak.

Geometrijsko razmišljanje možemo promotriti na sljedećoj slici:



Slika 3.6: Valjak, izrađeno u programu Autodesk Inventor 2022

Pokušajmo sada na isti način riješiti ovaj zadatak s valjkom. Algebarski način razmišljanja nam govori o tome kako učenici trebaju imati osjećaj o ocjenjivanju da bi došli do ovog načina, to jest trebaju znati koliko r i h im treba kako bi dobili što žele. Iz formule za obujam vidimo da nam treba dva r i jedan h, ali u redu je i da uzmemo četiri r i dva h. Promatrajući sliku možemo uočiti kako smo dvije baze uzeli kao jednu cjelinu, a plašt podijelili na dva dijela-crveni i žuti, vodeći se primjerom za kvadar.

Sada vidimo kako nam je ovaj način koristan budući da dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{2r^2\pi + r\pi h + r\pi h}{3} &\geq \sqrt[3]{2\pi(r^2\pi h)^2}, \\ \frac{D}{3} &\geq \sqrt[3]{2\pi V^2}. \end{aligned}$$

Kada raspišemo ovu nejednakost dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{D}{3} &\geq \sqrt[3]{2\pi V^2} \\ \left(\frac{D}{3}\right)^3 &\geq 2\pi V^2 \\ \frac{D^3}{54\pi} &\geq V^2 \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je:

$$V = \sqrt{\frac{D^3}{54\pi}} = \frac{\sqrt{D^3}}{3\sqrt{6\pi}}$$

što smo vidjeli i u prvom načinu rješavanja.
(Inspirirano idejom s predavanja M. Bašića u Puli, dostupno na `http://md-istra-skup-pula.blogspot.com/2021/02/12-strucno-metodicki-skup-11-13112021.html`)

Bibliografija

[1] F. M. Bruckler, *Povijest matematike*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2022.

[2] I. Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb, 1995.

[3] Proleksis enciklopedija, dostupno na: `https://proleksis.lzmk.hr/7845/` (listopad 2018.)

[4] Enciklopedija Britannica, Benton, SAD, 1976.

[5] C. Kieran, *The learning and teaching of school algebra-Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, New York, 1992., 390.–419.

[6] Matić, Tutnjević, *Algebarski koncepti u nastavi matematike*, Poučak, 14(55), 33.-34.

[7] A. Arcavi, P. Drijvers, K. Stacey, *The learning and teaching of Algebra: Ideas, insights and activities*, Routledge, London, 2016.

[8] Z. Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola, 2000., 147.-148.

[9] Z. Kurnik, *Znanstveni okviri nastave matematike*, Element, Zagreb, 2009.

[10] M. Hargreaves, D. Shorrocks-Taylor, J. Threlfall, *Children's strategies with number patterns*, Educational studies, 1998., 315.-330.

[11] D. Tanish, A. Ozdas, *The strategies of using the generalizing patterns of primary school 5th grade students*, Educational sciences, 2009., 1485.-1490.

[12] P. Sahlberg, *Lekcije iz Finske*, Školska knjiga, Zagreb, 2012.

[13] Pravilnik srednje škole u Lahti, dostupno na: `https://tiirismaanlukio.fi/web/wp-content/uploads/sites/2/2015/01/TIIRISMAA-HIGH-SCHOOL-COURSE-DESCRIPTIONS-2014-2015.pdf`

[14] U. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Velduis, *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Freudenthal Group and Freudenthal Institute, Ultrecht University, Netherlands, 2019., 2039.-2081.

[15] V. Buljubašić-Kuzmanović, *Što se od školovanja očekuje u Hrvatskoj, a što u Finskoj*, Hrčak, Život i škola, 2006.. 29.-45.

[16] I. Ilišević, *Čebiševljeva nejednakost*, Osječki matematički list, 2004.

[17] M. Cindrić, I. Mišurac, *MATEMATIČKA MREŽA 2- udžbenik matematike s dodatnim digitalnim sadržajima u drugom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, 2020.

[18] Predmetni kurikulum Matematike za osnovne škole i gimnazije, NN 2019., dostupno na `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html` (listopad 2022.)

Sažetak

Algebra i funkcije jedna je od pet matematičkih domena koje se spominju u hrvatskom kurikulumu. Neophodno je da učenici izgrade temelje dovoljno rano u obrazovanju kako bi im kasnije bilo lakše razumjeti algebru. Što je to algebra i algebarsko mišljenje? Koji nam sve alati pomažu u razvoju algebarskog mišljenja kod učenika? Kako prijeći s induktivnog načina razmišljanja za konkretne primjere do apstraktnog? Ovo su samo neka od pitanja na koja ćemo se osvrnuti u ovom radu. Proučit ćemo elemente algebarskog mišljenja, te ih razjasniti i potkrijepiti primjerima. Čitateljima ćemo približiti sličnosti i razlike hrvatskog i finskog matematičkog kurikuluma s naglaskom na algebru. Također, spomenuti ćemo i primjenu tehnologije i CAS sustava u nastavi matematike te njihovu ulogu kod rješavanja različitih problema. U nastavku ćemo istaknuti razne nejednakosti i sredine te njihovu primjenu kroz zadatke s natjecanja, a spomenuti ćemo i Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost. Za kraj, promotrit ćemo optimizaciju kvadratnom funkcijom i općenite primjere zadataka vezane uz minimizaciju ili maksimizaciju funkcije.

Summary

Algebra and functions are one of the five mathematical domains important for a student's education mentioned in the Croatian curriculum. It is of utmost importance for students to build a foundation early enough in their education to understand algebra better in the later parts of education. What is algebra and algebraic thinking? Which tools can help teachers encourage algebraic thinking among students? How do students switch from inductive reasoning to abstract thinking? Those are some questions that we will discuss in this paper. We will analyze elements of algebraic thinking, explain them and support them with examples. We will talk about similarities and differences between Croatian and Finnish mathematical curriculum, mostly focusing on algebra. We will also briefly mention the use of technology and CAS systems in teaching of mathematics and their application on solving different problems. Continuing on, our focus will be on different types od inequalities and means and their use in competitions. There will be a brief mention of Cauchy-Schwartz-Bunjakovski inequality. In the end, we will take a look at optimisation using quadratic function and general examples of minimisation or maximisation of a function.

Životopis

Rođena sam 16. veljače 1996. u Čakovcu. Odrasla sam u Gornjem Kučanu, gdje sam 2010. godine završila VII. Osnovnu školu Varaždin. Po završetku osnovnoškolskog obrazovanja upisala sam opći smjer Prve gimnazije u Varaždinu.
Godine 2014. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2015. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji sam završila 2019. godine. Iste godine nastavila sam svoje obrazovanje na nastavničkom smjeru diplomskog studija matematike koji završavam 2022. godine.