

# Obračun kapitalizirane svote naknade štete u Hrvatskom zavodu za mirovinsko osiguranje

---

Čerina, Denis

Professional thesis / Završni specijalistički

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:801230>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-09**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

DENIS ČERINA

**Obračun kapitalizirane svote naknade štete  
u Hrvatskom zavodu za mirovinsko osiguranje**

Završni rad

Zagreb, 2022



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK  
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

DENIS ČERINA

**Obračun kapitalizirane svote naknade štete  
u Hrvatskom zavodu za mirovinsko osiguranje**

Završni rad

Voditelj rada: prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2022.



**Sadržaj:**

1. UVOD.....	4
2. ZAKONSKA I PODZAKONSKA REGULATIVA.....	8
3. KAMATNE STOPE I SADAŠNJE VRIJEDNOSTI .....	10
4. TABLICE SMRTNOSTI .....	17
5. KOMUTACIJSKE VRIJEDNOSTI I AKTUARSKE TABLICE.....	22
6. GODIŠNJE ISPLATE .....	35
7. ISPODGODIŠNJE ISPLATE.....	38
8. LINEARNA INTERPOLACIJA .....	44
9. PRIMJERI IZ PRAKSE I USPOREDNI IZRAČUNI.....	48
10. ZAKLJUČAK.....	53
11. LITERATURA.....	55
SAŽETAK .....	56
SUMMARY .....	56
ŽIVOTOPIS .....	57



## 1. UVOD

U predmetima naknade ili, preciznije, nadoknade štete koje vodi Hrvatski zavod za mirovinsko osiguranje (dalje u tekstu HZMO ili Zavod) rješavaju se odštetni zahtjevi u mirnom i sudskom postupku prema odgovornim osobama (najčešće osiguravajućim društvima odnosno poslodavcima, ali i drugim pravnim i fizičkim osobama) za štetu nastalu HZMO-u isplatom invalidske ili obiteljske mirovine, u slučajevima kada je invalidnost ili smrt osiguranika nastala štetnom radnjom treće osobe (npr. zbog ozljede na radu, prometne nezgode, itd.). Osim mirovina, obveza nadoknade iznosa štete kao posljedice štetne radnje treće osobe, obuhvaća i štete nastale HZMO-u isplatom tzv. drugih davanja u koja spadaju novčana naknada za tjelesno oštećenje i naknada za tuđu pomoć i njegu.

Postupak utvrđivanja djelomičnog ili potpunog gubitka radne sposobnosti kao i postupke utvrđivanja preostale radne sposobnosti i stupnja tjelesnog oštećenja (tzv. postupak vještačenja u prvom stupnju) provodi Zavod za vještačenje, profesionalnu rehabilitaciju i zapošljavanje osoba s invaliditetom, o čemu donosi nalaz i mišljenje. Temeljem njihovog nalaza i mišljenja, a nakon provedene propisane revizije, HZMO donosi rješenje o činjenici postojanja ili nepostojanja smanjenja radne sposobnosti te drugim činjenicama o kojima ovise prava osiguranika na primanje mirovine i/ili drugih davanja.

Polazna osnova za nadoknadu štete je rješenje o invalidskoj ili obiteljskoj mirovini, odnosno rješenje o pravu na druga davanja. U tim rješenjima je navedeno šta je uzrok invalidnosti ili tjelesnog oštećenja: ozljeda na radu i/ili ozljeda izvan rada i/ili bolest i/ili profesionalna bolest te u kojem postotku pojedini od navedenih uzroka utječe na činjenicu invalidnosti.

U praksi se odštetni zahtjevi za naknadu štete pokreću za određena obračunska razdoblja koja obuhvaćaju proteklih  $n$  mjeseci. Koliko će se mjeseci obuhvatiti u pojedinom obračunskom razdoblju određuje zaposlenik HZMO koji vodi pojedini predmet, a odabir obuhvata ovisi o više čimbenika kao što su npr. visina mjesečne isplate, tijek postupka po prethodnim obračunskim razdobljima, itd. Pri utvrđivanju visine nastale štete kreće se od isplaćenog ukupnog iznosa mirovine i/ili drugih davanja za obračunsko razdoblje za koje je pokrenut odštetni zahtjev te se, na tako dobiveni iznos, primjenjuje postotak utjecaja na invalidnost pojedinog uzroka za koji se može tražiti naknada štete (naravno, samo kada je taj postotak manji od 100). U slučaju suodgovornosti osiguranika, taj se iznos još korigira i za postotak suodgovornosti.

Uobičajeno je ovako dobiveni iznos nazivati **stvarni iznos** štete.

Prethodna zakonska regulativa (izmijenjena 2013.g.) navedenu materiju definirala je na način da HZMO nije imao pravo na nadoknadu stvarnog iznosa isplaćene mirovine i drugih davanja za neko razdoblje, nego na tzv. **razmjerni iznos** od stvarnog iznosa za to razdoblje.

Razmjerni dio bio je definiran kao kvocijent između:

- (1) 'potencijalno ostvarivog preostalog' mirovinskog staža oštećene osobe od dana odlaska u invalidsku mirovinu pa do dana stjecanja prava na starosnu mirovinu prema Zakonu ('što bi bilo kad bi bilo', odnosno koliko bi osoba još mogla ostvariti staža da nije invalidno umirovljena) u godinama

i

- (2) 'potencijalno mogućeg ukupnog' mirovinskog staža oštećene osobe u godinama (zbroj iznosa pod (1) i staža ostvarenog u trenutku odlaska u invalidsku mirovinu)

koji se onda množi s iznosom stvarno isplaćene mirovine/naknade za neko razdoblje.

Predmeti naknade štete koji se odnose na nastale štete za razdoblja prije 31.12.2013, dakle mirovine i druga davanja isplaćena za razdoblja prije ovog datuma, i dalje se obračunavaju prema pravilima o razmjernom iznosu.

Niti odštetni zahtjev za isplatu stvarnog iznosa štete, niti zahtjev za isplatu razmjernog iznosa ne sadrže obračun zatezних kamata, premda se iznos koji je HZMO isplatio korisniku mirovine/naknade iz svojih sredstava, odnosno iz sredstava državnog proračuna, ponekad nadoknađuje i par godina nakon što je isplaćen. Jedan od razloga za to je svakako činjenica da bi eventualna svakomjesečna nadoknada štete od strane odgovornih osoba prema HZMO-u značajno poskupila sustav tj. trebalo bi uspostaviti svojevrsni sustav 'promptnih' isplata nadoknada (sve se nadoknađuje odmah čim je isplaćeno pa zato nema kamata na zakašnjela plaćanja). Takav sustav bi podrazumijevao da HZMO zahtjeva od svih odgovornih za štete, svaki mjesec - odmah po mjesečnoj obradi mirovina i naknada, iznose potraživanja svih šteta za taj mjesec, a oni bi te zahtjeve morali odmah provjeravati i isplaćivati ih HZMO-u najkasnije nekoliko dana (beskamatni dani) nakon što je HZMO obavio isplatu korisnicima. U ovako zamišljenom sustavu dogodilo bi se jako puno pogrešnih isplata, npr. za osobe koje su u međuvremenu preminule, ali podatak o smrti nije poznat u trenutku obrade mirovina, za osobe kojima se promijenio iznos mirovine zbog usklađenja iznosa koje se prema propisima radi dva puta godišnje, za promjene iznosa mirovine/naknade iz drugih razloga, itd. pa bi se dio isplaćenih sredstava trebao vraćati isplateljima štete ili bi se razlike morale dodatno potraživati.

Zbog svega navedenoga nepisano je pravilo da se zahtjevi za nadoknadu iznosa stvarne štete iz HZMO prema isplateljima šteta dostavljaju za razdoblja od najmanje 3 protekla mjeseca, a najčešće za razdoblja od 12 do 36 mjeseci, podrazumijevajući da se kamata ne računa, odnosno ne potražuje. Time se rizik svakomjesečne greške uglavnom sveo na rizik greške zadnjeg obračunatog mjeseca ili, u najgorem slučaju, greške u iznosima nekoliko zadnje-isplaćenih mjeseci. Čak se i taj problem može jednostavno izbjeći neuvršćavanjem zadnjeg ili par zadnjih isplaćenih mjeseci u odštetni zahtjev jer su za njih vjerojatnije naknadne korekcije.

Osim nadoknade stvarno ili razmjerno isplaćenog iznosa koji se uvijek odnosi na neko proteklo razdoblje tj. na već isplaćenu štetu, HZMO još ima i zakonsku mogućnost potraživanja jednokratne isplate nadoknade štete u cjelokupnom iznosu (tzv. **kapitalizirani iznos** štete). To je ukupni iznos štete koja će potencijalno nastati od nekog početnog datuma u sadašnjosti ili bliskoj prošlosti pa do nekog datuma prestanka isplate u budućnosti. Sasvim je jasno da u ovom trenutku (tj. u trenutku izračuna) datum do kada



će se nekome isplaćivati mirovina ili naknada za tjelesno oštećenje nije poznat. Invalidske mirovine ili obiteljske mirovine čiju su korisnici supružnici/roditelji pokojnog osiguranika isplaćuju se u pravilu sve do smrti korisnika mirovine (uz neke zakonske izuzetke za slučajeve eventualnih zaposlenja korisnika, a i tih je izuzetaka sve manje tj. intencija je da se mirovina prima uz rad). Obiteljske mirovine čiji su korisnici djeca isplaćuju se do završetka školovanja djeteta, a najkasnije do navršenih 26 godina života djeteta, odnosno do eventualne ranije smrti. Dakle, u trenutku izračuna jednokratnog iznosa naknade štete niti je poznato koliko će netko živjeti niti koliko će se netko školovati pa je nemoguće izračunati točan jednokratni iznos za isplatu npr. jednostavnim množenjem mjesečnog iznosa mirovine/naknade s brojem mjeseci buduće isplate uz neko uvriježeno 'umanjenje' (nazivamo ga diskontiranje) izračunate svote obzirom na jednokratnu isplatu sredstava unaprijed.

Spomenuto diskontiranje se odnosi na činjenicu da kada bi tako nešto i bilo moguće točno izračunati i isplatiti, HZMO, odnosno državni proračun, bi unaprijed dobio veliku količinu sredstava kojima bi mogao raspolagati odmah, a mirovinu/naknadu bi isplaćivao u mjesečnim anuitetima slijedećih  $n$  godina tj. od sada pa do trenutka prestanka isplate. Stoga je razumno očekivati da se ta jednokratna uplata na neki način umanjuje za iznos potencijalne zarade od ulaganja tih sredstava kao što je u svim komercijalnim sustavima sasvim uobičajeno da se na uplate cijelog iznosa unaprijed, dakle na uplate prije isporuke robe i usluga, dobije popust.

Unatoč iznesenim činjenicama da je potpuno točan iznos štete nemoguće izračunati postoje metode kojima se može izračunati svojevrsni 'procijenjeni' iznos tako da niti jedna stranka u konačnici ne bude oštećena, niti nagrađena (u ovom slučaju niti HZMO kojemu se jednokratni iznos isplaćuje niti isplatelji šteta koje te jednokratne isplate obavljaju prema HZMO). Koliko je dobar i fer taj 'procijenjeni' iznos govori činjenica da je u cijelom svijetu takav izračun potpuno uobičajen, a pravila za izračun su dio službenih zakonskih ili podzakonskih akata pojedinih država. Takav je slučaj i u Republici Hrvatskoj.

Premda će se za većinu osoba naknada zbilja isplaćivati u procijenjenim okvirima i za njih je fer-odnos uspostavljen (u sadašnjosti je nadoknađeno upravo onoliko koliko će biti isplaćeno u budućnosti uz pretpostavljeno diskontiranje tj. u sasvim razumnim odstupanjima +/-), neke će osobe primati naknadu relativno kratko nakon što je za njih obavljena isplata kapitaliziranog iznosa, a neke će je primati puno duže od službene procjene. Za osobe koje će živjeti kraće na neki način 'oštećen' je onaj koji je jednokratnu isplatu obavio (da je plaćao iznose u visini točnih mjesečnih isplata platio bi samo još nekoliko mjeseci ili godina što je puno manje od plaćanja jednokratnog kapitaliziranog iznosa). Međutim, neke će osobe naknadu primati znatno duže od procjene obzirom da se izračun kapitalizirane štete bazira na korištenju tzv. tablica smrtnosti u kojima su službeni državni podaci o prosječnom doživljenju osoba svih dobi prema spolu pa ako je prema tablicama procjena da će neka osoba živjeti još npr. 10 godina, a ona poživi 20 ili više godina, biti će 'oštećen' HZMO koji će zaprimiti jednokratnu nadoknadu baziranu na doživljenju od 10 godina, a isplaćivati će mirovinu toj osobi još 20 ili više godina. Jedan od ciljeva izračuna kapitalizirane svote je da se razlike na velikom broju slučajeva međusobno anuliraju tj. da se 'zarada' od onih koji žive kraće, 'potroši' na isplatu onima koji žive duže ili obrnuto, da se 'gubitak' zbog jednokratne isplate za osobe kojima su stvarne mjesečne isplate ubrzo prestale, 'nadoknadi' jednokratnim isplatama za osobe

kojima bi se stvarni mjesečni iznosi isplatili u ukupno višestruko većem iznosu nego što je bio iznos jednokratne isplate.

Upravo činjenice o mogućnosti izračuna navedenog jednokratnog, odnosno kapitaliziranog iznosa naknade štete, u svakom trenutku u sadašnjosti za isplate koje će se dogoditi u budućnosti, a koji je fer prema oba sudionika u nadoknadi štete (i onog koji nadoknađuje štetu i onog kojem se šteta nadoknađuje) kao i način izračuna te pravila za ovakav izračun osnovni su predmet ovog rada.

Opisani izračun izvodi se metodama financijske i aktuarske matematike.

Podatak da financijaši vole, trebaju i znaju 'predviđati budućnost' opće je poznat. Često smo u prilici čitati, slušati ili gledati njihove procjene o budućem rastu ili padu BDP-a neke države ili zajednice država (koji se u pravilu pokazuju apsolutno točnima uz povremene izuzetke), procjene o rastu ili padu njihovih kreditnih rejtinga, procjene budućeg rasta ili pada kamatnih stopa, itd. ali tko su i što zapravo rade aktuari?

Definicija s web-stranica Hrvatskog Aktuarskog društva:

*„Aktuar je stručnjak koji se bavi problemima financijske neizvjesnosti i rizika koristeći matematičke metode teorije vjerojatnosti, statistike i financijske matematike. Posao aktuara uključuje analizu podataka iz prošlosti, procjenu postojećih rizika i razvoj modela za projekciju budućih događaja.*

*Najviše aktuara zaposleno je u djelatnosti osiguranja i mirovinskog osiguranja. Oni rade na razvoju osigurateljnih proizvoda, kalkulaciji premije osiguranja, određivanju osigurateljnih pričuva, upravljanju imovinom i obvezama i drugim poslovima bitnim za poslovanje društava za osiguranje. Aktuarska znanja nužna su i državnim tijelima nadležnim za nadzor nad poslovanjem društava za osiguranje i mirovinskih fondova.*

*Aktuarske tehnike i znanja mogu se koristiti i u drugim područjima. Aktuarska analiza demografskih kretanja pučanstva i kretanja u gospodarstvu nužna je kod dugoročnog planiranja državnih izdataka za troškove obrazovanja, mirovina, zdravstva, transporta i drugih usluga. Aktuari sve više rade u području bankarstva i tržišta kapitala, na investicijskim projektima i drugdje gdje je potrebno primijeniti složene matematičke proračune na probleme s financijskim implikacijama.*

*Osim matematičkog znanja, aktuaru je potrebno dobro razumijevanje ekonomije, prakse i zakona države u kojoj radi, demografskih i financijskih kretanja uopće, te vještina komunikacije kako bi svoje rezultate mogao prenijeti osobama koje nemaju aktuarska znanja. Aktuari i njihova profesija, niti u Hrvatskoj niti u svijetu, obično nisu poznati prosječnom stanovniku, jer ih nema mnogo. Međutim ponosni su da kao profesija brinu o financijskoj stabilnosti milijuna ljudi u svijetu.“*

Važno je napomenuti da su aktuari vrlo oprezni u svojim procjenama.

## 2. ZAKONSKA I PODZAKONSKA REGULATIVA

Naknada štete u HZMO definirana je slijedećim zakonskim i podzakonskim aktima koji su objavljeni u »Narodnim novinama« (u daljnjem tekstu NN):

- **Zakon o mirovinskom osiguranju** – u daljnjem tekstu **ZOMO** (NN, broj 157/2013, 151/2014, 33/2015, 93/2015, 120/2016, 18/2018, 62/2018, 115/2018, 102/2019 i 84/2021)
- **Tablice aktuarske matematike** – u daljnjem tekstu **TAM** (NN, broj 17/2013)

Ovdje se citiraju samo ključni članak 161. ZOMO prema kojem se postupa prilikom izračuna naknade štete u HZMO, članak 88. ZOMO prema kojem se računa usklađenje mirovine te prve dvije glave iz pravnog akta TAM.

### *ZOMO, Članak 161.*

- (1) *Zavod ima pravo zahtijevati naknadu štete za novčana davanja koja se isplaćuju na teret mirovinskog osiguranja sve dok traje isplata tih davanja i iako su ta davanja osigurana u mirovinskom osiguranju.*
- (2) *Naknada stvarne štete, koju Zavod ima pravo zahtijevati u slučajevima iz ovoga Zakona, obuhvaća ukupne svote davanja i troškove koji se isplaćuju iz mirovinskog osiguranja:*
  1. *novčana davanja isplaćena na osnovi priznatog prava na invalidsku mirovinu u punom iznosu sve dok traje isplata invalidske mirovine, bez obzira na to je li osiguranik ispunio uvjete za ostvarivanje prava na prijevremenu ili starosnu mirovinu*
  2. *novčana davanja isplaćena na osnovi priznatog prava na obiteljsku mirovinu u punom iznosu sve dok traje isplata obiteljske mirovine bez obzira na to bi li umrli osiguranik, da je živ, ispunio uvjete za ostvarivanje prava na prijevremenu ili starosnu mirovinu*
  3. *novčana davanja na osnovi priznatog prava na naknadu zbog tjelesnog oštećenja*
  4. *troškove profesionalne rehabilitacije, kao i novčane naknade u vezi s korištenjem tog prava.*
- (3) *Zahtjevom za naknadu štete Zavod može obuhvatiti ukupnu svotu štete (kapitaliziranu štetu) ili svotu stvarne štete prema isplatama (pojedinih davanja) koja se odnosi na određeno razdoblje (npr. kalendarska godina).*
- (4) *Kada se šteta sastoji u obvezi Zavoda na trajna novčana davanja, taj se iznos štete može zahtijevati i u ukupnom iznosu (kapitalizirana šteta), a izračunava se prema visini priznate mirovine i tablicama aktuarske matematike koje donosi Zavod po prethodno pribavljenom mišljenju ministarstva nadležnog za financije. Zavod može zahtijevati plaćanje naknade štete u ukupnom iznosu i neposredno od društva za osiguranje.*

**ZOMO, Članak 88.**

- (1) *Aktualna vrijednost mirovine je utvrđena svota mirovine za jedan osobni bod.*
- (2) *Aktualna vrijednost mirovine utvrđuje se za svako polugodište tako da se aktualna vrijednost mirovine uskladi po stopi iz stavka 3. ovoga članka.*
- (3) *Stopa usklađivanja aktualne vrijednosti mirovine koja se primjenjuje 1. siječnja i 1. srpnja svake kalendarske godine određuje se tako da se zbroji stopa promjene prosječnog indeksa potrošačkih cijena u prethodnom polugodištu u odnosu na polugodište koje mu prethodi i stopa promjene prosječne bruto plaće svih zaposlenih u Republici Hrvatskoj u prethodnom polugodištu u odnosu na polugodište koje mu prethodi, i to:*
- *ako je udio stope promjene prosječnog indeksa potrošačkih cijena u zbroju stopa manji ili jednak 50%, stopa usklađivanja mirovina određuje se tako da se zbroji 30% stope promjene prosječnog indeksa potrošačkih cijena i 70% stope promjene prosječne bruto plaće ili*
  - *ako je udio stope promjene prosječnog indeksa potrošačkih cijena u zbroju stopa veći od 50%, stopa usklađivanja mirovina određuje se tako da se zbroji 70% stope promjene prosječnog indeksa potrošačkih cijena i 30% stope promjene prosječne bruto plaće.*
- (4) *Za izračun udjela stope promjene potrošačkih cijena u zbroju stopa iz stavka 3. ovoga članka uzimaju se apsolutni brojevi tih stopa.*
- (5) *Aktualna vrijednost mirovine ne usklađuje se ako je stopa usklađivanja iz stavka 3. ovoga članka jednaka nuli ili manja od nule.*
- (6) *Aktualnu vrijednost mirovine utvrđuje upravno vijeće Zavoda na temelju podataka Državnog zavoda za statistiku najkasnije dva mjeseca nakon isteka svakog polugodišta.*

Dokument TAM koji je objavljen u NN, br. 17/2013 od 13.2.2013. stupio je na snagu 8. dan nakon objave u NN što znači da je u službenoj uporabi od 21.2.2013. S tim datumom prestale su vrijediti dotadašnje aktuarske tablice objavljene u NN br. 31/1998.

**TAM, glava I.**

*Tablice aktuarske matematike donose se radi utvrđivanja demografskih podataka i vrijednosti komutacijskih simbola aktuarske matematike relevantnih za poslove mirovinskog osiguranja u Republici Hrvatskoj te radi utvrđivanja načina obračuna jednokratne naknade štete zbog nesposobnosti za rad i smrti osobe osigurane u sustavu mirovinskog osiguranja generacijske solidarnosti.*

**TAM, glava II.**

*Tablice aktuarske matematike izrađene su na temelju Tablica mortaliteta Republike Hrvatske 2000. – 2002. u izdanju Državnog zavoda za statistiku iz 2007. godine.*

U slijedećim poglavljima detaljnije su pojašnjeni svi aktuarski termini koji se spominju u ovim pravnim aktima i na koje se poziva prilikom izračuna kapitaliziranog iznosa naknade štete u HZMO.

### 3. KAMATNE STOPE I SADAŠNJE VRIJEDNOSTI

Označimo oznakom  $i$  proizvoljan pozitivan realan broj koji označava faktor promjene nekog početnog iznosa  $G$  nakon proteka izvjesnog vremena, ali na način da se taj promijenjeni iznos nadoda na početni iznos  $G$ . Radi jednostavnosti vremenska jedinica koju ćemo promatrati je uvijek jedna godina, osim ako nije drugačije specificirano.

Dakle, početna vrijednost  $G$  nakon godine dana postaje vrijednost  $iG + G = G(1 + i)$ . Očito je da početnu vrijednost  $G$  treba pomnožiti s faktorom  $(1 + i)$  kako bi, uz navedene uvjete, dobili njenu vrijednost nakon proteka godine dana.

U financijskim terminima veličina  $i$  se uobičajeno naziva **efektivna kamatna stopa**, a početna vrijednost  $G$  naziva se **glavnica**. Kamatna stopa koja se koristi u pojedinim konkretnim izračunima još se naziva i **valuacijska kamatna stopa**.

Ako gledamo obrnuto tj. ako se zapitamo kako izračunati početnu vrijednost  $G$  koja nakon godine dana, uz navedene uvjete, daje vrijednost  $G(1 + i)$  sasvim je jasno da tu vrijednost trebamo podijeliti s faktorom  $(1 + i)$ . Dakle, možemo definirati novu vrijednost koju označavamo s  $v$ , gdje je:

$$v = 1/(1 + i)$$

koja se uobičajeno naziva **diskontni faktor**.

Zaključujemo da je diskontni faktor onaj faktor koji pomnožen s nekom vrijednošću daje njenu vrijednost prije opisane promjene, odnosno daje vrijednost glavnice  $G$  koja će uz primjenu valuacijske kamatne stope  $i$  nakon godinu dana imati vrijednost  $G(1 + i)$ .

Promotrimo što se zbiva nakon proteka  $n$  godina uz konstantnu valuacijsku kamatnu stopu  $i$  (protekom svake godine na iznos koji imamo u tom trenutku primijenimo valuacijsku kamatnu stopu te dobiveni iznos nadodamo na trenutni iznos):

$$\begin{array}{ll} \text{godina} = 1 & iG + G = G(1 + i) \\ \text{godina} = 2 & iG(1 + i) + G(1 + i) = G(1 + i)(1 + i) = G(1 + i)^2 \\ \text{godina} = 3 & iG(1 + i)^2 + G(1 + i)^2 = G(1 + i)^2(1 + i) = G(1 + i)^3 \\ \dots & \\ \dots & \\ \text{godina} = n & iG(1 + i)^{n-1} + G(1 + i)^{n-1} = G(1 + i)^{n-1}(1 + i) = G(1 + i)^n \end{array}$$

Dakle, glavnica  $G$  uz primjenu valuacijske kamatne stope  $i$  nakon proteka  $n$  godina uz navedene uvjete imati će vrijednost  $G(1 + i)^n$ . Obrnuto, vrijednost  $G(1 + i)^n$  trebamo pomnožiti s diskontnim faktorom  $v^n = 1/(1 + i)^n$  kako bi dobili početnu vrijednost glavnice  $G$ .

Ako uzmemo da je glavnica  $G = 1$  lako zaključujemo da ćemo, uz primjenu valuacijske kamatne stope  $i$ , nakon proteka  $n$  godina imati iznos  $(1 + i)^n$ , odnosno zaključujemo da je, ako nakon proteka  $n$  godina imamo iznos  $(1 + i)^n$ , početni iznos bio 1.

Pogledajmo sada slučaj kada na kraju svake od  $n$  godina želimo isplatiti iznos 1, dakle tražimo početni iznos koji nam, uz primjenu valuacijske kamatne stope  $i$ , to omogućava.

$godina = 1$       isplaćuje se anuitet 1  $\rightarrow$  početni iznos je  $1/(1+i) = v$   
 $godina = 2$       isplaćuje se anuitet 1  $\rightarrow$  početni iznos je  $1/(1+i)^2 = v^2$   
 $godina = 3$       isplaćuje se anuitet 1  $\rightarrow$  početni iznos je  $1/(1+i)^3 = v^3$   
 ...  
 ...  
 $godina = n$       isplaćuje se anuitet 1  $\rightarrow$  početni iznos je  $1/(1+i)^n = v^n$

Zbrojimo sve godine od 1 do  $n$  i dobijemo da je početna vrijednost za ovaj slučaj:

$$v + v^2 + v^3 + \dots + v^n = \sum_{j=1}^n v^j.$$

Pogledajmo što se događa ako od  $\sum_{j=1}^n v^j$  oduzmemo  $v \sum_{j=1}^n v^j$ :

$$\sum_{j=1}^n v^j - v \sum_{j=1}^n v^j = \sum_{j=1}^n v^j - \sum_{j=1}^n v^{j+1} = v - v^{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^n v^j (1 - v) = v(1 - v^n)$$

$$\sum_{j=1}^n v^j = v(1 - v^n)/(1 - v)$$

U svijetu financijske i aktuarske matematike uobičajeno je da se ovakva početna vrijednost tj. vrijednost koja osigurava neke predefinirane vrijednosti isplata u budućnosti naziva **sadašnja vrijednost**.

Sadašnja vrijednost koja omogućava anuitetnu isplatu iznosa 1 tijekom budućih  $n$  godina, od sada tako da se svaka od tih  $n$  isplata odnosi na upravo proteklu godinu, označava se oznakom  $a_{\overline{n}|}$ .

Dakle:

$$a_{\overline{n}|} = v \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

gdje je  $v$  diskontni faktor obzirom na valuacijsku kamatnu stopu  $i$ .

**Primjer 3.1:** Zanima nas kolika je sadašnja vrijednost iznosa koji omogućava isplatu u iznosu 1 tijekom 20 godina od sada, uz valuacijsku kamatnu stopu od 5%?

Prema formuli slijedi:  $a_{\overline{20}|} = \frac{1}{1+0,05} \frac{1-1/(1+0,05)^{20}}{1-1/(1+0,05)} = 12,4622$

Kontrolna tablica za Primjer 3.1:

godina	iznos na početku godine (za godinu 1 je početni iznos, a za ostale godine je iznos po isteku prethodne godine)	iznos na kraju godine (iznos na početku godine uvećan za ostvarenu godišnju kamatu)	iznos po isteku godine (Iznos na kraju godine umanjen za isplatu u iznosu 1)
1	<b>12,4622</b>	13,0853	12,0853
2	12,0853	12,6896	11,6896
3	11,6896	12,2741	11,2741
4	11,2741	11,8378	10,8378
5	10,8378	11,3796	10,3796
6	10,3796	10,8986	9,8986
7	9,8986	10,3936	9,3936
8	9,3936	9,8632	8,8632
9	8,8632	9,3064	8,3064
10	8,3064	8,7217	7,7217
11	7,7217	8,1078	7,1078
12	7,1078	7,4632	6,4632
13	6,4632	6,7864	5,7864
14	5,7864	6,0757	5,0757
15	5,0757	5,3295	4,3295
16	4,3295	4,5459	3,5459
17	3,5459	3,7232	2,7232
18	2,7232	2,8594	1,8594
19	1,8594	1,9524	0,9524
20	0,9524	1,0000	<b>0,0000</b>

Uočimo da je iz primjera odmah vidljiv rezultat za slučaj kada je  $n = 1$ ;  $a_{\overline{1}|} = v = 0,9524$ . Također, vrlo jednostavno se mogu izračunati vrijednosti kada godišnji iznos isplate nije 1, nego neki drugi zadani iznos. Treba samo izračunatu sadašnju vrijednost pomnožiti s tim zadanim iznosom. Npr. ako želimo izračunati koliko sredstava treba u ovom trenutku za 20-godišnju isplatu po  $60.000kn$  godišnje dobijemo da je  $60.000a_{\overline{20}|} = 60.000 \cdot 12,4622 = 747.732,00kn$ .

Sada promotrimo slučaj kada ukupnu godišnju isplatu u iznosu 1 koju čine glavnica i zarađena kamata želimo svake godine isplatiti u  $p > 1$  jednakih rata (jasno je da svaka rata iznosi  $1/p$ ), odmah po isteku svakog od  $p$  jednako dugih perioda (jasno je i da svaki period isplate iznosi  $1/p$ ). Očito je da u ovom slučaju kamatna stopa ne može biti ista kao u slučaju isplate jednom godišnje jer istekom svakog od  $p$  perioda ukamaćivanje 'na trenutak' prestaje kako bi se isplatio dio iznosa i odmah 'idući trenutak' nastavlja, ali na trenutni iznos umanjen za isplaćeni iznos.

Označimo takvu godišnju kamatnu stopu s  $i^{(p)}$ .

Znači za neki, u ovom trenutku nepoznati, početni iznos (označimo ga s  $a_{\overline{n}|}^{(p)}$ ) želimo naći onu kamatnu stopu koja će nam omogućiti isplatu iznosa  $1/p$  protekom svakog od  $p$  perioda. Drugim riječima, tražimo takvu kamatnu stopu koja osigurava da, protekom  $n$  perioda od po 1 godinu, imamo ukupni iznos isplate  $n$ , ali uz  $p$  puta godišnje uvećanje trenutno raspoloživog iznosa po istoj godišnjoj kamatnoj stopi  $i^{(p)}$  ( $p$ -ti dio jer je uvećanje protekom svakog perioda  $1/p$  od 'pune' godine) te smanjenje tako uvećanog iznosa za  $1/p$  koliko iznosi svaka od  $p$  isplata godišnje.

Odmah naslućujemo da će kamatna stopa koju tražimo biti nešto manja od stope za slučaj kada su uvećanja godišnja jer se u ovom slučaju sadašnja vrijednost uvećava (ukamaćuje) već nakon perioda  $1/p$  koji je uvijek kraći od 1 godine. Slutnja da je kamatna stopa manja automatski implicira slutnju da je sadašnja vrijednost veća.

Možemo zaključiti da, uz navedene pretpostavke kako želimo naći onu kamatnu stopu i sadašnju vrijednost koje omogućuju  $n$  godina  $p$  isplata godišnje u iznosu  $1/p$ , a koje korespondiraju kamatnoj stopi i sadašnjoj vrijednosti za  $n$  godišnjih isplatu u iznosu 1, imamo slijedeću vezu između pripadnih sadašnjih vrijednosti i kamatnih stopa:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} i^{(p)} = a_{\overline{n}|} i$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = a_{\overline{n}|} \frac{i}{i^{(p)}}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = v \frac{1 - v^n}{1 - v} \frac{i}{i^{(p)}} \quad \left\{ \text{uvrstimo } i = \frac{1 - v}{v} \right\}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1 - v^n}{i^{(p)}}$$

Istovremeno, prema definiciji sadašnje vrijednosti, vrijedi:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \sum_{j=1}^{np} \frac{1}{p} v^{\frac{j}{p}} = \frac{\frac{1}{p} v^{\frac{1}{p}} \left( 1 - \left( v^{\frac{1}{p}} \right)^{np} \right)}{\left( 1 - v^{\frac{1}{p}} \right)} = \frac{\frac{1}{p} v^{\frac{1}{p}} (1 - v^n)}{1 - v^{\frac{1}{p}}}$$

Izjednačavanjem imamo:

$$\frac{1 - v^n}{i^{(p)}} = \frac{1}{p} \frac{v^{\frac{1}{p}} (1 - v^n)}{\left( 1 - v^{\frac{1}{p}} \right)},$$

a kraćenjem s  $1 - v^n$  i sređivanjem:

$$i^{(p)} = p \frac{\left( 1 - v^{\frac{1}{p}} \right)}{v^{\frac{1}{p}}}.$$



Množenjem brojnika i nazivnika s  $v^{-\frac{1}{p}}$ , slijedi:

$$i^{(p)} = p \left( v^{-\frac{1}{p}} - 1 \right) = \left\{ v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1} \right\} = p \left( (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right).$$

Prethodno iznesenim jednostavnim računom dobili smo vezu između kamatnih stopa  $i$  i  $i^{(p)}$  tj. relaciju:

$$i^{(p)} = p \left( (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right)$$

Kamatna stopa  $i^{(p)}$  naziva se **nominalna godišnja kamatna stopa konvertibilna (plativa) p puta godišnje**.

**Primjer 3.2:** Zanima nas kolika je sadašnja vrijednost iznosa koji osigurava 12 mjesečnih isplata u iznosu 1/12, a koji odgovara jednoj godišnjoj isplati u iznosu 1 uz efektivnu kamatnu stopu od 5%.

Izračunajmo prvo  $i^{(12)}$ :

$$i^{(12)} = 12 \left( (1,05)^{\frac{1}{12}} - 1 \right) = 0,048889,$$

i odmah vidimo kako je slutnja da je  $i^{(12)} < i$  za  $i = 5\% = 0,05$  bila točna.

Na kraju Primjera 3.1 uočili smo da sadašnja vrijednost  $a_{\overline{1}|} = 0,9524$  uz efektivnu kamatnu stopu od 5% daje na kraju godine iznos 1.

$$\text{Sada imamo } a_{\overline{1}|}^{(12)} = a_{\overline{1}|} \frac{i}{i^{(12)}} = 0,9524 \frac{0,05}{0,048889} = 0,974,$$

dakle i slutnja da je  $a_{\overline{1}|}^{(12)} > a_{\overline{1}|}$  za  $a_{\overline{1}|} = 0,9524$  i  $i = 5\%$  je bila točna.

Kontrolna tablica za Primjer 3.2:

mjesec	iznos na početku mjeseca (za mjesec 1 je početni iznos, a za ostale mjesece je iznos po isteku prethodnog mjeseca)	iznos na kraju mjeseca (iznos na početku mjeseca uvećan za 1/12 ostvarene nominalne kamate)	iznos po isteku mjeseca (iznos na kraju mjeseca umanjen za isplatu u iznosu 1/12)
1	<b>0,9740</b>	0,9780	0,8946
2	0,8946	0,8983	0,8150
3	0,8150	0,8183	0,7349
4	0,7349	0,7379	0,6546
5	0,6546	0,6573	0,5739
6	0,5739	0,5763	0,4929
7	0,4929	0,4950	0,4116
8	0,4116	0,4133	0,3300
9	0,3300	0,3313	0,2480
10	0,2480	0,2490	0,1657
11	0,1657	0,1663	0,0830
12	0,0830	0,0833	<b>0,0000</b>

Na primjeru 3.2 vidjeli smo da je  $i^{(12)} < i$  za  $i = 5\%$  kao i da je  $a_{\overline{1}|}^{(12)} > a_{\overline{1}|}$  za  $a_{\overline{1}|} = 0,9524$  i  $i = 5\%$ . Naravno, može se pokazati da slutnja vrijedi općenito tj. da vrijedi  $i^{(p)} < i, \forall p > 1$  te da vrijedi  $a_{\overline{n}|}^{(p)} > a_{\overline{n}|}, \forall n > 0$  i  $\forall p > 1$

$$i^{(p)} = p \left( (1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right)$$

$$i^{(p)} = p(1 + i)^{\frac{1}{p}} - p$$

$$\frac{i^{(p)} + p}{p} = (1 + i)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{i^{(p)}}{p} + 1 = (1 + i)^{\frac{1}{p}}$$

potenciranjem s  $p$  i zamjenom strana slijedi

$$1 + i = \left( 1 + \frac{i^{(p)}}{p} \right)^p.$$

Primjenom binomnog poučka slijedi:

$$1 + i = \left( 1 + \frac{i^{(p)}}{p} \right)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left( \frac{i^{(p)}}{p} \right)^k 1^{p-k} = 1 + p \frac{i^{(p)}}{p} + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} \left( \frac{i^{(p)}}{p} \right)^k 1^{p-k} \geq 1 + i^{(p)}$$

čime smo dokazali  $i^{(p)} < i, \forall p > 1$ .

Kako smo prethodno vidjeli, vrijedi

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} i^{(p)} = a_{\overline{n}|} i, \quad \forall n > 0 \text{ i } \forall p > 1$$

odnosno

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|},$$

a upravo smo dokazali da je  $i^{(p)} < i, \forall p > 1$  pa, samim time vrijedi

$$\frac{i}{i^{(p)}} > 1$$

tj. vrijedi

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} > a_{\overline{n}|}, \quad \forall n > 0 \text{ i } \forall p > 1.$$

Prethodno iznesena osnovna teorija i jednostavni tipični primjeri izračuna već nam u ovom trenutku omogućavaju točan izračun iznosa koji osigurava buduću isplatu mirovine u nekom željenom mjesečnom iznosu i za točan broj godina, uz pretpostavljenu konstantnu godišnju valuacijsku kamatnu stopu.

Upravo takav izračun iskazan je u idućem primjeru.

**Primjer 3.3:** Osoba nepoznate dobi odlazi u mirovinu i želi mirovinu u iznosu 5 tisuća kuna mjesečno koju će primati točno 20 godina (dakle iznos isplaćene mirovine ukupno za svaku godinu iznosi 60.000kn). Zanemarujući inflaciju i eventualna buduća usklađenja iznosa mirovine, želimo izračunati sadašnju vrijednost ovakve buduće isplate, uz valuacijsku efektivnu kamatnu stopu od 5% godišnje.

Koristeći izračune iz prethodnih Primjera 3.1 i 3.2 imamo da je:

$$60.000a_{\overline{20}|}^{(12)} = 60.000a_{\overline{20}|}^i = 60.000 \cdot 12,4622 \cdot \frac{0,05}{0,048889} = 764.717$$

Zaključujemo da nam je za isplatu stvarnog iznosa od 1.200.000kn (20 godina  $\times$  12 mjeseci  $\times$  5.000kn) u ovom trenutku potreban iznos od 764.717kn, uz pretpostavku da ćemo na taj iznos (umanjen svaki mjesec za isplatu od 5.000kn) ostvarivati prinos od 5% godišnje tijekom idućih 20 godina koliko traje isplata.

Uočimo da nam je (Primjer 3.1) za isti godišnji iznos isplate od 60.000kn trebalo  $60.000a_{\overline{20}|} = 747.732kn$  (razlika je 16.985kn).

Potpuna kontrolna tablica za primjer 3.3 ima 240 redaka (20 godina  $\times$  12 mjeseci) pa se ovdje iskazuje samo prvih 6 i zadnjih 6 redaka.

Kontrolna tablica za Primjer 3.3:

mjesec	iznos na početku mjeseca (za mjesec 1 je početni iznos, a za ostale mjesece je iznos po isteku prethodnog mjeseca)	iznos na kraju mjeseca (iznos na početku mjeseca uvećan za 1/12 ostvarene nominalne kamate)	iznos po isteku mjeseca (iznos na kraju mjeseca umanjen za isplatu u iznosu 5.000)
1	<b>764.717</b>	767.833	762.833
2	762.833	765.941	760.941
3	760.941	764.041	759.041
4	759.041	762.133	757.133
5	757.133	760.218	755.218
6	755.218	758.295	753.295
...	...	...	...
235	29.577	29.697	24.697
236	24.697	24.798	19.798
237	19.798	19.879	14.879
238	14.879	14.939	9.939
239	9.939	9.980	4.980
240	4.980	5.000	<b>0</b>

Naravno, ovakvi izračuni kao u Primjeru 3.3 'u svijetu doživotnih starosnih mirovina' su sasvim neupotrebljivi obzirom da podatak koliko će netko poživjeti nakon odlaska u mirovinu nije i ne može biti poznat. Nadalje, izneseni izračun uopće ne ovisi o dobi osobe tj. izračunati iznos je potpuno isti bez obzira da li je osoba u trenutku odlaska u mirovinu dobi npr. 50 ili 65 ili 80 ili čak 30. Upravo zato su nam za izračun potrebne aktuarske metode temeljene na stvarnim statističkim podacima o smrtnosti određene populacije obzirom na dob.

## 4. TABLICE SMRTNOSTI

Izrada tablica smrtnosti, odnosno tablica mortaliteta, jedna je od najstarijih tehnika u demografskoj analizi. Tablice sadržavaju niz demografskih pokazatelja od kojih je osnovni pokazatelj vjerojatnost smrti temeljem koje se izračunavaju ostale biometrijske funkcije: vjerojatnost doživljenja neke dobi, broj živih ili broj umrlih u nekom trenutku, očekivano trajanje života te brojni drugi pokazatelji. Ove tablice primjenjuju se u analizi smrtnosti, izradi projekcija broja stanovništva, definiranju neto stopa reprodukcije stanovništva itd. Osim toga, tablice omogućavaju najkompletnije i najtočnije usporedbe smrtnosti različitih populacija ili dijelova tih populacija na nekom promatranom području.

Tablice smrtnosti mogu se formirati na više načina i sa različitim početnim i završnim parametrima te odvojeno po spolu ili objedinjeno za oba spola.

U ovom radu baviti ćemo se tablicama koje su objavljene u službenom aktu TAM, a koje sadrže slijedeće podatke uz objašnjenje pripadnih oznaka:

- na nekom definiranom području promatra se populacija od  $l_0 = 100.000$  novorođenih osoba (početna populacija)
- oznakama  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_z, \dots, l_{99}, l_{100}$  označavaju se brojevi onih osoba iz početne populacije  $l_0$  koje su doživjele dobi 1, 2, 3, ..., z, ..., 99, 100 i više godina; dakle, oznaka  $l_z$  označava broj živih osoba u dobi z preostalih od početne populacije  $l_0$ ; jasno je da vrijedi:  $l_0 \geq l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \dots \geq l_z \geq \dots \geq l_{99} \geq l_{100}$ ;
- oznakom  $p_z$  označava se vjerojatnost da će osoba dobi z doživjeti dob z + 1; očito je empirijski  $p_z = \frac{l_{z+1}}{l_z}$ ;  
uopćavanjem na dob z + n (oznaka n se stavlja kao lijevi indeks na p) slijedi:  
 ${}_n p_z = \frac{l_{z+n}}{l_z}$  što je oznaka za vjerojatnost da će osoba dobi z doživjeti dob z + n
- oznakom  $q_z$  označava se vjerojatnost da osoba dobi z neće doživjeti dob z + 1; očito je  $q_z = 1 - p_z = 1 - \frac{l_{z+1}}{l_z} = \frac{l_z - l_{z+1}}{l_z}$ ;  
analogno oznaci  ${}_n p_z$  oznakom  ${}_n q_z = \frac{l_z - l_{z+n}}{l_z}$  označava se vjerojatnost da osoba dobi z neće doživjeti dob z + n
- oznakom  $d_z$  označava se broj smrtnih slučajeva osoba između dobi z i z + 1;  $d_z = l_z - l_{z+1}$
- oznakom  $e_z^0$  označava se očekivano buduće trajanje života osobe dobi z

$$e_z^0 = \frac{\sum_{u=z}^{99} \frac{l_u + l_{u+1}}{2}}{l_z}, \quad e_{100}^0 = 0,5$$

NAPOMENA: zadnji tabelirani rezultat za dob 100 odražava činjenicu da je dob od 100 granična dob što znači da smo prešutno broj osoba dobi veće od 100 zanemarili.

U slijedećim tablicama: *Tablica 1: MUŠKARCI; SKUPINE ŽIVIH I OČEKIVANO TRAJANJE ŽIVOTA* i *Tablica 2: ŽENE; SKUPINE ŽIVIH I OČEKIVANO TRAJANJE ŽIVOTA*, objavljenima u sklopu službenog akta TAM, iskazani su svi prethodno opisani podaci, obrađeni temeljem Tablica mortaliteta Republike Hrvatske 2000. – 2002. u izdanju Državnog zavoda za statistiku iz 2007. godine.

Podaci su razdvojeni po spolu na način da se, ako indeks  $z$  iz prethodno navedenih oznaka i formula odgovara znaku  $x$ , podaci odnose na muški spol, a ako odgovara znaku  $y$ , podaci odnose na ženski spol.

Vrijednosti  $q_z$  (pa samim time i vrijednosti  $p_z = 1 - q_z$ ) te vrijednosti  $e_z^0$  iskazane u ovim tablicama nisu uvijek dobivene strogo empirijski tj. nisu uvijek izračunate prema navedenim pravilima, nego su matematički 'izgladene' korištenjem složenijih matematičkih modela koji nisu predmet ovog rada. Tzv. 'izgladivanje' je standardna procedura uobičajena u cijelom svijetu prilikom izrade tablica ovog tipa kako bi se razdioba iskazanih vjerojatnosti što više približila poznatim matematičkim modelima i funkcijama čija su ponašanja po intervalima  $[l_z, l_{z+1}]$  višestruko istražena i poznata, ali tako da izgladene vrijednosti značajnije ne odstupaju od empirijskih vrijednosti za pojedine intervale. Štoviše, izgladene vrijednosti smanjuju njihovu međusobnu varijabilnost.

Iskazani podaci za oba spola imaju vrijednosti za maksimalnu dob od 100 godina. Za osobe starije od 100 godina dogovorno se koriste podaci za vrijednost od 100 godina. To znači da se u izračunima uzima da je vjerojatnost da će osoba starosti npr. 105 godina doživjeti npr. 107 godina ista kao i vjerojatnost da će osoba starosti 100 godina doživjeti 101 godinu (što je prema tablicama 0, kako za muški tako i za ženski spol).

Kako je u času izrade ovog rada upravo završio Popis stanovništva, kućanstava i stanova u Republici Hrvatskoj 2021. godine (stanje na 31.8.2021. u 24:00h) očekuje se da bi u idućim godinama Državni zavod za statistiku mogao izraditi nove tablice mortaliteta temeljene na tom popisu.

Tablica 1: MUŠKARCI; SKUPINE ŽIVIH I OČEKIVANO TRAJANJE ŽIVOTA

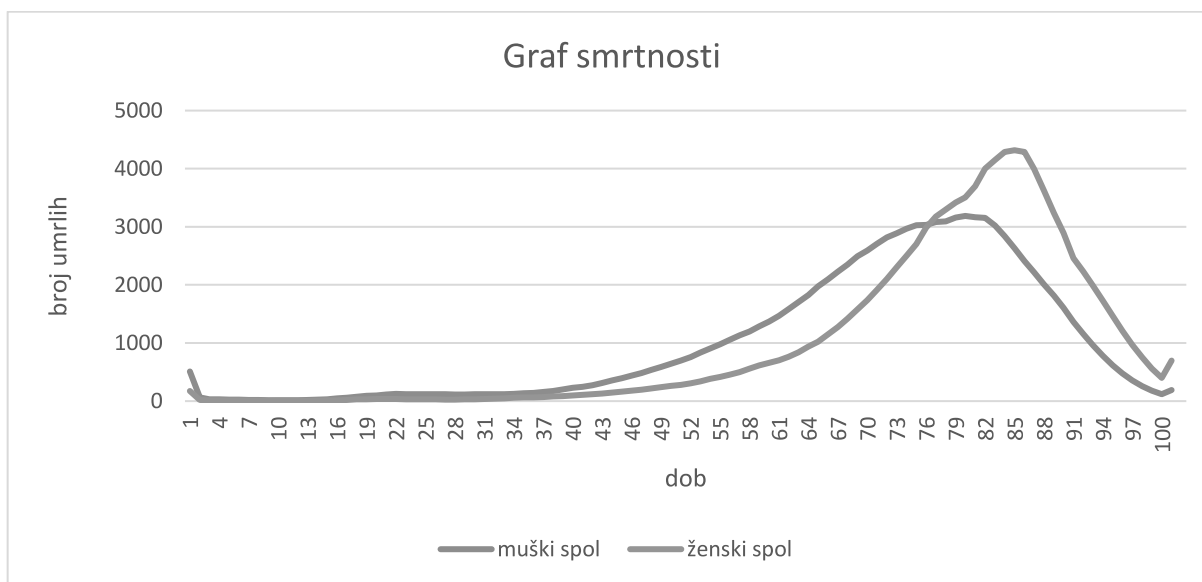
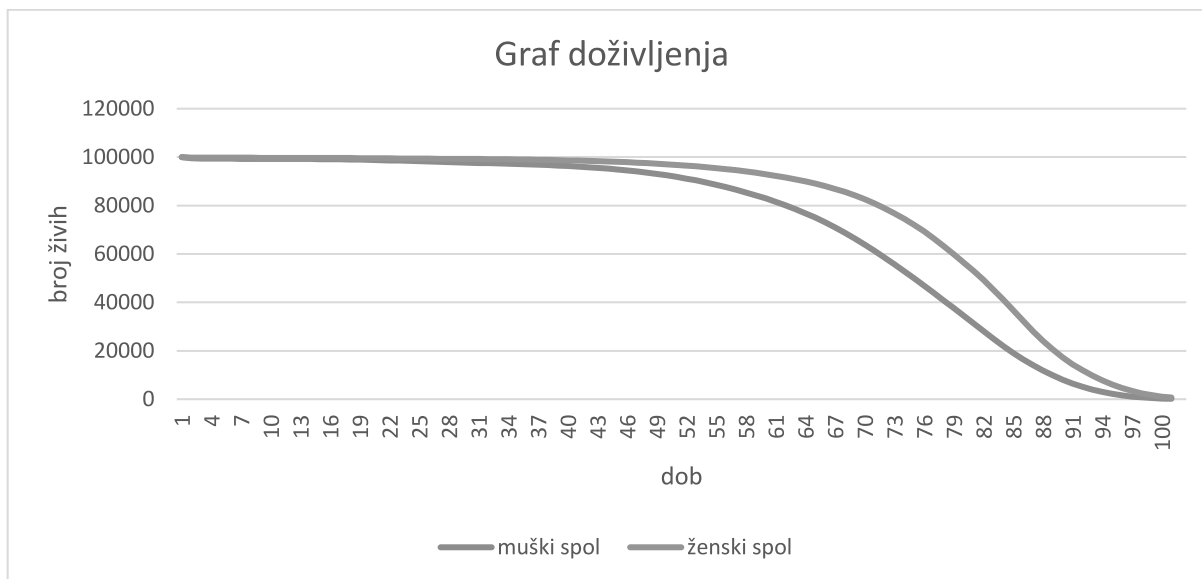
$x$	$q_x$	$p_x$	$l_x$	$d_x$	$e_x^0$
0	0,005115	0,994885	100000	512	71,39
1	0,000631	0,999369	99488	62	70,76
2	0,000332	0,999668	99426	33	69,80
3	0,000287	0,999713	99393	29	68,82
4	0,000253	0,999747	99364	25	67,84
5	0,000243	0,999757	99339	24	66,86
6	0,000215	0,999785	99315	21	65,88
7	0,000191	0,999809	99294	19	64,89
8	0,000172	0,999828	99275	17	63,90
9	0,000149	0,999851	99258	15	62,91
10	0,000146	0,999854	99243	15	61,92
11	0,000157	0,999843	99228	15	60,93
12	0,000179	0,999821	99213	18	59,94
13	0,000230	0,999770	99195	23	58,95
14	0,000316	0,999684	99172	31	57,97
15	0,000451	0,999549	99141	45	56,98
16	0,000605	0,999395	99096	60	56,01
17	0,000775	0,999225	99036	77	55,04
18	0,000914	0,999086	98959	90	54,09
19	0,000981	0,999019	98869	97	53,14
20	0,001135	0,998865	98772	112	52,19
21	0,001235	0,998765	98660	122	51,25
22	0,001215	0,998785	98538	120	50,31
23	0,001221	0,998779	98418	120	49,37
24	0,001221	0,998779	98298	120	48,43
25	0,001203	0,998797	98178	118	47,49
26	0,001204	0,998796	98060	118	46,54
27	0,001183	0,998817	97942	116	45,60
28	0,001184	0,998816	97826	116	44,65
29	0,001203	0,998797	97710	117	43,70
30	0,001206	0,998794	97593	118	42,76
31	0,001204	0,998796	97475	117	41,81
32	0,001231	0,998769	97358	120	40,86
33	0,001277	0,998723	97238	124	39,91
34	0,001361	0,998639	97114	133	38,96
35	0,001461	0,998539	96981	141	38,01
36	0,001594	0,998406	96840	155	37,07
37	0,001794	0,998206	96685	173	36,12
38	0,002108	0,997892	96512	204	35,19
39	0,002366	0,997634	96308	227	34,26
40	0,002545	0,997455	96081	245	33,34
41	0,002854	0,997146	95836	273	32,42
42	0,003277	0,996723	95563	314	31,52
43	0,003722	0,996278	95249	354	30,62
44	0,004160	0,995840	94895	395	29,73
45	0,004644	0,995356	94500	439	28,85
46	0,005137	0,994863	94061	483	27,99
47	0,005715	0,994285	93578	535	27,13
48	0,006316	0,993684	93043	587	26,28
49	0,006959	0,993041	92456	644	25,44
50	0,007607	0,992393	91812	698	24,62
51	0,008333	0,991667	91114	760	23,80
52	0,009239	0,990761	90354	834	23,00
53	0,010150	0,989850	89520	909	22,21
54	0,011066	0,988934	88611	980	21,43
55	0,012057	0,987943	87631	1057	20,67
56	0,013062	0,986938	86574	1131	19,91
57	0,014029	0,985971	85443	1199	19,17
58	0,015265	0,984735	84244	1286	18,43
59	0,016508	0,983492	82958	1369	17,71
60	0,017979	0,982021	81589	1467	17,00
61	0,019767	0,980233	80122	1584	16,30
62	0,021732	0,978268	78538	1706	15,62
63	0,023758	0,976242	76832	1826	14,96
64	0,026302	0,973698	75006	1973	14,31
65	0,028710	0,971290	73033	2096	13,68
66	0,031390	0,968610	70937	2227	13,07
67	0,034178	0,965822	68710	2349	12,48
68	0,037581	0,962419	66361	2493	11,90
69	0,040563	0,959437	63868	2591	11,35
70	0,044216	0,955784	61277	2710	10,81
71	0,048151	0,951849	58567	2820	10,29
72	0,051888	0,948112	55747	2892	9,78
73	0,056076	0,943924	52855	2964	9,29
74	0,060650	0,939350	49891	3026	8,81
75	0,064655	0,935345	46865	3030	8,35
76	0,070279	0,929721	43835	3081	7,89
77	0,075946	0,924054	40754	3095	7,45
78	0,083886	0,916114	37659	3159	7,02
79	0,092384	0,907616	34500	3187	6,62
80	0,101031	0,898969	31313	3164	6,24
81	0,112023	0,887977	28149	3153	5,88
82	0,120880	0,879120	24996	3022	5,56
83	0,129348	0,870652	21974	2842	5,26
84	0,137596	0,862404	19132	2632	4,97
85	0,145935	0,854065	16500	2408	4,68
86	0,157283	0,842717	14092	2217	4,39
87	0,169212	0,830788	11875	2009	4,12
88	0,183896	0,816104	9866	1814	3,85
89	0,199206	0,800794	8052	1604	3,61
90	0,211128	0,788872	6448	1362	3,38
91	0,227064	0,772936	5086	1155	3,16
92	0,244007	0,755993	3931	959	2,94
93	0,261988	0,738012	2972	779	2,72
94	0,281031	0,718969	2193	616	2,51
95	0,301158	0,698842	1577	475	2,30
96	0,322378	0,677622	1102	355	2,07
97	0,344695	0,655305	747	258	1,82
98	0,368101	0,631899	489	180	1,52
99	0,392576	0,607424	309	121	1,11
100	1	0	188	188	0,50

Tablica 2: ŽENE; SKUPINE ŽIVIH I OČEKIVANO TRAJANJE ŽIVOTA

$y$	$q_y$	$p_y$	$l_y$	$d_y$	$e_y^0$	$y$	$q_y$	$p_y$	$l_y$	$d_y$	$e_y^0$
0	0,001726	0,998274	100000	173	78,49	51	0,003181	0,996819	96513	307	28,98
1	0,000222	0,999778	99827	22	77,63	52	0,003518	0,996482	96206	338	28,08
2	0,000172	0,999828	99805	17	76,64	53	0,003979	0,996021	95868	382	27,17
3	0,000174	0,999826	99788	17	75,66	54	0,004377	0,995623	95486	417	26,28
4	0,000153	0,999847	99771	16	74,67	55	0,004799	0,995201	95069	457	25,39
5	0,000132	0,999868	99755	13	73,68	56	0,005269	0,994731	94612	498	24,51
6	0,000133	0,999867	99742	13	72,69	57	0,005938	0,994062	94114	559	23,64
7	0,000125	0,999875	99729	12	71,70	58	0,006538	0,993462	93555	612	22,78
8	0,000106	0,999894	99717	11	70,71	59	0,007107	0,992893	92943	660	21,92
9	0,000095	0,999905	99706	9	69,72	60	0,007628	0,992372	92283	704	21,08
10	0,000089	0,999911	99697	9	68,72	61	0,008308	0,991692	91579	761	20,24
11	0,000084	0,999916	99688	9	67,73	62	0,009251	0,990749	90818	840	19,40
12	0,000084	0,999916	99679	8	66,73	63	0,010417	0,989583	89978	937	18,58
13	0,000093	0,999907	99671	9	65,74	64	0,011477	0,988523	89041	1022	17,77
14	0,000114	0,999886	99662	12	64,75	65	0,013075	0,986925	88019	1151	16,97
15	0,000157	0,999843	99650	15	63,75	66	0,014686	0,985314	86868	1276	16,19
16	0,000218	0,999782	99635	22	62,76	67	0,016590	0,983410	85592	1420	15,42
17	0,000288	0,999712	99613	29	61,78	68	0,018747	0,981253	84172	1578	14,67
18	0,000313	0,999687	99584	31	60,79	69	0,021052	0,978948	82594	1739	13,94
19	0,000361	0,999639	99553	36	59,81	70	0,023713	0,976287	80855	1917	13,23
20	0,000372	0,999628	99517	37	58,83	71	0,026649	0,973351	78938	2104	12,54
21	0,000355	0,999645	99480	35	57,86	72	0,030042	0,969958	76834	2308	11,87
22	0,000328	0,999672	99445	33	56,88	73	0,033503	0,966497	74526	2497	11,22
23	0,000310	0,999690	99412	31	55,90	74	0,037512	0,962488	72029	2702	10,60
24	0,000310	0,999690	99381	30	54,91	75	0,043110	0,956890	69327	2988	9,99
25	0,000292	0,999708	99351	30	53,93	76	0,047846	0,952154	66339	3174	9,42
26	0,000283	0,999717	99321	28	52,94	77	0,052185	0,947815	63165	3297	8,86
27	0,000279	0,999721	99293	27	51,96	78	0,057116	0,942884	59868	3419	8,32
28	0,000296	0,999704	99266	30	50,97	79	0,062104	0,937896	56449	3506	7,80
29	0,000332	0,999668	99236	33	49,99	80	0,069847	0,930153	52943	3698	7,28
30	0,000376	0,999624	99203	37	49,01	81	0,081229	0,918771	49245	4000	6,79
31	0,000431	0,999569	99166	43	48,02	82	0,091758	0,908242	45245	4151	6,35
32	0,000492	0,999508	99123	48	47,04	83	0,104343	0,895657	41094	4288	5,94
33	0,000573	0,999427	99075	57	46,07	84	0,117317	0,882683	36806	4318	5,57
34	0,000635	0,999365	99018	63	45,09	85	0,131969	0,868031	32488	4288	5,25
35	0,000651	0,999349	98955	65	44,12	86	0,141780	0,858220	28200	3998	4,97
36	0,000723	0,999277	98890	71	43,15	87	0,149659	0,850341	24202	3622	4,71
37	0,000786	0,999214	98819	78	42,18	88	0,157152	0,842848	20580	3234	4,45
38	0,000898	0,999102	98741	88	41,21	89	0,167010	0,832990	17346	2897	4,18
39	0,000985	0,999015	98653	98	40,25	90	0,170021	0,829979	14449	2457	3,92
40	0,001096	0,998904	98555	108	39,29	91	0,186013	0,813987	11992	2230	3,62
41	0,001203	0,998797	98447	118	38,33	92	0,203316	0,796684	9762	1985	3,33
42	0,001345	0,998655	98329	132	37,38	93	0,221998	0,778002	7777	1727	3,05
43	0,001493	0,998507	98197	147	36,43	94	0,242122	0,757878	6050	1465	2,78
44	0,001677	0,998323	98050	164	35,48	95	0,263743	0,736257	4585	1209	2,51
45	0,001835	0,998165	97886	180	34,54	96	0,286905	0,713095	3376	969	2,24
46	0,002026	0,997974	97706	198	33,60	97	0,311639	0,688361	2407	750	1,93
47	0,002233	0,997767	97508	218	32,67	98	0,337960	0,662040	1657	560	1,58
48	0,002450	0,997550	97290	238	31,74	99	0,365861	0,634139	1097	401	1,13
49	0,002706	0,997294	97052	263	30,82	100	1	0	696	696	0,50
50	0,002852	0,997148	96789	276	29,90						

Uvidom u tabelirane podatke može se uočiti da npr. očekivano trajanje života muškarca dobi 65 godina (što je u RH dob odlaska u mirovinu) iznosi 13,68 godina (ukupno 78,68 godina, odnosno 78 godina, 8 mjeseci i 5 dana), a žene 16,97 godina (ukupno 81,97 godina, odnosno 81 godinu, 11 mjeseci i 19 dana). Istovremeno očekivano trajanje života muškarca dobi 0 iznosi 71,39 godina (71g, 4m i 20d), a žene 78,49 godina (78g, 5m i 26d). Do ove razlike kao i do ostalih razlika istog tipa, ali po različitim usporedivim razdobljima, dolazi ne samo zbog izgladivanja rezultata iz empirijskih podataka, nego i iz same definicije vrijednosti  $e_z^0$  kao omjera zbroja srednjih vrijednosti svih 'živih' u tom trenutku koji su dobi veće ili jednake  $z$  i broja osoba dobi  $z$  te činjenice da ti omjeri nisu uniformni po svim dobnim intervalima.

Distribucije doživljenja, odnosno smrtnosti, prema podacima iz Tablica 1 i 2 prikazane su na idućim grafovima:





## 5. KOMUTACIJSKE VRIJEDNOSTI I AKTUARSKE TABLICE

Kako podaci samo iz tablica smrtnosti nisu dovoljni za izračun kapitaliziranih iznosa (već je iz samog naziva jasno da takav izračun pretpostavlja neki kapital, odnosno neku valuacijsku kamatu) u ovom poglavlju se, kombinacijom iznesenih rezultata iz prethodnih poglavlja, definiraju nove vrijednosti potrebne za traženi izračun. Takve vrijednosti se najčešće nazivaju **Komutacijske vrijednosti**. U literaturi se za njih mogu još naći i termini **Komutacijski simboli** ili **Komutacijske funkcije**. Ove vrijednosti se obično označavaju velikim slovima  $D, N, S, \dots$  itd., koji u indexu imaju cijeli broj koji označava dob osoba čija je to komutacijska vrijednost.

Komutacijskih vrijednosti ima više, ali za potrebe kapitaliziranog izračuna naknade štete u HZMO dovoljne su slijedeće:

$$D_z = v^z l_z$$

$$N_z = \sum_{u=z}^{\omega} D_u$$

$$S_z = \sum_{u=z}^{\omega} N_u$$

U službenom dokumentu TAM, osim podataka za navedene komutacijske vrijednosti  $D_z, N_z$  i  $S_z$ , objavljeni su i podaci za komutacijske vrijednosti  $C_z, M_z$  i  $R_z$ , ali kako one nisu potrebne za kapitalizirani izračun naknade štete ovdje se samo navode i neće se dalje koristiti.

$$C_z = v^{z+1} d_z$$

$$M_z = \sum_{u=z}^{\omega} C_u$$

$$R_z = \sum_{u=z}^{\omega} M_u$$

Slijedeće tablice 3-14 su izvadak iz aktuarskih tablica prema TAM s pripadnim komutacijskim vrijednostima  $D_z, N_z$  i  $S_z$  prema spolu (indeks  $z = x$  za muški spol,  $z = y$  za ženski spol), a za valuacijske kamatne stope od  $\frac{1}{8}\%$ , 1%, 2%, 3%, 4% i 5%.

Sve komutacijske vrijednosti iskazane u ovim tablicama dobivene su uz primjenu adekvatne valuacijske kamatne stope, iz podataka iskazanih u prethodno navedenim tablicama 1 i 2.

Tablica 3: MUŠKARCI; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = \frac{1}{8}\%$

$x$	$D_x$	$N_x$
0	100000,00	6866290,52
1	99363,80	6766290,52
2	99177,90	6666926,73
3	99021,21	6567748,83
4	98868,73	6468727,62
5	98720,45	6369858,89
6	98573,39	6271138,44
7	98429,51	6172565,05
8	98287,81	6074135,55
9	98148,29	5975847,74
10	98010,95	5877699,44
11	97873,79	5779688,49
12	97736,83	5681814,70
13	97597,10	5584077,87
14	97452,65	5486480,78
15	97300,56	5389028,12
16	97134,98	5291727,56
17	96954,97	5194592,58
18	96758,64	5097637,60
19	96549,96	5000878,96
20	96334,81	4904329,00
21	96105,45	4807994,19
22	95866,77	4711888,74
23	95630,49	4616021,97
24	95394,64	4520391,48
25	95159,24	4424996,84
26	94926,21	4329837,60
27	94693,61	4234911,40
28	94463,38	4140217,78
29	94233,58	4045754,40
30	94003,23	3951520,83
31	93772,36	3857517,59
32	93542,87	3763745,23
33	93310,94	3670202,36
34	93075,60	3576891,42
35	92832,09	3483815,82
36	92581,40	3390983,73
37	92317,82	3298402,33
38	92037,58	3206084,51
39	91728,38	3114046,93
40	91397,93	3022318,55
41	91051,06	2930920,62
42	90678,34	2839869,56
43	90267,55	2749191,23
44	89819,79	2658923,67
45	89334,25	2569103,88
46	88808,24	2479769,63
47	88241,91	2390961,39
48	87627,88	2302719,48
49	86966,34	2215091,60
50	86252,76	2128125,26

$x$	$D_x$	$N_x$
51	85490,16	2041872,51
52	84671,23	1956382,35
53	83784,95	1871711,12
54	82830,65	1787926,16
55	81812,31	1705095,51
56	80724,59	1623283,20
57	79570,54	1542558,61
58	78356,01	1462988,06
59	77063,56	1384632,06
60	75697,21	1307568,50
61	74243,34	1231871,29
62	72684,71	1157627,95
63	71017,08	1084943,25
64	69242,72	1013926,17
65	67337,15	944683,44
66	65322,97	877346,29
67	63193,22	812023,32
68	60956,63	748830,10
69	58593,41	687873,47
70	56146,21	629280,06
71	53596,13	573133,85
72	50951,79	519537,72
73	48248,24	468585,93
74	45485,72	420337,69
75	42673,57	374851,98
76	39864,73	332178,41
77	37016,51	292313,68
78	34162,65	255297,17
79	31257,86	221134,52
80	28334,94	189876,66
81	25440,06	161541,72
82	22562,29	136101,66
83	19809,76	113539,37
84	17226,14	93729,61
85	14837,78	76503,47
86	12656,54	61665,69
87	10652,06	49009,15
88	8838,91	38357,09
89	7204,75	29518,18
90	5762,32	22313,43
91	4539,48	16551,11
92	3504,21	12011,63
93	2646,02	8507,42
94	1950,03	5861,40
95	1400,53	3911,37
96	977,46	2510,84
97	661,75	1533,38
98	432,65	871,63
99	273,05	438,98
100	165,92	165,92

Tablica 4: ŽENE; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = \frac{1}{8}\%$

$y$	$D_y$	$N_y$
0	100000,00	7517083,69
1	99702,37	7417083,69
2	99555,95	7317381,32
3	99414,73	7217825,36
4	99273,70	7118410,63
5	99133,86	7019136,93
6	98997,20	6920003,07
7	98860,72	6821005,87
8	98725,42	6722145,15
9	98591,29	6623419,74
10	98459,31	6524828,45
11	98327,51	6426369,14
12	98195,89	6328041,63
13	98065,43	6229845,73
14	97934,16	6131780,30
15	97800,12	6033846,15
16	97663,31	5936046,03
17	97519,85	5838382,72
18	97369,75	5740862,87
19	97217,91	5643493,12
20	97061,43	5546275,20
21	96904,21	5449213,77
22	96749,18	5352309,56
23	96596,33	5255560,37
24	96445,65	5158964,04
25	96296,17	5062518,39
26	96146,91	4966222,22
27	95999,80	4870075,31
28	95853,88	4774075,50
29	95705,28	4678221,62
30	95554,01	4582516,34
31	95399,13	4486962,32
32	95238,71	4391563,20
33	95073,75	4296324,49
34	94900,43	4201250,74
35	94721,64	4106350,31
36	94541,25	4011628,67
37	94355,43	3917087,42
38	94163,24	3822732,00
39	93961,87	3728568,75
40	93751,34	3634606,88
41	93531,69	3540855,54
42	93302,96	3447323,84
43	93061,38	3354020,89
44	92806,06	3260959,51
45	92535,16	3168153,46
46	92249,69	3075618,30
47	91947,81	2983368,61
48	91627,70	2891420,80
49	91289,44	2799793,10
50	90928,40	2708503,65

$y$	$D_y$	$N_y$
51	90555,92	2617575,25
52	90155,17	2527019,34
53	89726,27	2436864,17
54	89257,17	2347137,89
55	88756,43	2257880,72
56	88219,50	2169124,29
57	87645,59	2080904,79
58	87016,24	1993259,20
59	86339,09	1906242,96
60	85618,96	1819903,87
61	84859,73	1734284,91
62	84049,50	1649425,18
63	83168,14	1565375,68
64	82199,31	1482207,54
65	81154,39	1400008,23
66	79993,17	1318853,84
67	78719,75	1238860,67
68	77317,12	1160140,91
69	75772,91	1082823,79
70	74084,92	1007050,88
71	72238,14	932965,95
72	70224,94	860727,81
73	68030,43	790502,88
74	65668,97	722472,45
75	63126,65	656803,48
76	60330,47	593676,83
77	57372,23	533346,36
78	54309,71	475974,13
79	51144,21	421664,42
80	47907,80	370520,21
81	44505,87	322612,41
82	40839,76	278106,54
83	37046,61	237266,78
84	33139,52	200220,17
85	29215,14	167080,65
86	25327,46	137865,51
87	21709,57	112538,05
88	18437,53	90828,48
89	15520,81	72390,95
90	12912,50	56870,14
91	10703,39	43957,65
92	8702,14	33254,25
93	6924,00	24552,11
94	5379,69	17628,11
95	4071,92	12248,42
96	2994,47	8176,50
97	2132,31	5182,03
98	1466,07	3049,72
99	969,38	1583,65
100	614,27	614,27

Tablica 5: MUŠKARCI; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 1\%$ 

$x$	$D_x$	$N_x$
0	100000,00	5097053,87
1	98502,97	4997053,87
2	97466,92	4898550,90
3	96469,87	4801083,99
4	95486,85	4704614,12
5	94517,65	4609127,27
6	93559,22	4514609,62
7	92613,31	4421050,40
8	91678,80	4328437,09
9	90755,54	4236758,29
10	89843,39	4146002,75
11	88940,41	4056159,36
12	88046,50	3967218,95
13	87158,94	3879172,45
14	86275,97	3792013,51
15	85395,05	3705737,54
16	84511,18	3620342,49
17	83623,77	3535831,32
18	82731,44	3452207,55
19	81837,82	3369476,11
20	80948,05	3287638,29
21	80055,70	3206690,25
22	79165,06	3126634,55
23	78285,79	3047469,49
24	77416,18	2969183,70
25	76556,11	2891767,53
26	75707,02	2815211,42
27	74867,25	2739504,40
28	74038,20	2664637,15
29	73218,22	2590598,95
30	72406,48	2517380,73
31	71602,91	2444974,25
32	70808,87	2373371,34
33	70021,38	2302562,47
34	69239,69	2232541,08
35	68460,26	2163301,39
36	67683,89	2094841,13
37	66906,49	2027157,23
38	66125,52	1960250,74
39	65332,43	1894125,22
40	64533,11	1828792,79
41	63731,24	1764259,69
42	62920,49	1700528,45
43	62092,82	1637607,96
44	61249,55	1575515,15
45	60390,69	1514265,60
46	59514,99	1453874,91
47	58623,16	1394359,92
48	57710,89	1335736,76
49	56779,01	1278025,87
50	55825,26	1221246,86

$x$	$D_x$	$N_x$
51	54852,33	1165421,60
52	53856,23	1110569,28
53	52830,81	1056713,05
54	51776,59	1003882,24
55	50696,99	952105,65
56	49589,59	901408,65
57	48457,19	851819,06
58	47304,16	803361,87
59	46120,84	756057,72
60	44910,63	709936,88
61	43666,46	665026,24
62	42379,39	621359,78
63	41048,34	578980,40
64	39676,02	537932,06
65	38249,86	498256,04
66	36784,27	460006,18
67	35276,70	423221,91
68	33733,35	387945,21
69	32144,64	354211,86
70	30535,24	322067,22
71	28895,85	291531,99
72	27232,19	262636,14
73	25563,82	235403,95
74	23891,34	209840,12
75	22220,08	185948,78
76	20577,69	163728,70
77	18941,94	143151,01
78	17330,12	124209,07
79	15719,20	106878,95
80	14125,86	91159,75
81	12572,79	77033,89
82	11053,96	64461,10
83	9621,33	53407,14
84	8294,02	43785,81
85	7082,18	35491,79
86	5988,73	28409,61
87	4996,59	22420,88
88	4110,17	17424,29
89	3321,25	13314,11
90	2633,31	9992,86
91	2056,51	7359,56
92	1573,75	5303,05
93	1178,04	3729,29
94	860,66	2551,25
95	612,78	1690,59
96	423,96	1077,82
97	284,54	653,85
98	184,42	369,31
99	115,38	184,89
100	69,51	69,51

Tablica 6: ŽENE; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 1\%$ 

$y$	$D_y$	$N_y$
0	100000,00	5456858,54
1	98838,61	5356858,54
2	97838,45	5258019,93
3	96853,25	5160181,48
4	95877,97	5063328,23
5	94913,46	4967450,26
6	93961,48	4872536,80
7	93019,04	4778575,32
8	92086,98	4685556,29
9	91165,17	4593469,31
10	90254,39	4502304,14
11	89352,72	4412049,75
12	88460,05	4322697,03
13	87577,18	4234236,98
14	86702,25	4146659,80
15	85833,48	4059957,55
16	84970,85	3974124,07
17	84110,97	3889153,23
18	83253,95	3805042,25
19	82403,99	3721788,31
20	81558,61	3639384,31
21	80721,07	3557825,71
22	79893,74	3477104,63
23	79076,46	3397210,90
24	78269,11	3318134,44
25	77470,77	3239865,33
26	76680,58	3162394,55
27	75899,96	3085713,98
28	75128,04	3009814,02
29	74361,72	2934685,98
30	73600,98	2860324,26
31	72845,08	2786723,28
32	72092,56	2713878,21
33	71344,21	2641785,64
34	70597,19	2570441,43
35	69853,74	2499844,24
36	69116,69	2429990,50
37	68383,23	2360873,81
38	67652,73	2292490,58
39	66923,20	2224837,85
40	66194,78	2157914,64
41	65467,56	2091719,87
42	64741,67	2026252,31
43	64014,62	1961510,63
44	63285,93	1897496,02
45	62554,53	1834210,09
46	61821,29	1771655,56
47	61085,16	1709834,27
48	60345,13	1648749,12
49	59601,50	1588403,98
50	58851,47	1528802,49

$y$	$D_y$	$N_y$
51	58102,62	1469951,02
52	57344,36	1411848,39
53	56577,12	1354504,03
54	55793,75	1297926,91
55	55000,09	1242133,16
56	54193,76	1187133,08
57	53374,76	1132939,31
58	52532,41	1079564,56
59	51672,04	1027032,15
60	50797,14	975360,10
61	49910,52	924562,96
62	49005,72	874652,44
63	48071,73	825646,72
64	47100,13	777574,99
65	46098,54	730474,86
66	45045,27	684376,32
67	43944,16	639331,06
68	42787,24	595386,90
69	41569,40	552599,66
70	40291,25	511030,27
71	38946,51	470739,02
72	37533,11	431792,51
73	36045,21	394259,40
74	34492,58	358214,19
75	32869,97	323721,61
76	31141,86	290851,63
77	29358,29	259709,78
78	27550,38	230351,49
79	25719,81	202801,11
80	23883,54	177081,30
81	21995,35	153197,76
82	20008,66	131202,41
83	17993,03	111193,76
84	15955,97	93200,72
85	13944,60	77244,75
86	11984,25	63300,15
87	10183,38	51315,90
88	8573,62	41132,52
89	7154,79	32558,90
90	5900,84	25404,10
91	4848,94	19503,26
92	3908,16	14654,32
93	3082,65	10746,16
94	2374,36	7663,51
95	1781,59	5289,15
96	1298,82	3507,56
97	916,86	2208,73
98	624,92	1291,87
99	409,63	666,95
100	257,32	257,32

Tablica 7: MUŠKARCI; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 2\%$ 

$x$	$D_x$	$N_x$
0	100000,00	3802089,77
1	97537,25	3702089,77
2	95565,17	3604552,52
3	93660,24	3508987,35
4	91796,98	3415327,11
5	89974,39	3323530,13
6	88188,88	3233555,74
7	86441,40	3145366,86
8	84730,26	3058925,46
9	83054,65	2974195,20
10	81413,83	2891140,55
11	79805,41	2809726,72
12	78228,77	2729921,31
13	76680,96	2651692,53
14	75159,98	2575011,57
15	73663,22	2499851,59
16	72186,07	2426188,37
17	70727,80	2354002,30
18	69287,07	2283274,50
19	67866,72	2213987,42
20	66470,72	2146120,70
21	65093,48	2079649,98
22	63738,22	2014556,50
23	62412,36	1950818,27
24	61113,98	1888405,91
25	59842,52	1827291,93
26	58598,62	1767449,41
27	57380,50	1708850,79
28	56188,77	1651470,29
29	55021,70	1595281,52
30	53878,25	1540259,82
31	52757,95	1486381,56
32	51661,40	1433623,61
33	50586,00	1381962,22
34	49530,88	1331376,22
35	48493,18	1281845,34
36	47473,21	1233352,16
37	46467,87	1185878,95
38	45475,22	1139411,08
39	44489,31	1093935,87
40	43514,16	1049446,56
41	42552,16	1005932,39
42	41598,97	963380,23
43	40649,30	921781,26
44	39704,14	881131,97
45	38763,60	841427,83
46	37826,98	802664,23
47	36894,84	764837,25
48	35964,62	727942,40
49	35036,98	691977,78
50	34110,72	656940,80

$x$	$D_x$	$N_x$
51	33187,64	622830,08
52	32265,50	589642,45
53	31340,86	557376,94
54	30414,34	526036,08
55	29488,20	495621,74
56	28561,29	466133,54
57	27635,46	437572,24
58	26713,39	409936,78
59	25789,81	383223,39
60	24866,88	357433,58
61	23940,95	332566,70
62	23007,49	308625,76
63	22066,39	285618,27
64	21119,57	263551,88
65	20160,81	242432,31
66	19198,24	222271,50
67	18230,91	203073,26
68	17262,40	184842,34
69	16288,14	167579,94
70	15320,94	151291,80
71	14356,24	135970,86
72	13397,05	121614,62
73	12452,99	108217,57
74	11524,17	95764,58
75	10612,94	84240,42
76	9732,13	73627,48
77	8870,68	63895,34
78	8036,29	55024,66
79	7217,81	46988,38
80	6422,60	39770,56
81	5660,43	33347,96
82	4927,84	27687,54
83	4247,12	22759,70
84	3625,32	18512,58
85	3065,27	14887,26
86	2566,60	11821,99
87	2120,40	9255,39
88	1727,13	7134,98
89	1381,94	5407,85
90	1084,95	4025,91
91	839,00	2940,96
92	635,75	2101,97
93	471,23	1466,21
94	340,90	994,98
95	240,33	654,09
96	164,65	413,75
97	109,42	249,10
98	70,23	139,68
99	43,51	69,46
100	25,95	25,95

Tablica 8: ŽENE; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 2\%$ 

$y$	$D_y$	$N_y$
0	100000,00	3991330,01
1	97869,61	3891330,01
2	95929,45	3793460,41
3	94032,46	3697530,96
4	92172,98	3603498,49
5	90351,18	3511325,51
6	88568,04	3420974,34
7	86820,10	3332406,29
8	85107,50	3245586,20
9	83429,52	3160478,70
10	81786,26	3077049,18
11	80175,37	2995262,91
12	78596,21	2915087,54
13	77048,92	2836491,33
14	75531,34	2759442,40
15	74041,42	2683911,06
16	72578,70	2609869,65
17	71139,88	2537290,95
18	69724,67	2466151,07
19	68336,24	2396426,40
20	66972,09	2328090,16
21	65634,50	2261118,07
22	64324,91	2195483,57
23	63042,71	2131158,66
24	61787,30	2068115,96
25	60557,50	2006328,65
26	59352,17	1945771,15
27	58172,00	1886418,98
28	57015,86	1828246,98
29	55881,01	1771231,11
30	54767,09	1715350,10
31	53673,20	1660583,01
32	52597,96	1606909,82
33	51541,66	1554311,85
34	50501,97	1502770,19
35	49480,23	1452268,22
36	48478,17	1402787,99
37	47493,49	1354309,82
38	46525,49	1306816,33
39	45572,58	1260290,83
40	44634,61	1214718,26
41	43711,47	1170083,64
42	42803,02	1126372,17
43	41907,41	1083569,15
44	41024,19	1041661,74
45	40152,52	1000637,55
46	39292,83	960485,02
47	38444,32	921192,19
48	37606,24	882747,87
49	36778,67	845141,63
50	35959,81	808362,95

$y$	$D_y$	$N_y$
51	35154,19	772403,14
52	34355,26	737248,95
53	33563,29	702893,69
54	32774,07	669330,40
55	31991,12	636556,33
56	31213,08	604565,20
57	30439,99	573352,13
58	29665,87	542912,14
59	28893,93	513246,27
60	28126,22	484352,35
61	27364,37	456226,13
62	26604,88	428861,76
63	25841,96	402256,88
64	25071,43	376414,92
65	24297,71	351343,49
66	23509,78	327045,78
67	22710,24	303536,01
68	21895,56	280825,77
69	21063,80	258930,22
70	20215,98	237866,42
71	19349,69	217650,44
72	18464,65	198300,75
73	17558,82	179836,10
74	16637,75	162277,28
75	15699,63	145639,53
76	14728,41	129939,90
77	13748,75	115211,49
78	12775,60	101462,73
79	11809,80	88687,13
80	10859,12	76877,33
81	9902,58	66018,20
82	8919,83	56115,63
83	7942,63	47195,80
84	6974,36	39253,17
85	6035,43	32278,81
86	5136,11	26243,38
87	4321,52	21107,27
88	3602,72	16785,75
89	2977,04	13183,04
90	2431,21	10206,00
91	1978,23	7774,79
92	1578,79	5796,56
93	1233,09	4217,78
94	940,46	2984,69
95	698,75	2044,23
96	504,41	1345,48
97	352,58	841,06
98	237,96	488,48
99	154,45	250,52
100	96,07	96,07

Tablica 9: MUŠKARCI; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 3\%$ 

$x$	$D_x$	$N_x$
0	100000,00	2964443,42
1	96590,29	2864443,42
2	93718,54	2767853,12
3	90958,67	2674134,58
4	88283,63	2583175,91
5	85690,69	2494892,28
6	83174,75	2409201,59
7	80735,11	2326026,84
8	78368,60	2245291,73
9	76072,99	2166923,13
10	73846,11	2090850,14
11	71684,42	2017004,02
12	69586,00	1945319,61
13	67546,97	1875733,60
14	65564,38	1808186,64
15	63634,84	1742622,26
16	61753,35	1678987,43
17	59918,41	1617234,07
18	58127,98	1557315,67
19	56383,61	1499187,68
20	54687,66	1442804,07
21	53034,61	1388116,41
22	51426,24	1335081,80
23	49867,59	1283655,56
24	48356,10	1233787,97
25	46890,36	1185431,87
26	45469,90	1138541,51
27	44092,42	1093071,60
28	42757,47	1048979,19
29	41462,88	1006221,71
30	40207,02	964758,83
31	38988,75	924551,81
32	37807,72	885563,06
33	36661,28	847755,34
34	35548,08	811094,07
35	34465,44	775545,98
36	33412,94	741080,54
37	32387,83	707667,60
38	31388,23	675279,78
39	30409,59	643891,55
40	29454,29	613481,96
41	28523,48	584027,67
42	27613,81	555504,19
43	26721,43	527890,38
44	25846,72	501168,95
45	24989,45	475322,23
46	24148,89	450332,78
47	23325,14	426183,89
48	22516,29	402858,75
49	21722,56	380342,45
50	20942,97	358619,89

$x$	$D_x$	$N_x$
51	20178,40	337676,92
52	19427,27	317498,53
53	18687,33	298071,26
54	17958,81	279383,93
55	17242,90	261425,13
56	16538,76	244182,22
57	15847,28	227643,46
58	15169,80	211796,19
59	14503,14	196626,38
60	13848,35	182123,24
61	13203,26	168274,89
62	12565,27	155071,63
63	11934,30	142506,36
64	11311,33	130572,06
65	10693,00	119260,73
66	10083,61	108567,73
67	9482,57	98484,12
68	8891,64	89001,56
69	8308,35	80109,92
70	7739,12	71801,57
71	7181,42	64062,45
72	6636,53	56881,03
73	6108,98	50244,50
74	5598,45	44135,52
75	5105,72	38537,07
76	4636,52	33431,35
77	4185,08	28794,84
78	3754,61	24609,76
79	3339,48	20855,14
80	2942,70	17515,67
81	2568,31	14572,96
82	2214,21	12004,65
83	1889,82	9790,44
84	1597,47	7900,63
85	1337,58	6303,15
86	1109,10	4965,57
87	907,39	3856,47
88	731,92	2949,08
89	579,95	2217,16
90	450,89	1637,21
91	345,29	1186,31
92	259,11	841,02
93	190,19	581,91
94	136,25	391,72
95	95,13	255,47
96	64,54	160,35
97	42,47	95,81
98	26,99	53,34
99	16,56	26,34
100	9,78	9,78



Tablica 10: ŽENE; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 3\%$ 

$y$	$D_y$	$N_y$
0	100000,00	3068263,67
1	96919,42	2968263,67
2	94075,78	2871344,25
3	91320,16	2777268,46
4	88645,24	2685948,31
5	86049,54	2597303,07
6	83532,35	2511253,53
7	81088,80	2427721,17
8	78717,52	2346632,37
9	76416,35	2267914,85
10	74183,93	2191498,50
11	72016,73	2117314,57
12	69912,85	2045297,84
13	67871,10	1975384,99
14	65888,32	1907513,89
15	63961,54	1841625,57
16	62089,24	1777664,03
17	60267,50	1715574,79
18	58495,10	1655307,29
19	56773,68	1596812,18
20	55100,15	1540038,50
21	53475,40	1484938,35
22	51899,60	1431462,95
23	50371,24	1379563,35
24	48888,87	1329192,11
25	47450,59	1280303,24
26	46054,62	1232852,65
27	44700,62	1186798,02
28	43386,86	1142097,40
29	42110,44	1098710,54
30	40870,32	1056600,11
31	39665,13	1015729,78
32	38493,13	976064,66
33	37353,88	937571,53
34	36245,03	900217,65
35	35166,96	863972,62
36	34120,26	828805,65
37	33102,68	794685,40
38	32113,16	761582,72
39	31150,03	729469,56
40	30212,71	698319,53
41	29300,58	668106,82
42	28413,07	638806,23
43	27548,47	610393,16
44	26706,05	582844,69
45	25884,84	556138,63
46	25084,70	530253,79
47	24304,72	505169,10
48	23544,06	480864,37
49	22802,40	457320,31
50	22078,26	434517,91

$y$	$D_y$	$N_y$
51	21374,08	412439,66
52	20685,52	391065,58
53	20012,47	370380,06
54	19352,17	350367,59
55	18706,46	331015,42
56	18074,31	312308,96
57	17455,51	294234,66
58	16846,43	276779,15
59	16248,77	259932,72
60	15663,48	243683,95
61	15091,25	228020,47
62	14529,95	212929,22
63	13976,27	198399,28
64	13427,89	184423,01
65	12887,15	170995,12
66	12348,18	158107,97
67	11812,43	145759,79
68	11278,11	133947,37
69	10744,35	122669,26
70	10211,77	111924,91
71	9679,28	101713,14
72	9146,89	92033,85
73	8613,71	82886,97
74	8082,63	74273,26
75	7552,84	66190,62
76	7016,81	58637,78
77	6486,50	51620,97
78	5968,86	45134,47
79	5464,06	39165,61
80	4975,43	33701,55
81	4493,11	28726,12
82	4007,91	24233,01
83	3534,18	20225,10
84	3073,21	16690,92
85	2633,65	13617,72
86	2219,46	10984,06
87	1849,32	8764,60
88	1526,76	6915,28
89	1249,36	5388,52
90	1010,39	4139,16
91	814,15	3128,78
92	643,45	2314,63
93	497,68	1671,18
94	375,89	1173,50
95	276,57	797,61
96	197,71	521,04
97	136,86	323,33
98	91,47	186,48
99	58,79	95,01
100	36,21	36,21

Tablica 11: MUŠKARCI; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 4\%$ 

$x$	$D_x$	$N_x$
0	100000,00	2399198,29
1	95661,54	2299198,29
2	91924,93	2203536,75
3	88360,02	2111611,83
4	84936,76	2023251,81
5	81649,42	1938315,05
6	78490,09	1856665,63
7	75455,28	1778175,54
8	72539,27	1702720,27
9	69737,35	1630181,00
10	67045,01	1560443,64
11	64456,62	1493398,63
12	61968,15	1428942,01
13	59573,95	1366973,86
14	57269,36	1307399,92
15	55049,48	1250130,56
16	52908,16	1195081,08
17	50842,43	1142172,91
18	48848,95	1091330,48
19	46927,42	1042481,54
20	45078,25	995554,11
21	43295,32	950475,86
22	41578,64	907180,54
23	39930,77	865601,90
24	38348,16	825671,13
25	36828,22	787322,97
26	35369,19	750494,75
27	33967,91	715125,56
28	32622,77	681157,65
29	31330,85	648534,89
30	30089,74	617204,04
31	28897,46	587114,29
32	27752,67	558216,83
33	26652,37	530464,16
34	25594,60	503811,79
35	24576,49	478217,19
36	23596,88	453640,71
37	22652,99	430043,83
38	21742,75	407390,84
39	20862,30	385648,09
40	20012,62	364785,79
41	19193,84	344773,17
42	18403,04	325579,34
43	17637,09	307176,30
44	16895,71	289539,21
45	16178,25	272643,50
46	15483,74	256465,25
47	14811,76	240981,51
48	14160,66	226169,74
49	13530,11	212009,09
50	12919,11	198478,97

$x$	$D_x$	$N_x$
51	12327,78	185559,87
52	11754,76	173232,09
53	11198,33	161477,33
54	10658,28	150279,00
55	10135,01	139620,72
56	9627,65	129485,71
57	9136,42	119858,06
58	8661,74	110721,63
59	8201,46	102059,89
60	7755,88	93858,43
61	7323,49	86102,55
62	6902,60	78779,06
63	6492,95	71876,45
64	6094,84	65383,51
65	5706,27	59288,67
66	5329,33	53582,40
67	4963,48	48253,07
68	4609,42	43289,59
69	4265,63	38680,18
70	3935,17	34414,55
71	3616,48	30479,38
72	3309,95	26862,90
73	3017,53	23552,95
74	2738,77	20535,42
75	2473,71	17796,65
76	2224,78	15322,95
77	1988,85	13098,16
78	1767,13	11109,31
79	1556,63	9342,18
80	1358,49	7785,55
81	1174,26	6427,06
82	1002,62	5252,80
83	847,50	4250,18
84	709,51	3402,68
85	588,37	2693,17
86	483,18	2104,80
87	391,50	1621,62
88	312,76	1230,12
89	245,44	917,36
90	188,98	671,93
91	143,33	482,94
92	106,52	339,61
93	77,44	233,09
94	54,94	155,65
95	37,99	100,71
96	25,53	62,72
97	16,64	37,20
98	10,47	20,56
99	6,36	10,09
100	3,72	3,72

Tablica 12: ŽENE; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 4\%$ 

$y$	$D_y$	$N_y$
0	100000,00	2458954,36
1	95987,50	2358954,36
2	92275,33	2262966,86
3	88711,17	2170691,52
4	85284,67	2081980,35
5	81991,34	1996695,69
6	78827,55	1914704,35
7	75785,84	1835876,80
8	72862,24	1760090,95
9	70052,11	1687228,72
10	67351,72	1617176,60
11	64755,42	1549824,88
12	62259,21	1485069,46
13	59859,82	1422810,25
14	57552,32	1362950,43
15	55332,11	1305398,11
16	53195,94	1250066,00
17	51138,65	1196870,06
18	49157,46	1145731,41
19	47252,08	1096573,95
20	45418,26	1049321,87
21	43655,17	1003903,61
22	41961,35	960248,44
23	40334,07	918287,09
24	38770,66	877953,02
25	37268,23	839182,36
26	35824,02	801914,13
27	34436,46	766090,12
28	33102,97	731653,66
29	31820,16	698550,69
30	30586,14	666730,52
31	29398,78	636144,38
32	28255,80	606745,61
33	27155,88	578489,81
34	26096,40	551333,93
35	25076,73	525237,53
36	24096,40	500160,80
37	23152,98	476064,40
38	22244,91	452911,42
39	21370,27	430666,51
40	20527,93	409296,24
41	19716,76	388768,31
42	18935,70	369051,55
43	18182,96	350115,85
44	17457,44	331932,89
45	16757,93	314475,44
46	16083,76	297717,52
47	15433,82	281633,75
48	14807,03	266199,94
49	14202,70	251392,91
50	13619,43	237190,21

$y$	$D_y$	$N_y$
51	13058,27	223570,78
52	12516,09	210512,51
53	11992,42	197996,43
54	11485,22	186004,01
55	10995,25	174518,79
56	10521,54	163523,54
57	10063,61	153002,00
58	9619,08	142938,39
59	9188,61	133319,31
60	8772,46	124130,70
61	8370,71	115358,24
62	7981,87	106987,54
63	7603,89	99005,66
64	7235,30	91401,77
65	6877,16	84166,47
66	6526,19	77289,31
67	6183,00	70763,12
68	5846,56	64580,12
69	5516,30	58733,56
70	5192,46	53217,26
71	4874,38	48024,80
72	4561,98	43150,42
73	4254,75	38588,44
74	3954,03	34333,69
75	3659,33	30379,66
76	3366,94	26720,33
77	3082,54	23353,39
78	2809,28	20270,85
79	2546,96	17461,57
80	2296,90	14914,61
81	2054,29	12617,71
82	1814,83	10563,42
83	1584,93	8748,59
84	1364,95	7163,65
85	1158,48	5798,70
86	966,90	4640,22
87	797,90	3673,32
88	652,40	2875,41
89	528,73	2223,02
90	423,48	1694,29
91	337,95	1270,81
92	264,53	932,85
93	202,63	668,32
94	151,57	465,69
95	110,45	314,12
96	78,20	203,66
97	53,61	125,47
98	35,49	71,86
99	22,59	36,37
100	13,78	13,78

Tablica 13: MUŠKARCI; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 5\%$ 

$x$	$D_x$	$N_x$
0	100000,00	2002401,23
1	94750,48	1902401,23
2	90182,31	1807650,75
3	85859,41	1717468,44
4	81747,01	1631609,03
5	77834,71	1549862,02
6	74110,38	1472027,31
7	70566,39	1397916,93
8	67193,23	1327350,54
9	63982,59	1260157,31
10	60926,59	1196174,72
11	58016,56	1135248,13
12	55245,51	1077231,57
13	52605,23	1021986,06
14	50088,60	969380,83
15	47688,52	919292,23
16	45397,02	871603,72
17	43209,08	826206,70
18	41119,51	782997,62
19	39125,82	741878,11
20	37226,13	702752,29
21	35413,25	665526,16
22	33685,20	630112,91
23	32042,08	596427,71
24	30479,06	564385,63
25	28992,24	533906,57
26	27578,47	504914,34
27	26233,60	477335,87
28	24954,79	451102,27
29	23738,29	426147,48
30	22580,82	402409,20
31	21479,54	379828,38
32	20432,15	358348,84
33	19435,21	337916,69
34	18486,12	318481,48
35	17581,71	299995,37
36	16720,14	282413,65
37	15898,46	265693,51
38	15114,30	249795,05
39	14364,14	234680,75
40	13647,89	220316,61
41	12964,85	206668,72
42	12312,30	193703,87
43	11687,47	181391,57
44	11089,56	169704,10
45	10517,52	158614,54
46	9970,15	148097,02
47	9446,63	138126,87
48	8945,35	128680,24
49	8465,63	119734,89
50	8006,35	111269,26

$x$	$D_x$	$N_x$
51	7567,12	103262,91
52	7146,67	95695,79
53	6743,53	88549,12
54	6357,19	81805,59
55	5987,51	75448,39
56	5633,61	69460,88
57	5295,25	63827,27
58	4972,33	58532,02
59	4663,26	53559,70
60	4367,91	48896,44
61	4085,12	44528,53
62	3813,67	40443,41
63	3553,17	36629,74
64	3303,55	33076,57
65	3063,48	29773,02
66	2833,86	26709,54
67	2614,19	23875,67
68	2404,59	21261,48
69	2204,05	18856,90
70	2013,94	16652,85
71	1833,21	14638,91
72	1661,85	12805,69
73	1500,61	11143,84
74	1349,01	9643,23
75	1206,84	8294,23
76	1075,06	7087,38
77	951,91	6012,32
78	837,73	5060,41
79	730,91	4222,69
80	631,80	3491,77
81	540,92	2859,97
82	457,45	2319,06
83	383,00	1861,60
84	317,58	1478,60
85	260,85	1161,02
86	212,17	900,17
87	170,28	687,99
88	134,74	517,71
89	104,73	382,98
90	79,87	278,25
91	60,00	198,38
92	44,17	138,38
93	31,80	94,21
94	22,35	62,41
95	15,31	40,06
96	10,19	24,76
97	6,58	14,57
98	4,10	8,00
99	2,47	3,90
100	1,43	1,43

Tablica 14: ŽENE; KOMUTACIJSKI SIMBOLI,  $i = 5\%$ 

$y$	$D_y$	$N_y$
0	100000,00	2038679,69
1	95073,33	1938679,69
2	90526,08	1843606,35
3	86200,63	1753080,28
4	82081,85	1666879,65
5	78160,65	1584797,80
6	74429,02	1506637,15
7	70875,54	1432208,13
8	67492,39	1361332,59
9	64271,38	1293840,20
10	61205,31	1229568,83
11	58285,51	1168363,52
12	55505,00	1110078,01
13	52857,66	1054573,01
14	50336,08	1001715,35
15	47933,35	951379,27
16	45643,94	903445,91
17	43460,82	857801,97
18	41379,21	814341,15
19	39396,50	772961,94
20	37506,91	733565,44
21	35707,59	696058,53
22	33995,26	660350,94
23	32365,69	626355,68
24	30814,86	593989,99
25	29338,63	563175,13
26	27933,11	533836,50
27	26595,46	505903,39
28	25322,12	479307,93
29	24109,02	453985,80
30	22953,34	429876,78
31	21852,17	406923,45
32	20802,56	385071,28
33	19802,37	364268,71
34	18848,55	344466,34
35	17939,58	325617,79
36	17074,09	307678,21
37	16249,36	290604,12
38	15463,37	274354,75
39	14713,89	258891,38
40	13999,31	244177,49
41	13318,07	230178,18
42	12668,67	216860,11
43	12049,20	204191,44
44	11458,25	192142,23
45	10894,37	180683,98
46	10356,51	169789,61
47	9843,36	159433,10
48	9353,67	149589,74
49	8886,46	140236,08
50	8440,36	131349,62

$y$	$D_y$	$N_y$
51	8015,52	122909,25
52	7609,54	114893,74
53	7221,72	107284,19
54	6850,43	100062,47
55	6495,72	93212,05
56	6156,66	86716,32
57	5832,63	80559,66
58	5521,89	74727,03
59	5224,54	69205,14
60	4940,42	63980,60
61	4669,27	59040,18
62	4409,97	54370,92
63	4161,12	49960,95
64	3921,70	45799,83
65	3692,09	41878,12
66	3470,29	38186,04
67	3256,49	34715,74
68	3049,97	31459,25
69	2850,28	28409,28
70	2657,39	25559,01
71	2470,85	22901,61
72	2290,47	20430,77
73	2115,87	18140,30
74	1947,60	16024,43
75	1785,27	14076,83
76	1626,98	12291,56
77	1475,37	10664,58
78	1331,77	9189,21
79	1195,92	7857,44
80	1068,23	6661,52
81	946,30	5593,29
82	828,03	4646,99
83	716,25	3818,96
84	610,97	3102,70
85	513,61	2491,74
86	424,59	1978,13
87	347,04	1553,54
88	281,05	1206,50
89	225,61	925,44
90	178,98	699,84
91	141,47	520,86
92	109,68	379,39
93	83,22	269,71
94	61,65	186,49
95	44,50	124,84
96	31,21	80,34
97	21,19	49,13
98	13,89	27,94
99	8,76	14,05
100	5,29	5,29

## 6. GODIŠNJE ISPLATE

U poglavlju 4 definirana je oznaka  ${}_n p_z = \frac{l_{z+n}}{l_z}$  koja označava vjerojatnost da će osoba dobi  $z$  doživjeti dob  $z + n$ .

Razmotrimo slučaj kada osoba dobi  $z$  ugovori isplatu u iznosu 1 za slučaj ako doživi  $n$  godina uz valuacijsku godišnju kamatnu stopu  $i$ .

Očito je sadašnja vrijednost ovakve isplate  $v^n \frac{l_{z+n}}{l_z}$ , a prema definiciji komutacijske vrijednosti  $D_z$ , izraz  $v^n \frac{l_{z+n}}{l_z}$  možemo pisati kao

$$\frac{v^{n+z} l_{z+n}}{v^z l_z},$$

odnosno kao

$$\frac{D_{z+n}}{D_z}.$$

Ovdje se prvi puta eksplicitno vidi smisao definiranja, računanja i tabeliranja komutacijskih vrijednosti, tj. činjenica da prethodno izračunate i iskazane komutacijske vrijednosti ubrzavaju izračun i smanjuju razlike nastale zaokruživanjem. Naime, korištenjem tabeliranih vrijednosti, ne zaokružuje svatko tko nešto računa po nekom od pravila zaokruživanja i uz neku određenu preciznost, nego svi koriste iste, već izračunate i zaokružene vrijednosti, što automatski znači da će, barem u dijelu izračuna za koji postoje tabelirane vrijednosti, svi koji koriste iste aktuarske tablice dobiti potpuno isti rezultat, bez obzira kako i koliko precizno zaokruživali, odnosno koji software koristili za izračun.

Prethodno smo vidjeli da se oznakom  $a_{\overline{n}|}$  označava sadašnja vrijednost godišnje isplate u iznosu 1 tijekom slijedećih  $n$  godina, bez obzira na starost osobe u trenutku ugovaranja takve isplate i činjenicu da li je osoba živa u trenucima isplate 1, 2, 3, ...  $n$ .

Oznakom  $a_z$  označava se sadašnja vrijednost godišnje isplate u iznosu 1, ali samo do trenutka dok je osoba koja je bila starosti  $z$  u trenutku ugovaranja živa. Odmah se vidi da oznaka  $a_{\overline{n}|}$  prejudicira  $n$  budućih isplata, dočim oznaka  $a_z$  ne prejudicira ništa, osim starosti osobe u trenutku ugovaranja. U ovom slučaju broj isplata može biti ili 0 (ako je osoba umrla prije dospijeca prve isplate) ili jednak broju godina koje je osoba doživjela od trenutka ugovaranja.

Očito vrijedi da je  $a_z$  zbroj sadašnjih vrijednosti isplata u iznosu 1 nakon svake od 'doživljenih' godina, odnosno:

$$\begin{aligned} a_z &= v^1 \frac{l_{z+1}}{l_z} + v^2 \frac{l_{z+2}}{l_z} + v^3 \frac{l_{z+3}}{l_z} + \dots + v^n \frac{l_\omega}{l_z} = \frac{D_{z+1}}{D_z} + \frac{D_{z+2}}{D_z} + \frac{D_{z+3}}{D_z} + \dots + \frac{D_\omega}{D_z} \\ &= \frac{1}{D_z} (D_{z+1} + D_{z+2} + D_{z+3} + \dots + D_\omega) = \frac{N_{z+1}}{D_z} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_z = \frac{N_{z+1}}{D_z}}$$

U ovom trenutku možemo zaključiti da, kada bi isplata mirovina bila godišnja, omjer između komutacijskih vrijednosti  $N_{z+1}$  i  $D_z$  pomnožen s godišnjim iznosom mirovine bio bi upravo iznos naknade štete za osobu starosti  $z$  u času obračuna naknade štete.

Ako se isplata naknade štete ograniči na neki određeni broj godina (npr. obiteljska mirovina za dijete koja se isplaćuje najduže do 26.g. djeteta) i ako taj broj godina označimo s  $n$ , sadašnja vrijednost takve isplate se označava s  $a_{z:\overline{n}|}$  te iznosi:

$$\begin{aligned} a_{z:\overline{n}|} &= \frac{D_{z+1}}{D_z} + \frac{D_{z+2}}{D_z} + \frac{D_{z+3}}{D_z} + \dots + \frac{D_{z+n}}{D_z} = \\ &= \sum_{u=1}^n \frac{D_{z+u}}{D_z} = \frac{1}{D_z} \left( \sum_{u=1}^{\omega} D_{z+u} - \sum_{u=n+1}^{\omega} D_{z+u} \right) = \frac{N_{z+1} - N_{z+n+1}}{D_z} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_{z:\overline{n}|} = \frac{N_{z+1} - N_{z+n+1}}{D_z}}$$

Analogno kao i kod doživotne isplate kada bi se mirovina isplaćivala godišnje tada bi omjer između vrijednosti  $(N_{z+1} - N_{z+n+1})$  i vrijednosti  $D_z$  pomnožen s godišnjim iznosom mirovine bio upravo iznos naknade štete za osobu starosti  $z$  u trenutku izračuna kojoj će se mirovina isplaćivati još  $n$  godina.

**Primjer 6.1:** U primjeru 3.1 vidjeli smo da je  $a_{\overline{20}|} = 12,4622$  vrijednost koja omogućava godišnju isplatu u iznosu 1 tijekom 20 godina od časa izračuna, uz valuacijsku kamatnu stopu od 5%. Pogledajmo sada koliko iznosi sadašnja vrijednost isplate iznosa 1 tijekom 20 godina uz istu valuacijsku kamatnu stopu, ali za mušku osobu staru 6 godina u času izračuna i za mušku osobu staru 65 godina, uvažavajući u oba slučaja aktuarske pretpostavke o smrtnosti (isplata prestaje ako smrt nastupi prije isteka 20 godina od časa izračuna). Također, pogledajmo isti slučaj, ali za doživotnu isplatu.

$$a_{6:\overline{20}|} = \frac{N_7 - N_{27}}{D_6} = \frac{1397916,93 - 477335,87}{74110,38} = 12,4218 \qquad a_6 = \frac{N_7}{D_6} = \frac{1397916,93}{74110,38} = 18,8626$$

$$a_{65:\overline{20}|} = \frac{N_{66} - N_{86}}{D_{65}} = \frac{26709,54 - 900,17}{3063,48} = 8,4249 \qquad a_{65} = \frac{N_{66}}{D_{65}} = \frac{26709,54}{3063,48} = 8,7187$$

Odmah je vidljivo da je vrijednost  $a_{6:\overline{20}|}$  vrlo blizu vrijednosti  $a_{\overline{20}|}$ , ali ipak nešto manja. To proizlazi iz činjenice da je vjerojatnost da će osoba starosti 6 godina umrijeti prije dobi od 26 godina jako mala. U drugom slučaju razlika između vrijednosti  $a_{65:\overline{20}|}$  i vrijednosti  $a_{\overline{20}|}$  je puno izraženija ( $a_{65:\overline{20}|}$  je manje od  $a_{\overline{20}|}$  za cca 30% iznosa od  $a_{\overline{20}|}$ ).

Slično se može zaključiti i za vrijednosti  $a_6$  i  $a_{65}$  u odnosu na vrijednosti  $a_{6:\overline{20}|}$  i  $a_{65:\overline{20}|}$ .

Vidimo da su vrijednosti  $a_{65}$  i  $a_{65:\overline{20}|}$  međusobno vrlo blizu što je posljedica činjenice da je vjerojatnost da će osoba stara 65 godina doživjeti više od 85 godina mala. Istovremeno

je  $a_6$  veće od  $a_{6:\overline{20}|}$  za cca 50% kao posljedica činjenice da je vjerojatnost da će osoba stara 6 godina doživjeti više od 26 godina vrlo visoka.

Ove razlike među izračunatim vrijednostima su naravno puno očitije kada se ne računa s godišnjim iznosom isplate 1 (kao što je u prethodno iznesenim primjerima izračuna) nego sa stvarnim iznosom godišnje isplate s kojim, u tom slučaju, treba pomnožiti dobivene rezultate.

U primjeru 3.1 izračunat je iznos  $a_{\overline{20}|}$  za godišnju isplatu od  $60.000kn$  koji iznosi  $60.000a_{\overline{20}|} = 747.732kn$ .

Iznosi  $a_{6:\overline{20}|}$  i  $a_{65:\overline{20}|}$  za godišnju isplatu od  $60.000kn$  su:

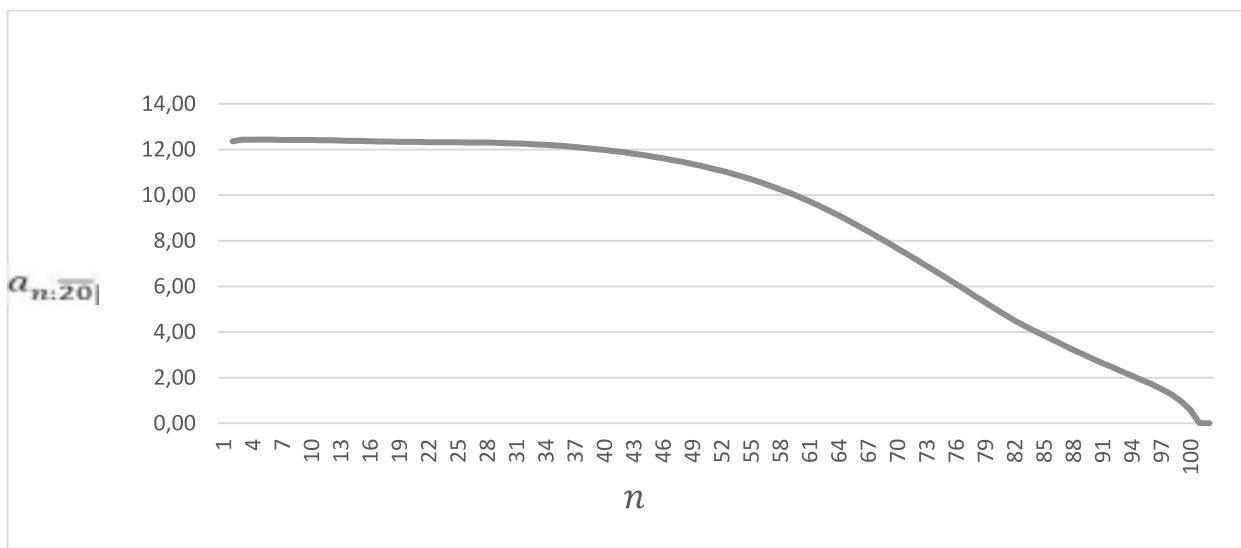
$60.000a_{6:\overline{20}|} = 12,4218 \cdot 60.000 = 745.308 \rightarrow$   
razlika u odnosu na  $60.000a_{\overline{20}|}$  je samo  $-2.424kn$

$60.000a_{65:\overline{20}|} = 8,4249 \cdot 60.000 = 505.494 \rightarrow$   
razlika u odnosu na  $60.000a_{\overline{20}|}$  je visokih  $-242.238kn$

$60.000a_6 = 18,8626 \cdot 60.000 = 1.131.756 \rightarrow$   
razlika u odnosu na  $60.000a_{6:\overline{20}|}$  je visokih  $+386.448kn$

$60.000a_{65} = 8,7187 \cdot 60.000 = 523.122 \rightarrow$   
razlika u odnosu na  $60.000a_{65:\overline{20}|}$  je na prvi pogled značajnih  $+17.628kn$ , međutim ako se uzme u obzir da je pretpostavljeni godišnji iznos  $60.000kn$  to je manje od 30% godišnjeg iznosa.

Pogledajmo graf od  $a_{n:\overline{20}|}$  za mušku populaciju i valuacijsku kamatnu stopu od 5%:



Iz grafa je vidljivo da je vrijednost za  $a_{n:\overline{20}|}$  sve do dobi od cca  $n = 40$  godina gotovo ista za svaki  $n$ , a tek nakon dobi od 40 godina izraženije pada.



## 7. ISPODGODIŠNJE ISPLATE

Do sada smo vidjeli kako se može izračunati iznos jednokratne naknade štete u slučajevima kada se šteta isplaćuje godišnje. Preostaje izračun za slučaj koji nas operativno najviše zanima, a to je slučaj jednokratne naknade štete kada se šteta isplaćuje mjesečno. Drugim riječima, zanima nas slučaj jednokratne nadoknade svih budućih mjesečnih isplata mirovine, kako za slučaj doživotne isplate tako i za slučaj isplate na neki određeni broj godina.

Za osobu dobi  $z$  promotrimo isplatu godišnjeg iznosa 1 koji se isplaćuje  $m$  puta godišnje u iznosima od po  $1/m$ . Nadalje, ti iznosi se isplaćuju u periodima duljine  $1/m$ , tj. u trenucima kada je osoba dobi:

$$z + \frac{1}{m}, z + \frac{2}{m}, z + \frac{3}{m}, \dots, z + 1, z + 1 + \frac{1}{m}, \dots$$

Vidjeli smo prethodno da je za period  $n$  diskontni faktor  $v^n$  i da za osobu starosti  $z$  vjerojatnost doživljenja dobi  $z + n$  iznosi  ${}_n p_z$ .

Potpuno analogno, za period  $\frac{1}{m}$  diskontni faktor je  $v^{\frac{1}{m}}$ , a vjerojatnost da će osoba dobi  $z$  doživjeti dob  $z + \frac{1}{m}$  iznosi  ${}_{\frac{1}{m}} p_z$ .

Prema iznesenom slijedi da:

- sadašnja vrijednost prve isplate od  $\frac{1}{m}$  iznosi  $\frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} {}_{\frac{1}{m}} p_z$
- sadašnja vrijednost druge isplate od  $\frac{1}{m}$  iznosi  $\frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} {}_{\frac{2}{m}} p_z$
- ....
- sadašnja vrijednost  $u$ -te isplate od  $\frac{1}{m}$  iznosi  $\frac{1}{m} v^{\frac{u}{m}} {}_{\frac{u}{m}} p_z$
- ....

Ukupnu sadašnju vrijednost isplate od  $m$  puta godišnje za osobu dobi  $z \leq \omega$  označimo s  $a_z^{(m)}$ .

Zbrajanjem sadašnjih vrijednosti svih isplata od  $\frac{1}{m}$  slijedi da je:

$$a_z^{(m)} = \sum_{u=1}^{m(\omega-z)} \frac{1}{m} v^{\frac{u}{m}} {}_{\frac{u}{m}} p_z = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^{m(\omega-z)} v^{\frac{u}{m}} \frac{l_{z+\frac{u}{m}}}{l_z} = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^{m(\omega-z)} \frac{D_{z+\frac{u}{m}}}{D_z},$$

odnosno, ako se isplata ograniči na  $n \leq \omega - z$  godina, slijedi da je:

$$a_{z:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^{nm} \frac{D_{z+\frac{u}{m}}}{D_z}.$$

Vidjeli smo da su nam vrijednosti za  $D_z$  poznate za svaki  $z = 0, 1, 2, \dots, \geq 100$ , ali kako odrediti vrijednosti za  $D_{z+\frac{u}{m}}$ ?

Odgovor na ovo pitanje proizlazi iz primjene Woolhouseove formule [*Wesley Stoker Barker Woolhouse (1809-1893) - engleski aktuar*] koja je predmet proučavanja matematičke analize i koju ovdje nećemo izvoditi niti dokazivati.

Woolhouseova formula<sup>1</sup> glasi:

*Ako je  $f$  dovoljno puta derivabilna funkcija tada vrijedi:*

$$\frac{1}{m} \sum_{u=0}^{nm-1} f_{\frac{u}{m}} \approx \sum_{u=0}^{n-1} f_u + \frac{m-1}{2m} (f_n - f_0) - \frac{m^2-1}{12m^2} (f'_n - f'_0) + \frac{m^4-1}{720m^4} (f''''_n - f''''_0) - \dots$$

Primijenimo Woolhouseovu formulu na funkciju  $f_u = \frac{D_{z+u}}{D_z}$ .

S lijeve strane imamo:

$$\frac{1}{m} \sum_{u=0}^{nm-1} f_{\frac{u}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{u=0}^{nm-1} \frac{D_{z+\frac{u}{m}}}{D_z} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{u=1}^{nm} \frac{D_{z+\frac{u}{m}}}{D_z} - \frac{1}{m} \frac{D_{z+\frac{nm}}{m}}}{D_z} = a_{z:\overline{nm}|} - \frac{1}{m} \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right).$$

Istovremeno prvi član s desne strane je

$$\sum_{u=0}^{n-1} f_u = \sum_{u=0}^{n-1} \frac{D_{z+u}}{D_z} = 1 + \sum_{u=1}^n \frac{D_{z+u}}{D_z} - \frac{D_{z+n}}{D_z} = a_{z:\overline{n}|} - \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right),$$

a drugi član (obzirom da vrijedi  $f_0 = 1$ ) je

$$\frac{m-1}{2m} (f_n - f_0) = \frac{m-1}{2m} \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right).$$

Ostali članovi s desne strane koji alterniraju iz  $-$  u  $+$  uobičajeno se izostavljaju iz izračuna jer je njihov utjecaj na konačni iznos zanemarivo mali. Ovaj zaključak proizlazi iz činjenica da već treći član ima koeficijent 12 u nazivniku, četvrti 720, itd. (svaki idući ima sve veći koeficijent u nazivniku) te da za svaki  $m \geq 2$ ,  $j \geq 1$  i  $z, u \geq 0$  vrijede slijedeće nejednakosti:

$$\frac{m^j - 1}{m^j} < 1, \quad \frac{D_{z+u}}{D_z} \leq 1.$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane slijedi:

<sup>1</sup> D. Bakić & D. Francišković : Financijska i aktuarska matematika [91]

$$\begin{aligned}
a_{z:\bar{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m} \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) &= a_{z:\bar{n}|} - \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) + \frac{m-1}{2m} \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) \\
a_{z:\bar{n}|}^{(m)} &= a_{z:\bar{n}|} - \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) + \frac{m-1}{2m} \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) + \frac{1}{m} \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) \\
a_{z:\bar{n}|}^{(m)} &= a_{z:\bar{n}|} + \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) \left( -1 + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} \right) \\
a_{z:\bar{n}|}^{(m)} &= a_{z:\bar{n}|} + \left( \frac{D_{z+n}}{D_z} - 1 \right) \left( \frac{-m+1}{2m} \right) = a_{z:\bar{n}|} + \frac{m-1}{2m} \left( 1 - \frac{D_{z+n}}{D_z} \right)
\end{aligned}$$

$$a_{z:\bar{n}|}^{(m)} = \frac{N_{z+1} - N_{z+n+1} + \frac{m-1}{2m}(D_z - D_{z+n})}{D_z}$$

Ako sada pustimo  $n \rightarrow \infty$  te uvažimo da je  $D_{\omega+n} = N_{\omega+n} = 0$ , slijedi

$$a_z^{(m)} = \frac{N_{z+1} + \frac{m-1}{2m}D_z}{D_z} = \frac{N_{z+1}}{D_z} + \frac{m-1}{2m}$$

Ove dvije upravo izvedene formule za izračun vrijednosti  $a_z^{(m)}$  i  $a_{z:\bar{n}|}^{(m)}$  su osnovne formule koje se koriste za izračun svote jednokratne naknade štete (kapitalizirani iznos) u HZMO.

**Primjer 7.1:** Prije stvarnih primjera izračuna kapitaliziranih iznosa naknade štete iz prakse i specifičnosti koje se uočavaju prilikom pojedinih izračuna, zanima nas, nastavno na izračunate rezultate iz prethodne primjera 3.1, 3.3, i 6.1, koliko iznose sadašnje vrijednosti  $a_{z:\bar{n}|}^{(m)}$  i  $a_z^{(m)}$  za  $z = x$  (muški spol) = 65 i za  $z = x = 6$ , za  $n = 20$  i doživotno, te za  $m = 12$ , uz valuacijsku kamatnu stopu od 5%. Također, zanimaju nas ove vrijednosti pomnožene s godišnjim iznosom od  $60.000 = 6 \cdot 10^4$  kako je i u prethodnim primjerima (inflaciju zanemarujemo).

Prethodni rezultati za valuacijsku kamatnu stopu od 5% i godišnju isplatu 1 iznose:

$$a_{\overline{20}|} = 12,4622 \text{ i } a_{\overline{20}|}^{(12)} = 12,745283,$$

a još i za muški spol, iznose :

$$\begin{aligned}
a_{65:\overline{20}|} &= 8,4249 \\
a_{65} &= 8,7187 \\
a_{6:\overline{20}|} &= 12,4218 \\
a_6 &= 18,8626
\end{aligned}$$

Tražimo  $a_{65:\overline{20}|}^{(12)}$ ,  $a_{65}^{(12)}$ ,  $a_{6:\overline{20}|}^{(12)}$  i  $a_6^{(12)}$  za valuacijsku kamatnu stopu od 5% i muški spol:

$$a_{65:\overline{20}|}^{(12)} = \frac{N_{66} - N_{86} + \frac{11}{24}(D_{65} - D_{85})}{D_{65}} = \frac{26709,54 - 900,17 + 0,4583(3063,48 - 260,85)}{3063,48} = 8,8441$$

$$a_{65}^{(12)} = \frac{N_{66}}{D_{65}} + \frac{11}{24} = a_{65} + \frac{11}{24} = 8,7187 + 0,4583 = 9,1770$$

$$a_{6:\overline{20}|}^{(12)} = \frac{N_7 - N_{27} + \frac{11}{24}(D_6 - D_{26})}{D_6} = \frac{1397916,93 - 477335,87 + 0,4583(74110,38 - 27578,47)}{74110,38} = 12,7095$$

$$a_6^{(12)} = \frac{N_{76}}{D_6} + \frac{11}{24} = a_6 + \frac{11}{24} = 18,8626 + 0,4583 = 19,3209$$

Prethodni rezultati za valuacijsku kamatnu stopu od 5% i godišnju isplatu  $6 \cdot 10^4$ :

$$6 \cdot 10^4 a_{20|} = 747.732 \text{ i } 6 \cdot 10^4 a_{20|}^{(12)} = 764.717$$

i muški spol:

$$6 \cdot 10^4 a_{65:\overline{20}|} = 505.494$$

$$6 \cdot 10^4 a_{65} = 523.122$$

$$6 \cdot 10^4 a_{6:\overline{20}|} = 745.308$$

$$6 \cdot 10^4 a_6 = 1.131.756$$

→

$$6 \cdot 10^4 a_{65:\overline{20}|}^{(12)} = 60.000 \cdot 8,8441 = 530.646$$

$$6 \cdot 10^4 a_{65}^{(12)} = 60.000 \cdot 9,1770 = 550.620$$

$$6 \cdot 10^4 a_{6:\overline{20}|}^{(12)} = 60.000 \cdot 12,7095 = 762.570$$

$$6 \cdot 10^4 a_6^{(12)} = 60.000 \cdot 19,3209 = 1.159.254$$

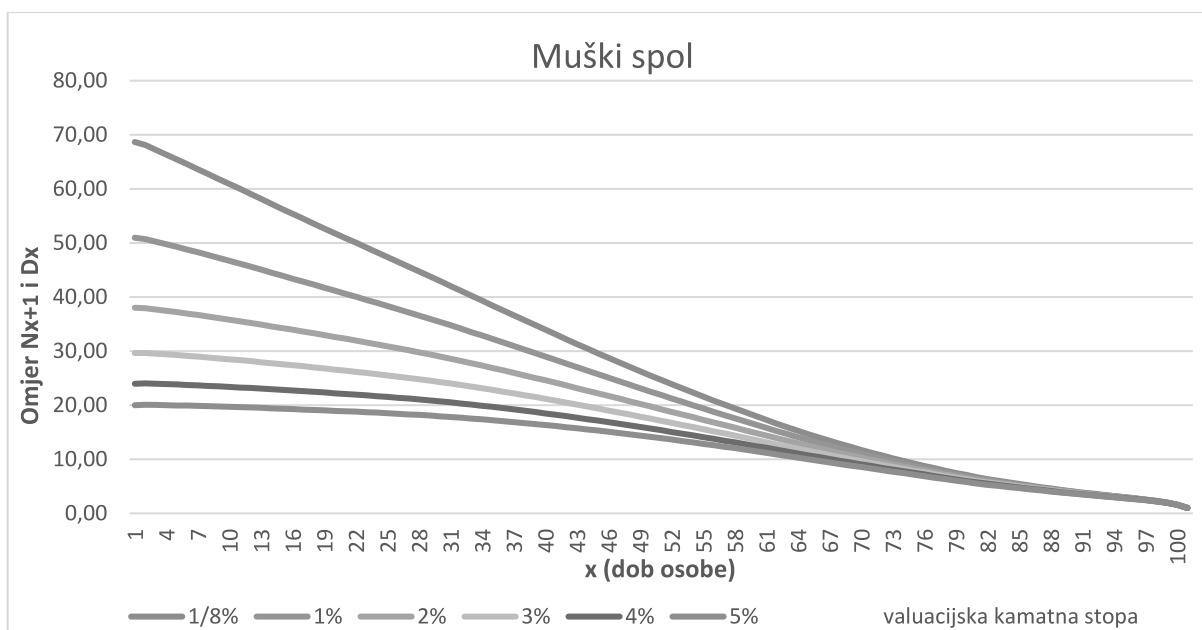
Uočavamo kako su sve vrijednosti s indeksom  $^{(12)}$  neznatno (u kontekstu mjesečnih isplata od po 5.000kn) veće od pripadnih vrijednosti bez ovog indeksa. To je potpuno u skladu s prethodnim zaključcima i dokazom da je  $i^p < i, \forall p > 1$ .

Zanimljivo je usporediti dobivene rezultate s 'očekivanim' rezultatima obzirom na prosječni životni vijek muškarca u RH koji iznosi oko 75 godina, ali bez utjecaja kamata i smrtnosti.

Za muškarca dobi 65 godina očekivano preostalo trajanje života je još 10 godina što uz isplatu od 5.000kn mjesečno ili 60.000kn godišnje iznosi ukupno 600.000kn. Uz utjecaj kamata i smrtnosti za godišnju isplatu potrebno je 523.122kn, a za mjesečnu 550.620. Očito je da razlike nisu prevelike (u okvirima iznosa jedne godišnje isplate).

Ali za muškarca dobi 6 godina očekivano preostalo trajanje života je još 69 godina što uz isplatu od 5.000kn mjesečno ili 60.000kn godišnje iznosi ukupno 4.140.000kn. Uz utjecaj kamata i smrtnosti za godišnju isplatu potrebno je 1.131.756kn, a za mjesečnu 1.159.254. Ovdje su razlike vrlo visoke te se iznosi međusobno razlikuju za preko 70%.

Ako pogledamo obje osnovne formule za izračun vrijednosti  $a_z^{(m)}$  i  $a_{z:\overline{n}|}^{(m)}$  lako zaključujemo da će dobiveni iznos najviše ovisiti o omjeru vrijednosti  $N_{z+1}$  i  $D_z$  prema različitim valuacijskim kamatnim stopama za koje su te vrijednosti formirane. Na idućim grafovima prikazano je ponašanje ovog omjera prema spolu i svih 6 valuacijskih kamatnih stopa za koje u dokumentu TAM postoje tabelirane vrijednosti.



Sasvim je očito da su nakon dobi od cca 80 godina međusobne razlike u vrijednostima ovog omjera prema različitim valuacijskim kamatnim stopama vrlo male (svih 6 linija grafova stapa se u jednu). Također, iz same definicije komutacijskih vrijednosti  $N_z$  i  $D_z$  jasno je da se vrijednost  $N_z$  sve više približava vrijednosti  $D_z$  kako se  $z$  približava  $\omega$ , čime je i omjer ovih vrijednosti sve manji (uočimo da je po definiciji  $N_\omega = D_\omega$ ).

**NAPOMENA:** Formule za izračun sadašnjih vrijednosti  $a_z^{(m)}$  i  $a_{z:\overline{n}|}^{(m)}$  iskazane su u pravnom aktu TAM, u glavi V, ali razdvojeno po spolu ( $z = x$  za muški spol, odnosno  $z = y$  za ženski spol) te prilagođene za  $m = 12$  i mjesečni iznos mirovine  $M$ . Kako se u RH mirovine isplaćuju mjesečno unatrag (unatrag znači da se mirovina za promatrani mjesec isplaćuje po isteku tog mjeseca) 12 puta godišnje, slijedi da je ukupni iznos mirovine isplaćene za neku godinu jednak upravo  $12M$ . Radi dosljednosti ovdje se navode formule točno kako su navedene u pravnom aktu TAM i objavljene u NN.

*citat iz TAM, glava V.*

*Jednokratni iznos  $S$  naknade štete zbog nesposobnosti za rad i smrti računa se po sljedećim formulama:*

*a) Za mušku osobu u dobi  $x$  i obračunati početni mjesečni iznos mirovine  $M$  koja se isplaćuje mjesečno unatrag s isplatom ograničenom na  $n$  godina:*

$$S = 12 \cdot M \cdot a_{x:\overline{n}|}^{(12)} = 12 \cdot M \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{11}{24}(D_x - D_{x+n})}{D_x}$$

*b) Za žensku osobu u dobi  $y$  i obračunati početni mjesečni iznos mirovine  $M$  koja se isplaćuje mjesečno unatrag s isplatom ograničenom na  $n$  godina:*

$$S = 12 \cdot M \cdot a_{y:\overline{n}|}^{(12)} = 12 \cdot M \cdot \frac{N_{y+1} - N_{y+n+1} + \frac{11}{24}(D_y - D_{y+n})}{D_y}$$

*c) Za mušku osobu u dobi  $x$  i obračunati početni mjesečni iznos mirovine  $M$  koja se isplaćuje mjesečno unatrag s doživotnom isplatom:*

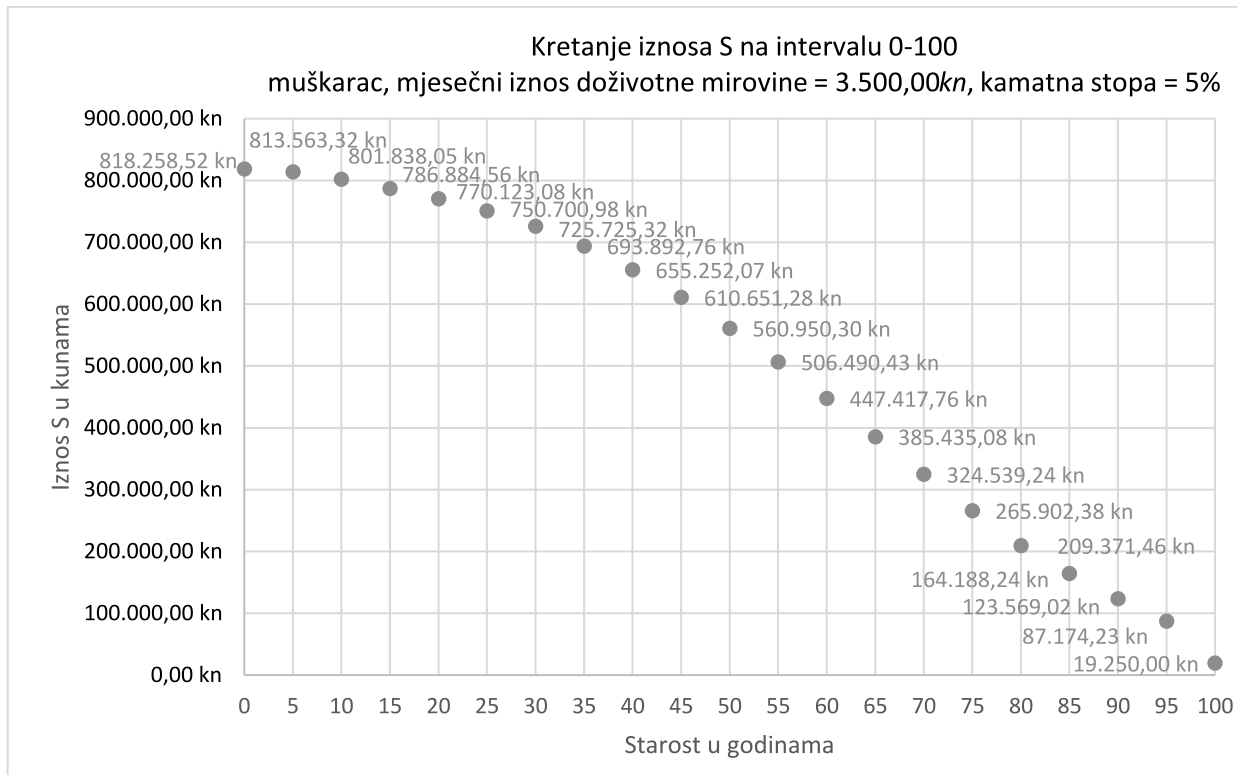
$$S = 12 \cdot M \cdot a_x^{(12)} = 12 \cdot M \cdot \left( \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{11}{24} \right)$$

*d) Za žensku osobu u dobi  $y$  i obračunati početni mjesečni iznos mirovine  $M$  koja se isplaćuje mjesečno unatrag s doživotnom isplatom:*

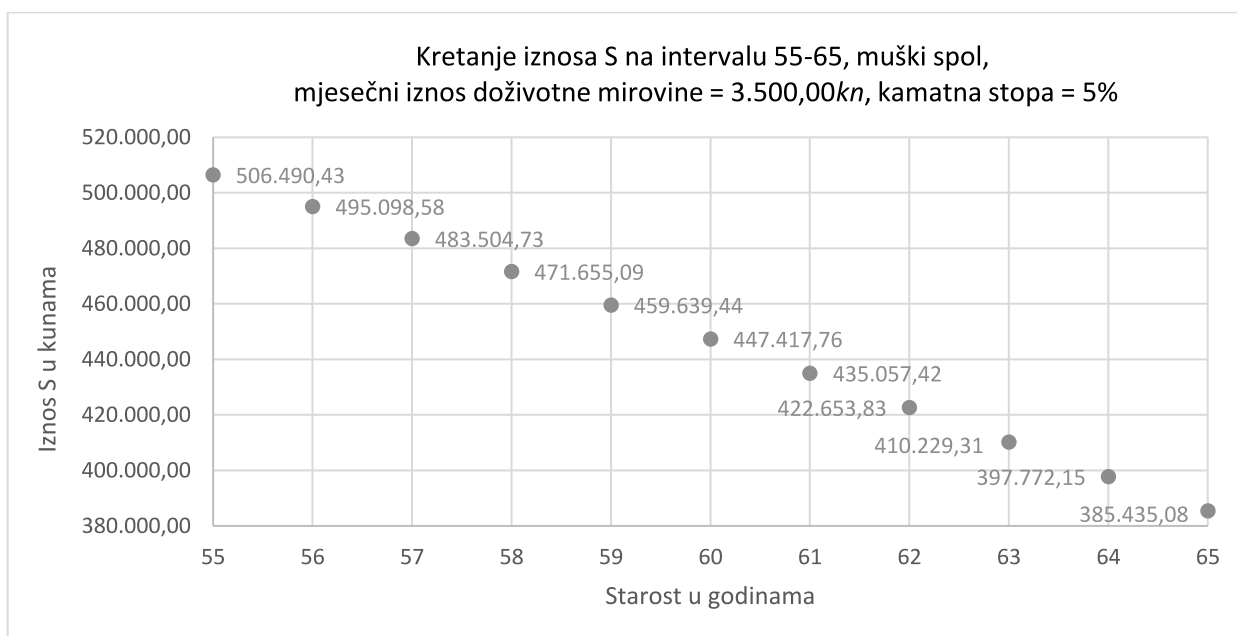
$$S = 12 \cdot M \cdot a_y^{(12)} = 12 \cdot M \cdot \left( \frac{N_{y+1}}{D_y} + \frac{11}{24} \right)$$

## 8. LINEARNA INTERPOLACIJA

Pogledajmo na grafu koliki su jednokratni iznosi isplate  $S$  za mirovinu od  $3.500,00kn$  mjesečno, muškarca i valuacijsku kamatnu stopu od  $5\%$  prema starosti na datum kapitalizacije u intervalima od po 5 godina.

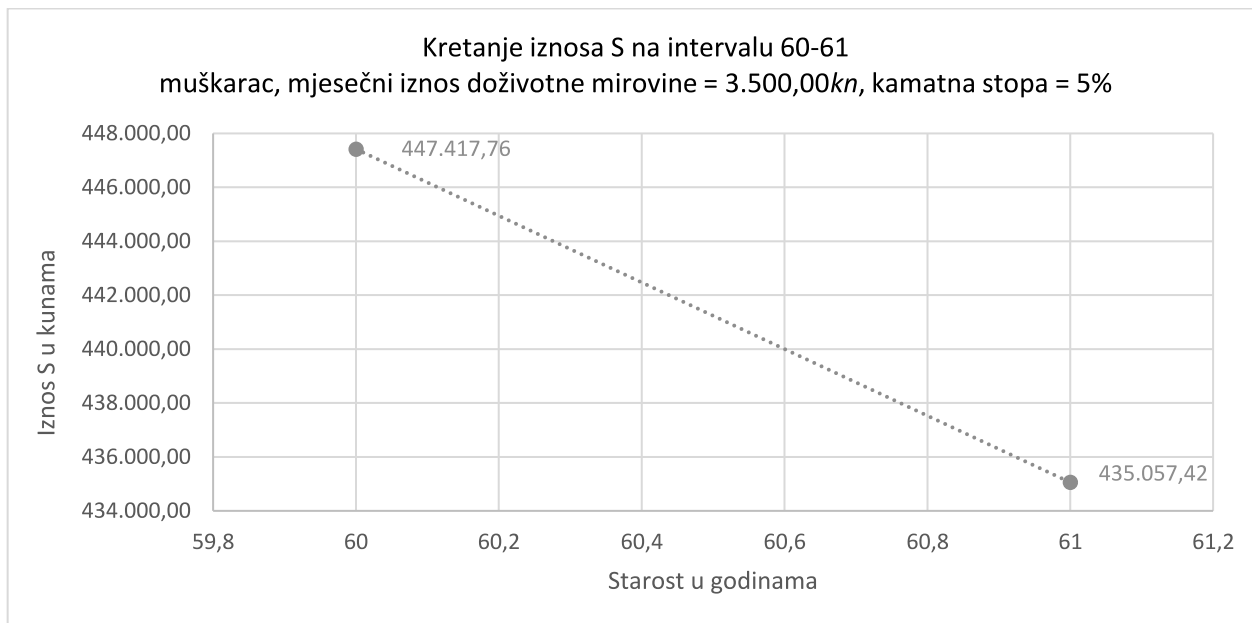


Suzimo interval starosti na područje od 10 godina, između dobi 55 i 65, a interval za iznos  $S$  na područje između  $380.000,00kn$  i  $520.000,00kn$ .



Uočavamo da, ako bi izračunale vrijednosti međusobno spojili linijom, graf na prvoj slici ima oblik padajuće krivulje s (naslućujemo) barem dvije točke infleksije dok graf na drugoj slici najviše slični pravcu.

Suzimo interval na samo jednu godinu (dob između 60 i 61) i povucimo segment pravca kroz izračunale vrijednosti.



Razumno je pretpostaviti da se pripadne vrijednosti  $S$  za sve dobi između 60 g. i 61 g. (za koje nemamo tabelirane iznose  $N_x$  i  $D_x$ ) linearno mijenjaju od iznosa za 60 g. do iznosa za 61 g. tj. da se vrijednosti  $S$  za sve dobi između 60 g. i 61 g. mogu izračunati uz pretpostavku da su to vrijednosti neke linearne funkcije koja spaja točke vrijednosti te funkcije za argumente funkcije 60 i 61.

Općenito, ako imamo linearnu funkciju tj. jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku  $y = kx + l$ , gdje je  $k$  koeficijent smjera pravca, a  $l$  odsječak na osi  $y$  koji prolazi kroz točke  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ , jednostavnim rješavanjem sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

(1)  $y_1 = kx_1 + l$  i (2)  $y_2 = kx_2 + l$ , dobivamo da je:

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad l = y_1 - x_1 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za  $k$  i  $l$  u eksplicitni oblik jednadžbe pravca i sređivanjem izraza slijedi:

$$y = y_1 + (x - x_1) \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Pomoću ovog izraza, uz pretpostavku o linearnosti, možemo izračunati vrijednost  $y$  za bilo koji argument  $x$  u intervalu od  $x_1$  do  $x_2$ . Kažemo da smo linearno interpolirali vrijednosti od  $y_1$  do  $y_2$  za argumente od  $x_1$  do  $x_2$ .

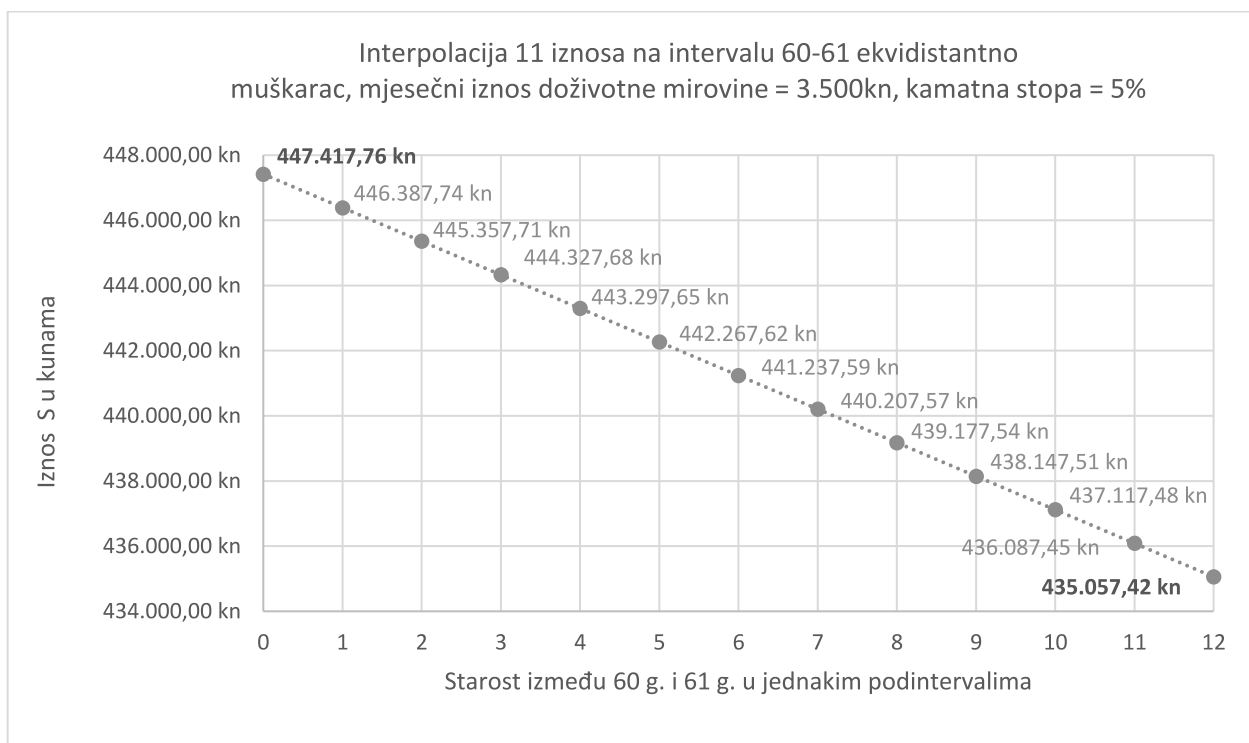


Generalno, interpolacija je metoda izračuna vrijednosti funkcije u novim točkama koje se nalaze unutar intervala definiranog diskretnim skupom podataka, odnosno metoda stvaranja novih podataka uz pomoć poznatih podataka. Može se reći da interpolacija procjenjuje vrijednost na temelju postojećih dostupnih vrijednosti podataka koje su relevantne za neki izračun.

U kontekstu nadoknade štete metoda je vrlo korisna obzirom da su vrijednosti iz kojih se izračunava kapitalizirani iznos tabelirane samo za dobi 'od pune godine', a u praksi nije optimalno zaokruživati dob na najbližu 'punu godinu' jer razlike u izračunu vrijednosti za dvije susjedne dobi često mogu biti financijski vrlo značajne.

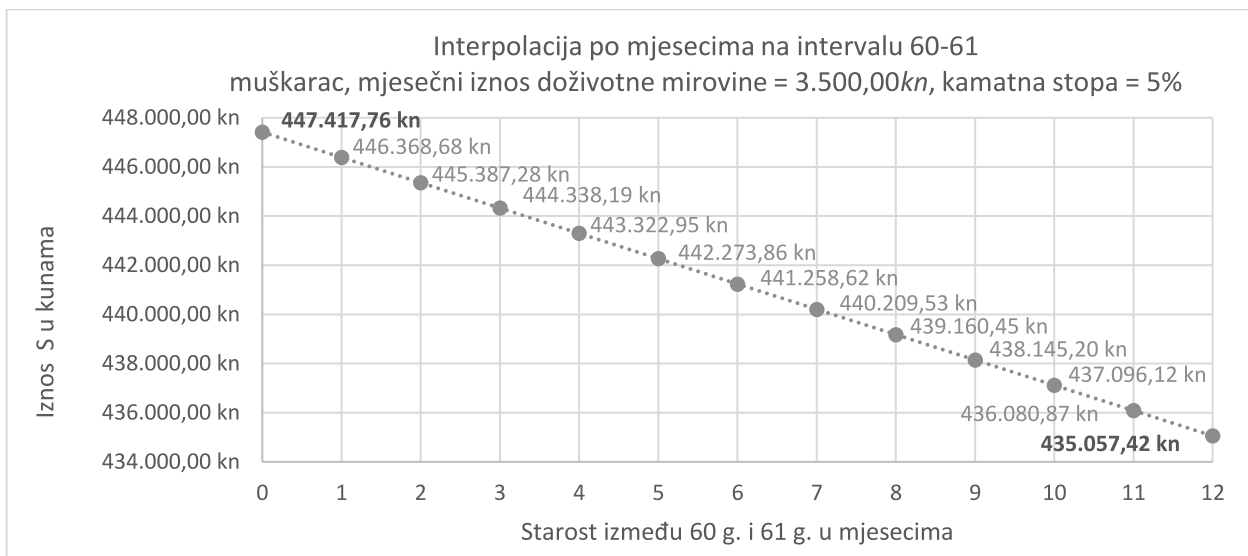
Već u primjeru preko kojeg smo došli do postupka linearne interpolacije vidi se da je izračunati iznos  $S$  prema zadanim parametrima za dob od 60 g. jednak  $447.417,76kn$ , a za dob od 61 g. jednak  $435.057,42kn$ , što međusobnim oduzimanjem daje značajnu razliku od  $12.360,34kn$ . Za mjesečni iznos mirovine veći od  $3.500,00kn$  te za kamatne stope manje od 5% ta bi razlika bila još izraženija.

Pogledajmo sada koliko iznose interpolirane vrijednosti za slučaj kada interval između 60 i 61 podijelimo na 12 potpuno jednakih dijelova tj. između interpoliramo 11 iznosa.



Uočimo da je razlika u iznosima između svaka 2 pod-intervalu točno  $1.030,0283kn$ .

Kako godina nije jednoliko podijeljena na 12 pod-intervalu jer mjeseci nemaju isti broj dana takav način interpoliranja nije dovoljno precizan. Jedini sasvim precizan način je interpolirati prema točnom broju dana koji su protekli od zadnjeg rođendana osobe pa do datuma izračuna što je prikazano na idućem grafu.



Vidimo da su interpolirani iznosi prema prvom i drugom opisanom načinu interpolacije vrlo blizu, ali se ipak svi međusobno razlikuju. Minimalna razlika je +1,97kn u korist drugog izračuna na 7. interpoliranom iznosu, a maksimalna +29,57kn, opet u korist drugog izračuna, ali na 2. interpoliranom iznosu.

U prethodnom primjeru je korištena pretpostavka da je osoba rođena točno 1.1., a interpolirano je prema prosječnom broju dana koje ima svaka godina što je broj 365,2425.

Za interpolaciju po danima, ako se želi biti sasvim precizan, treba gledati točan broj dana koliko će proći između  $z$ -tog i  $z + 1$ -tog rođendana osobe za koju se obavlja izračun. To je ili 365 dana ili 366 dana ili općenito 365,2425 dana kao apsolutno precizan prosječni broj dana svake godine iz razloga što se točno razdoblje pojavljivanja prijestupnih godina odnosi na razdoblje od 400 godina. Uobičajeno pravilo da prestupna godina nastupa svake 4 godine nije sasvim precizno

Precizno pravilo za određivanje prijestupnih godina glasi:

*Godina je prijestupna kada je djeljiva bez ostataka s 4, a nije sa 100  
ili kada je djeljiva bez ostataka s 400.*

Zadnja 'sporna' bila je 2000.-a godina koja je bila prijestupna (jer je djeljiva s 400 bez ostatka), a prije toga 1900.-a godina koja nije bila prijestupna (jer je djeljiva s 4 bez ostatka, ali je djeljiva sa 100 bez ostatka, a nije djeljiva s 400 bez ostatka).

Prema navedenom pravilu u razdoblju od 400 godina imamo 97 prijestupnih godina i 303 ne-prijestupne godine iz čega slijedi da je prosječan broj dana u svakoj godini =  $(97 \cdot 366 + 303 \cdot 365) / 400 = 365,2425$ .

U svim daljnjim izračunima u kojima se primjenjuje linearna interpolacija korišteno je izneseno pravilo o prosječnom broju dana u godini u iznosu od 365,2425 dana, odnosno interpolirano je prema formuli:

$$S = S_z + (365,2425 - ddd) \frac{S_z - S_{z+1}}{365,2425},$$

gdje je  $ddd$  broj dana proteklih od  $z$ -tog rođendana osobe do datuma kapitalizacije.

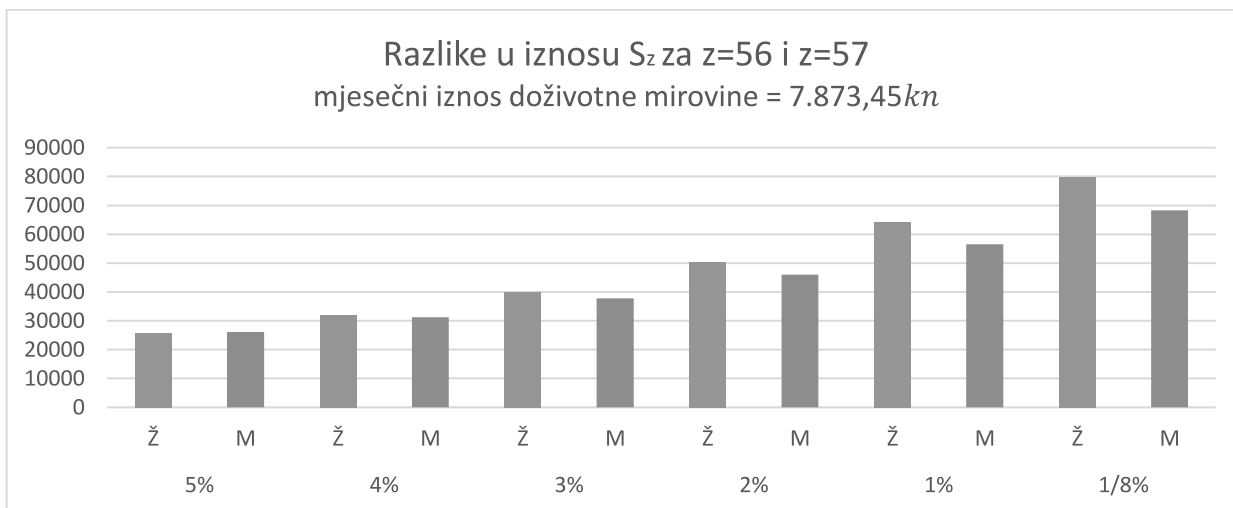
## 9. PRIMJERI IZ PRAKSE I USPOREDNI IZRAČUNI

U prethodnom poglavlju opisana je metoda linearne interpolacije koja se koristi prilikom izračuna kapitalizirane svote naknade štete u HZMO. Primjenom metode postiže se svojevrsna 'ravnopravnost' u raspodjeli obračunatog iznosa između HZMO i odgovorne osobe za isplatu štete, a obzirom na starost osobe na datum kapitalizacije u danima između dva rođendana i činjenicu da su komutacijske vrijednosti tabelirane samo za 'pune' godine. U idućem primjeru ilustrirana je važnost primjene metode interpolacije u izračunu kapitalizacije na jednom od slučajeva iz prakse.

**Primjer 9.1:** Izračun kapitalizirane svote za mjesečnu doživotnu mirovinu u iznosu 7.873,45kn na dan 1.2.2022. za osobu rođenu 29.9.1965. (dakle staru 56 godina i 125 dana na datum kapitalizacije) prema različitim valuacijskim kamatnim stopama (%) i za oba spola, uz primjenu linearne interpolacije.

%	SPOL	N <sub>57</sub>	D <sub>56</sub>	S <sub>56</sub>	N <sub>58</sub>	D <sub>57</sub>	S <sub>57</sub>	S
5	Ž	80559,66	6156,66	1.279.589,47	74727,03	5832,63	1.253.789,54	<b>1.270.759,74</b>
5	M	63827,27	5633,61	1.113.752,56	58532,02	5295,25	1.087.671,51	<b>1.104.826,62</b>
4	Ž	153002,00	10521,54	1.417.232,43	142938,39	10063,61	1.385.269,65	<b>1.406.293,54</b>
4	M	119858,06	9627,65	1.219.536,73	110721,63	9136,42	1.188.296,72	<b>1.208.845,20</b>
3	Ž	294234,66	18074,31	1.581.382,20	276779,15	17455,51	1.541.425,86	<b>1.567.707,61</b>
3	M	227643,46	16538,76	1.343.768,63	211796,19	15847,28	1.306.031,75	<b>1.330.853,62</b>
2	Ž	573352,13	31213,08	1.778.829,98	542912,14	30439,99	1.728.426,05	<b>1.761.579,82</b>
2	M	437572,24	28561,29	1.490.802,94	409936,78	27635,46	1.444.814,96	<b>1.475.064,09</b>
1	Ž	1132939,31	54193,76	2.018.470,34	1079564,56	53374,76	1.954.296,57	<b>1.996.507,61</b>
1	M	851819,06	49589,59	1.666.246,56	803361,87	48457,19	1.609.691,84	<b>1.646.891,36</b>
1/8	Ž	2080904,79	88219,50	2.271.913,27	1993259,20	87645,59	2.192.024,97	<b>2.244.572,43</b>
1/8	M	1542558,61	80724,59	1.848.740,18	1462988,06	79570,54	1.780.443,88	<b>1.825.366,56</b>

Iz rezultata navedenih u primjeru očito je kako su razlike između  $S_{56}$  i  $S_{57}$  za ovako visoki mjesečni iznos mirovine znatne i kreću se u rasponu od 25.799,93kn (žena, 5%) pa do čak 79.888,30kn (žena, 1/8%), što je prikazano na idućem grafu.



Da se u izračunu ne koristi interpoliranje po danima trebalo bi zaokružiti na 'pune' godine čime bi uvijek jedna od stranaka u postupku bila oštećena (ili HZMO kojemu se šteta nadoknađuje kao oštećenom ili onaj tko nadoknađuje štetu kao štetnik). Konkretno, u ovom primjeru zaokruživalo bi se na 56 godina, jer je 56 godina i 125 dana bliže 56 nego li 57 godina, pa bi štetnik za npr. valuacijsku kamatnu stopu od  $1/8\%$  i žensku osobu platio 2.271.913,27kn, a interpoliranjem prema danima tj. izračunom iznosa na stvarnu dob u danima plaća 2.244.572,43kn, što daje nimalo zanemarivu razliku od 27.340,84kn.

Uvidom u iznose dobivene interpolacijom (podaci  $S$  - zadnji stupac u prethodnoj tablici) odmah se vidi kako su svi izračunati iznosi  $S$  'bliži' iznosima  $S_{56}$  negoli iznosima  $S_{57}$ , a 'bliži' su upravo onoliko koliko je starost od 56 godina i 125 dana 'bliža' starosti od 56 godina i 0 dana u odnosu na starost od 57 godina i 0 dana.

Promotrimo sada 12 odabranih izračuna kapitalizacije za doživotnu mirovinu osoba oba spola na različite datume kapitalizacije za osobe različitih starosti i različitih mjesečnih iznosa mirovine, a prema valuacijskim kamatnim stopama  $1/8\%$  i  $5\%$  (kao najmanjoj i najvećoj vrijednosti za koje postoje tabelirane komutacijske vrijednosti u dokumentu TAM). Podaci su odabrani slučajno uz slijedeće uvjete: u uzorku su podaci za 6 muškaraca i 6 žena, datum kapitalizacije je u 2021.g. i sve su osobe starije od 40g. na datum kapitalizacije.

**Primjer 9.2:** Izračun kapitaliziranih svote mjesečne doživotne mirovine 12 osoba prema pseudo-slučajnim parametrima za dob, spol, iznos mirovine i datum kapitalizacije u 2021.g.

PSEUDO-SLUČAJNI PARAMETRI				IZRAČUN			
Datum rođenja	SPOL	Iznos mirovine za kapitalizaciju	Datum kapitalizacije	Starost na datum kapitalizacije		Iznos S za 5%	Iznos S za 1/8%
				GG	ddd		
3.8.1964	M	1.623,56 kn	28.2.2021	56	209	226.586,04 kn	373.164,34 kn
16.12.1957	M	6.213,23 kn	1.1.2021	63	16	727.273,84 kn	1.096.593,05 kn
25.5.1945	M	2.222,37 kn	1.11.2021	76	160	158.137,42 kn	202.681,92 kn
2.6.1939	M	3.017,82 kn	6.6.2021	82	4	163.887,94 kn	198.716,28 kn
1.11.1978	M	4.521,76 kn	9.9.2021	42	312	814.430,44 kn	1.630.005,34 kn
23.7.1964	M	3.237,14 kn	10.10.2021	57	79	444.821,62 kn	726.015,33 kn
29.9.1965	Ž	7.873,45 kn	1.3.2021	55	153	1.294.127,88 kn	2.318.649,95 kn
8.8.1945	Ž	2.823,12 kn	18.7.2021	75	344	238.238,58 kn	316.129,27 kn
8.11.1936	Ž	1.900,24 kn	5.5.2021	84	178	100.927,45 kn	121.830,58 kn
1.12.1958	Ž	3.234,21 kn	1.8.2021	62	243	449.149,29 kn	719.887,94 kn
1.1.1970	Ž	4.721,05 kn	1.1.2021	51	0	838.019,03 kn	1.606.891,86 kn
20.12.1976	Ž	5.123,89 kn	12.12.2021	44	357	986.711,19 kn	2.073.081,15 kn
<b>UKUPNO</b>						<b>6.442.310,71 kn</b>	<b>11.383.647,01 kn</b>

Izračun u Primjeru 9.2. ilustrira koliko je visok utjecaj valuacijske kamatne stope na izračun kapitaliziranog iznosa. Za kamatnu stopu od  $\frac{1}{8}\%$  ukupni iznos je 76,7% veći od ukupnog iznosa za kamatnu stopu od 5%, a ta razlika iznosi ukupno za svih 12 osoba više od 4,94 milijuna kuna. Ako bi odabrani slučajni uzorak promatrali kao slučajni uzorak 12-og dijela svih naplaćenih kapitalizacija za 2021.g. ispada da je gruba procjena ukupne godišnje razlike za kapitalizacije u 2021.g. gotovo 60 milijuna kuna u korist štetnika samo zbog primjene više valuacijske kamatne stope kod obračuna kapitalizacije.

U slijedećem primjeru prikazan je utjecaj usklađivanja iznosa mirovine koji se u RH obračunava svakih 6 mjeseci (od 1.1. te od 1.7. svake godine) na izračun kapitalizirane svote.

**Primjer 9.3:** Izračun kapitalizirane svote naknade štete uz primjenu valuacijske kamatne stope od 5% za mjesečnu doživotnu mirovinu muške osobe rođene 25.8.1983. na 1.7.2015. i na 1.7.2021. obzirom na usklađeni iznos mirovine te izračun isplate stvarnog iznosa štete za među-razdoblje.

**Izračun kapitalizirane svote prema stvarnim iznosima mirovine na odabrane datume kapitalizacije u razmaku od 6 godina:**

Datum rođenja	SPOL	Iznos za kapitalizaciju	Datum kapitalizacije	Starost na datum kapitalizacije		S za 5%
				GG	ddd	
25.8.1983	M	1.895,15 kn	1.7.2015	31	310	387.036,13 kn
25.8.1983	M	2.288,10 kn	1.7.2021	37	310	439.681,93 kn

**Izračun stvarne isplate za među-razdoblje:**

Razdoblje	Vrsta isplate	Ukupno isplaćeni iznos za razdoblje	Broj mjeseci u razdoblju	Mjesečni iznos mirovine u razdoblju
01.07.2015. - 31.12.2015.	invalidska mirovina	11.370,90 kn	6	1.895,15 kn
01.01.2016. - 30.06.2016.	invalidska mirovina	11.422,98 kn	6	1.903,83 kn
01.07.2016. - 31.12.2016.	invalidska mirovina	11.462,04 kn	6	1.910,34 kn
01.01.2017. - 30.06.2017.	invalidska mirovina	11.536,50 kn	6	1.922,75 kn
01.07.2017. - 31.12.2017.	invalidska mirovina	11.778,42 kn	6	1.963,07 kn
01.01.2018. - 30.06.2018.	invalidska mirovina	11.888,22 kn	6	1.981,37 kn
01.07.2018. - 31.12.2018.	invalidska mirovina	12.208,32 kn	6	2.034,72 kn
01.01.2019. - 30.06.2019.	invalidska mirovina	12.347,94 kn	6	2.057,99 kn
01.07.2019. - 31.12.2019.	invalidska mirovina	13.045,32 kn	6	2.174,22 kn
01.01.2020. - 30.06.2020.	invalidska mirovina	13.137,42 kn	6	2.189,57 kn
01.07.2020. - 31.12.2020.	invalidska mirovina	13.323,60 kn	6	2.220,60 kn
01.01.2021. - 30.06.2021.	invalidska mirovina	13.398,48 kn	6	2.233,08 kn
<b>UKUPNO ISPLAĆENO ZA RAZDOBLJE 01.07.2015. - 30.06.2021.</b>		<b>146.920,14 kn</b>		

Iz iskazanog izračuna razvidno je da u prvom slučaju kapitalizacija na 1.7.2015. (datum početka isplate invalidske mirovine ove osobe) iznosi 387.036,13kn, što je iznos koji bi platio štetnik da je pristao na isplatu kapitalizirane svote s ovim datumom. U dugom slučaju, premda je osoba na datum kapitalizacije točno 6 godina starija što 'sluti' na manji kapitalizirani iznos, dobije se iznos od 439.681,93kn, što je više od iznosa u prvom slučaju za znatnih 52.645,81kn. I ne samo to, u drugom slučaju štetnik treba platiti još i stvarni iznos isplate mirovine za razdoblje koje je proteklo od početka isplate mirovine do datuma kapitalizacije, a to je iznos od 146.920,14kn. Da je štetnik pristao na isplatu kapitalizirane svote s datumom početka isplate invalidske mirovine uštedio bi punih 199.565,95kn (naravno, zanemarujući inflaciju i ostale eventualne troškove).

Lako se može zaključiti da rastući iznos mirovine obzirom na svakošestomjesečno usklađenje mirovina kakvo je u primjeni zadnjih godina u RH uz zakonom propisani postotak usklađenja ima puno veći utjecaj na izračun kapitalizirane svote od smanjenja omjera između komutacijskih funkcija  $N_z$  i  $D_z$  obzirom na starenje.

Ovaj zaključak ilustrira slijedeća tablica u kojoj su iskazani 'obrnuti' izračuni tj. izračuni kapitaliziranih iznosa uz pretpostavku da nema usklađenja - u prvom slučaju, da je iznos mirovine kakav je bio 1.7.2015. potpuno isti i na 1.7.2021., a u drugom slučaju, da je iznos kakav je na 1.7.2021. potpuno isti bio i na 1.7.2015.

#### **Izračun kapitalizirane svote prema 'zamijenjenim iznosima' stvarne mirovine na odabrane datume kapitalizacije u razmaku od 6 godina:**

Datum rođenja	SPOL	Iznos za kapitalizaciju	Datum kapitalizacije	Starost na datum kapitalizacije		S za 5%
				GG	ddd	
25.8.1983	M	1.895,15 kn	1.7.2021	37	310	364.172,55 kn
25.8.1983	M	2.288,10 kn	1.7.2015	31	310	467.286,16 kn

Vidjeli smo da je razlika u kapitaliziranim iznosima na 1.7.2015. i 1.7.2021. obzirom na usklađenje mirovine iznosila +52.645,81kn. Uočimo da je iznos usklađene mirovine nakon 6 godina za cca 20% veći od početnog iznosa. Razlika, ako nema usklađenja, na iznos od 1.895,15 kn je -22.863,57kn, a na iznos od 2.288,10kn je -27.604,22kn.

Ako tražimo koliki bi bio potencijalni usklađeni iznos mirovine iste osobe na 1.7.2021. za iznos mirovine od 1.895,15 kn koji je bio na 1.7.2015., ali tako da su kapitalizirani iznosi na oba datuma isti, najbliži rezultat je 2.014,13kn, što je povećanje od 6,3%.

#### **Izračun kapitalizirane svote za iznos mirovine koji rezultira istim ukupnim iznosom kao za kapitalizirani iznos stvarne mirovine, ali nakon proteka 6 godina:**

Datum rođenja	SPOL	Iznos za kapitalizaciju	Datum kapitalizacije	Starost na datum kapitalizacije		S za 5%
				GG	ddd	
25.8.1983	M	2.014,13 kn	1.7.2021	37	310	387.035,78 kn

Pravila za izračun postotka usklađivanja mirovine koja su, prema važećem Zakonu, u primjeni u RH u času pisanja ovog rada, opisana su člankom 88. ZOMO. Ovaj članak je prethodno citiran u ovom radu u poglavlju 2. ZAKONSKA I PODZAKONSKA REGULATIVA.

**Primjer 9.4:** U zadnjem primjeru iskazani su izračuni za slučaj isplate kapitalizirane svote kada je isplata mirovine ograničena na broj od  $n$  godina, s time da je broj  $n$  poznat unaprijed. Ovakva isplata se, prema trenutnoj praksi u RH, javlja u slučaju kada se radi o kapitalizaciji iznosa obiteljske mirovine koja se isplaćuje djetetu do završetka redovnog školovanja, odnosno do najduže navršenih 26 g. života. Kako je, pogotovo za mlađu djecu, nemoguće unaprijed odrediti koliko dugo će se školovati (npr. hoće li i koliko dugo će studirati ili neće?), u praksi se ovaj izračun uglavnom radi baš do navršene 26.g. života te najčešće za isplate u inozemstvo (štetnici u RH rijetko pristaju na isplate do 26.g. života iz razloga što je vjerojatnost da će u RH dijete studirati manja od vjerojatnosti da neće).

**Izračun kapitalizirane svote za mjesečni iznos mirovine od 3.000,00kn ženske osobe rođene 1.1.2010.g. i za isplate u trajanju od  $n=1, \dots, 26$  godina, a na datume kapitalizacije koji su  $(n - 26)$ . - ti rođendan osobe:**

$n$ = broj godina za isplatu	Datum kapitalizacije	Starost u gg na datum kapitalizacije	S za 5 %
26	1.1.2010	0	527.690,50 kn
25	1.1.2011	1	518.180,23 kn
24	1.1.2012	2	507.380,33 kn
23	1.1.2013	3	496.012,15 kn
22	1.1.2014	4	484.073,56 kn
21	1.1.2015	5	471.531,00 kn
20	1.1.2016	6	458.344,78 kn
19	1.1.2017	7	444.497,51 kn
18	1.1.2018	8	429.951,48 kn
17	1.1.2019	9	414.671,93 kn
16	1.1.2020	10	398.618,29 kn
15	1.1.2021	11	381.760,42 kn
14	1.1.2022	12	364.058,06 kn
13	1.1.2023	13	345.465,27 kn
12	1.1.2024	14	325.944,74 kn
11	1.1.2025	15	305.456,11 kn
10	1.1.2026	16	283.949,58 kn
9	1.1.2027	17	261.384,08 kn
8	1.1.2028	18	237.703,15 kn
7	1.1.2029	19	212.835,65 kn
6	1.1.2030	20	186.727,00 kn
5	1.1.2031	21	159.304,81 kn
4	1.1.2032	22	130.497,84 kn
3	1.1.2033	23	100.237,48 kn
2	1.1.2034	24	68.451,76 kn
1	1.1.2035	25	35.065,82 kn

## 10. ZAKLJUČAK

Tijekom 2021.g. u HZMO su obavljena samo 53 izračuna kapitalizirane svote naknade štete od čega 51 za doživotne mirovine, a 2 za obiteljske mirovine do određene starosti osiguranika (oba ova slučaja su bila za štetnika iz Republike Italije). Istovremeno je tijekom 2021.g. bilo 1.620 zahtjeva za dostavom podataka o stvarnim iznosima isplaćenih mirovina. Tako mali broj izračuna kapitalizirane svote ukazuje na činjenicu da niti HZMO kao oštećeni, s jedne strane, niti štetnici, s druge strane, nisu spremni preuzeti rizik jednokratne isplate većeg iznosa naknade štete, nego se obje strane u postupku radije upuštaju u dugogodišnju i administrativno puno skuplju naplatu stvarnih iznosa štete tj. naplatu iznosa stvarno isplaćenih mirovina za neko razdoblje.

Sasvim je jasno da se jednokratnom isplatom predmet može staviti *ad acta*, dok se u slučaju naplate stvarne štete predmet rješava kroz duže vremensko razdoblje koje može potrajati i više desetaka godina, tj. svaki takav predmet se nakon protoka izvjesnog vremena ponovno stavlja u rad novim zahtjevom za dostavu podataka o isplaćenim iznosima za razdoblje koje je nastavno na prethodno isplaćeno razdoblje i taj se postupak periodički ponavlja sve dok traje isplata mirovine.

Prema prethodno citiranom čl. 161 ZOMO, HZMO *'ima pravo zahtijevati'* jednokratnu isplatu, ali ova odredba nije obvezujuća za štetnika u smislu da, u slučaju zahtjeva HZMO za jednokratnom isplatom, štetnik mora na takav zahtjev pristati. Na koji način će se šteta naplatiti ovisi isključivo o dogovoru između HZMO i štetnika. Jedini slučaj kada odluka da li će se naplata potraživanja obaviti jednokratno ili u stvarnim mjesečnim iznosima ne ovisi o dogovoru između HZMO i štetnika je slučaj kada štetnik završi u stečaju tj. kada HZMO ukupna potraživanja za buduću isplaćenu mirovinu prijavljuje u stečajnu masu štetnika. Očekivanu ukupnu buduću isplatu mirovina moguće je jednokratno prijaviti jedino u kapitaliziranom iznosu na neki datum kapitalizacije (npr. na datum stečaja štetnika).

U dokumentu TAM iz 2013.g. objavljene su aktuarske tablice s iznosima komutacijskih vrijednosti za valuacijske kamatne stope od 0,125%, 1%, 2%, 3%, 4% i 5%. Iz prethodno iznesene teorije i pripadnih primjera vidljivo je kako je kod izračuna kapitalizacije za oštećenog najbolja valuacijska kamatna stopa od 0,125% jer mu se uz takav diskontni postotak najviše plati, a za štetnika ona od 5% jer tako plati najmanje.

Kamatna stopa od 0,125% najbliža je onim kamatnim stopama kakve, u trenutku pisanja ovog rada, daju banke u Republici Hrvatskoj na oročene gotovinske depozite te je i po tome najprimjerenija za ovaj obračun. Međutim, kako su osiguravajuće kuće te druge pravna i fizičke osobe u svojstvu platitelja štete osporavale svaki diskontni postotak manji od 5% smatrajući ga nereálnim, a kako bi se ipak što je više moguće šteta naplatilo jednokratno, HZMO u svojim izračunima kapitaliziranog iznosa naknade štete primjenjuje diskontni postotak (valuacijsku kamatu) od 5%. Primjena valuacijske kamatne stope od 5% može se donekle braniti usporedbom s prinosima na ulaganja mirovinskih fondova koji se od početka mirovinske reforme u Republici Hrvatskoj kreću upravo oko tog broja.



Osim u slučaju kada štetnik završi u stečaju, HZMO iznimno rijetko sam zahtjeva isplatu kapitaliziranog iznosa te se ovakvi izračuni najčešće rade na prijedlog štetnika, a i takvih je prijedloga jako malo, unatoč navedenoj činjenici da je HZMO na neki način izašao u susret štetnicima tj. da u svojim izračunima kapitaliziranog iznosa naknade štete primjenjuje diskontnu kamatnu stopu od 5% koja je za njega financijski najnepovoljnija. Osim toga, prema izračunu iznesenom u primjeru 9.3. razvidno je kako svakošestomjesečno usklađivanje iznosa mirovine prema sadašnjoj formuli za usklađenje prvih godina uglavnom povećava kapitalizirani iznos protekom vremena umjesto da ga, obzirom na veću starost osiguranika, smanji. Može se iskustveno zaključiti da bi za štetnike, usprkos riziku skorog prestanka isplate zbog smrti osiguranika i drugih razloga (npr. ponovnog zaposlenja i sl.) bilo financijski najpovoljnije da isplatu kapitaliziranog iznosa naknade štete obave odmah s danom nečijeg odlaska u mirovinu.

I za kraj treba napomenuti da, prema trenutno važećim propisima u Republici Hrvatskoj, isplata kapitalizirane svote naknade štete nije predviđena za iznos mirovine iz II. stupa mirovinskog osiguranja i tu postoji svojevrsna pravna praznina. U praksi je sasvim moguće, premda rijetko, da osiguranik koji u mirovinu odlazi temeljem štetnog događaja ostvari pravo na mirovinu iz oba stupa mirovinskog osiguranja tj. da mu je odabir takve mirovine povoljniji od odabira mirovine samo iz I. stupa. Svakako bi bilo zanimljivo definirati diskontnu kamatu i općenito pravila za ovakav izračun što može biti tema nekog budućeg rada.

## 11. LITERATURA

- [1] D. Bakić i D. Francišković, **Financijska i aktuarska matematika**, Osijek, 2013.
- [2] **Zakon o mirovinskom osiguranju**, Narodne novine, broj 157/2013, 151/2014, 33/2015, 93/2015, 120/2016, 18/2018, 62/2018, 115/2018, 102/2019 i 84/2021
- [3] **Tablice aktuarske matematike** – Narodne novine, broj 17/2013
- [4] Web stranica HAD (HRVATSKO AKTUARSKO DRUŠTVO) – [www.aktuari.hr](http://www.aktuari.hr)

## SAŽETAK

U ovom radu opisana su pravila i načini obračuna kapitalizirane svote naknade štete u Hrvatskom zavodu za mirovinsko osiguranje s primjerima izračuna. Prezentirane su sve propisane tablice i formule koje se koriste u različitim tipovima izračuna te pripadna matematička podloga, odnosno opis i tumačenje pojedinih vrijednosti u propisanim tablicama kao i postupak kojim su izvedene formule za izračun s objašnjenjima.

Osnovna je teza rada kako je isplata jednokratne kapitalizirane svote izrazito isplativa za štetnike obzirom da se iznos mirovine prema Zakonu o mirovinskom osiguranju usklađuje dva puta godišnje, a iznos usklađenja je u pravilu takav da protok vremena radi kojeg bi se ukupni iznos kapitalizacije trebao smanjiti nije dovoljan da bi se taj iznos zbilja smanjio obzirom da iznos usklađenja anulira to očekivano smanjenje.

## SUMMARY

This Paper describes the rules and methods of calculating the capitalized amount of damage (compensation) in the Croatian Pension Insurance Institute with calculation examples. All the prescribed tables and formulas used in different types of calculations are presented with corresponding mathematical background. The paper contains explanations and interpretation of individual quantities in the prescribed tables with a detailed description of the procedure by which the calculation formulas were derived.

The basic thesis of the Paper is that the payment of a one-time capitalized sum is extremely profitable for the payers. The reason for such a conclusion lies in the fact that the amount of the pension is adjusted by law twice a year, and the amount of the adjustment is such that the elapsed time for which the total amount of capitalization should be reduced is not enough for that amount to really decrease, considering that the adjustment amount cancels out the expected reduction.

## ŽIVOTOPIS

Rođen sam od oca Petra, elektrotehničara i majke Laure – Ite, kućanice, 3.8.1964.g. u Supetru na otoku Braču, gdje sam pohađao i završio osnovnu školu te prva dva razreda tadašnjeg srednjeg usmjerenog obrazovanja (popularna 'Šuvarica'). Treći i četvrti razred pohađao sam u Srednjoškolskom centru 'Ćiro Gamulin' u Splitu (tadašnji 'MIOC Split', danas III. matematička gimnazija Split) gdje sam i maturirao (zapravo oslobođen mature) 1983.g. Iste godine upisujem studij matematike na PMF-u u Zagrebu položivši prijemni ispit te odlazim na jednogodišnje odsluženje vojnog roka. Studij započinjem u jesen 1984.g., apsolviram u ljeto 1988.g., a diplomiram u ljeto 1990.g. stekavši zvanje Diplomirani inženjer matematike, smjer Matematička informatika i statistika.

Kao apsolvent zapošljam se na radno mjesto Profesora matematike u tadašnjem Centru za odgoj i obrazovanje u kulturi (današnje II. I VII. gimnazija u Križanićevoj ulici u Zagrebu) gdje radim još kratko nakon diplomiranja kada prelazim na isto radno mjesto u tadašnji Kemijsko-tehnološki obrazovni centar (današnja Prirodoslovna škola Vladimira Preloga).

Krajem 1990.g. javljam se na natječaj za zapošljavanje pripravnika u računskom centru MUP-a RH i nakon više krugova testiranja bivam primljen te započinjem s radom u travnju 1991.g. U razdoblju 1991-2001 prelazim put od pripravnika, preko programera, višeg programera, projektanta do glavnog projektanta informacijskog sustava. U vrijeme stvaranja samostalne RH radim na IT poslovima određivanja JMBG, vođenja evidencija prebivališta i boravišta građana, osobnih iskaznica, registra stanovništva (podloga za biračke popise), registra pravnih osoba, izdavanja vozačkih dozvola, registracije motornih vozila, vođenja kazni i mjera u prometu, nomenklature naselja i ulica u RH te brojnih drugih evidencija. Nova država – nova pravila tako da je tih godina u MUP-u kompletno izmijenjena informatička podrška, ne samo radi promjene ustroja i zakonske regulative nego i radi promjene tehnologija i drugih pravila. Npr. prijelaz svih baza podataka iz hijerarhijskih (IMS) u relacijske (DB2) ili rješavanje problema Y2K koji je bio vrlo izražen u MUP-u jer su se u preko 95% baza podataka svi datumi vodili u obliku ddmymm - za rješavanje ovog problema sam 2000.g. dobio i godišnju nagradu MUP-a kao član užeg razvojnog tima. Za vrijeme domovinskog rata izrađujem i upravljam vrlo osjetljivom aplikacijom za pronalaženje osoba u registru stanovništva prema djelomično poznatim podacima o stradalima i nestalima koji pristižu s terena. Samostalno sam izradio prvu centraliziranu aplikaciju za izdavanje i vođenje podataka o vozačkim dozvolama (prije toga je svaka Policijska uprava imala svoju lokalnu evidenciju) od kojih su neke i danas u uporabi kao i prvu evidenciju kaznenih bodova u prometu. Radim i na IT određivanju lažnih identiteta za operative koji se infiltriraju u kriminalne skupine. Specijaliziram se za IBM mainframe tehnologiju te pohađam brojne seminare u tadašnjem IBM edukacijskom centru, ispočetka u Radovljici, Slovenija, a kasnije u IBM školi u Tuheljskim toplicama. Sudjelujem na više IT konferencija i seminara u RH i inozemstvu (Nica, München, Beč ..) kao i na konzultacijama u organizaciji INTERPOL-a u Lyonu oko aplikacije za razmjenu podatak o otuđenim motornim vozilima. U MUP-u sam položio državni stručni ispit i ispit za ovlaštenje (čin policijskog inspektora). Kasnijih godina samostalno držim, širom RH, brojne seminare, radionice i edukacije za rad s aplikacijama za zaposlenike MUP-a i druge korisnike (npr. za zaposlenike Centra za vozila Hrvatske).

Početak 2001.g., ponovno nakon više krugova testiranja od strane PLIVA-inog HR tima koji je tada outsourcing za testiranje kandidata, primljen sam na radno mjesto Pomoćnika ravnatelja REGOS-a za informatiku (kasnije preimenovano za informatiku i komunikacije) te započinem rad na opsežnom projektu Mirovinske reforme u RH (uvođenje II. I III. stupa mirovinskog osiguranja) kao glavni voditelj projekta s operativno-informatičkog aspekta. Projekt je dijelom sponzoriran od strane Svjetske banke koja je tada prognozirala da će se projekt implementirati najranije 2005.g. Međutim, danonoćnim radom, uspjeli smo dovršiti projekt početkom 2002.g. i prvi transfer sredstava u Obvezne mirovinske fondove (OMF) na osobne račune osiguranika dogodio se u travnju 2002.g. od kada se provodi svakodnevno. Vodio sam ili aktivno sudjelovao u brojnim pod-projektima koje je tada trebalo implementirati. Od formiranja početnih baza podataka, preko načina odabira i promjene OMF-a te vođenja tih podataka u bazama, rasporeda po OMF-ovima prema slučajnim parametrima osoba koje nisu samostalno odabrale OMF, transfera uplaćenih sredstava u fondove, obračuna ulaznih i izlaznih naknada za društva koja upravljaju OMF-ovima, pretvaranja uplaćenih sredstava u obračunske jedinice u kojima se vode osobni računi, kreiranje i informatiziranje potrebnih obrazaca za prikupljanje i distribuciju podataka (nekadašnji RS odnosno RSm obrazac, a današnji JOPPD obrazac), isplata sredstava s osobnog računa nasljednicima preminulog člana OMF, statističkog praćenja i nadzora sustava i mnogih drugih. REGOS je u RH implementirao prvu interaktivnu on-line aplikaciju koja je preko Interneta omogućavala predaju RSm obrasca i prihvrat povratnih podataka o uspješnom zaprimanju obrasca, odnosno o eventualnim greškama koje treba ispraviti. Sudjelovao sam na brojnim edukacijama i radionicama na temu Mirovinske reforme, što kao sudionik, što kao predavač. Bio sam član delegacije RH koja je pod pokroviteljstvom Svjetske banke posjetila Čile i Argentinu kako bi se na licu mjesta upoznali s rezultatima mirovinskih reformi koja su tamo provedene prvi put na svijetu, gdje sam sudjelovao na svakodnevnim radionicama organiziranim za nas od strane domaćina. Također, bio sam član delegacije koja je posjetila Bugarsku koja je tada upravo implementirala svoju reformu mirovinskog sustava kako bi se upoznali s njihovim rezultatima i dogovorili suradnju, Slovačku i Makedoniju koje su bile u procesu razmatranja i definiranja rješenja te Švedsku koja je prethodno implementirala donekle sličan sustav. Studijski sam posjetio središnjicu SSA (Headquarter of Social Security Administration) u Baltimoreu, SAD (institucija koja je u SAD nadležna za sve poslove vezane uz socijalna prava stanovništva, između ostaloga i za određivanje poznatog SSN – Social Security Number) kao i brojne institucije svjetske banke u Washingtonu, SAD te sam tamo odslušao mnoga predavanja i prezentacije na temu administriranja iz područja socijalnih prava. Učlanio sam REGOS u međunarodnu organizaciju ISSA (International Social Security Association) kao jedinog člana te asocijacije iz RH te sam radio kao tzv. časnik za vezu u RH i sudjelovao na više radionica, seminara i konferencija u njihovoj organizaciji (Baku, Bukurešt, Erevan, Moskva, Sevilja, Seul, Varšava, ...). Osim toga, održao sam brojne prezentacije za strane delegacije koje su posjetile Zagreb kako bi se upoznale s našim rezultatima o kojima se tada dosta pričalo kao o vrlo uspješno implementiranom projektu mirovinske reforme s jako malo tehničkih problema i grešaka u sustavu. Tijekom rada u REGOS-u nastavio sam pohađati IBM školovanja, ali sada iz područja Project-managementa te imam više certifikata o obavljenim edukacijama u tom segmentu. Radio sam na formiranju, a neko vrijeme i upravljao pozivnim centrom za rješavanje problema korisnika i odgovaranja na upite.

Nakon 12 godina rada u REGOS-u, a radi nemogućnosti daljnjeg napredovanja (npr. ravnatelj REGOS-a po statutu ne može biti matematičar, može biti samo pravnik ili ekonomist, pitam se zašto?) i nakon što je projekt mirovinske reforme u potpunosti zaživio u RH u smislu funkcioniranja II. i III. stupa mirovinskog osiguranja, početkom 2013.g. prelazim u FINA-u na radno mjesto Poslovni analitičar – ekspert za rad na projektu COP (Centralni obračun plaća državnih i javnih službenika i namještenika). COP je tada bio vrlo turbulentan projekt koji je taman startao s prvim institucijama u sustavu, uz čitav niz problema i poteškoća koje nosi implementacija tako velikog projekta. Intenzivno radim na usavršavanju do tada implementiranih poslovnih pravila i definiranju novih, naročito oko formiranje RSm i kasnije JOPPD obrasca koje sam, obzirom na prethodno iskustvo, poznao do detalja. Upravljam ulaskom u sustav COP-a svojih bivših poslodavaca: MUP-a (kao institucije s najviše zaposlenih u sustavu te institucije s najraznovrsnijim oblicima rada i radnog vremena) i REGOS-a te HZMO-a i ostalih institucija iz resora rada i mirovina. Kasnije se fokusiram na dio projekta koji se odnosio na razmjenu podataka među institucijama, smanjenje redundancije u podacima i optimiziranje procesa. Iz rada na ovom projektu nosim golemo iskustvo kako je svaka lipa u obračunu bitna, a svaki dan ili čak sat kašnjenja u isplati plaće skoro pa neodrživ. Nastavljam s radom na području educiranja te držim više radionica i seminara, kako za zaposlenike FINA-e, tako i za zaposlenike ministarstava i ostalih javnih institucija za rad s aplikacijom COP. Bavim se i mentorstvom novih zaposlenika i pripravnika. Za vrijeme zaposlenja u FINA-i radim i kao konzultant za implementaciju sustava analognog COP-u u Crnoj Gori koju tada posjećujem više puta te obilazim većinu njihovih institucija i resora u sustavu javne uprave radi definiranja svih pravila i resursa potrebnih za implementaciju projekta. Među ostalim konzultantima pokrивam resore unutarnjih poslova i mirovina.

U FINA-i sam proveo 6,5 godina te u jesen 2019.g. prelazim u HZMO na radno mjesto Viši stručni suradnik specijalist za analitičke poslove na kojem i sada radim. U HZMO-u se uglavnom bavim definiranjem i izradom složenih statističkih izvješća vezanih uz poslovanje Odjela za pravne poslove te izračunima iznosa za naknade štete i pripadnih zateznih kamata. Nakon gotovo 30 godina provedenih u radu na vrlo osjetljivim i visokorizičnim projektima s kratkim rokovima te gomila sati prekovremenog rada i dana na poslovnim putovanjima odgovara mi nešto smirenije radno okruženje. Na sadašnjem poslu se prvi puta susrećem s pojmom aktuarstva i pripadnim izračunima što me poprilično zaintrigiralo te u svojoj 56-oj godini i pod pokroviteljstvom poslodavca upisujem Poslijediplomski studij aktuarske matematike na PMF-u u Zagrebu rezultat kojega je ovaj Završni rad.

Hrvatski branitelj iz Domovinskog rata.

Otac jednog djeteta.

Govorim i pišem engleski.

Vozačka dozvola B kategorije.

Dobrovoljni darivatelj krvi (darovao krv više od 40 puta).

Kvizoman.