

# Relativistički opis nuklearnih matričnih elemenata za dvostruki beta raspad

---

Popara, Nato

Doctoral thesis / Disertacija

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:990161>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Fizički odsjek

Nato Popara

# **Relativistički opis nuklearnih matričnih elemenata za dvostruki beta raspad**

DOKTORSKI RAD

Mentor:  
prof. dr. sc. Nils Paar

Zagreb, 2022.





University of Zagreb  
Faculty of Science  
Department of Physics

Nato Popara

# **Relativistic description of nuclear matrix elements for double beta decay**

DOCTORAL THESIS

Supervisor:  
prof. dr. sc. Nils Paar

Zagreb, 2022



# Informacije o mentoru

Nils Paar je diplomirao na istraživačkom smjeru studija fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu (PMF) Sveučilišta u Zagrebu 1998. Od 2000. do 2003. godine bio je doktorand na Physik Department, Technische Universität München, Njemačka, gdje je 2003. godine obranio doktorsku disertaciju iz teorijske nuklearne fizike i stekao akademski naziv Doctor rerum naturalium. Od 2003. do 2006. godine bio je na poslijedoktorskom usavršavanju na Institut fuer Kernphysik, Technische Universität Darmstadt, Njemačka. Nakon povratka u Hrvatsku, radi kao docent (do 2008.), izvanredni profesor (do 2013) i redoviti profesor (do danas) na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Akademsku godinu 2014/2015. provodi kao Marie Curie research fellow na Departement Physik, Universität Basel, Švicarska. 2019. godine izabran je u znanstveno-nastavno zvanje redovitog profesora u trajnom zvanju. Većina dosadašnje znanstvene djelatnosti Prof. Paara jest iz područja prirodnih znanosti, polja fizike, grane nuklearne fizike, što uključuje razvoj i primjenu mikroskopskih teorijskih modela u rješavanju problema moderne nuklearne fizike, posebice (1) nelinearne pojave u vibracijama atomske jezgre, (2) egzotična pobuđenja u nestabilnim atomskim jezgrama, (3) nuklearnu strukturu zasnovanu na koreliranom nukleon-nukleon međudjelovanju, (4) procese slabog međudjelovanja u evoluciji supernove, (5) neutrino-jezgra međudjelovanje i (5) energiju simetrije i svojstva neutronske zvijezde. Autor je i koautor 134 znanstvenih publikacija, od toga 88 izvornih znanstvenih radova objavljenih u međunarodnim recenziranim znanstvenim časopisima, 40 publikacija u recenziranim zbornicima međunarodnih konferencija i jednog poglavlja u znanstvenoj knjizi. Objavljeni radovi citirani su više od 3800 puta prema bazi ISI Web of Science Core Collection. Aktivno je sudjelovao na međunarodnim znanstvenim konferencijama, radionicama i školama gdje je održao ukupno 65 predavanja, od toga 33 pozvana predavanja. Bio je voditelj niza kompetitivnih znanstveno-istraživačkih projekata, i suradnik je u okviru Znanstvenog centra izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri na Fizičkom odsjeku PMF-a. Mentor je brojnim studentima na diplomskim studijima fizike, doktorskom studiju fizike, kao i gostujućim znanstvenicima iz inozemstva. Dobitnik je državne nagrade za znanost za značajno znanstveno dostignuće iz fizike za 2017. godinu.

# Zahvale

Duboko sam zahvalan mentoru, prof. dr. sc. Nilsu Paaru, za usmjeravanje i pomoć koju je strpljivo pružio tijekom izrade doktorata. Kolegi Deniju Valeu dugujem zahvalnost za mnoge korisne rasprave tijekom doktorskog studija, a kolegi Anti Ravliću se posebno zahvaljujem za račune optimalnih vrijednosti parametra izoskalarnog sparivanja bez kojih ova disertacija ne bi bila moguća. Prof. dr. sc. Selimu Pašiću sam zahvalan što mi je pružio vrijeme potrebno da završim doktorski studij. Zahvalnost dugujem i roditeljima i užoj obitelji. Naposljetku posebno bi se zahvalio svojoj dugogodišnjoj životnoj partnerici, Suzani Panežić, mag. phy.–geophy., bez čije ljubavi i strpljenja ovaj rad ne bi bio moguć.

# Sažetak

Dvostruki beta raspadi ( $\beta\beta$ ) su relevantni u modernoj fizici jer bezneutrinski mod dvostrukog beta raspada ( $0\nu\beta\beta$ ) predstavlja mogući signal fizike izvan standardnog modela i zbog važnosti za proučavanje neutrinjskih masa. Dvoneutrinski mod ( $2\nu\beta\beta$ ) je bitan za testiranje modela prije proširenja na  $0\nu\beta\beta$  raspade. U ovom radu, koristeći relativistički energijski funkcional gustoće, nuklearni matrični elementi su istraženi za  $2\nu\beta\beta$  raspad nuklida  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{128}\text{Te}$ ,  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{136}\text{Xe}$  i  $^{150}\text{Nd}$  i  $0\nu\beta\beta$  raspad nuklida  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{110}\text{Pd}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ , i  $^{128}\text{Te}$ . Relativistički Hartree-Bardeen-Cooper-Schrieffer (RHBCS) model, odnosno relativistički Hartree-Bogoliubov (RHB) model, korišteni su za opis osnovnog stanja jezgara i proton-neutron relativistička aproksimacija slučajnih faza (PN-RQRPA) za opis relevantnih prijelaza s izmjenom naboja koji doprinose dvostrukim beta raspadima. Korištene su tri efektivne interakcije, interakcija s izmjenom mezona DD-ME2 i interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX. Korelacije sparivanja su uzete u obzir u oba izospinska kanala koristeći separabilnu interakciju sparivanja. Određene su optimalne vrijednosti parametra snage izoskalar-nog sparivanja u PN-RQRPA rezidualnoj interakciji iz prilagodbe poluživota jednostrukih beta raspada. Za  $2\nu\beta\beta$  raspade, istraženi su relevantni faktori faznog prostora i pripadajuća vremena poluživota, i rezultati su uspoređeni s rezultatima prijašnjih istraživanja i eksperimentalnim vrijednostima. Dobiveni rezultati za  $2\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente su u većini slučajeva nešto manji od rezultata drugih modela, ali su za većinu jezgara blizu eksperimentalnim vrijednostima. Rezultati za  $0\nu\beta\beta$  raspade su uglavnom manji od vrijednosti koje bi mogli očekivati na temelju rezultata drugih modela, pogotovo za interakcije s točkastim vezanjem. Ovaj rad predstavlja prvu primjenu relativističkog teorijskog okvira zasnovanog na PN-RQRPA na problem dvostrukih beta raspada. Osim toga, računi bezneutrinskih dvostrukih beta raspada uključuju puni relativistički operator prijelaza izveden bez nerelativističkih redukcija, što ovaj rad čini prvom implementacijom punog relativističkog operatora za bezneutrinske dvostruke beta raspade u računu temeljenom na QRPA. Postoji niz mogućih unaprijeđenja i proširenja modela, od kojih treba istaknuti uključivanje većeg broja multipola međujezgre, uključivanje kratkodosežnih korelacija i razvoj modela za deformirane jezgre.



# Extended abstract

Double beta decays comprise decays of radioactive nuclei where two neutrons decay into two protons, or vice versa. Depending on whether neutrinos are emitted concurrently, the decays can be classified as two-neutrino ( $2\nu\beta\beta$ ) or neutrinoless ( $0\nu\beta\beta$ ). As second-order processes, the only situation in which double beta decays represent a significant decay branch is the decay of even-even nuclei[1], where a single beta decay of an even-even parent nucleus, stabilised by pairing, into a less stable odd daughter nucleus is forbidden[1]. This means that there is a small number of experimentally verified nuclides that decay through  $2\nu\beta\beta$  decay and a small number of candidates for the experimentally unobserved  $0\nu\beta\beta$  decay.

Once considered of little significance[2], double beta decays have become an object of considerable theoretical interest in recent years[3, 4]. The revival of interest in the topic of double beta decays is chiefly due to the connection of the  $0\nu\beta\beta$  decay mode to physics beyond the standard model, particularly to the question of the nature of the neutrino (namely whether the neutrino is a Majorana or a Dirac particle)[5]. This connection is proven to hold regardless of the underlying physics by the Schechter-Valle "black box" theorem [6]. Despite the importance of neutrinoless decays, the  $2\nu\beta\beta$  remains important as the only double beta decay mode we have experimental evidence of, despite significant experimental effort to find a signal of neutrinoless double beta decay[7, 8, 9, 10, 11, 12, 13], and as such is indispensable for developing and benchmarking theoretical frameworks for double beta decay.

The present work addresses both modes of double beta decay, in the framework of a proton-neutron (or charge exchange) quasiparticle random-phase approximation (PN-RQRPA)[14] based on relativistic nuclear energy density functional[15, 16]. This work presents the first calculation of the nuclear properties of double beta decay based on the PN-RQRPA and as the first implementation of our theoretical framework represents a starting point for further studies within the relativistic framework. The most important quantity to be calculated, from a nuclear structure standpoint, is the nuclear matrix element. Within approaches based on the QRPA, this is achieved by using data (transition matrix elements, QRPA amplitudes, occupation numbers and energies) from two single beta decay calculations, starting from the initial and from the final nu-

cleus. The difference in the final states for both, representing the intermediate nucleus, is taken into account with an overlap factor calculated from occupation factors and QRPA amplitudes for both single beta calculations. In the present work we use both the most widespread form for the overlap factor[17] and a more involved form due to Simkovic[18], however by comparing the overall values of the NME we find that the differences are small.

The PN-RQRPA calculation is built on top of a relativistic mean-field theory, which in the present work is realised as either relativistic Hartree-BCS or relativistic Hartree-Bogoliubov model. The relativistic Lagrangians associated with the nuclear energy density functional include three density dependent interactions: the DD-ME2[19] meson-exchange interaction based on quantum hadrodynamics[20] and the point coupling interactions DD-PC1[21] and DD-PCX[22]. The use of different interactions allows us to estimate systematically the theoretical spread of values for the matrix elements in our framework.

All of the calculations were maximally self-consistent, including quantities such as nuclear radii and Q-values derived directly from our relativistic mean-field calculations. The implementation of the relativistic mean field theory in the description of ground state properties is based on the DIRHB code for the relativistic Hartree-Bogoliubov model[23] and alternately the relativistic Hartree-BCS model[24] and the code for QRPA already in use at the University of Zagreb[25]. The relativistic charge-exchange QRPA (PN-RQRPA) allows us to calculate the states in the intermediate nuclei for both kinds of double beta decay as excitations from an even-even nucleus. For the calculation of the final nuclear matrix elements, custom code has been written that connects the outputs of the two QRPA calculations.

The strength of the isoscalar pairing in the residual interaction of the PN-RQRPA, which we describe using a dimensionless parameter  $V_{0pp}$ , is a crucial parameter of our model. For the  $2\nu\beta\beta$  decay mode, we show both the dependence of the nuclear matrix element on  $V_{0pp}$  and the values of the NME at optimal  $T=0$  pairing strength. The optimal values of  $V_{0pp}$  were determined following the approach of Ref. [26, 27, 28], based on a global fit of the half-lives of single  $\beta$  decay to the experimental data. We use even-even nuclides spanning  $8 \leq Z \leq 82$ , for which experimental data on single  $\beta$  decays are available, and where the effect of changing  $V_{0pp}$  on the relative change of  $T_{1/2}$  is larger than 20%, and where  $T_{1/2} < 10^3$  s. The ansatz we work with depends on  $(N - Z)$ , introducing an isotopic dependence on  $V_{0pp}$ . The optimal values of  $V_{0pp}$  obtained in this way are mostly clustered around 1.0, showing a very weak breaking of the isospin symmetry. As this is close to the so-called breaking point of the PN-RQRPA[29], where the lowest root of the PN-RQRPA equation becomes imaginary and a new mean field description is necessary, for most nuclides, it contributes to an additional and considerable lowering of the NME from the values at  $V_{0pp} = 0$ .

The problem of the value of the axial coupling constant,  $g_A$ , that is essential in weak processes, is briefly discussed in the work; more information can be found, e.g., in Ref.[3]. Concerning the value of the  $g_A$  parameter in our work, we have decided not to use excessively quenched values below  $g_A = 1.0$ , as sometimes used in QRPA calculations[3, 30]. We either use the vacuum value,  $g_A = 1.27$ , or a reasonably quenched value of  $g_A = 1.0$ . An argument in favour of the latter can be made as it has proven to be the case that some quenching is necessary in order to reproduce single beta decay half-lives[31]. In the case of  $2\nu\beta\beta$  decay we show the results for both values, although we use  $g_A = 1.0$  in tables and in comparisons with the results of other theoretical approaches. In the case of  $0\nu\beta\beta$  decays, our calculations use  $g_A = 1.27$  in order to facilitate comparison to the results of calculations of  $0\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements in other theoretical frameworks.

As is known, the closure approximation is not appropriate for the treatment of  $2\nu\beta\beta$  decays, so in all cases except when explicitly noted, the  $2\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements have been calculated using the full energy denominator. The only cases where the closure approximation was used was in comparison with the Interacting Boson Model (IBM) results[32] which were themselves calculated in the closure approximation. The energy denominator is taken from Ref. [33] and differs for each nucleus. The  $0\nu\beta\beta$  results were calculated in the closure approximation, which is appropriate for this mode of decay[34]. The average closure energies were the same as those used in the  $2\nu\beta\beta$  case.

Our results for the nuclear matrix elements for the  $2\nu\beta\beta$  mode are in general smaller than the results of other approaches[3, 30, 35, 36, 37, 38, 39]. However we argue they are just as good if not improved when compared to the experimental NMEs[40] for known double beta decays. The two nuclides whose NMEs diverge from the experimental results the most,  $^{76}\text{Ge}$  and  $^{82}\text{Se}$ , can be shown to display marked triaxiality[41], which means that a more successful description of their  $2\nu\beta\beta$  decays might have to wait for the development of a deformed version of the PN-RQRPA code.

In addition to the nuclear matrix elements, we calculate the phase space factors and the half-lives for those  $2\nu\beta\beta$  nuclides where the data about the optimal  $V_{0pp}$  is available. The calculation of the phase space factors follows the approach of Ref.[42, 33], although we report new values of the PSF that do not correspond entirely to the results in the works cited. The calculated half-lives show variance from the experimental results, although most of them are within an order of magnitude from the experimental  $T_{1/2}$ .

Concerning the calculations of  $0\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements, the main feature that distinguishes this work from previous studies of neutrinoless double beta decay is that, following recent work mostly in the framework of the generator coordinate method[43, 44, 45], we extend

our calculations to also use the full relativistic transition operator in addition to the transition operator that arises from a nonrelativistic reduction of that operator. As a result, instead of grouping the contributions to our nuclear matrix element into distinct Fermi, Gamow-Teller and tensor terms, we can directly show the contributions of the operators containing vector-vector (VV), axial-vector-axial-vector (AA), axial-vector-pseudovector (AP), pseudoscalar-pseudoscalar (PP) and weak magnetic (MP) couplings to the final result. We obtain results consistent with the fact, already reported[44], that the AA operator contributes the most to the final value of the nuclear matrix element, with the other couplings contributing at most around 1% of the total absolute value to the  $0\nu\beta\beta$  nuclear matrix element, whether the fully relativistic operator is used or not, except in  $^{116}\text{Cd}$  where the contributions go up to 7%.

Our calculations of the  $2\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements converged at a maximum  $pn$  pair energy of around 100 MeV. Unfortunately we find that the  $0\nu\beta\beta$  matrix element converges much slower, and calculations need to be extended to higher energies. Therefore the calculation of  $0\nu\beta\beta$  NMEs requires considerable computing power, which is exacerbated by the fact that we have to sum over a large number of  $J^\Pi$  states of the intermediate nucleus. Since this is the first application of the PN-RQRPA-based model, we have decided to limit ourselves to a maximum value of the multipole of the transition to the intermediate nucleus of  $6^+$ , and to disregard the weak magnetic contribution (which we expect to be low[44]) from the fully relativistic calculation. Furthermore we have been unable to implement an easy way to take short-range correlations[34] into account, particularly since our calculation of the  $0\nu\beta\beta$  matrix elements proceeds in a novel way. These and other limitations still leave our work as proof of concept that  $0\nu\beta\beta$  NMEs can be calculated by directly calculating the contributions of various coupling channels, without recoupling the result into a matrix element between two-neutron and two-proton states, as is commonly done in the relevant literature[46].

Finally, the nuclear matrix elements we obtain are almost systematically lower than those calculated in other theoretical approaches, even those based on the  $pn$ -QRPA. This was already the case for the  $2\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements we obtain, but is more pronounced in the  $0\nu\beta\beta$  case. Of course, in the latter case we also do not have any experimental data to compare our results to. Calculating the  $0\nu\beta\beta$  matrix elements for the case in which isoscalar pairing vanishes does not help much as the dependence of the nuclear matrix elements on the strength parameter for isoscalar pairing  $V_{0pp}$  is rather slight, as expected[47]. Only for the DD-ME2 results we obtain an appreciable enhancement of the  $0\nu\beta\beta$  NMEs. In fact, our results for the  $0\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements are closer to those of the interacting shell model than most of those reported from the nonrelativistic QRPA approaches. Curiously, a similar Skyrme-based (the similarity of Skyrme and point coupling interactions has been noted[48]) QRPA calculation by Terasaki

reported even lower values of the  $0\nu\beta\beta$  NME, which was blamed on excessive correlations within the QRPA[48] and the high-momentum components of the interaction. However, we believe that the low value of our results for the  $0\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements points to a need to extend the calculation to cover transitions of higher multipolarity, and further developments of the model going beyond this study, especially the inclusion of nuclear deformation effects.

The ratio of our results for the nuclear matrix elements obtained using the nonrelativistic reduction of the transition operator and the results obtained by using the full relativistic transition operator also needs to be noted. Previous work within the GCM reported these two as being very similar, and therefore the nonrelativistic approximation as justified[45, 43]. In contrast, for some nuclides we find a ratio of the result obtained with the nonrelativistically reduced operator to the one obtained using a fully relativistic transition operator as low as 5%, closer to what was reported in Ref. [44] as an anomalous result for  $^{150}\text{Nd}$ , raising the question of how anomalous this result truly is and if the nonrelativistic reduction of the transition operator is as justified as it first appears to be.

As stated, this work represents the first implementation of the theoretical framework based on the PN-RQRPA in the study of double beta decays. The perspectives for future research as continuation of the present work are numerous. In the immediate aftermath, we will focus on extending our calculations of the  $0\nu\beta\beta$  nuclear matrix elements in the sense of extending it to transitions of higher multipolarity and inclusion of nuclear deformation effects. In addition, we can consider other ways of finding the optimal value of the isoscalar pairing strength parameter  $V_{0pp}$ , for decays proceeding through both modes of double beta decay.

Further extensions are possible. In order to implement a viable treatment of short-range correlations within our  $0\nu\beta\beta$  decay study, we can extend our treatment of the ground state wavefunction to include a so-called unitary correlation operator. This procedure, consequently referred to as the Unitary Correlation Operator Method (UCOM)[49, 50], does not violate the normalisation of the wave functions as the simpler Jastrow function approach does[51] and might be more appropriate for our approach. The PN-RQRPA code we use is based on a code that is able to treat charge-exchange excitations at finite temperature. Double beta decay at finite temperature has only been sporadically mentioned in the literature, which means that the effects of finite temperature, while possibly small, mostly remain unexplored. By opening new charge-exchange transitions in nuclei at finite temperature, the NMEs could become larger.

A further possibility is to extend our calculation to the case of deformed nuclei. As mentioned earlier, already in the case of  $2\nu\beta\beta$  decays we have knowledge about the importance of triaxiality to some of the nuclei being studied, while others have deformations that could be approximated with axial symmetry. The theory framework for a deformed PN-RQRPA is under

development at the University of Zagreb; once complete we will be able to use it to extend our study to the treatment of deformed nuclei as well, although this represents an increase in the computational complexity of the problem, particularly for  $0\nu\beta\beta$  decays [47]. Such an extension would then represent the first QRPA calculation of deformed nuclei using the full relativistic operator.

# Ključne riječi

$\beta\beta$  – Dvostruki beta raspad

$2\nu\beta\beta$  – Dvo-neutrinski dvostruki beta raspad

$0\nu\beta\beta$  – Bezneutrinski dvostruki beta raspad

**(R)EDF** – (Relativistički) energijski funkcional gustoće (*engl. (Relativistic) energy density functional*)

**RMF** – Relativističko srednje polje (*engl. Relativistic mean field*)

**RHB** – Relativistički Hartree-Bogoliubov model (*engl. Relativistic Hartree-Bogoliubov model*)

**RHBCS** – Relativistički Hartree-BCS model (*engl. Relativistic Hartree-BCS model*)

**BCS** – Bardeen-Cooper-Schrieffer

**pnQRPA** – Proton-neutronska kvazičestična aproksimacija slučajnih faza (*engl. Proton-neutron quasiparticle random phase approximation*)

**PN-RQRPA** – Proton-neutronska relativistička kvazičestična aproksimacija slučajnih faza (*engl. Proton-neutron relativistic quasiparticle random phase approximation*)

**QHD** – Kvantna hadro-dinamika (*engl. Quantum hadrodynamics*)

**QCD** – Kvantna kromo-dinamika (*engl. Quantum chromodynamics*)

# Sadržaj

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>1</b>  | <b>Uvod</b>   | <b>1</b>   |
| <b>2</b>  | <b>Dvostruki beta raspadi: dvoneutrinski slučaj</b>               | <b>9</b>   |
| <b>3</b>  | <b>Dvostruki beta raspadi: bezneutrinski slučaj</b>               | <b>14</b>  |
| <b>4</b>  | <b>Relativistički Hartree-Bogoliubov i Hartree-BCS model</b>      | <b>26</b>  |
| <b>5</b>  | <b>Relativistička proton-neutron aproksimacija slučajnih faza</b> | <b>36</b>  |
| <b>6</b>  | <b>Relativistička interakcija s izmjenom mezona</b>               | <b>60</b>  |
| <b>7</b>  | <b>Relativističke interakcije s točkastim vezanjem</b>            | <b>68</b>  |
| <b>8</b>  | <b>Korelacije sparivanja</b>                                      | <b>77</b>  |
| <b>9</b>  | <b>Faktori faznog prostora</b>                                    | <b>81</b>  |
| <b>10</b> | <b>Računalna implementacija modela</b>                            | <b>88</b>  |
| <b>11</b> | <b>Dvoneutrinski dvostruki beta raspadi</b>                       | <b>101</b> |
| 11.1      | Testovi konvergencije NME   | 101        |
| 11.2      | Optimizacija $V_{0pp}$  | 102        |
| 11.3      | RHBCS+PN-RQRPA rezultati  | 105        |
| 11.3.1    | $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$                       | 105        |
| 11.3.2    | $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$                       | 110        |
| 11.3.3    | $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$                       | 114        |
| 11.3.4    | $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$                       | 115        |
| 11.3.5    | $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$                     | 119        |
| 11.3.6    | $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$                     | 122        |
| 11.3.7    | $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$                     | 125        |
| 11.3.8    | $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$                     | 128        |
| 11.3.9    | $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$                     | 131        |
| 11.3.10   | $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$                     | 134        |
| 11.4      | Usporedba s drugim teorijskim pristupima i rasprava               | 137        |



|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 11.5      | Usporedba s eksperimentalnim vrijednostima . . . . .          | 142        |
| 11.6      | Faktori faznog prostora i vremena poluživota . . . . .        | 145        |
| 11.7      | RHB+PN-RQRPA rezultati . . . . .                              | 147        |
| <b>12</b> | <b>Bezneutrinski dvostruki beta raspad</b>                    | <b>150</b> |
| 12.1      | Testovi konvergencije matričnih elemenata . . . . .           | 150        |
| 12.2      | Rezultati za pojedinačne nuklide . . . . .                    | 151        |
| 12.2.1    | $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ . . . . .         | 152        |
| 12.2.2    | $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ . . . . .         | 155        |
| 12.2.3    | $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$ . . . . .         | 157        |
| 12.2.4    | $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ . . . . .       | 159        |
| 12.2.5    | $^{110}\text{Pd} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$ . . . . .       | 162        |
| 12.2.6    | $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ . . . . .       | 164        |
| 12.2.7    | $^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Te}$ . . . . .       | 166        |
| 12.2.8    | $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$ . . . . .       | 168        |
| 12.3      | Usporedba s drugim teorijskim pristupima i rasprava . . . . . | 169        |
| <b>13</b> | <b>Zaključak</b>  | <b>175</b> |
|           | <b>Popis slika</b>  | <b>179</b> |
|           | <b>Popis tablica</b>  | <b>182</b> |
|           | <b>Bibliografija</b>  | <b>187</b> |
|           | <b>Životopis i popis objavljenih radova</b>                   | <b>195</b> |

# Poglavlje 1

## Uvod

Unutar gotovo devedeset godina od prvih teorijskih predviđanja dvostrukih beta raspada[52], ovi procesi su se pokazali ključnima za razumijevanje prirode neutrina i općenito kao most između nuklearne i čestične fizike[2].

Dvostruki beta raspad obuhvaćaju dvoneutrinske dvostruke beta raspade (DBD), odnosno:

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 2) + 2e^+ + 2\nu_e, \quad (1.1)$$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e, \quad (1.2)$$

i bezneutrinske DBD, odnosno:

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 2) + 2e^+. \quad (1.3)$$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-. \quad (1.4)$$

U oba slučaja radi se o procesima drugog reda, koji daju doprinos raspadu danog nuklida samo u slučaju kada je jednostruki beta raspad energetski nepovoljan. To je slučaj u određenim parno-parnim jezgrama[1], koje su stabilnije od susjednih neparnih jezgara zbog efekata sparivanja. Zbog toga je jednostruki beta raspad tih parno-parnih jezgara u neparno-neparnu jezgru-kćer zabranjen, i dvostruki beta raspad u parno-parnu jezgru-kćer ostaje kao jedini mogući kanal raspada.

Postojanje dvostrukih beta raspada predloženo je od samih početaka proučavanja slabih procesa[2]. Unatoč tome, ovi procesi dugo vremena nisu privukli značajan teorijski interes, pogotovo nakon kasnih 50-ih godina 20. stoljeća kad se činilo da su prepreke bezneutrinskim

dvostrukim beta raspadima nesavladive (odnosno da je vjerojatnost da je narušeno i očuvanje leptonskog broja i  $\gamma_5$ -invarijantnost slabe struje vrlo mala) [53]. Ovaj stav se promijenio, nakon gotovo dva desetljeća zanemarivanja dvostrukih beta raspada, s početkom modernih baždarnih teorija, kad je postalo jasno da pretpostavka da je neutrino čestica bez mase vodi do  $\gamma_5$ -invarijantnosti slabe struje i očuvanja broja leptona [53]. To znači da umjesto dva uvjeta koji neovisno moraju biti ispunjeni da bi dvostruki beta raspad bez emisije neutrina bili mogući, imamo samo jedan uvjet. Paralelno ovome, razvoj različitih teorija velikog ujedinjenja (engl. Grand Unification Theories, GUTS) rezultirao je sumnjom da je očuvanje leptonskog broja samo približna simetrija, koja izgleda egzaktnom zbog velike masene skale pridružene lomljenju simetrije (u slučaju GUTS, skale velikog ujedinjenja od  $10^{15}$ [54]- $10^{16}$ [55] GeV)[53].

Proučavanje dvostrukih beta raspada počelo je nedugo nakon otkrića neutrina[2], s prvim izračunima poluživota dvoneutrinskih dvostrukih beta raspada[52], motiviranim pitanjima o stabilnosti parno-parnih jezgara tijekom geoloških vremena. Ubrzo, međutim, kako je razumijevanje prirode neutrina napredovalo, problematika dvostrukih beta raspada postaje usko vezana uz problem svojstava neutrina. Mogućnost da se neutralne čestice pojavljuju u beta-minus i (tada) nedavno otkrivenim beta-plus raspadima prepoznata je tek jednu godinu prije prvog rada o dvostrukim beta raspadima. Time se otvorilo pitanje razlike ili identiteta čestica koje danas zovemo neutrinima i antineutrinima. Danas, ako su neutriini identični vlastitim antičesticama za njih kažemo da su Majorana čestice[56], dok za neutrine koji su različiti od svojih antičestica kažemo da su Diracove čestice[56].

"Simetrična" teorija neutrina E. Majorane implicirala je da neutriini ne posjeduju magnetski moment i da se prema tome ista neutrinska čestica emitira u beta-minus i beta-plus raspadima - modernim riječnikom, rekli bi da je neutrino Majorana čestica i da je identičan vlastitoj antičestici[57]. Očiti način da se ova pretpostavka testira je da se neutrino koji je nastao u jednom beta raspadu iskoristi da se inducira drugi beta raspad istog predznaka. Furryjev [58] uvid da neutriini u procesu mogu biti virtualni doveo je do otkrića mogućnosti bezneutrinskih beta raspada - gdje ne bi bilo emisije neutrina u konačnom stanju, uslijed čega bi signal procesa u spektru  $2e^-$  bio oštra linija umjesto kontinuirane raspodjele očekivane u slučaju dvoneutrinskog dvostrukog beta raspada. Prvi računi, mada provedeni bez doprinosa moderne teorije nuklearne strukture, ukazali su na to da bi vrijeme poluživota bezneutrinskih raspada moglo biti drastično kraće od vremena poluživota u dvoneutrinskom slučaju, što je potaklo zanimanje za proces.

Otkriće narušenja CP simetrije[59] i mjerenje heliciteta neutrina[60] su značajno promijenili ovu sliku bezneutrinskih dvostrukih beta raspada. Razlika heliciteta neutrina emitiranih u jednom beta raspadu i heliciteta neutrina potrebnih da se izazove drugi beta raspad znači da su bezneutrinski dvostruki beta raspad zabranjeni i za bezmasene Majorana neutrine, u odsutstvu

struja desne kiralnosti.

Uvjerenje da zakoni fizike zabranjuju bezneutrinske DBD, čak i za Majorana neutrine, je dominiralo gotovo dva desetljeća, dok uspjeh teorija velikog ujedinjenja (GUT) krajem sedamdesetih godina dvadesetog stoljeća nije doveo do novog interesa za bezneutrinske dvostruke beta raspade. Naime, GUT i srodne teorije dozvoljavaju da Majorana neutrini imaju konačnu masu, što znači da je dozvoljena promjena pariteta virtualnog neutrina između emisije i apsorpcije. Još jedan način na koji se argument iz prijašnjeg paragrafa može zaobići je pretpostavkom da postoje struje desne kiralnosti. U GUT teorijama, takva pretpostavka nije neovisna o postojanju neiščezavajuće mase neutrina[61]. Međutim, postavlja se pitanje da li postojanje bezneutrinskog kanala dvostrukih beta raspada implicira postojanje neiščezavajuće mase neutrina. Ispostavlja se da takva veza između bezneutrinskih dvostrukih beta raspada i masivnih neutrina postoji, uz (vrlo blage) pretpostavke[62]:

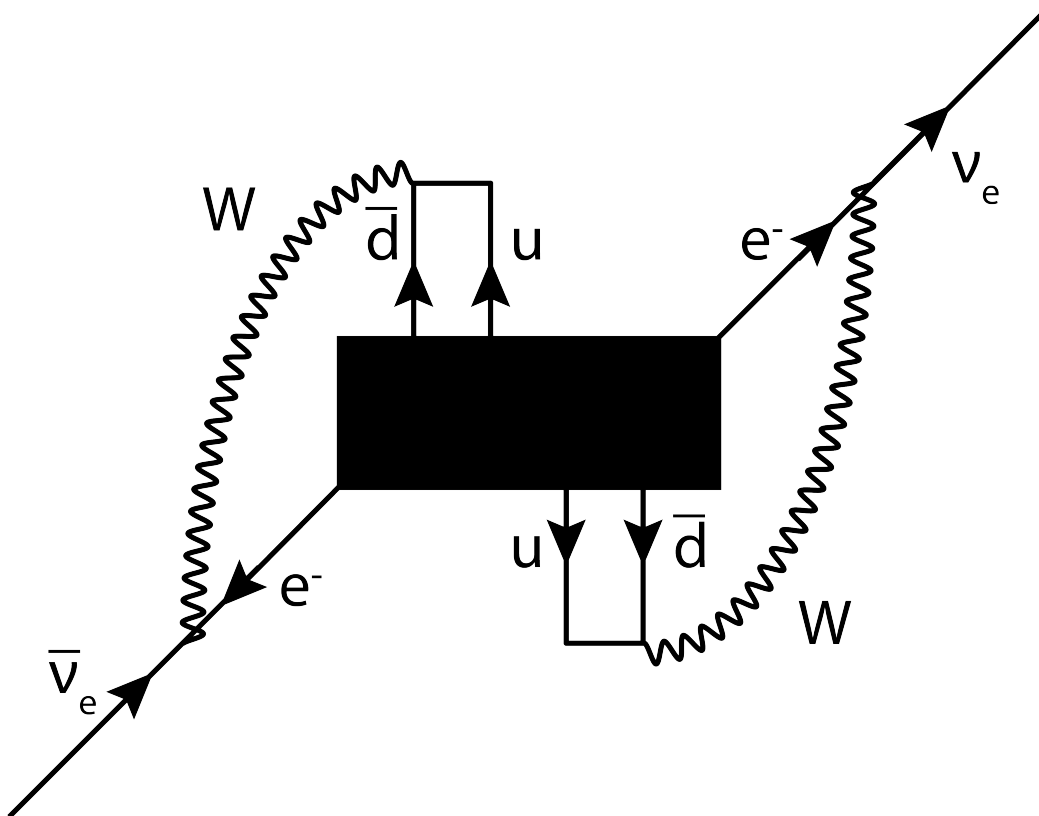
- da se slaba interakcija može opisati lokalnom baždarnom teorijom,
- da su elektron, u i d kvarkovi masivne čestice,
- da teorija kojom opisujemo slabu interakciju sadrži standardnu "lijevo-ruku" (engl. left-handed) interakciju  $(\bar{\nu}_{e,L}\bar{\gamma}_\mu e_L + \bar{\nu}_{e,L}\bar{\gamma}_\mu d_L)W^\mu$  koja povezuje leptone i neutrine lijeve kiralnosti.

Tu vezu daje tzv. Schechter-Valle teorem[6], kojeg se obično prikazuje grafički kao na slici 1.1. Interpretacija ovog teorema je slijedeća. Bezneutrinski dvostruki beta raspad se promatra kao raspršenje[63]:

$$0 \rightarrow \bar{d}\bar{d}uue^-e^-, \quad (1.5)$$

jer zbog pretpostavke da radimo s lokalnom baždarnom teorijom vrijedi križna (engl. crossing) simetrija[64] i možemo graf procesa čitati na taj način. Centralna "crna kutija" (engl. black box) predstavlja efektivni operator za bezneutrinski dvostruki beta (od sada,  $0\nu\beta\beta$ ) raspad, koji, možemo pretpostaviti, proizlazi iz fizike izvan Standardnog Modela. Važno je da ne moramo znati taj operator da bi teorem bio valjan. "Crna kutija" je stvarno crna kutija (zbog čega se Schechter-Valle teorem nekad zove i "teoremom crne kutije" odn. "black-box theorem").

Naravno, sama "crna kutija" bi mogla sadržavati druge dijagrame, i na "tree" i na "loop" nivou, koji bi u principu mogli poništiti doprinos masi koji je prikazan izvan kutije. Takasugi[62] i Nieves[65] su pokazali da se može isključiti postojanje diskretne ili kontinuirane simetrije koja



Slika 1.1: Grafički prikaz Schechter-Valle teorema.

bi rezultirala s iščezavajućom Majorana masom neutrina u svim redovima teorije smetnje. Ovaj argument ne isključuje mogućnost "slučajnog" poništenja u svim redovima računa smetnje, ali ta mogućnost se čini neuvjerljivom zbog količine finog podešavanja koje bi bio potrebno.

Schechter-Valle teorem je moguće proširiti[66] tako da uzima u obzir postojanje tri generacije Majorana neutrina i miješanje između vrsta neutrina. Nadalje su moguća proširenja koja uključuju supersimetriju[67] i druge efekte. Ono što je važno za temu bezneutrinskih dvostrukih beta raspada (i dvostrukih beta raspada općenito) je da Schechter-Valle teorem garantira s velikom sigurnošću da je svaki signal  $0\nu\beta\beta$  raspada signal ne samo Majorana prirode neutrina, nego i njihove neiščezavajuće mase.

Te dvije mogućnosti, dakle, su razlog za trenutni značajni interes za problematiku dvostrukih beta raspada.  $0\nu\beta\beta$  su važni zato što direktno otvaraju mogućnost detekcije fizike izvan standardnog modela. Dvoneutrinski dvostruki beta ( $2\nu\beta\beta$ ) raspadi omogućavaju razvoj i podešavanja (engl. benchmarking) modela koji se onda mogu primjeniti na bezneutrinski slučaj, vodeći računa da u prvom slučaju postoje eksperimentalni podaci. Ti eksperimentalni podaci su dobiveni iz niza mjerenja, počevši od kasnih četrdesetih godina prošlog stoljeća[53], ali koji su značajno napredovali devedesetih godina, koristeći obogaćene materijale i izvore velikih

snaga[2]. Možemo razlikovati slijedeće vrste eksperimenata[53]:

- direktna detekcija elektronskih ili pozitronskih parova emitiranih iz iste točke, u isto vrijeme, unutar uzorka jezgre-majke. Ovakvi eksperimenti se dalje mogu dijeliti[2] na aktivne i pasivne, pri čemu se u aktivnim eksperimentima direktne detekcije izvor istovremeno koristi i kao detektor.
- Radiokemijski eksperimenti, gdje se promatra akumulacija jezgre-kćeri u uzorku jezgre-majke; i
- Geokemijski eksperimenti, slični radiokemijskim eksperimentima s razlikom da se promatra zastupljenost jezgre-kćeri u geološkim uzorcima koji sadrže jezgru-majku.

Radiokemijski i geokemijski eksperimenti tehnički ne mogu razlučiti  $0\nu\beta\beta$  i  $2\nu\beta\beta$  raspade; unatoč tome, prve detekcije signala  $2\nu\beta\beta$  raspada su se sve dogodile u geokemijskim eksperimentima[2].

Sa drugom generacijom eksperimenata, geokemijski i radiokemijski eksperimenti su izgubili na važnosti, i glavni eksperimentalni napor je usmjeren u direktnu detekciju, sa raznim eksperimentalnim postavima. Recimo, možemo spomenuti eksperimente koji su koristili komore za vremensku projekciju (engl. time-projection chamber, TPC), gdje bi posebno naveli prvu direktnu detekciju  $2\nu\beta\beta$  raspada[68], povlačne komore (engl. drift chambers), plastične scintilatore, NaI brojače (svo troje u kombinaciji koriste ELEGANTS detektori[69]), plinske detektore (koji su pogotovo zanimljivi jer se mogu koristiti u aktivnim eksperimentima, recimo kad se ksenon koristi kao i izvor i detektor[2]), itd. Poluvodički detektori su posebno pogodni za eksperimente sa dvostrukim beta raspadima zbog dobre rezolucije u energijama[2]. Dvostruki beta nuklid  $^{76}\text{Ge}$  je i sam poluvodički materijal, što znači da se može koristiti za aktivne eksperimente. Najpoznatiji primjer takve upotrebe je eksperiment Heidelberg-Moskva kolaboracije[70], koji se može uzeti kao prvi eksperiment druge generacije[2].

Do sada,  $2\nu\beta\beta$  raspadi su detektirani u 12 jezgara:  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{124}\text{Te}$ ,  $^{128}\text{Te}$ ,  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{136}\text{Xe}$ ,  $^{150}\text{Nd}$ , i  $^{238}\text{U}$ [71, 40]. S druge strane, najnapredniji trenutni eksperimenti mogu dati samo donje granice na vremena poluživota za  $0\nu\beta\beta$  raspade. Od novijih eksperimenata, spomenuli bi EXO-200[7] (engl. Enriched Xenon Observatory, opservatorij s obogaćenim ksenonom), KamLAND-Zen[8], CUORE-0[9], GERDA[10], MAJORANA[11], SuperNEMO[12], i SNO+[13], a opsežniji pregled  $2\nu\beta\beta$  eksperimenata je dan u Ref. [2].

Prve teorijske analize dvostrukih beta raspada su promatrale dva raspadajuća nukleona na pojednostavljen način, bez da su uzele u obzir korelacije nukleona u jezgri. To je dovelo do pogrešnog vjerovanja da su  $0\nu\beta\beta$  i  $2\nu\beta\beta$  raspadi povezani jednostavnim odnosom skaliranja[53].

Danas, detaljni tretman nuklearne strukture ključan je sastojak izračuna vremena poluživota dvostrukih beta raspada. Doprinos nuklearne fizike u razmatranju  $0\nu\beta\beta$  i  $2\nu\beta\beta$  raspada sadržan je u nuklearnom matričnom elementu (NME) [72]. Radi se o faktoru koji sadržava doprinos nukleona ukupnom matričnom elementu prijelaza [73], čiji kvadrat daje vjerojatnost prijelaza. Doprinos elektronske fizike, pogotovo kinematičke strane raspada, dan je u faktoru faznog prostora (engl. phase space factor, PSF) [74, 75].

Moderni izračuni nuklearnih matričnih elemenata koriste niz nuklearnih modela i aproksimacija. Za oba kanala dvostrukog beta raspada, izračuni poluživota i drugih svojstava su provedeni koristeći kvazičestičnu aproksimaciju slučajne faze (QRPA) [76, 77, 78], ekstenziju QRPA, renormaliziranu kvazičestičnu aproksimaciju slučajne faze (RQRPA) [79, 80, 81, 82], tzv. "drugu" RPA (SRPA) [83, 84], međudjelujući model ljusaka (ISM) i srodne pristupe [85, 86, 87], pristupe temeljene na raznim energijskim funkcionalima gustoće (EDF) [88, 89], međudjelujući bozonski model (IBM) [90, 91, 35], kvazičestičnu Tamm-Dancoff aproksimaciju (QTDA) [92, 93], i niz drugih pristupa [94, 95, 96].

Međudjelujući model ljusaka tretira višečestične-višešupljinske korelacije (*mpmh* korelacije) bolje od QRPA pristupa [97], međutim teško je postići njegovu konvergenciju s povećanjem valentnog jednočestičnog prostora [97, 98]. Nekonzistentnost rezultata ISM i pristupa baziranim na QRPA je poznati problem u području dvostrukih beta raspada [97]. Druga RPA (engl. second RPA) [99] i druga QRPA (engl. second QRPA) [82] dodaju eksplicitan tretman dvočestično-dvošupljinskih parova, ali su izrazito računski intenzivni [4], a sama druga QRPA nije razvijena do kraja [4]. Model međudjelujućih bozona podrazumijeva inertnu sredicu [100], što u praksi znači da su nukleoni ograničeni na jednu valentnu ljusku za svaku vrstu nukleona, i da veliki utjecaj na rezultat imaju jednočestične energije [100]. Međutim, u IBM modelu jednočestične energije se moraju tretirati kao ulazni podaci [100], što je pogotovo problematično za jezgre gdje takvi podaci ne postoje. U QRPA modelima, jednočestične energije su rezultat samosuglasnog računa. Osim toga, IBM pretpostavlja razvoj fermionskih operatora u beskonačni red bozonskih, što znači da se postavlja problem skraćivanja beskonačnog reda, koji u QRPA pristupima ne postoji [100].

Jedan od pristupa koji se pokazao jako uspješnim u opisivanju dvostrukih beta raspada je protonsko-neutronska (engl. charge-exchange) kvazičestična aproksimacija slučajnih faza, pn-QRPA [3, 18, 101, 102]. Radi se o proširenju QRPA gdje se uobičajeno izovektorsko proton-proton i neutron-neutron sparivanje (engl. pairing) u rezidualnoj interakciji za jezgre s otvorenim ljuskama nadopunjava izoskalarnim proton-neutron (*pn*) sparivanjem (*pn* sparivanje postoji u dvije varijante, kao izovektorsko i izoskalarno, ali izovektorsko *pn* sparivanje vrlo snažno opada s  $|N - Z|$  i nije relevantno za opis dvostrukih beta raspada [103]). Prethodna istraživanja

su pokazala da je izoskalarno  $pn$  sparivanje bitno u dvostrukim beta-emiterima[104].

Cilj ovog rada je uspostaviti novi teorijski okvir za opis dvostrukih beta raspada,  $0\nu\beta\beta$  kao i  $2\nu\beta\beta$ , relativističkom ekstenzijom  $pn$ -QRPA modela, zasnovanoj na relativističkom energijskom funkcionalu gustoće (REDF)[15]. Opis  $2\nu\beta\beta$  raspada će biti primjenjen na podskup nuklida za koje znamo da su  $2\nu\beta\beta$  emiteri:  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{128}\text{Te}$ ,  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{136}\text{Xe}$  i  $^{150}\text{Nd}$ . Što se tiče  $0\nu\beta\beta$  raspada, u radu razmatramo bezneutrinske raspade nuklida  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{110}\text{Pd}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ , i  $^{128}\text{Te}$ .

Osnovno stanje jezgara koje razmatramo opisano je u okviru relativističkog Hartree-BCS[24] odnosno Hartree-Bogoliubov[16] modela. Podatke o prijelazima koji su relevantni za dvostruke beta raspade ( $0^+ \rightarrow 1^+$  za  $2\nu\beta\beta$  i prijelazi iz  $0^+$  u sve multipole i paritete koje razmatramo za  $0\nu\beta\beta$ ) dobivamo iz proton-neutron relativističke kvazičestične aproksimacije slučajnih faza (PN-RQRPA)[14], koja je nedavno proširena tako da može tretirati relativističke interakcije točkastog vezanja (engl. point coupling) ovisne o gustoći, kao alternativu interakciji (također ovisnoj o gustoći) izvedenoj iz izmjene mezona. To omogućuje da istražimo ne samo rezultate za jednu interakciju, nego i ovisnost rezultata o modelu, odnosno korištenju, redom, interakcije s točkastim vezanjem ili izmjenom mezona. Za razliku od većine studija dvostrukih beta raspada koje koriste  $pn$ -QRPA ili izvedenice, gdje se polazi od shematske ili "realistične" nukleon-nukleon interakcije[105, 106], naš teorijski okvir polazi od interakcije izvedene iz relativističkog energijskog funkcionala gustoće. Korelacije sparivanja su uzete u obzir na nivou osnovnog stanja i prijelaza u pobuđeno stanje. Nadalje, treba napomenuti da većina istraživanja dvostrukih beta raspada koristi nerelativističke modele, i zasniva se na nerelativistički reduciranom operatoru prijelaza. Korištenje punog relativističkog operatora prijelaza je počelo tek nedavno[45, 43], a ovaj rad predstavlja prvo istraživanje  $2\nu\beta\beta$  i  $0\nu\beta\beta$  raspada koristeći relativistički QRPA model.

U izračunima dvostrukih beta raspada korištena su dva različita operatora prijelaza; "nerelativistički" reducirani operator, koji se može raspisati kao suma Gamow-Teller, Fermi, i u slučaju  $0\nu\beta\beta$  raspada tenzorskih operatora prijelaza, koji su relevantni i za  $2\nu\beta\beta$  i za  $0\nu\beta\beta$  raspade, i puni relativistički operator, koji se može raspisati kao suma pet operatora (koji opisuju vektorsko, pseudovektorsko, pseudovektorsko-pseudoskalarno, pseudoskalarno, i slabo-magnetsko vezanje), koji je važan uglavnom za  $0\nu\beta\beta$  raspade.

Treba napomenuti da, budući da ovaj rad predstavlja prvu implementaciju našeg teorijskog okvira i generalno prvu implementaciju koje smo svjesni relativističkih modela ovisnih o gustoći u studijama dvostrukih beta raspada, nismo bili u mogućnosti uzeti određene efekte u obzir, budući da bi tretman istih predstavljao značajnu komplikaciju. Među takve dodatne efekte spada deformacija[107, 108], baždarna simetrija i renormalizacija[109], ponovne uspostave izospin-



ske simetrije[110, 111] i niz drugih. Unatoč tome, važno je istražiti na razini naše implementacije kakve su perspektive relativističkih modela u opisu dvostrukih beta raspada.

Rad je organiziran na sljedeći način: prvo dajemo kratak opis teorije dvostrukih beta raspada, dvoneutrinog u poglavlju 2 i bezneutrinog u poglavlju 3, s posebnim naglaskom na operatore prijelaza za bezneutrinu slučaj. Nakon toga dajemo pregled relativističke teorije srednjeg polja, koju koristimo za opis osnovnog stanja relevantnih jezgara, u poglavlju 4 i potom proton-neutron relativističke kvazičestične aproksimacije slučajnih faza (PN-RQRPA), s kojom tretirano prijelaze u pobuđena stanja, u poglavlju 5. Slijede detalji interakcija koje su korištene u našem teorijskom modelu, interakcija s izmjenom mezona u poglavlju 6 i interakcija s točkastim vezanjem u poglavlju 7, kao i diskusija korelacija sparivanja u poglavlju 8 i faktora faznog prostora u poglavlju 9. Poglavlje 10 sadrži detalje računalne implementacije našeg modela. Na kraju dajemo pregled rezultata naših računa, za dvoneutrinu beta raspade u poglavlju 11 i bezneutrinu beta raspade u poglavlju 12, i raspravu. Završavamo sa zaključkom u poglavlju 13.

## Poglavlje 2

# Dvostruki beta raspadi: dvoneutrinski slučaj

Dvoneutrinski dvostruki beta raspad ( $2\nu\beta\beta$  raspad) može se prikazati kao dva sekvencijalna beta raspada (plus ili minus) od kojih u slučaju dvostrukog beta-minus raspada prvi ide iz početne  $0^+$  (N,Z) jezgre u virtualna  $1^+$  stanja međujezgre (N-1,Z+1), a drugi polazi iz međujezgre u dobro definirano  $0^+$  stanje konačne (N-2,Z+2) jezgre[112], vidi jedn. (1.1) i (1.2). U većini računa  $0^+$  stanje konačne jezgre je osnovno stanje; postoje iznimke[113] ali račun raspada u pobuđeno stanje konačne jezgre zahtijeva razmatranje koji je iznad trenutnog stanja našeg teorijskog okvira[114, 115].

Vrijeme poluživota za dvostruke beta raspade je definirano kao[116]:

$$\frac{1}{T_{1/2}^{2\nu}} = G^{2\nu}(Q, Z) |\mathcal{M}|^2, \quad (2.1)$$

gdje je  $G^{2\nu}$  faktor faznog prostora, koji proizlazi uglavnom iz geometrije reakcije (nuklearna struktura ima mali utjecaj na  $G^{2\nu}$ , uglavnom jer doprinosi radijusu i raspodjeli naboja u jezgri)[42, 33], i može se naći tabuliran recimo u [74] i drugdje, a ukupni matrični element  $\mathcal{M}$  je suma Fermi i Gamow-Teller doprinosa[4]:

$$\mathcal{M} = g_A \left[ \mathcal{M}_{GT}^2 + \frac{g_V^2}{g_A^2} \mathcal{M}_F^2 \right]. \quad (2.2)$$

Ograničavamo se, dakle, na dozvoljene procese. Doprinos zabranjenih prijelaza dvostrukom beta matričnom elementu je istražen[101], i pokazuje se da je zanemariv u odnosu na doprinos

dozvoljenih prijelaza, zbog toga što promjena pariteta zahtijeva specifičnu kinematiku leptona uključenih u raspad, i kinematički efekti usred toga vode do značajnog potiskivanja matričnog elementa koji odgovara doprinosu zabranjenih prijelaza[101, 117].

Što se tiče samih Gamow-Teller i Fermi matričnih elemenata, njih se može zapisati kao težinsku sumu produkata jednočestičnih matričnih elemenata za Gamow-Teller ili Fermi prijelaze[17]:

$$\mathcal{M}_{GT} = g_A m_e \sum_m \frac{\langle f | |\sum_a \sigma_a \tau_a^-| | m \rangle \langle m | |\sum_a \sigma_a \tau_a^-| | i \rangle}{E_{m,0} - \frac{M_i + M_f}{2} + m_e} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{M}_F = g_A m_e \sum_m \frac{\langle f | |\sum_a \tau_a^-| | m \rangle \langle m | |\sum_a \tau_a^-| | i \rangle}{E_{m,0} - \frac{M_i + M_f}{2} + m_e}, \quad (2.4)$$

gdje je  $\sigma$  spinski operator, predstavljen Pauli matricama,  $\tau^-$  operator koji snižava projekciju izospina nukleona, suma u izrazu ide po svim virtualnim  $1^+$  stanjima u međujezgri, označenima indeksom  $m$ , koja imaju energiju  $E_{m,0}$ . Faktor  $g_A$  je jačina aksijalno-vektorskog vezanja[3]. Vrijednost iste u vakuumu je 1.27 (premda se nekad konvencionalno uzima 1.25), ali u nuklearnom mediju se očekuje da će vrijednost biti manja[3, 4]. U ovome radu uzimamo vakuumsku vrijednost 1.27 i renormaliziranu vrijednost 1.0 - smanjenu ali ne drastično. Time izbjegavamo da vrijednost  $g_A$  postane slobodni parametar modela, čime bi se snizila njegova prediktivna moć. Treba napomenuti da se ovako definirani matrični element nekad zove efektivnim, dok se naziv matrični element bez kvalifikacija ostavlja za izraz koji ne sadrži  $g_A$ . Radi se o minornoj terminološkoj razlici.

Oko predznaka izospinskog operatora postoje dvije konvencije; neki radovi koriste konvenciju suprotnu od one koja je odabrana u ovom radu[17]. U ovom radu definiramo izospin na način da se proton i neutron se smatraju stanjima jedne čestice, nukleona, i definiramo izobarni spin ili izospin po analogiji sa intrinzičnim spinom, tako da nukleon ima ukupnu količinu izospina  $1/2$ , i tako da je projekcija izospina  $\tau_3 = -1/2$  za neutrone a  $\tau_3 = +1/2$  za protone.

Međutim, uobičajeno je energije virtualnih međustanja mjeriti od osnovnog stanja početne jezgre, u kojem slučaju trebamo apsolutnu energiju međustanja zamjeniti s novom energijom, koja predstavlja energiju pobuđenja iz početne jezgre[17]:

$$E_m = E_{m,0} - M_i. \quad (2.5)$$

Onda možemo pisati za nazivnik u jednadžbama (2.3) i (2.4):

$$E_{m,0} - \frac{M_i + M_f}{2} = E_{m,0} - M_i + M_i - \frac{M_i + M_f}{2} = E_m - \frac{Q}{2}, \quad (2.6)$$

gdje u zadnjem izrazu prepoznamo  $Q$  vrijednost procesa[29]:

$$Q = M_i - M_f. \quad (2.7)$$

Namjera nam je bila da teorijski okvir predstavljen u ovom radu bude samosuglasan koliko je god moguće. Tako poboljšavamo prediktivnu moć modela, i smanjujemo broj neodređenih parametara. Iz tog razloga, sve  $Q$  vrijednosti su dobivene iz samog modela, koristeći srednju energiju vezanja po nukleonu ( $E/A$ ) dobivenu iz relativističkog Hartree-BCS ili Hartree-Bogoliubov računa, na sljedeći način:

$$Q = A \left[ (E/A)_f - (E/A)_i \right] + 2(m_n - m_p), \quad (2.8)$$

gdje su  $m_p$  i  $m_n$  mase protona i neutrona.

Računi nuklearnih matričnih elemenata za dvostruke beta raspade nekad koriste aproksimaciju prosječne energije (engl. closure approximation), gdje se energijski nazivnik u svakom članu sume u jednažbama (2.3) i (2.4) zamjeni sa prosječnom energijom[118, 33]:

$$\frac{1}{E_m + \frac{Q}{2} + m_e} \rightarrow \frac{1}{\langle E \rangle}. \quad (2.9)$$

Ovakva aproksimacija se više ne smatra opravdanom u slučaju  $2\nu\beta\beta$  matričnih elemenata[118], ali je opravdana i dalje se koristi za račun matričnih elemenata  $0\nu\beta\beta$  raspada[118].

Što se tiče Fermi matričnog elementa, pokazuje se da, ako je jakost izoskalarnog sparivanja jednaka u osnovnom i pobuđenom stanju, Fermi matrični element iščezava[116]. U ovom radu će biti prikazana tri različita računa; u sva tri je ovaj uvjet ispunjen i Fermi matrični element ispada nula. Ovo je potvrđeno i računom u nekoliko reprezentativnih nuklida za sve tri interakcije. Zbog ovoga, Fermi matrični element neće biti prikazivan za dvoneutrinske raspade.

Jednažbe (2.3) i (2.4) predstavljaju generalni oblik matričnog elementa za  $2\nu\beta\beta$  raspad. Ispostavlja se, međutim, da PN-RQRPA, isto kao ni nerelativistički pn-QRPA, ne može računati prijelaze iz  $1^+$  međustanja u konačnu jezgru. Umjesto toga, računamo beta-minus prijelaz iz

početne jezgre u međujezgru, i beta-plus prijelaz iz konačne jezgre u međujezgru. Problem je u tome što takav postupak daje dva različita skupa  $1^+$  stanja u međujezgri. Zato se izraz (2.3) proširuje na način[17]:

$$\mathcal{M}_{GT} = \sum_{m'm} \frac{\langle m | |\sum_a \sigma_a \tau_a^-| | i \rangle \langle m | m' \rangle \langle f | |\sum_a \sigma_a \tau_a^-| | m' \rangle}{E_m + \frac{Q}{2} + m_e}. \quad (2.10)$$

U gornjoj jednadžbi,  $m$  i  $m'$  označavaju dva različita skupa stanja međujezgre, dobivena različitim računima iz različitih početnih stanja  $0^+$  jezgara. Član  $\langle m | m' \rangle$  je takozvani faktor preklopa ili samo preklop, koji daje mjeru toga koliko se različita stanja u dva skupa stanja međujezgre poklapaju. Najšire korišteni izraz za preklop je dan u Ref. [18]:

$$\langle m | m' \rangle \approx \sum_{pn} \left[ X_{pn}^m X_{pn}^{m'} - Y_{pn}^m Y_{pn}^{m'} \right], \quad (2.11)$$

gdje su  $X$  i  $Y$  RPA amplitude, čija će formalna definicija biti dana u poglavlju 5. Interpretacija ovakve formule je jasna: prolazeći kroz sve konfiguracije (svojstvena stanja protona i neutrona dobivena unutar modela ljuskaka), zbrajamo umnoške amplitude koje nam govore koliko svaka konfiguracija sudjeluje u stanju  $m$  odnosno  $m'$ . Važno je napomenuti da je ovo aproksimacija, ali, ispostavlja se, dobro utemeljena aproksimacija koja daje razumne rezultate. Postoji i alternativna preskripcija koja uključuje faktore proporcionalne brojevima zauzeća[18]:

$$\langle m | m' \rangle \approx \sum_{pn} \left[ X_{pn}^m X_{pn}^{m'} - Y_{pn}^m Y_{pn}^{m'} \right] \tilde{u}_p \tilde{u}_n, \quad (2.12)$$

gdje je[18]:

$$\tilde{u}_{p/n} = u_{p/n}^m u_{p/n}^{m'} - v_{p/n}^m v_{p/n}^{m'}. \quad (2.13)$$

U modelu prikazanome u ovom radu, brojevi zauzeća proizlaze iz rješenja RHBCS ili RHB modela. U ovom radu koristit ćemo obje preskripcije, onu danu u jednadžbi (2.11) kao i onu danu u jednadžbi (2.12), u svim računima za  $2\nu\beta\beta$  raspad. Ispostavlja se da su rezultati dobiveni s dvije preskripcije iznimno slični.

Na kraju treba napomenuti da se u računima dvoneutrinog dvostrukog beta raspada obično zanemaruje niz efekata koji su važni u bezneutrinom slučaju, uključujući struje višeg reda i

realistične kratkodosežne korelacije[119]. Činjenica da te efekte možemo zanemariti proizlazi iz neosjetljivosti  $2\nu\beta\beta$  matričnih elemenata na detaljnu nukleonsku valnu funkciju za male međunukleonske udaljenosti  $\mathbf{r}_{12}$ [119].

## Poglavlje 3

# Dvostruki beta raspadi: bezneutrinski slučaj

Bezneutrinski dvostruki beta raspadi ( $0\nu\beta\beta$  raspad) su, kao što je spomenuto u uvodu, zabranjeni standardnim modelom čestične fizike[2]. Osim toga, za razliku of dvoneutrinskih raspada, nije ih ni moguće jednostavno modelirati kao niz dva jednostruka beta raspada. Umjesto toga, mora se računati niz raspada iz početne i konačne jezgre u međustanja raznih multipolariteta[116].

Vrijeme poluraspada za  $0\nu\beta\beta$  raspad je definirano kao[34]:

$$\frac{1}{T_{1/2}^{0\nu}} = G^{0\nu}(Q, Z) |\mathcal{M}^{0\nu}|^2 |\langle m_{\beta\beta} \rangle|^2, \quad (3.1)$$

gdje su  $G^{0\nu}$  i  $M^{0\nu}$  redom faktor faznog prostora i nuklearni matrični element, dok je  $\langle m_{\beta\beta} \rangle$  efektivna masa Majorana neutrina[34], koja ovisi o neutrinским masama i elementima matrice miješanja.

U nerelativističkoj redukciji, uobičajeno je matrični element bezneutrinškog dvostrukog beta raspada pisati kao[120]:

$$\mathcal{M}^{0\nu} = \mathcal{M}_{GT}^{0\nu} - \left( \frac{g_V}{g_A} \right)^2 \mathcal{M}_F^{0\nu} + \mathcal{M}_T^{0\nu}, \quad (3.2)$$

gdje su članovi sume, redom, Gamow-Teller, Fermi, i tenzorski matrični element, definirani kao[57]:

$$\mathcal{M}_{GT}^{0\nu} = \sum_k \langle 0_f^+ | \sum_{mn} h_{GT}(\mathbf{r}_{mn}, E_k) (\boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\sigma}_n) | 0_i^+ \rangle, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{M}_F^{0\nu} = \sum_k \langle 0_f^+ | \sum_{mn} h_{GT}(\mathbf{r}_{mn}, E_k) | 0_i^+ \rangle, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{M}_T^{0\nu} = \sum_k \langle 0_f^+ | \sum_{mn} h_{GT}(\mathbf{r}_{mn}, E_k) S_{mn}^T | 0_i^+ \rangle. \quad (3.5)$$

Pri pisanju gornjeg izraza, uzeli smo definicije Fermi i Gamow-Teller operatora iz područja jednostrukih beta raspada[121], a tenzorski operator možemo definirati kao[17]

$$S_{12}^T = 3[(\boldsymbol{\sigma}_1 \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \hat{\mathbf{r}})] - \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2, \quad (3.6)$$

U izrazu (3.3), suma po  $k$  ide po svim virtualnim stanjima međujezgre, a  $\mathbf{r}_{mn}$  je relativna udaljenost nukleona koji sudjeluju u raspadu. Veličine  $h_\alpha$ , gdje je  $\alpha$  jedan od F,GT,T, su neutrinski potencijali, koji su za slučaj izmjene lakih neutrina[17]:

$$h_\alpha(\mathbf{r}_{mn}, E_k) = \frac{R_A}{g_A^2} \int_0^\infty dq \frac{qh_\alpha(q^2) j_\lambda(\mathbf{q}\mathbf{r}_{mn})}{q + E_k + (M_i + M_f)/2}. \quad (3.7)$$

Nuklearni radijus  $R_A$  je konvencionalno[121]:

$$R_A = 1.2A^{1/3} fm, \quad (3.8)$$

ili može biti dobiven iz mikroskopskog modela za račun osnovnog stanja jezgre, a sferna Besselova funkcija  $j_\lambda$  je reda  $\lambda=0$  za Fermi i Gamow-Teller slučaj i  $\lambda=2$  za tenzorski slučaj[17]. Faktori  $h_\alpha(q^2)$  se mogu pisati:

$$h_F(q^2) = -h_{VV}^F(q^2), \quad (3.9)$$

$$h_{GT}(q^2) = h_{AA}^{GT}(q^2) + h_{AP}^{GT}(q^2) + h_{PP}^{GT}(q^2) + h_{MM}^{GT}(q^2), \quad (3.10)$$

$$h_T(q^2) = h_{PP}^T(q^2) + h_{AP}^T(q^2) + h_{MM}^T(q^2), \quad (3.11)$$

gdje su[17]:



$$h_{VV}^F(q^2) = [g_V(q^2)]^2, \quad (3.12)$$

$$h_{AA}^{GT}(q^2) = [g_A(q^2)]^2, \quad (3.13)$$

$$h_{AP}^{GT}(q^2) = -\frac{g_A(q^2)g_P(q^2)}{3m_p}, \quad (3.14)$$

$$h_{PP}^{GT}(q^2) = -\frac{[g_P(q^2)]^2 q^4}{12m_p^2}, \quad (3.15)$$

$$h_{MM}^{GT}(q^2) = -\frac{[g_M(q^2)]^2 q^2}{6m_p^2}, \quad (3.16)$$

$$h_{AP}^T(q^2) = -h_{AP}^{GT}(q^2), \quad (3.17)$$

$$h_{PP}^T(q^2) = -h_{PP}^{GT}(q^2), \quad (3.18)$$

$$h_{MM}^T(q^2) = -\frac{h_{MM}^{GT}(q^2)}{2}. \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Dipolni form faktori su[17, 57]:

$$g_V(q^2) = [1 + q^2/\Lambda_V^2]^{-2}, \quad (3.21)$$

$$g_A(q^2) = [1 + q^2/\Lambda_A^2]^{-2}, \quad (3.22)$$

$$g_M(q^2) = (\mu_p - \mu_n)g_V(q^2), \quad (3.23)$$

$$g_P(q^2) = 2m_p g_A(q^2) [q^2 + m_\pi^2]^{-1}. \quad (3.24)$$

Ovdje je anomalni magnetski moment nukleona  $\mu_p - \mu_n=3.70$ , vektorska masa je  $\Lambda_V^2=0.71$  GeV<sup>2</sup> a aksijalna masa  $\Lambda_A^2=1.19$  GeV<sup>2</sup>.

Naposlijetku, da bi dobili ovako definirane matrične elemente unutar PN-RQRPA, operativna formula koju bi koristili je slijedeća[17]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a = & \sum_{J^\pi k_1 k_2 J'} \sum_{pp'nn'} \sqrt{2J'+1} \begin{Bmatrix} j_p & j_n & J \\ j_{n'} & j_{p'} & J' \end{Bmatrix} \langle pp'; J' | O_a | nn'; J' \rangle \\ & \times \langle 0_f^+ | [c_{p'}^\dagger, \tilde{c}_n]_J | J_{k_1}^\pi \rangle \langle J_{k_1}^\pi | J_{k_2}^\pi \rangle \langle J_{k_2}^\pi | [c_{p'}^\dagger, \tilde{c}_n]_j | 0_i^+ \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Faktor preklopa je isti kao u  $2\nu\beta\beta$  računu, dok su gustoće prijelaza[17]

$$\langle 0_f^+ | [c_{p'}^\dagger, \tilde{c}_n]_J | J_{k_1}^\pi \rangle = \sqrt{2J+1} \left[ \bar{v}_{p'} \bar{u}_{n'} \bar{X}_{p'n'}^{J\pi k_1} + \bar{u}_{p'} \bar{v}_{n'} \bar{Y}_{p'n'}^{J\pi k_1} \right] \quad (3.26)$$

$$\langle J_{k_2}^\pi | [c_{p'}^\dagger, \tilde{c}_n]_J | 0_i^+ \rangle = \sqrt{2J+1} \left[ v_p u_n \bar{X}_{pn}^{J\pi k_2} + u_p v_n \bar{Y}_{pn}^{J\pi k_1} \right] \quad (3.27)$$

U jednadžbi (3.25), kvantni broj  $J'$  označava ukupni angularni moment para neutrona koji sudjeluje u pretvorbi u protone[34]; matrični element  $\langle pp'; J' | O_a | nn'; J' \rangle$  je matrični element dvočestičnog operatora između stanja koja opisuju par neutrona vezan u  $J'$  i par protona vezan u isti  $J'$ .

Ovakva forma, premda se često nalazi u literaturi[17, 34, 69, 47], nije pogodna za PN-RQRPA račun. Unutar takvog računa "prirodno" je računati jednočestične reducirane matrične elemente, koristeći stanja koja opisuju parove protona i neutrona vezane u dobar angularni moment  $J$ . Izraz u jednadžbi (3.25) možemo raspisati tako da dobijemo jednočestične reducirane matrične elemente, međutim to podrazumijeva dodatne sume po novim varijablama, koje znatno kompliciraju račun. Detalji su u Ref. [122]; kao primjer možemo navesti raspis reduciranog matričnog elementa umnoška dva operatora (odn. dvočestičnog operatora) pomoću reduciranih matričnih elemenata oba operatora po sebi (odn. jednočestičnih operatora)[122]:

$$\langle j | O(K) | j' \rangle = \sqrt{2K+1} (-1)^{K+j+j'} \sum_{j''} \left\{ \begin{matrix} k_1 & k_2 & K \\ j & j' & j'' \end{matrix} \right\} \times \langle j | O^{(1)}(k_1) | j'' \rangle \langle j'' | O^{(2)}(k_2) | j' \rangle, \quad (3.28)$$

gdje je:

$$O(K) = O^{(1)}(k_1) O^{(2)}(k_2). \quad (3.29)$$

To predstavlja komplikaciju za naš račun budući da bi naivno raspisujući takve formule trebali uvesti više računski intenzivnih suma. Međutim, moguć je i drugi pogled na problem. Da bi bolje razumijeli proces  $0\nu\beta\beta$  raspada, počnimo od standardne V-A slabe interakcije, nazvane po vektorskim i aksijalno-vektorskim operatorima koji se pojavljuju u Hamiltonijanu[120]:

$$\mathcal{H}_W(x) = \frac{G_F \cos \theta_c}{\sqrt{2}} j^\mu(x) \mathcal{J}_\mu^\dagger(x) + h.c., \quad (3.30)$$

gdje je  $\theta_c$  Cabbibo kut,  $j^\mu$  leptonska struja:

$$j^\mu(x) = \bar{e}(x)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v_e(x), \quad (3.31)$$

a  $J_\mu^\dagger$  je hadronska struja, odnosno, jednočestična struja koja mijenja naboj[123]:

$$J_\mu^\dagger(x) = \bar{\Psi}(x) \left[ g_V(q^2)\gamma_\mu - ig_M(q^2)\frac{\sigma_{\mu\nu}}{2m_p}q^\nu - g_A(q^2)\gamma_\mu\gamma_5 + g_P(q^2)q_\mu\gamma_5 \right] \tau_- \Psi(x), \quad (3.32)$$

gdje su  $\gamma_\mu$  gama matrice, a  $\sigma_{\mu\nu}$  komutator:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (3.33)$$

Za matricni element hadronske struje između dva stanja dobro-definirane količine gibanja možemo pisati[57]:

$$\langle p | J_\mu^\dagger(x) | p' \rangle = e^{iqx} u(p) \left[ g_V(q^2)\gamma_\mu - ig_M(q^2)\frac{\sigma_{\mu\nu}}{2m_p}q^\nu - g_A(q^2)\gamma_\mu\gamma_5 + g_P(q^2)q_\mu\gamma_5 \right] \bar{u}(p'). \quad (3.34)$$

Operator raspada možemo definirati na slijedeći način u aproksimaciji prosječne energije[44]:

$$O = \sum_i O_i = \sum_i \frac{4\pi}{g_A^2} \int d^3x_1 d^3x_2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{iq(x_1-x_2)}}{q} \frac{[J^{\dagger\mu}(x_1)J_\mu^\dagger(x_2)]_i}{q + E_d}, \quad (3.35)$$

gdje je  $E_d$  energijski nazivnik koji sadrži prosječnu energiju. Produkti hadronskih struja (koje je uobičajeno zvati dvo-strujnim operatorima (engl. two-current operators)) koji se pojavljuju u gornjem izrazu mogu se eksplicitno napisati kao[43]:

$$\left[ g_{\mu}^{\dagger} g^{\dagger\mu} \right]_{VV} = g_V(q^2) (\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \tau_{-} \Psi)_1 (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \tau_{-} \Psi)_2 \quad (3.36)$$

$$\left[ g_{\mu}^{\dagger} g^{\dagger\mu} \right]_{AA} = g_A(q^2) (\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_1 (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_2 \quad (3.37)$$

$$\left[ g_{\mu}^{\dagger} g^{\dagger\mu} \right]_{AP} = 2g_A(q^2) g_P(q^2) (\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_1 (\bar{\Psi} q^{\mu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_2 \quad (3.38)$$

$$\left[ g_{\mu}^{\dagger} g^{\dagger\mu} \right]_{PP} = -g_P^2(q^2) (\bar{\Psi} q_{\mu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_1 (\bar{\Psi} q^{\mu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_2 \quad (3.39)$$

$$\left[ g_{\mu}^{\dagger} g^{\dagger\mu} \right]_{MM} = g_M^2(q^2) (\bar{\Psi} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m_p} q_{\nu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_1 (\bar{\Psi} \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2m_p} q^{\nu} \gamma_5 \tau_{-} \Psi)_2. \quad (3.40)$$

Ovi operatori vode, redom, do dvočestičnih matričnih elemenata vektorskog vezanja (VV), pseudovektorskog vezanja (AA), vezanja pseudovektora i inducirano pseudoskalara (AP), inducirano pseudoskalarnog vezanja (PP) i slabo-magnetskog matričnog elementa (MM).

Zasada je izvod konzistentno relativistički. Za relativističku verziju operatora prijelaza, jednažbe (3.36)-(3.40) su dovoljna polazna točka. Međutim, postoji i nerelativistička redukcija[57], koja se temelji na tome da se kinematika problema reducira na nerelativističku. Potom, dvostrujni operatori se razvijaju u red gdje se zanemaruju svi članovi do reda veličine  $O(\frac{1}{m_p})$ , a članovi drugog reda i više se zanemaruju, kao i članovi odbijanja (engl. recoil terms) koji ovise o  $p + p'$ [57].

U takvoj nerelativističkoj redukciji, hadronska struja je[34]:

$$J^{\mu\dagger}(x) = \sum_{n=1}^A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n) \tau_n^+ \left[ g^{\rho 0} J^0(\mathbf{q}^2) + \sum_k g^{\rho k} J_n^k(\mathbf{q}^2) \right], \quad (3.41)$$

gdje je  $g$  metrički tenzor[34],  $J^0(\mathbf{q}^2) = g_V(\mathbf{q}^2)$ , i gdje je:

$$\mathbf{J}_n(\mathbf{q}^2) = g_M(\mathbf{q}^2) i \frac{\boldsymbol{\sigma}_n \times \mathbf{q}}{2m_p} \quad (3.42)$$

Dvo-strujni operatori postaju[57]:

$$\left[ J_{\mu}^{\dagger} J^{\dagger\mu} \right]_{VV} = g_V^2(\mathbf{q}^2), \quad (3.43)$$

$$\left[ J_{\mu}^{\dagger} J^{\dagger\mu} \right]_{AA} = -g_A^2(\mathbf{q}^2) \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (3.44)$$

$$\left[ J_{\mu}^{\dagger} J^{\dagger\mu} \right]_{AP} = 2g_A(q^2) g_P(\mathbf{q}^2) \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{q})}{2m_p} \quad (3.45)$$

$$\left[ J_{\mu}^{\dagger} J^{\dagger\mu} \right]_{AA} = -g_P^2(\mathbf{q}^2) \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{q})}{4m_p^2} \mathbf{q}^2 \quad (3.46)$$

$$\left[ J_{\mu}^{\dagger} J^{\dagger\mu} \right]_{MM} = 2g_M^2(\mathbf{q}^2) \left( -\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{q}^2}{4m_p^2} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{q})}{4m_p^2} \right). \quad (3.47)$$

Operator prijelaza je:

$$O = \sum_i O_i = \sum_i \frac{4\pi}{g_A^2} \sum_{m,n \neq m} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)}}{|\mathbf{q}|} \frac{\left[ J^{\dagger\mu}(n) J_{\mu}^{\dagger}(m) \right]_i \tau_{-}(n) \tau_{-}(m)}{|\mathbf{q}| + E_d}, \quad (3.48)$$

Nastavljajući s ovim izvodom[57] na kraju možemo doći do dvočestičnih reduciranih matričnih elemenata iz jednadžbe (3.2). Međutim, ako krenemo direktno od definicije matričnog elementa za  $0\nu0\beta$  raspad[34]:

$$\mathcal{M}^{0\nu} = m_e \frac{4\pi R}{g_A^2} \int dx_1 dx_2 \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int dq \frac{e^{-iq(x_1 - x_2)}}{|\mathbf{q}|} \right) \times \sum_m \frac{\langle 0_f^+ | \mathcal{J}_{\mu}^{\dagger}(x_1) | m \rangle \langle m | \mathcal{J}^{\dagger\mu}(x_2) | 0_i^+ \rangle}{E_m - Q + |\mathbf{q}|}, \quad (3.49)$$

možemo dobiti formulu koja je puno korisnija za operativnu upotrebu. Treba napomenuti da smo u gornjem izrazu pretpostavili da se svi elektroni nastali u procesu emitiraju u  $s_{1/2}$  stanju s energijom  $(E_i - E_f)/2$ [34]. Radijus jezgre  $R$  je dodan u definiciju matričnog elementa po konvenciji; taj dodatak se kompenzira u definiciji faznog faktora[34].

Slijedeći korak je da jednočestične operatore koji mijenjaju naboj (engl. one-body charge-changing operators) zapišemo na slijedeći način u okviru druge kvantizacije[34]:

$$O_{JM} = \sum_{pn} \frac{\langle p | |O_J| | n \rangle}{\sqrt{2J+1}} [c_p^{\dagger} c_n]_{JM}. \quad (3.50)$$

Onda za matrične elemente možemo pisati:

$$\mathcal{M}_a = m_e \sum_{J^\pi k_1 k_2} \sum_{pp'n'n'} (-1)^J \frac{R}{g_A^2} \int_0^\infty q^2 dq h(q^2) \frac{\mathcal{P}_{pnp'n'J}^K(q)}{|q|(|q| + (E_{k_1} + E_{k_2})/2)} \quad (3.51)$$

$$\times \langle 0_f^+ | [c_{p'}^\dagger, \tilde{c}_n]_J | J_{k_1}^\pi \rangle \langle J_{k_1}^\pi | J_{k_2}^\pi \rangle \langle J_{k_2}^\pi | [c_p^\dagger, \tilde{c}_n] | 0_i^+ \rangle,$$

gdje su  $\mathcal{P}_{pnp'n'J}^K(q)$  produkti jednočestičnih matričnih elemenata operatora koji mijenjaju naboj. U nerelativističkoj redukciji ti produkti su eksplicitno[34]:

$$\mathcal{P}_{pnp'n'J}^{VV}(q) = \langle p | |O_J^{(1)}(q)| |n \rangle \langle p' | |O_J^{(1)}(q)| |n' \rangle \quad (3.52)$$

$$\mathcal{P}_{pnp'n'J}^{AA}(q) = \sum_{L=J-1}^{J+1} (-1)^{1+J+L} \langle p | |O_{LJ}^{(2)}(q)| |n \rangle \langle p' | |O_{LJ}^{(2)}(q)| |n' \rangle \quad (3.53)$$

$$\mathcal{P}_{pnp'n'J}^{PP}(q) = \langle p | |O_J^{(3)}(q)| |n \rangle \langle p' | |O_J^{(3)}(q)| |n' \rangle \quad (3.54)$$

$$\mathcal{P}_{pnp'n'J}^{AP}(q) = \mathcal{P}_{pnp'n'J}^{PP}(q) \quad (3.55)$$

$$\mathcal{P}_{pnp'n'J}^{MM}(q) = \mathcal{P}_{pnp'n'J}^{AA}(q) - \mathcal{P}_{pnp'n'J}^{PP}(q), \quad (3.56)$$

gdje  $q$  ne označava četvero-vektor nego vrijednost prijenosa impulsa za slučaj sferne simetrije, a jednočestični operatori su[34]:

$$O_{JM}^{(1)}(q) = 2\sqrt{2} j_J(qr) Y_{JM}(\Omega_r) \quad (3.57)$$

$$O_{LJM}^{(2)}(q) = 2\sqrt{2} j_J(qr) [Y_L(\Omega_r) \otimes \sigma_1]_{JM} \quad (3.58)$$

$$O_{LJM}^{(3)}(q) = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{2J-1}{2J+1}} C_{J-1010}^{J0} j_{J-1}(qr) [Y_{J-1}(\Omega_r) \otimes \sigma_1]_{JM}$$

$$- 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{2J+3}{2J+1}} C_{J+1010}^{J0} j_{J+1}(qr) [Y_{J+1}(\Omega_r) \otimes \sigma_1]_{JM}, \quad (3.59)$$

gdje su veličine  $C$  Clebsch-Gordanovi koeficijenti. Što se tiče neutrinskih potencijala  $h$ , oni su[34]:

$$h_{VV}(\mathbf{q}^2) = - [g_V(\mathbf{q}^2)]^2, \quad (3.60)$$

$$h_{AA}(\mathbf{q}^2) = [g_A(\mathbf{q}^2)]^2, \quad (3.61)$$

$$h_{AP}(\mathbf{q}^2) = -2 \frac{g_A(\mathbf{q}^2)g_P(q^2)}{2m_p}, \quad (3.62)$$

$$h_{PP}(\mathbf{q}^2) = \frac{[g_P(\mathbf{q}^2)]^2 \mathbf{q}^4}{4m_p^2}, \quad (3.63)$$

$$h_{MM}(\mathbf{q}^2) = \frac{[g_M(\mathbf{q}^2)]^2 \mathbf{q}^2}{4m_p^2}. \quad (3.64)$$

Što se tiče punog relativističkog pristupa, matrični elementi dvočestičnih operatora (puni matrični elementi, ne reducirani) su dani u Ref. [44], za potrebe GCM računa. Da bi ih iskoristili u našem računu, želimo ih povezati s produktima reduciranih matričnih operatora.

Pri izvrednjavanju punih relativističkih operatora, iskoristit ćemo činjenicu da su nukleon-ske valne funkcije Diracovi spinori. Za sfernu bazu Diracovi spinori koji opisuju nukleone postaju[44]:

$$|1\rangle = |n_1 l_1 j_1 m_1\rangle = \begin{pmatrix} |1\rangle \\ i|\bar{1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n_1}(r) |l_1 j_1 m_1\rangle \\ i g_{n_1}(r) |\bar{l}_1 j_1 m_1\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

gdje je orbitalni angularni moment male komponente jednočestičnog Diracovog spinora  $\bar{l}_1 = l \pm \frac{1}{2}$ .

Općenito za matrične elemente pojedinog kanala imamo[44]:

$$\langle 12 | O_i | 34 \rangle = \frac{8R}{g_A^2} \int dq \frac{g_{i1}(q^2)g_{i2}(q^2)q^2}{q(q+ < E >)} \times \sum_{LM} \langle 1 | \Gamma_{i1jL}(qr) Y_{LM} | 2 \rangle \langle 3 | \Gamma_{i2jL}(qr) Y_{LM} | 4 \rangle, \quad (3.66)$$

gdje su  $g_{i1}$  i  $g_{i2}$  jedni od faktora  $g_A, g_M, g_P$ .

Matrice  $\Gamma$  u jednadžbi (3.66) sadrže produkte matrica  $\gamma_0$  i  $\gamma_5$ , koji formiraju skalare u prostoru spina[44], kao i produkte oblika  $\gamma_\mu(1)\gamma^\mu(2)$ , gdje svaka gama matrica djeluje na drugu česticu u  $pn$  paru. Vremenoliki dio ovakvih produkta daje skalar u spinskom prostoru, a prostornoliki dio vektor. Nadalje, znamo da vrijedi:

$$\gamma = \gamma^0 \alpha = \gamma^0 \gamma_5 \Sigma = \gamma^0 \gamma_5 \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

i da za operator spina možemo pisati[44]:

$$\Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)} = \sum_M (-1)^M \Sigma_M^{(1)} \Sigma_{-M}^{(2)}. \quad (3.68)$$

Analogno možemo pisati za kugline funkcije:

$$Y_L^{(1)} Y_L^{(2)} = \sum_M (-1)^M Y_{LM}^{(1)} Y_{L-M}^{(2)}. \quad (3.69)$$

Naposlijetku nam treba izraz za ponovno vezanje (engl. recoupling) operatora spina (operator ranga 1) i kugline funkcije (operator ranga  $L$ )[44]:

$$(\Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)}) (Y_L^{(1)} Y_L^{(2)}) = \sum_{L=J-1}^{J+1} (-1)^{1+L+J} [\Sigma Y_L]_J^{(1)} [\Sigma Y_L]_J^{(2)}. \quad (3.70)$$

Kao konačan rezultat, za spinsko-kutni dio dvočestičnih matričnih elemenata (jedini koji ne možemo od početka jednostavno rastaviti na produkt jednočestičnih matričnih elemenata) dobijemo[44]:

$$\langle 12 | O_J^{(1)} O_J^{(2)} | 34 \rangle^J = \frac{(-1)^{j_4 - j_2}}{2J+1} \langle 1 | | O_J^{(1)} | | 3 \rangle \langle 2 | | O_J^{(2)} | | 4 \rangle, \quad (3.71)$$

odnosno:

$$\langle 1 | | O_J^{(1)} | | 3 \rangle \langle 2 | | O_J^{(2)} | | 4 \rangle = (2J+1) (-1)^{j_4 - j_2} \langle 12 | O_J^{(1)} O_J^{(2)} | 34 \rangle^J. \quad (3.72)$$

Izrazi za matrične elemente koji proizlaze iz svakog od prije navedenih kanala vezanja (vektorskog, pseudovektorskog, pseudovektorsko-pseudoskalarnog, pseudoskalarnog i slabomagnetskog), u aproksimaciji prosječne energije, vezani tako da imaju dobre vrijednosti kutne količine gibanja  $J$ , su izvedeni recimo u člancima Songa[44]. U ovom radu će samo biti nave-



deni konačni rezultati. Za vektorsko vezanje dobijemo[44]:

$$\langle 12 | O_{VV} | 34 \rangle = \int dq \frac{g_v^2(q^2)q^2}{q(q+ \langle E \rangle)} \times \left[ A_{13}^J A_{24}^J - \sum_L (-1)^{1+L+J} B_{13}^{LJ} B_{24}^{LJ} \right], \quad (3.73)$$

gdje su faktori  $A$  i  $B$  jednaki[44]:

$$A_{13}^J = \langle 1 || j_J || 3 \rangle \langle 1 || Y_J || 3 \rangle + \langle \tilde{1} || j_J || \tilde{3} \rangle \langle \tilde{1} || Y_J || \tilde{3} \rangle \quad (3.74)$$

$$B_{13}^{LJ} = i \langle 1 || j_J || \tilde{3} \rangle \langle 1 || [\sigma Y_L]_J || \tilde{3} \rangle - i \langle \tilde{1} || j_J || 3 \rangle \langle \tilde{1} || [\sigma Y_L]_J || 3 \rangle. \quad (3.75)$$

Za pseudovektorsko-pseudoskalarno vezanje dobijemo[44]:

$$\langle 12 | O_{AP} | 34 \rangle = \int dq \frac{g_v^2(q^2)q^2}{q(q+ \langle E \rangle)} \times \left[ C_{13}^J C_{24}^J - \sum_L (-1)^{1+L+J} D_{13}^{LJ} D_{24}^{LJ} \right], \quad (3.76)$$

gdje su faktori  $C$  i  $D$  jednaki[44]:

$$C_{13}^J = i \langle 1 || j_J || \tilde{3} \rangle \langle 1 || Y_J || \tilde{3} \rangle - i \langle \tilde{1} || j_J || 3 \rangle \langle \tilde{1} || Y_J || 3 \rangle \quad (3.77)$$

$$D_{13}^{LJ} = \langle 1 || j_J || 3 \rangle \langle 1 || [\sigma Y_L]_J || 3 \rangle - i \langle \tilde{1} || j_J || \tilde{3} \rangle \langle \tilde{1} || [\sigma Y_L]_J || \tilde{3} \rangle. \quad (3.78)$$

Za pseudovektorsko vezanje dobijemo[44]:

$$\langle 12 | O_{AA} | 34 \rangle = 2 \int dq \frac{g_v^2(q^2)q^2}{q(q+ \langle E \rangle)} \times \left[ \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} D_{13}^{J+1,J} + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} D_{13}^{J-1,J} \right] E_{24}^J, \quad (3.79)$$

gdje je faktor  $E$  jednak[44]:

$$E_{13}^J = i \langle 1 || j_J || \tilde{3} \rangle \langle 1 || Y_J || \tilde{3} \rangle + i \langle \tilde{1} || j_J || 3 \rangle \langle \tilde{1} || Y_J || 3 \rangle. \quad (3.80)$$

Naposlijetku za pseudoskalarno vezanje dobijemo[44]:

$$\langle 12 | O_{PP} | 34 \rangle = \int dq \frac{g_v^2(q^2)q^2}{q(q + \langle E \rangle)} \times [E_{13}^J E_{24}^J]. \quad (3.81)$$

Što se tiče slabo-magnetskog vezanja, budući da se radi o malom doprinosu[43], reda veličine drugih efekata koje u prvoj implementaciji modela zanemarujemo, povezani član će u ovom radu biti zanemaren.

Pošto je u ovom radu dana prva implementacija računa bezneutrinskih dvostrukih beta raspada temeljena na PN-RQRPA, zanemarujemo neke efekte. Već je spomenuto da zanemarujemo slabo-magnetski matični element za puni relativistički račun. Analogan slabo-magnetski doprinos je uključen u račun s nerelativističkom redukcijom prijelaznog operatora, premda je njegova vrijednost tako mala da ne doprinosi značajno apsolutnoj vrijednosti ukupnog nuklearnog matičnog elementa. Jedan od važnijih efekata koji ćemo zanemariti su kratkodosežne nukleon-nukleon korelacije (engl. short-range correlations, SRC). Te korelacije su važne za bezneutrinske dvostruke beta raspade[34], dok za dvoneutrinske ne daju neki značajan doprinos[34]. Međutim, najjednostavniji način da se takve korelacije uzmu u obzir, fenomenološka Jastrow funkcija[34, 17], nije prikladna za implementaciju u naš račun, budući da pokušavamo računati izraz koji ne ovisi o međusobnoj udaljenosti nukleona na eksplicitan način.

U prijašnja dva poglavlja smo dali pregled dvostrukih beta raspada, zajedno s nekim od osnovnih formula koje definiraju nuklearne matične elemente i druge veličine koje ćemo računati. Međutim, za sam račun nam je potreban konkretan nuklearni mikroskopski model za račun osnovnog stanja i relevantnih prijelaza jezgara uključenih u dvostruki beta raspad. Neki elementi modela koji ćemo koristiti su već navedeni, no u nastavku ćemo dati detaljniji prikaz tog modela: relativistički Hartree-BCS (ili Hartree-Bogoliubov) model zasnovan na razini srednjeg polja i relativistička proton-neutron aproksimacija slučajnih faza za račun pobuđenih stanja.

## Poglavlje 4

# Relativistički Hartree-Bogoliubov i Hartree-BCS model

Osnovno stanje jezgara čije raspade razmatramo u ovom radu opisujemo unutar relativističkog Hartree-Bogoliubov (RHB) ili Hartree-BCS (HBS) modela. Radi se o relativističkoj teoriji srednjeg polja (engl. relativistic mean field ili RMF) izvedenoj, ne direktno iz pune kvantne kromodinamike (engl. quantum chromodynamics, QCD) nego iz nerenormalizabilne efektivne teorije polja[124] koja opisuje fenomene na niskim (u usporedbi s energijskom skalom QCD) energijama sa niskoenergetskim stupnjevima slobode (nukleoni, mezoni itd.) i konzistentna je sa simetrijama QCD - Lorentz invarijantnosti, invarijantnosti na paritet, elektromagnetskoj baždarnoj invarijantnosti, izospinskim i kiralnim simetrijama[125]. Takva efektivna teorija polja, tzv. kvantna hadrodinamika (engl. quantum hadrodynamics, QHD)[124] daje teorijski okvir za Lorentz-invarijantne, mezon-nukleon modele ili modele s točkastim vezanjem. Očekuje se da bi takva efektivna teorija trebala davati dobre rezultate do energija koje se obično procjenjuju kao energije ne-Goldstoneovih bozona (odnosno energija koje odgovaraju fizici  $\sigma, \omega$  i  $\rho$  mezona), oko  $\Lambda \approx 600 \text{ MeV}$ [126]. Sve pojave koje ćemo razmatrati u ovom radu su značajno ispod takve energijske skale.

RHB model se može promatrati kao konzistentno relativističko proširenje Hartree-Fock-Bogoliubov modela[16]. Kako bi se opisale jezgre s otvorenim ljuskama, RHB model uključuje korelacije sparivanja na samosuglasan način, nasuprot pristupima koji sparivanje tretiraju fenomenološki u okviru Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) teorije[127]. RHB, kao i ostale implementacije srednjeg polja, polazi od ideje da se opis međusobne interakcije mnoštva nukleona može aproksimirati opisom jednog nukleona koji se giba u srednjem polju koje proizvode drugi nukleoni[29]. U tom slučaju se puni nuklearni Hamiltonijan mnoštva čestica može izraziti kao[29]

$$H = T + V = \sum_{i=1}^A \frac{-\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_N} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (4.1)$$

gdje je prvi član suma kinetičkih energija nukleona u jezgri a drugi predstavlja njihovu interakciju. Isti izraz možemo napisati na slijedeći način[29]:

$$H = \left( T + \sum_i^A v(\mathbf{r}_i) \right) - \left( V - \sum_i^A v(\mathbf{r}_i) \right) = H_{MF} + V_{RES}. \quad (4.2)$$

U gornjem izrazu,  $v(\mathbf{r}_i)$  je jednočestična potencijalna energija. Značenje izraza je jasno: puni nuklearni Hamiltonijan smo rastavili na sumu Hamiltonijana koji prikazuju neovisne nukleone u srednjem polju (odnosno na Hamiltonijan srednjeg polja) i na rezidualnu interakciju, za koju pretpostavljamo da je značajno manja od prvog člana. Koristeći ovakav Hamiltonijan možemo dobiti Kohn-Sham jednadžbu u formi Schrödingerove jednadžbe[29]:

$$H_{MF} \Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A) = E \Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A), \quad (4.3)$$

gdje je  $E$  ukupna energija sustava a  $\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A)$  ukupna valna funkcija za sustav  $A$  nukleona, za koju odmah možemo napisati ansatz[29]:

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A) = F[\psi_1(\mathbf{r}_1), \psi_2(\mathbf{r}_2), \dots, \psi_A(\mathbf{r}_A)], \quad (4.4)$$

gdje je  $F$  neki funkcional. U principu smo sveli problem mnoštva nukleona na problem jednog nukleona koji se kreće u srednjem polju. Preostaje, međutim, naći srednje polje, odnosno optimalni Hamiltonijan srednjeg polja koji minimizira rezidualnu interakciju između (kvazi)čestica. Pokazuje se[29] da je ovaj problem ekvivalentan Rayleigh-Ritzovom varijacionom problemu gdje variramo jednočestične orbitale[29]:

$$\psi_i(\mathbf{r}_i) \rightarrow \psi_i(\mathbf{r}_i) + \delta\psi_i(\mathbf{r}_i), \quad (4.5)$$

i zahtijevamo da je energija osnovnog stanja  $E$  minimalna. Iz toga proizlaze detaljniji ansatzi za kolektivnu valnu funkciju. Prvi, produktni ansatz, vodi do tzv. Hartree pristupa[29, 128, 129]:

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A) = \prod_{i=1}^A \psi_i(\mathbf{r}_i). \quad (4.6)$$

Drugi, gdje je kolektivna valna funkcija antisimetrizirani produkt odnosno Slaterova determinanta jednočestičnih orbitala, vodi do Hartree-Fock pristupa[29, 128, 129]:

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A) = \mathcal{A} \prod_{i=1}^A \psi_i(\mathbf{r}_i). \quad (4.7)$$

Pri tome je  $\mathcal{A}$  antisimetrizirajući operator koji djeluje na produkt tako da permutira indekse i ovisno o (parnom ili neparnom) broju permutacija množi ih s  $\pm 1$ .  $\mathcal{A}$  u sebi sadrži i faktor normalizacije.

Ove jednadžbe definiraju osnovno stanje sustava mnoštva nukleona i dobro opisuju jezgre sa zatvorenim ljuskama. Takvo osnovno stanje može se promatrati i kao vakuum za operatore stvaranja i poništenja  $c_\alpha^\dagger$  i  $c_\alpha$ , koji stvaraju nukleon u stanju  $|\alpha\rangle$ , ili ga uklanjaju iz tog stanja[29]. U opisu jezgara s otvorenim ljuskama, međutim, efekti sparivanja igraju ključnu ulogu[130], i Hartree ili Hartree-Fock vakuumi više nisu prikladni za opis osnovnog stanja. Umjesto njih potrebno je koristiti vakuum za kvazičestične operatore definirane unitarnom Bogoliubov-Valatin transformacijom[131, 132]:

$$a_\alpha^\dagger = \sum_{\beta} \left( U_{\alpha\beta} c_\beta^\dagger + V_{\alpha\beta} c_\beta \right), \quad (4.8)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  zasad nedefinirani indeksi, ovisni o proizvoljnom odabiru baze (recimo u koordinatnoj reprezentaciji vrijedilo bi  $\alpha = (\mathbf{r}, \sigma, \tau)$ ). Veličine  $U$  i  $V$  su Hartree-(Fock-)Bogoliubov valne funkcije, i ako ih znamo možemo definirati hermitsku jednočestičnu matricu gustoće[29]:

$$\rho_{\alpha\alpha'} = \langle \phi | c_{\alpha'}^\dagger c_\alpha | \phi \rangle = (V^* V^T)_{\alpha\alpha'}, \quad (4.9)$$

gdje je  $\phi$  kvazičestični vakuum, i antisimetrični tenzor sparivanja[29]:

$$\kappa_{\alpha\alpha'} = \langle \phi | c_{\alpha'} c_{\alpha} | \phi \rangle = (V^* U^T)_{\alpha\alpha'}. \quad (4.10)$$

Ove dvije veličine se mogu spojiti u jednu generaliziranu matricu gustoće[29]:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho & \kappa \\ -\kappa^* & 1 - \rho^* \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Iz gornjih izraza se naposljetku mogu izvesti jednadžbe gibanja, raspisivanjem Kohn-Sham jednadžbe preko generalizirane matrice gustoće. Alternativno, nuklearni sustav možemo opisati (kao što se često radi kad se razmatra modele bazirane na kvantnoj hadrodinamici) pomoću gustoće Lagrangiana[124, 29]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}. \quad (4.12)$$

Veličina  $\mathcal{L}_N$  je gustoća Lagrangiana za slobodni nukleon[29]:

$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad (4.13)$$

gdje je  $m$  masa "golog" nukleona (engl. bare nucleon) (nukleona koji nije "obučen" (engl. dressed) međudjelovanjem s ostalim nukleonima [133]), a  $\Psi$  je valna funkcija nukleona koja se može zapisati kao Diracov spinor.  $\mathcal{L}_m$  predstavlja gustoću Lagrangiana vezanu za slobodna mezonska i elektromagnetska polja, a  $\mathcal{L}_{int}$  predstavlja njihovu interakciju s nukleonima[16]. Ovakva gustoća Lagrangiana opisuje nukleon-nukleon interakcije preko izmjene teških mezona i, u granici kad masa mezona postaje beskonačna, kontaktnu interakciju dva nukleona. Detaljniji tretman takve gustoće Lagrangiana, kao i specifične gustoće koje će biti korištene u ovom radu, su dane kasnije u poglavlju.

Još jedan način da se opiše nuklearni sustav je pomoću relativističkog nuklearnog energijskog funkcionala gustoće (engl. relativistic nuclear energy density functional, RNEDF)[15], općenitog oblika[16]

$$E = E_{RMF}[\Psi, \bar{\Psi}, \sigma, \omega^\mu, \vec{\rho}^\mu, A^\mu], \quad (4.14)$$

gdje su  $\sigma$ ,  $\omega$  i  $\rho$  teški mezoni pomoću kojih opisujemo nukleon-nukleon interakciju, a  $A^\mu$  je EM polje. Pion odnosno  $\pi$  mezon nije prisutan eksplicitno u samosuglasnim relativističkim računima na Hartree razini; umjesto toga, korelirana izmjena pionskog para u stanju s-vala se opisuje pomoću fenomenološkog skalarnog-izoskalarnog polja koje daje linearni  $\sigma$  model[16]. Ovako zapisani energijski funkcional može u principu biti egzaktan. Uobičajeno je, međutim, aproksimirati egzaktne EDF, koji sadrži sve korelacije višeg reda, funkcionalom koji, što se tiče nukleonskih stupnjeva slobode, ovisi samo o potencijama i gradijentima gustoće nukleona u osnovnom stanju[16]:

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{i=1}^A |\psi_i(\mathbf{r}', t)\rangle \langle \psi_i(\mathbf{r}, t)|. \quad (4.15)$$

Energijski funkcional gustoće će općenito ovisiti i o mezonskim poljima koja predstavljaju dodatni stupanj slobode. Varijacioni princip napisan preko energijskog funkcionala gustoće glasi[16]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt [\langle \Phi | i\partial_t | \Phi \rangle - E_{RMF}[\hat{\rho}, \phi_m]] = 0, \quad (4.16)$$

gdje je  $\phi_m$  općenita oznaka za mezonska polja. Iz toga slijedi jednačba gibanja[16]

$$i\partial_t \hat{\rho} = [\hat{h}(\hat{\rho}, \phi_m), \hat{\rho}]. \quad (4.17)$$

Jednočestični Hamiltonijan  $\hat{h}$  je funkcionalna derivacija EDF po jednočestičnoj matrici gustoće[16]:

$$\hat{h} = \frac{\delta E_{RMF}}{\delta \hat{\rho}}. \quad (4.18)$$

U jezgrama s otvorenim ljuskama, energijski funkcional gustoće ovisi ne samo o jednočestičnoj matrici gustoće i mezonskim poljima, nego i o tenzoru sparivanja[16]:

$$E_{RHB}[\hat{\rho}, \hat{\kappa}, \phi_m] = E_{RMF}[\hat{\rho}, \phi_m] + E_{pair}[\hat{\kappa}], \quad (4.19)$$

gdje je energija sparivanja definirana kao[16]:

$$E_{pair}[\hat{\kappa}] = \frac{1}{4} Tr [\hat{\kappa}^* V^{PP} \hat{\kappa}], \quad (4.20)$$

pri čemu je  $V^{PP}$  sila sparivanja (recimo Gogny ili Skyrme sila itd.). Jednadžbe gibanja u ovom slučaju se mogu zapisati preko generalizirane matrice gustoće[16]:

$$i\partial_t \mathcal{R} = [\mathcal{H}(\mathcal{R}), \mathcal{R}], \quad (4.21)$$

gdje je generalizirani Hamiltonijan definiran kao[16]:

$$\mathcal{H}_{RHB} = \frac{\delta E_{RHB}}{\delta \mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{h}_D - m - \lambda & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -\hat{h}_D^* + m + \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

U gornjem izrazu, samosuglasno srednje polje  $h_D$  je Diracov Hamiltonijan. U statičkom slučaju, i ako vrijedi  $T$  simetrija, možemo pisati[16]:

$$\hat{h}_D = -i\alpha\nabla + \mathbf{V}_0(\mathbf{r}) + \beta(m + S(\mathbf{r})), \quad (4.23)$$

gdje su  $S$  i  $V$  skalarni i vektorski potencijali srednjeg polja, koje se može dobiti iz mezonskih polja[16]:

$$S(\mathbf{r}, t) = g_\sigma \sigma(\mathbf{r}, t) \quad (4.24)$$

$$V_\mu(\mathbf{r}, t) = g_\omega \omega_\mu(\mathbf{r}, t) + g_\rho \vec{\tau} \vec{\rho}_\mu(\mathbf{r}, t) + eA_\mu \frac{1 - \tau_3}{2}, \quad (4.25)$$

gdje su  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  i  $g_\rho$  konstante vezanja za masivne mezone, a zadnji član druge jednadžbe predstavlja elektromagnetsku interakciju i djeluje samo na protone[16].

Polje sparivanja je integralni operator s jezgrom koje se, ako zapišemo nuklearni Hamiltonijan kao:

$$H = \sum_a \epsilon_a c_a^\dagger c_a + \frac{1}{4} \sum_{aa'bb'} \tilde{v}_{ab'a'b} c_a^\dagger c_{b'}^\dagger c_{a'} c_b, \quad (4.26)$$



može napisati kao[16]:

$$\hat{\Delta}_{aa'} = \sum_{b < b'} \tilde{v}_{aa'bb'} \hat{\kappa}_{bb'}, \quad (4.27)$$

što rezultira s operatorom:

$$\Delta_{aa'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2} \sum_{bb'} V_{aa'bb'}^{PP}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \kappa_{bb'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (4.28)$$

Stacionarna granica jednadžbe (4.21) opisuje osnovno stanje jezgre s otvorenim ljuskama[134]. Ista se može dobiti iz Hartree-Bogoliubov jednadžbi[16]:

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_D - m - \lambda & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -\hat{h}_D^* + m + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k(\mathbf{r}) \\ V_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k(\mathbf{r}) \\ V_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Veličina  $\lambda$  je kemijski potencijal, koji se može odrediti iz uvjeta da je očekivana vrijednost operatora broja čestica jednaka broju nukleona u jezgri[135]:

$$\langle N \rangle = \left\langle \sum_a c_a^\dagger c_a \right\rangle = A. \quad (4.30)$$

Dimenzija RHB matrične jednadžbe je dva puta veća od dimenzije povezane Diracove jednadžbe. Svakom svojstvenom vektoru  $(U_k, V_k)$  s pozitivnom kvazičestičnom energijom  $E_k > 0$  odgovara svojstveni vektor  $(U_k^*, V_k^*)$  s negativnom energijom  $-E_k$ [16]. Kako kvazičestični operatori zadovoljavaju fermionske komutacijske relacije[136], ta dva nivoa ne mogu biti zauzeta istovremeno. Uobičajeno je kao rješenja RHB jednadžbe uzeti svojstvene vektore koji odgovaraju pozitivnim svojstvenim vrijednostima.

RHB jednadžbe se rješavaju iterativnim postupkom[137]. Takav postupak polazi od početnog probnog oblika mezonskih i elektromagnetskih potencijala. U ovom radu, pretpostavlja se da mezonski potencijali isprva imaju Woods-Saxon oblik[137]:

$$S(\mathbf{r}) = S(0) \left( 1 + \exp\left(\frac{r-r_s}{a}\right) \right)^{-1} \quad (4.31)$$

$$V(\mathbf{r}) = V(0) \left( 1 + \exp\left(\frac{r-r_s}{a}\right) \right)^{-1}, \quad (4.32)$$

a elektromagnetski potencijal odgovara potencijalu homogene sferne raspodjele naboja s radijusom  $r_s$ . Ako su elektromagnetski i mezonski potencijali poznati, može se konstruirati generalizirani Hamiltonijan i riješiti RHB jednadžba, s čime dobivamo skup svojstvenih vrijednosti ( $U_k, V_k$ ). Onda u sljedećem koraku iteracije koristimo dobivene svojstvene vektore pri rješavanju statičkih Klein-Gordon jednadžbi[137]

$$[-\nabla^2 + m_\sigma^2] \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = -g_\sigma \rho_s(\mathbf{r}) - g_2 \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{r}) - g_3 \boldsymbol{\sigma}^3(\mathbf{r}) \quad (4.33)$$

$$[-\nabla^2 + m_\omega^2] \omega^0(\mathbf{r}) = -g_\omega \rho_v(\mathbf{r}) \quad (4.34)$$

$$[-\nabla^2 + m_\rho^2] \boldsymbol{\rho}^0(\mathbf{r}) = -g_\rho \rho_3(\mathbf{r}) \quad (4.35)$$

$$-\nabla^2 A^0(\mathbf{r}) = e \rho_{em}(\mathbf{r}), \quad (4.36)$$

gdje su izvori sume bilinearnih produkta kvazičestičnih amplituda[137]

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_{a>0} V_a^\dagger(\mathbf{r}) \gamma^0 V_a(\mathbf{r}) \quad (4.37)$$

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \sum_{a>0} V_a^\dagger(\mathbf{r}) V_a(\mathbf{r}) \quad (4.38)$$

$$\rho_3(\mathbf{r}) = \sum_{a>0} V_a^\dagger(\mathbf{r}) \tau_3 V_a(\mathbf{r}) \quad (4.39)$$

$$\rho_{em}(\mathbf{r}) = \sum_{a>0} V_a^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1 - \tau_3}{2} V_a(\mathbf{r}) \quad (4.40)$$

Činjenica da suma ide od  $a > 0$  je posljedica toga da radimo u tzv. "no-sea" aproksimaciji, odnosno da Diracovo more stanja negativne energije ne doprinosi gustoćama i strujama[16]. Ovakva aproksimacija, gdje sume idu samo po orbitalama pozitivne energije u Fermijevom moru, često se koristi u modelima konačnih jezgara i nuklearne materije.

Jednadžba (4.29) je RHB jednadžba formulirana u kvazičestičnoj bazi definiranoj s transformacijom prikazanom u jednadžbi (4.8). Za jezgre sa sferičnom simetrijom, koje ćemo raz-

matrati u ovom radu, može se riješiti samosuglasno, zajedno s Klein-Gordonovim jednadžbama, pomoću metode konačnih elemenata[137] u koordinatnom prostoru, ili razvijanjem valnih funkcija u bazi harmoničkog oscilatora[134]. Time dobijemo svojstvene vektore i skup kvazičestičnih energija  $E_k$ .

U mnogim primjenama, kvazičestična baza nije sasvim prikladna. Bolji odabir je kanonska baza odnosno baza  $|\phi_\mu\rangle$  koja dijagonalizira matricu gustoće[138, 139]:

$$\hat{\rho}|\phi_\mu\rangle = v_\mu^2|\phi_\mu\rangle. \quad (4.41)$$

Energije u kanonskoj bazi su[16]:

$$\varepsilon_\mu = \langle\phi_\mu|(\hat{h}_D - m)|\phi_\mu\rangle, \quad (4.42)$$

a elementi matrice sparivanja[16]:

$$\Delta_\mu = \langle\phi_\mu|\hat{\Delta}|\phi_\mu\rangle. \quad (4.43)$$

Vjerojatnost zauzeća pojedinog jednonukleonskog stanja je[16]:

$$n_k = v_\mu^2 = \left(1 - \frac{(\varepsilon_\mu - \lambda)}{\sqrt{(\varepsilon_\mu - \lambda)^2 + \Delta_\mu^2}}\right). \quad (4.44)$$

Može se pokazati[140] da RHB svojstveni vektor u kanonskoj bazi ima strukturu Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) stanja s gornjim vjerojatnostima zauzeća. To znači da dok je u kvazičestičnoj bazi osnovno stanje RHB-a produkt nezavisnih kvazičestičnih stanja, u kanonskoj bazi se radi o visoko koreliranom BCS stanju[16].

Druga mogućnost za teorijski opis osnovnog stanja je Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) teorija, koja se može promatrati kao pojednostavljenje punog RHB računa. Gustoća Lagrangiana i energijski funkcional su isti kao prethodno razmatrani. Prikaz koji slijedi je uglavnom preuzet iz članka Ravlić et al.[24], ali prilagođen je situaciji gdje je temperatura okoline nula. U tom slučaju, vjerojatnost zauzeća postaje[24]:

$$n_k = v_k^2, \quad (4.45)$$

gdje su  $v$  BCS amplitude. Energija kvazičestičnog stanja je[24]:

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \lambda_q)^2 - \Delta_k^2}, \quad (4.46)$$

gdje je  $\epsilon$  energija jednočestičnog stanja,  $\lambda$  kemijski potencijal pri čemu indeks  $q$  označava protone ili neutrone, a  $\Delta$  je procijep sparivanja, koji se može dobiti iz jednadžbe[24]:

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k' > 0} v_{k\bar{k}k'\bar{k}'} \frac{\Delta_{k'}}{E_{k'}}, \quad (4.47)$$

gdje je  $v_{k\bar{k}k'\bar{k}'}$  matrični element interakcije:

$$v_{k\bar{k}k'\bar{k}'} = \langle k\bar{k} | V | k'\bar{k}' \rangle. \quad (4.48)$$

Ovakva jednadžba se može lako riješiti iterativnom metodom. RHBCS jednadžbe na temperaturi nula imaju isti oblik kao i RHB jednadžbe, s različitim poljem sparivanja[24]:

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k' > 0} G_{kk'} \frac{s_{k'} \Delta_{k'}}{\sqrt{(\epsilon_{k'} - \lambda_q)^2 - \Delta_{k'}^2 s_{k'}^2}}, \quad (4.49)$$

gdje su  $s_k$  težinski faktori dani u Ref. [24].

Ovime je uveden model za opis osnovnog stanja jezgre. Za tretman pobuđenih stanja koristimo model baziran na proton-neutron aproksimaciji slučajnih faza, koja će biti objašnjena u sljedećem poglavlju.

## Poglavlje 5

# Relativistička proton-neutron aproksimacija slučajnih faza

RHB i RHBCS modeli daju sliku osnovnog stanja parno-parne (ili neparne ako se uzme u obzir efekt blokiranja) jezgre s otvorenom ljuskom. Za opis prijelaza u pobuđena stanja, međutim, potreban nam je pristup koji može uzeti u obzir kvazičestična pobuđenja iz osnovnog stanja. Relativistička proton-neutron aproksimacija slučajnih faza je jedan takav pristup. Može se izvesti iz modela srednjeg polja takozvanom metodom jednadžbi gibanja (engl. equations of motion method, EOM)[141].

Pretpostavimo da su pobuđenja na kojima gradimo PN-RQRPA oblika[29]:

$$|\omega\rangle = Q_{\omega}^{\dagger} |PN - RQRPA\rangle, \quad (5.1)$$

gdje je  $Q_{\omega}^{\dagger}$  operator stvaranja PN-RQRPA fonona (pobuđenje sastavljeno od dvije kvazičestice) u stanju s kvantnim brojevima koje shematski označavamo s  $\omega = n, J^{\pi}, M$ [29]:

$$Q_{\omega}^{\dagger} = \sum_{pn} \left[ X_{pn}^{\omega} A_{pn}^{\dagger}(JM) - Y_{pn}^{\omega} \tilde{A}_{pn}(JM) \right], \quad (5.2)$$

a  $|PN - RQRPA\rangle$  je vakuumsko stanje modela, odnosno stanje u kojemu nema PN-RQRPA pobuđenja. Paritet nastalog stanja se može izraziti preko orbitalnog angularnog momenta protona i neutrona koji sudjeluju u paru[29]:

$$\pi = (-1)^{l_p+l_n}. \quad (5.3)$$

Operator poništenja PN-RQRPA fonona je onda dan s[29]:

$$Q_\omega = \sum_{pn} \left[ X_{pn}^{\omega*} A_{pn}(JM) - Y_{pn}^{\omega*} \tilde{A}_{pn}^\dagger(JM) \right], \quad (5.4)$$

gdje vrijedi:

$$A_{pn}^\dagger(JM) = \mathcal{N}(J) \left[ a_p^\dagger a_n^\dagger \right]_{JM}, \quad (5.5)$$

a konstanta normalizacije je[29]:

$$\mathcal{N}_{pn}(J) = \frac{\sqrt{1 + \delta_{pn}(-1)^J}}{1 + \delta_{pn}} = 1. \quad (5.6)$$

Ovakav operator pobuđenja je verzija općenitog QRPA operatora pobuđenja[29]:

$$Q_\omega^\dagger = \sum_{a<b} \left[ X_{ab}^\omega A_{ab}^\dagger(JM) - Y_{ab}^\omega \tilde{A}_{ab}(JM) \right], \quad (5.7)$$

gdje je suma po općenitim stanjima  $a$  i  $b$  zamjenjena eksplicitnom sumom po protonskim i neutronskim stanjima. Adjungirani operator  $\tilde{A}$  je definiran kao[29]:

$$\tilde{A}_{pn}(JM) = (-1)^{J+M} A(J-M). \quad (5.8)$$

Pretpostavljamo da pobuđenje zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu:

$$H |\omega\rangle = E_\omega |\omega\rangle, \quad (5.9)$$

odnosno možemo pisati:

$$[H, Q_\omega] |PN - RQRPA\rangle = [E_\omega - E_0] |PN - RQRPA\rangle. \quad (5.10)$$

Gornji izraz predstavlja jednadžbu gibanja za operator stvaranja  $Q_\omega^\dagger$ . Da bi izveli PN-RQRPA jednadžbe, promatrat ćemo malu varijaciju danog operatora,  $\delta Q^\dagger$ , s uvjetom:

$$\delta Q |PN - RQRPA\rangle = 0 |PN - RQRPA\rangle. \quad (5.11)$$

Iz gornje relacije slijedi[29]:

$$\begin{aligned} \langle PN - RQRPA | \delta Q [H, Q_\omega^\dagger] |PN - RQRPA\rangle \\ = (E_\omega - E_0) \langle PN - RQRPA | \delta Q Q_\omega^\dagger |PN - RQRPA\rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ekvivalentno, možemo napisati[29]:

$$\begin{aligned} \langle PN - RQRPA | [\delta Q, [H, Q_\omega^\dagger]] |PN - RQRPA\rangle \\ = (E_\omega - E_0) \langle PN - RQRPA | [\delta Q, Q_\omega^\dagger] |PN - RQRPA\rangle. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Da bi se gornji izraz dokazao, potrebno je raspisati vanjske komutatore i primjetiti da vrijedi[29]:

$$Q_\omega^\dagger \delta Q |PN - RQRPA\rangle = 0. \quad (5.14)$$

Izrazi (5.12) i (5.13) su izvedeni iz varijacionog principa i kao takvi su egzaktni. Međutim, u principu ne znamo egzaktno vakuumsko stanje  $|PN - RQRPA\rangle$ . Zbog toga moramo isto zamjeniti nekim aproksimativnim, ali poznatim stanjem, koje općenito možemo označiti s  $|\Psi_0\rangle$ , pri čemu ćemo zahtijevati da još uvijek vrijedi ortogonalnost pobuđenja[29]:

$$\langle \Psi_0 | Q_\omega Q_{\omega'}^\dagger | \Psi_0 \rangle = \delta_{\omega\omega'}. \quad (5.15)$$

Može se pokazati da je gornji izraz ispunjen kad u jednadžbi (5.13) obični dvostruki komutator zamjenimo simetriziranim dvostrukim komutatorom[142] definiranim kao:

$$[A, B, C]_{\pm} = [A, [B, C]]_{\pm} + [[A, B], C]_{\pm}, \quad (5.16)$$

gdje predznak - označava (obični) komutator a + antikomutator. Ta dva slučaja odgovaraju, redom, pobuđenjima s Fermijevom odnosno s Bose-Einsteinovom statistikom.

Osnovno stanje PN-RQRPA je po Thoulessovom teoremu[140]:

$$|PN - RQRPA\rangle = \mathcal{N}_0 e^S |RHB\rangle, \quad (5.17)$$

gdje je  $\mathcal{N}_0$  normalizacijski faktor, a operator  $S$  pišemo kao[140]:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{pn p' n' JM} C_{pn p' n'}(J) A_{pn}^{\dagger}(JM) \tilde{A}_{p' n'}^{\dagger}(JM), \quad (5.18)$$

gdje su amplitude  $C$  simetrične[140]:

$$C_{p' n' pn}(J) = C_{pn p' n'}(J). \quad (5.19)$$

Iz definicije PN-RQRPA osnovnog stanja znamo da vrijedi[140]:

$$Q_{\omega} |PN - RQRPA\rangle = Q_{\omega} e^S |RHB\rangle. \quad (5.20)$$

Član koji množi  $|RHB\rangle$  možemo razviti u red komutatora[140]:

$$e^S \left( Q_{\omega} + [Q_{\omega}, S] + \frac{1}{2!} [[Q_{\omega}, S], S] + \dots \right) |RHB\rangle = 0. \quad (5.21)$$

Da bi gornja relacija bila istinita, treba vrijediti[140]:

$$\left( Q_{\omega} + [Q_{\omega}, S] + \frac{1}{2!} [[Q_{\omega}, S], S] + \dots \right) |RHB\rangle = 0. \quad (5.22)$$



Možemo izračunati komutator, primjerice, u prvom redu razvoja[140]:

$$\begin{aligned}
 [Q_\omega, S] &= \frac{1}{2} \sum_{pn p' n' p'' n'' J' M'} C_{p' n' p'' n''}(J') \\
 &\times \left[ X_{pn}^{\omega*} A_{pn}(JM) - Y_{pn}^{\omega*} \tilde{A}_{pn}^\dagger(JM), A_{p' n'}^\dagger(J' M') \tilde{A}_{p'' n''}^\dagger(J' M') \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{pn p' n' p'' n'' J' M'} C_{p' n' p'' n''}(J') X_{pn}^{\omega*} \left( \left[ A_{pn}(JM), A_{p' n'}^\dagger(J' M') \right] \tilde{A}_{p'' n''}^\dagger(J' M') \right. \\
 &\quad \left. + A_{p' n'}^\dagger(J' M') \left[ A_{pn}(JM), \tilde{A}_{p'' n''}^\dagger(J' M') \right] \right). \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Gornji izraz je egzaktan, međutim nije koristan za praktične račune. Može se pojednostavniti u tzv. kvazibozonskoj aproksimaciji (engl. quasi-boson approximation, QBA)[143, 144], gdje se vrijednost komutatora zamjenjuje očekivanom vrijednosti tog komutatora u osnovnom stanju neke teorije srednjeg polja, u našem slučaju RHB aproksimacije. Tako da možemo pisati[29]:

$$\left[ A_{pn}(JM), A_{p' n'}^\dagger(J' M') \right] \xrightarrow{\text{QBA}} \langle RHB | \left[ A_{pn}(JM), A_{p' n'}^\dagger(J' M') \right] | RHB \rangle = \delta_{pp'} \delta_{nn'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \quad (5.24)$$

i analogno za drugi komutator u jednadžbi (5.23).

Iz toga slijedi[140]:

$$[Q_\omega, S] = \sum_{pn p' n'} C_{p' n' p'' n''}(J') X_{pn}^{\omega*} A_{p' n'}^\dagger(JM). \quad (5.25)$$

Ako gornji izraz uvrstimo u red komutatora, svi komutatori osim komutatora prvog reda iščeznu, jer u svakom sljedećem redu vanjski komutator uključuje samo operatore stvaranja. Iz toga slijedi relacija koja određuje koeficijente  $C$ [140]

$$\sum_{pn} X_{pn}^{\omega*} C_{pn p' n'} = Y_{p' n'}^{\omega*}, \quad (5.26)$$

za proizvoljne  $\omega$ ,  $p'$  i  $n'$ . Za naš teorijski model je važnije primjetiti kako je u prvom redu razvoja osnovnog stanja, PN-RQRPA vakuum jednak RHB ili BCS osnovnom stanju. Time smo opravdali to da egzaktno PN-RQRPA osnovno stanje zamijenimo RMF osnovnim stanjem.

Varijacije operatora za PN-RQRPA fonone su[29]:

$$\delta Q_1 = A_{pn}(JM) \quad (5.27)$$

$$\delta Q_2 = \tilde{A}_{pn}^\dagger(JM), \quad (5.28)$$

ovisno o tome da li variramo prvi ili drugi član. Takve varijacije su bozonske i možemo pisati[29]:

$$\langle RMF | [\delta Q, H, Q_\omega^\dagger] | RMF \rangle = E_\omega \langle RMF | [\delta Q, Q_\omega^\dagger] | RMF \rangle. \quad (5.29)$$

U gornjem izrazu smo egzakti vakuum  $|PN - RQRPA\rangle$  zamijenili osnovnim stanjem (neke) teorije relativističkog srednjeg polja,  $|RMF\rangle$ . To znači da izraz više nije egzaktan, i da rezultirajuća teorija ne zadovoljava varijacioni princip[29].

U raspisu desne strane, može se pokazati da sve očekivane vrijednosti komutatora iščezavaju osim dvije, koje su dane s[29]:

$$\langle RHB | [A_{pn}(JM), A_{p'n'}^\dagger(J'M')] | RHB \rangle = \delta_{pp'} \delta_{nn'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (5.30)$$

$$\langle RHB | [\tilde{A}_{pn}^\dagger(JM), \tilde{A}_{p'n'}^\dagger(J'M')] | RHB \rangle = \delta_{pp'} \delta_{nn'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}. \quad (5.31)$$

Ako gornje izraze i izraz za varijaciju u jednadžbi (5.27) uvrstimo u jednadžbu (5.29), dobijemo (varijable JM su potisnute)[29]:

$$\sum_{p'n'} \langle RHB | [A_{pn}, H, A_{p'n'}^\dagger] | RHB \rangle X_{p'n'}^\omega - \sum_{p'n'} \langle RHB | [A_{pn}, H, \tilde{A}_{p'n'}] | RHB \rangle Y_{p'n'}^\omega = E_\omega X_{p'n'}^\omega. \quad (5.32)$$

Analogno, ako koristimo izraz za varijaciju iz jednadžbe (5.28), dobijemo:

$$\sum_{p'n'} \langle RHB | [\tilde{A}_{pn}^\dagger, H, A_{p'n'}^\dagger] | RHB \rangle X_{p'n'}^\omega - \sum_{p'n'} \langle RHB | [\tilde{A}_{pn}^\dagger, H, \tilde{A}_{p'n'}] | RHB \rangle Y_{p'n'}^\omega = E_\omega Y_{p'n'}^\omega. \quad (5.33)$$

Sustav jednadžbi koje predstavljaju gornja dva izraza možemo preoblikovati u jednu matricnu jednadžbu. Prvo, definiramo matrice A i B[29]:

$$A_{pn p' n'} = \langle RMF | [A_{pn}, H, A_{p' n'}^\dagger] | RMF \rangle \quad (5.34)$$

$$B_{pn p' n'} = -\langle RMF | [A_{pn}, H, \tilde{A}_{p' n'}] | RMF \rangle, \quad (5.35)$$

za koje se može pokazati da ne ovise o  $M$ [29]. Nadalje se može pokazati[29]:

$$[A, B, C]^\dagger = [A^\dagger, B^\dagger, C^\dagger] \quad (5.36)$$

$$[A, B, C] = [C, B, A]. \quad (5.37)$$

Iz toga slijedi:

$$[\tilde{A}_{p' n'}^\dagger, H, A_{pn}^\dagger] = [A_{pn}, H, \tilde{A}_{p' n'}]^\dagger \quad (5.38)$$

$$[\tilde{A}_{pn}^\dagger, H, \tilde{A}_{p' n'}] = [A_{p' n'}, H, A_{pn}^\dagger]. \quad (5.39)$$

Odnosno, možemo pisati[29]:

$$\langle RMF | [\tilde{A}_{pn}^\dagger, H, A_{p' n'}^\dagger] | RMF \rangle = -B_{p' n' pn}^* = -B_{pn p' n'}^\dagger \quad (5.40)$$

$$\langle RMF | [\tilde{A}_{pn}^\dagger, H, \tilde{A}_{p' n'}] | RMF \rangle = A_{p' n' pn} = A_{pn p' n'}^T. \quad (5.41)$$

Slijedi da jednačbe (5.32) i (5.33) možemo pisati kao:

$$AX^\omega + BY^\omega = E_\omega X^\omega \quad (5.42)$$

$$-B^\dagger X^\omega - A^T Y^\omega = E_\omega Y^\omega \quad (5.43)$$

Matrice  $A$  i  $B$  imaju svojstva:

$$A = A^\dagger \quad (5.44)$$

$$B = B^T, \quad (5.45)$$

odnosno  $A$  je hermitska, a  $B$  simetrična matrica[29]. Jednadžba (5.41) onda postaje:

$$-B^* X^\omega - A^* Y^\omega = E_\omega Y^\omega. \quad (5.46)$$

Naposlijetku, možemo zapisati matrični oblik jednadžbe[29]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\omega \\ Y^\omega \end{pmatrix} = E_\omega \begin{pmatrix} X^\omega \\ Y^\omega \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Ako raspišemo komutatore u definiciji matrice  $A$ , dobijemo[29]:

$$\begin{aligned} A_{pn p'n'} = \frac{1}{2} & \left( 2 \langle RMF | A_{pn} H A_{p'n'}^\dagger | RMF \rangle - \langle RMF | A_{pn} A_{p'n'}^\dagger H | RMF \rangle - \langle RMF | H A_{pn} A_{p'n'}^\dagger | RMF \rangle \right. \\ & \left. + 2 \langle RMF | A_{pn}^\dagger H A_{p'n'} | RMF \rangle - \langle RMF | H A_{pn} A_{p'n'}^\dagger | RMF \rangle - \langle RMF | A_{pn} A_{p'n'}^\dagger H | RMF \rangle \right). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Svi članovi u kojima operator poništenja djeluje na RMF vakuum iščezavaju:

$$A_{pn p'n'} = \frac{1}{2} \left( 2 \langle RMF | A_{pn} H A_{p'n'}^\dagger | RMF \rangle - \langle RMF | A_{pn} A_{p'n'}^\dagger H | RMF \rangle - \langle RMF | H A_{pn} A_{p'n'}^\dagger | RMF \rangle \right). \quad (5.49)$$

Drugi i treći član u gornjoj jednadžbi su dijagonalni i zajedno daju konstantan doprinos od  $-E_{RMF}$ [29]. Ovaj doprinos predstavlja činjenicu da razmatramo energiju pobuđenja, odnosno definiramo energiju pobuđenog stanja u odnosu na energiju osnovnog stanja nuklida.

Ostaje član oblika:

$$A'_{pn p'n'} = \langle RMF | A_{pn} H A_{p'n'}^\dagger | RMF \rangle = \langle pn^{-1}; JM | H | p'n'^{-1}; JM \rangle. \quad (5.50)$$

Matricu  $A$  konvencionalno zovemo (proton-neutron kvazičestična) Tamm-Dancoff matrica, po aproksimaciji (engl. proton-neutron quasiparticle Tamm-Dancoff approximation, pnQTDA) u kojoj se pojavljuje (i koja se može izvesti na sličan način kao PN-RQRPA)[29]. Da bi izveli eksplicitan oblik za tu matricu, razdvojit ćemo ukupni Hamiltonijan na slijedeći način:

$$H = H_{RMF} + H_{11} + V_{RES}. \quad (5.51)$$

Gdje je  $H_{11}$  član Hamiltonijana iz kojeg proizlaze jedno-kvazičestične energije[29]:

$$H_{11} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}, \quad (5.52)$$

Ovo je općeniti izraz, gdje su indeksi  $\alpha$  (i kasnije  $\beta, \gamma, \delta$ ) kvazičestični, i ovisno o modelu mogu označavati  $pn$  parove (u PN-RQRPA) ili druge tipove kvazičestica. Rezidualna interakcija u kvazičestičnoj bazi je dana s izrazom[29]:

$$V_{RES} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{v}_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{N} \left[ c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}^{\dagger} c_{\delta} c_{\gamma} \right]_{RMF}, \quad (5.53)$$

gdje oznaka  $\mathcal{N}$  označava normalni poredak operatora u RMF stanju. Ako uvrstimo definiciju kvazičestičnih operatora, dobijemo[29]:

$$V_{RES} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{v}_{\alpha\beta\gamma\delta} N \left[ (u_a u_b a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} - 2u_a v_b a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\beta} + v_a v_b \tilde{a}_{\alpha} \tilde{a}_{\beta}) \right. \\ \left. \times (v_c v_d \tilde{a}_{\delta}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma}^{\dagger} - 2u_c v_d \tilde{a}_{\delta}^{\dagger} a_{\gamma} + u_c u_d a_{\delta} a_{\gamma}) \right]_{RMF}, \quad (5.54)$$

gdje  $a, b, c$  i  $d$  označavaju  $p$  ili  $n$  stanja unutar PN-RQRPA. Ako raspišemo sumu i uredimo rezultirajući izraz možemo dobiti[29]:

$$V_{RES} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{v}_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \frac{1}{4} u_a u_b v_c v_d (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma}^{\dagger} + H.C.) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (u_a u_b u_c v_d + v_a v_b v_c u_d) (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta}^{\dagger} a_{\gamma} + H.C.) \right. \\ \left. + (u_a u_b u_c u_d + v_a v_b v_c v_d) (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma}) - u_a v_b v_c v_d a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta}^{\dagger} \tilde{a}_{\beta} a_{\gamma} \right] \\ = H_{40} + H_{31} + H_{22}, \quad (5.55)$$

gdje u zadnjem redu svaki član predstavlja jedan od prijašnjih redaka, grupiranih po broju operatora stvaranja odnosno poništenja u izrazu.

Za praktične primjene želimo članove gornjeg izraza vezati za dobre kvantne brojeve angularnog momenta. Izvod je u potpunosti dan u radu[29]; ovdje ćemo samo navesti rezultate. Koristeći konvencionalne oznake, pišemo[29]:

$$V_{pnp'n'}^{(40)}(J) = -\frac{1}{2} [\mathcal{N}_{pn}(J)\mathcal{N}_{p'n'}(J)]^{-1} u_p u_n v_{p'} v_{n'} \langle pn; J | V | p'n'; J \rangle \quad (5.56)$$

$$= u_p u_n v_{p'} v_{n'} G(pnp'n'J)$$

$$V_{pnp'n'}^{(31)}(J) = (u_p u_n v_{p'} u_{n'} - u_p u_n u_{p'} v_{n'}) G(pnp'n'J) \quad (5.57)$$

$$V_{pnp'n'}^{(22)}(J) = (u_p u_n u_{p'} u_{n'} - v_p v_n v_{p'} v_{n'}) G(pnp'n'J) \quad (5.58)$$

$$+ 2u_p v_n u_{p'} v_{n'} \sum_{J'} [\mathcal{N}_{pn}(J')\mathcal{N}_{p'n'}(J')]^{-1} \hat{j}^2 \begin{Bmatrix} j_p & j_n & J \\ j_{p'} & j_{n'} & J' \end{Bmatrix} \\ \times \langle p'n'; J' | V | p'n; J' \rangle \\ = (u_p u_n u_{p'} u_{n'} - v_p v_n v_{p'} v_{n'}) G(pnp'n'J) + 4u_p v_n u_{p'} v_{n'} F(pnp'n'J).$$

gdje su  $G, F$  tzv. Barangerovi matrični elementi:

$$G(pnp'n'J) = -\frac{1}{2} [\mathcal{N}_{pn}(J)\mathcal{N}_{p'n'}(J)]^{-1} \langle pn; J | V | p'n'; J \rangle \quad (5.59)$$

$$= -\frac{1}{2} \langle pn; J | V | p'n'; J \rangle$$

$$F(pnp'n'J) = -\frac{1}{2} [\mathcal{N}_{pn}(J)\mathcal{N}_{p'n'}(J)]^{-1} \langle pn'^{-1}; J | V | p'n^{-1}; J \rangle \quad (5.60)$$

$$= -\frac{1}{2} \langle pn'^{-1}; J | V | p'n^{-1}; J \rangle,$$

gdje konačni oblik obje funkcije ovisi o tome da u PN-RQRPA radimo s protonskim i neutronskim indeksima. Onda možemo pisati[29]:

$$H_{40} = \frac{1}{2} \sum_{pnp'n'J} (-1)^J V_{pnp'n'}^{(40)} \left( [a_p^\dagger a_n^\dagger]_J \times [a_{p'}^\dagger a_{n'}^\dagger]_J + H.C. \right) \quad (5.61)$$

$$H_{31} = \sum_{pnp'n'J} (-1)^J V_{pnp'n'}^{(31)} \left( [a_p^\dagger a_n^\dagger]_J \times [a_{p'}^\dagger \tilde{a}_{n'}]_J + H.C. \right) \quad (5.62)$$

$$H_{22} = \frac{1}{2} \sum_{pnp'n'J} (-1)^J V_{pnp'n'}^{(22)} \left( [a_p^\dagger a_n^\dagger]_J \times [\tilde{a}_{p'} \tilde{a}_{n'}]_J \right), \quad (5.63)$$

gdje  $H.C.$  označava hermitsku konjugaciju. Suma po  $J'$  koja se pojavljuje u izrazu (5.58)

za  $V^{(22)}$  je generalizirani oblik tzv. Pandya transformacije čestično-čestičnih interakcija u čestično-šupljinski oblik[145]:

$$\langle pn^{-1}; J | V | p'n'^{-1}; J \rangle = - \sum_{J'} [\mathcal{N}_{pn}(J') \mathcal{N}_{p'n'}(J')]^{-1} \hat{J}'^2 \begin{Bmatrix} j_p & j_n & J \\ j_{p'} & j_{n'} & J' \end{Bmatrix} \times \langle pn'; J' | V | p'n; J' \rangle. \quad (5.64)$$

Generalizacija se sastoji od toga da se u izraz koji opisuje običnu Pandya transformaciju[146] dodaju normalizacijski faktori  $\mathcal{N}$ , s čime se uzima u obzir da čestična (šupljinska) stanja nisu ograničena na orbitale iznad (ispod) Fermijeve površine, i moguće je da isto stanje bude i šupljinsko i čestično.

Da bi našli eksplicitan oblik za matricu  $A$ , trebamo raspisati komutatore koji se pojavljuju u izrazima (5.29) i nadalje. Komutatori s  $H_{RMF}$  iščezavaju budući da je energija kvazičestičnog srednjeg polja samo kompleksni broj. Što se tiče  $H_{11}$ , vrijedi:

$$[A_{pn}, H_{11}] = (E_p + E_n) A_{pn}. \quad (5.65)$$

Iz toga slijedi:

$$[H_{11}, A_{pn}^\dagger] = [A_{pn}, H_{11}]^\dagger = (E_p + E_n) A_{pn}^\dagger. \quad (5.66)$$

Iz gornja dva izraza slijedi[29]:

$$[A_{pn}, [H_{11}, A_{p'n'}^\dagger]] = (E_{p'} + E_{n'}) [A_{pn}, A_{p'n'}^\dagger] \quad (5.67)$$

$$[[A_{pn}, H_{11}], A_{p'n'}^\dagger] = (E_p + E_n) [A_{pn}, A_{p'n'}^\dagger]. \quad (5.68)$$

Iz toga slijedi[29]:

$$\langle RMF | [\delta Q, H_{11}, Q_\omega^\dagger] | RMF \rangle = \sum_{p'n'} X_{p'n'}^\omega (E_{n'} + E_{p'} + E_p + E_n) \mathcal{N}_{pn}^2(J) [\delta_{pp'} \delta_{nn'}] = (E_p + E_n) X_{pn}^\omega. \quad (5.69)$$

Iz gornjeg izraza možemo očitati komponentu matrice  $A$  koja proizlazi iz  $H_{11}$ , koju zovemo i pnQTDA matrica, budući da je jedina matrica koja se pojavljuje u pnQTDA modelu[29]. PN-RQRPA onda možemo promatrati kao proširenje pnQTDA metode gdje smo dodali matricu  $B$ . Što se tiče komponente koja proizlazi iz  $V_{RES}$ , treba primjetiti da će očekivana vrijednost niza operatora stvaranja i poništenja biti neišezavajuća samo ako imamo jednak broj obje vrste operatora[29]; prema tome od cijele rezidualne interakcije  $V_{RES}$  jedini doprinos daje  $H_{22}$ .

Dvostruki komutatori koji se pojavljuju u gornjim izrazima imaju oblik[29]:

$$\left[ A, H, A^\dagger \right] = \left[ A, AA^\dagger, A^\dagger \right], \quad (5.70)$$

i ako uzmemo u obzir da je  $[A, A] = [A^\dagger, A^\dagger] = 0$  i  $\langle RMF | a^\dagger a | RMF \rangle = 0$ , možemo shematski pisati:

$$\left[ A, AA^\dagger, A^\dagger \right] = \frac{1}{2} \left( AA^\dagger \left[ A, A^\dagger \right] + \left[ A, A^\dagger \right] AA^\dagger \right) = \frac{1}{2} \left( AA^\dagger (\delta + a^\dagger a) + (\delta + a^\dagger a) AA^\dagger \right), \quad (5.71)$$

iz čega proizlazi očekivana vrijednost[29]:

$$\begin{aligned} \langle RMF | \left[ A_{pn}(JM), A_{p'n'}^\dagger(J'M') \right] \left[ A_{p''n''}(J'M''), A_{p'''n'''}^\dagger(JM''') \right] | RMF \rangle &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \\ &\times \mathcal{N}_{pn}^2(J) \delta_{pp'} \delta_{nn'} \mathcal{N}_{p''n''}^2(J) \delta_{p''p'''} \delta_{n''n'''} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Konačni oblik za pnQTDA matricu  $A$  je[29]:

$$\begin{aligned} A_{pnp'n'} &= (E_p + E_n) \delta_{pp'} \delta_{nn'} + (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) \langle pn; J | V | p'n'; J \rangle \\ &\quad + (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) \langle pn^{-1}; J | V | p'n'^{-1}; J \rangle. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Ako primjenimo generaliziranu Pandya transformaciju[146, 147] dobijemo[29]:

$$\begin{aligned} A_{pnp'n'} &= (E_p + E_n) \delta_{pp'} \delta_{nn'} + (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) \langle pn; J | V | p'n'; J \rangle \\ &\quad - (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) - \sum_{J'} \hat{J}^2 \begin{Bmatrix} j_p & j_n & J \\ j_{p'} & j_{n'} & J' \end{Bmatrix} \times \langle pn'; J' | V | p'n; J' \rangle. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Što se tiče matrice  $B$ , koju se konvencionalno zove matrica interakcije, možemo pisati (na-



pominjemo da cijelo vrijeme radimo s tzv. Condon-Shortley faznom konvencijom):

$$B_{pn p' n'}(J) = \langle RMF | A_{pn}(JM) A_{p' n'}(JM) H | RMF \rangle, \quad (5.75)$$

i neiščezavajući doprinosi matrici dolaze samo od  $H_{40}$  člana u rezidualnoj interakciji. Onda je, koristeći općenite kvazičestične indekse  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  i jednočestične indekse  $a, b, c, d$  radi preglednosti (u PN-RQRPA je  $\alpha = pn$ ,  $a = p$  itd.)[29]:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta\gamma\delta}(J) &= \frac{1}{4} (-1)^{J+M} \sum_{m_\alpha m_\beta m_\gamma m_\delta} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM \rangle \langle j_\gamma m_\gamma j_\delta m_\delta | J-M \rangle \\ &\times \sum_{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} u_{\alpha'} u_{\beta'} v_{\gamma'} v_{\delta'} (-1)^{j_{\alpha'} - m_{\gamma'} + j_{\delta'} - m_{\delta'}} \bar{v}_{\alpha' \beta' - \gamma' - \delta'} \\ &\times \langle RMF | a_\beta a_\alpha a_\delta a_\gamma a_{\beta'}^\dagger a_{\alpha'}^\dagger a_{\delta'}^\dagger a_{\gamma'}^\dagger | RMF \rangle = \sum_{i=1}^{24} B_i, \end{aligned} \quad (5.76)$$

gdje 24 člana  $B_i$  proizlaze iz svih mogućih kontrakcija u RMF vakuumskoj očekivanoj vrijednosti[29]:

$$\begin{aligned} &\langle RMF | a_\beta a_\alpha a_\delta a_\gamma a_{\beta'}^\dagger a_{\alpha'}^\dagger a_{\delta'}^\dagger a_{\gamma'}^\dagger | RMF \rangle \\ &= -\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\delta\delta'} + \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\delta'} \delta_{\delta\gamma'} + \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\delta'} \delta_{\delta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} \\ &\quad - \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\delta'} \delta_{\delta\gamma'} \delta_{\gamma\beta'} - \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\delta\beta'} \delta_{\gamma\delta'} + \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\delta\delta'} \delta_{\gamma\beta'} \\ &\quad - \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\gamma\delta'} \delta_{\delta\gamma'} + \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\delta\delta'} \delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\delta'} \delta_{\delta\alpha'} \delta_{\gamma\gamma'} \\ &\quad + \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\delta'} \delta_{\delta\gamma'} \delta_{\gamma\alpha'} - \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\delta\delta'} \delta_{\gamma\alpha'} + \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\delta\alpha'} \delta_{\gamma\delta'} \\ &\quad - \delta_{\alpha\delta'} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\delta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\alpha\delta'} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\delta\gamma'} \delta_{\gamma\beta'} + \delta_{\alpha\delta'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\delta\alpha'} \delta_{\gamma\gamma'} \\ &\quad - \delta_{\alpha\delta'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\delta\gamma'} \delta_{\gamma\alpha'} + \delta_{\alpha\delta'} \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\delta\beta'} \delta_{\gamma\alpha'} - \delta_{\alpha\delta'} \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\delta\alpha'} \delta_{\gamma\beta'} \\ &\quad - \delta_{\alpha\gamma'} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\delta\delta'} \delta_{\gamma\beta'} + \delta_{\alpha\gamma'} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\delta\beta'} \delta_{\delta\gamma'} - \delta_{\alpha\gamma'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\delta\alpha'} \delta_{\gamma\delta'} \\ &\quad + \delta_{\alpha\gamma'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\delta\delta'} \delta_{\gamma\alpha'} - \delta_{\alpha\gamma'} \delta_{\beta\delta'} \delta_{\delta\beta'} \delta_{\gamma\alpha'} + \delta_{\alpha\gamma'} \delta_{\beta\delta'} \delta_{\delta\alpha'} \delta_{\gamma\beta'} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Zbog simetrije vrijedi[29]:

$$B_1 = B_2 = B_7 = B_8 \quad (5.78)$$

$$B_3 = B_5 = B_9 = B_{12} \quad (5.79)$$

$$B_4 = B_6 = B_{10} = B_{11} \quad (5.80)$$

$$B_{13} = B_{15} = B_{20} = B_{21} \quad (5.81)$$

$$B_{14} = B_{16} = B_{19} = B_{22} \quad (5.82)$$

$$B_{17} = B_{18} = B_{23} = B_{24}. \quad (5.83)$$

Za član  $B_1$  možemo dobiti[29]:

$$B_1 = \frac{1}{4}(-1)^{J+M-1}u_a u_b v_c v_d \sum_{m_\alpha m_\beta m_\gamma m_\delta} \langle j_a m_\alpha j_b m_\beta | JM \rangle \langle j_c m_\gamma j_d m_\delta | J - M \rangle (-1)^{j_c - m_\gamma + j_d - m_\delta} \bar{v}_{\alpha\beta - \gamma - \delta}. \quad (5.84)$$

Ako dvočestični matrični element zapišemo u vezanom obliku, dobijemo[29]:

$$B_1 = \frac{1}{4}(-1)^{J+M-1}u_a u_b v_c v_d \sum_{m_\alpha m_\beta m_\gamma m_\delta} \langle j_a m_\alpha j_b m_\beta | JM \rangle \langle j_c m_\gamma j_d m_\delta | J - M \rangle (-1)^{j_c - m_\gamma + j_d - m_\delta} \times \sum_{J'M'} \langle j_a m_\alpha j_b m_\beta | J'M' \rangle \langle j_c - m_\gamma j_d - m_\delta | J'M' \rangle \times \langle ab; J' | V | cd; J' \rangle. \quad (5.85)$$

Možemo provesti sumu Clebsch-Gordanovih koeficijenata, s rezultatom koji pišemo eksplisito koristeći PN-RQRPA indekse  $pn$  itd.:

$$B_1 = \frac{1}{4}u_p u_n v_{p'} v_{n'} \langle pn; J | V | p'n'; J \rangle. \quad (5.86)$$

Analogan račun se može provesti za pet drugih jedinstvenih matričnih elemenata. Konačni rezultat za matricu interakcije je onda[29]:

$$\begin{aligned}
 B_{pn p' n'}(J) = & -(u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'}) \langle pn; J' | V | p' n'; J' \rangle \\
 & + (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n u_{p'} v_{n'}) \langle pn^{-1}; J' | V | p' n'^{-1}; J' \rangle \\
 & + (-1)^{j_{p'} + j_{n'} + J} (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) \langle pn^{-1}; J' | V | p' n'^{-1}; J' \rangle,
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

odnosno, zapisana preko Barangerovih matričnih elemenata[29]:

$$\begin{aligned}
 B_{pn p' n'}(J) = & -(u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'}) G(pn p' n' J) \\
 & + (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n u_{p'} v_{n'}) F(pn p' n' J) \\
 & + (-1)^{j_{p'} + j_{n'} + J} (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) F(pn p' n' J).
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

Rješavanjem matrične jednadžbe (5.47) dobijemo energije i amplitude koje predstavljaju pobuđena stanja jezgre otvorene ljuske. Može se pokazati da ako triplet  $(E_\omega, X^\omega, Y^\omega)$  predstavlja rješenje PN-RQRPA jednadžbi, isto vrijedi i za drugi triplet:

$$E_{\omega'} = -E_\omega, X^{\omega'} = X^{\omega*}, Y^{\omega'} = Y^{\omega*}. \tag{5.89}$$

Prema tome, svako rješenje pozitivne energije ima pridruženo rješenje negativne energije. Zahtijevamo da su PN-RQRPA rješenja ortonormirana[29]:

$$\begin{aligned}
 \langle \omega | \omega' \rangle = & \delta_{\omega \omega'} \\
 = & \langle PN - RQRPA | Q_\omega Q_{\omega'}^\dagger | PN - RQRPA \rangle = \langle PN - RQRPA | [Q_\omega, Q_{\omega'}^\dagger] | PN - RQRPA \rangle \\
 \xrightarrow{\text{QBA}} & \langle RMF | [Q_\omega, Q_{\omega'}^\dagger] | RMF \rangle = \sum_{pn p' n'} \left( X_{pn}^{\omega*} X_{p' n'}^\omega \langle RMF | [A_{pn}, A_{p' n'}^\dagger] | RMF \rangle \right. \\
 & \left. + Y_{pn}^{\omega*} Y_{p' n'}^\omega \langle RMF | [\tilde{A}_{pn}^\dagger, \tilde{A}_{p' n'}] | RMF \rangle \right). \tag{5.90}
 \end{aligned}$$

Uvrštavajući prije izvedene izraze za očekivane vrijednosti komutatora, dobivamo:

$$\sum_{pn} \left( X_{pn}^{nJ\pi*} X_{pn}^{n'J'\Pi} - Y_{pn}^{nJ\pi*} Y_{pn}^{n'J'\Pi} \right) = \delta_{nn'}, \tag{5.91}$$

iz čega možemo dobiti normalizaciju (za stanja pozitivne energije)[29]:

$$\langle \omega | \omega \rangle = \sum_{pn} \left( |X_{pn}^\omega|^2 - |Y_{pn}^\omega|^2 \right) = 1. \quad (5.92)$$

Za stanja negativne energije, međutim, imamo:

$$\langle \omega_- | \omega_- \rangle = \sum_{pn} \left( |X_{pn}^{\omega_-}|^2 - |Y_{pn}^{\omega_-}|^2 \right) = \sum_{pn} \left( |Y_{pn}^{\omega_+}|^2 - |X_{pn}^{\omega_+}|^2 \right) = -\langle \omega_+ | \omega_+ \rangle = -1. \quad (5.93)$$

Ovakav rezultat je očito nefizikalno, i to, zajedno s činjenicom da se može pokazati da rješenja pozitivne energije formiraju kompletan skup stanja, ukazuje na nefizikalnu prirodu rješenja negativne energije.

Za dovoljno jaku vrijednost dvočestične interakcije PN-RQRPA formalizam prestaje vrijediti, što je točno za sve modele bazirane na aproksimaciji slučajnih faza. To je važan podatak za modeliranje dvostrukih beta raspada jer početak područja u kojemu formalizam nije primjenjiv predstavlja trenutak kad matrični element raspada, gledan u ovisnosti o jakosti dvočestične interakcije, prelazi nulu i poprima proizvoljno visoke apsolutne vrijednosti. Ovaj kolaps PN-RQRPA formalizma možemo ilustrirati na primjeru jedno-kvazičestičnog pobuđenja. U tom slučaju PN-RQRPA jednadžba postaje[29]:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\omega \\ Y^\omega \end{pmatrix} = E_\omega \begin{pmatrix} X^\omega \\ Y^\omega \end{pmatrix}, \quad (5.94)$$

gdje su se matrice  $A$  i  $B$  svele na kompleksne brojeve  $a$  i  $b$ . Odgovarajuća jednadžba za energije  $E_\omega$  je:

$$\begin{vmatrix} a - E_\omega & b \\ -b & -a - E_\omega \end{vmatrix} = 0 = -(a^2 + E_\omega^2) + b^2. \quad (5.95)$$

Rješenja gornjih jednadžbi su[29]:

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (5.96)$$

$$X \approx 1 + \frac{b^2}{8a^2} \quad (5.97)$$

$$Y \approx -\frac{b}{2a}, \quad (5.98)$$

gdje su potonje dvije jednačbe točne do na red  $b^2/a^2$  uz pretpostavku da je  $b \ll a$ . Iz ovoga je vidljivo da amplitude  $X$  mogu biti veće od 1, i da korelacije u osnovnom stanju, vezane uz matricu  $Y$ , proizlaze iz matrice  $B$ [29]. S druge strane, ako je  $b > a$ , izraz za energiju poprima imaginarne vrijednosti i formalizam više nije primjenjiv na stvarne jezgre. To se događa na kritičnim vrijednostima za snagu dvo-kvazičestične interakcije, kad ista postaje velika u odnosu na jednočestične energije.

Značenje imaginarnog rezultata možemo bolje razumijeti ako pretpostavimo stanje koje ćemo zapisati u obliku inspiriranim Thoulessovim teoremom[142]:

$$|S\rangle = e^S |RMF\rangle, \quad (5.99)$$

gdje je operator  $S$  antihermitski operator[142]:

$$S = \sum_{pn} (C_{pn} a_p^\dagger a_n + C_{pn}^* a_n^\dagger a_p) = \begin{pmatrix} C \\ C^* \end{pmatrix}. \quad (5.100)$$

Očekivana vrijednost energije takvog stanja je onda[142]:

$$\langle S|H|S\rangle = \langle RMF|H|RMF\rangle + \langle RMF|[H,S]|RMF\rangle + \langle RMF|[S^\dagger, H, S]|RMF\rangle + \dots \quad (5.101)$$

Ako je prvi komutator u gornjem razvoju nula, to garantira stacionarnost rješenja, ali ne i to da je rješenje minimalno, odnosno, postoji mogućnost da je  $\langle RMF|$ , ne osnovno nego jedno od pobuđenih stanja jezgre[142]. Da bi isključili mogućnost da se radi o maksimumu ili o sedlenoj točki, mora vrijediti:

$$\langle RMF|[S^\dagger, H, S]|RMF\rangle \geq 0. \quad (5.102)$$

Gornji izraz možemo raspisati[142]:

$$\begin{pmatrix} C^\dagger & \tilde{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C^* \end{pmatrix} \geq 0. \quad (5.103)$$

Ovaj uvjet je jednak uvjetu da je PN-RQRPA matrica pozitivno-definitna. Ako pretpostavimo da postoji rješenje s negativnom svojstvenom vrijednosti  $\lambda$ , odnosno da vrijedi[142]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (5.104)$$

onda zbog simetrije PN-RQRPA matrice postoji još jedno rješenje za koje vrijedi:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

To znači da možemo konstruirati nove operatore[142]:

$$\begin{pmatrix} X + Y^* \\ Y + X^* \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} X - Y^* \\ Y - X^* \end{pmatrix}, \quad (5.106)$$

koji su antihermitski i koji prema tome krše uvjet stabilnosti. Ovaj argument isključuje negativne svojstvene vrijednosti[142]. Nadalje se može pokazati [142] da, ako su PN-RQRPA jednadžbe stabilne, imaju realna rješenja. Pretpostavimo, nasuprot, da postoji rješenje s kompleksnom svojstvenom vrijednosti. Onda uvjet stabilnosti postaje:

$$\begin{pmatrix} X'^\dagger & Y'^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ -Y' \end{pmatrix} = E_\omega \begin{pmatrix} X'^\dagger & Y'^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}. \quad (5.107)$$

Lijeva strana je očekivana vrijednost hermitske matrice i kao takva je realna; isto vrijedi i za član koji množi  $E_\omega$ . Postoje dvije mogućnosti: ili je  $E_\omega$  nula, ili je nula član na desnoj strani jednadžbe koji množi  $E_\omega$ . Ako je potonje točno, to implicira da je  $\begin{pmatrix} X'^\dagger & Y'^\dagger \end{pmatrix}$  svojstveno stanje PN-RQRPA matrice (jer očekivana vrijednost hermitske matrice može biti minimalna samo za svojstveno stanje) sa svojstvenom vrijednosti nula - što opet povlači da je  $E_\omega$  nula[142].

Ovaj argument, kojeg je prvi put zapisao Thouless[148], isključuje mogućnost kompleksnih energija za stabilna (PN-RQ)RPA rješenja[142].

Za dovoljno velike vrijednosti nukleon-nukleon interakcije, odnosno kad u jednadžbi (5.96) vrijedi  $b^2 > a^2$ , ne postoji fizikalno rješenje PN-RQRPA jednadžbi. Ovaj rezultat interpretiramo na način da pretpostavljamo da u tom trenutku sferno simetrično srednje polje, koje smo pretpostavljali u svim gornjim izvodima, prestaje biti dovoljno da se opiše osnovno stanje jezgara koje promatramo; u ovoj slici, do slamanja modela je došlo zbog nezanemarive deformacije u osnovnom stanju relevantnih nuklida[29].

Preostaje da izvedemo izraze za matrice elemente beta minus i plus prijelaza u kvazičestičnoj slici koju daje PN-RQRPA. Općenito, kad računamo beta- (ali i elektromagnetske) prijelaze, radimo s matricnim elementima oblika:

$$\langle \xi_f J_f M_f | T_{\lambda\mu} | \xi_i J_i M_i \rangle = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | T_{\lambda\mu} | \beta \rangle \langle \xi_f J_f M_f | c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} | \xi_i J_i M_i \rangle, \quad (5.108)$$

gdje su kvantni brojevi početnih i konačnih stanja jezgre, osim  $J$  i  $M$ , kolektivno označeni s oznakom  $\xi$ .  $T_{\lambda\mu}$  je tenzorski operator reda  $\lambda$ . Primjenjujući Wigner-Eckartov teorem, dobivamo[29]:

$$\langle \xi_f J_f M_f | T_{\lambda} | \xi_i J_i M_i \rangle = \hat{\lambda}^{-1} \sum_{ab} \langle a | T_{\lambda} | b \rangle \langle \xi_f J_f || [c_a^{\dagger} \tilde{c}_b]_{\lambda} || \xi_i J_i \rangle, \quad (5.109)$$

gdje je član  $\langle \xi_f J_f || [c_a^{\dagger} \tilde{c}_b]_{\lambda} || \xi_i J_i \rangle$  poznat kao jednočestična gustoća prijelaza. Ako su početna i konačna stanja jedno-kvazičestična stanja:

$$|\xi_i J_i\rangle = a_i^{\dagger} |RMF\rangle \quad (5.110)$$

$$|\xi_f J_f\rangle = a_f^{\dagger} |RMF\rangle, \quad (5.111)$$

onda možemo pisati[29]:

$$\langle \xi_f J_f || [c_a^{\dagger} \tilde{c}_b]_{\lambda\mu} || \xi_i J_i \rangle = \hat{j}_f^{-1} \langle \xi_f J_f \lambda\mu | \xi_i J_i \rangle \langle \xi_f J_f || [c_a^{\dagger} \tilde{c}_b]_{\lambda} || \xi_i J_i \rangle. \quad (5.112)$$

Komutator u gornjem izrazu možemo raspisati preko kvazičestičnih vjerojatnosti zauzeća[29]:

$$\begin{aligned}
 [c_a^\dagger \tilde{c}_b]_{\lambda\mu} &= \sum_{m_\alpha m_\beta} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | \lambda\mu \rangle c_\alpha^\dagger \tilde{c}_\beta \\
 &= \sum_{m_\alpha m_\beta} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | \lambda\mu \rangle \left( u_\alpha a_\alpha^\dagger - v_\alpha \tilde{a}_\alpha \right) \left( v_\beta a_\beta^\dagger + u_\beta \tilde{a}_\beta \right) \\
 &= u_a u_b [a_a^\dagger \tilde{a}_b]_{\lambda\mu} + u_a v_b [a_a^\dagger a_b^\dagger]_{\lambda\mu} - v_a u_b [\tilde{a}_a \tilde{a}_b]_{\lambda\mu} - v_a v_b [\tilde{a}_a a_b^\dagger]_{\lambda\mu} \\
 &= u_a u_b [a_a^\dagger \tilde{a}_b]_{\lambda\mu} + u_a v_b [a_a^\dagger a_b^\dagger]_{\lambda\mu} - v_a u_b [\tilde{a}_a \tilde{a}_b]_{\lambda\mu} + (-1)^{j_a + j_b + \lambda} v_a v_b [a_b^\dagger \tilde{a}_a]_{\lambda\mu} \\
 &\quad + \delta_{ab} \delta_{\lambda 0} \delta_{\mu 0} j_a v_a v_b, \quad (5.113)
 \end{aligned}$$

pri čemu je posljednja linija dobivena tako da se posljednji član prethodne linije raspisao u normalnu formu (operatori stvaranja dolaze prije operatora poništenja). Zadnji član ne doprinosi matricnim elementima beta raspada zbog  $\delta_{ab}$ ; zbog toga će biti izostavljen. Uvrštavajući gornje izraze u jednadžbu (5.112), dobivamo[29]:

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_f J_f | [c_a^\dagger \tilde{c}_b]_{\lambda\mu} | \xi_i J_i \rangle &= u_a u_b \langle RMF | a_f [a_a^\dagger \tilde{a}_b]_{\lambda\mu} a_i^\dagger | RMF \rangle \\
 &\quad + (-1)^{j_a + j_b + \lambda} v_a v_b \langle RMF | a_f [a_b^\dagger \tilde{a}_a]_{\lambda\mu} a_i^\dagger | RMF \rangle. \quad (5.114)
 \end{aligned}$$

Može se pokazati da za kontrakcije operatora vrijedi[29]:

$$a_a a_b^\dagger a_a a_b^\dagger = \langle RMF | a_a a_b^\dagger | RMF \rangle = \delta_{ab}, \quad (5.115)$$

a sve druge kontrakcije su nula. Onda možemo pisati[29]:

$$\begin{aligned}
 \langle RMF | a_f [a_a^\dagger \tilde{a}_b]_{\lambda\mu} a_i^\dagger | RMF \rangle &= \sum_{m_\alpha m_\beta} (-1)^{j_b + m_\beta} \langle j_a m_\alpha j_b m_\beta | \lambda\mu \rangle \langle RMF | a_f a_{\alpha - \beta_i}^\dagger | RMF \rangle \\
 &= \delta_{af} \delta_{bi} (-1)^{j_i + m_i} \langle j_f m_f j_i - m_i | \lambda\mu \rangle. \quad (5.116)
 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi gustoća prijelaza:



$$\langle \xi_f J_f | [c_a^\dagger \tilde{c}_b]_{\lambda\mu} | \xi_i J_i \rangle = \hat{\lambda} \left[ \delta_{af} \delta_{bi} u_a u_b + (-1)^{j_i + j_f + \lambda} \delta_{ai} \delta_{bf} v_a u_b \right]. \quad (5.117)$$

Za prijelaze iz kvazičestičnog vakuuma u dvo-kvazičestična stanja možemo pisati:

$$|ab; JM\rangle = [a_a^\dagger a_b^\dagger]_{JM} |RMF\rangle = A_{ab}^\dagger(JM) |RMF\rangle. \quad (5.118)$$

Iz toga slijedi[29]:

$$\langle RMF | [c_c^\dagger \tilde{c}_d]_{\lambda\mu} |ab; JM\rangle = (-1)^{J+M} \hat{J}^{-1} \delta_{\lambda J} \delta_{\mu - M} \langle RMF | [c_c^\dagger \tilde{c}_d]_{\lambda} | |RMF\rangle. \quad (5.119)$$

Kad se u gornji izraz uvrsti raspis komutatora iz jednadžbe (5.113), rezultatu doprinosi samo zadnji član, i dobijemo[29]:

$$\begin{aligned} \langle RMF | [c_c^\dagger \tilde{c}_d]_{\lambda\mu} |ab; JM\rangle &= -v_c u_d \langle RMF | [\tilde{a}_c \tilde{a}_d]_{\lambda\mu} [a_a^\dagger a_b^\dagger]_{JM} |RMF\rangle \\ &= -v_c u_d \sum_{m_\alpha m_\beta m_\gamma m_\delta} \langle j_c m_\gamma j_d m_\delta | \lambda \mu \rangle \langle j_a m_\alpha j_b m_\beta | JM \rangle \\ &\quad \times (-1)^{j_c + m_\gamma + j_d + m_\delta} \langle RMF | a_{-\gamma} a_{-\delta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger |RMF\rangle \\ &= \delta_{\lambda J} \delta_{-\mu M} [\delta_{ca} \delta_{db} (-1)^{J+M} v_a u_b - \delta_{cb} \delta_{da} (-1)^{j_b + j_a - M} u_a v_b]. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Iz toga slijedi[29]:

$$\langle RMF | [c_c^\dagger \tilde{c}_d]_{\lambda} | |ab; J\rangle = \delta_{\lambda J} \hat{J} [\delta_{ca} \delta_{db} v_a u_b - (-1)^{j_a + j_b + J} \delta_{cb} \delta_{da} u_a v_b]. \quad (5.121)$$

Analogno možemo dobiti:

$$|ab; J\rangle [c_c^\dagger \tilde{c}_d]_{\lambda} | |RMF\rangle = \delta_{\lambda J} \hat{J} [\delta_{ca} \delta_{db} v_a u_b - (-1)^{j_a + j_b + J} \delta_{cb} \delta_{da} v_a u_b]. \quad (5.122)$$

Na sličan način se može izvesti gustoća prijelaza između dva dvo-kvazičestična stanja. Ovdje ćemo samo navesti rezultat. Reducirana gustoća prijelaza je dana s[29]:

$$\langle a_f b_f; J_f || [c_a^\dagger \tilde{c}_b]_\lambda || a_i b_i; J_i \rangle = u_a u_b \mathcal{K} a b^\lambda(f_i) + (-1)^{j_a + j_b + J} v_a v_b \mathcal{K} b a^\lambda(f_i), \quad (5.123)$$

gdje su veličine  $\mathcal{K}$ [29]:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ab}^\lambda(f_i) = \hat{\lambda} \hat{J}_i \hat{J}_f \times & \left[ \delta_{b_i b_f} \delta_{a a_f} \delta_{b a_i} (-1)^{j_{a_f} + j_{b_f} + J_i + \lambda} \begin{Bmatrix} J_f & J_i & \lambda \\ j_{a_i} & j_{a_f} & j_{b_f} \end{Bmatrix} \right. \\ & + \delta_{a_i b_f} \delta_{a a_f} \delta_{b b_i} (-1)^{j_{a_f} + j_{b_i} + \lambda} \begin{Bmatrix} J_f & J_i & \lambda \\ j_{b_i} & j_{a_f} & j_{b_f} \end{Bmatrix} \\ & + \delta_{a_i a_f} \delta_{a b_f} \delta_{b b_i} (-1)^{j_{a_i} + j_{b_i} + J_f + \lambda} \begin{Bmatrix} J_f & J_i & \lambda \\ j_{b_i} & j_{b_f} & j_{a_f} \end{Bmatrix} \\ & \left. + \delta_{b_i a_f} \delta_{a b_f} \delta_{b a_i} (-1)^{J_i + J_f + \lambda + 1} \begin{Bmatrix} J_f & J_i & \lambda \\ j_{a_i} & j_{b_f} & j_{a_f} \end{Bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (5.124)$$

a  $\lambda$  je multipol prijelaza.

Za beta prijelaze, početno stanje je neutronska a konačno protonsko, ili obrnuto. Možemo definirati dva tipa prijelaza, ovisno o stanju iz kojeg idu prijelazi:

$$n_i \xrightarrow{\beta_-} p_f, p_i \xrightarrow{\beta_+/EC} n_f \rightarrow \text{čestični} \quad (5.125)$$

$$p_i \xrightarrow{\beta_-} n_f, n_i \xrightarrow{\beta_+/EC} p_f \rightarrow \text{šupljinski.}$$

PN-RQRPA tretman beta prijelaza u ili iz neparno-neparne jezgre polazi od susjednih parno-parnih jezgara, koje je uobičajeno zvati referentnim jezgrama. U tom slučaju, stanja u neparno-neparnoj jezgri se formalno promatraju kao pobuđenja koja se nadograđuju na osnovno stanje referentne jezgre. Prijelazi između dvije jezgre se tako mogu tretirati na osnovi istog osnovnog stanja (koje daje BCS/RHB račun); problem je što pobuđeno stanje sadržava više od stanja ciljane neparno-neparne jezgre[29]. Općenito, ako imamo referentu jezgru  $(N, Z)$ , PN-RQRPA pobuđena stanja izgrađena na osnovnom stanju referentne jezgre će sadržavati elemente dvije neparno-neparne jezgre,  $(N + 1, Z - 1)$  i  $(N - 1, Z + 1)$ . Uspjeh ovog načina da se opišu beta prijelazi će ovisiti o tome koliko se dvije neparno-neparne jezgre razdvoje kada promatramo beta raspade; očito očekujemo da će beta-minus raspad uglavnom voditi do stanja  $(N - 1, Z + 1)$  jezgre i obrnuto za beta-plus raspad.

Za jednostruki beta prijelaz, amplituda prijelaza je:

$$\langle PN - RQRPA | \beta_{LM}^{\pm} | \omega \rangle = \langle PN - RQRPA | \beta_{LM}^{\pm} Q_{\omega}^{\dagger} | \omega \rangle = \langle PN - RQRPA | [\beta_{LM}^{\pm}, Q_{\omega}^{\dagger}] | PN - RQRPA \rangle. \quad (5.126)$$

Iz izraza (5.113) proizlazi kvazičestična reprezentacija operatora beta prijelaza[29]:

$$\beta_{LM}^{\pm} = \sum_{pn} \mathcal{M}_L(pn) \left[ u_p v_n A_{pn}^{\dagger}(LM) + v_p u_n \tilde{A}_{pn}(LM) + u_p u_n [a_p^{\dagger} \tilde{a}_n] + v_p v_n [a_n^{\dagger} \tilde{a}_p] \right]. \quad (5.127)$$

Za dozvoljene beta prijelaze (s kojima ćemo se isključivo baviti u ovom radu), za jednočestične matrične prijelazne elemente, razmatramo Fermi i Gamow-Teller prijelaze, pa vrijedi:

$$\mathcal{M}_0(pn) = \mathcal{M}_F(pn) \quad (5.128)$$

$$\mathcal{M}_1(pn) = \mathcal{M}_{GT}(pn). \quad (5.129)$$

Za dozvoljene prijelaze, možemo pisati:

$$\beta_{LM}^{-} = \hat{L}^{-1} \sum_{pn} \langle n | |\beta_L| | p \rangle [c_n^{\dagger} \tilde{c}_p]_{LM} = \sum_{pn} \mathcal{M}_L(pn) [c_n^{\dagger} \tilde{c}_p]_{LM}. \quad (5.130)$$

$$\beta_{LM}^{+} = (-1)^M (\beta_{LM}^{-})^{\dagger}. \quad (5.131)$$

U kvazibozonskoj aproksimaciji[29]:

$$\begin{aligned} & \langle PN - RQRPA | \beta_{LM}^{-} | \omega \rangle \xrightarrow{\text{QBA}} \langle RMF | [\beta_{LM}^{-}, Q_{\omega}^{\dagger}] | RMF \rangle \\ & = \sum_{pnp'n'} \left[ v_{p'} u_{n'} X_{pn}^{\omega} \langle RMF | [\tilde{A}_{p'n'}(LM), A_{pn}^{\dagger}(JM_{\omega})] | RMF \rangle \right. \\ & \quad \left. - u_{p'} v_{n'} Y_{pn}^{\omega} \langle RMF | [A_{p'n'}^{\dagger}(LM), \tilde{A}_{pn}^{\dagger}(JM_{\omega})] | RMF \rangle \right]. \quad (5.132) \end{aligned}$$

Matrični elementi komutatora daju delta funkcije, i na kraju dobijemo:

$$\langle PN - RQRPA | \beta_{LM}^- | \omega \rangle = \delta_{LJ} \delta_{M, -M_\omega} \sum_{pn} \mathcal{M}_L(pn) (v_p u_n X_{pn}^\omega + v_n u_p Y_{pn}^\omega), \quad (5.133)$$

odnosno za reducirani matrični element[29]:

$$\langle PN - RQRPA | | \beta_L^- | | \omega \rangle = \delta_{LJ} \hat{L} \sum_{pn} \mathcal{M}_L(pn) (v_p u_n X_{pn}^\omega + v_n u_p Y_{pn}^\omega). \quad (5.134)$$

Za amplitudu prijelaza u slučaju beta plus prijelaza pišemo:

$$\begin{aligned} \langle PN - RQRPA | \beta_{LM}^+ | \omega \rangle &= (-1)^M \langle PN - RQRPA | (\beta_{L-M}^-)^\dagger | \omega \rangle \\ &= (-1)^M \langle \omega | (\beta_{L-M}^-)^\dagger | PN - RQRPA \rangle^* = (-1)^M \langle \omega | (\beta_{L-M}^-)^\dagger | PN - RQRPA \rangle, \end{aligned} \quad (5.135)$$

i analogno za reducirani matrični element dobijemo[29]:

$$\langle PN - RQRPA | | \beta_L^+ | | \omega \rangle = (-1)^M \delta_{LJ} \hat{L} \sum_{pn} \mathcal{M}_L(pn) (u_p v_n X_{pn}^\omega + u_n v_p Y_{pn}^\omega). \quad (5.136)$$

U drugom smjeru imamo jednakosti za reducirane matrične elemente:

$$\langle \omega | | \beta_L^- | | PN - RQRPA \rangle = \delta_{LJ} \hat{L} \sum_{pn} \mathcal{M}_L(pn) (u_p v_n X_{pn}^\omega + u_n v_p Y_{pn}^\omega) \quad (5.137)$$

$$\langle \omega | | \beta_L^+ | | PN - RQRPA \rangle = (-1)^L \delta_{LJ} \hat{L} \sum_{pn} \mathcal{M}_L(pn) (v_p u_n X_{pn}^\omega + v_n u_p Y_{pn}^\omega). \quad (5.138)$$

U prijašnja dva poglavlja smo dali detalje aproksimacija koje ćemo koristiti pri računu nuklearnih matričnih elemenata i povezanih veličina. U principu te aproksimacije se mogu primijeniti za različita efektivna nuklearna međudjelovanja. Međutim, u ovom radu ćemo koristiti dva konkretna međudjelovanja temeljena na relativističkom energijskom funkcionalu gustoće, koja ćemo detaljno obrazložiti u sljedeća dva poglavlja.

## Poglavlje 6

# Relativistička interakcija s izmjenom mezona

Prvi pristup za opis nuklearne strukture koji slijedimo u ovom radu temeljen je na relativističkim modelima nuklearne materije i konačnih jezgri kao jako-međudjelujućih sustava bariona i mezona[149]. Najjednostavnija takva teorija je kvantna hadrodinamika[20], koja opisuje vezanje točkastih nukleona za skalarnu ( $\sigma$ ) i vektorsku ( $\omega$ ) mezone i koja je ubrzo nakon formulacije proširena tako da razmatra i vezanje za pseudoskalarnu ( $\rho$ ) mezone, elektromagnetsku interakciju i samodjelovanje mezona. Ovakva teorija je termodinamički samosuglasna[149] i jednačbe gibanja izvedene iz nje su očito kovarijantne.

U novijim tretmanima[19] jednačbe kvantne hadrodinamike, pogotovo nukleon-nukleon međudjelovanje, izvode se iz relativističkog energijskog funkcionala gustoće - pri čemu je jedan od ciljeva moderne teorije nuklearne strukture uspostavljanje univerzalnog funkcionala gustoće, koji bi bio primjenjiv na sve jezgre sa istim skupom parametara[150, 151]. Ovakav pristup uključuje aproksimaciju pri kojoj se se egzaktni energijski funkcional gustoće, koji sadrži sve moguće korelacije nukleonskog sustava, aproksimira funkcionalom koji ovisi samo o potencijama i gradijentima gustoće nukleona u osnovnom stanju. Nadalje, premda pristupi temeljeni na relativističkom energijskom funkcionalu gustoće modeliraju interakciju nukleona s nukleonima, nisu nužno povezani s nijednim specifičnim mikroskopskim nukleon-nukleon (NN) potencijalom[19].

Ekvivalentno, teorija može početi od gustoće Lagrangiana. U oba slučaja dobivamo fenomenološku hadronsku teoriju polja, gdje interakcija izmjenom virtualnih mezona na kraju vodi do slike gdje nukleonski izvori proizvode klasična, kondenzirana mezonska polja[20]. Parametri modela namješteni su tako da reproduciraju svojstva konačnih jezgara i nuklearne materije. Svi detalji jakih interakcija na niskim energijama su sadržani, implicitno, u rezultirajućim nukleon-

mezon vezanjima i samodjelovanju nukleona[19].

Jedna od interakcija koje koristimo u ovom radu, zasnovana na izmjeni mezona, spada u široku klasu modela koji se temelje na kvantnoj hadrodinamici. Može se izvesti iz gustoće Lagrangiana[152]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}(i\gamma\partial - m)\Psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 - \frac{1}{2}m_\sigma\sigma^2 - \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega\omega^2 - \frac{1}{2}\vec{R}_{\mu\nu}\vec{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho\rho^2 \\ & - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - g_\sigma\bar{\Psi}\sigma\Psi - g_\omega\bar{\Psi}\gamma\omega\Psi - g_\rho\bar{\Psi}\gamma\vec{\rho}\vec{\tau}\Psi - e\bar{\Psi}\gamma A\frac{1-\tau_3}{2}\Psi. \end{aligned} \quad (6.1)$$

U gornjem izrazu, vektori u običnom prostoru označeni su podebljano, a vektori u izospin-skom prostoru sa strelicom. Diracov spinor  $\Psi$  je pridružen nukleonu s masom  $m$ , dok su  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$  i  $m_\rho$  mase, redom, sigma, omega i rho mezona, kojima su pridružene konstante vezanja  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  i  $g_\rho$ . Naboj elektrona namješten je preko vrijednosti konstante fine strukture;  $e^2/4\pi = 137.036$ [152].

$\Omega$ ,  $R$  i  $F$  su tenzori polja, redom, za omega mezon, rho mezon i za elektromagnetsko polje odnosno foton[152]:

$$\Omega^{\mu\nu} = \partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu \quad (6.2)$$

$$\vec{R}^{\mu\nu} = \partial^\mu\vec{\rho}^\nu - \partial^\nu\vec{\rho}^\mu \quad (6.3)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (6.4)$$

Vršne funkcije  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  i  $g_\rho$  ovise o Lorentz-skalarnim bilinearnim formama nukleonskih operatora. Konkretno, pretpostavit ćemo da ovise o vektorskoj gustoći[152]:

$$\rho_\nu = \sqrt{j_\mu j^\mu} = \sqrt{\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}. \quad (6.5)$$

Alternativa toj pretpostavci je da vršne funkcije ovise o skalarnoj gustoći:

$$\rho_s = \bar{\Psi}\Psi, \quad (6.6)$$

međutim može se pokazati da korištenje vektorske gustoće daje bolje rezultate[149] i da

rezultati mikroskopskih, tzv. Dirac-Bruecknerovih računa[20] za vlastite energije (engl. self-energies) nukleona, pokazuju izraženu ovisnost upravo o vektorskoj gustoći. Vektorska gustoća se istovremeno može prikazati kao gustoća bariona: osim što daje bolje rezultate, povezana je sa zakonom očuvanja (očuvanje bariona), što nije slučaj sa skalarnom gustoćom, koja je dinamička veličina koja se treba odrediti u svakom koraku iteracijskog postupka[152].

Varirajući izraz (6.1) po spinoru  $\bar{\psi}$  dobivamo Diracovu jednadžbu:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) - (m - \Sigma)] \psi = 0, \quad (6.7)$$

gdje su vlastite energije definirane kao[152]

$$\Sigma = g_\sigma \sigma \quad (6.8)$$

$$\Sigma_\mu = g_\omega \omega_\mu + g_\rho \vec{\tau} \vec{\rho}_\mu + e \frac{1 - \tau_3}{2} A_\mu + \Sigma_\mu^R. \quad (6.9)$$

U gornjem izrazu,  $\Sigma_\mu^R$  je doprinos preuređenja samo-energiji, koji proizlazi iz ovisnosti vršnih mezonskih funkcija o gustoći:

$$\Sigma_\mu^R = \frac{j_\mu}{\rho_v} \left( \frac{\partial g_\omega}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \omega_\nu + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi \vec{\rho}_\nu + \frac{\partial g_\sigma}{\partial \rho_v} \bar{\psi} \psi \sigma \right), \quad (6.10)$$

i neophodan je za očuvanje energije i impulsa, kao i termodinamičku konzistentnost modela[152].

Gornji izrazi u principu definiraju kvantnu (hadrodinamičku) teoriju polja. U najnižem redu razvoja takve teorije, operatore polja za mezone ćemo zamijeniti njihovim očekivanim vrijednostima, čime dobijemo teoriju srednjeg polja kakva je prikazana u poglavlju 4. Ono što ostaje nakon zamjene su klasična mezonska polja, u kojima se neovisno gibaju točkasti nukleoni čija stanja prikazujemo Slaterovom determinantom Diracovih spinora[152]. Izvori mezonskih polja će biti nukleonske gustoće i struje, koje su raspisane u jednadžbama (4.37)-(4.40).

Polazeći od tako definiranih izvora, možemo dobiti osnovno stanje jezgre kao rješenje vezanih Diracovih i Klein-Gordonovih jednadžbi. Vlastite energije mezona su rješenja Klein-Gordonovih i Poissonovih jednadžbi:

$$(-\Delta + m_\sigma)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = -g_\sigma \boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{r}) \quad (6.11)$$

$$(-\Delta + m_\omega)\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = g_\omega \boldsymbol{\rho}_v(\mathbf{r}) \quad (6.12)$$

$$(-\Delta + m_\rho)\boldsymbol{\rho}_3(\mathbf{r}) = g_\rho (\boldsymbol{\rho}_n(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\rho}_p(\mathbf{r})) \quad (6.13)$$

$$-\Delta A_0(\mathbf{r}) = e^2 \rho_c(\mathbf{r}). \quad (6.14)$$

U gornjim jednadžbama je uzeto u obzir da za parno-parni sustav (kakva je referentna jezgra koju ćemo koristiti u računu beta prijelaza) prostornolike komponente mezona  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\rho_3$ , i elektromagnetskog potencijala  $\mathbf{A}$ , iščezavaju[152].

Što se tiče eksplicitnog oblika mezon-nukleon vršnih funkcija, on se može odrediti na jedan od dva načina. Prvi se oslanja na rezultate mikroskopskih tzv. Dirac-Brueckner računa za samo-energiju nukleona u beskonačnoj nuklearnoj materiji[20]. Navesti ćemo samo neke rezultate takvog pristupa radi ilustracije. Za dani vrh u beskonačnoj nuklearnoj materiji, postoji mapiranje istog u teoriju polja[20]:

$$\Gamma_\alpha(\hat{\rho}) = \int_0^\infty d\rho_{nm} 2\rho_{nm} \delta(\rho_{nm}^2 - \hat{\rho}^2) \Gamma_\alpha(\rho_{nm}), \quad (6.15)$$

gdje je  $\rho_{nm}$  gustoća beskonačne nuklearne materije, a  $\hat{\rho}$  neka od gustoća u formulaciji teorije polja, a  $\Gamma_\alpha(\hat{\rho})$  i  $\Gamma_\alpha(\rho_{nm})$  označavaju same vršne funkcije. Konačni rezultati su[20]

$$\left(\frac{\Gamma_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\Sigma_n^{S,DB}(k_{F_p}, k_{F_n}) + \Sigma_p^{S,DB}(k_{F_p}, k_{F_n})}{\rho_n^S + \rho_p^S} \quad (6.16)$$

$$\left(\frac{\Gamma_\omega}{m_\omega}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\Sigma_n^{0,DB}(k_{F_p}, k_{F_n}) + \Sigma_p^{0,DB}(k_{F_p}, k_{F_n})}{\rho_n + \rho_p} \quad (6.17)$$

$$\left(\frac{\Gamma_\delta}{m_\delta}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\Sigma_n^{S,DB}(k_{F_p}, k_{F_n}) - \Sigma_p^{S,DB}(k_{F_p}, k_{F_n})}{\rho_n^S + \rho_p^S} \quad (6.18)$$

$$\left(\frac{\Gamma_\rho}{m_\rho}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\Sigma_n^{0,DB}(k_{F_p}, k_{F_n}) - \Sigma_p^{0,DB}(k_{F_p}, k_{F_n})}{\rho_n + \rho_p}, \quad (6.19)$$

gdje su  $\Sigma$  vlastite energije dobivene iz Dirac-Brueckner računa. Pristup koji ćemo slijediti u ovom radu, međutim, bliži je duhu efektivne teorije polja, i oslanja se na pretpostavljenu fenomenološku ovisnost mezonsko-nukleonskog vezanja o gustoći, čiji se parametri onda namještau tako da se reproduciraju poznata svojstva konačnih jezgara i nukleonske materije. U



slučaju interakcije s izmjenom mezona, ansatz za ovisnost vezanja sigma i omega mezona za nukleone o gustoći je sljedeći[152, 153]:

$$g_{\sigma}(\rho) = g_{\sigma}(\rho_{sat})f_{\sigma}(x) \quad (6.20)$$

$$g_{\omega}(\rho) = g_{\omega}(\rho_{sat})f_{\omega}(x), \quad (6.21)$$

gdje je  $\rho_{sat}$  gustoća bariona u uvjetima zasićenja u beskonačnoj nuklearnoj materiji, a  $x$  je definiran kao omjer  $\rho/\rho_{sat}$ . Funkcija  $f$  je[152, 153]:

$$f_i = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2}, \quad (6.22)$$

gdje indeks  $i$  označava općenito neki od mezonskih indeksa  $\omega, \sigma$ . Što se tiče slučaja  $\rho$  mezona, oblik ansatza je sugeriran Dirac-Bruecknerovim računima u asimetričnoj beskonačnoj nuklearnoj tvari[152, 154]:

$$g_{\rho}(\rho) = g_{\rho}(\rho_{sat})exp(-a_{\rho}(x - 1)). \quad (6.23)$$

Osam parametara iz dvije  $f_i$  funkcije, jedan iz ansatza za  $g_{\rho}$  (koji predstavlja izovektorski kanal), tri gustoće pri zasićenju u nuklearnoj materiji i tri mezonske mase daju petnaest parametara. Međutim, ti parametri nisu svi međusobno nezavisni. Može se pokazati[19] da vrijede sljedeća ograničenja:

$$f_i(1) = 1 \quad (6.24)$$

$$f_{\sigma}''(1) = f_{\omega}''(1) \quad (6.25)$$

$$f_i''(0) = 0, \quad (6.26)$$

što snižava broj nezavisnih parametara za pet. Što se tiče masa mezona, u principu one isto mogu ovisiti o gustoći; međutim, kako je efektivno vezanje određeno samo omjerom  $\Gamma_i/m_i$ , eksplicitna ovisnost masa mezona o barionskoj gustoći je nepotrebna, i svi efekti koji bi slijedili iz iste mogu biti uključeni preko ovisnosti vršnih funkcija o gustoći[19]. U interakciji s izmjenom mezona se koriste gole mase za  $\omega$  i  $\rho$  mezone, redom 783 MeV i 763 MeV[153], što

ostavlja masu  $\sigma$  mezona kao slobodni parametar modela.

Slobodni parametri modela se naposljetku prilagođavaju tako da se reproducira neki podskup dostupnih empirijskih podataka i u nekim slučajevima rezultata prijašnjih računa u beskonačnoj nuklearnoj tvari. Tako se od općenite teorije koju smo do sad razmatrali dobiju konkretni modeli sa određenim parametrima npr. DD-ME1[152], DD-ME2 itd. U sadašnjem radu ćemo kao model s izmjenom mezona koristiti noviji DD-ME2 model[19]. Skup parametara koji odgovara DD-ME2 modelu određen je tako da reproducira svojstva simetrične i asimetrične nuklearne materije, istovremeno s energijama vezanja, radijusima naboja i razlikama između protonskih i neutronskih radijusa za 12 sfernih jezgara u rasponu od  $^{16}\text{O}$  do  $^{210}\text{Po}$ [19]. Tih 12 konačnih jezgara su iste kao i jezgre čiji su podaci korišteni u prilagođavanju parametara za DD-ME1 model[152].

Za nuklearnu materiju, "empirijski" podaci su sljedeći:  $E/A = -16 \text{ MeV}(1\pm 5\%)$ ,  $\rho_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}(1\pm 10\%)$ ,  $K_0 = 250 \text{ MeV} (1\pm 10\%)$  (modul kompresibilnosti),  $J = 33 \text{ MeV} (1\pm 10\%)$  (energija simetrije na gustoći zasićenja)[19, 152].

Podaci za konačne jezgre korištene za određivanje DD-ME2 parametrizacije dani su u tablici 6.1.

Tablica 6.1: Energije vezanja BE, radijusi naboja  $r_c$  i razlike između radijusa neutronskih i protonskih raspodjela  $r_{np} = r_n - r_p$  za jezgre koje su korištene u podešavanju parametara DD-ME2 interakcije, uspoređeni s eksperimentalnim vrijednostima u zagradama; odstupanja u postocima su dana u posljednja tri stupca[19].

| Jezgra            | BE(MeV)             | $r_c$ (fm)    | $r_{np}$ (fm) | dBE (%) | $dr_c$ (%) | $dr_{np}$ (%) |
|-------------------|---------------------|---------------|---------------|---------|------------|---------------|
| $^{16}\text{O}$   | 127.801 (127.619)   | 2.727 (2.730) | -0.03         | 0.1     | -0.1       |               |
| $^{40}\text{Ca}$  | 342.741 (342.052)   | 3.464 (3.485) | -0.05         | 0.2     | -0.6       |               |
| $^{48}\text{Ca}$  | 414.770 (415.991)   | 3.481 (3.484) | 0.18          | -0.3    | -0.1       |               |
| $^{72}\text{Ni}$  | 612.655 (613.173)   | 3.914         | 0.28          | -0.1    |            |               |
| $^{90}\text{Zr}$  | 783.155 (783.893)   | 4.275 (4.272) | 0.07          | -0.1    | 0.1        |               |
| $^{116}\text{Sn}$ | 986.928 (988.681)   | 4.615 (4.626) | 0.12 (0.12)   | -0.2    | -0.2       | 3.8           |
| $^{124}\text{Sn}$ | 1048.859 (1049.962) | 4.671 (4.674) | 0.21 (0.19)   | -0.1    | -0.11      | 0.7           |
| $^{132}\text{Sn}$ | 1103.469 (1102.860) | 4.718         | 0.26          | 0.1     |            |               |
| $^{204}\text{Pb}$ | 1608.506 (1607.520) | 5.500 (5.486) | 0.17          | 0.1     | 0.3        |               |
| $^{208}\text{Pb}$ | 1638.426 (1636.446) | 5.518 (5.505) | 0.19 (0.20)   | 0.1     | 0.2        | -4.7          |
| $^{214}\text{Pb}$ | 1661.182 (1663.298) | 5.568 (5.562) | 0.24          | -0.1    | 0.1        |               |
| $^{210}\text{Po}$ | 1649.695 (1645.228) | 5.552         | 0.17          | 0.3     |            |               |

U računima koji su potrebni za podešavanje parametara, sparivanje u jezgrama s otvorenom ljuskom tretira se u okviru BCS aproksimacije s empirijskim procijepima sparivanja dobivenim iz tzv. formule pet točaka[19]. U ostalim računima potrebnima za prilagodbu i kasnije testiranje

interakcije korišten je RHB model[19]. Pri računanju energije vezanja, nakon što se dobije totalna energija vezanja kao rješenje samosuglasnih jednadžbi srednjeg polja, od iste se oduzme mikroskopska procjena za energiju centra mase[19]:

$$E_{cm} = -\frac{\langle P_{cm}^2 \rangle}{2Am}. \quad (6.27)$$

Energije vezanja za konačne jezgre su uzete s preciznošću od 0.1%, a njihovi radijusi naboja s preciznošću od 0.2 % [19]. Zbog znatno većih eksperimentalnih nepouzdanosti, razlika neutronske i protoneke radijuse, odn. debljina neutronske omotača, je uzeta s preciznošću od 0.5 % [19].

Postupak podešavanja parametara daje rezultate koji su prezentirani u tablici 6.2, zajedno s vrijednostima prethodno određene DD-ME1 interakcije [152]. Parametar  $\chi^2$ , pomoću kojeg možemo procijeniti kvalitetu prilagodbe parametara, manji je za DD-ME2 set parametara nego za prijašnji DD-ME1 set (55 nasuprot 77 ukupno) [19]. Obje interakcije, DD-ME1 i DD-ME2, možemo okarakterizirati i preko izračunatih svojstava beskonačne nuklearne materije pri gustoći zasićenja. Ta svojstva su prikazana u tablici 6.3.

Tablica 6.2: Parametri za efektivne interakcije DD-ME2 i DD-ME1 [19].

|                        | DD-ME2[19]   | DD-ME1[152]  |
|------------------------|--------------|--------------|
| $m_\sigma$             | 550.1238 MeV | 549.5255 MeV |
| $m_\omega$             | 783.0000 MeV | 783.0000 MeV |
| $m_\rho$               | 763.0000 MeV | 763.0000 MeV |
| $g_\sigma(\rho_{sat})$ | 10.5396      | 10.4434      |
| $g_\omega(\rho_{sat})$ | 13.0189      | 12.8939      |
| $g_\rho(\rho_{sat})$   | 3.6836       | 3.8053       |
| $a_\sigma$             | 1.3881       | 1.3854       |
| $b_\sigma$             | 1.0943       | 0.9781       |
| $c_\sigma$             | 1.7057       | 1.5342       |
| $d_\sigma$             | 0.4421       | 0.4661       |
| $a_\omega$             | 1.3892       | 1.3879       |
| $b_\omega$             | 0.9240       | 0.8525       |
| $c_\omega$             | 1.4620       | 1.3566       |
| $d_\omega$             | 0.4775       | 0.4957       |
| $a_\rho$               | 0.5647       | 0.5008       |

Tablica 6.3: Svojstva beskonačne nuklearne materije pri gustoći zasićenja za interakcije DD-ME1 i DD-ME2[19]. Podaci o derivaciji energije simetrije na gustoći zasićenja iz Ref. [155].

|                              | DD-ME2[19] | DD-ME1[152] |
|------------------------------|------------|-------------|
| $\rho_{sat}(\text{fm}^{-3})$ | 0.152      | 0.152       |
| E/A (MeV)                    | -16.04     | 16.20       |
| $K_0$ (Mev)                  | 250.89     | 244.5       |
| $m^*$                        | 0.572      | 0.578       |
| J (MeV)                      | 32.3       | 33.1        |
| L (MeV)                      | 51.26      | 55.46       |

## Poglavlje 7

# Relativističke interakcije s točkastim vezanjem

DD-ME2 interakcija i srodne interakcije se mogu, kao što je prikazano u prijašnjem poglavlju, izvesti iz kvantne hadrodinamike, gdje se jezgra opisuje kao sustav Diracovih nukleona čiju međusobnu interakciju preko izmjene mezona opisuje efektivni Lagrangian[19].

Izmjena teških mezona je, međutim, samo jedan od načina na koji se može prikazati efektivna interakcija između nukleona[21]. Na vrijednostima energija i impulsa karakterističnima za jezgre, jedini stupnjevi slobode koji se moraju eksplicitno uzeti u obzir su sami nukleoni i pioni, pri čemu je ponašanje nukleon-nukleon interakcije na srednjim i velikim udaljenostima opisano izmjenom jednog ili dva piona[21]. Opis nukleon-nukleon interakcije preko izmjene teških mezona, dakle, možemo, u duhu efektivne teorije polja, zamijeniti kontaktnom interakcijom nukleona preko četiri točke, (engl. four-point), čije parametre na niskim energijama možemo prilagoditi podacima o konačnim jezgrama i nuklearnoj materiji. Time smo kratkodo-sežne interakcije zamijenili kontaktnima. Što se tiče dugo- i srednjedosežnih interakcija preko izmjene jednog ili para piona, njih uzimamo u obzir tako da uvodimo ovisnost kontaktne interakcije o gustoći nukleona; podaci o interakcijama preko izmjene piona su onda sadržani u detaljima takve ovisnosti o gustoći[21].

Relativistički nuklearni energijski funkcional gustoće gradimo iz članova bilinearnih u Diracovom spinoru  $\psi$  fermiona  $\bar{\psi}O\Gamma\psi$ , gdje je  $O \in \{1, \vec{\tau}\}$  i  $\Gamma \in \{1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\}$ . Konkretno, za četiri-fermionsku kontaktnu interakciju možemo, ovisno o kanalu interakcije, pisati kao[21]

$$\text{izoskalar} - \text{skalar} : (\bar{\psi}\psi)^2 \quad (7.1)$$

$$\text{izoskalar} - \text{vektor} : (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \quad (7.2)$$

$$\text{izovektor} - \text{skalar} : (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi) (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi) \quad (7.3)$$

$$\text{izovektor} - \text{vektor} : (\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_\mu\psi) (\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma^\mu\psi), \quad (7.4)$$

gdje su vektori u izospinskom prostoru označeni strelicama. U principu možemo u Lagrangian interakcije uključiti više potencije struja  $\bar{\psi}O\Gamma\psi$  i njihovih derivacija, koji onda predstavljaju efekte mnoštva čestica u nuklearnom mediju[156]. U konstrukciji DD-PC1[152] i DD-PCX[22] interakcija, međutim, ograničiti ćemo se na interakcije drugog reda. Efekte mnoštva čestica ćemo uključiti fenomenološki, kao i u slučaju DD-ME2[19] interakcije, preko funkcija vezanja koje ovise o gustoći medija.

Minimalna gustoća Lagrangiana ovakve interakcije je[21]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma \times \partial - m)\psi - \frac{1}{2}\alpha_S(\hat{\rho}) (\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}\alpha_V(\hat{\rho}) (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - \frac{1}{2}\alpha_{TV} (\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_\mu\psi) (\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma^\mu\psi) \\ - \frac{1}{2}\delta_S(\partial_\nu\bar{\psi}\psi) (\partial^\nu\bar{\psi}\psi) - e\bar{\psi}\gamma\mathbf{A}\frac{1-\tau_3}{2}\psi, \quad (7.5) \end{aligned}$$

koji se sastoji od slobodnog Lagrangiana, kontaktnih članova od kojih derivativni član predstavlja vodeće efekte interakcije konačnog dosega[21], i vezanja za elektromagnetsko polje. Takav derivativni član je uključen samo za izoskalaro-skalarni kanal, analogno s DD\*ME2 i sličnim interakcijama, gdje se za  $\sigma$  mezon koristi efektivna masa prilagođena nuklearnim podacima, dok se za  $\omega$  i  $\rho$  mezon koriste slobodne mase. Može se primjetiti da kontaktni članovi ne uključuju izovektorsko-skalarni član, koji bi u slici izmjene teških mezona odgovarao izmjeni efektivnog  $\delta$  mezona (isti nije uključen ni u DD-ME2). Naime, pokazuje se nemoguće[157, 153], i u modelima s izmjenom teških mezona i u modelima s kontaktnim interakcijama, odrediti parametre u izovektorsko-skalarnom kanalu iz nuklearnih podataka. Izovektorska snaga je poznata, ali njenu raspodjelu između vektorskih i skalarnih kanala nije moguće odrediti iz podataka o osnovnom stanju. Zbog toga se cijeli izovektorsko-skalarni kanal izostavlja, što ima dodatnu prednost da smanjuje broj slobodnih parametara u modelu.

Kao i u slučaju izmjene teških mezona, parametri snage za razne članove u jednadžbi (7.5) su funkcije nukleonske 4-struje[21]:

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \hat{\rho}u^\mu, \quad (7.6)$$

gdje je relativistička četiri-brzina u[21]:

$$u = (1 - \mathbf{v}^2)^{-\frac{1}{2}} (1, \mathbf{v}). \quad (7.7)$$

Jednonukleonska Diracova jednačba je[21]:

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma^\mu - \Sigma_R^\mu) - (m + \Sigma_S)] \Psi = 0, \quad (7.8)$$

gdje su vlastite energije definirane kao[21, 149, 158]:

$$\Sigma^\mu = \alpha_V(\rho_v)j^\mu + e\frac{1 - \tau_3}{2}A^\mu \quad (7.9)$$

$$\Sigma_R^\mu = \frac{1}{2}\frac{j^\mu}{\rho_v} \left\{ \frac{\partial\alpha_S}{\partial\rho}\rho_s^2 + \frac{\partial\alpha_V}{\partial\rho}j_\mu j^\mu + \frac{\partial\alpha_{TV}}{\partial\rho}\vec{j}_\mu \vec{j}^\mu \right\} \quad (7.10)$$

$$\Sigma_S = \alpha_S(\rho_v)\rho_s - \delta_s\nabla^2\rho_s \quad (7.11)$$

$$\Sigma_{TV}^\mu = \alpha_{TV}(\rho_v)\vec{j}^\mu, \quad (7.12)$$

gdje je  $\Sigma_R$  član preuređenja, koji proizlazi iz variranja vršnih funkcija  $\alpha_S$ ,  $\alpha_V$  i  $\alpha_{TV}$  po nukleonskim poljima. Naime, kao i u slučaju izmjene teških mezona, pretpostavili smo da vršne funkcije Lagrangiana ovise o vektorskoj gustoći:

$$\rho_v = \sqrt{\mathbf{j}_\mu \mathbf{j}^\mu} = \sqrt{\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}. \quad (7.13)$$

Skalarna gustoća, i četiri-struje (engl. four-currents) obje vrste (izoskalarna i izovektorska) su[21]:

$$\rho_s = \langle \phi_0 | \bar{\Psi} \Psi | \phi_0 \rangle = \sum_{k=1}^N v_k^2 \bar{\Psi}_k \Psi_k \quad (7.14)$$

$$\mathbf{j}^\mu = \langle \phi_0 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi | \phi_0 \rangle = \sum_{k=1}^N v_k^2 \bar{\Psi}_k \gamma^\mu \Psi_k \quad (7.15)$$

$$\vec{j}^\mu = \langle \phi_0 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \Psi | \phi_0 \rangle = \sum_{k=1}^N v_k^2 \bar{\Psi}_k \gamma^\mu \vec{\tau} \Psi_k, \quad (7.16)$$

gdje su  $\Psi_k$  Diracovi spinori pobuđenih stanja, osnovno stanje  $\phi_0$ , a  $v_k$  faktori zauzeća. Kao i u slučaju modela s izmjenom teških mezona, sve gustoće se računaju u tzv. "no-sea" aproksimaciji, odnosno zanemaruju se antičestični doprinosi u sumama.

Ostaje prilagoditi slobodne parametre modela, od kojih su najvažniji parametri snage kontaktnog vezanja ovisnog o mediju,  $\alpha_S$ ,  $\alpha_V$  i  $\alpha_{TV}$ , i snage derivativnog člana  $\delta_S$ .

Jedan pristup, koji se koristi u modelima srednjeg polja temeljenima na Hartree-Brueckner-Bogoliubov-Fock samo-energijama[20, 154], kao i u modelima temeljenima na kiralnoj teoriji smetnje (Chiral Perturbation Theory, ChPT) u mediju[159], počinje od mikroskopske relativističke jednadžbe stanja za simetričnu i asimetričnu nuklearnu materiju. Može se pokazati, međutim[21], da takvi modeli vrlo loše predviđaju svojstva konačnih jezgara, budući da se sam izvod jednadžbe stanja za beskonačnu nuklearnu materiju oslanja na određene sheme aproksimacije, i sadrži slobodne parametre koji ograničavaju prediktivnu moć modela. Iz tog razloga nije moguće odrediti parametre modela iz podataka o nuklearnoj materiji (gustoća zasićenja, energija vezanja, modul kompresibilnosti, energija simetrije), nego je potrebno parametre dodatno podesiti na temelju podataka o sferičnim jezgrama.

Alternativa ovom postupku je fenomenološki pristup podešavanju parametara modela, koji polazi od ansatza za ovisnost nukleonskih samo-energija u srednjem polju o gustoći, i parametre ansatza prilagođava direktno podacima za sferne jezgre[21]. Takav pristup je korišten da bi se dobio DD-ME2 skup parametara (vidi prijašnje poglavlje), ali i relativističke interakcije ovisne o gustoći TW-99[153], DDME1[152], PKDD[160], PK01[161].

Parametri interakcije DD-PC1[21] prilagođeni su na drugačiji način; njihove vrijednosti su određene isključivo pomoću velikog broja podataka o energijama vezanja  $E_B$ . Naime vrijednosti masa konačnih jezgara (a prema tome i energija vezanja) dobivene iz dane interakcije su uglavnom osjetljive na prva tri člana empirijske formule mase[162]:

$$E_B = a_v A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_4 \frac{(N-Z)^2}{4A} + \dots, \quad (7.17)$$



gdje članovi redom predstavljaju volumnu, površinsku energiju i energiju simetrije. To znači da je moguće konstruirati skup efektivnih interakcija koje karakteriziraju različite vrijednosti parametara  $a_v$ ,  $a_s$  i  $a_4$ , te pronaći člana tog skupa koji minimizira razlike izračunatih i empirijskih energija vezanja za dani veliki skup konačnih jezgara.

Važno je napomenuti da skup jezgara koji je korišten za podešavanje parametara interakcije DD-PC1 sadrži aksijalno deformirane jezgre u masenim područjima  $A \approx 150 - 180$  i  $A \approx 230 - 250$ [21]. S druge strane, pri prilagođavanju interakcija kao DD-ME2 deformirane jezgre se ne uzimaju u obzir, budući da su zahtjevnije i što se tiče računalnih resursa i što se tiče kompleksnosti kodova koji su potrebni da se tretiraju deformacije u jezgrama.

I u ovakvom pristupu je potreban ansatz za ovisnost samoenergija (ili vezanja) o gustoći. Kao polazna točka može služiti nedavni Hartree-Fock račun, na tzv. razini stabla (engl. tree level), mikroskopskih relativističkih samoenergija[163], koristeći niz modernih, visokopreciznih realističnih nukleon-nukleon (NN) potencijala (Argonne  $V_{18}$ [164], Bonn A[165], CD-Bonn[166], Idaho[167], Nijmegen[168],  $V_{lowk}$ [169] itd.). Pokazuje se da na srednjim nukleonskim gustoćama, koje su najrelevantnije za proučavanje nuklearne strukture, svi potencijali daju slične rezultate, odnosno skalarnu i vektorsku potencijale od nekoliko stotina MeV, sa sličnom ovisnosti o gustoći[21].

Prema tome uzimamo ansatz[21]:

$$\alpha_i(\rho) = a_i + (b_i + c_i x)e^{-d_i x}, \quad (7.18)$$

gdje je  $i$  iz skupa  $(S, V, TV)$ ,  $x = \rho/\rho_{sat}$ , a  $\rho_{sat}$  gustoća nukleona pri zasićenju.

U izovektorskom kanalu zasada ne postoje računi samoenergija nukleona na razini stabla[21], tako da, potpuno analogno s DD-ME2 interakcijom i drugim interakcijama preko izmjene teških mezona (DD-ME1 i DD-ME2, TW-99[153], PK-01[161]), parametre u tom kanalu prilagođavamo koristeći Dirac-Brueckner račune za asimetričnu nuklearnu materiju[154]. Zbog toga postavljamo  $a_{TV} = 0$ ,  $c_{TV} = 0$ .

Slijedeći predviđanja većine modernih relativističkih modela srednjeg polja, i na potpuno identičan način kao u slučaju DD-ME2 modela, uzimamo da je gustoća zasićenja  $\rho_{sat} = 0.152 \text{ fm}^{-3}$ , a efektivna nukleonska Diracova masa  $m_D^* = m + \Sigma_s = 0.58 m$ . Iz studija odnosa između reprezentacija efektivnih interakcija srednjeg polja s nultim dosegom (odnosno kontaktnih interakcija) i reprezentacija konačnog dosega (odnosno reprezentacija preko izmjene mezona)[170], znamo da se modul kompresibilnosti nuklearne materije treba uzeti kao  $K = 230 \text{ MeV}$ , što je znatno manje nego u slučaju modela s izmjenom teških mezona, da bi se uspješno reproducirale energije izoskalarnih gigantskih monoplnih rezonancija.

U prilagodbi parametara modela korištene su energije vezanja jezgara u izotopnim lancima navedenim u u tablici 7.1[21].

Tablica 7.1: Vrijednosti  $N$  za jezgre unutar izotopnih lanaca  $62 \leq Z \leq 72$  i  $90 \leq Z \leq 98$  čije se energije vezanja koriste za prilagođavanje parametara interakcije DD-PC1[21].

| $Z$       | 62 | 64 | 66  | 68  | 70  | 72  | 90  | 92  | 94  | 96  | 98  |
|-----------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $N_{min}$ | 92 | 92 | 92  | 92  | 92  | 72  | 140 | 138 | 138 | 142 | 144 |
| $N_{max}$ | 96 | 98 | 102 | 104 | 108 | 110 | 144 | 148 | 150 | 152 | 152 |

Optimalni parametri DD-PC1 interakcije navedeni su u tablici 7.2.

Tablica 7.2: Parametri za efektivnu interakciju DD-PC1[21].

| DD-PC1                        |          |
|-------------------------------|----------|
| $a_S$ (fm <sup>2</sup> )      | -10.0462 |
| $b_S$ (fm <sup>2</sup> )      | -9.1504  |
| $c_S$ (fm <sup>2</sup> )      | -6.4273  |
| $d_S$                         | 1.3724   |
| $a_V$ (fm <sup>2</sup> )      | 5.9195   |
| $b_V$ (fm <sup>2</sup> )      | 8.8637   |
| $c_V$ (fm <sup>2</sup> )      | 0.000    |
| $d_V$                         | 0.6584   |
| $\delta_S$ (fm <sup>4</sup> ) | -0.815   |
| $b_{TV}$ (fm <sup>2</sup> )   | 1.836    |
| $d_{TV}$                      | 0.64     |

Druga kontaktna interakcija koju ćemo koristiti u ovom radu je DD-PCX[22]. Polazi od iste efektivne gustoće Lagrangiana i pretpostavki korištenih u slučaju DD-PC1 interakcije. Razlika je u tome da se pri prilagođavanju parametara DD-PCX interakcije koristi širi skup podataka, više vrsta, za razliku od DD-PC1 interakcije koja je, što se tiče konačnih jezgara, prilagođena isključivo na veliki skup energija vezanja. U slučaju DD-PCX interakcije, pri prilagođavanju se uzimaju u obzir: energije vezanja za 34 jezgre, radijusi naboja 26 i prosječni procijepi sparivanja za 15 jezgara s otvorenim ljuskama, kao i dvije opservable vezane za kolektivna pobuđenja, odnosno dipolnu polarizibilnost, i energiju pobuđenja izoskalarne gigantske monopolne rezonancije (ISGMR), oboje za <sup>208</sup>Pb[22].

Zadnju veličinu možemo definirati kao[22]:

$$E_{ISGMR} = \sqrt{m_1/m_{-1}}, \quad (7.19)$$

gdje je funkcija  $m_1$  energijski ponderiran a  $m_{-1}$  inverzno-energijski ponderiran moment distribucije prijelazne snage  $S$  izoskalarne monopolne pobuđenja[171]:

$$S(E) = \sum_n |\langle n | F | 0 \rangle|^2 \delta(E - E_n) \quad (7.20)$$

$$m_i = \int_0^\infty dE E^i S(E) = \sum_n E_n^i |\langle n | F | j \rangle|^2 \delta(E - E_n). \quad (7.21)$$

Dipolna polarizibilnost se može definirati kao[172]:

$$\alpha_D = \frac{8\pi e^2}{9} \int_0^\infty dE \frac{R(E1)}{E} = \frac{8\pi e^2}{9} m_{-1}(E1), \quad (7.22)$$

gdje je  $R(E;E1)$  snaga za električne dipolne (E1) prijelaze.

Polarizibilnost  $^{208}\text{Pb}$  je nedavno izmjerena pomoću neelastičnog raspršenja polariziranih protona s vrlo malim upadnim kutovima (engl. extremely forward angles) [173]. Nakon što se uklone tzv. kvazideuteronski efekti, dobije se polarizibilnost od  $19.6 \pm 0.6 \text{ fm}^3$ [172]. Različite eksperimentalne studije daju različite vrijednosti energije pobuđenja ISGMR u  $^{208}\text{Pb}$ . Mjerenja pomoću neelastičnog raspršenja alfa čestica na iznimno malim upadnim kutovima daju  $(13.5 \pm 0.1) \text{ MeV}$ [174]; prijašnji eksperiment na Texas A&M sveučilištu je dao  $(14.18 \pm 0.11) \text{ MeV}$ [175]. U prilagođavanju DD-PCX interakcije, za polarizibilnost  $^{208}\text{Pb}$  uzeto je  $19.6 (1 \pm 0.5\%) \text{ fm}^3$ , a za energiju ISGMR  $13.5 (1 \pm 1\%) \text{ MeV}$ . Procijepi sparivanja su izračunati pomoću tzv. formule pet točaka (engl. five-point formula)[176]. Za greške je uzeta jedna vrijednost za svaku vrstu podatka, i to redom za energije vezanja  $1.0 \text{ MeV}$ , za radijuse naboja  $0.02 \text{ fm}$  i za procijepe sparivanja  $0.05 \text{ MeV}$ [22].

Uz postupak prilagođavanja slobodnih parametara empirijskim i semi-empirijskim podacima, pri konstrukciji DD-PCX interakcije je provedena i analiza kovarijance[22]. Takva analiza omogućava da se odrede ne samo optimalne vrijednosti slobodnih parametara modela, nego i statističke nepouzdanosti istih, kao i korelacije između različitih veličina u modelu[177, 178].

Ovakva analiza počinje od matrice zakrivljenosti. Ako imamo  $N$  parametara  $p_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , onda istu definiramo kao[22]:

$$\mathcal{M}_{ij} = \left. \partial_{p_i} \partial_{p_j} \chi^2 \right|_{\chi^2 = \chi_{min}^2}, \quad (7.23)$$

gdje se izraz izvrijednjava u minimumu  $\chi^2$ . Nepouzdanost danog parametra je onda[22]:

$$\sigma(p_i) = \sqrt{(\mathcal{M})^{-1}_{ii}}. \quad (7.24)$$

Za dane dvije opservable  $A$  i  $B$ , njihova kovarijanca je definirana kao:

$$cov(A,B) = cov(B,A) = \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \mathcal{M}^{-1}_{ij} \left( \frac{\partial A}{\partial p_j} \right), \quad (7.25)$$

gdje više ne označavamo eksplicitno da se izraz izvrednjava u minimumu  $\chi^2$ . Nepouzdanost pridružena opservabli  $A$  je onda[22]:

$$\sigma(A) = \sqrt{cov(A,A)}. \quad (7.26)$$

Rezultirajući parametri modela kao i njihove nepouzdanosti su dani u tablici 7.3.

Tablica 7.3: Parametri za efektivnu interakciju DD-PCX i pridružene nepouzdanosti[22].

|                               | DD-PCX        | $\sigma$    |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| $a_S$ (fm <sup>2</sup> )      | -10.979243836 | 0.010808546 |
| $b_S$ (fm <sup>2</sup> )      | -9.038250910  | 0.023987420 |
| $c_S$ (fm <sup>2</sup> )      | -5.313008820  | 0.047152813 |
| $d_S$                         | 1.379087070   | 0.003900800 |
| $a_V$ (fm <sup>2</sup> )      | 6.430144908   | 0.024888709 |
| $b_V$ (fm <sup>2</sup> )      | 8.870626019   | 0.019549460 |
| $d_V$                         | 0.655310525   | 0.003073028 |
| $b_{TV}$ (fm <sup>2</sup> )   | 2.963206854   | 0.092150525 |
| $d_{TV}$                      | 1.309801417   | 0.053360277 |
| $\delta_S$ (fm <sup>4</sup> ) | -0.878850922  | 0.004512226 |

Kao što se može vidjeti iz tablice, nepouzdanosti parametara su male, što upućuje na to da su parametri dobro određeni empirijskim podacima. Svojstva nuklearne materije pri gustoći zasićenja za DD-PCX i za DD-PC1 interakciju su dana u tablici 7.4.

Tablica 7.4: Svojstva beskonačne nuklearne materije pri gustoći zasićenja za interakcije DD-PC1 i DD-PCX[130].

|                                  | DD-PC1 | DD-PCX |
|----------------------------------|--------|--------|
| $\rho_{sat}$ (fm <sup>-3</sup> ) | 0.152  | 0.152  |
| $E/A$ (MeV)                      | -16.06 | 16.026 |
| $K_0$ (Mev)                      | 230.00 | 213.03 |
| $m^*$                            | 0.580  | 0.5598 |
| $a_4$ (MeV)                      | 33.0   | 31.12  |
| $L$ (MeV)                        | 70.00  | 46.32  |

# Poglavlje 8

## Korelacije sparivanja

Korelacije sparivanja daju važan doprinos opisu jezgara s otvorenim ljuskama[103], i prema tome moraju biti uključene u opis istih, i na razini osnovnog stanja i na razini pobuđenja. Isprva bi se moglo činiti idealno da se interakcija sparivanja (odnosno, čestično-čestični kanal) koja se koristi u modelu izvede iz istog EDF Lagrangiana kao i čestinsko-šupljinski kanal. Kako se, međutim, devedesetih godina prošlog stoljeća pokazalo[134] da sile nultog dosega (engl. zero-range) (kao često korišteni primjer možemo navesti nerelativističku Skyrme silu[179], ali i kontaktne interakcije) zahtijevaju uvođenje nefizikalne granične energije (engl. cut-off), dok sile s izmjenom mezona imaju loše ponašanje na velikim izmjenama impulsa i daju nerealističnu graničnu energiju[134], u kanalu sparivanja su se počele koristiti efektivne sile. Jedna od važnijih je Gogny sila[111, 180], koja je primjenjena u okviru RHB računa[181]. U ovom radu ćemo, međutim, koristiti efektivnu silu nultog dosega, ali implementiranu tako da ne zahtijeva uvođenje dodatnih nefizikalnih graničnih energija ili sličnih parametara[130].

Na razini srednjeg polja, u RHBCS i RHB modelima, koristimo separabilnu silu sparivanja[22, 182], čiji matrični element možemo pisati kao[182]:

$$\langle p, k' | V^{pp} | p, k \rangle = -G_p p(k) p(k') \quad (8.1)$$

$$\langle n, k' | V^{pp} | n, k \rangle = -G_n p(k) p(k'). \quad (8.2)$$

Za funkciju  $p$  pretpostavimo jednostavan gausijanski oblik[182]:

$$p(k) = e^{-a^2 k^2}, \quad (8.3)$$

gdje koeficijente  $a$  uzimamo iz D1S seta parametara Gogny interakcije kao  $a=0.644$  fm. Što se tiče koeficijenata  $G$ , jedna opcija u modeliranju je bila da  $G_p$  i  $G_n$  koristimo kao slobodne parametre, da bi dobili što bolje poklapanje s procijepima sparivanja u jezgrama koje promatramo.

Jednadžba za procijepe sparivanja (engl. pairing gaps) je[182]:

$$\Delta_{p/n} = - \int_0^\infty \frac{k'^2 dk'}{2\pi} \langle p/n, k' | V^{pp} | p/n, k \rangle \frac{\Delta(k')}{2E(k')}. \quad (8.4)$$

Dobivene procijepe možemo usporediti sa semi-empirijskim rezultatima dobivenim iz formule pet točaka[176]:

$$\Delta_q^{(5)} = - \frac{(-1)^{N_0}}{8} [E(N_0 - 2) - 3E(N_0 - 1) + 5E(N_0) - 3E(N_0 + 1) + E(N_0 + 2)], \quad (8.5)$$

gdje  $q$  stoji za  $p$  ili  $n$ ,  $N_0$  je respektivno broj protona ili neutrona, a  $E$  su energije, koje u našem slučaju dobivamo iz RHBCS/RHB računa. Dobiveni faktori  $G$  za neke jezgre razmatrane u ovom radu, do  $^{128}\text{Xe}$ , dani su u tablicama 8.1 i 8.2.

Tablica 8.1: Parametri separabilne interakcije sparivanja  $G_p$  i  $G_n$ , dobiveni prilagođavanjem na procijepe sparivanja dobivene iz RHB računa sa DD-ME2 interakcijom, za neke od jezgara od interesa za ovaj rad, zaključno sa  $^{128}\text{Xe}$ .

| jezgra            | $G_p$ (MeV) | $G_n$ (MeV) |
|-------------------|-------------|-------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | -461.740    | -525.790    |
| $^{48}\text{Ti}$  | -354.970    | -415.200    |
| $^{76}\text{Ge}$  | -357.550    | -344.800    |
| $^{76}\text{Se}$  | -403.000    | -348.500    |
| $^{82}\text{Se}$  | -403.100    | -348.330    |
| $^{82}\text{Kr}$  | -373.140    | -379.570    |
| $^{92}\text{Zr}$  | -272.800    | -414.100    |
| $^{92}\text{Mo}$  | -302.090    | -375.390    |
| $^{100}\text{Mo}$ | -305.480    | -391.150    |
| $^{100}\text{Ru}$ | -300.950    | -364.150    |
| $^{116}\text{Cd}$ | -338.850    | -421.360    |
| $^{116}\text{Sn}$ | -317.170    | -534.250    |
| $^{128}\text{Te}$ | -315.400    | -391.200    |
| $^{128}\text{Xe}$ | -297.140    | -375.460    |

Međutim, pokazuje se da ovo nije najbolji pristup. Jezgre teže od  $^{128}\text{Xe}$  daju izrazito visoke

Tablica 8.2: Parametri separabilne interakcije sparivanja  $G_p$  i  $G_n$ , dobiveni prilagođavanjem na procijepe sparivanja dobivene iz RHB računa za DD-PC1 i DD-PCX interakcije, za neke od jezgara od interesa za ovaj rad, zaključno sa  $^{128}\text{Xe}$ .

| jezgra            | $G_p$ (DD-PC1) (MeV) | $G_n$ (DD-PC1) (MeV) | $G_p$ (DD-PCX) (MeV) | $G_n$ (DD-PCX) (MeV) |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | -441.700             | -522.740             | -452.830             | -520.520             |
| $^{48}\text{Ti}$  | -346.600             | -409.350             | -353.680             | -413.150             |
| $^{76}\text{Ge}$  | -348.270             | -329.110             | -352.190             | -334.880             |
| $^{76}\text{Se}$  | -389.090             | -334.310             | -395.040             | -340.740             |
| $^{82}\text{Se}$  | -396.250             | -321.050             | -404.650             | -313.930             |
| $^{82}\text{Kr}$  | -364.880             | -366.100             | -371.580             | -363.220             |
| $^{92}\text{Zr}$  | -237.510             | -396.810             | -279.950             | -405.680             |
| $^{92}\text{Mo}$  | -280.700             | -365.070             | -309.460             | -374.290             |
| $^{100}\text{Mo}$ | -285.480             | -377.980             | -300.000             | -389.850             |
| $^{100}\text{Ru}$ | -285.580             | -356.640             | -302.620             | -367.210             |
| $^{116}\text{Cd}$ | -318.100             | -413.120             | -320.040             | -426.450             |
| $^{116}\text{Sn}$ | -302.150             | -520.020             | -301.890             | -548.550             |
| $^{128}\text{Te}$ | -303.800             | -379.920             | -308.270             | -386.960             |
| $^{128}\text{Xe}$ | -285.450             | -363.450             | -291.790             | -361.550             |

vrijednosti za  $G$ , koji onda dovode do nefizikalnih rezultata za prijelazne snage i nefizikalnog ponašanja ovisnosti nuklearnih matričnih elemenata za dvostruke beta raspade o sazi izoskalar-nog sparivanja  $V_{0pp}$ .

Umjesto toga, korišten je jedan set parametara  $G_p$  i  $G_n$  za sve jezgre, odnosno  $G_p = G_n = 728 \text{ MeV fm}^2$  za DD-ME2 i DD-PC1 interakcije[182] i  $G_n = -800.663126037 \pm 6.27905435 \text{ MeV fm}^3$ ,  $G_p = -773.776776597 \pm 4.00304491$  za DD-PCX račun[22], za sve procese. Prvi set parametara je dobiven usporedbom s čestično-čestičnim dijelom Gogny sile[180] sa setom parametara D1S[183]. Drugi je direktni rezultat prilagodbe parametara DD-PCX modela[22].

U opisu pobuđenih stanja, PN-RQRPA rezidualna interakcija sadrži i izovektorske ( $T = 1$ ) i izoskalarne ( $T = 0$ ) kanale sparivanja[14]. U  $T = 1$  kanalu, model ima istu interakciju sparivanja kao i u osnovnom stanju. Izoskalarni kanal se dijeli prema ukupnom spinu parova koji sudjeluju u čestično-čestičnom paru. Za  $T = 0$  i  $S = 1$ , interakcija se sastoji od kratkodosežnog odbojnog Gausijanskog oblika i dugodosežnog privlačnog Gausijana[14]:

$$V^{pn} = V_{0pp} \sum_{j=1}^2 G_j * g_j e^{-\frac{r^2}{\mu_j}} \Pi_{T=0S=1}, \quad (8.6)$$

gdje su dosezi odabrani kao  $\mu_1 = 0.7 \text{ fm}$ ,  $\mu_2 = 1.2 \text{ fm}$ , relativne snage su postavljene na  $g_1 = 1$  i  $g_2 = -2$ , i gdje su snage  $G_j$  iste kao za izovektorsko sparivanje[14]. Faktor  $V_{0pp}$  ćemo zvati snagom



izoskalaranog sparivanja (u odnosu na izovektorsko sparivanje) .Kako ovaj kanal sparivanja nije uključen u račune osnovnog stanja (sparivanje u osnovnom stanju, definirano gore, je isključivo izovektorsko), njegova ukupna snaga se može promatrati kao slobodni parametar modela. Za  $S=0$ , da bi se model pojednostavnio, uzima se da izoskalaranog sparivanje iščezava.

## Poglavlje 9

# Faktori faznog prostora

Izraz za vremena poluživota nuklida koji se raspadaju putem dvostrukog beta raspada je konvencionalno faktoriziran u dva glavna dijela, matrični element, koji predstavlja doprinos teorije nuklearne strukture, i faktor faznog prostora[56]. Konkretno, za dvoneutrinske dvostruke beta raspade vrijedi[33]:

$$\left[ T_{\frac{1}{2}}^{2\nu} \right]^{-1} = G_{2\nu} |M_{2\nu}|^2, \quad (9.1)$$

a za bezneutrinske dvostruke beta raspade[33]:

$$\left[ T_{\frac{1}{2}}^{0\nu} \right]^{-1} = G_{0\nu} |M_{0\nu}|^2 |f(m_i, U_{ei})|^2, \quad (9.2)$$

gdje su  $G_{2\nu/0\nu}$  faktori faznog prostora,  $M_{2\nu/0\nu}$  nuklearni matrični elementi, a u slučaju bezneutrinskih raspada faktor  $f$  predstavlja utjecaj fizike izvan standardnog modela, i njenu ovisnost o neutrinjskim masama  $m_i$  i elementima tzv. matrice miješanja  $U_{ei}$ [17].

U ovome radu, faktore faznog prostora (engl. phase space factors, PSF) implementiramo na moderan način[184, 42, 33], koji polazi od relativističke jednadžbe gibanja za elektrone i koji uzima u obzir detaljnu raspodjelu naboja i efekte zasjenjenja na elektronske valne funkcije. Račun faktora faznog prostora je drugačiji za slučajeve  $\beta^+\beta^+$  i  $\beta^-\beta^-$  raspada; međutim svi nuklidi koje razmatramo raspadaju se putem  $\beta^-\beta^-$  raspada. Iz tog razloga ćemo uzeti formule za slučaj dvostrukog beta-minus raspada.

Račun faznih faktora za dvostruke beta raspade polazi od valne funkcije slobodnog elektrona ili pozitrona, koju ćemo raspisati kao[42]:

$$\Psi_{\epsilon\kappa\mu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(\epsilon, r)\chi_{\kappa}^{\mu} \\ if_{\kappa}(\epsilon, r)\chi_{-\kappa}^{\mu} \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

u slučaju  $\beta^{-}$  raspada i[33]:

$$\Psi_{\epsilon\kappa\mu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(\epsilon, r)\chi_{-\kappa}^{-\mu} \\ if_{\kappa}(\epsilon, r)\chi_{\kappa}^{-\mu} \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

u slučaju  $\beta^{+}$  raspada, gdje su veličine  $\chi$  kuglini spinori, a  $g_{\kappa}(\epsilon, r)$  i  $f_{\kappa}(\epsilon, r)$  su radijalne valne funkcije s energijom  $\epsilon$  i relativističkim kvantnim brojem  $\kappa = (l - j)(2j + 1)$ [42]. S danim centralnim potencijalom  $V(r)$ , radijalne funkcije zadovoljavaju Diracove jednačbe[33]

$$\frac{d}{dr}g_{\kappa}(\epsilon, r) = -\frac{\kappa}{r}g_{\kappa}(\epsilon, r) + \frac{\epsilon - V + m_e c^2}{c\hbar}f_{\kappa}(\epsilon, r) \quad (9.5)$$

$$\frac{d}{dr}f_{\kappa}(\epsilon, r) = \frac{\kappa}{r}f_{\kappa}(\epsilon, r) - \frac{\epsilon - V - m_e c^2}{c\hbar}g_{\kappa}(\epsilon, r). \quad (9.6)$$

Rješenja jednačbe su normalizirana tako da se asimptotski ponašaju kao[42]:

$$\begin{pmatrix} g_{\kappa}(\epsilon, r) \\ f_{\kappa}(\epsilon, r) \end{pmatrix} \approx \frac{\hbar e^{-i\delta_{\kappa}}}{pr} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\epsilon + 2m_e c^2}{2\epsilon}} \sin(kr - l\frac{\pi}{2} - \eta \ln(2kr) + \delta_k) \\ \sqrt{\frac{\epsilon - 2m_e c^2}{2\epsilon}} \cos(kr - l\frac{\pi}{2} - \eta \ln(2kr) + \delta_k) \end{pmatrix}, \quad (9.7)$$

gdje je  $k = p/\hbar$  valni broj, i vrijedi  $\epsilon = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}$ . Sommerfeldov faktor se definira kao[42]:

$$\eta = \frac{Ze^2}{\hbar v}, \quad (9.8)$$

gdje je  $v$  brzina elektrona, a  $\delta_k$  je fazni pomak.

Za računanje elektronskih valnih funkcija koristimo RADIAL paket[185]. Radi se o računalom kodu za računanje valnih funkcija elektrona i elektronskih raspršenja, čija je glavna prednost da izbjegava akumulaciju grešaka skraćivanja (odnosno grešaka koje nastaju uslijed korištenja približnih izraza za matematičke funkcije, pogotovo zbog korištenja konačnog broja

članova razvoja funkcije u red) tako da koristi razvoj radijalnih funkcija u red koji je egzakatan za potencijale koji su konstantni, linearni, kvadratni ili Coulombski po dijelovima, koji se potom sumira do preciznosti koju zadaje korisnik, tako da se greške skraćivanja izbjegnu[185].

Veličina potrebna za određivanje elektronskih valnih funkcija je potencijal jezgre  $V(r)$ , odnosno veličina  $\mathcal{V}(r) = r \times V(r)$ [185]. Pri tome  $V$  može biti potencijal točkaste jezgre, ili sadržavati popravke koje nastaju zbog konačnih dimenzija jezgre. Za potrebe ovog rada, potencijal računamo iz gustoće naboja, koju dobijemo iz računa osnovnog stanja u okviru teorije srednjeg polja:

$$V(r) = \alpha\hbar c \int dr' \frac{\rho(r')}{|r-r'|}, \quad (9.9)$$

gdje integracija ide po cijelom prostoru. Efekt zasjenjenja (engl. screening), odnosno slabljenje potencijala jezgre zbog elektrostatskog utjecaja elektronskog omotača, može se uzeti u obzir na sljedeći način za dvostruki  $\beta^-$  raspad[184]:

$$rV(r)_{\beta-\beta^-} = (rV(r) + 2) \times \phi(r), \quad (9.10)$$

i analogno za dvostruki  $\beta^+$  raspad[184]:

$$rV(r)_{\beta+\beta^+} = (rV(r) + 2) \times \phi(r), \quad (9.11)$$

gdje je funkcija  $\phi$  funkcija zasjenjenja, koja se može dobiti kao rješenje Thomas-Fermijeve jednadžbe[184]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = \frac{\phi^{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{x}}. \quad (9.12)$$

Pri tome, vrijedi  $x = r/b$ , Thomas-Fermijev radijus je  $b \approx 0.8853 a_0 Z^{-1/3}$ , gdje je  $a_0$  Bohrov radijus. Svi izrazi od jednadžbe (9.10) do sada su u atomskim jedinicama[185], gdje je  $\alpha\hbar c = 1$  i energije se mjere u Hartreejevim energijama, a udaljenosti u Bohrovim radijusima.

Da bi riješili Thomas-Fermijevu jednadžbu, barem približno, pretpostavimo rješenje tipa[186]:

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-a_i r}, \quad (9.13)$$

koje je univerzalno za sve atome. Tako dobijemo tzv. Thomas-Fermi-Molièreovu funkciju, definiranu parametrima[186]:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.10; A_2 = 0.55; A_3 = 0.35 \\ a_1 &= 6.0/b; a_2 = 1.2/b; a_3 = 0.3/b. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Slijedi diferencijalna stopa raspada za dvoneutrinski raspad iz  $0^+$  u  $0^+$  stanje[42]:

$$dW_{2\nu} = (a^{(0)} + a^{(1)} \cos\theta_{12}) w_{2\nu} d\omega_1 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d(\cos\theta_{12}), \quad (9.15)$$

gdje  $a^{(0)}$  i  $a^{(1)}$  sadrže doprinose svih međustanja, a funkcija  $w_{2\nu}$  je[184]:

$$w_{2\nu} = \frac{g_A^4 (G \cos\theta_c)^4}{64\pi^7 \hbar} \omega_1^2 \omega_2^2 (p_1 c)(p_2 c) \varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (9.16)$$

Ako definiramo veličine[42]:

$$\langle K_N \rangle = \frac{1}{\varepsilon_1 + \omega_1 + \langle E_N \rangle - E_I} + \frac{1}{\varepsilon_2 + \omega_2 + \langle E_N \rangle - E_I} \quad (9.17)$$

$$\langle L_N \rangle = \frac{1}{\varepsilon_1 + \omega_2 + \langle E_N \rangle - E_I} + \frac{1}{\varepsilon_2 + \omega_1 + \langle E_N \rangle - E_I}, \quad (9.18)$$

gdje je  $\langle E_N \rangle - E_I$  "prosječna" energija mjerena od osnovnog stanja početne jezgre (što znači da od sada radimo u aproksimaciji prosječne energije), možemo pisati (zanimaju nas samo veličine  $a^{(0)}$ ):

$$a^{(0)} = \frac{1}{4} f_{11}^{(0)} |\mathcal{M}_{2\nu}|^2 \tilde{A}^2 \left[ (\langle K_N \rangle + \langle L_N \rangle)^2 - \frac{1}{3} (\langle K_N \rangle - \langle L_N \rangle)^2 \right], \quad (9.19)$$

gdje je  $\tilde{A}$  energija pobuđenja s obzirom na prosjek osnovnih stanja početne i konačne jezgre:

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}(Q_{\beta\beta} + 2m_e c^2) + \langle E_N \rangle - E_I. \quad (9.20)$$

Elektronski fazni faktor  $f_{11}^{(0)}$  je definiran kao umnožak valnih funkcija[184]:

$$f_{11}^{(0)} = |f_{11}|^2 + |f^{-1-1}|^2 + |f^{-1}_1|^2 + |f_1^{-1}|^2, \quad (9.21)$$

gdje su pomoćne funkcije  $f_{11}$  itd. definirane kao[42]:

$$f_{11} = f_1(\epsilon_1)f_1(\epsilon_2) \quad (9.22)$$

$$f^{-1-1} = g_{-1}(\epsilon_1)g_{-1}(\epsilon_2) \quad (9.23)$$

$$f^{-1}_1 = g_{1-}(\epsilon_1)f_1(\epsilon_2) \quad (9.24)$$

$$f_1^{-1} = f_1(\epsilon_1)g_{-1}(\epsilon_2). \quad (9.25)$$

Vrijednosti  $f$  i  $g$  funkcija aproksimiramo njihovom vrijednošću na površini jezgre[42]:

$$g_{-1}(\epsilon) \approx g_{-1}(\epsilon, R) \quad (9.26)$$

$$f_1(\epsilon) \approx f_1(\epsilon, R). \quad (9.27)$$

Naposlijetku, izraz za fazni faktor je eksplicitno[42]:

$$F_{2\nu}^{(0)} = \frac{2\tilde{A}^2}{3\ln 2} \int_{m_e c^2}^{Q_{\beta\beta} + m_e c^2} \int_{m_e c^2}^{Q_{\beta\beta} + m_e c^2 - \epsilon_1} \int_0^{Q_{\beta\beta} - \epsilon_1 - \epsilon_2} d\omega_1 d\epsilon_2 d\epsilon_1 w_{2\nu} f_{11}^{(0)} \left( \langle K_N \rangle^2 + \langle I_N \rangle^2 + \langle K_N \rangle \langle I_N \rangle \right). \quad (9.28)$$

Uobičajenije je, međutim, koristiti fazni faktor  $G$ , definiran kao[42]:

$$G_{2\nu}^{(0)} = \frac{F_{2\nu}^{(0)}}{g_A^4(m_e c^2)^2}. \quad (9.29)$$

Postoji i koristan aproksimativni izraz za fazne faktore. Naime, ako skaliramo matrične

elemente i veličine koje se pojavljuju u integralu pomoću kojeg računamo PSF s elektronskom masom, možemo pisati[187]:

$$G^{2\nu}(0) = g_0 \int_1^{T+1} d\varepsilon_1 F_0(Z_f, \varepsilon_1) p_1 \varepsilon_1 I^{(0)}(T, \varepsilon_1), \quad (9.30)$$

gdje je pomoćni integral  $I$ [187]:

$$I^{(0)}(T, \varepsilon_1) = \int_1^{T+2-\varepsilon_1} d\varepsilon_2 F_0(Z_f, \varepsilon_2) p_2 \varepsilon_2 (T+2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)^5. \quad (9.31)$$

Pri tome,  $T$  je  $Q$  vrijednost skalirana s elektronskom masom[187], a  $g_0 = 3.78 \times 10^{24} g_A^4 \text{ yr}^{-1}$ [187].

Relativistička Fermi funkcija predstavlja kvadrat omjera Diracovih valnih funkcija s-elektrona na nuklearnoj površini sa i bez Coulombovog potencijala. Ako ga se zamjeni tzv. Primakoff-Rosen aproksimacijom[187]

$$F_0(Z_f, \varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{p} F_0^{PR}(Z_f) = \frac{\varepsilon}{p} \frac{2\pi\alpha Z_f}{1 - e^{-2\pi\alpha Z_f}}, \quad (9.32)$$

gornji integral se može riješiti analitički, čime dobivamo[187]:

$$G^{2\nu}(0) \approx \frac{1}{56} [F_0^{PR}(Z_f)]^2 T^7 \left( 1 + \frac{1}{2}T + \frac{1}{9}T^2 + \frac{1}{90}T^3 + \frac{1}{1980}T^4 \right). \quad (9.33)$$

Operativno, račun faznih faktora možemo implementirati na dva načina. Prvi je pojednostavljeni način iz jednadžbe (9.33). Budući da vrijednosti faznog faktora izrazito ovise o  $Q$  vrijednostima, iste su preuzete iz Ref. [188]. Nuklearni radijus  $R_A$  se može računati sistematski kao  $R_A \approx 1.2 \text{ fm} \times A^{1/3}$ , ali u ovom računu uzimamo radijus iz računa osnovnog stanja. Dobiveni fazni faktori su dani u tablici 9.1.

Drugi način je da koristimo jednadžbu (9.28). Međutim, ispostavlja se da koristeći tu jednadžbu sa valnim funkcijama i  $Q$  vrijednostima iz našeg modela dobivamo fazne faktore koji značajno odstupaju od prihvaćenih vrijednosti iz, recimo, Ref. [74] ili [188]. Zbog toga ćemo u računima koristiti prihvaćene vrijednosti faznih faktora iz nedavne Ref. [74]. Preostaje da damo pregled načina na koji smo računalno implementirali model koji je opisan u prijašnjim poglavljima.

Tablica 9.1: Faktori faznog prostora za  $2\nu\beta\beta$  raspad dobiveni sa pojednostavljenom formulom, uspoređeni s rezultatima drugih računa. Sve vrijednosti PSF su u jedinicama  $10^{-21}\text{yr}^{-1}$ ; Q-vrijednosti su u jedinicama elektronske mase. Primjetimo da su naši rezultati dani za Q-vrijednosti koje koristi Suhonen[188], ali za  $g=1.0$ , što čini naše rezultate manjima.

|                   | Q-vrijednost | PN-RQRPA  | Suhonen<br>[188] | Stoica<br>[189] |
|-------------------|--------------|-----------|------------------|-----------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | 8.36         | 14186.5   | 16200            | 15500           |
| $^{76}\text{Ge}$  | 3.99         | 31.622    | 52.6             | 43.9            |
| $^{82}\text{Se}$  | 5.86         | 942.808   | 1740             | 1480            |
| $^{96}\text{Zr}$  | 6.56         | 3141.53   | 7280             | 5940            |
| $^{100}\text{Mo}$ | 5.94         | 1379.76   | 3599             | 2910            |
| $^{116}\text{Cd}$ | 5.48         | 813.402   | 2990             | 2580            |
| $^{128}\text{Te}$ | 1.70         | 0.0568231 | 0.344            | 0.253           |
| $^{130}\text{Te}$ | 1.70         | 361.174   | 1940             | 1460            |
| $^{136}\text{Xe}$ | 4.58         | 315.044   | 1980             | 1370            |
| $^{150}\text{Nd}$ | 6.59         | 5868.84   | 48500            | 34200           |



# Poglavlje 10

## Računalna implementacija modela

Da bi izračunali matrice elemente i druge veličine vezane za dvo- i bezneutrinske dvostruke beta raspade, koristimo dva računalna koda, DIRHBS kod iz DIRHB paketa[23] za relativistički Hartree-Bogoliubov ili Hartree-BCS račun i kod za PN-RQRPA.

RHB jednadžbe za sferične jezgre u koordinatnom prostoru se svode na skup relativno jednostavnih integro-diferencijalnih jednadžbi u radijalnoj varijabli[23]. Međutim, da bi se omogućio tretman deformiranih jezgara (što nije direktno važno za sadašnji rad budući da pretpostavljamo sferne simetriju u jezgrama), DIRHBS kod se bazira na metodi koju je predložio Vautherin[179], gdje je koordinatna reprezentacija kombinirana s reprezentacijom u konfiguracijskom prostoru. RHB jednadžbe se rješavaju u konfiguracijskom prostoru asociranom s valnim funkcijama harmoničkog oscilatora prikladne simetrije, dok se gustoće računaju u koordinatnom prostoru[23].

U konfiguracijskom prostoru, RHB jednadžbe (vidi jednadžbu (4.29)) se mogu pisati kao[23]:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} - \lambda & \mathcal{B} & \Delta_{ff} & 0 \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{C} - \lambda & 0 & 0 \\ \Delta_{ff} & 0 & -\mathcal{A} + \lambda & -\mathcal{B} \\ 0 & 0 & -\mathcal{B}^T & -\mathcal{C} + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(U)} \\ g^{(U)} \\ f^{(V)} \\ g^{(V)} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f^{(U)} \\ g^{(U)} \\ f^{(V)} \\ g^{(V)} \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$

U slučaju sferne simetrije, sve gustoće i mezonska polja ovise samo o radijalnoj koordinati, a nukleonske Diracove spinore možemo pisati kao:

$$\Psi_i(\mathbf{r}, s, t) = \begin{pmatrix} f_i(r) \Phi_{l_i j_i m_i}(\theta, \phi, s) \\ i g_i(r) \Phi_{\tilde{l}_i \tilde{j}_i \tilde{m}_i}(\theta, \phi, s) \end{pmatrix} \chi_{t_i}(t), \quad (10.2)$$

i označavamo ih sa četiri kvantna broja: angularnim momentom  $j_i$ , projekcijom angularnog momenta  $m_i$ , paritetom  $\pi_i$  i projekcijom izospina  $t_i$  ( $\pm\frac{1}{2}$  za neutrone odnosno protone). Ostali kvantni brojevi, pogotovo orbitalni angularni moment velike ( $l_i$ ) i male ( $\tilde{l}_i$ ) komponente, mogu se dobiti iz prije navedenih brojeva[23]:

$$l_i = j_i \pm \frac{1}{2}, \tilde{l}_i = j_i \mp \frac{1}{2}, \pi_i = (-1)^{j_i \pm \frac{1}{2}}, \kappa = \pm(j_i + \frac{1}{2}). \quad (10.3)$$

Ovisnost o raznim kvantnim brojevima je faktorizirana u gornjem izrazu za Diracove spinore. Funkcija  $\chi_i$  je izospinska funkcija, a  $\Phi_{l_j m}$  je dvodimenzionalni spinor s kvantnim brojevima angularnog momenta  $l_j m$ , koji se dalje može raspisati kao[23]:

$$\Phi_{l_j m}(\theta, \phi, s) = [\chi_{1/2}(s) \otimes Y_l(\theta, \phi)]_{l_j m}, \quad (10.4)$$

gdje je  $\chi_{1/2}$  spinska funkcija za ukupni spin 1/2, a  $Y$  je kuglina funkcija. Budući da je ovisnost o svim varijablama osim  $r$  trivijalna, Diracova jednačba za nukleonske spinore se svodi na[23]:

$$(M^*(r) + V(r))f_i(r) + \left(\partial_r - \frac{\kappa_i - 1}{r}\right)g_i(r) = \epsilon_i f_i(r) \quad (10.5)$$

$$-\left(\partial_r + \frac{\kappa_i - 1}{r}\right)f_i(r) - (M^*(r) - V(r))g_i(r) = \epsilon_i g_i(r), \quad (10.6)$$

gdje je  $M^*$  Diracova masa, a vektorski potencijal  $V$  je definiran kao[23]:

$$V(r) = g_\omega \omega + g_\rho \tau_3 \rho + eA_0 + \Sigma_0^R, \quad (10.7)$$

a mezonska polja i druge veličine koje se pojavljuju u izrazu, pogotovo energiju preraspodjele, definirali smo ranije u poglavlju 4.

Problem možemo raspisati u bazi valnih funkcija sfernog harmoničkog oscilatora s frekvencijom  $\hbar\omega_0$  i pridruženom duljinom oscilatora  $b = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ [23]:

$$f_i(r) = \sum_{n=0}^{n_{max}} f_n^{(i)} R_{nl_i}(r, b_0) \quad (10.8)$$

$$g_i(r) = \sum_{\tilde{n}=0}^{\tilde{n}_{max}} g_{\tilde{n}}^{(i)} R_{\tilde{n}\tilde{l}_i}(r, b_0), \quad (10.9)$$

gdje valne funkcije oscilatora možemo zapisati preko varijable  $\xi = r/b_0$ :

$$R_{nlr}(r, b_0) = b^{-\frac{2}{3}} R_{nlr}(\xi) = b^{-\frac{2}{3}} \mathcal{N}_{nl} \xi^l L_n^{l+\frac{1}{2}}(\xi^2) e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (10.10)$$

gdje je  $n$  broj čvorova u valnoj funkciji, dok su funkcije  $L$  pridruženi Laguerreovi polinomi, a normalizacijski faktor[23]:

$$\mathcal{N}_{nl} = \sqrt{\frac{2n!}{(l+n+\frac{1}{2})!}}. \quad (10.11)$$

Granice sume su određene kvantnim brojevima najviše ljuske:

$$N_{max} = 2n_{max} + l_{max}, \tilde{N}_{max} = N_{max} + 1 = 2\tilde{n}_{max} + l_{max}, \quad (10.12)$$

gdje je  $\tilde{N}_{max}$  definiran na gornji način da bi se izbjegli spuriozni doprinosi RHB rješenju[23].

Ako općenito označimo stanja u razvoju velike komponente  $\langle \alpha | = \langle nl jm |$  i analogno stanja u razvoju manje komponente  $\langle \tilde{\alpha} | = \langle \tilde{n} \tilde{l} jm |$ , matrične elemente Hamiltonijana možemo pisati kao[23]:

$$\mathcal{A}_{\alpha\alpha'} = \int_0^\infty d\xi R_{nl}(x) R_{n'l'}(\xi) [M^*(b_0\xi) + V(b_0\xi)] \quad (10.13)$$

$$C_{\alpha\alpha'} = \int_0^\infty d\xi R_{nl}(x) R_{\tilde{n}'\tilde{l}'}(\xi) [M^*(b_0\xi) + V(b_0\xi)] \quad (10.14)$$

$$B_{\alpha\alpha'} = \mathcal{N}_{\tilde{n}'\tilde{l}'} \mathcal{N}_{nl} \int_0^\infty d\xi e^{-\xi^2} \xi^{2l} L_n^{l+\frac{1}{2}} L_{n'}^{l'+\frac{1}{2}} (2n' + l + 1 + \kappa - \xi^2). \quad (10.15)$$

Coulombov potencijal je [23]:

$$V_C(\mathbf{r}) = e^2 \int d^3 r' \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (10.16)$$

a logaritamski singularitet na  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  možemo eliminirati preko jednakosti[179]:

$$\nabla_{\mathbf{r}'}^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (10.17)$$

pa integral onda postaje:

$$V_C(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{2} \int d^3 r' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \rho_p(\mathbf{r}'). \quad (10.18)$$

Kutna ovisnost je trivijalna; od radijalne ovisnosti ostaje integral koji se mora riješiti numerički[23]:

$$V_C(r) = e^2 \int_0^\infty dr' r'^2 \left( 3r + \frac{r'^2}{r} \right) \frac{d^2 \rho_p(r')}{dr'^2}. \quad (10.19)$$

Označavajući općenito mezonska polja kao  $\phi = \sigma, \omega, \rho$ , Helmholtzove jednačbe za ta polja u slučaju sferne simetrije glase:

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m_\phi^2 \right) \phi(r) = s_\phi(r). \quad (10.20)$$

Rješenja slijede iz razvoja mezonskih polja i vezanja u bazi stanja harmoničkog oscilatora[23]:

$$\phi(r) = \sum_{n=0}^{n_b} \phi_n R_{n0}(r, b_0) \quad (10.21)$$

$$s_\phi(r) = \sum_{n=0}^{n_b} s_{\phi,n} R_{n0}(r, b_0). \quad (10.22)$$

Maksimalni radijalni broj  $n_b$  kontrolira parametar  $N_B = 2n_b$ [23]. Ovo daje skup linearnih jednačbi:

$$\sum_{n'}^{n_b} \mathcal{H}_{nn'} \phi_{n'} = s_n^\phi, \quad (10.23)$$

gdje je matrica  $\mathcal{H}$  definirana kao[23]:

$$\mathcal{H}_{nn'} = -b_0^{-2} \delta_{nn'} \left( 2n + \frac{3}{2} \right) + b_0^{-2} \delta_{nn'+1} \sqrt{(n+1) \left( n + \frac{3}{2} \right)} + b_0^{-2} \delta_{nn'+1} \sqrt{(n'+1) \left( n' + \frac{3}{2} \right)}. \quad (10.24)$$

Ovaj sustav jednadžbi se potom može riješiti invertiranjem  $\mathcal{H}$  matrice.

Matrični elementi sparivanja se mogu faktorizirati u spinski i koordinatni dio[23]:

$$\langle \alpha \bar{\beta} | V^{PP} | \gamma \bar{\delta} \rangle = -G \langle \alpha \bar{\beta} | \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') P(\mathbf{r}) \frac{1 - P_\sigma}{2} | \gamma \bar{\delta} \rangle. \quad (10.25)$$

U osnovnom stanju trebamo samo valne funkcije dva nukleona koji sudjeluju u sparivanju, vezane u angularni moment  $J=0$ . Trebamo preći iz jj sheme vezanja u LS shemu; za to koristimo bazu definiranu na sljedeći način[23]:

$$|\alpha\rangle = |nlj\rangle = R_{nl}(r, b_0) \left[ \chi_{\frac{1}{2}} \otimes Y_l(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{jm} \quad (10.26)$$

$$|\bar{\alpha}\rangle = |\bar{n}\bar{l}\bar{j}\rangle = (-1)^{l+j-m} R_{nl}(r, b_0) \left[ \chi_{\frac{1}{2}} \otimes Y_l(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{j-m}. \quad (10.27)$$

Projekcija spina i uvjet  $J = 0$  ograničavaju spinske i orbitalne kvantne brojeve tako da je  $S = \lambda = 0$  i možemo pisati:

$$|\gamma \bar{\delta}\rangle^{J=S=0} = (-1)^{l_\delta} \frac{\hat{j}_\delta}{\hat{s}_\delta} \delta_{l_\gamma l_\delta} \delta_{j_\gamma j_\delta} R_{n_\gamma l_\gamma}(r_1, b_0) R_{n_\delta l_\delta}(r_2, b_0) |S=0\rangle |\lambda=0\rangle, \quad (10.28)$$

gdje vrijedi  $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$  itd., a valne funkcije nultog angularnog momenta i spina su[23]:

$$|S = 0\rangle = \left[ \chi_{\frac{1}{2}} \otimes \chi_{\frac{1}{2}} \right]_0 \quad (10.29)$$

$$|\lambda = 0\rangle = \left[ Y_{l_\gamma}(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes Y_{l_\delta}(\hat{\mathbf{r}}_2) \right]_0. \quad (10.30)$$

Prostorne valne funkcije ovise o laboratorijskim koordinatama, dok je interakcija sparivanja ovisna o koordinatama centra mase i relativnim koordinatama nukleona. Da bi prešli iz laboratorijskog referentnog sustava u sustav centra mase, koristi se tzv. Talmi-Moshinsky zagrada[190, 191]. Iste možemo pisati[23] na sljedeći način:

$$|n_\gamma l_\gamma n_\delta l_\delta; \lambda \mu\rangle = \sum_{NLnl} M_{n_\gamma l_\gamma n_\delta l_\delta}^{NLnl} |NLnl; \lambda \mu\rangle, \quad (10.31)$$

gdje su:

$$|\lambda \mu\rangle = \left[ Y_L(\hat{\mathbf{R}}) \otimes Y_l(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{\lambda \mu} \quad (10.32)$$

$$|NLnl\rangle = R_{NL}(R, b_0) R_{nl}(r, b_0). \quad (10.33)$$

Veličine  $M_{n_\gamma l_\gamma n_\delta l_\delta}^{NLnl}$  su upravo Talmi-Moshinsky zagrade. Iz zakona očuvanja može se izvesti izborno pravilo[23]:

$$2N + L + 2n + l = 2n_\gamma + l_\gamma + 2n_\delta + l_\delta. \quad (10.34)$$

Matrični element sparivanja sadrži integrale oblika:

$$\int_{prost.} d^3 r R_{nl}(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) P(r), \quad (10.35)$$

gdje je  $P$  Fourierova transformacija funkcije  $p$  koja se pojavljuje u interakciji sparivanja:

$$P(r) = \frac{1}{(4\pi a^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}. \quad (10.36)$$

Ovaj integral iščezava za  $l \neq 0$ . Nadalje, budući da su i  $Y(\hat{\mathbf{R}})$  i  $Y(\hat{\mathbf{r}})$  vezani u  $\lambda = 0, l = 0$

znači da je  $l = 0$ . Uvrštavajući izbornu pravilo, dobijemo[23]:

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{J=0} = -G \sum_N W_{\alpha\beta}^{N*} W_{\gamma\delta}^N. \quad (10.37)$$

Kvantni brojevi  $l$  i  $j$  su isti za čestice u paru, i za jednočestične matrične elemente možemo pisati:

$$W_{\gamma\delta}^N = (-1)^l \frac{\hat{j}}{\hat{s}l} M_{n_\gamma l n_\delta l}^{N0n0} \int_0^\infty dr r^2 R_{n0}(r, b_0) P(r). \quad (10.38)$$

Radijalni integral se može svesti na[23]:

$$\int_0^\infty dr r^2 R_{n0}(r, b_0) P(r) = \frac{1}{b_0^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \frac{\mathcal{N}_{n0}}{(4\pi\alpha_0^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty d\eta \eta^{\frac{1}{2}} L_n^{\frac{1}{2}}(\eta) e^{-\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha_0}\right)}. \quad (10.39)$$

U gornjem izrazu,  $\alpha_0 = a/b_0$ , a  $\eta$  je pomoćna varijabla. Integral je moguće izvrjedniti analitički uz upotrebu generirajuće funkcije za pridružene Laguerreove polinome[192]:

$$\frac{e^{\frac{\eta z}{1-z}}}{(1-z)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{\frac{1}{2}}(\eta) z^n, \quad (10.40)$$

i na poslijetku dobijemo[23]:

$$W_{\gamma\delta}^N = (-1)^l \frac{\hat{j}}{\hat{s}l} M_{n_\gamma l n_\delta l}^{N0n0} \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}} 2^n n!} \left( \frac{1}{1+\alpha_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1-\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2} \right)^n, \quad (10.41)$$

gdje je:

$$n = n_\gamma + n_\delta + l - N. \quad (10.42)$$

S time, i uzimajući u obzir formule dane u uvodu za RHB i RHBCS modele, imamo eksplicitno navedene sve formule koje su potrebne za numeričko rješenje RHB ili RHBCS jednadžbi u slučaju sferne simetrije.

Glavni dio DIRHB koda[23] se sastoji od FORTRAN programa koji računa osnovno stanje jezgre otvorene ljuske pomoću iteracijskog postupka, gdje se redom:

- iz mezonskih i elektromagnetskih potencijala (interakcija s izmjenom mezona) ili valnih funkcija nukleona (interakcije s točkastim vezanjem) računa Diracov Hamiltonian,
- iz istih, računaju matrični elementi sparivanja,
- dijagonalizira rezultirajuća RHB matrica,
- računaju matrice gustoće i tenzor sparivanja u oscilatorskog bazi,
- matrice gustoće i tenzor sparivanja prebacuju u koordinatnu bazu,
- računaju vezanja ovisna o gustoći,
- računaju mezonska i elektromagnetska polja i potencijali.

Nakon što ovaj postupak da rezultate koji zadovoljavaju kriterij konvergencije, konstruira se kanonska baza i kao ispis program daje niz datoteka koje sadrže, među ostalim, svojstva kvazičestica i energije vezanja (od kojih je oduzeta korekcija za centar mase  $\frac{-p_{cm}^2}{2AM}$ ).

Zadnja veličina je pogotovo bitna jer iz nje računamo masu jezgre.

Račun u RHBCS slučaju slijedi gornje smjernice, s tom razlikom da je matrica koja se dijagonalizirana pojednostavljena, prema prikazu u poglavlju 4.

Što se tiče PN-RQRPA, počinjemo od matričnog zapisa PN-RQRPA jednadžbi[25]:

$$\begin{pmatrix} A^J & B^J \\ B^{*J} & A^{*J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\lambda J} \\ Y^{\lambda J} \end{pmatrix} = E_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\lambda J} \\ Y^{\lambda J} \end{pmatrix}, \quad (10.43)$$

za prijelaz iz osnovnog stanja u pobuđeno stanje multipolariteta  $J^\pi$ . U kanonskoj bazi matrice  $A$  i  $B$  postaju[25]:

$$\begin{aligned} A_{pn'p'n'}^J &= H_{pp'}^{11} \delta_{nn'} + H_{nn'}^{11} \delta_{pp'} \\ &+ (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) V_{pn'np'}^{ph;J} + (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) V_{pn'p'n'}^{pp;J} \end{aligned} \quad (10.44)$$

$$\begin{aligned} B_{pn'p'n'}^J &= (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) V_{pn'np'}^{ph;J} \\ &- (u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'}) V_{pn'p'n'}^{pp;J}. \end{aligned} \quad (10.45)$$



Kanonska baza ne dijagonalizira jednočestični Hamiltonijan tako da matrica  $A$  sadržava nedijagonalne elemente koje možemo pisati[14]:

$$H_{\alpha\alpha'}^{11} = (u_\alpha u_{\alpha'} - v_\alpha v_{\alpha'}) h_{\alpha\alpha'} + (u_\alpha v_{\alpha'} + v_\alpha u_{\alpha'}) \Delta_{\alpha\alpha'}, \quad (10.46)$$

gdje je  $h$  jednočestični Hamiltonijan srednjeg polja, a  $\Delta$  polje sparivanja. Jedna od glavnih veličina koje dobivamo iz PN-RQRPA računa su prijelazne snage iz osnovnog stanja parno-parne jezgre  $(N, Z)$  u pobuđena stanja bliskih neparno-neparnih jezgrara  $(N + 1, Z - 1)$  ili  $(N - 1, Z + 1)$ . Prijelazna snaga se može pisati kao[25]:

$$B_{\lambda J}^- = \left| \sum_{pn} \langle p || \mathcal{O}^J || n \rangle \left( X_{pn}^{\lambda J} u_p v_n + Y_{pn}^{\lambda J} v_p u_n \right) \right|^2 \quad (10.47)$$

$$B_{\lambda J}^+ = \left| \sum_{pn} (-)^{j_n + j_p + J} \langle n || \mathcal{O}^J || p \rangle \left( X_{pn}^{\lambda J} v_p u_n + Y_{pn}^{\lambda J} u_p v_n \right) \right|^2. \quad (10.48)$$

U slučaju kontaktne interakcije, matrični elementi ovisni o spinu i izospinu proizlaze iz izovektorsko-vektorskog i pseudovektorskog dijela rezidualne interakcije; u slučaju izmjene mezona isti proizlaze iz izmjene  $\rho$  mezona i piona[14]. Izovektorsko-vektorski dio rezidualne interakcije će sadržavati samo članove preraspodjele, tako da za prostornoliki dio možemo pisati[25]:

$$V_{abcd}^{TV;s} = - \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \psi_a^\dagger(\mathbf{r}_1) (\vec{\tau} \gamma_0 \gamma_i)^{(1)} \psi_c(\mathbf{r}_1) \alpha_{TV}(\rho) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \psi_c^\dagger(\mathbf{r}_2) (\vec{\tau} \gamma_0 \gamma^i)^{(2)} \psi_d(\mathbf{r}_2), \quad (10.49)$$

dok za vremenoliki dio vrijedi[25]:

$$V_{abcd}^{TV;t} = - \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \psi_a^\dagger(\mathbf{r}_1) \vec{\tau}^{(1)} \psi_c(\mathbf{r}_1) \alpha_{TV}(\rho) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \psi_c^\dagger(\mathbf{r}_2) \vec{\tau}^{(2)} \psi_d(\mathbf{r}_2). \quad (10.50)$$

Valne funkcije nukleona su Diracovi spinori:

$$\Psi_{am_a}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} f_a(r)\Omega_{\kappa_a m_a}(\Omega) \\ i g_a(r)\Omega_{\bar{\kappa}_a m_a}(\Omega) \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

s velikim i malim komponentama spinora  $f$  i  $g$  pomnoženima s kutnim dijelom, gdje je kvantni broj  $\kappa$  definiran kao  $\kappa = -(l-1)$  ako je  $j = l + 1/2$ , odnosno kao  $\kappa = l$  ako je  $j = l - 1/2$ . Angularni moment donje komponente spinora je  $\bar{l} = 2j - l$ [193].

Može se pokazati[25] da je prostornoliki dio izovektorsko-vektorskog matričnog elemena jednak:

$$\begin{aligned} V_{abcd}^{TV;s} = \frac{2}{2J+1} \int dr r^2 \alpha_{TV} [f_a(r)g_c(r) \langle (1/2l_a)j_a | |[\sigma_s Y_l]_J | | (1/2\bar{l}_c)j_c \rangle \\ - g_a(r)f_c(r) \langle (1/2\bar{l}_a)j_a | |[\sigma_s Y_l]_J | | (1/2l_c)j_c \rangle] \\ \times [f_b(r)g_d(r) \langle (1/2l_b)j_b | |[\sigma_s Y_l]_J | | (1/2\bar{l}_d)j_d \rangle \\ - g_b(r)f_d(r) \langle (1/2\bar{l}_b)j_b | |[\sigma_s Y_l]_J | | (1/2l_d)j_d \rangle], \end{aligned} \quad (10.52)$$

$$\begin{aligned} V_{abcd}^{TV;t} = \frac{2}{2J+1} \int dr r^2 \alpha_{TV} [f_a(r)f_c(r) + g_a(r)g_c(r)] [f_b(r)f_d(r) + g_b(r)g_d(r)] \\ \times \langle (1/2l_a)j_a | |Y_J | | (1/2\bar{l}_c)j_c \rangle \langle (1/2\bar{l}_b)j_b | |Y_J | | (1/2l_d)j_d \rangle. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Slično, pseudovektorski dio interakcije je dan s[25]:

$$V_{PV} = -\alpha_{PV} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) (\gamma_0 \gamma_5 \gamma_\mu \vec{\tau})^{(1)} (\gamma_0 \gamma_5 \gamma^\mu \vec{\tau})^{(2)}, \quad (10.54)$$

pri čemu je snaga pseudovektorske interakcije  $\alpha_{PV}$  slobodan parametar modela[25]. U ovom radu, kao i u drugim pn-QRPA računima zasnovanima na DD-ME2 i DD-PC1/-PCX interakcijama, njegova vrijednost je namještena tako da se reproducira eksperimentalna vrijednost Gamow-Teller rezonancije u  $^{208}\text{Pb}$ , 19.2 MeV[194]. Tako se za DD-PC1 dobije  $\alpha_{PV} = 0.734$ [25], za DD-PCX  $\alpha = 0.621$ [25], a za DD-ME2, gdje se može provesti ista prilagodba,  $\alpha_{PV} = 0.520$ [19].

Slično prijašnjim rezultatima za izovektorsko-vektorski dio rezidualne interakcije, matrični elementi za pseudovektorski dio su:

$$\begin{aligned}
 V_{abcd}^{PV;s} = \frac{2\alpha_{PV}}{2J+1} \int dr r^2 \alpha_{TV} [f_a(r)f_c(r) \langle (1/2l_a)j_a || [\sigma_s Y_l]_J || (1/2\bar{l}_c)j_c \rangle \\
 - g_a(r)g_c(r) \langle (1/2\bar{l}_a)j_a || [\sigma_s Y_l]_J || (1/2l_c)j_c \rangle] \\
 \times [f_b(r)f_d(r) \langle (1/2l_b)j_b || [\sigma_s Y_l]_J || (1/2\bar{l}_d)j_d \rangle \\
 - g_b(r)g_d(r) \langle (1/2\bar{l}_b)j_b || [\sigma_s Y_l]_J || (1/2l_d)j_d \rangle],
 \end{aligned} \tag{10.55}$$

za prostornoliki dio, i:

$$\begin{aligned}
 V_{abcd}^{PV;t} = \frac{2\alpha_{PV}}{2J+1} \int dr r^2 \alpha_{TV} [f_a(r)g_c(r) + g_a(r)f_c(r)] [f_b(r)g_d(r) + g_b(r)f_d(r)] \\
 \times \langle (1/2l_a)j_a || Y_J || (1/2\bar{l}_c)j_c \rangle \langle (1/2\bar{l}_b)j_b || Y_J || (1/2l_d)j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{10.56}$$

za vremenski dio.

Sparivanje je uvedeno kao i u prethodnim poglavljima. U koordinatnom prostoru, interakcija sparivanja postaje[25]:

$$V_{PP}(r, r') = -G_0 \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') G(r) G(r') \frac{1 - P^\sigma}{2}, \tag{10.57}$$

gdje su  $r, r'$  relativne koordinate a  $R, R'$  koordinate centra mase. Funkcije  $G$  su Fourierove transformacije prije uvedenih funkcija  $p(k)$ [25]:

$$G(r) = \frac{e^{-r^2/(2a^2)}}{(4\pi a^2)^{3/2}}. \tag{10.58}$$

Radimo u sustavu centra mase. Za transformaciju iz laboratorijskog sustava u sustav centra mase trebamo tzv. Talmi-Moshinsky koeficijente[191]:

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \lambda \mu\rangle = \sum_{NLnl} M_{n_1 l_1 n_2 l_2}^{NLnl} |NLnl; \lambda \mu\rangle. \tag{10.59}$$

Njihov opći oblik je poprilično složen [25], ali možemo dati jednostavniji oblik koji je relevantan za ovaj rad. Ako je transformacija između laboratorijskih koordinata i koordinata centra mase:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{d}{1+d}} & \sqrt{\frac{1}{1+d}} \\ \sqrt{\frac{d}{1+d}} & -\sqrt{\frac{d}{1+d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad (10.60)$$

onda možemo pisati[25] za  $T=1$  sparivanje u bazi sfernog harmoničkog oscilatora:

$$\begin{aligned} V_{abcd}^{pairJM} = G_0 \hat{J}_a \hat{J}_b \hat{J}_c \hat{J}_d (-)^{l_a+l_b+j_c+j_d} & \begin{Bmatrix} l_a & j_a & 1/2 \\ j_b & l_b & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_c & j_c & 1/2 \\ j_d & l_d & J \end{Bmatrix} \\ & \times \sum_{Nnm'} \tilde{I}_n \tilde{I}_{n'} M_{n_a l_a n_b l_b}^{N J n' 0} M_{n_c l_c n_d l_d}^{N J n 0}, \end{aligned} \quad (10.61)$$

gdje su radijalni integrali  $\tilde{I}$ :

$$\tilde{I}_n = \sqrt{4\pi} \int dr r^2 G(r) R_{nl}(r). \quad (10.62)$$

Generalizirano, ako dodamo mogućnost da je  $T=0$  imamo:

$$\begin{aligned} V_{abcd}^{pairJM} = -G_0 \hat{J}_a \hat{J}_b \hat{J}_c \hat{J}_d \sum_{LS} \sum_T \frac{1}{2} [1 + (-1)^{S'+T+1}] \tilde{f}(S, T) \hat{S}^2 \hat{T}^2 \\ \begin{Bmatrix} l_b & 1/2 & j_b \\ l_a & 1/2 & j_a \\ L & S & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_d & 1/2 & j_d \\ l_c & 1/2 & j_c \\ L & S & J \end{Bmatrix} \sum_{Nnm'} \tilde{I}_n \tilde{I}_{n'} M_{n_a l_a n_b l_b}^{N J n' 0} M_{n_c l_c n_d l_d}^{N J n 0}. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Izvod za izmjenu mezona je sličan prijašnjem izvodu; glavna razlika je da je rezidualna interakcija sljedeća[14]:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 (\beta \gamma^\mu)_1 (\beta \gamma_\mu)_2 g_\rho [\rho_v(\mathbf{r}_1)] g_\rho [\rho_v(\mathbf{r}_2)] D_\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 (\sigma_1 \Delta_1) (\sigma_2 \Delta_2) D_\pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (10.64)$$

gdje je  $D_{\rho/\pi}$  mezonski propagator:

$$D_{\rho/\pi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m_{\rho/\pi}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (10.65)$$

Za potrebe ovog rada, PN-RQRPA kod je izmjenjen tako da za svako pokretanje daje novu datoteku, `intermediate.out`, koja sadrži ispis stanja i pripadajućih energija za danu jezgru, i za svako stanje Gamow-Teller minus, odnosno plus, matrični element (ovisno o tome da li se radi o početnoj ili konačnoj jezgri), i listu koja za svako stanje prikazuje  $X$ ,  $Y$  amplitude,  $u$  i  $v$  faktore za protone i neutrone, i niz znakova (engl. string) koji jedinstveno identificira konfiguraciju o kojoj se radi. Iste datoteke se potom podijeli na niz datoteka prema energiji, koje se pohranjuju u zasebnoj mapi za svaku jezgru. Iste se onda koriste kao ulazni podaci za posebni C kod koji računa  $2\nu\beta\beta$  ili  $0\nu\beta\beta$  matrični element.

Ovime smo završili prikaz teorijskog okvira potrebnog za račune prikazane u ovom radu. U idućim poglavljima ćemo prikazati rezultate tih računa.

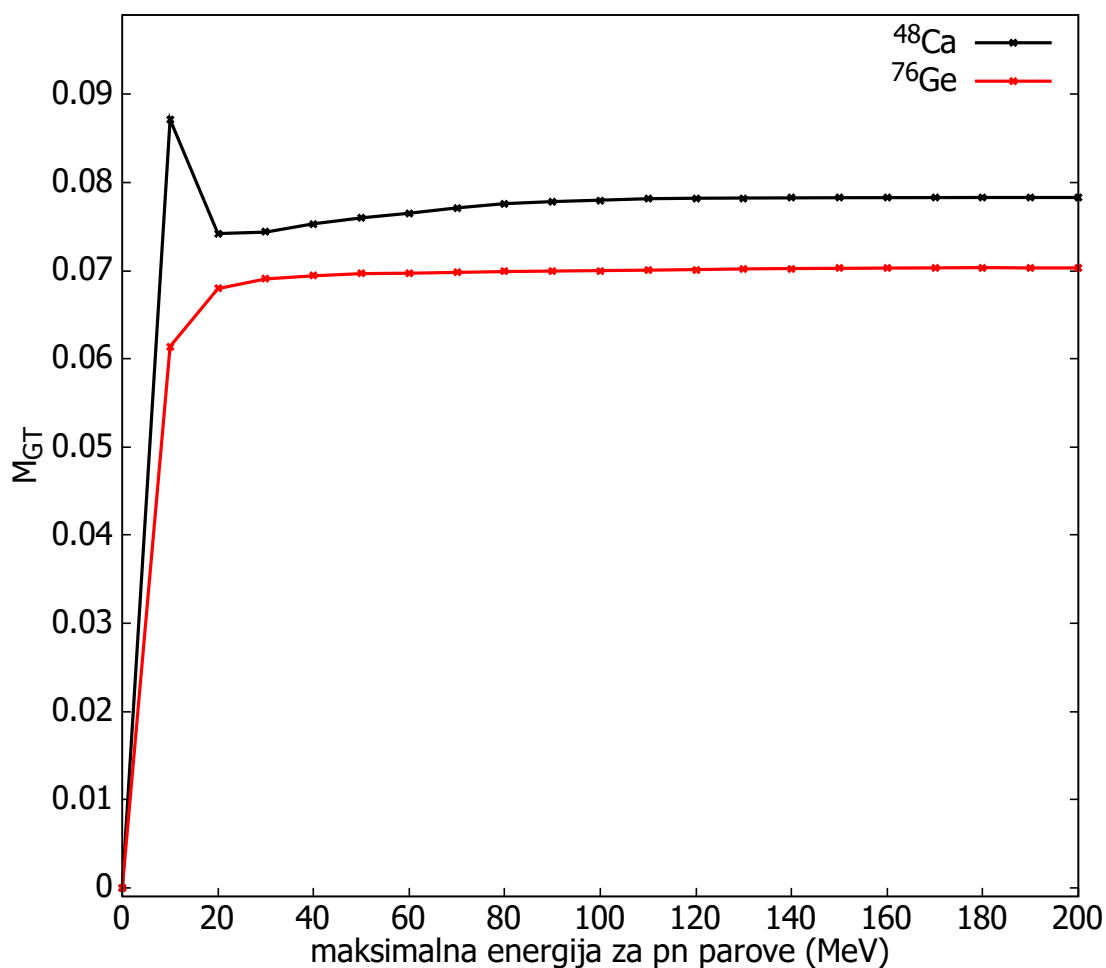
# Poglavlje 11

## Dvoneutrinski dvostruki beta raspadi

U nastavku su prikazani rezultati numeričke implementacije modela kojeg smo opisali u prijašnjim poglavljima, kao i rasprava kako se ti rezultati odnose prema rezultatima drugih modela, i prema eksperimentalnim podacima gdje su isti dostupni. Kako ćemo značajan dio rasprave ograničiti na vrijednosti nuklearnog matričnog elementa na optimiziranoj vrijednosti snage izoskalaranog sparivanja, prvo uvodimo postupak kojim su iste optimizirane vrijednosti dobivene, kao i njegove rezultate. Svugdje, osim ako nije eksplicitno navedeno, navodimo apsolutne vrijednosti naših rezultata budući da jedino apsolutne vrijednosti nuklearnih matričnih elemenata imaju fizikalni značaj.

### 11.1 Testovi konvergencije NME

Kao što je spomenuto, ključan parametar za PN-RQRPA račune je maksimalna dozvoljena energija za  $pn$  parove, koja je u kodu koji koristimo označena kao  $ediffmaxu$ . Iz razmatranja jednostrukih prijelaza s izmjenom naboja možemo očekivati da će ovaj parametar biti ispod 100 MeV, iznad koje energije ne bi očekivali parove koji značajno pridonose matričnim elementima. Potrebno je direktno provjeriti konvergenciju rezultata za matrični element dvostrukog beta raspada kako dodajemo parove veće energije. To je ovdje prikazano za RHBCS+PN-RQRPA račun matričnog elementa za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{76}\text{Ge}$ , koristeći DD-ME2 interakciju; rezultirajući graf je prikazan na slici 11.1.



Slika 11.1: Konvergencija  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$  i  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  raspad s povećanjem maksimalne energije  $pn$  parova. Rezultati RHBCS+PN-RQRPA modela s DD-ME2 interakcijom.

Pokazuje se da matrični element svoju konačnu vrijednost doseže efektivno oko 100 MeV, s time da je vrlo blizu konačne vrijednosti već od oko 80 MeV. Daljnje promjene su beznačajne u odnosu na već dosegnutu vrijednost matričnog elementa. Iz tog razloga, u daljnjim računima dvoneutrinskog dvostrukog beta raspada stavljamo da je  $e_{\text{diffmax}} = 100$  MeV.

## 11.2 Optimizacija $V_{0pp}$

Usporedbom naših rezultata za matrične elemente  $2\nu\beta\beta$  raspada s eksperimentalnim vrijednostima, nailazimo na jedno od otvorenih pitanja u teorijskom opisu dvostrukih beta raspada, a

to je određivanje vrijednosti parametra snage za izoskalarno sparivanje u rezidualnoj QRPA interakciji[77, 195, 116]. Ovaj kanal interakcije je teško ograničiti, i u većini modela nije ga moguće odrediti na temelju svojstava osnovnog stanja[130].

Naš pristup je da vrijednost parametra snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$  ograničimo koristeći eksperimentalne podatke. Kako ovo nije jednostavan postupak ilustrira slika 11.2, gdje su prikazane teorijske vrijednosti  $2\nu\beta\beta$  matričnih elemenata dobivene u RHBCS+PN-RQRPA modelu za DD-ME2 interakciju i za niz vrijednosti parametara  $V_{0pp}$  u rasponu od 0 do 1.00, zajedno s eksperimentalnim rezultatima preuzetima iz Ref. [196]; kao što se vidi iz slike, vrijednosti  $V_{0pp}$  na kojoj se teorijski NME podudaraju s eksperimentom značajno variraju od nuklida do nuklida. Premda se NME sustavno smanjuju sa povećanjem apsolutne vrijednosti  $V_{0pp}$ , kao što i očekujemo, to ne čine jednoliko, i dok za  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{128}\text{Te}$ ,  $^{130}\text{Te}$  i  $^{136}\text{Xe}$  nuklearni matrični elementi izvedeni iz eksperimenta leže unutar danog raspona  $V_{0pp}$ , za  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ , i  $^{150}\text{Nd}$  čini se kao da bi nam trebale veće, a za  $^{96}\text{Zr}$  manje, vrijednosti  $V_{0pp}$ .

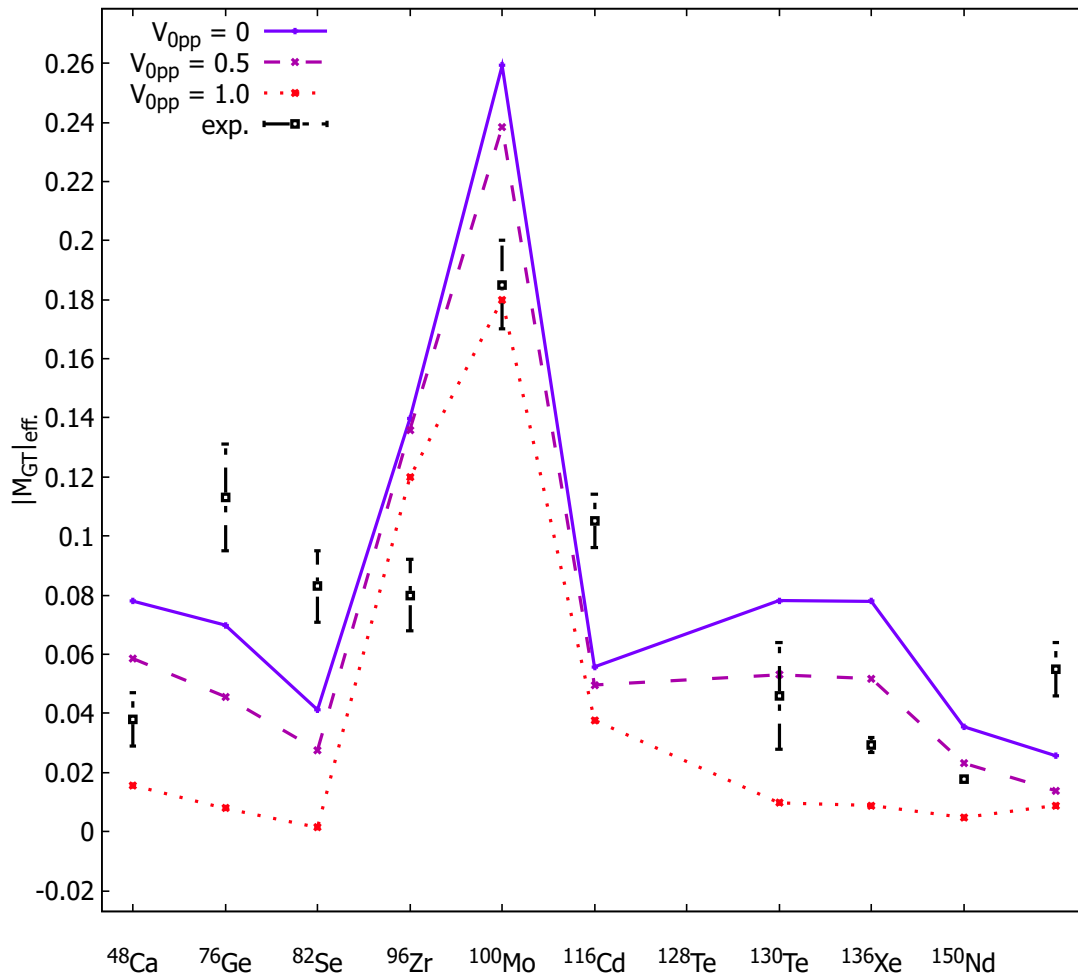
Da bi se ograničio parametar  $V_{0pp}$  odnosno snaga sparivanja u izoskalarnom ( $T=0$ ) kanalu, pokušali smo više pristupa; najkorisniji je bio pristup sličan onome sugeriranom u Ref. [26, 27, 28], odnosno da se  $V_{0pp}$  odredi iz globalne prilagodbe poluživota jednostrukog  $\beta$  raspada na eksperimentalne podatke. Konkretno, koristimo parno-parne jezgre u rasponu  $8 \leq Z \leq 82$  za koje su dostupni eksperimentalni podaci o vremenu poluživota  $\beta$  raspada, gdje je efekt primjene  $V_{0pp}$  na relativnu promjenu poluživota  $T_{1/2}$  veći od 20%, i gdje su poluživoti  $< 10^3$  s. Ovo znači i da smo optimizirali proceduru prilagodbe, jer predugi poluživoti predstavljaju problem za QRPA aproksimaciju [27]. Kako snaga izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$  ima izotopnu ovisnost [27], koristimo ansatz:

$$V_{0pp} = V_1 + V_2 \left( \frac{N - Z}{A} \right), \quad (11.1)$$

za koji pretpostavljamo da će dati rezultate čija je kvaliteta barem jednaka onima dobivenima koristeći prijašnje ansatze iz Ref. [27]. Vremena poluživota  $\beta$  raspada se računaju u PN-RQRPA, kao što je opisano u Ref. [26], uključujući i dozvoljene i prve zabranjene prijelaze. Aksijalno vezanje je  $g_A = 1.0$  kao i u svim  $2\nu\beta\beta$  rezultatima koje prikazujemo u ovom radu. Postupak uključuje samo one vrijednosti  $V_{0pp}$  za koje dobivamo realna rješenja QRPA jednadžbi[29]. Naposljetku, za svaku interakciju koja se razmatra u ovom radu dobijemo parametre  $V_1$  i  $V_2$ (zajedno sa nepouzdanostima). Isti su navedeni u tablici 11.1. Iz toga možemo dobiti same vrijednosti  $V_{0pp}$ , koje su sumarno prikazane u tablici 11.2.

Možemo primijetiti da je vrijednost većine parametara  $V_{0pp}$  jako blizu 1.0, odnosno da





Slika 11.2: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  NME za  $2\nu\beta\beta$  raspade o snazi izoskalaranog sparivanja za  $A=48-150$  nuklide. RHBCS+PN-QRPA račun s DD-ME2 interakcijom.

su snage izoskalaranog i izovektorskog sparivanja vrlo bliske - ovo upućuje na slabo slamanje spinsko-izospinske SU(4) simetrije[198], što će imati posljedice prilikom razmatranja matričnih elemenata na optimalnim vrijednostima izoskalaranog sparivanja.

Tablica 11.1: Parametri ansatza za snagu  $T = 0$  sparivanja (jed. (11.1)) dobiveni prilagodbom vremena poluživota jednostrukih  $\beta$ -raspada na eksperimentalne vrijednosti, za DD-PCX, DD-PC1 i DD-ME2 interakcije[197].

|       | DD-ME2            | DD-PC1            | DD-PCX            |
|-------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $V_1$ | $0.574 \pm 0.338$ | $0.522 \pm 0.407$ | $0.592 \pm 0.366$ |
| $V_2$ | $2.301 \pm 1.422$ | $3.092 \pm 1.768$ | $2.321 \pm 1.559$ |

Tablica 11.2: Vrijednosti parametra snage  $T = 0$  sparivanja  $V_{0pp}$  dobivene prilagodbom vremena poluživota jednostrukih  $\beta$ -raspada na eksperimentalne vrijednosti, za DD-PCX, DD-PC1 i DD-ME2 interakcije[197].

|                   | $V_{0pp}$       |                 |                 |
|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                   | DD-ME2          | DD-PC1          | DD-PCX          |
| $^{48}\text{Ca}$  | $0.98 \pm 0.12$ | $1.04 \pm 0.12$ | $0.96 \pm 0.11$ |
| $^{76}\text{Ge}$  | $0.96 \pm 0.13$ | $1.01 \pm 0.14$ | $0.94 \pm 0.12$ |
| $^{82}\text{Se}$  | $0.99 \pm 0.11$ | $1.05 \pm 0.12$ | $0.97 \pm 0.10$ |
| $^{96}\text{Zr}$  | $0.98 \pm 0.12$ | $1.04 \pm 0.12$ | $0.96 \pm 0.11$ |
| $^{100}\text{Mo}$ | $0.96 \pm 0.13$ | $1.02 \pm 0.13$ | $0.94 \pm 0.12$ |
| $^{116}\text{Cd}$ | $0.99 \pm 0.11$ | $1.06 \pm 0.11$ | $0.97 \pm 0.10$ |
| $^{124}\text{Xe}$ | $0.89 \pm 0.17$ | $0.92 \pm 0.18$ | $0.87 \pm 0.16$ |
| $^{128}\text{Te}$ | $1.07 \pm 0.07$ | $1.16 \pm 0.07$ | $1.05 \pm 0.07$ |
| $^{130}\text{Te}$ | $1.03 \pm 0.09$ | $1.10 \pm 0.09$ | $1.01 \pm 0.08$ |
| $^{136}\text{Xe}$ | $1.06 \pm 0.08$ | $1.14 \pm 0.08$ | $1.03 \pm 0.07$ |
| $^{150}\text{Nd}$ | $1.06 \pm 0.08$ | $1.14 \pm 0.08$ | $1.03 \pm 0.07$ |

## 11.3 RHBCS+PN-RQRPA rezultati

U sljedećim odjeljcima predstaviti ćemo rezultate RHBCS+PN-RQRPA računa za dvoneutrinski dvostruki beta raspad skupa od deset relevantnih nuklida, počevši od najlakših.

### 11.3.1 $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$

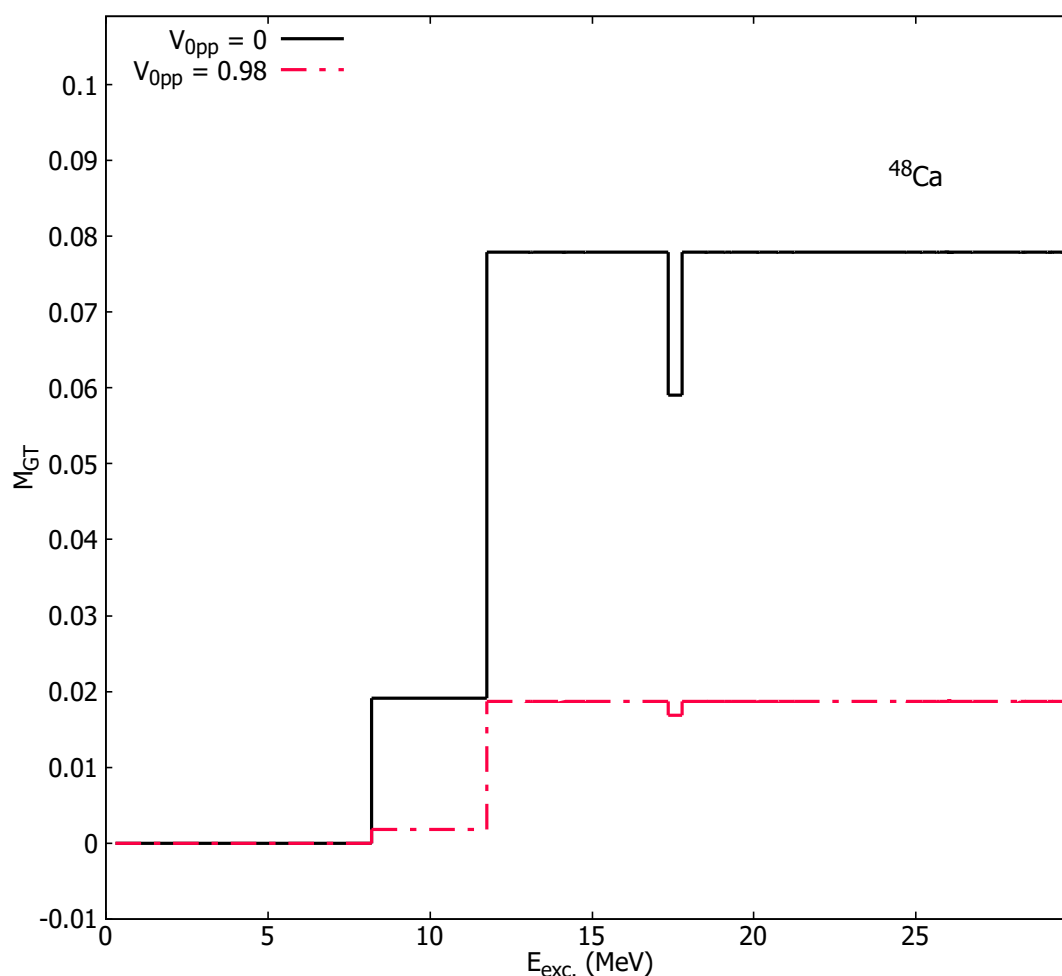
Raspad  $^{48}\text{Ca}$  je najjednostavniji raspad koji ćemo promatrati. Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz tih energija, za različite interakcije dane su u tablici 11.3.

U razmatranjima dvostrukih beta rasпада često se promatra doprinos stanja različitih energija u međujezgri konačnom matričnom elementu. U tom slučaju govorimo o tzv. kumulativnoj sumi (engl. running sum)[118]. Takva je kumulativna suma prikazana na slici 11.3, za dvije vrijednosti  $V_{0pp}$ , koje odgovaraju iščezavajućem izoskalarnom sparivanju (odnosno  $V_{0pp}=0$ ), i optimalnoj vrijednosti uvedenoj u prijašnjem odjeljku, koristeći DD-ME2 interakciju i za  $g_A=1.0$ :

U analizama  $2\nu\beta\beta$  rasпада se ponekad uzima da vrijedi tzv. hipoteza o dominaciji jednog

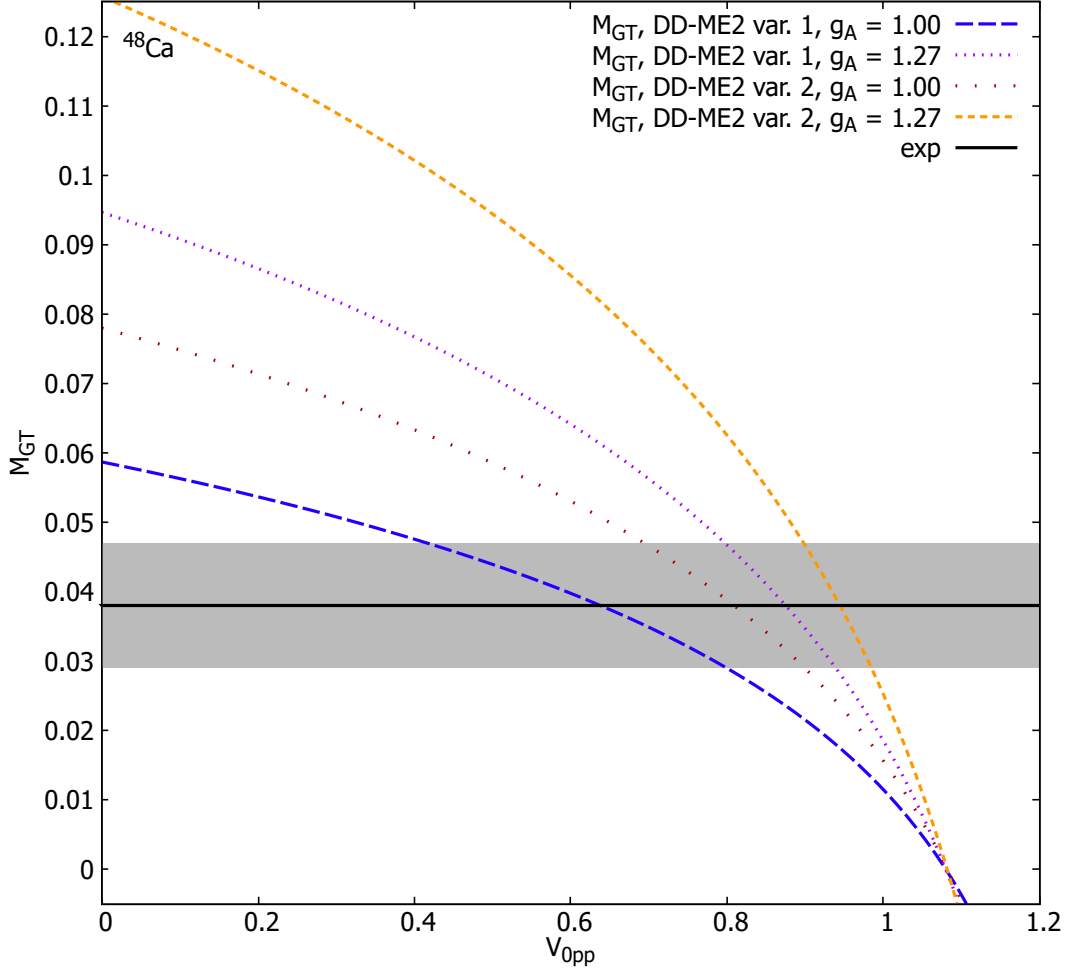
Tablica 11.3: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ , dobivene iz RHBCS+PN-RQRPA modela, za različite interakcije.

|                             | DD-ME2   | DD-PC1   | DD-PCX   |
|-----------------------------|----------|----------|----------|
| $(E/A)^{48}\text{Ca}$ (MeV) | 8.640726 | 8.669992 | 8.683836 |
| $(E/A)^{48}\text{Ti}$ (MeV) | 8.639156 | 8.683836 | 8.683836 |
| $Q$ (MeV)                   | 3.02164  | 3.76151  | 3.097    |


 Slika 11.3: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  nuklearnog matričnog elementa za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ . DD-ME2 interakcija, za  $g_A=1.0$ .

stanja (engl. single-state dominance, SSD). Radi se o pretpostavci da gotovo sav matrični element dolazi od jednog dobro definiranog stanja u međujezgru [199, 200]. Iz slike 11.3 je jasno da za  $^{48}\text{Ca}$  to nije ispunjeno - barem dva stanja daju značajan doprinos matričnom elementu. Pos-

toji i nezanemariv doprinos matričnom elementu oko 18 MeV u međujezgri, koji biva uglavnom poništen sljedećim doprinosom, koji je gotovo istog iznosa ali suprotnog predznaka.

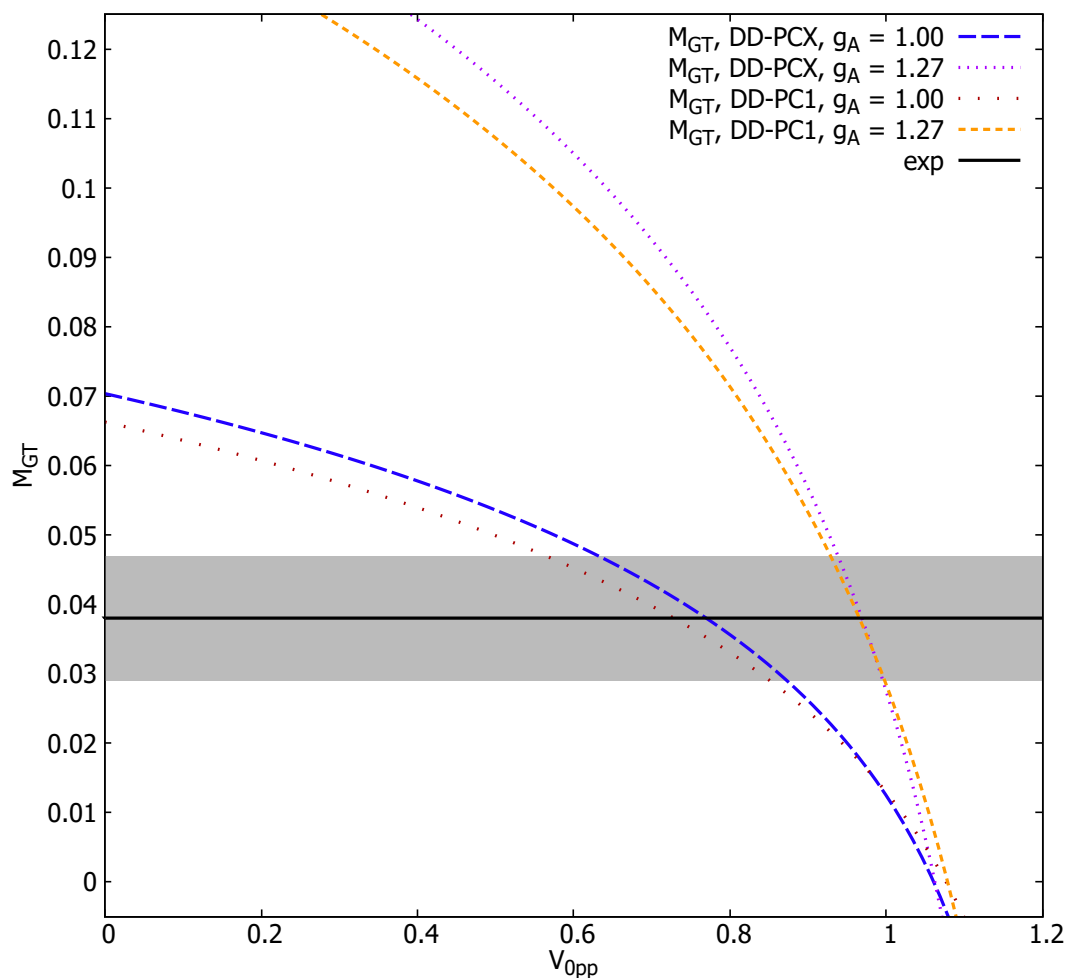


Slika 11.4: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$  raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

Ovisnost matričnog elementa o  $V_{0pp}$  je, kao što je navedeno, nešto čime ćemo se detaljnije baviti. Na slici 11.4 prikazana je ta ovisnost, za dvije mogućnosti za računanje faktora preklopa, opisane jednadžbama (2.11) i (2.12)[34]. Možemo primjetiti kako su razlike u matričnim elementima uzrokovane različitom definicijom faktora preklopa maksimalno 0.02 kad izoskalarno sparivanje iščezava, i kako postaju manje oko točke gdje su naši računi blizu eksperimentalnim podacima (gdje je razlika zanemariva).

Uz ovisnost Gamow-Teller matričnog elementa, koja pokazuje karakteristični oblik koji nelinearno opada dok ne prijeđe u nulu na velikim vrijednostima  $V_{0pp}$  (što odgovara kolapsu PN-RQRPA), na slikama je prikazana i eksperimentalna vrijednost GT matričnog elementa, dobivena iz studija vremena poluživota[196], sa sivom vrpcom koja odgovara rasponu od tri standardne devijacije oko navedene vrijednosti iz članka. Sjecište eksperimentalne vrijednosti i krivulje ovisnosti GT matričnog elementa daje vrijednost  $V_{0pp}$  koja odgovara eksperimentalnom rezultatu; te vrijednosti će generalno biti blizu točke gdje PN-RQRPA kolapsira.

Ista ovisnost se može prikazati i za interakcije DD-PC1 i DD-PCX. To je napravljeno na slici 11.5 za obje interakcije. Za potrebe slike, uzeta je definicija preklopa iz jednadžbe (2.11). Slika za definiciju preklopa iz jednadžbe (2.12) bi bila analogna.



Slika 11.5: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$  raspad o snazi  $T=0$  sparivanja  $V_{0pp}$ , RHBCS+PN-RQRPA račun, obje interakcije s točkastim vezanjem.

Kao što se može vidjeti iz slike 11.5, za slučaj  $^{48}\text{Ca}$ , rezultati dviju kontaktnih interakcija su dosta slični. Ovakav rezultat nije iznenađujući budući da su dvije interakcije jako slične, s dva seta parametara koji su, premda su rezultat dva različita postupka prilagođavanja, blizu jedan drugome.

Opsežna usporedba naših rezultata s rezultatima drugih računa prikazana je u odjeljku 11.4, ali već sada možemo raspraviti neke od rezultata za specifični nuklid koji razmatramo. Takvih rezultata za  $^{48}\text{Ca}$  ima malo u usporedbi s drugim jezgrama koje razmatramo, ali slike 11.4-11.5 možemo usporediti s rezultatima QRPA računa koristeći Sk3 Skyrme silu (sa i bez deformacije) iz Ref. [201]. Treba napomenuti da je u Ref. [201] prikazana ovisnost o snazi  $pp$  interakcije  $\kappa_{pp}$  u MeV, ne o bezdimenzionalnoj snazi izoskalarnog sparivanja, i da je u referenci nuklearni matrični element definiran bez  $g_A$ , što je ekvivalentno slučaju  $g_A = 1$  u našem računu. Naši rezultati su sistematski manji od Sk3+QRPA računa, čak i za  $g_A = 1.27$ . Međutim samim time su bliže, čak i na iščezavajućem sparivanju, vrijednosti NME dobivenoj iz eksperimenta.

### 11.3.2 $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$

$^{76}\text{Ge}$  je najlakša jezgra za koju se obično promatra i dvoneutrinski i bezneutrinski dvostruki beta raspad. Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.4.

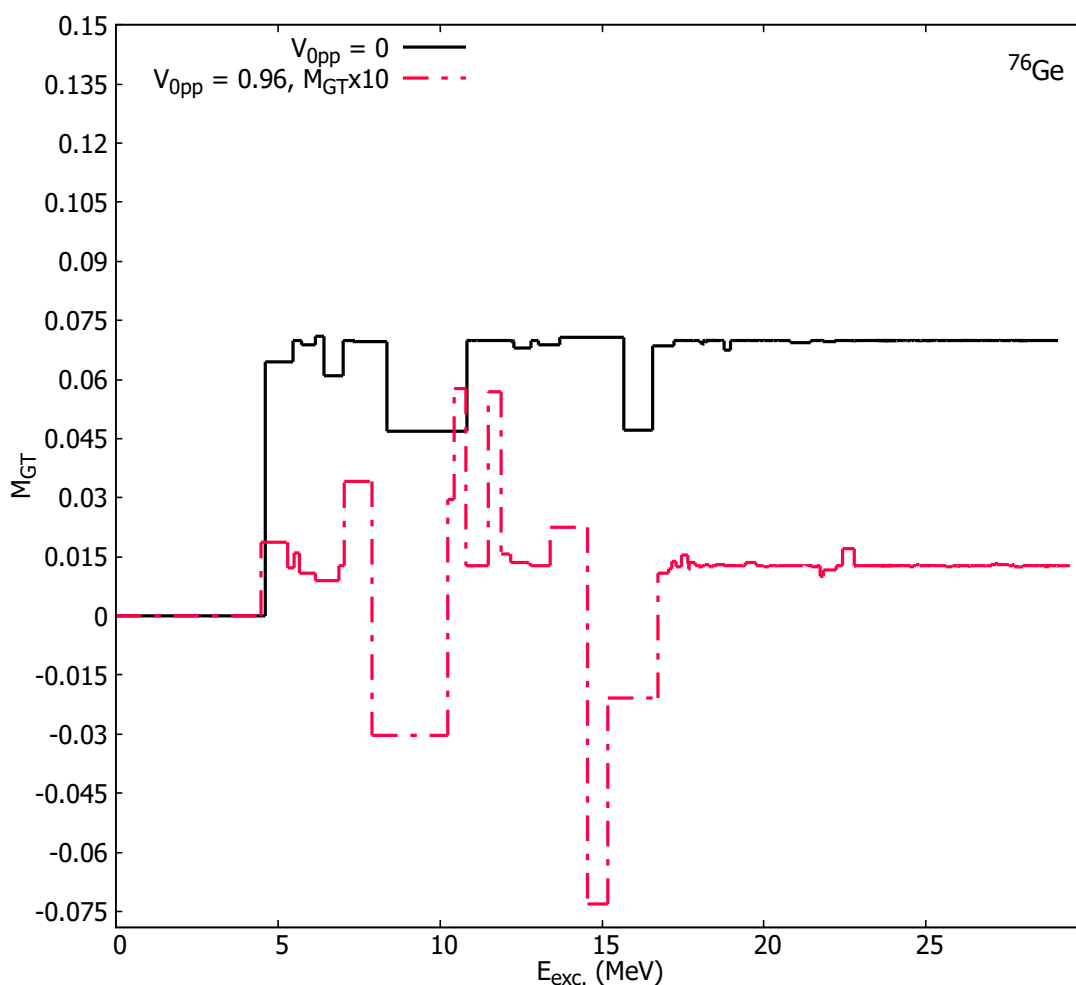
Tablica 11.4: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ , za različite interakcije.

|                             | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{76}\text{Ge}$ (MeV) | -8.626002 | -8.653803 | -8.658447 |
| $(E/A)^{76}\text{Se}$ (MeV) | 8.636724  | 8.658447  | 8.658447  |
| $Q$ (MeV)                   | 3.91187   | 3.44994   | 3.097     |

Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za slučaj DD-ME2 računa raspada  $^{76}\text{Ge}$ , za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , prikazana je na slici 11.6, za dvije vrijednosti izoskalaranog sparivanja kao i u slučaju  $^{48}\text{Ca}$ . Kao što se može vidjeti, u slučaju  $^{76}\text{Ge}$  hipoteza o dominaciji jednoga stanja (SSD hipoteza) ne vrijedi. Matričnom elementu značajno doprinosi niz stanja na nižim energijama, s vidljivim doprinosima sve do energije pobuđenja od 20 MeV.

Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa o snazi izoskalaranog sparivanja razmotrena je kao i za slučaj  $^{48}\text{Ca}$ . Na slici 11.7 su prikazani  $2\nu\beta\beta$  matrični elementi za obje definicije faktora preklopa (2.11) i (2.12) kao funkcija  $V_{0pp}$ , sve za DD-ME2 interakciju. Vidimo da se rezultati za dvije varijante faktora preklopa gotovo podudaraju. Što se tiče interakcija s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX,  $2\nu\beta\beta$  matrični element za raspad  $^{76}\text{Ge}$  izračunat koristeći te interakcije i definiciju preklopa iz jednadžbe (2.11) je prikazan na slici 11.8. Kao što možemo vidjeti, za DD-PC1 i DD-PCX interakcije, apsolutna vrijednost matričnog elementa je manja od vrijednosti koju dobijemo računom koji polazi od interakcije s izmjenom mezona DD-ME2. To će biti slučaj za većinu jezgara koje promatramo. Rezultati su manji od eksperimentalne vrijednosti i jedino sijeku eksperimentalnu vrijednost u slučaju interakcije s izmjenom mezona, i to za ne-gušeni  $g_A = 1.27$ .

Slike 11.7 i 11.8 možemo usporediti sa analognom slikom iz QRPA računa temeljenog na SkM\* interakciji, kao i analognoj interakciji namještenoj da reproducira energiju Gamow-Teller rezonancije u  $^{208}\text{Pb}$ , (koji se u citiranom izvoru navodi kao "mod.") iz Ref. [47] (slika 2 u citiranom radu). Ovisnost o izoskalaranom sparivanju je prikazana pomoću direktne jakosti sparivanja u MeV, umjesto pomoću multiplikativnog faktora kao u ovom radu, međutim možemo (uz napomenu da se ne radi o istim interakcijama) približno poistovjetiti parametar  $V_0$  iz citiranog rada i  $V_{0pp} \cdot 728$  MeV. Možemo primjetiti kako su vrijednosti iz QRPA računa znatno veće od



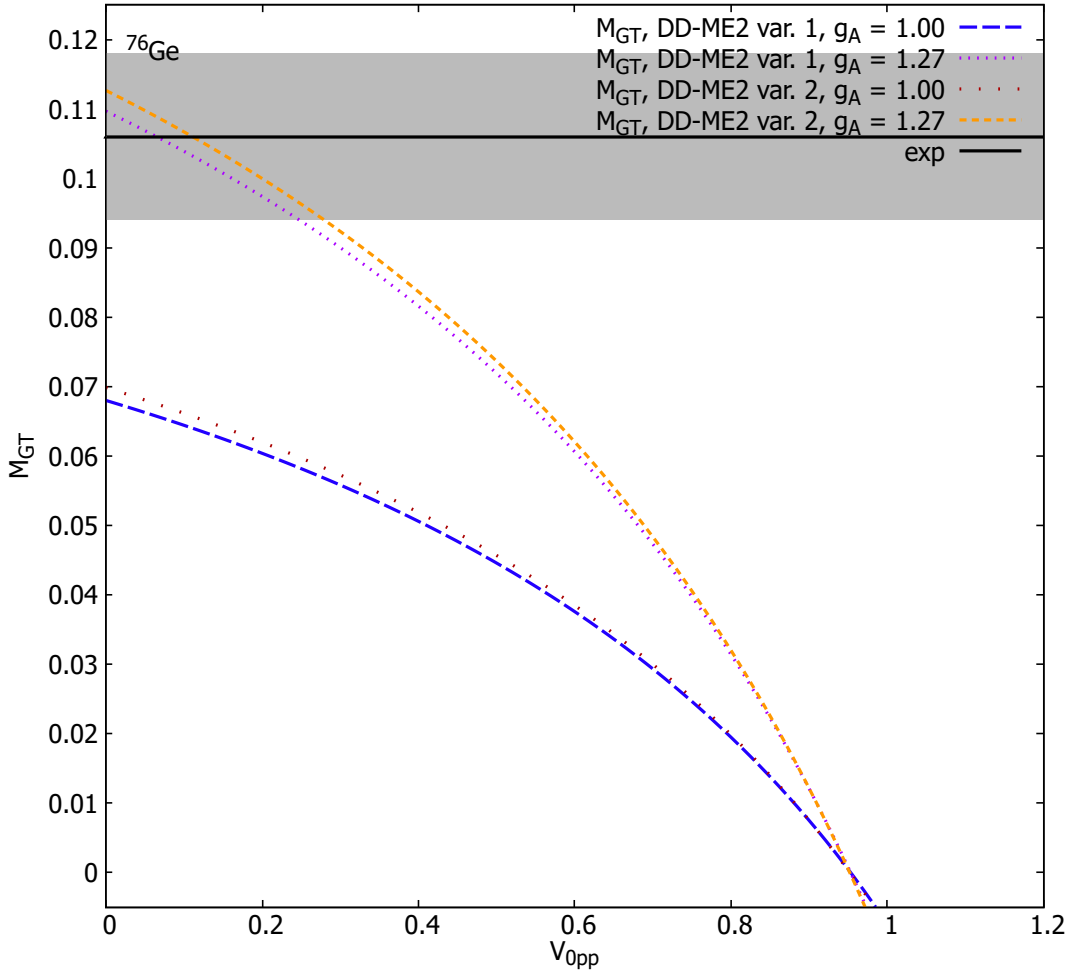
Slika 11.6: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  nuklearnog matričnog elementa za  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  raspad, DD-ME2 interakcija.

naših, čak i za iščezavajuće sparivanje, i da brže padaju sve do točke gdje QRPA kolapsira.

Možemo usporediti naše rezultate i sa rezultatima drugih računa za kumulativne sume. Primjerice, možemo ih usporediti s rezultatima QRPA računa temeljenih na Argonne V18 potencijalu iz Ref.[118]. U ovoj usporedbi, kad se matrični elementi skaliraju tako da se iz vrijednosti u  $\text{MeV}^{-1}$  dobiju bezdimenzionalni matrični elementi (odnosno kad se te vrijednosti pomnoži s  $m_e$ ), vidimo da su naši matrični elementi na optimalnoj vrijednosti  $V_{0pp}$  manji. Osim toga, struktura doprinosa matričnom elementu je drugačija, što se vrlo lako može zapaziti jer rezultati iz Ref. [118] imaju izraženu "grbu" u srednjem rasponu energija.

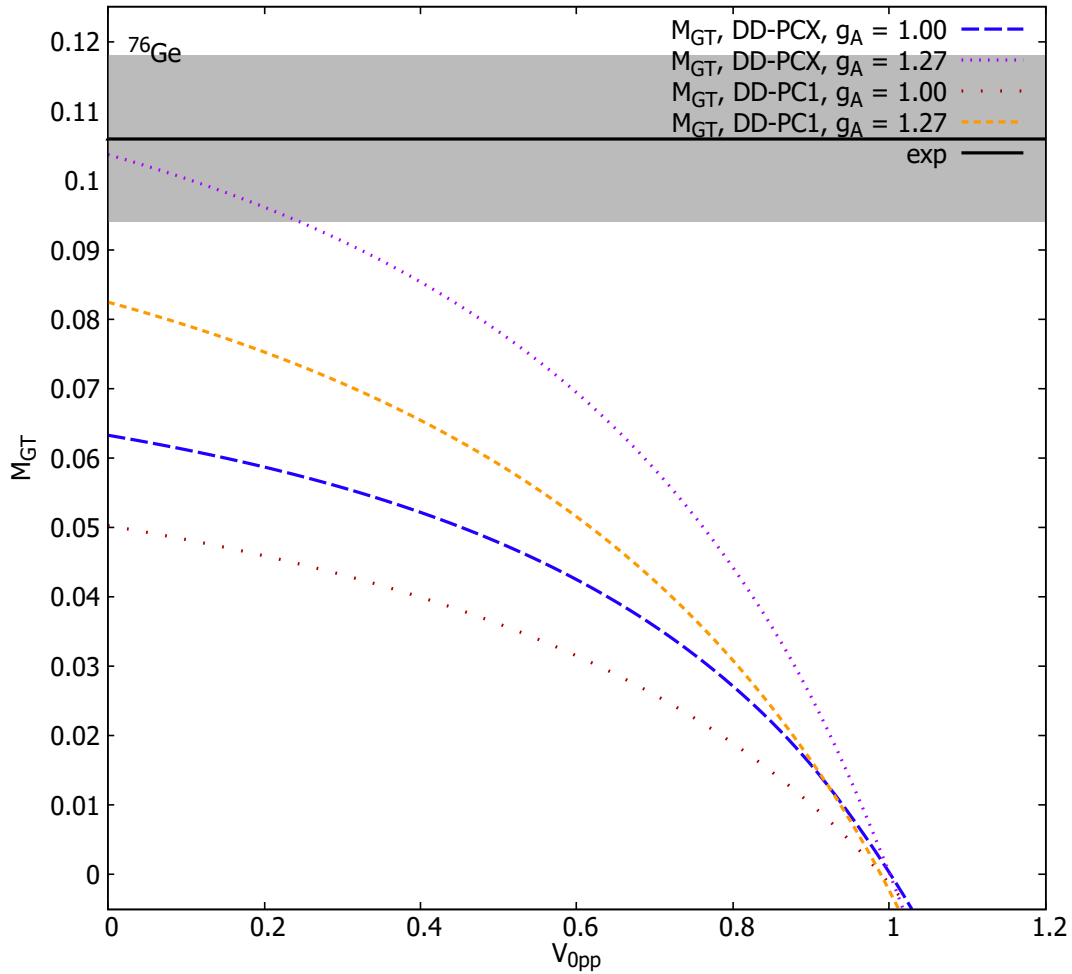
Ako usporedimo rezultate naših računa s rezultatima Sk3+QRPA računima iz Ref. [201], naši rezultati su opet za obje vrijednosti  $g_A$  sistematski manji od QRPA, ali bliži eksperimen-





Slika 11.7: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  raspad o parametru snage izoskalarneog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednažbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednažba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

talnoj vrijednosti za manje snage sparivanja. Daljnja usporedba se može napraviti s rezultatima pn-QRPA računa u projiciranoj sferičnoj bazi uvedenoj u Ref. [202], gdje se koristi parametar  $g_{pp}$  koji je analogan parametru  $V_{0pp}$ . Za snagu čestično-šupljinske interakcije  $\chi = 0.1$ , naši rezultati su slični kad  $T=0$  sparivanje iščezava (imajući na umu da Ref. [202] prikazuje NME u  $\text{MeV}^{-1}$ ) ali brže padaju; međutim za vrijednost parametra  $\chi = 0.3$ , naši rezultati poprimaju vrijednost 0 na otprilike jednakim vrijednostima parametara  $V_{0pp}$  i  $g_{pp}$ . Dobivene vrijednosti  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa možemo usporediti i s vrijednostima dobivenima unutar QRPA, RQRPA i SRQRPA modela iz Ref. [203]. Navedeni računi su temeljeni na BCS aproksimaciji[203]. Naši



Slika 11.8: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  raspad o snazi  $T=0$  sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

rezultati su manji od rezultata za sva tri modela; nadalje, dok QRPA i SRQRPA računi dosežu vrijednost nula za vrijednosti  $g_{pp}$  blizu vrijednostima  $V_{0pp}$  gdje naši rezultati također iščezavaju, u slučaju RQRPA računa vrijednosti  $g_{pp}$  na kojima NME iščezava su nešto veće.

### 11.3.3 $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$

Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.5.

Tablica 11.5: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ , za različite interakcije.

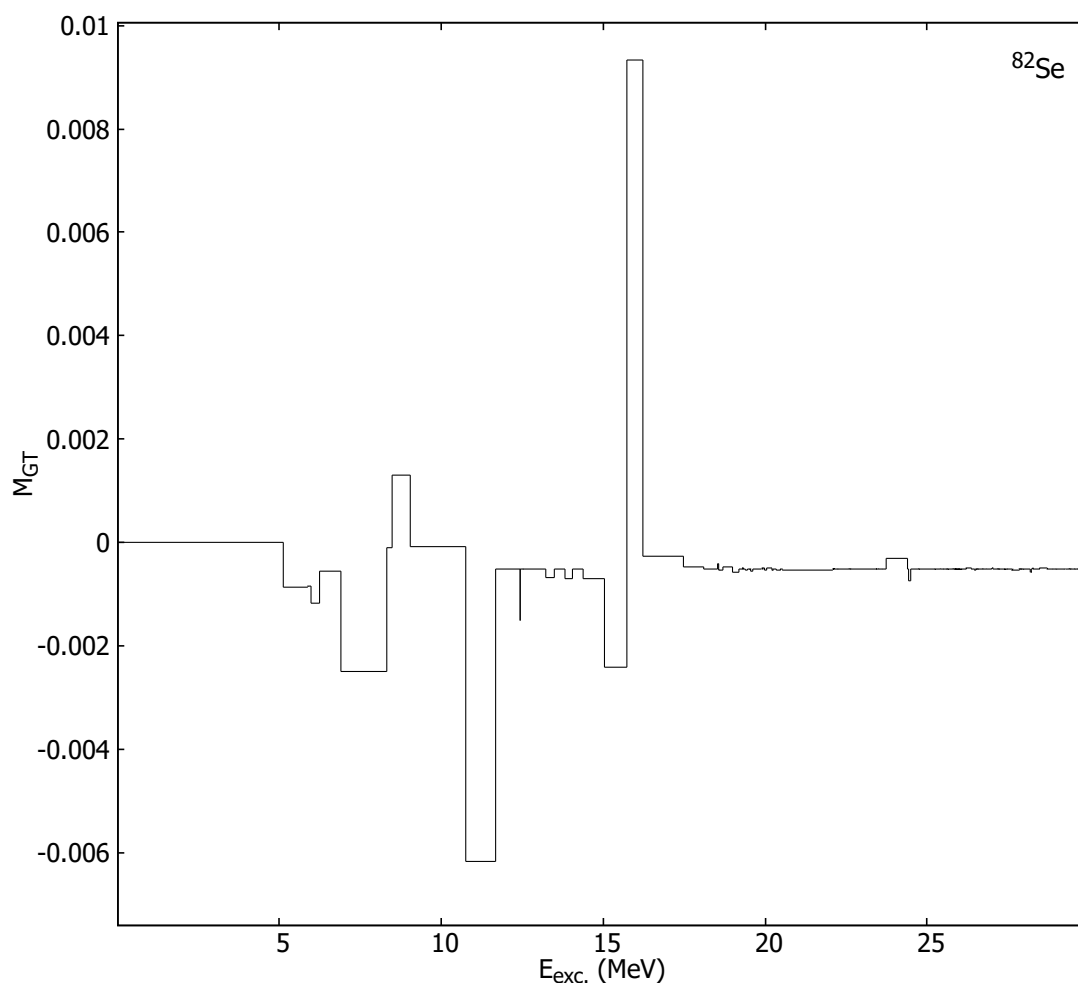
|                             | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{82}\text{Se}$ (MeV) | -8.637457 | -8.652822 | -8.672221 |
| $(E/A)^{82}\text{Kr}$ (MeV) | 8.654017  | 8.672221  | 8.672221  |
| $Q$ (MeV)                   | 4.45492   | 4.68772   | 3.097     |

Kumulativna suma matričnog elementa raspada  $^{82}\text{Se}$ , za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , je prikazana na slici 11.9, u ovom slučaju samo za optimalnu vrijednost  $V_{0pp}$ .

Hipoteza o dominaciji jednog stanja opet nije ispunjena; ipak, većina vrijednosti matričnog elementa dolazi od niskoležećih doprinosa. Zanimljivo je primjetiti veliki doprinos oko 17-18 MeV, koji odmah na oko 18 MeV bude uglavnom poništen. Općenito vidimo velike individualne doprinose, koji se zbroje u vrlo nizak matrični element, blizu nuli. Ovisnost matričnog elementa o snazi izoskalaranog sparivanja  $V_{0pp}$  za DD-ME2 interakciju, i za obje varijante računafaktora preklopa (2.11) i (2.12) prikazana je na slici 11.10. Rezultati za point-coupling interakcije DD-PC1 i DD-PCX za dvoneutrinski dvostruki beta raspad  $^{82}\text{Se}$ , za definiciju preklopa iz jednadžbe (2.11), su prikazani na slici 11.11.

Za razliku od slučaja  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{76}\text{Ge}$ , za raspad  $^{82}\text{Se}$  matrični element dobiven uz pomoć neke od kontaktnih interakcija je veći od onog dobivenog uz pomoć interakcije s izmjenom mezona. Što se tiče rezultata općenito, kao i u slučaju  $^{76}\text{Ge}$ , za većinu interakcija i vrijednosti  $g_A$  nalazimo se ispod vrijednosti matričnog elementa dobivenih iz eksperimenta, premda ne toliko drastično. U slučaju svih kontaktnih interakcija možemo doći do eksperimentalne vrijednosti matričnog elementa, mada samo za vrijednost  $g_A$  bez gušenja, odnosno  $g_A = 1.27$ .

Uspoređujući naše rezultate s rezultatima Sk3+QRPA[201] modela, još jednom su naši rezultati manji od QRPA rezultata. Međutim, naši matrični elementi ne mogu poprimiti vrijednost jednaku onoj izvedenoj iz eksperimenta osim na malim vrijednostima  $V_{0pp}$ , dok QRPA rezultati mogu. Ovo upućuje na neka od ograničenja modela koji koristimo. Uspoređujući naše rezultate sa QRPA, RQRPA i SRQRPA rezultatima Ref. [203], naši rezultati sa iščezavajućim izoskalaranim sparivanjem su oko 1.5 puta manji za  $g_A = 1.0$ . Ovisnost o  $V_{0pp}$  odnosno  $g_{pp}$  je slična za QRPA i SRQRPA ali manje izražena od one u našim rezultatima za slučaj RQRPA rezultata.



Slika 11.9: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  nuklearnog matričnog elementa za  $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$  raspad, DD-ME2 interakcija.

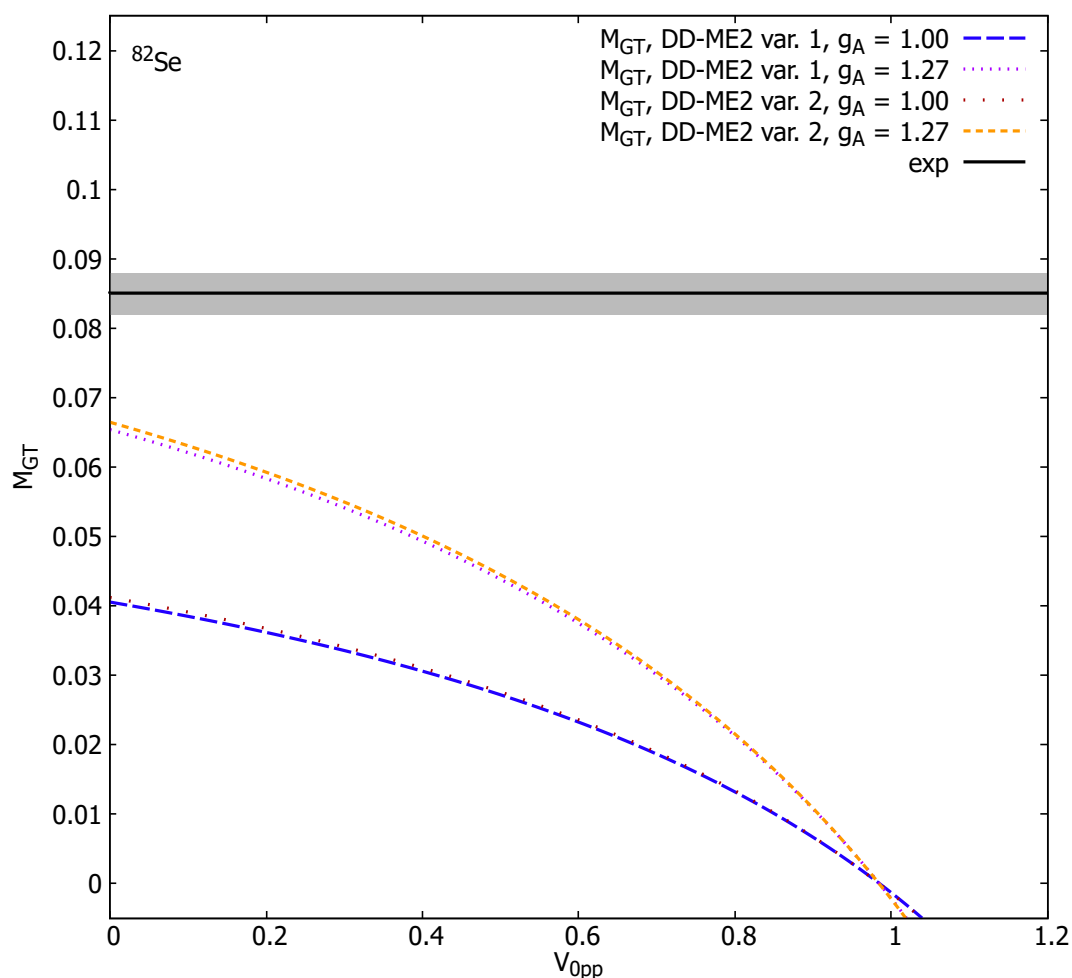
### 11.3.4 $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$

Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.6.

Tablica 11.6: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$ , za različite interakcije.

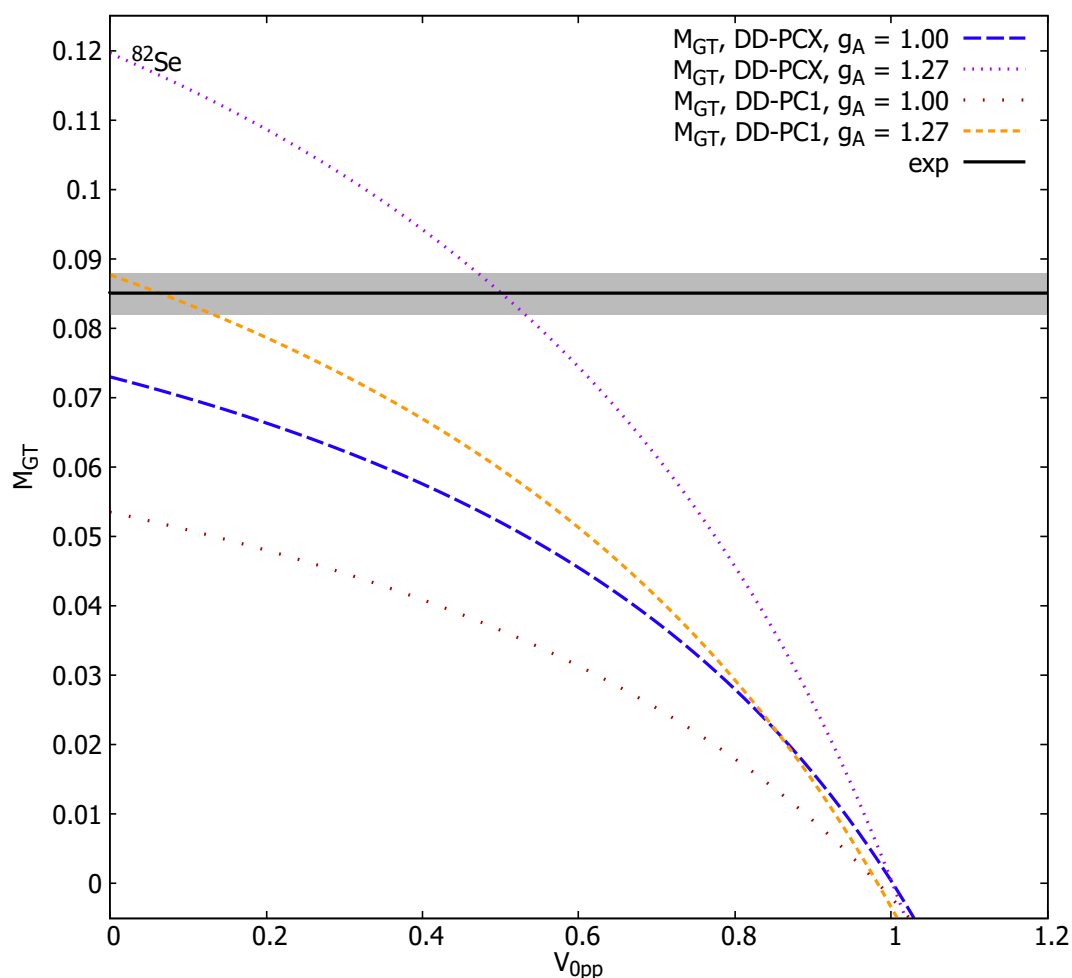
|                             | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{96}\text{Zr}$ (MeV) | -8.545779 | -8.559814 | -8.603567 |
| $(E/A)^{96}\text{Mo}$ (MeV) | 8.582917  | 8.603567  | 8.603567  |
| $Q$ (MeV)                   | 6.66225   | 7.29729   | 3.097     |

Kumulativna suma matričnog elementa raspada  $^{96}\text{Zr}$ , za definiciju faktora preklopa prika-



Slika 11.10: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$  raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

zanu u jednadžbi (2.11), za optimalni  $V_{0pp}$  i za  $g_A = 1.0$ , je prikazana na slici 11.12. Vidimo da je hipoteza dominacije jednog stanja otprilike zadovoljena; većina matričnog elementa dolazi od pobuđenja u međujezri s energijama ispod 10 MeV, što otvara pitanje do koje energije pobuđenja je uopće potrebno računati. U ovom radu smo, za dvoneutrinske raspade, svugdje išli do stanja u međujezri s energijama pobuđenja od 30 MeV, gdje smo sigurni (kao što se vidi iz slike 11.12 i drugih prikaza suma matričnih elemenata do dane energije pobuđenja) da više nemamo značajnih doprinosa. Ovisnost matričnog elementa o snazi izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , za DD-ME2 interakciju, i za obje varijante računafaktora preklopa (2.11) i (2.12), prikazana je

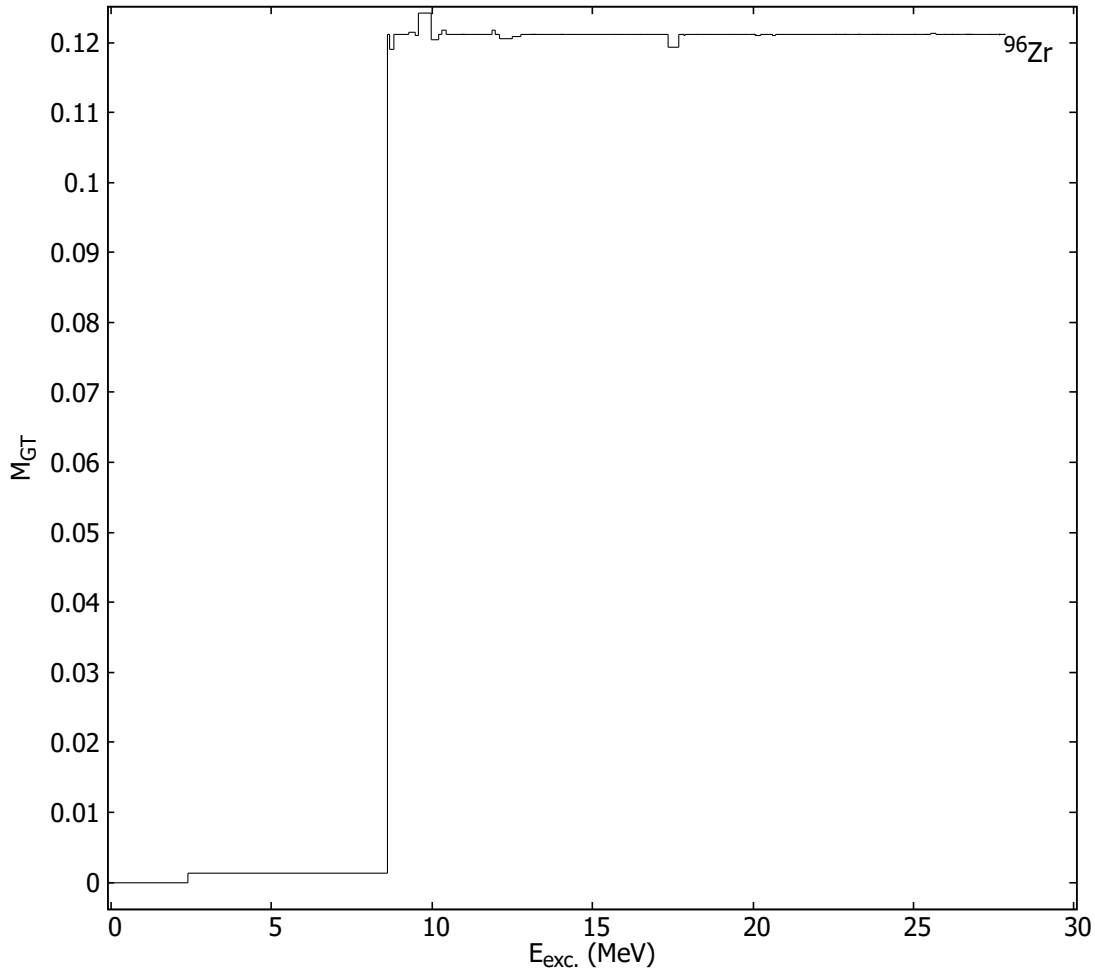


Slika 11.11: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$  raspad o snazi sparivanja  $T=0$   $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

na slici 11.13.

Rezultati za  $2\nu\beta\beta$  matrične elemente za interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX za dvoneutrinski dvostruki beta raspad  $^{96}\text{Zr}$  su prikazani na slici 11.14.

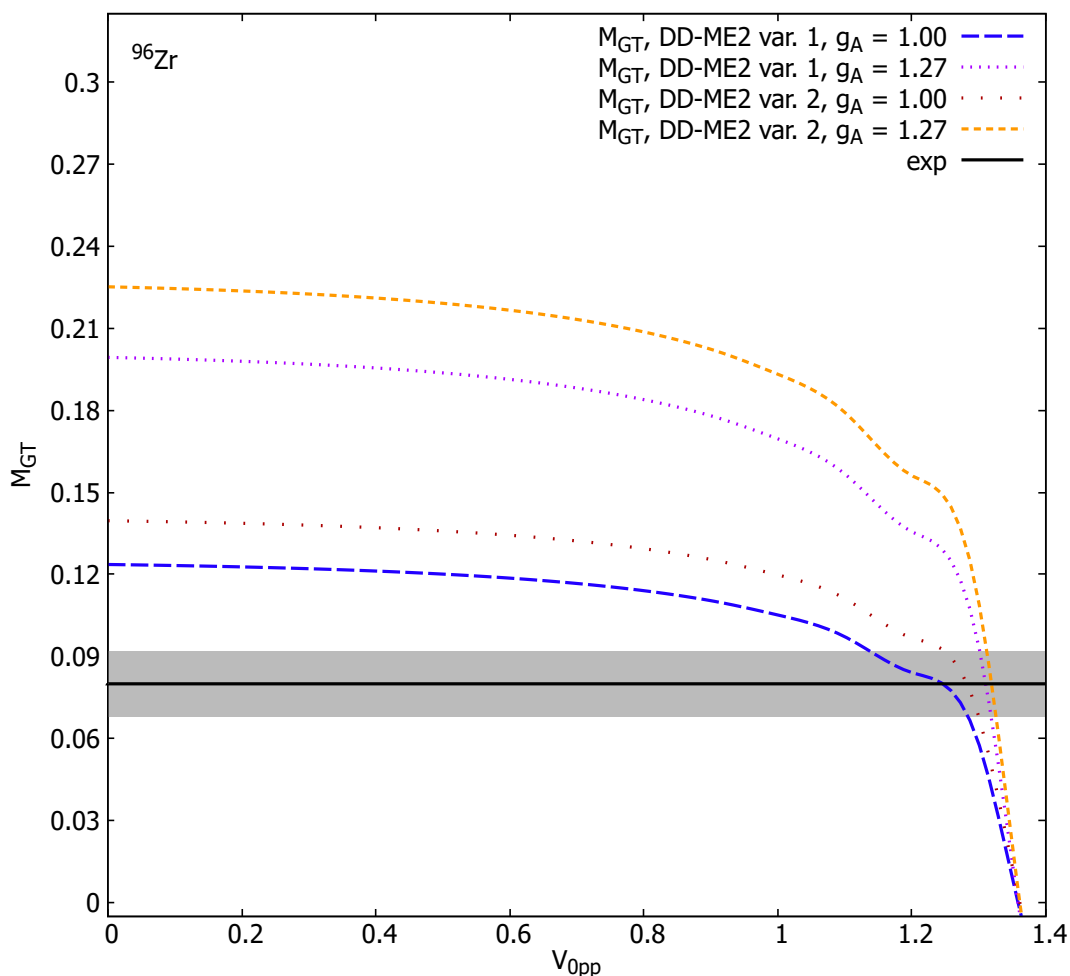
Za raspad  $^{96}\text{Zr}$  dobivamo očekivani oblik ovisnost, s time da je točka kolapsa QRPA pomaknuta na više energije u odnosu na prijašnje jezgre. Također, pri iščezavajućem izovektorskom sparivanju (oko  $V_{0pp} = 0$  MeV), izračunati matrični element je daleko iznad vrijednosti izvedene iz eksperimenta, što je znatna razlika u odnosu na prijašnja dva raspada. Treba, nadalje, primijetiti da se rezultati za dvije interakcije s točkastim vezanjem znatno razlikuju za ovaj raspad - matrični elementi za DD-PC1 su znatno iznad matričnih elemenata za DD-PCX i DD-ME2 interakcije, i dolaze do točke kolapsa na manjim vrijednostima  $V_{0pp}$ . Treba primijetiti i izraženu



Slika 11.12: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$  raspad, DD-ME2 interakcija.

"grbu" u rezultatima za DD-ME2 i DD-PC1 interakcije oko  $V_{0pp} = 1.2$ .

Još jednom su naši rezultati manji od vrijednosti koje daje Sk3+QRPA interakcija[201]. Također, kumulativna suma koju dobijemo iz našeg računa, i kojom dominira jedno stanje, je značajno drugačija od kumulativne sume dobivene pomoću SkM\*+QRPA računa[47]. Naši rezultati za ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnih elemenata o  $V_{0pp}$  imaju drugačiji oblik od analognih rezultata za QRPA, RQRPA i SRQRPA prikazanih u Ref. [203], koji, počevši od vrijednosti manjih ili sličnih našim vrijednostima NME, isprva rastu s povećanjem  $g_{pp}$  da bi, nakon  $g_{pp} \approx 0.8$  počeli padati i, slično našim rezultatima, prešli u nulu  $g_{pp} \approx 1.2-1.4$ .

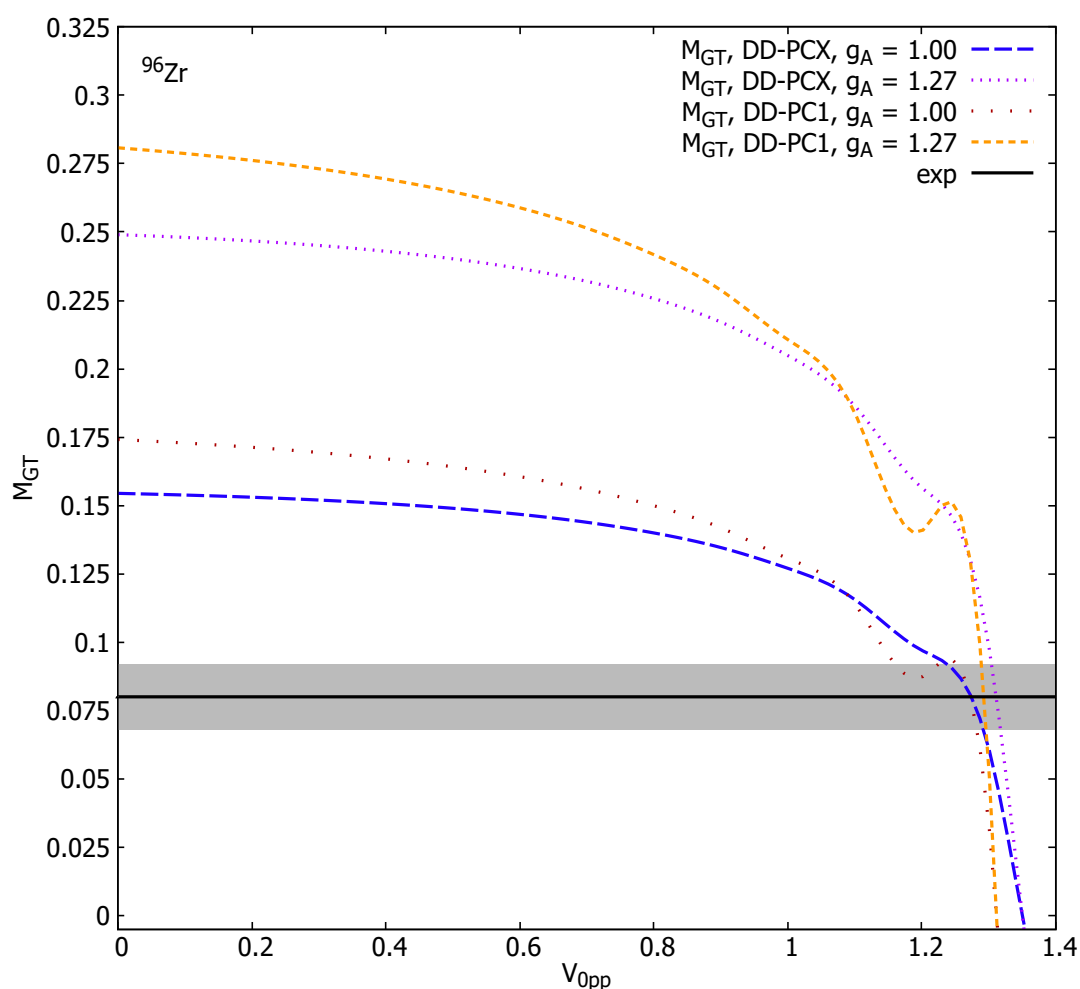


Slika 11.13: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$  raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednađbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednađba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

### 11.3.5 $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$

U tablici 11.7 dane su energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za ovaj raspad, poredane po interakcijama pomoću kojih su izračunate. Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa raspada  $^{100}\text{Mo}$  dobivena s DD-ME2 interakcijom, za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednađbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , je prikazana na slici 11.15. Opet imamo situaciju gdje dominira jedan doprinos u međujezgri s energijom pobuđenja manjom od 10 MeV. Hipoteza dominacije jednog stanja je približno zadovoljena; daljnje oscilacije su još manje nego u prijašnjim slučajevima. Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa o snazi izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$  za DD-ME2 interakciju, za obje



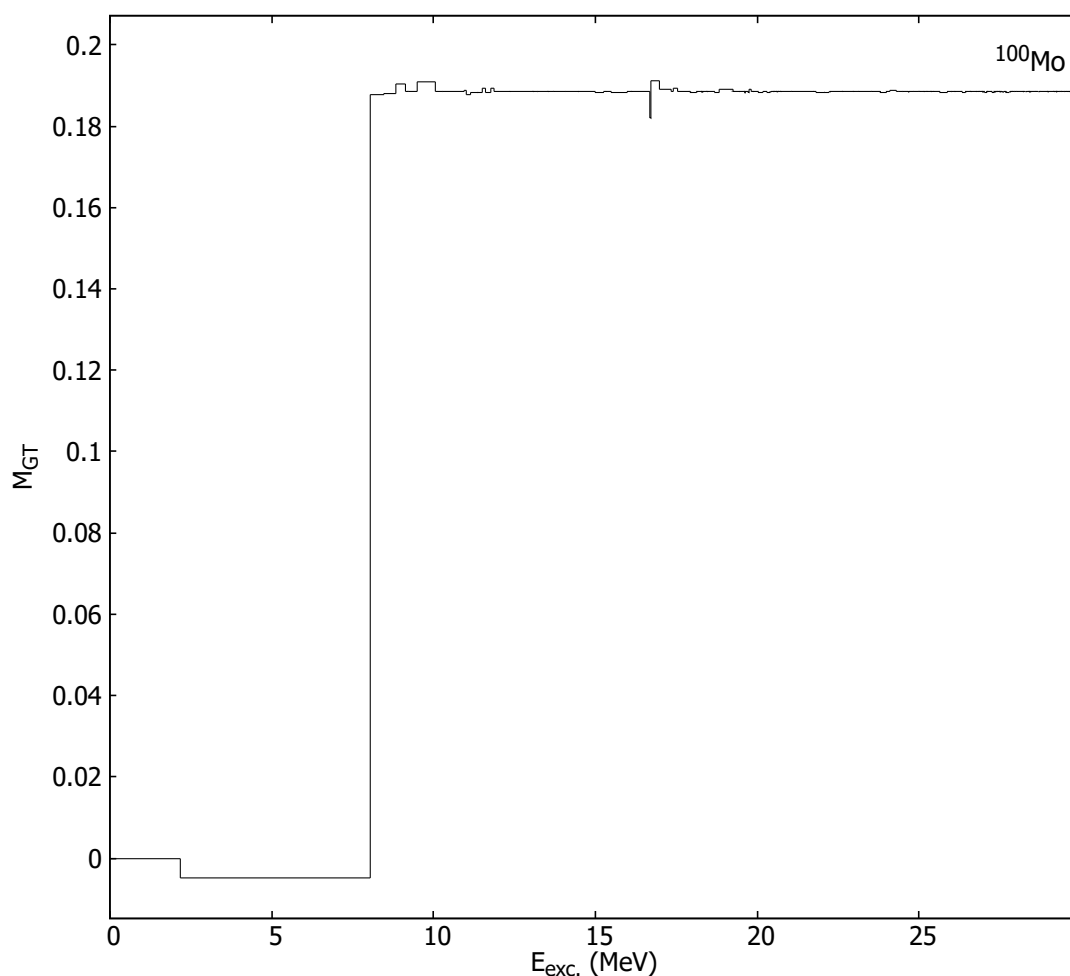


Slika 11.14: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$  raspad o snazi sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

definicije faktora preklopa (2.11) i (2.12) prikazana je na slici 11.16. Rezultati za interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX za dvoneutrinski dvostruki beta raspad  $^{100}\text{Mo}$ , za definiciju preklopa iz jednadžbe (2.11), su prikazani na slici 11.17.

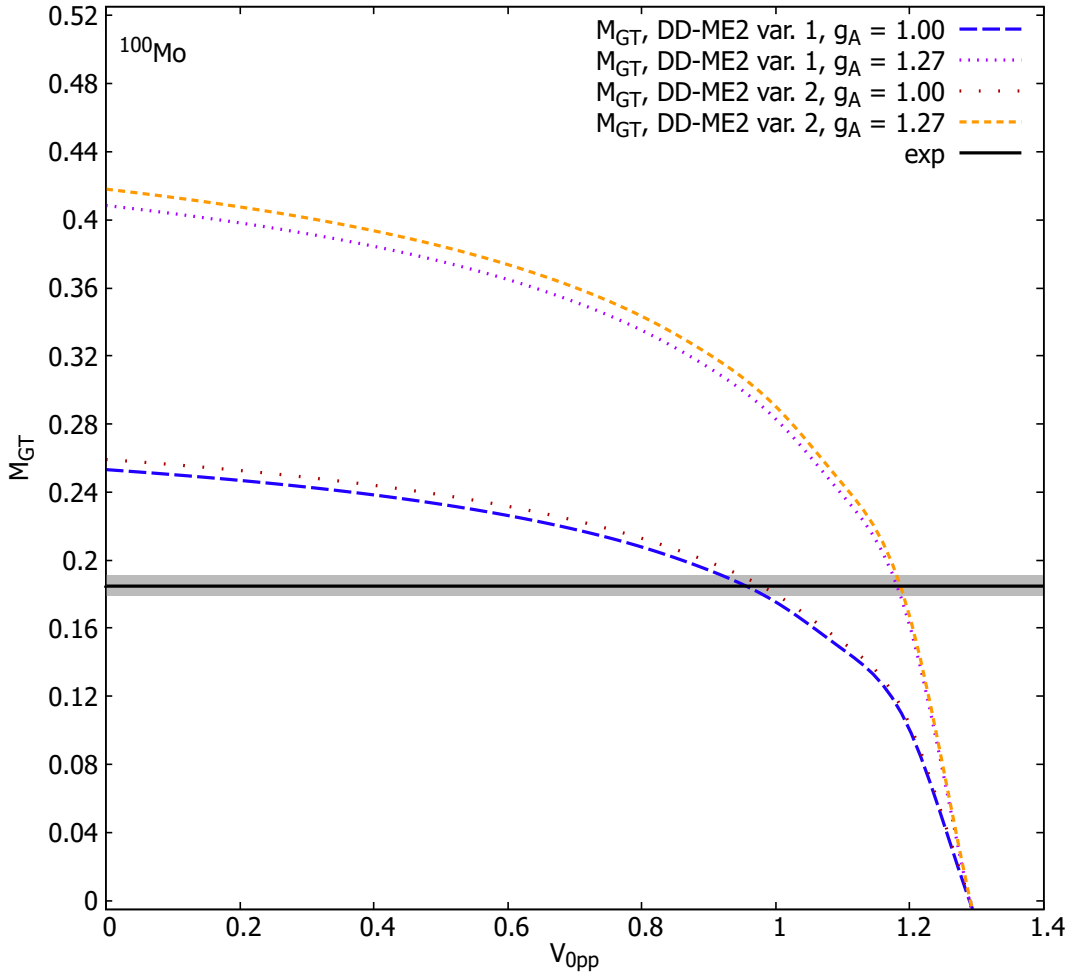
Tablica 11.7: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ , za različite interakcije.

|                              | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{100}\text{Mo}$ (MeV) | -8.515055 | -8.530935 | -8.553976 |
| $(E/A)^{100}\text{Ru}$ (MeV) | 8.534386  | 8.553976  | 8.553976  |
| $Q$ (MeV)                    | 5.0301    | 5.4011    | 3.097     |



Slika 11.15: Kumulativna suma nuklearnog matričnog elementa za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ , DD-ME2 interakcija.

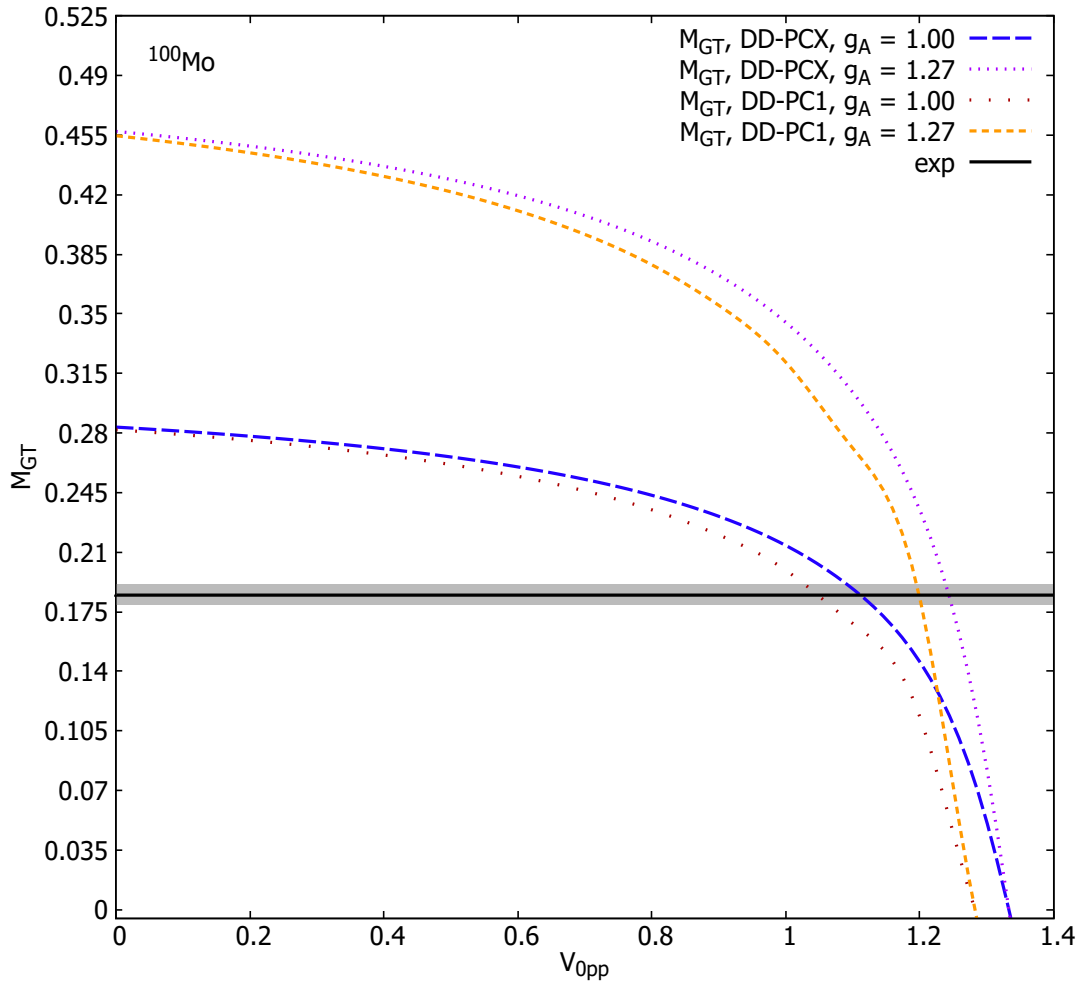
U slučaju raspada  $^{100}\text{Mo}$  naši rezultati su i dalje manji od Sk3+QRPA rezultata iz Ref. [201], mada ne drastično, pogotovo za  $g_A = 1.27$ . Kumulativna suma, koja se ponaša po SSD hipotezi, ne izgleda kao suma iz Ref.[118], gdje je većina doprinosa u "grbi" na srednjem dijelu raspona energija pobuđenja stanja u međujezgri, oko 15 MeV. Rezultati QRPA, RQRPA i SRQRPA računa za matrične elemente  $2\nu\beta\beta$  raspada iz Ref. [203] su slični našim rezultatima na iščezavajućem  $T=0$  sparivanju. QRPA i SRQRPA rezultati prelaze u nulu na vrijednostima  $g_{pp}$  sličnima vrijednostima  $V_{0pp}$  za koje naš matrični element iščezava, ali RQRPA rezultati prelaze u nulu na višim  $g_{pp}$  oko 1.4.



Slika 11.16: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$  raspad o parametru snage izoskalar-nog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

### 11.3.6 $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$

Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.8. Kumulativna suma matričnog elementa raspada  $^{116}\text{Cd}$ , za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , je prikazana na slici 11.18. Kvalitativno, slika je slična prijašnjima, s time da sada imamo dva glavna doprinosa na nižim energijama, ali oscilacije matričnih elemenata nakon 10 MeV su izraženije, dok bilo kakve značajne oscilacije prestaju nakon 20 MeV. Ovisnost matričnog elementa o snazi izoskalar-nog sparivanja  $V_{0pp}$  za DD-ME2 interakciju, i za obje varijante računafaktora preklopa (2.11) i (2.12), je prikazana na slici 11.19.

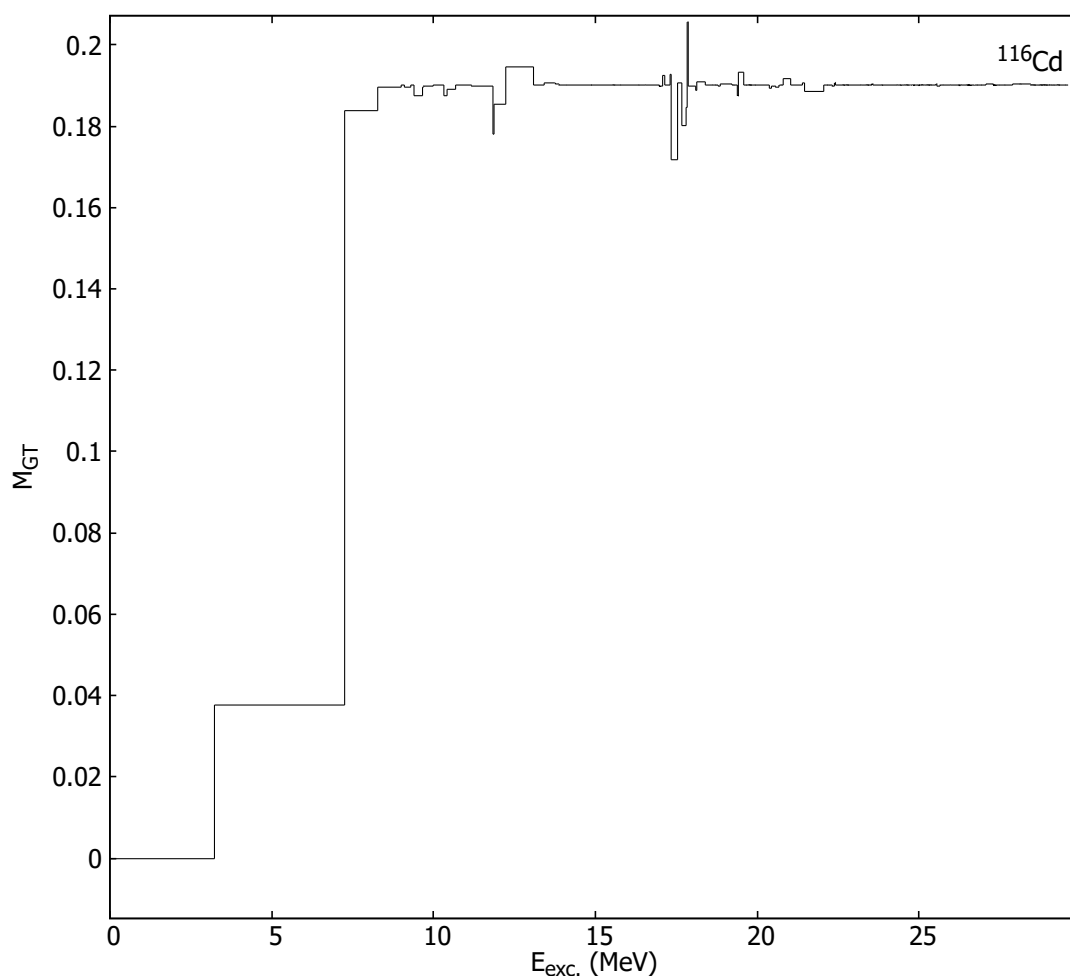


Slika 11.17: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$  raspad o snazi sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

Rezultati za interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX za dvoneutrinski dvostruki beta raspad  $^{116}\text{Cd}$ , koristeći definiciju preklopa (2.11) prikazani su na slici 11.20 u ovisnosti o  $V_{0pp}$ .

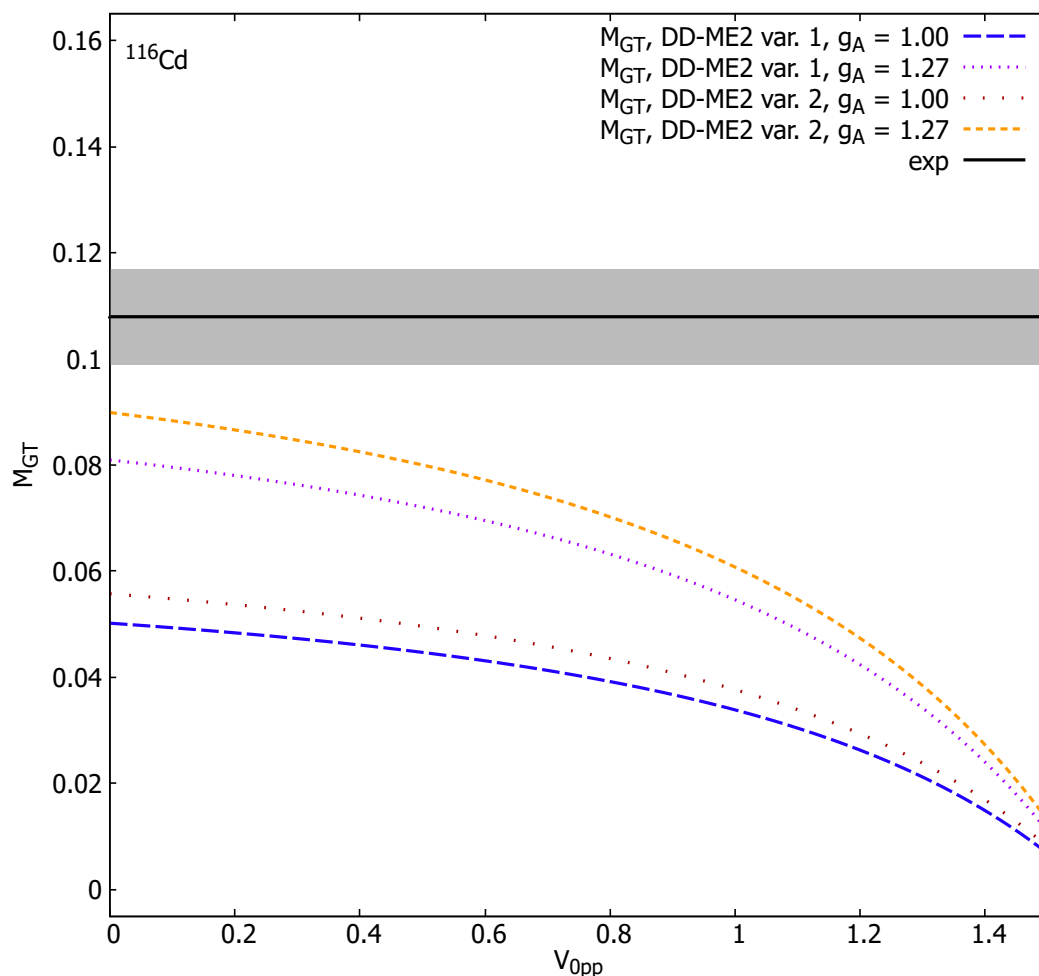
Tablica 11.8: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ , za različite interakcije.

|                              | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{116}\text{Cd}$ (MeV) | -8.475746 | -8.480519 | -8.504433 |
| $(E/A)^{116}\text{Sn}$ (MeV) | 8.502096  | 8.504433  | 8.504433  |
| $Q$ (MeV)                    | 6.1536    | 5.87102   | 3.097     |



Slika 11.18: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  nuklearnog matričnog elementa za  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$  raspad, DD-ME2 interakcija.

Naši rezultati za nuklearni matrični element za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{116}\text{Cd}$  su manji od svih rezultata dobivenih sa Sk3+QRPA interakcijom[201] osim za DD-PCX interakciju i  $g_A=1.27$ , što je istovremeno jedini slučaj gdje su naši rezultati iznad eksperimentalnih NME bar u jednom dijelu ovisnosti o  $V_{0pp}$ . Moguća je daljnja usporedba s pn-QRPA rezultatima Ref. [204]. Ti rezultati su oko dva puta veći od naših ali dosežu vrijednost nula na vrijednostima parametra  $g_{pp}$  koje su slične vrijednostima parametra  $V_{0pp}$  na kojima naši rezultati također iščezavaju. Nadalje, rezultati iz Ref. [204] približavaju se eksperimentalnim vrijednostima oko  $g_{pp} \approx 1.0$ , dok su naši rezultati za većinu interakcija i odabira  $g_A$  manji od eksperimentalne vrijednosti. Izuzetak je opet DD-PCX interakcija za  $g_A=1.27$ .

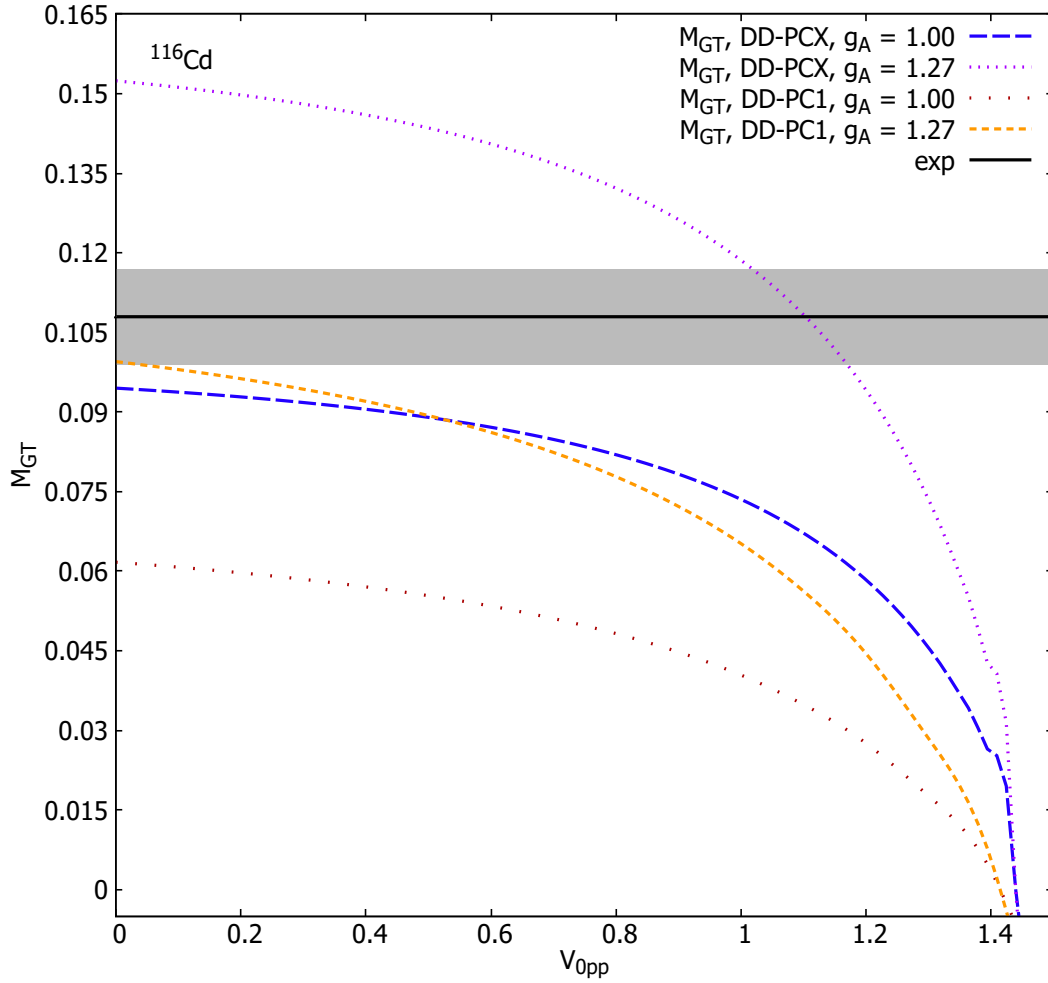


Slika 11.19: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$  raspad o parametru snage izoskalar-nog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

### 11.3.7 $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$

Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.9.

Ovdje primjećujemo nešto neobično:  $Q$  vrijednosti koje dobijemo iz RHB su negativne (osim u slučaju DD-PCX interakcije). To bi značilo da je  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{128}\text{Te}$  zabranjen. Znamo, međutim, da to nije točno; radi se o procesu koji je eksperimentalno zabilježen. Negativne  $Q$  vrijednosti predstavljaju ograničenje našeg modela, međutim odlučili smo ih koristiti umjesto, recimo,  $Q$  vrijednosti dobivenih iz eksperimenta da bi imali što je moguće više samosuglasan račun.



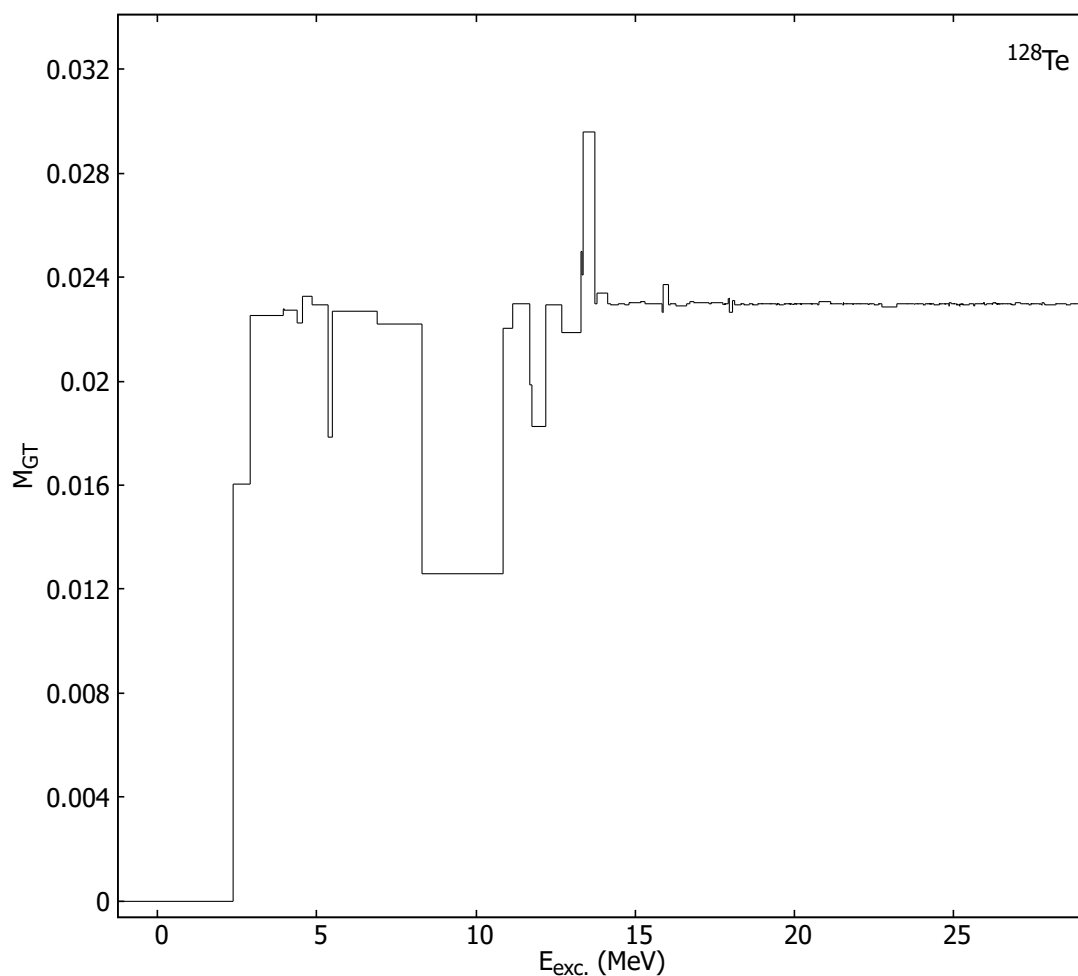
Slika 11.20: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$  raspad o snazi sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

Tablica 11.9: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$ , za različite interakcije.

|                              | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{128}\text{Te}$ (MeV) | -8.419480 | -8.429143 | -8.395915 |
| $(E/A)^{128}\text{Xe}$ (MeV) | 8.392453  | 8.395915  | 8.395915  |
| $Q$ (MeV)                    | -0.362457 | -1.15619  | 3.097     |

Kumulativna suma matričnog elementa raspada  $^{128}\text{Te}$ , za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , prikazana je na slici 11.21 za DD-ME2 interakciju. Opet primjećujemo dva glavna doprinosa na nižim energijama plus oscilacije matričnih elemenata na višim energijama. Ovisnost matričnog elementa o snazi izoskalarne interakcije  $V_{0pp}$  za

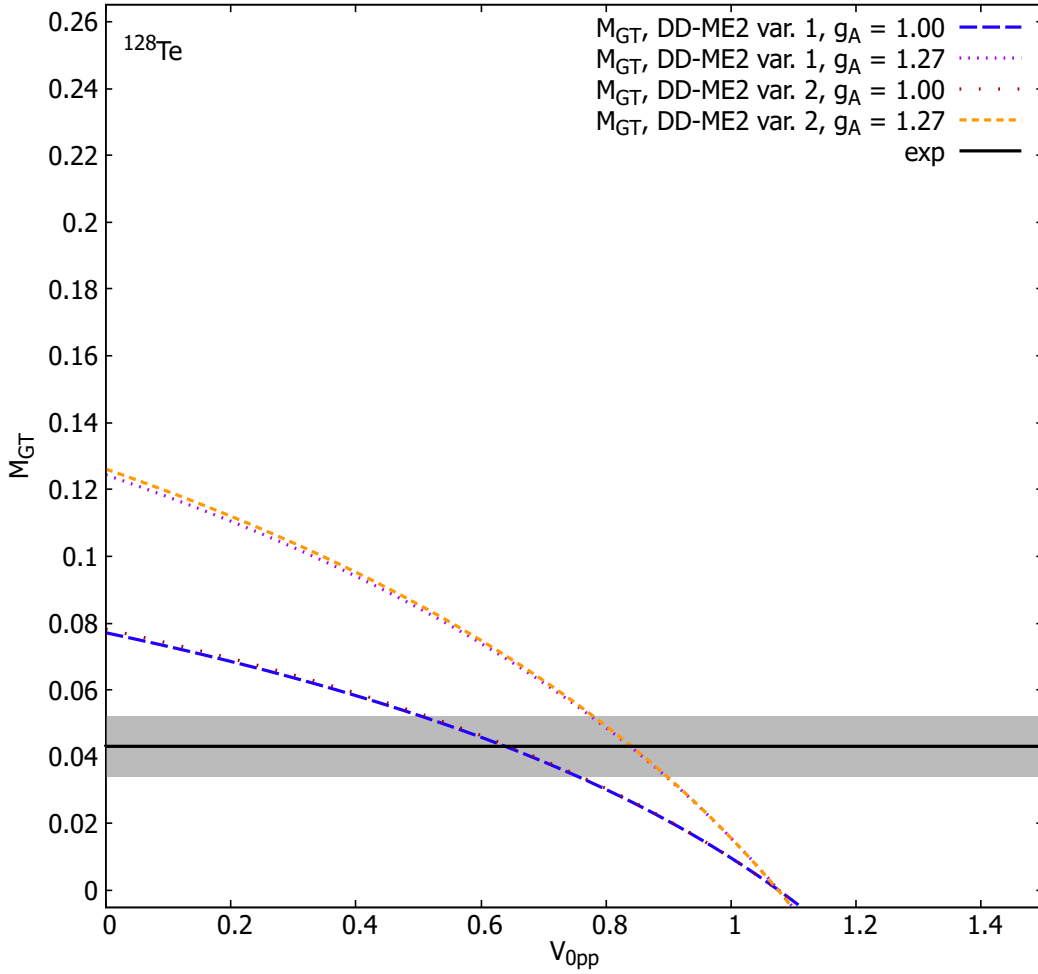
DD-ME2 interakciju, i za obje varijante računa faktora preklopa (2.11) i (2.12) prikazana je na slici 11.22. Rezultati za interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX za dvoneutrinski dvostruki beta raspad  $^{128}\text{Te}$  u ovisnosti o parametru  $V_{0pp}$ , za definiciju preklopa (2.11) prikazani su na slici 11.23.



Slika 11.21: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  nuklearnog matričnog elementa za  $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$  raspad, DD-ME2 interakcija.

Što se tiče usporedbe sa rezultatima Sk3+QRPA interakcije[201] za  $2\nu\beta\beta$  matrične elemente, naši rezultati su usporedivi s rezultatima koji su u Ref. [201] navedeni za deformirani račun. Rezultati sferičnog računa su nešto veći. Nadalje, naši rezultati su veći od rezultata pn-QRPA računa iz Ref. [204], i iščezavaju na sličnim vrijednostima parametra izoskalarnog sparivanja.



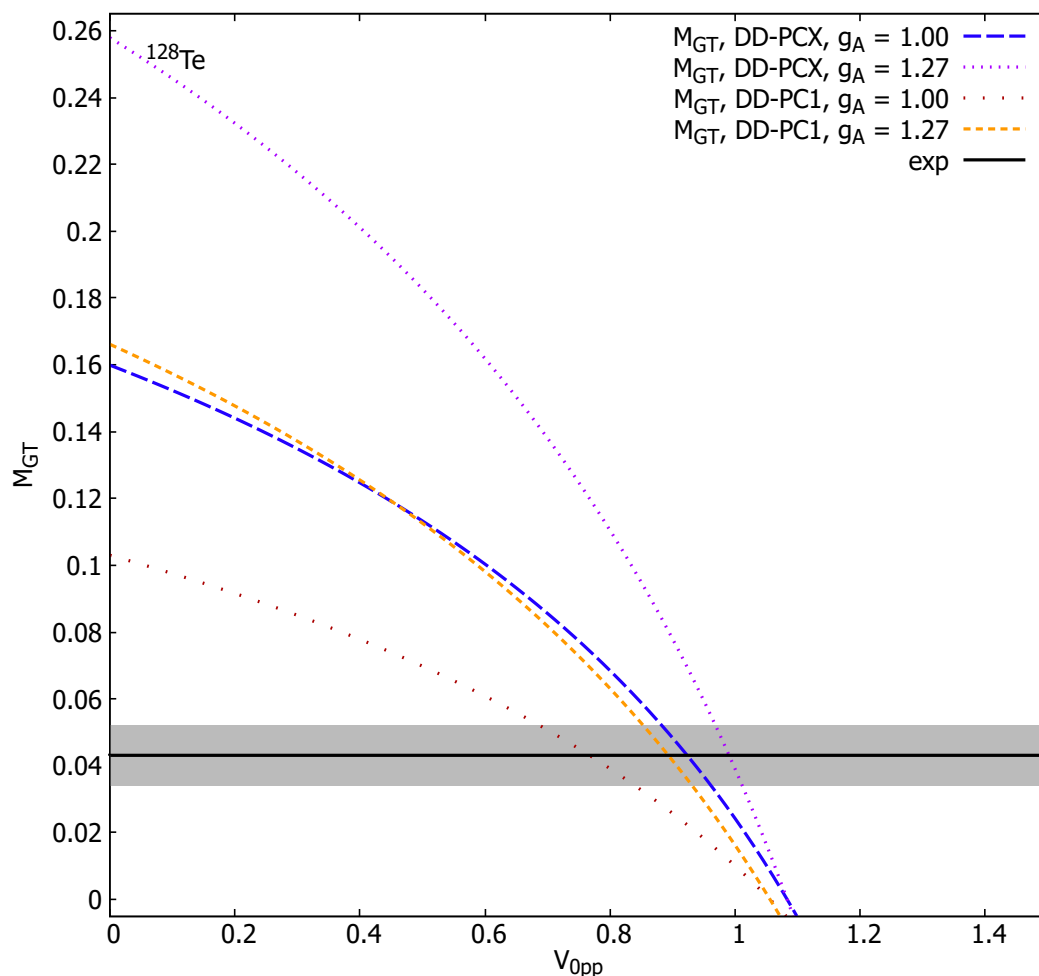


Slika 11.22: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$  raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

### 11.3.8 $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$

Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.10.

Kumulativna suma matričnog elementa raspada  $^{130}\text{Te}$ , za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , prikazana je na slici 11.24. Ovisnost matričnog elementa o snazi izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$  za DD-ME2 interakciju, i za obje definicije faktora preklopa (2.11) i (2.12), prikazana je na slici 11.25. Rezultati za interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX za dvoneutrinski dvostruki beta raspad  $^{130}\text{Te}$  u ovisnosti o parametru  $V_{0pp}$ , za definiciju preklopa (2.11) prikazani su na slici 11.26.

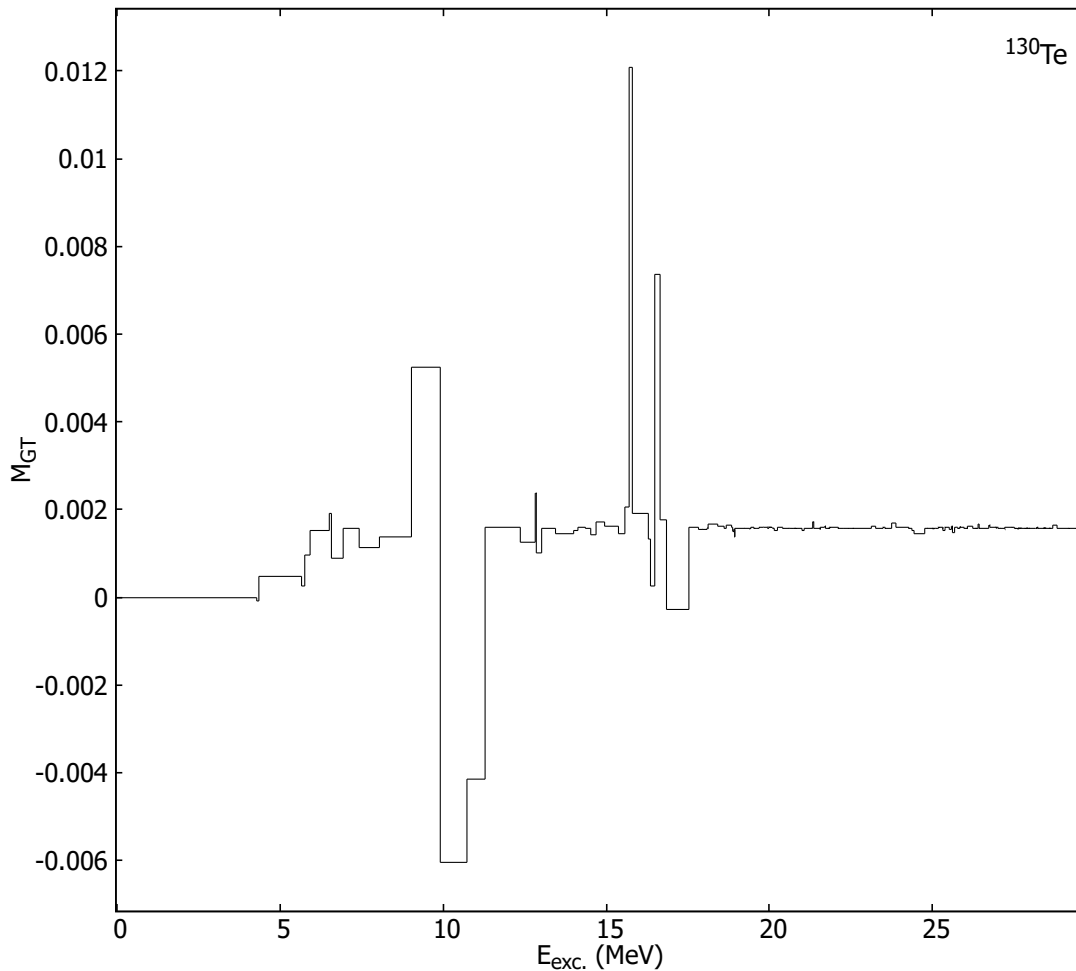


Slika 11.23: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matičnog elementa za  $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$  raspad o snazi sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

Tablica 11.10: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$ , za različite interakcije.

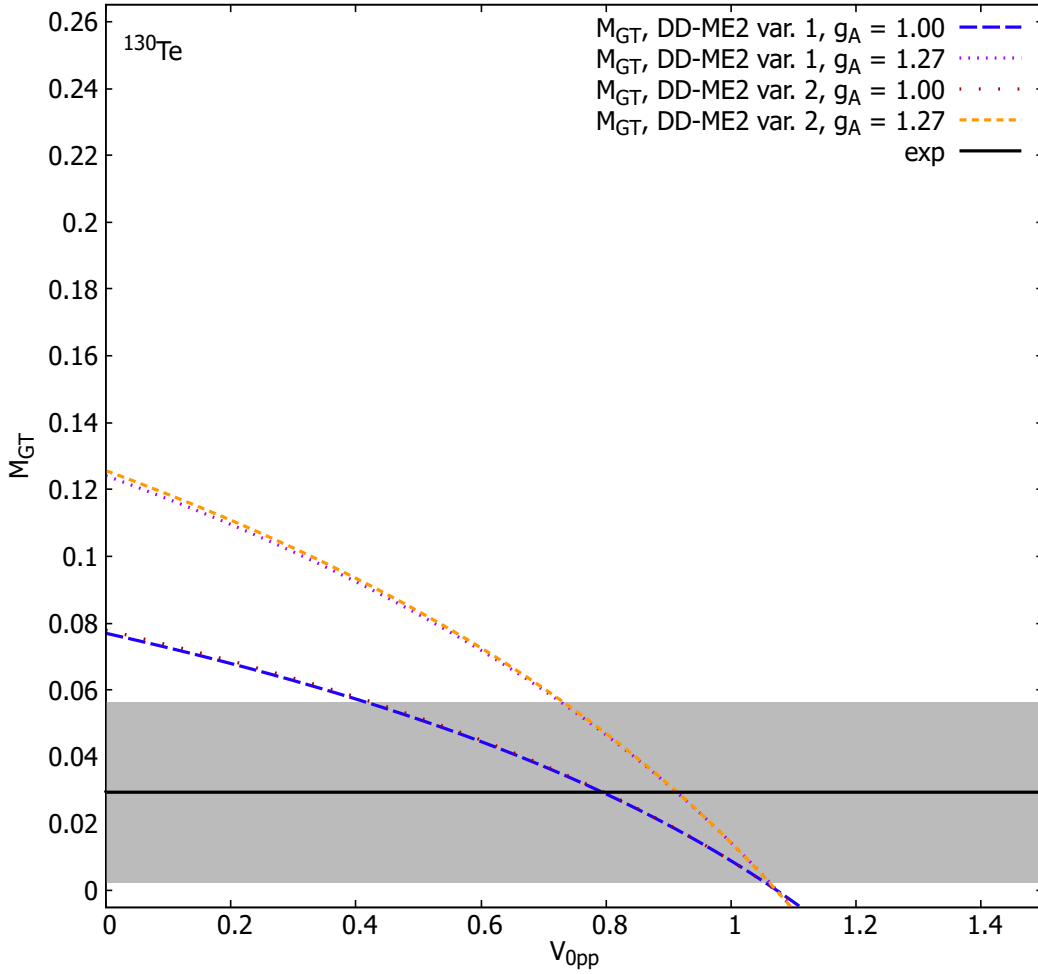
|                              | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{130}\text{Te}$ (MeV) | -8.409114 | -8.419504 | -8.402058 |
| $(E/A)^{130}\text{Xe}$ (MeV) | 8.397845  | 8.402058  | 8.402058  |
| $Q$ (MeV)                    | 1.63203   | 0.829019  | 3.097     |

U usporedbi s rezultatima Sk3+QRPA modela[201], naši rezultati za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{130}\text{Te}$  pri iščezavajućem izoskalarnom sparivanju su otprilike između rezultata navedenih u Ref. [201] za sferni i deformirani račun, ali čini se kao da je ovisnost naših rezultata o  $V_{0pp}$  u odnosu na druge nuklide koje smo razmatrali unutar RHBCS+PN-RQRPA računa snažnija nego ovisnost



Slika 11.24: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  nuklearnog matričnog elementa za  $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$  raspad, za DD-ME2 interakciju.

matričnog elementa za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{130}\text{Te}$  iz Ref. [201] o parametru  $\kappa_{pp}$  u odnosu na druge nuklide iz navedenog rada. S druge strane, naši rezultati su veći od odgovarajućih SkM\*+QRA rezultata iz Ref. [47] i, opet, ovisnost o izoskalarnom sparivanju se čini izraženijom. Kumulativna suma, kao što možemo očekivati, nema oblik kao iz Ref.[118] sa "grbom" na srednjem rasponu energija stanja u međujezgri, premda pokazuje dva izražena vrha u području oko 15 MeV.

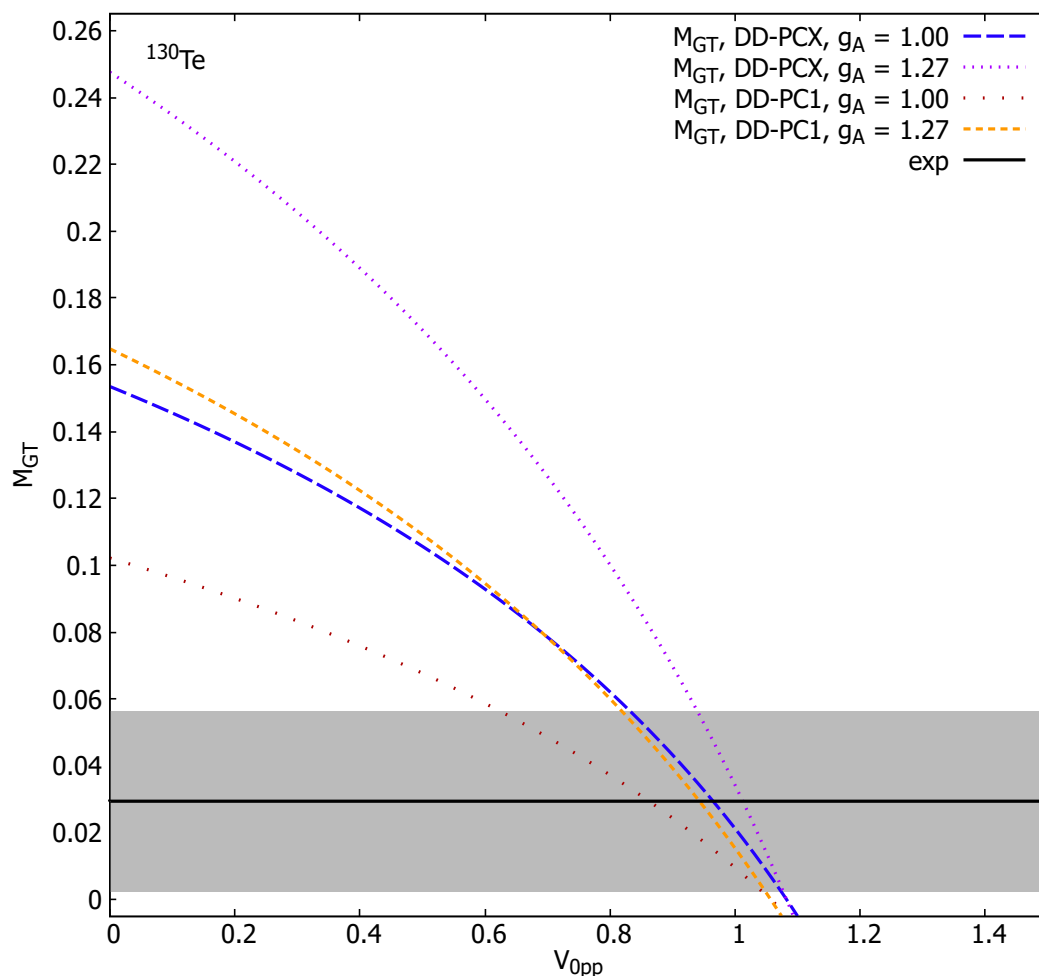


Slika 11.25: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$  raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednažbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednažba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

### 11.3.9 $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$

Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.11.

Kumulativna suma matričnog elementa raspada  $^{136}\text{Xe}$ , za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednažbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , prikazana je na slici 11.27. Ovisnost matričnog elementa o snazi izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$  za DD-ME2 interakciju, i za obje definicije faktora preklopa (2.11) i (2.12), prikazana je na slici 11.28. Rezultati za ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za raspad  $^{136}\text{Xe}$  o parametru snage  $T=0$  sparivanja  $V_{0pp}$  za definiciju preklopa (2.11) i interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX prikazani su na slici 11.29.

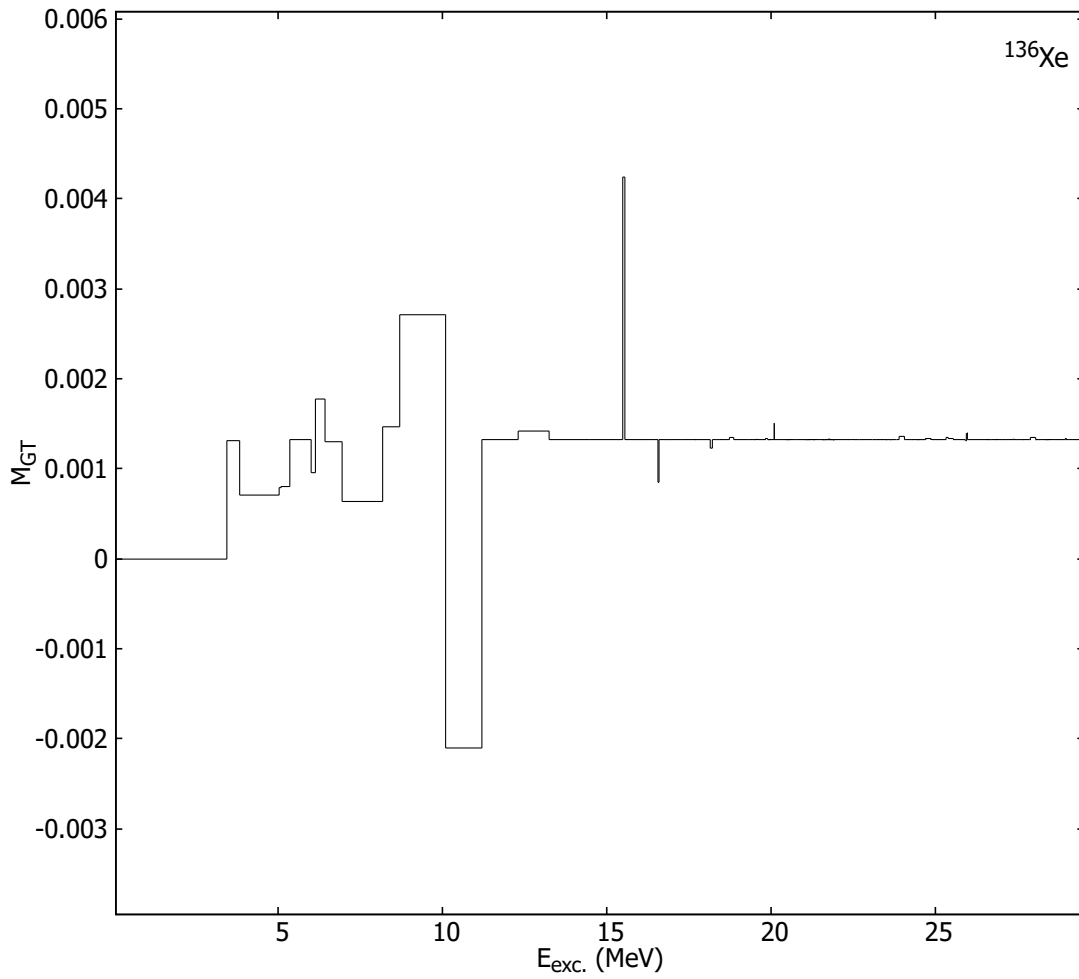


Slika 11.26: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matičnog elementa za  $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$  raspad o snazi sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

Tablica 11.11: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Be}$ , za različite interakcije.

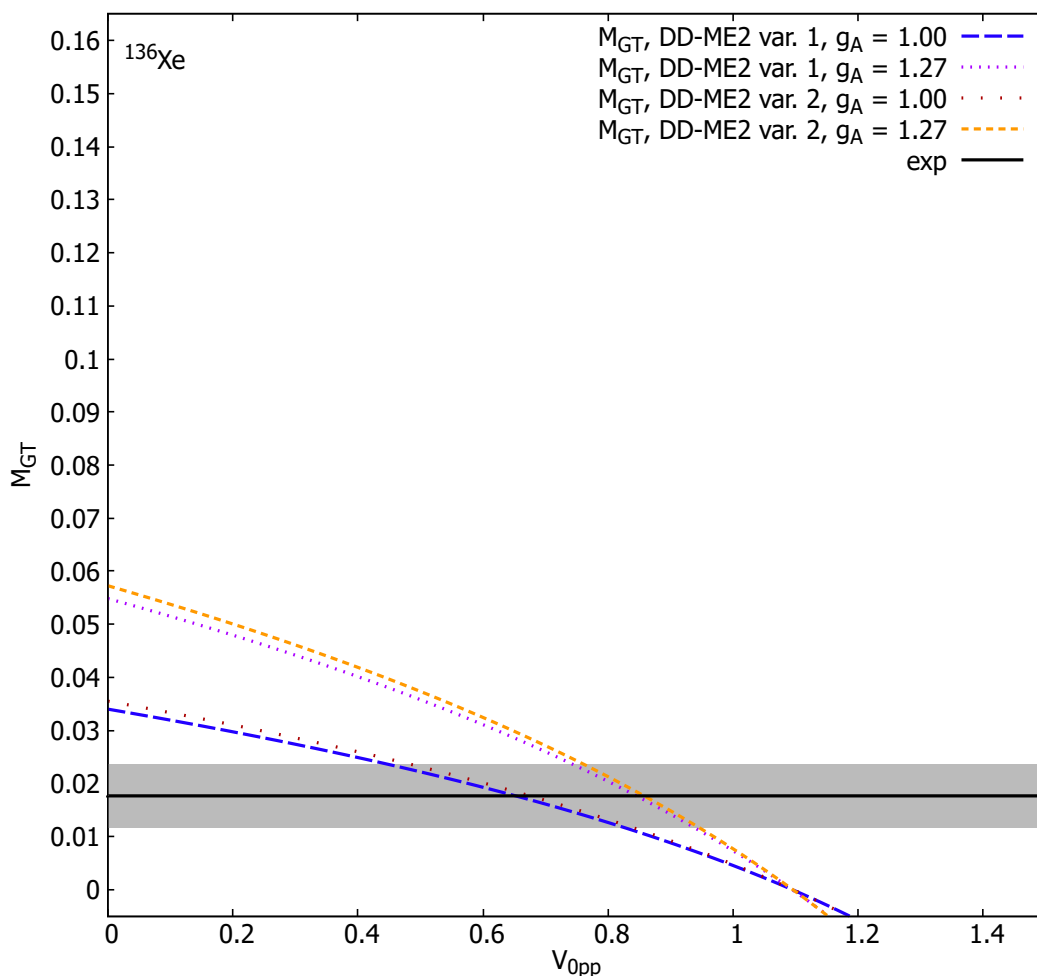
|                              | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{136}\text{Xe}$ (MeV) | -8.399363 | -8.402350 | -8.389441 |
| $(E/A)^{136}\text{Ba}$ (MeV) | 8.392598  | 8.389441  | 8.389441  |
| $Q$ (MeV)                    | 2.17696   | 1.34137   | 3.097     |

U usporedbi s rezultatima Sk3+QRPA modela[201], naši rezultati za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{136}\text{Xe}$  pri iščezavajućem izoskalarnom sparivanju su slični rezultatima navedenima u Ref. [201] za deformirani račun, i značajno iznad rezultata navedenih za sferno-simetrični račun. Nadalje, naši rezultati su veći od odgovarajućih SkM\*+QRPA rezultata iz Ref. [47] osim za rezultate



Slika 11.27: Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  nuklearnog matričnog elementa za  $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$  raspad, za DD-ME2 interakciju.

dobivene s interakcijom DD-ME2, koji su usporedivi s rezultatima nemodificirane SkM\* interakcije.

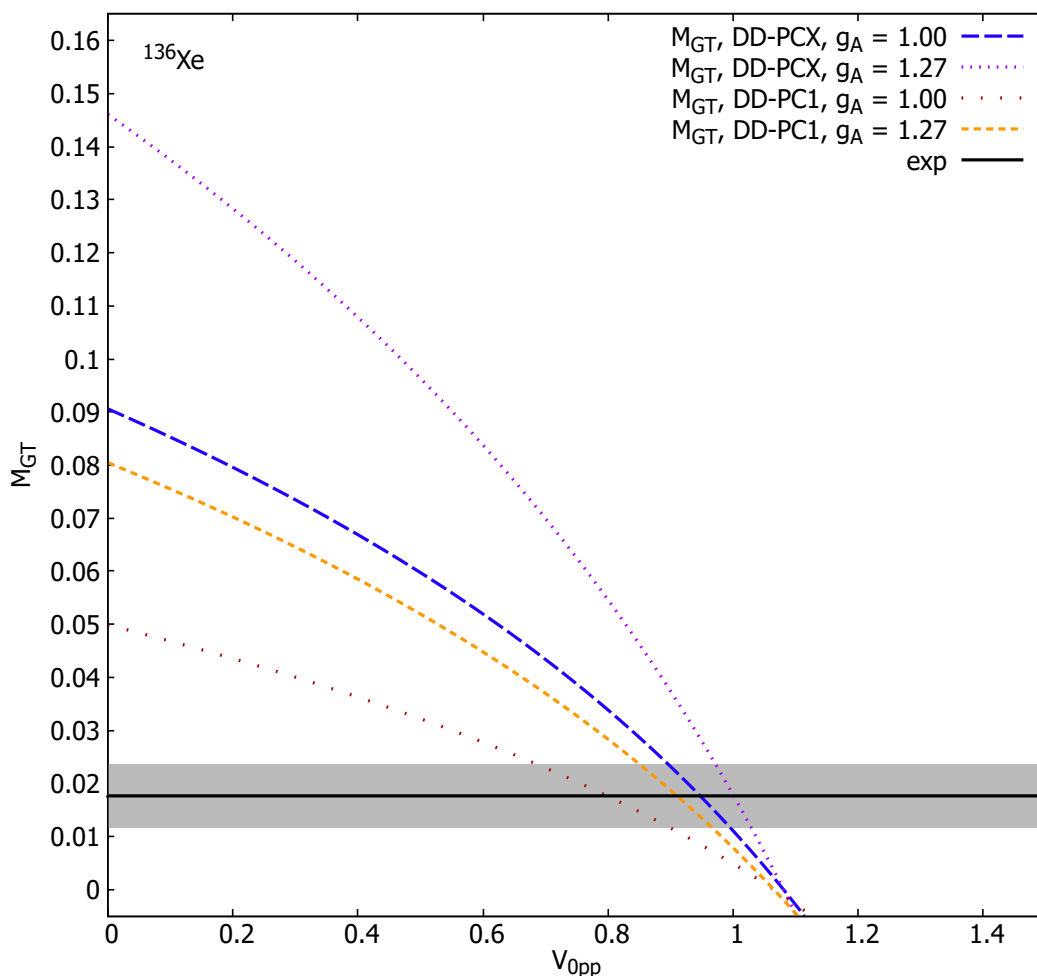


Slika 11.28: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$  raspad o parametru snage izoskalar-nog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

### 11.3.10 $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$

Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti dobivene iz istih, za različite interakcije dane su u tablici 11.12.

Kumulativna suma  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa raspada  $^{150}\text{Nd}$ , za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11) i za  $g_A = 1.0$ , prikazana je na slici 11.30. Ovisnost matričnog elementa o snazi izoskalar-nog sparivanja  $V_{0pp}$  za DD-ME2 interakciju, i za obje definicije faktora preklopa (2.11) i (2.12), prikazana je na slici 11.31. Rezultati za ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za raspad  $^{150}\text{Nd}$  o parametru snage  $T=0$  sparivanja  $V_{0pp}$  za definiciju preklopa (2.11) i interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX prikazani su na slici 11.32.



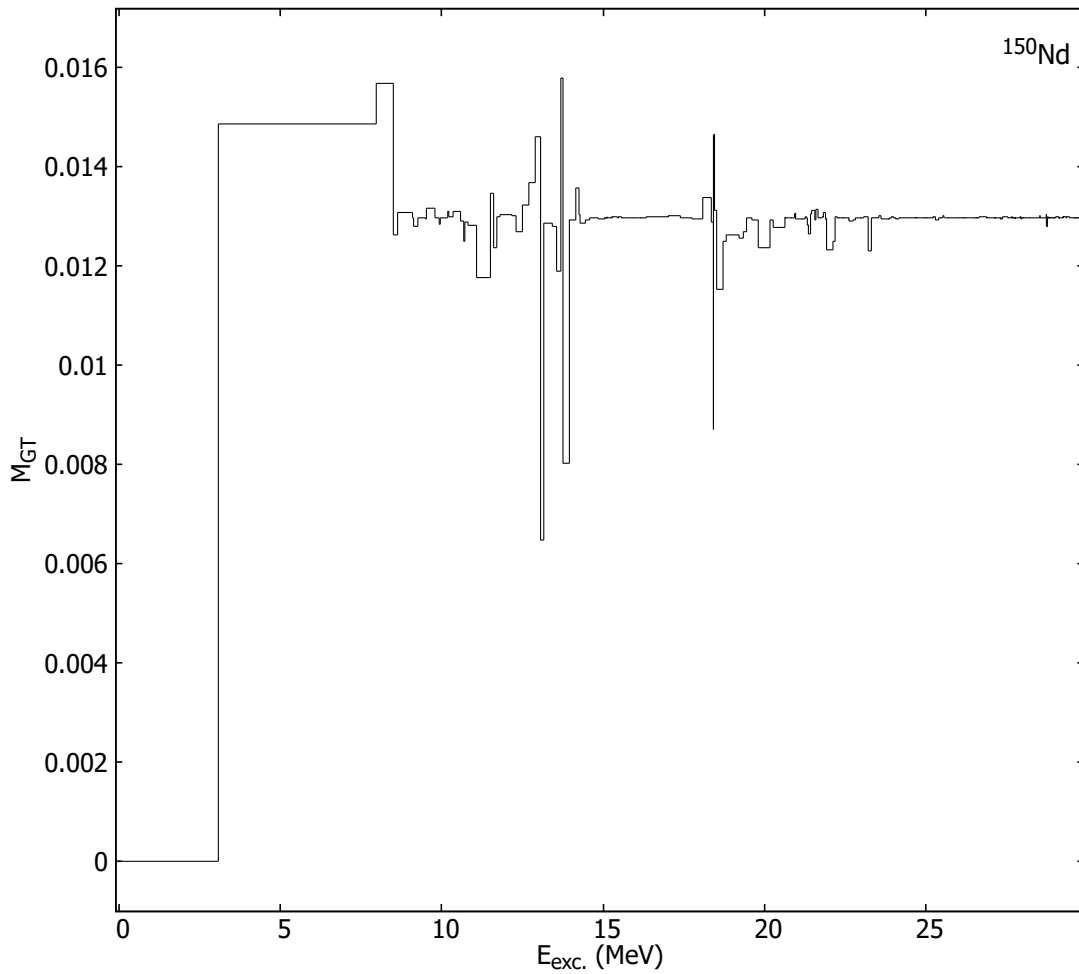
Slika 11.29: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$  raspad o snazi sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

Tablica 11.12: Energije vezanja i  $Q$  vrijednosti za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ , za različite interakcije.

|                              | DD-ME2    | DD-PC1    | DD-PCX    |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $(E/A)^{150}\text{Nd}$ (MeV) | -8.182691 | -8.203744 | -8.167677 |
| $(E/A)^{150}\text{Sm}$ (MeV) | 8.204908  | 8.222972  | 8.194843  |
| $Q$ (MeV)                    | 3.4703    | 3.2461    | 3.8414    |

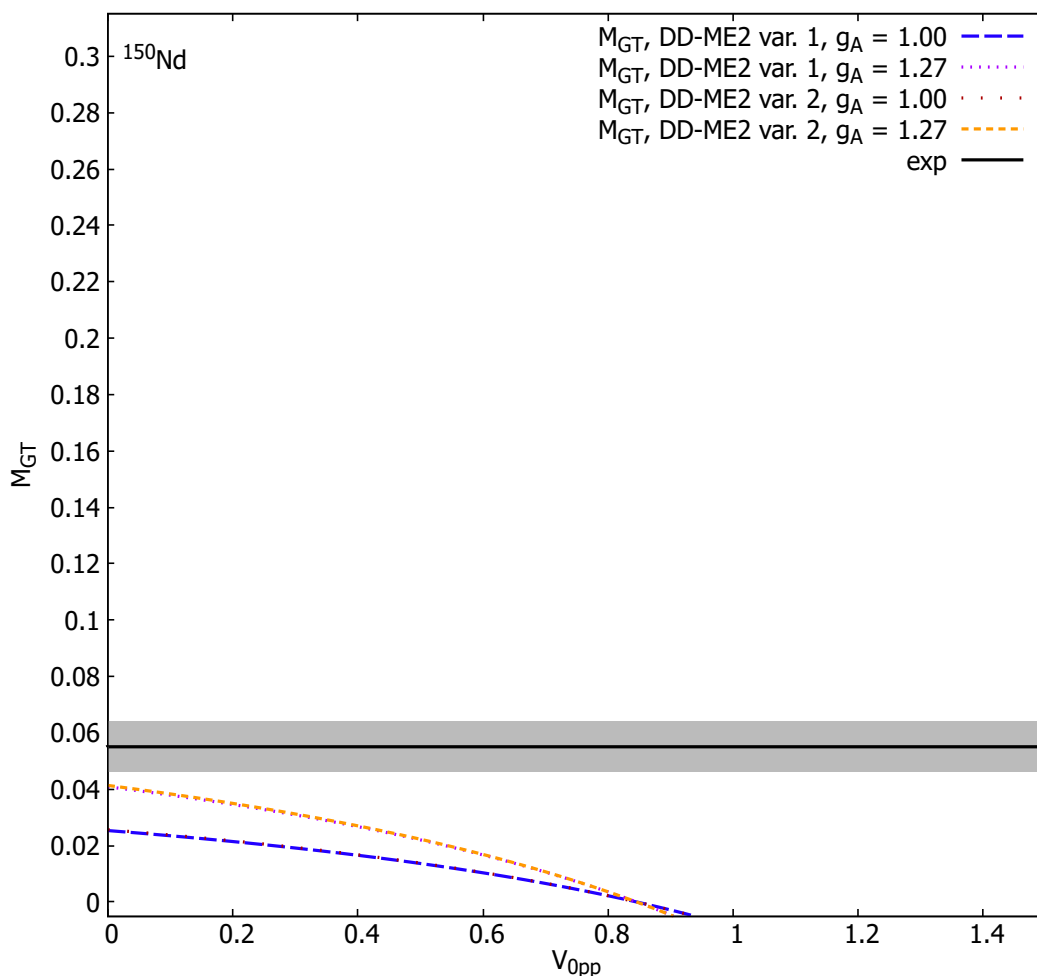
Dobiveni nuklearni matrični elementi drastično ovise o modelu, odnosno o interakciji koja je korištena, što je jedini takav slučaj među nuklidima čije smo raspade razmatrali u ovom radu. Uspoređujući dobivene NME s rezultatima drugih modela, možemo primjetiti da su rezultati za DD-PCX interakciju usporedivi s pn-QRPA rezultatima za SkM[201] i SkM\*[47] interakcije,





Slika 11.30: Kumulativna suma nuklearnog matričnog elementa za  $2\nu\beta\beta$  raspad  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ , DD-ME2 interakcija.

dok su rezultati za DD-ME2 i DD-PCX interakciju usporedivi jedino s jednim od ekstremnih slučajeva za deformirani račun u Ref. [201]. Ovakva drastična ovisnost o modelu ukazuje na moguća ograničenja našeg modela, premda je jedinstvena među nuklidima koji su razmotreni u radu.

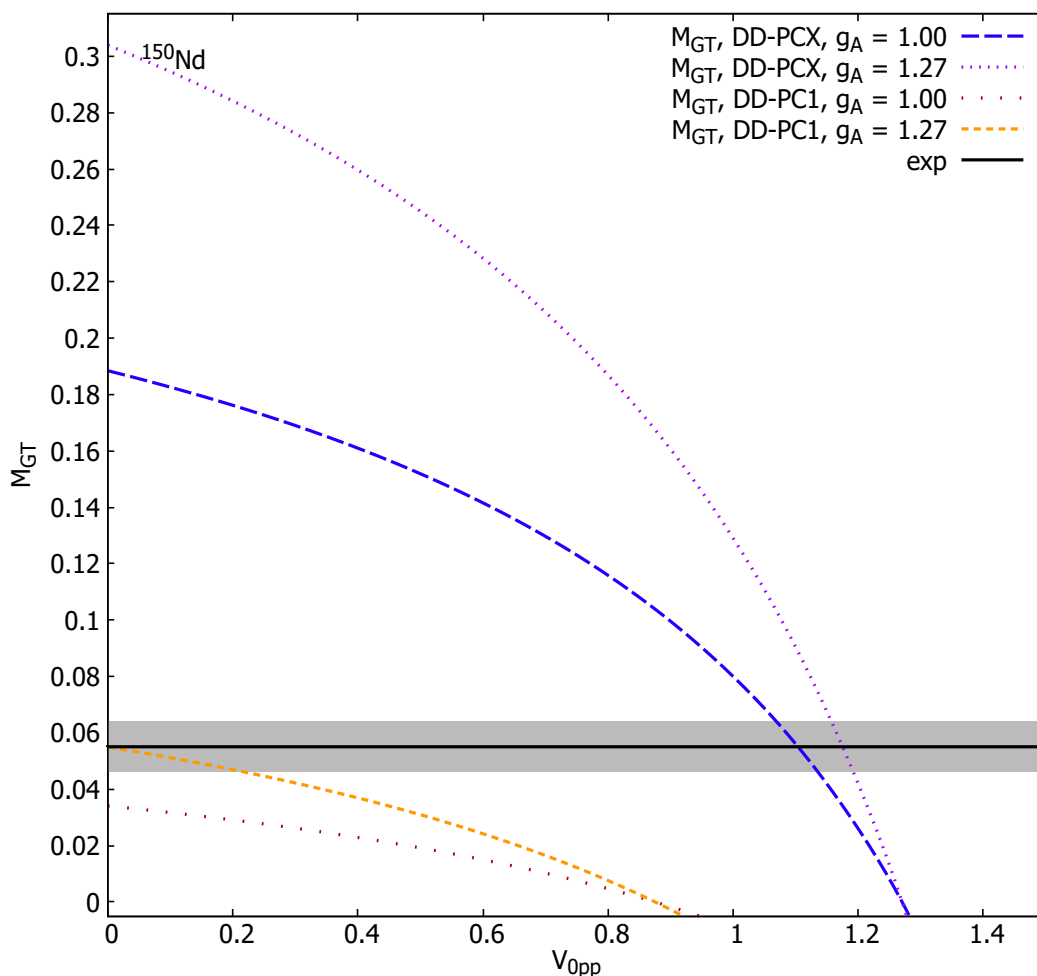


Slika 11.31: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$  raspad o parametru snage izoskalar-nog sparivanja  $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija,  $g_A = 1.0$  i  $g_A = 1.27$ .

## 11.4 Usporedba s drugim teorijskim pristupima i rasprava

Korisno je usporediti naše rezultate s rezultatima drugih pristupa, pogotovo ako su rezultati nedavni. Želimo istražiti mogu li rezultati naših računa biti barem dobri kao i rezultati ostalih modernih pristupa, ako ne i bolji. Za potrebe usporedbe, uzeti ćemo  $g_A = 1.0$ ; drugim riječima, uključujemo gušenje aksijalnog vezanja ali ne na pretjerani, nefizikalni način koji bi podrazumijevao da stavimo  $g_A < 1$ . Rezultati za  $g_A = 1.27$  bi bili potpuno analogni; odnos između dva skupa rezultata je jednostavno skaliranje.

Odabir  $g_A = 1.0$  podržavaju i PN-RQRPA računi stope uhvata muona [31], gdje je aksijalno-



Slika 11.32: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$  raspad o snazi sparivanja  $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem.

vektorsko gušenje bilo potrebno da bi se reproducirale eksperimentalne stope uhvata. Isto gušenje se koristilo za račun dozvoljenih i zabranjenih prijelaza u opsežnom izvrednjavanju stopa nuklearnog beta raspada[27]. Naš stav je da, čak i kad bi mogli dobiti na preciznosti modela tako da smanjimo  $g_A$  (kao što neki autori zagovaraju[90], puno više bi izgubili na preciznosti i na prediktivnoj moći modela, budući da bi u tom slučaju  $g_A$  efektivno postao još jedan dodatni slobodni parametar modela. Osim što nam pomažu ocijeniti kvalitetu vlastitih rezultata, usporedbe s rezultatima prijašnjih računa nam mogu dati osjećaj za ovisnost rezultata o modelu. Uglavnom ćemo prikazati usporedbe za DD-ME2 interakciju; rezultati za druge interakcije slijede potpuno analogno.

Kao primjer, u tablici 11.13 prikazana je usporedba  $2\nu\beta\beta$  matričnih elemenata dobivenih u

Tablica 11.13: Usporedba NME za  $2\nu\beta\beta$  raspad izračunat u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija,  $V_{0pp} = 0$ ) i pn-QRPA NME iz Ref. [3].

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-ME2) | pn-QRPA [3] |
|-------------------|----------------------|-------------|
| $^{100}\text{Mo}$ | 0.259                | 0.6560      |
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.056                | 0.2169      |
| $^{128}\text{Te}$ | 0.078                | 0.1041      |
| $^{130}\text{Te}$ | 0.079                | 0.1066      |

ovom radu koristeći RHBCS+PN-RQRPA model s DD-ME2 interakcijom, za definiciju preklopa (2.11) i  $V_{0pp} = 0$  s QRPA vrijednostima koje su za nekoliko  $A > 100$  nuklida dobili Pirinen i ostali [3], koristeći snagu izoskalarnog sparivanja od  $g_{pp} = 0.7$ . Gornja granica naših rezultata, koju predstavljaju nuklearni matrični elementi dobiveni s iščezavajućim izoskalarnim sparivanjem, je manja od vrijednosti koje navodi Ref. [3]. Osim za  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$  i  $^{116}\text{Cd}$  naši matrični elementi su bliže eksperimentalnim matričnim elementima nego QRPA rezultati.

Slično, rezultate RHBCS+PN-RQRPA modela s DD-ME2 interakcijom, za definiciju preklopa (2.11) i  $V_{0pp} = 0$  možemo uspoređivati s QRPA rezultatima Šimkovića i drugih [30], kao što je napravljeno u tablici 11.14. Ova tablica ilustrira i neke od poteškoća direktne usporedbe; jer, premda se može činiti da su dva skupa rezultata u izvrsnom slaganju, osim za  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{82}\text{Se}$ , naši rezultati su dobiveni za iščezavajuće izoskalarno sparivanje, dok je u slučaju Ref. [30] renormalizacijski faktor  $g_{pp}$ , koji igra istu ulogu kao i naš  $V_{0pp}$ , podjeljen na dva kanala ovisno o izospinskoj simetriji,  $g_{pp}^{T=1}$  i  $g_{pp}^{T=0}$  (njihove vrijednosti su isto dane u tablici). Osim toga, pn-QRPA rezultat predstavlja efektivan matrični element s jako gušenom vrijednosti  $g_A = 0.904$ . Zanimljivo je da su sa izuzetkom  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{82}\text{Se}$  naši matrični elementi jako slični matričnim elementima iz Ref. [30], premda su naši rezultati dobiveni s iščezavajućim izoskalarnim sparivanjem.

Dobivene  $2\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente možemo usporediti i s rezultatima drugih teorijskih pristupa. Tako je u tablici 11.15 prikazana usporedba između matričnih elemenata dobivenih u ovom radu kao rezultat RHBCS+PN-RQRPA modela s DD-ME2 interakcijom, za definiciju preklopa (2.11) i  $V_{0pp} = 0$  i NME dobivenih kao rezultat modela međudjelujućih bozona (IBM)[35, 36]. U ovom slučaju se ne moramo brinuti oko renormalizacijskih i sličnih parametara, budući da isti nisu dio IBM pristupa. Pošto je IBM rezultat izračunat u aproksimaciji prosječne energije, isto je napravljeno i za nuklearne matrične elemente koje navodimo.  $2\nu\beta\beta$  matrični elementi koje navode Barea i Iachello ne sadrže energetska nazivnik, tako da su, da bi usporedba uopće bila moguća, podjeljeni sa istim nazivnicima koje mi koristimo, a koji su tabulirani u Ref. [42]. Rezultati IBM pristupa su sustavno viši od rezultata koje dobijemo

Tablica 11.14: Usporedba NME za  $2\nu\beta\beta$  raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija,  $V_{0pp} = 0$ ) i pn-QRPA matričnih elemenata iz Ref. [30], sa faktorima renormalizacije sparivanja  $g_{pp}^{T=1}$  and  $g_{pp}^{T=0}$  danima u zadnja dva stupca.

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-ME2) | pn-QRPA [30] | $g_{pp}^{T=1}$ [30] | $g_{pp}^{T=0}$ [30] |
|-------------------|----------------------|--------------|---------------------|---------------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | 0.078                | 0.019        | 1.028               | 0.745               |
| $^{76}\text{Ge}$  | 0.070                | 0.077        | 1.021               | 0.733               |
| $^{82}\text{Se}$  | 0.041                | 0.071        | 1.016               | 0.737               |
| $^{96}\text{Zr}$  | 0.140                | 0.162        | 0.961               | 0.739               |
| $^{100}\text{Mo}$ | 0.259                | 0.306        | 0.985               | 0.799               |
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.056                | 0.059        | 0.892               | 0.877               |
| $^{128}\text{Te}$ | 0.078                | 0.076        | 0.965               | 0.741               |
| $^{130}\text{Te}$ | 0.079                | 0.065        | 0.963               | 0.737               |

Tablica 11.15: Usporedba NMEs za  $2\nu\beta\beta$  raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija,  $V_{0pp} = 0$ ) u aproksimaciji prosječne energije i IBM matričnih elemenata iz Ref. [36].

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-ME2) | IBM [36] |
|-------------------|----------------------|----------|
| $^{48}\text{Ca}$  | 0.121                | 0.213    |
| $^{76}\text{Ge}$  | 0.110                | 0.471    |
| $^{82}\text{Se}$  | 0.071                | 0.356    |
| $^{96}\text{Zr}$  | 0.125                | 0.208    |
| $^{100}\text{Mo}$ | 0.210                | 0.272    |
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.056                | 0.197    |
| $^{128}\text{Te}$ | 0.079                | 0.308    |

s iščezavajućim izoskalarnim sparivanjem, što možemo promatrati kao prednost našeg modela jer su s izuzetkom  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$  i  $^{116}\text{Cd}$  eksperimentalni NME još ispod naših rezultata

Usporedba je moguća i s rezultatima međudjelujućeg modela Ijusaka, ISM, koji je prikazan u tablici 11.16. Budući da je izoskalarno sparivanje značajna pojava u ISM-u, rezultate istog uspoređujemo sa našim rezultatima izračunatima, kao prije, koristeći RHBCS+PN-RQRPA model i definiciju preklopa (2.11), ali s optimiziranom vrijednosti  $V_{0pp}$  iz tablice 11.2. Primijećujemo da su naši matrični elementi značajno manji od ekvivalentnih matričnih elemenata dobivenih u ISM pristupu. Koliko su ti rezultati blizu eksperimentalnim rezultatima ćemo raspraviti u odjeljku 11.5.

Nuklearni matrični elementi izračunati u pn-QRPA okviru, za neke od jezgara koje razmatramo u ovom radu, se mogu naći i u Ref. [38]. U tome radu, vrijednosti parametara  $g_A$  i  $g_{pp}$  su dobivene prilagodbom tako da se reproduciraju  $ft$  vrijednosti prijelaza između izobarnih tri-

Tablica 11.16: Usporedba NMEs za  $2\nu\beta\beta$  raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, optimizirani  $V_{0pp}$ ) u aproksimaciji prosječne energije i ISM matričnih elemenata (Ref. [37] osim ako je naznačeno drugačije).

|                         | PN-RQRPA<br>(DD-ME2) | ISM ([37]) |
|-------------------------|----------------------|------------|
| $^{48}\text{Ca}$        | 0.019                | 0.026      |
| $^{76}\text{Ge}$        | 0.001                | 0.104      |
| $^{82}\text{Se}$        | 0.001                | 0.109      |
| $^{128}\text{Te}$ [205] | 0.006                | 0.030      |
| $^{130}\text{Te}$       | 0.002                | 0.061      |
| $^{136}\text{Xe}$ [205] | 0.001                | 0.013      |

Tablica 11.17: Usporedba NMEs za  $2\nu\beta\beta$  raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, optimizirani  $V_{0pp}$ ) i pn-QRPA matričnih elemenata iz Ref. [38].

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-ME2) | PN-QRPA ([38])<br>triplet | PN-QRPA ([38])<br>multiplet |
|-------------------|----------------------|---------------------------|-----------------------------|
| $^{100}\text{Mo}$ | 0.189                | 0.153                     | 0.131                       |
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.038                | 0.153                     | 0.160                       |
| $^{128}\text{Te}$ | 0.006                | 0.069                     | 0.095                       |

pleta ili u nekim slučajevima multipleta. Usporedba s našim rezultatima, izračunatima koristeći RHBCS+PN-RQRPA model i definiciju preklopa (2.11) na optimiziranim vrijednostima  $V_{0pp}$  prikazana je u tablici 11.17. Primjećujemo da su vrijednosti NME dobivene modelima koje se uspoređuju slične za  $^{100}\text{Mo}$ , dok su nuklearni matrični elementi koje dobijemo za  $^{116}\text{Cd}$  i  $^{128}\text{Te}$  manji od rezultata iz Ref. [38].

Naše rezultate možemo usporediti i s manje korištenim pristupima – recimo sa rezultatima nedavnih računa dvostrukih beta raspada u okviru efektivne teorije polja. Takve teorije opisuju ponašanje jezgara na niskim energijama, preko niskoenergetskih stupnjeva slobode. Utjecaji visokoenergetske fizike su uzeti u obzir u okviru niskoenergetskih konstanti budući da se iste prilagođavaju eksperimentalnim podacima. U efektivnoj teoriji (ET) opisanoj u Ref.[39] niskoenergetski stupnjevi slobode su nukleoni vezani za sfernu parno-parnu sredicu i kvadrupolni fononi koji nastaju kao pobuđenja iste sredice. Usporedba rezultata takve efektivne teorije s našim  $2\nu\beta\beta$  rezultatima, dobivenima iz RHBCS+PN-RQRPA računa sa definicijom preklopa (2.11) i optimiziranim vrijednostima parametra  $V_{0pp}$  prikazana je u tablici 11.18. Naši rezultati su manji od rezultata iz Ref. [39] za nuklide  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{128}\text{Te}$  i  $^{130}\text{Te}$ , usporedivi s istim rezultatima u slučaju nuklida  $^{116}\text{Cd}$  i veći za raspad  $^{100}\text{Mo}$ .

Tablica 11.18: Usporedba NMEs za  $2\nu\beta\beta$  raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, optimizirani  $V_{0pp}$ ) u aproksimaciji prosječne energije i matričnih elemenata izračunatih pomoću efektivne teorije iz Ref [39].

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-ME2) | ET ([39]) |
|-------------------|----------------------|-----------|
| $^{76}\text{Ge}$  | 0.001                | 0.054     |
| $^{82}\text{Se}$  | 0.001                | 0.097     |
| $^{100}\text{Mo}$ | 0.189                | 0.111     |
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.038                | 0.085     |
| $^{128}\text{Te}$ | 0.006                | 0.031     |
| $^{130}\text{Te}$ | 0.002                | 0.021     |

## 11.5 Usporedba s eksperimentalnim vrijednostima

Budući da za vremena poluživota  $2\nu\beta\beta$  raspada postoji mnoštvo eksperimentalnih rezultata, i budući da se iz istih mogu izvesti eksperimentalne vrijednosti  $2\nu\beta\beta$  nuklearnih matričnih elemenata, preostaje da rezultate naših  $2\nu\beta\beta$  računa usporedimo s eksperimentom. Sve eksperimentalne vrijednosti koje navodimo preuzete su iz novijih eksperimentalnih radova Barabasha[196, 206, 40] koji sadrže izmjerena vremena poluživota i izvedene matrične elemente za sve nuklide koje razmatramo u ovom radu.

U tablici 11.19 prikazana je usporedba nuklearnih matričnih elemenata dobivenih koristeći RHBCS+PN-RQRPA račun s DD-ME2 interakcijom s optimalnom vrijednosti za parametar snage izoskalarog sparivanja  $V_{0pp}$ , i vrijednosti nuklearnih matričnih elemenata dobivenih iz eksperimentalnih podataka o  $2\nu\beta\beta$  raspadu [196]. Vidimo da, u usporedbi s prijašnjim rezultatima za iščezavajuće izoskalaro sparivanje, uključivanje  $T = 0$  sparivanja dalje smanjuje NME. Nuklearni matrični elementi za kontaktne interakcije DD-PC1 i DD-PCX, dobiveni RHBCS+PN-RQRPA modelom s optimiziranim  $V_{0pp}$ , navedeni su u tablicama 11.20 i 11.21. Svi računi koriste definiciju preklopa (2.11). Nepouzdanosti naših rezultata za nuklearne matrične elemente su dobivene računajući vrijednosti NME pomoću optimalnog  $V_{0pp}$  sa pripadajućim neodređenostima, danim u tablici 11.2.

Na slici 11.33 dajemo vizualni sažetak rezultata za dvoneutrinske dvostruke beta raspade dobivenih u ovom radu, odnosno prikazujemo nuklearne matrične elemente za  $2\nu\beta\beta$  račun dobivene RHBCS+PN-RQRPA računom polazeći od interakcije s izmjenom mezona DD-ME2 i interakcija s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX, na vrijednostima parametra izoskalarog sparivanja optimiziranim za svaku interakciju pomoću vremena poluživota jednostrukih  $\beta$  raspada, kako je navedeno u tablici 11.2. Za usporedbu, prikazani su i rezultati prijašnjih računa nuklearnih matričnih elemenata, uključujući implementaciju PN-QRPA od strane Deppischa

Tablica 11.19: Nuklearni matrični elementi za  $2\nu\beta\beta$  raspad dobiveni s DD-ME2 interakcijom i optimiziranom vrijednošću snage izoskalarnog sparivanja uspoređeni s NME dobivenim iz eksperimentalnih podataka.

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-ME2)      | exp. [40]           |
|-------------------|---------------------------|---------------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | $0.019^{+0.014}_{-0.019}$ | $0.035 \pm 0.003$   |
| $^{76}\text{Ge}$  | $0.001^{+0.024}_{-0.001}$ | $0.106 \pm 0.004$   |
| $^{82}\text{Se}$  | $0.001^{+0.011}_{-0.001}$ | $0.085 \pm 0.001$   |
| $^{96}\text{Zr}$  | $0.121^{+0.006}_{-0.010}$ | $0.080 \pm 0.004$   |
| $^{100}\text{Mo}$ | $0.189^{+0.020}_{-0.033}$ | $0.185 \pm 0.002$   |
| $^{116}\text{Cd}$ | $0.038^{+0.004}_{-0.004}$ | $0.108 \pm 0.003$   |
| $^{128}\text{Te}$ | $0.006^{+0.011}_{-0.006}$ | $0.043 \pm 0.003$   |
| $^{130}\text{Te}$ | $0.002^{+0.010}_{-0.002}$ | $0.0293 \pm 0.0009$ |
| $^{136}\text{Xe}$ | $0.001^{+0.004}_{-0.001}$ | $0.0177 \pm 0.0002$ |
| $^{150}\text{Nd}$ | $0.013^{+0.007}_{-0.005}$ | $0.055 \pm 0.003$   |

Tablica 11.20: Nuklearni matrični elementi za  $2\nu\beta\beta$  raspad dobiveni s DD-PC1 interakcijom i optimiziranom vrijednošću snage izoskalarnog sparivanja uspoređeni s NME dobivenim iz eksperimentalnih podataka.

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-PC1)      | exp. [206]          |
|-------------------|---------------------------|---------------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | $0.008^{+0.019}_{-0.008}$ | $0.035 \pm 0.003$   |
| $^{76}\text{Ge}$  | $0.003^{+0.021}_{-0.003}$ | $0.106 \pm 0.004$   |
| $^{82}\text{Se}$  | $0.009^{+0.019}_{-0.009}$ | $0.085 \pm 0.001$   |
| $^{96}\text{Zr}$  | $0.148^{+0.016}_{-0.027}$ | $0.080 \pm 0.004$   |
| $^{100}\text{Mo}$ | $0.188^{+0.028}_{-0.049}$ | $0.185 \pm 0.002$   |
| $^{116}\text{Cd}$ | $0.042^{+0.006}_{-0.008}$ | $0.108 \pm 0.003$   |
| $^{128}\text{Te}$ | $0.009^{+0.015}_{-0.005}$ | $0.043 \pm 0.003$   |
| $^{130}\text{Te}$ | $0.014^{+0.015}_{-0.013}$ | $0.0293 \pm 0.0009$ |
| $^{136}\text{Xe}$ | $0.007^{+0.006}_{-0.005}$ | $0.0177 \pm 0.0002$ |
| $^{150}\text{Nd}$ | $0.023^{+0.010}_{-0.008}$ | $0.055 \pm 0.003$   |



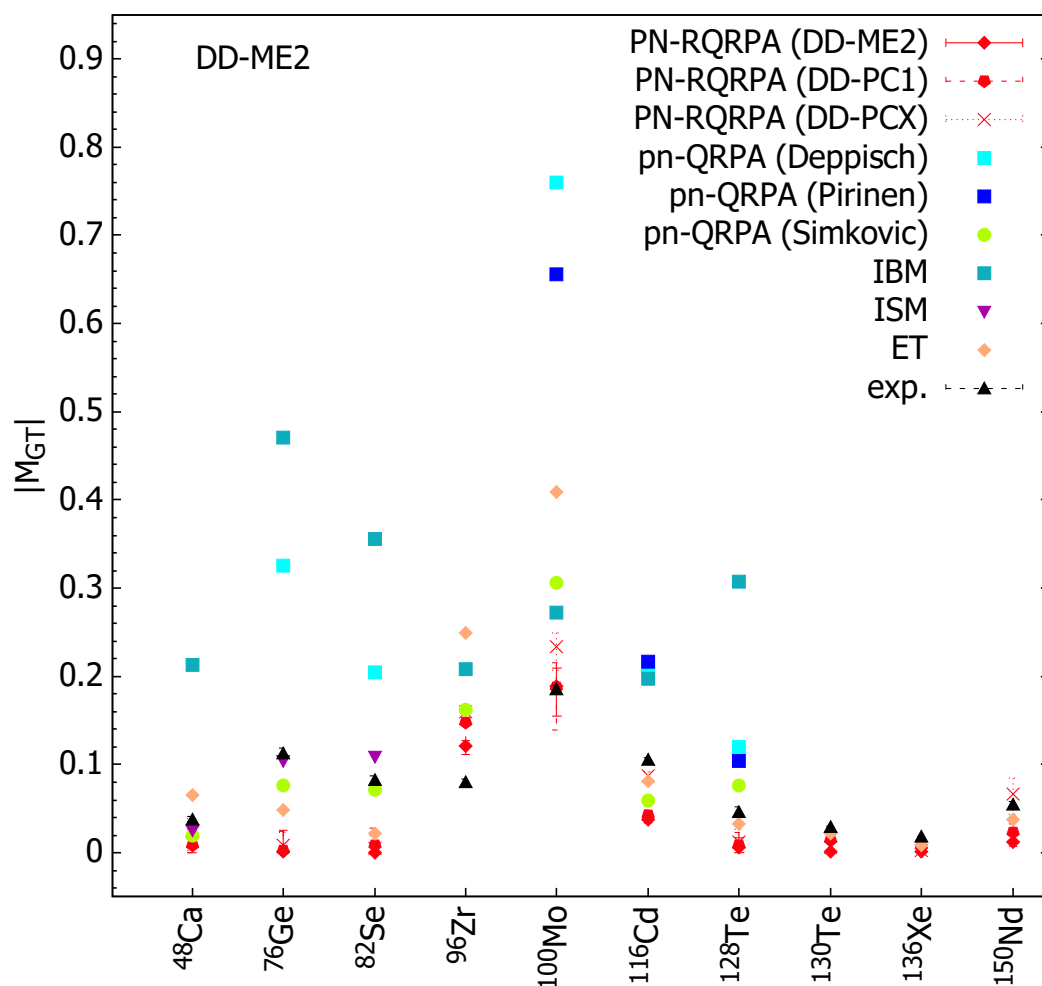
Tablica 11.21: Nuklearni matrični elementi za  $2\nu\beta\beta$  raspad dobiveni s DD-PCX interakcijom i optimiziranom vrijednošću snage izoskalarnog sparivanja uspoređeni s NME dobivenim iz eksperimentalnih podataka.

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-PCX)      | exp. [206]          |
|-------------------|---------------------------|---------------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | $0.024^{+0.016}_{-0.021}$ | $0.035 \pm 0.003$   |
| $^{76}\text{Ge}$  | $0.009^{+0.014}_{-0.009}$ | $0.106 \pm 0.004$   |
| $^{82}\text{Se}$  | $0.005^{+0.014}_{-0.005}$ | $0.085 \pm 0.001$   |
| $^{96}\text{Zr}$  | $0.160^{+0.007}_{-0.011}$ | $0.080 \pm 0.004$   |
| $^{100}\text{Mo}$ | $0.233^{+0.016}_{-0.026}$ | $0.185 \pm 0.002$   |
| $^{116}\text{Cd}$ | $0.087^{+0.005}_{-0.006}$ | $0.108 \pm 0.003$   |
| $^{128}\text{Te}$ | $0.012^{+0.015}_{-0.012}$ | $0.043 \pm 0.003$   |
| $^{130}\text{Te}$ | $0.006^{+0.018}_{-0.006}$ | $0.0293 \pm 0.0009$ |
| $^{136}\text{Xe}$ | $0.003^{+0.008}_{-0.003}$ | $0.0177 \pm 0.0002$ |
| $^{150}\text{Nd}$ | $0.066^{+0.019}_{-0.022}$ | $0.055 \pm 0.003$   |

[38], Pirinena [3], i Šimkovića [30], model međudjelujućih bozona (IBM) [36] i međudjelujući model ljusaka (ISM) [32], kao i eksperimentalne rezultate [196].

Rezultati za  $2\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente dobiveni s različitim modelima se znatno razlikuju. Dobivene vrijednosti NME za različite modele pokrivaju raspon od otprilike 0 do otprilike 0.8, s time da se rezultati većeg broja modela nalaze na nižem dijelu tog raspona, do otprilike 0.3, dok su IBM i pn-QRPA rezultati Ref. [3] i Ref. [38] izdvojeni zbog svoje velike apsolutne vrijednosti. Nadalje, različite jezgre imaju različite raspone teorijskih vrijednosti  $2\nu\beta\beta$  NME. Jezgre  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{96}\text{Zr}$  i  $^{116}\text{Cd}$  imaju manje raspone mogućih vrijednosti NME od  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{100}\text{Mo}$  i  $^{128}\text{Te}$ , dok u slučaju  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{136}\text{Xe}$  i  $^{150}\text{Nd}$  manjak rezultata za teorijske pristupe čiji su rezultati za raspade drugih jezgara najudaljeniji od eksperimentalnih rezultata i vrijednosti dobivenih našim modelom otežavaju usporedbu. Naše vrijednosti su, s nekoliko izuzetaka, uglavnom nešto niže od rezultata drugih teorijskih modela.

Eksperimentalnim vrijednostima se najviše približavamo za nuklide  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{128}\text{Te}$ ,  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{136}\text{Xe}$  i  $^{150}\text{Nd}$  (unatoč problemu s  $Q$  vrijednostima) dok su rezultati za nuklide  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ , ispod i za  $^{96}\text{Zr}$  iznad eksperimentalnih vrijednosti za sve relativističke interakcije. Postoji niz mogućih razloga, od anomalnog poretka jednočestičnih nivoa [187], do toga da naš model ne može tretirati deformirane jezgre, pa nužno pretpostavljamo sfernu simetriju. Zanimljivo je napomenuti da su  $^{76}\text{Ge}$  and  $^{76}\text{Se}$ , za koje dobivamo najveća odstupanja od eksperimentalnih podataka, proučavani uz pomoć Gogny funkcionala [41], i da se pokazuje da je triaksijalan oblik potreban da bi se reproducirali eksperimentalni podaci za oba nuklida - a naravno naš model ne može tretirati triaksijalnost.



Slika 11.33: Sažetak  $2\nu\beta\beta$  nuklearnih matričnih elemenata izračunatih pomoću PN-RQRPA koristeći DD-ME2, DD-PC1 and DD-PCX interakcije, u usporedbi s rezultatima računa zasnovanima na pn-QRPA, implementacije Deppisch [38], Pirinen[3], i Šimkovic[30], modela međudjelujućih bozona (IBM)[36], i međudjelujućeg modela ljustaka [32]. Vrijednosti NME izvedene iz eksperimentalnih podataka[40] su također prikazane.

## 11.6 Faktori faznog prostora i vremena poluživota

Preostaje da usporedimo vremena poluživota koja možemo dobiti iz naših rezultata za nuklearne matrične elemente i eksperimentalne vrijednosti istih. Za to nam treba račun faktora faznog prostora. Detalji o tom računu i dobivene vrijednosti faktora faznih prostora su dane u poglavlju 9. Vrijednosti faktora faznog prostora se mogu koristiti da se izračunaju vremena poluživota za razne  $2\nu\beta\beta$  raspade, koja se mogu direktno usporediti s eksperimentalnim  $T_{1/2}$  vrijednostima. Re-

zultirajuća vremena poluživota izračunata u RHBCS+PN-RQRPA modelu pomoću DD-ME2, DD-PC1 i DD-PCX interakcija prikazana su u tablici 11.22, u usporedbi s preporučenim vrijednostima temeljenima na eksperimentalnim podacima, danima u Ref. [206, 40]. Za usporedbu, dana su i vremena poluživota iz drugih, nerelativističkih pristupa, izračunatih pomoću RQRPA[207] i QRPA modela[208] kao i IBM-2 rezultati izračunati u aproksimaciji prosječne energije [32]. Eksperimentalne vrijednosti vremena poluživota, kao i rezultati teorijskih modela za vremena poluživota, variraju nekoliko redova veličine. Izračunata vremena poluživota od eksperimentalnih vrijednosti odstupaju značajno za  $^{48}\text{Ca}$ , sve interakcije osim DD-PCX, zatim za  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ , sve interakcije osim DD-PCX,  $^{128}\text{Te}$ , pogotovo za DD-ME2 interakciju,  $^{130}\text{Te}$ , pogotovo za DD-PCX interakciju,  $^{136}\text{Xe}$ , i  $^{150}\text{Nd}$  za DD-PC1 interakciju. S druge strane, relativno smo blizu eksperimentalnim vremenima poluživota za  $^{100}\text{Mo}$ , i za DD-PCX rezultate za  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{116}\text{Cd}$  i  $^{150}\text{Nd}$ , kao i za DD-PC1 rezultate za  $^{96}\text{Zr}$ . Razlike između izračunatih i eksperimentalnih vremena poluživota su rezultat ne samo drugačijih matričnih elemenata nego i nepouzdanosti pri računu faktora faznog prostora. Nadalje, ako uzmemo u obzir rezultate drugih teorijskih pristupa koje su prikazani u tablici 11.22, vidljivo je da odstupanja od nekoliko redova veličine nisu bez presedana, premda u slučaju IBM-2 rezultata[32] koji najviše odstupaju, njihova veličina je manja od eksperimentalne kao posljedica prevelikog nuklearnog matričnog elementa.

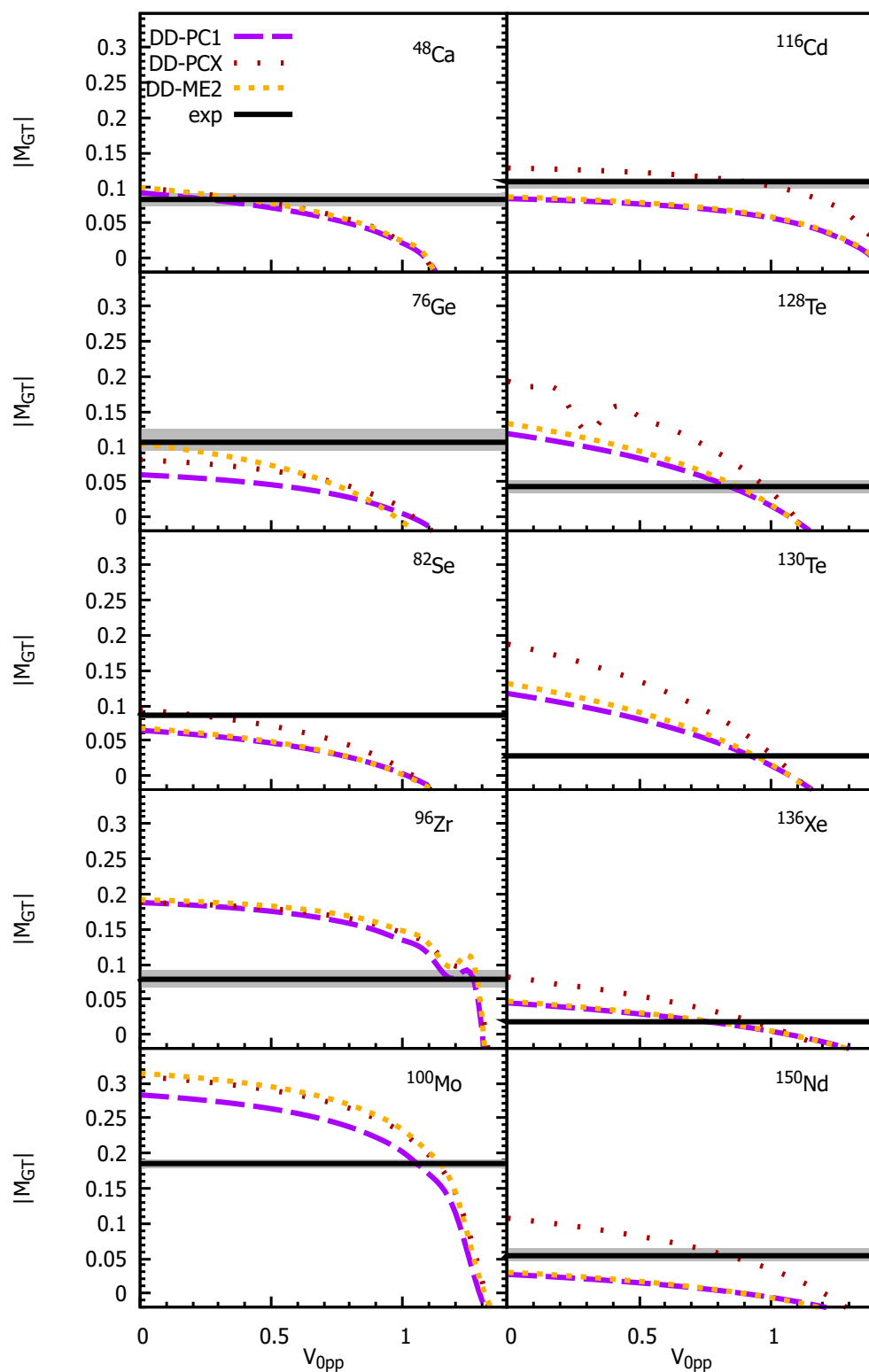
Tablica 11.22: Vremena poluživota za  $2\nu\beta\beta$  raspad izračunata u RHBCS+PN-RQRPA modelu pomoću DD-ME2, DD-PC1 i DD-PCX interakcija, i faznim faktorima iz Ref. [74], za vrijednosti  $V_{0pp}$  optimizirane pomoću vremena poluživota za jednostruki beta raspad, u usporedbi s nedavnim eksperimentalnim rezultatima[40]. Sve vrijednosti su u godinama.

|                   | PN-RQRPA<br>(DD-ME2)    | PN-RQRPA<br>(DD-PC1)    | PN-RQRPA<br>(DD-PCX)     | Barabash (2015)<br>[206]              | Barabash (2020)<br>[40]               |
|-------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $^{48}\text{Ca}$  | $17.990 \times 10^{19}$ | $96.203 \times 10^{19}$ | $1.830 \times 10^{19}$   | $4.4^{+0.6}_{-0.5} \times 10^{19}$    | $5.3^{+1.2}_{-0.8} \times 10^{19}$    |
| $^{76}\text{Ge}$  | $19.875 \times 10^{24}$ | $2.208 \times 10^{24}$  | $13.764 \times 10^{21}$  | $1.65^{+0.14}_{-0.12} \times 10^{21}$ | $1.88^{+0.08}_{-0.08} \times 10^{21}$ |
| $^{82}\text{Se}$  | $23.995 \times 10^{23}$ | $83.029 \times 10^{20}$ | $3.321 \times 10^{20}$   | $0.92^{+0.07}_{-0.07} \times 10^{20}$ | $0.87^{+0.02}_{-0.01} \times 10^{20}$ |
| $^{96}\text{Zr}$  | $1.000 \times 10^{19}$  | $0.673 \times 10^{19}$  | $0.483 \times 10^{19}$   | $2.3^{+0.2}_{-0.2} \times 10^{19}$    | $2.3^{+0.2}_{-0.2} \times 10^{19}$    |
| $^{100}\text{Mo}$ | $8.502 \times 10^{18}$  | $8.595 \times 10^{18}$  | $5.568 \times 10^{18}$   | $7.1^{+0.4}_{-0.4} \times 10^{18}$    | $7.06^{+0.15}_{-0.13} \times 10^{18}$ |
| $^{116}\text{Cd}$ | $25.302 \times 10^{19}$ | $20.606 \times 10^{19}$ | $4.794 \times 10^{19}$   | $2.87^{+0.13}_{-0.13} \times 10^{19}$ | $2.69^{+0.09}_{-0.09} \times 10^{19}$ |
| $^{128}\text{Te}$ | $98.939 \times 10^{24}$ | $49.298 \times 10^{24}$ | $24.735 \times 10^{24}$  | $2.0^{+0.3}_{-0.3} \times 10^{24}$    | $2.25^{+0.09}_{-0.09} \times 10^{24}$ |
| $^{130}\text{Te}$ | $2.782 \times 10^{23}$  | $31.947 \times 10^{20}$ | $173.936 \times 10^{20}$ | $(6.9 \pm 1.3) \times 10^{20}$        | $(7.91 \pm 0.21) \times 10^{20}$      |
| $^{136}\text{Xe}$ | $66.811 \times 10^{22}$ | $13.635 \times 10^{21}$ | $74.235 \times 10^{21}$  | $(2.19 \pm 0.06) \times 10^{21}$      | $(2.18 \pm 0.05) \times 10^{21}$      |
| $^{150}\text{Nd}$ | $16.819 \times 10^{19}$ | $51.913 \times 10^{18}$ | $6.220 \times 10^{18}$   | $(8.2 \pm 0.9) \times 10^{18}$        | $(9.34 \pm 0.65) \times 10^{18}$      |
|                   | RQRPA<br>[207]          | QRPA<br>[208]           | IBM-2<br>[32]            |                                       |                                       |
| $^{48}\text{Ca}$  | –                       | $4.6 \times 10^{19}$    | $0.23 \times 10^{19}$    |                                       |                                       |
| $^{76}\text{Ge}$  | $1.4 \times 10^{21}$    | $0.96 \times 10^{21}$   | $0.14 \times 10^{21}$    |                                       |                                       |
| $^{82}\text{Se}$  | $1.1 \times 10^{20}$    | $1.33 \times 10^{20}$   | $0.077 \times 10^{20}$   |                                       |                                       |
| $^{96}\text{Zr}$  | $4.2 \times 10^{19}$    | $1.62 \times 10^{19}$   | $0.53 \times 10^{19}$    |                                       |                                       |
| $^{100}\text{Mo}$ | –                       | $9.03 \times 10^{18}$   | $6.46 \times 10^{18}$    |                                       |                                       |
| $^{116}\text{Cd}$ | –                       | $2.08 \times 10^{19}$   | $1.45 \times 10^{19}$    |                                       |                                       |
| $^{128}\text{Te}$ | –                       | $1.73 \times 10^{24}$   | $0.066 \times 10^{24}$   |                                       |                                       |
| $^{130}\text{Te}$ | –                       | $18.2 \times 10^{20}$   | $6.8 \times 10^{20}$     |                                       |                                       |
| $^{136}\text{Xe}$ | –                       | –                       | $0.06 \times 10^{21}$    |                                       |                                       |
| $^{150}\text{Nd}$ | –                       | $22.67 \times 10^{18}$  | $8.2 \times 10^{18}$     |                                       |                                       |

## 11.7 RHB+PN-RQRPA rezultati

Postupak opisan u odjeljku 11.2 je, do završetka ovog rada, proveden samo za račune temeljene na RHBCS aproksimaciji. Drugim riječima, optimalni  $V_{0pp}$  nisu dostupni za RHB račune. Unatoč tome, možemo prikazati ovisnost matričnih elemenata dobivenih RHB računom o snazi izoskalaranog sparivanja  $V_{0pp}$ , što nam daje bar nekakav osjećaj o mogućem rasponu vrijednosti matričnih elemenata. Rezultati za 10 razmatranih jezgara prikazani su na slici 11.34. Odmah primjećujemo da su rezultati RHB+PN-RQRPA računa slični rezultatima RHBCS+PN-RQRPA računa, unatoč razlikama u implementaciji korelacija sparivanja, osim za izolirani slučaj  $^{150}\text{Nd}$ .

Takva sličnost daje naznake da nedijagonalni elementi u sili sparivanja (koji su zanemareni u RHBCS pristupu) ne daju značajan doprinos, bilo vrijednosti samog  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa bilo njegovoj ovisnosti o snazi izoskalaranog sparivanja  $V_{0pp}$ . Što se tiče usporedbe s drugim pristupima, uspoređujući naše rezultate za četiri nuklida za koje postoje rezultati za SkM\*+QRPA račun iz Ref. [47], vidimo da su naši rezultati manji, pogotovo za nemodificiranu SkM\* interakciju (naši rezultati za  $^{76}\text{Ge}$  i iščezavajuće izoskalaran sparivanje su u rasponu od 0.05-0.1, dok su rezultati modificirane SkM\* interakcije iznad 0.15, kao što bi bili i rezultati nemodificirane interakcije da ih se ekstrapolira na iščezavajuće  $T=0$  sparivanje odnosno  $V_0 = 0$  MeV), osim za rezultate za DD-PCX interakciju u  $^{136}\text{Xe}$  i za sve tri interakcije u  $^{130}\text{Te}$ , gdje su SkM\* rezultati znatno manji od rezultata našeg modela. Uspoređujući naše rezultate s pn-QRPA rezultatima za SkM interakciju iz Ref. [201], nalazimo da su naši rezultati slični krivuljama koje opisuju ovisnost NME o  $pp$  sili  $\kappa_{pp}$ , za slučaj maksimalne razlike u deformacijama između jezgre-roditelja i jezgre-kćeri, dok su općenito manji od rezultata koji podrazumijevaju sfernu simetriju[201].



Slika 11.34: Ovisnost  $2\nu\beta\beta$  nuklearnih matričnih elemenata za raspade od  $^{48}\text{Ca}$  do  $^{150}\text{Nd}$ , sve interakcije, za  $g_A=1$  i za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11), za RHB+PN-RQRPA model.

## Poglavlje 12

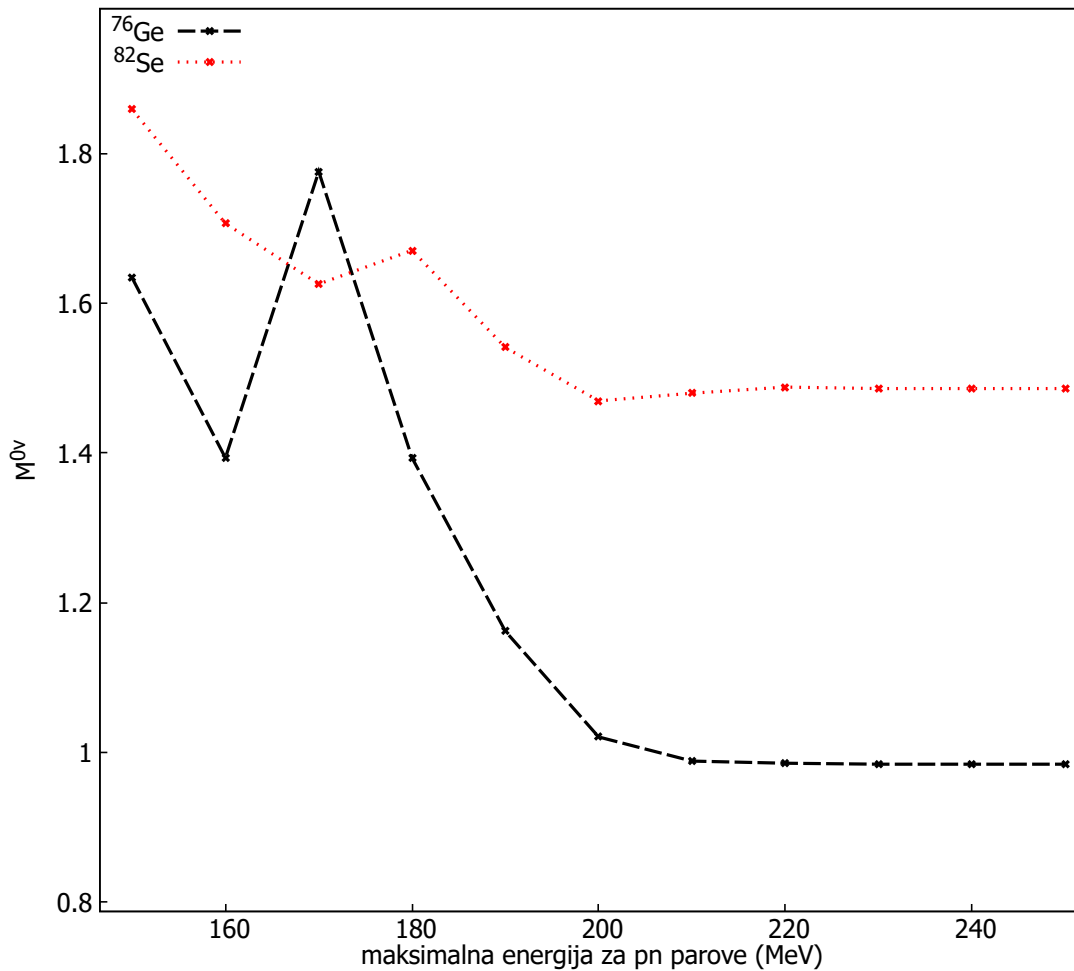
# Bezneutrinski dvostruki beta raspadi

U nastavku su izneseni i obrazloženi rezultati za bezneutrinske dvostruke beta raspade. Pri tome naglašavamo da, kako je ovo prva implementacija računa  $0\nu\beta\beta$  raspada na temelju PN-RQRPA, postoje određena ograničenja koja su primjenjiva na naša istraživanja. Prvo, nismo mogli implementirati trijevanje kratkodosežnih korelacija, zbog načina na koji računamo matrične elemente. Drugo, zbog ograničenog vremena i računalnih resursa izračuni matričnih elemenata ograničeni su na prvih sedam multipola. Nekoliko jezgara koje ćemo promatrati, kao i prethodna istraživanja[17], sugeriraju da bi trebali proširiti račun na više multipole, što je jedan od smjerova za proširenje i unaprijeđenje našeg računa u budućim istraživanjima.

Za potrebe ovih računa koristimo  $g_A = 1.27$  kako bi olakšali usporedbu s rezultatima drugih modela, i koristimo definiciju preklopa iz jednadžbe (2.11), budući da druga definicija (2.12) daje vrlo male razlike. Kao i u slučaju  $2\nu\beta\beta$  raspada, navodimo apsolutne vrijednosti rezultata za ukupne nuklearne matrične elemente, osim ako nije eksplicitno naznačeno da navodimo podatke s predznakom, premda pojedini doprinosi i dalje mogu biti pozitivni ili negativni.

### 12.1 Testovi konvergencije matričnih elemenata

Kao i u slučaju  $2\nu\beta\beta$  računa, parametar  $ediffmax$  treba biti namješten tako da rezultati za NME konvergiraju. Prikaz konvergencije, za dvije raspadajuće jezgre,  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{82}\text{Se}$ , za DD-ME2 interakciju i  $V_{0pp} = 0$ , prikazan je na slici 12.1.



Slika 12.1: Konvergencija matričnog elementa za  $0\nu\beta\beta$  raspade  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  i  $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$  s povećanjem maksimalne energije  $pn$  parova. DD-ME2 interakcija,  $V_{0pp}=0$ .

Primjećujemo da do konvergencije dolazi na visokim energijama  $pn$  parova, tek nekoliko desetaka MeV prije nego dođemo do situacije gdje povećanje energije  $pn$  parova ne rezultira sa dodavanjem novih parova u račun za dani broj ljusaka. Uzimamo da su numerički rezultati dovoljno blizu konačnim rezultatima za  $\text{ediffmaxu} = 220\text{MeV}$ , i istu vrijednost koristimo u svim daljnjim računima.

## 12.2 Rezultati za pojedinačne nuklide

U sljedećim odjeljcima predstaviti ćemo rezultate HBCS+PN-RQRPA računa za bezneutrinski dvostruki beta raspad skupa od osam relevantnih nuklida, počevši od najlakših. Nuklidi



koje razmatramo -  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{110}\text{Pd}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ , i  $^{128}\text{Te}$  - predstavljaju neke od najlakših kandidata za  $0\nu\beta\beta$  raspad za koji postoji značajna količina rezultata različitih modela[56, 17].

### 12.2.1 $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$

Rezultati za nuklearni matrični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{76}\text{Ge}$  navedeni su u tablici 12.1, za optimalnu vrijednost  $T=0$  sparivanja  $V_{0pp}$ , za svaku od interakcija koje se koriste i za dvije varijante operatora prijelaza koje se kogu koristiti u računu, varijantu s nerelativističkom redukcijom operatora opisanu u jednadžbi (3.48) i punu relativističku varijantu opisanu u jednadžbu (3.35). Posebno nas zanima koliko se ta dva rezultata razlikuju. Zbog toga, u tablici 12.2 prikazan je omjer između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom.

Tablica 12.1: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{76}\text{Ge}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                  | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |        |
|------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                  | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{76}\text{Ge}$ | 0.708    | 0.054  | 0.294  | 2.582          | 0.582  | 2.958  |

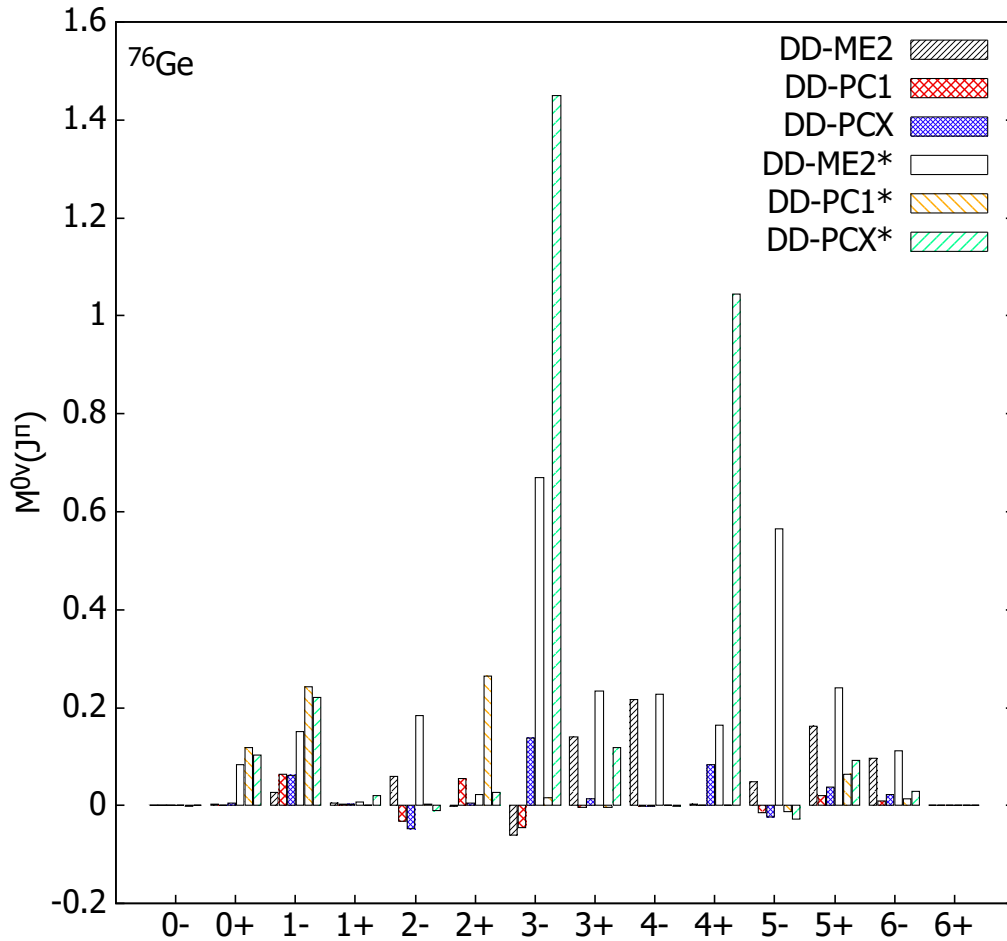
Tablica 12.2: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{76}\text{Ge}$  dobivenih za nerelativističku redukciju operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                  | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|------------------|------------------|--------|--------|
|                  | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{76}\text{Ge}$ | 0.274            | 0.092  | 0.100  |

Dobiveni NME je niži od onog što bi mogli očekivati na temelju rezultata drugih teorijskih pristupa (recimo Ref.[47] navodi  $0\nu\beta\beta$  NME u rasponu od 2.96 do 5.465), pogotovo za matrične elemente dobivene s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza. Omjer rješenja dobivenih s nerelativistički reduciranim operatorom i s punim relativističkim operatorom je isto zanimljiv, budući da je za sve interakcije znatno manji od omjera koji navode Ref. [44] i Ref. [43], pogotovo za interakcije s točkastim vezanjem. Ovi omjeri odgovaraju onome što se u Ref. [44] navodi kao anomalan rezultat za  $^{150}\text{Nd}$ , što dovodi anomalnost tog rezultata u pitanje.

Bezneutrinski dvostruki beta raspad, za razliku od dvoneutrinskog moda, se odvija preko međujezgre čija ukupna kutna količina gibanja i paritet poprimaju proizvoljno velike vrijednosti[17,

34]. Zbog računске složenosti problema, u ovom radu se zaustavljamo na multipolaritetu stanja međujezgre  $6^+$ , i da bi prikazali doprinos matričnih elemenata raspada preko pojedinih multipolariteta ukupnoj vrijednosti  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa, na slici 12.2 prikazujemo tzv. multipolnu dekompoziciju[17] matričnog elementa.



Slika 12.2: Doprinosi pojedinačnih multipola  $0\nu\beta\beta$  matričnom elementu za  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  raspade, sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

Možemo odmah primijetiti da, uspoređujući naše rezultate dobivene koristeći nerelativističku redukciju operatora prijelaza s rezultatima pn-QRPA iz Ref. [17], rezultati iz drugog rada idu do većih vrijednosti za većinu multipola, i da se svi konstruktivno zbrajaju. Za razliku od toga, naši rezultati pokazuju izražena poništavanja između različitih multipola. Osim toga, rezultati iz Ref. [17] pokazuju maksimalni doprinos na multipolu  $2^-$ , dok naši rezultati dobiveni s

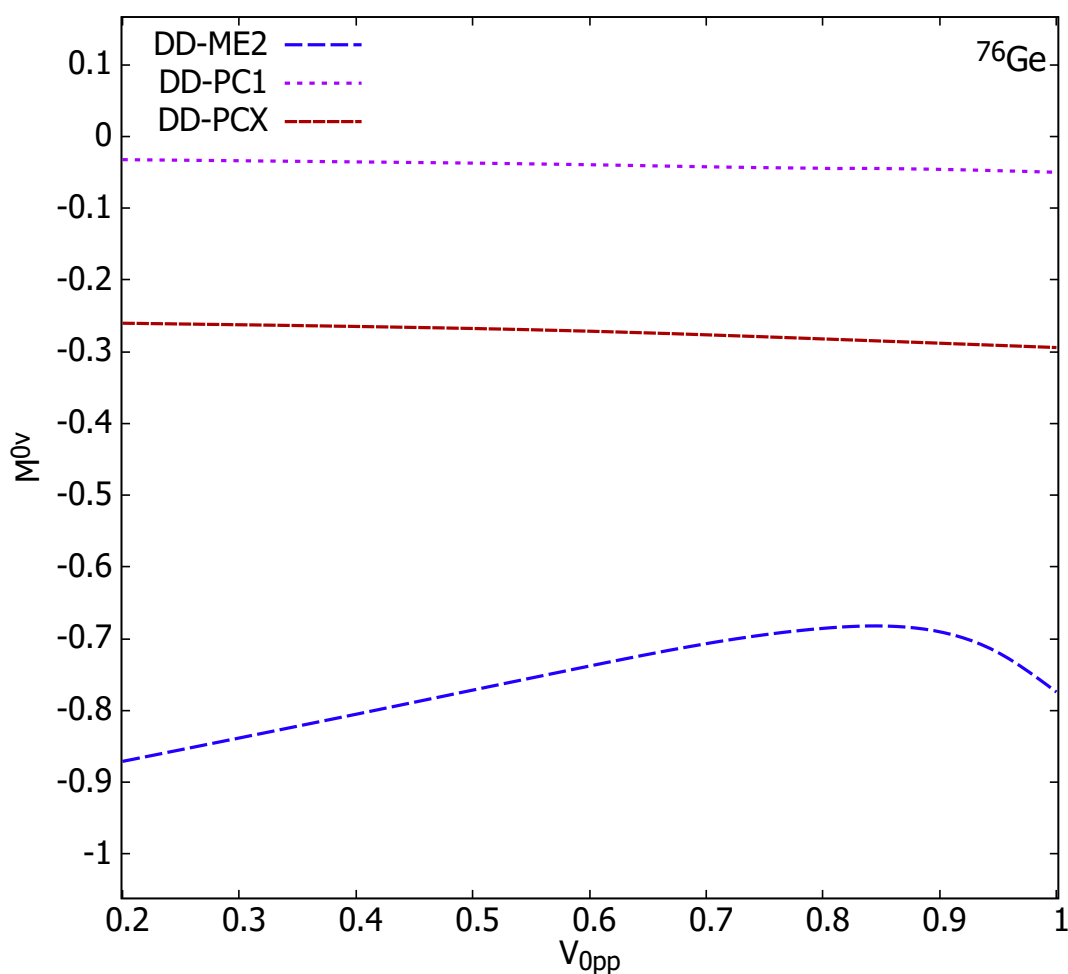
nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza imaju maksimalni doprinos na multipolu  $3^-$  za DD-PCX interakciju,  $1^-$  za DD-PC1 interakciju i  $4^-$  za DD-ME2. Multipolne dekompozicije rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom prijelaza imaju maksimalne doprinose za stanja u međujezgri s  $J^\pi=2^+$  za DD-PC1 interakciju, odnosno  $J^\pi=3^-$  za DD-PCX i DD-ME2 interakcije. Ovime se pokazuje da naši rezultati znatno ovise o efektivnoj interakciji korištenoj u modelu.

Možemo se pitati je li mala apsolutna vrijednost matričnih elemenata rezultat prevelike vrijednosti parametra snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , i je li moguće, prema tome, dobiti veće matrične elemente računom s iščezavajućim izoskalarnim sparivanjem. Međutim, kao što je vidljivo na slici 12.3, osim u slučaju DD-ME2 interakcije ovisnost  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa o izoskalarnom sparivanju je izrazito slaba. Takav rezultat je očekivan budući da su i druga istraživanja našla slabu ovisnost  $0\nu\beta\beta$  matričnih elemenata o snazi  $T=0$  sparivanja. Tu bi posebno istaknuli sliku 4 u Ref. [118], koja pokazuje istu ovisnost. Zbog toga ćemo prikazati samo rezultate DD-ME2 računa  $0\nu\beta\beta$  nuklearnih matričnog elementa za iščezavajuće izoskalarno sparivanje. To je napravljeno u tablici 12.3. Primjećujemo da dobivamo veće vrijednosti, mada i dalje ispod onoga što bi mogli očekivati, ali i nešto veći omjer rješenja s nerelativistički reduciranim operatorom i punog relativističkog rješenja.

Tablica 12.3: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{76}\text{Ge}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija.

|                  | PN-QRPA | PN-QRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|------------------|---------|---------------|------------------|
| $^{76}\text{Ge}$ | 0.925   | 2.513         | 0.368            |

Moguće su usporedbe s rezultatima drugih modela, primjerice s obzirom na multipolne dekompozicije matričnih elemenata. Rezultate prikazane na slici 12.2 možemo usporediti s pn-QRPA rezultatima iz Ref. [209]. Ti rezultati svoj maksimum (s doprinosom vrijednosti  $\approx 1$ ) dostižu za  $1^-$  multipol, za razliku od naših rezultata i pn-QRPA rezultata iz Ref. [17], koji svoj maksimum imaju na višim multipolima. Nadalje možemo usporediti naše rezultate s rezultatima pn-QRPA računa iz Ref. [210]. Primjećujemo da su rezultati tog računa značajno veći od naših rezultata (120.39–162.35 za slučaj  $^{76}\text{Ge}$ ), i da najveći doprinos daje  $2^-$  stanje međujezgre. Naposljetku, pn-QRPA račun iz Ref. [211] daje rezultate za nuklearne matrične elemente od kojih je NME dobiven koristeći Jastrow funkciju (2.288) usporediv s našim DD-ME2 rezultatom za puni relativistički operator prijelaza. Osim toga, maksimum za doprinose NME je opet na multipolu  $2^-$ , gdje naši računi imaju malen doprinos. Doprinos NME stanja različitih multipola u međujezgri treba detaljnije istražiti u daljnjem radu.



Slika 12.3: Ovisnost  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa za raspad  $^{76}\text{Ge}$  o parametru snage izoskalarnog sparivanja  $V_{0pp}$ , za sve tri interakcije koje se razmatraju u ovom radu, nerelativistička redukcija operatora prijelaza. Matrični elementi s negativnim predznakom.

### 12.2.2 $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$

Rezultati za nuklearni matrični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{82}\text{Se}$  prikazani su u tablici 12.4. U tablici 12.5 prikazani su omjeri između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom. Kao i u slučaju  $^{76}\text{Ge}$ , imamo male vrijednosti NME, pogotovo za interakcije s točkastim vezanjem. Recimo Ref. [17] navodi rezultat za  $0\nu\beta\beta$  NME za  $^{82}$  od 3.73, što znači da su čak i rezultati koje smo dobili s punim relativističkim operatorom prijelaza manji. Nadalje, omjeri rezultata s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata s punim relativističkim operatorom

prijelaza još jednom znatno odstupaju od očekivanog[43]. Na slici 12.4 je prikazana multipolna dekompozicija  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa.

Tablica 12.4: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{82}\text{Se}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

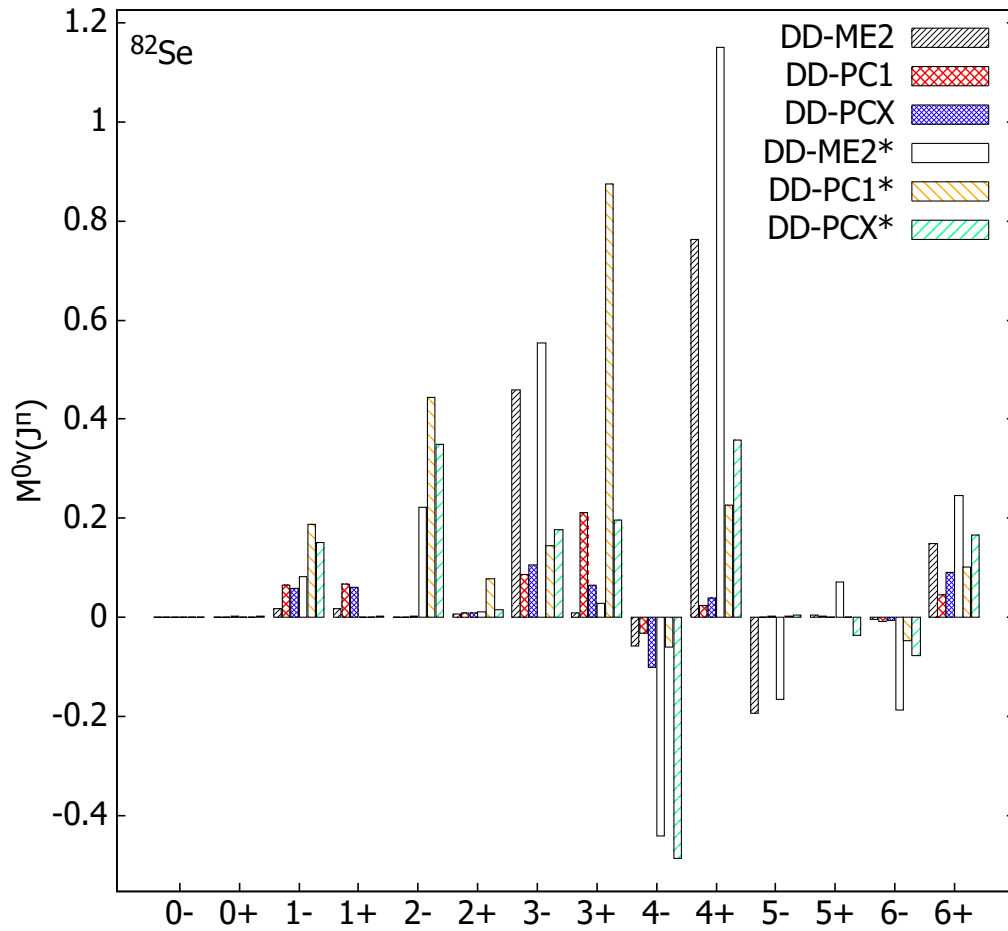
|                  | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |             |
|------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|-------------|
|                  | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX      |
| $^{82}\text{Se}$ |          | 1.270  | 0.420  | 0.279          | 2.543  | 1.790 0.698 |

Tablica 12.5: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{82}\text{Se}$  dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                  | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|------------------|------------------|--------|--------|
|                  | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{82}\text{Se}$ | 0.780            | 0.235  | 0.400  |

Možemo primjetiti da za rezultate dobivene s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza značajan doprinos dolazi iz niskih multipolariteta, pogotovo za interakcije s točkastim vezanjem, od kojih DD-PC1 ima maksimum multipolne dekompozicije za multipolaritet  $3^+$  a DD-PCX na multipolaritetu  $3^-$ . DD-ME2, s druge strane, ima značajne vrhove na multipolaritetima  $3^-$  i  $4^+$ . Za rezultate dobivene s punim relativističkim operatorom, položaji maksimuma uglavnom ostaju isti, osim što najveći doprinos rezultatu za interakciju DD-PCX sad dolazi od stanja s  $J^\pi=4^-$ , s negativnim predznakom. Uspoređujući s rezultatima drugih računa, primjećujemo da pn-QRPA rezultat iz Ref. [17] ne pokazuje međusobna poništenja kakva su vidljiva na dekompoziciji naših rezultata, odnosno stanja svakog multipolariteta u međujezgri doprinose s istim predznakom. Nadalje doprinosi NME iz Ref. [17] se za svaki paritet monotono povećavaju do maksimuma na  $J=2$ , i nakon toga monotono smanjuju, s najvećim doprinosom na  $J^\pi=2^-$ . Račun temeljen na pn-QRPA iz Ref. [212] daje rezultate za matrične elemente  $0\nu\beta\beta$  raspada u rasponu od 2.771 do 5.398, iznad svih naših rezultata. Nadalje, dekompozicija rezultata za  $0\nu\beta\beta$  NME iz Ref. [17] ima maksimalni doprinos od stanja međujezgre s  $J^\pi=2^-$ , kao i u slučaju Ref. [17]. Ovo se očito značajno razlikuje od naših rezultata, premda je i u našem slučaju doprinos od  $J^\pi=2^-$  stanja u međujezgri značajan.

Kao i za raspad  $^{76}\text{Ge}$ , prikazujemo i DD-ME2 rezultate za  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente na  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su dani u tablici 12.6. Isključenjem izoskalarnog sparivanja smo dobili nešto veći matrični element, ali i znatno veći omjer rješenja s nerelativistički reduciranim operatorom i punog relativističkog rješenja.



Slika 12.4: Doprinosi pojedinačnih multipola  $0\nu\beta\beta$  matičnom elementu za  $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$  raspad, sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

Tablica 12.6: Rezultati za nuklearni matični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{82}\text{Se}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

|                  | PN-RQRPA | PN-RQRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|------------------|----------|----------------|------------------|
| $^{82}\text{Se}$ | 1.485    | 1.641          | 0.905            |

### 12.2.3 $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$

Rezultati za nuklearni matični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{96}\text{Zr}$  prikazan je u tablici 12.7. U tablici 12.8 prikazani su omjer između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom redukcijom

operatora prijelaza i s punim relativističkim operatorom prijelaza.

Tablica 12.7: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  ${}^{96}\text{Zr}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

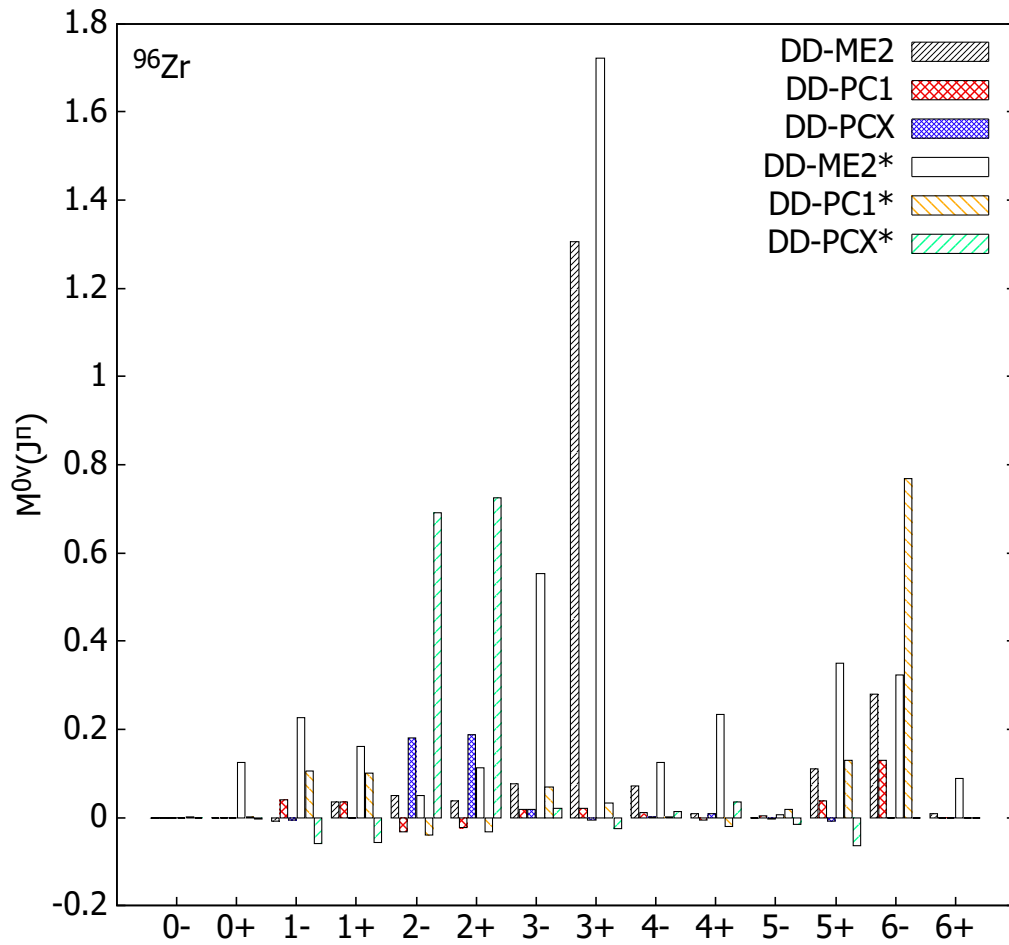
|                    | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |        |
|--------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                    | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX |
| ${}^{96}\text{Zr}$ | 1.948    | 0.219  | 0.189  | 3.885          | 1.160  | 0.625  |

Tablica 12.8: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  ${}^{96}\text{Zr}$  dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                    | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|--------------------|------------------|--------|--------|
|                    | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| ${}^{96}\text{Zr}$ | 0.501            | 0.189  | 0.301  |

Primjećujemo male vrijednosti NME, u usporedbi s primjerice 3.14 za rezultat pn-QRPA modela [17], osim za DD-ME2 rezultat s punim relativističkim operatorom, i značajno manje omjere rezultata dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom prijelaza nego za prijašnja dva nuklida. Na slici 12.5 je prikazana multipolna dekompozicija  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa. Za rezultate dobivene s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza možemo primijetiti značajan vrh na stanju multipolariteta  $3^-$  u međujezgru, za interakciju DD-ME2. Rezultat za interakciju s točkastim vezanjem DD-PCX, s druge strane, ima najveći doprinos na multipolaritetima  $2^+$  i  $2^-$ . Stanje multipolariteta  $2^-$  daje značajan doprinos i rezultatu za DD-PC1 interakciju, ali je taj doprinos negativan i gotovo u cijelosti poništava doprinos stanja  $J^\pi = 2^+$ , zbog čega je rezultirajući NME vrlo blizu nuli. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom su značajno veći, premda su maksimumi u multipolnim dekompozicijama na istim multipolaritetima. Uspoređujući naše rezultate s pn-QRPA rezultatima Ref. [17], možemo primijetiti da multipolna dekompozicija istih ima vrh na multipolu  $1^+$ , ali je odgovarajući doprinos NME negativan. Isto je slučaj u multipolnoj dekompoziciji pn-QRPA računa iz Ref. [213]. Naši rezultati međutim ne pokazuju takvo ponašanje, što ukazuje na razliku između našeg, relativističkog pristupa i nerelativističke pn-QRPA.

Prikazujemo i DD-ME2 rezultate za  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente na  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su dani u tablici 12.9. Isključenjem izoskalarne sparivanja smo dobili veći matrični element ako se koristi nerelativistička redukcija prijelaznog operatora, ali manji ako se koristi puni relativistički oblik operatora, i prema tome dobivamo veći omjer dva rješenja.



Slika 12.5: Doprinosi pojedinačnih multipola  $0\nu\beta\beta$  matičnom elementu za  $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$  raspad, sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

Tablica 12.9: Rezultati za nuklearni matični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{96}\text{Zr}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

|                  | PN-RQRPA | PN-RQRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|------------------|----------|----------------|------------------|
| $^{96}\text{Zr}$ | 1.913    | 3.865          | 0.495            |

### 12.2.4 $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$

Rezultati za nuklearni matični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{100}\text{Mo}$  prikazani su u tablici 12.10. U tablici 12.11 prikazan je omjer između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom reduk-



cijom operatora prijelaza i s punim relativističkim operatorom prijelaza.

Tablica 12.10: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{100}\text{Mo}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

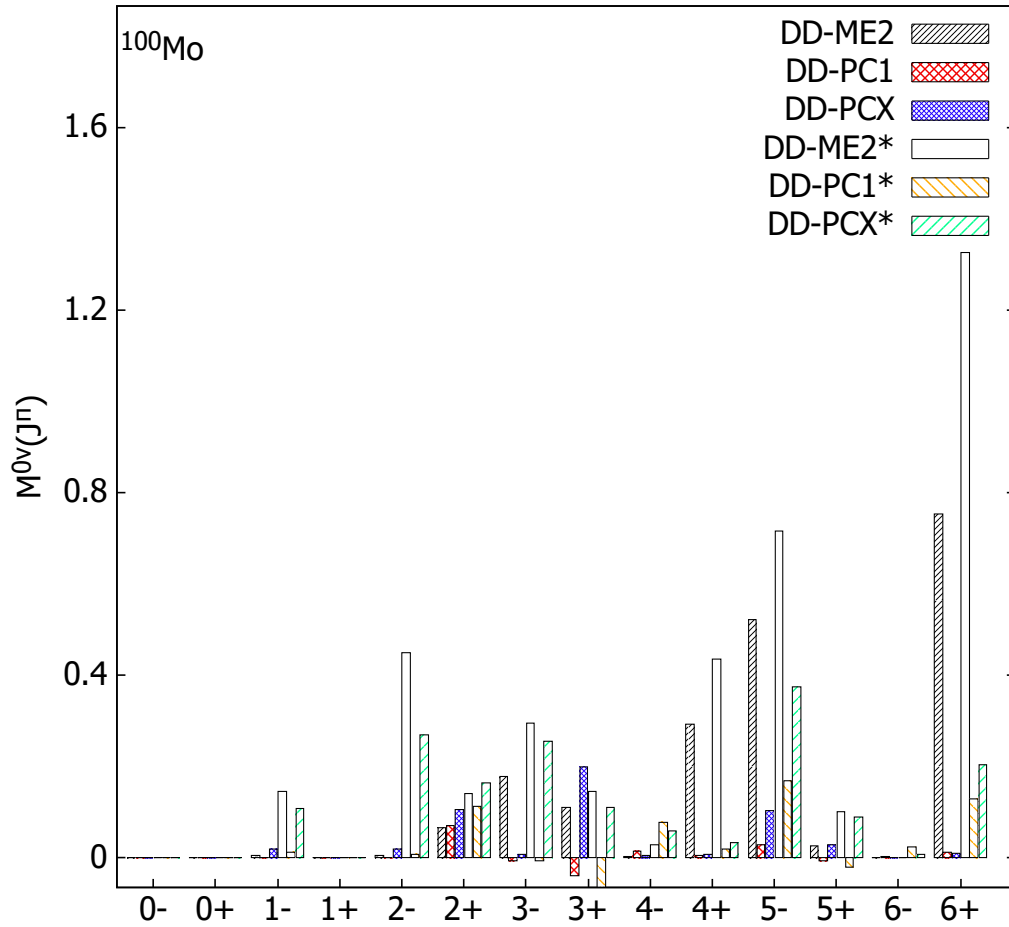
|                   | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |        |
|-------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{100}\text{Mo}$ | 1.967    | 0.092  | 0.514  | 3.791          | 0.462  | 1.694  |

Tablica 12.11: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{100}\text{Mo}$  dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                   | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|-------------------|------------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{100}\text{Mo}$ | 0.519            | 0.200  | 0.304  |

Dobivene vrijednosti  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa su male u usporedbi s rezultatima drugih modela, recimo 3.90 za pn-QRPA model iz Ref. [17] ili 3.931 iz Ref. [213], s izuzetkom DD-ME2 rezultata dobivenog s punim relativističkim operatorom prijelaza koji je neznatno iznad obje vrijednosti. Nadalje, omjeri rezultata dobivenih koristeći dvije mogućnosti za operator prijelaza su malene, osim za DD-ME2. Na slici 12.6 je prikazana multipolna dekompozicija  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa za raspad  $^{100}\text{Mo}$ . Prvo razmatramo rezultate dobivene s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza. Za rezultate dobivene s DD-ME2 interakcijom, najveći doprinos vrijednosti NME dolazi od stanja u međujezgri s  $J^\pi = 6^+$ . Ovaj rezultat je anomalan i potencijalno ukazuje na to da bi trebali uključiti veći broj multipola u naš račun. Rezultat za DD-PC1 interakciju ima maksimum na  $J^\pi = 2^+$ , dok za DD-PCX interakciju najveći doprinos dobivamo za  $J^\pi = 3^+$ , što je bliže onome što bi očekivali na temelju rezultata drugih modela. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza su slični, s time da se maksimum za DD-PCX interakciju pomiče na  $J^\pi = 5^-$ . Što se tiče usporedbe s drugim modelima, rezultati Ref. [17] i [213] su međusobno slični i kvalitativno slični rezultatima iz istih radova za  $^{96}\text{Zr}$ , s najvećim doprinosom na  $J^\pi = 1^-$ , i značajnim doprinosom na  $J^\pi=1^+$  koji sudjeluje u ukupnom matričnom elementu s negativnim predznakom. Maksimalni doprinos NME prikazanom u Ref. [34] ovisi o parametru  $g_{pp}$ , koji je analogan parametru  $V_{0pp}$  u našem računu, i ovisno o vrijednosti parametra može biti na  $J^\pi = 1^+$  ili  $J^\pi = 1^-$ . Naš relativistički račun pokazuje odstupanja od rezultata nerelativističke pn-QRPA.

Prikazujemo i DD-ME2 rezultate za  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente za  $^{100}\text{Mo}$  na  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su dani u tablici 12.12. Isključenjem izoskalarnog sparivanja smo dobili veći



Slika 12.6: Doprinosi pojedinačnih multipola  $0\nu\beta\beta$  matičnom elementu za  $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$  raspad, sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

matrični element za račune koristeći obje definicije operatora prijelaza, i, zanimljivo, veći omjer rješenja dobivenih koristeći nerelativističku redukciju operatora prijelaza i rješenja dobivenih koristeći puni operator.

Tablica 12.12: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{100}\text{Mo}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

|                   | PN-RQRPA | PN-RQRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|-------------------|----------|----------------|------------------|
| $^{100}\text{Mo}$ | 1.891    | 3.018          | 0.627            |

### 12.2.5 $^{110}\text{Pd} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$

Rezultati za nuklearni matrični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{110}\text{Pd}$  prikazani su u tablici 12.13. U tablici 12.14 prikazan je omjer između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i s punim relativističkim operatorom prijelaza.

Tablica 12.13: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{110}\text{Pd}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

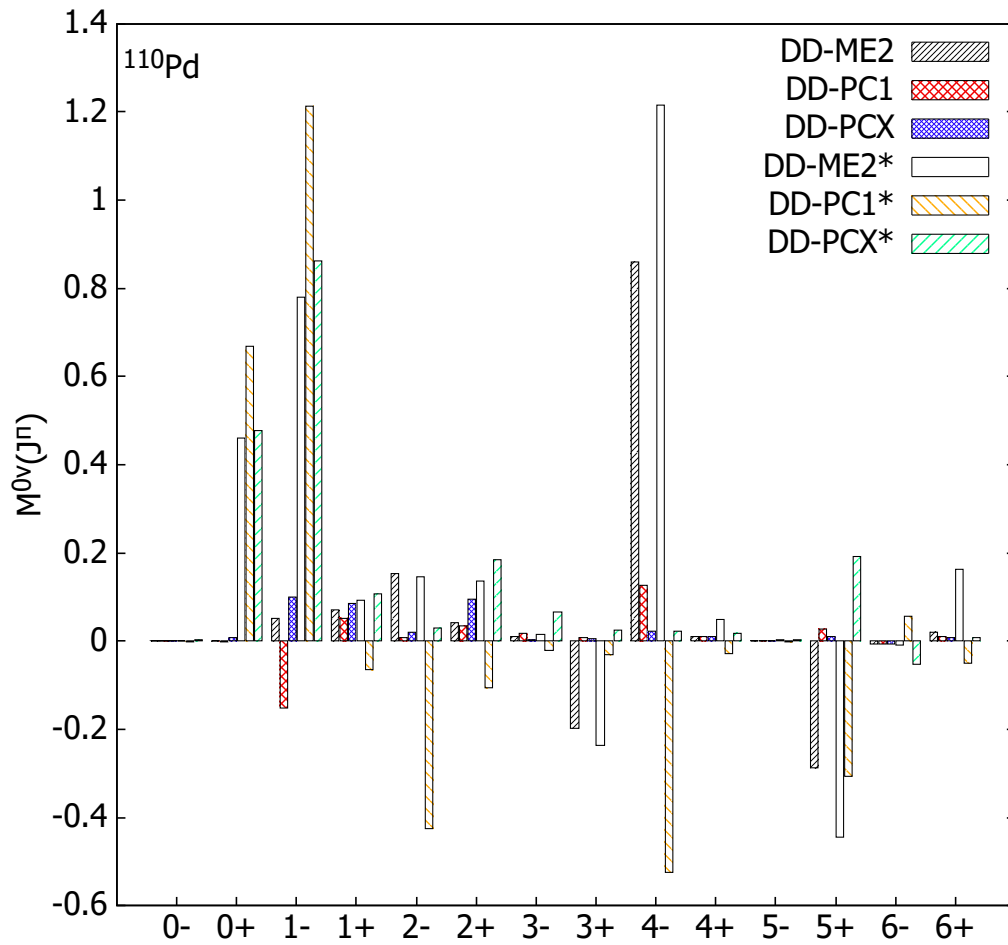
|                   | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |        |
|-------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{110}\text{Pd}$ | 0.729    | 0.145  | 0.354  | 1.904          | 0.255  | 1.497  |

Tablica 12.14: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{110}\text{Pd}$  dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                   | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|-------------------|------------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{110}\text{Pd}$ | 0.383            | 0.568  | 0.237  |

Ref. [17] navodi vrijednost NME za pn-QRPA račun  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{110}\text{Pd}$  od 6.52, dok IBM-2 račun Ref. [32] navodi 3.62 za istu veličinu. Naše vrijednosti su manje, i jedino je rezultat DD-ME2 računa s punim relativističkim operatorom prijelaza usporediv. Nadalje, za sve tri interakcije omjeri rezultata dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom prijelaza su mali, ispod 50%. Na slici 12.7 je prikazana multipolna dekompozicija  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{110}\text{Pd}$ .

Što se tiče rezultata dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza, možemo primijetiti nezanemariva poništavanja u slučaju rezultata za interakciju DD-ME2, gdje bi vrh na  $J^\pi=4^-$  rezultirao većim NME da se ne poništava djelomično sa doprinosima stanja sa  $J^\pi=3^+$  i  $J^\pi=5^+$ . Rezultati za interakciju DD-PCX imaju tri otprilike jednako visoka vrha na  $J^\pi=1^-$ ,  $J^\pi=2^-$  i  $J^\pi=1^+$ , dok rezultati za interakciju DD-PC1 pokazuju najveći doprinos od stanja s  $J^\pi=1^-$ , ali s negativnim doprinosom, što znači da se DD-PC1 rezultat donekle ponaša kao prijašnji pn-QRPA rezultati za  $^{96}\text{Zr}$  i  $^{100}\text{Mo}$ . Rezultati koje dobijemo koristeći puni relativistički operator prijelaza imaju maksimalan doprinos od stanja s  $J^\pi=1^-$  za DD-PC1 i DD-PCX interakcije, dok je maksimalan doprinos rezultatu za DD-ME2 interakciju na  $J^\pi=4^-$ , sa značajnim doprinosom stanja s  $J^\pi=1^-$ . Ako usporedimo naše rezultate s rezultatima pn-QRPA računa iz Ref. [17], primjećujemo da svi doprinosi izračunatom matričnom elementu iz tog rada imaju



Slika 12.7: Doprinosi pojedinačnih multipola  $0\nu\beta\beta$  matričnom elementu za  $^{110}\text{Pd} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$  raspad, sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

isti predznak. Maksimalni doprinos dolazi od stanja  $J^\pi=1^-$ , dok stanje na  $J^\pi=1^+$ , koje je u  $^{96}\text{Zr}$  i  $^{100}\text{Mo}$  doprinosilo ukupnom matričnom elementu s negativnim predznakom, daje doprinos koji je pozitivan ali malen u odnosu na druge doprinose. Prikazujemo i DD-ME2 rezultate za  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente za  $^{110}\text{Pd}$  na  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su dani u tablici 12.9

Isključenjem izoskalaranog sparivanja smo po drugi put smanjili NME, i to na način da se vrijednost omjera između rezultata dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih koristeći puni relativistički operator umjereno povećala.

Tablica 12.15: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{110}\text{Pd}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

|                   | PN-RQRPA | PN-RQRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|-------------------|----------|----------------|------------------|
| $^{110}\text{Pd}$ | 0.451    | 1.017          | 0.444            |

### 12.2.6 $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$

Rezultati za nuklearni matrični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{116}\text{Cd}$  prikazani su u tablici 12.16. U tablici 12.17 prikazan je omjer između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i s punim relativističkim operatorom prijelaza.

Tablica 12.16: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{116}\text{Cd}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

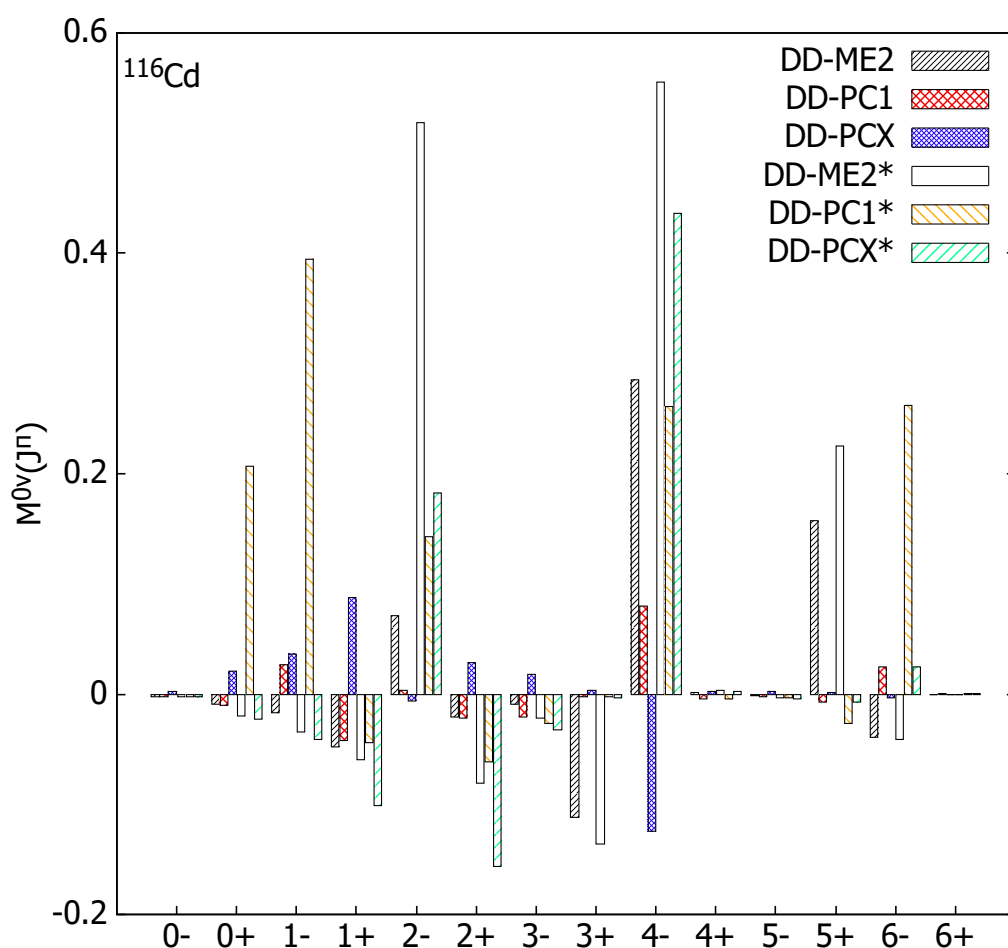
|                   | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |        |
|-------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.261    | 0.021  | 0.056  | 0.928          | 0.879  | 0.308  |

Tablica 12.17: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{116}\text{Cd}$  dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                   | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|-------------------|------------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.282            | 0.023  | 0.183  |

Rezultat pn-QRPA računa iz Ref. [17] za matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{116}\text{Cd}$  je 4.26. IBM-2 rezultat za istu veličinu je naveden u Ref. [32] kao 2.78. Naše vrijednosti su značajno manje, i jedino se rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza, za interakcije DD-ME2 i DD-PC12 mogu usporediti s manjim, IBM-2 rezultatom. Nadalje, omjer rezultata dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom prijelaza je malen, pogotovo za interakciju DD-PC1. Na slici 12.8 je prikazana multipolna dekompozicija  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa za raspad  $^{116}\text{Cd}$ .

Rezultati dobiveni s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza za sve interakcije imaju maksimum na  $J^\pi=4^-$ , s time da za interakciju DD-ME2 taj maksimum doprinosi ukupnom nuklearnom matričnom elementu s pozitivnim, a u slučaju interakcija DD-PC1 i DD-PCX s negativnim predznakom. Općenito možemo primijetiti značajna poništenja među različitim



Slika 12.8: Doprinosi pojedinačnih multipola  $0\nu\beta\beta$  matičnom elementu za  $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$  raspad, sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

doprinosa, što vodi do niskih vrijednosti matičnih elemenata. Što se tiče rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, rezultati za interakcije DD-ME2 i DD-PCX također imaju maksimalni doprinos za stanje s  $J^\pi=4^-$ , DD-ME2 s pozitivnim a DD-PCX s negativnim predznakom, dok je maksimum multipolne dekompozicije rezultata za interakciju DD-PC1 na multipolu  $J^\pi=1^-$ . Osim toga, značajan doprinos NME za interakciju DD-ME2 daje stanje s  $J^\pi=2^-$ . Uspoređujući naše rezultate s nerelativističkim pn-QRPA rezultatima iz Ref. [17] primjećujemo da ti rezultati imaju maksimalni doprinos od stanja s  $J^\pi=1^-$ , nakon čega monotono padaju, i da svi doprinose ukupnom matičnom elementu s istim predznakom. Multipolna dekompozicija pn-QRPA rezultata iz Ref. [214] je slična, s time da je maksimalni doprinos na

$J^\pi=2^-$ . Kao što vidimo, i unutar računa koji polaze od istog teorijskog opisa postoje varijacije u obliku multipolne dekompozicije.

Prikazujemo i DD-ME2 rezultate za  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente za raspad  $^{116}\text{Cd}$  na  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su prikazani u tablici 12.18

Tablica 12.18: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{116}\text{Cd}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija.

|                   | PN-RQRPA | PN-RQRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|-------------------|----------|----------------|------------------|
| $^{116}\text{Cd}$ | 0.077    | 0.816          | 0.094            |

Opet je isključenje izoskalarnog sparivanja blago smanjilo apsolutnu vrijednost NME.

### 12.2.7 $^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Te}$

Rezultati za nuklearni matrični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{124}\text{Sn}$  prikazan je u tablici 12.19. U tablici 12.20 prikazan je omjer između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i s punim relativističkim operatorom prijelaza.

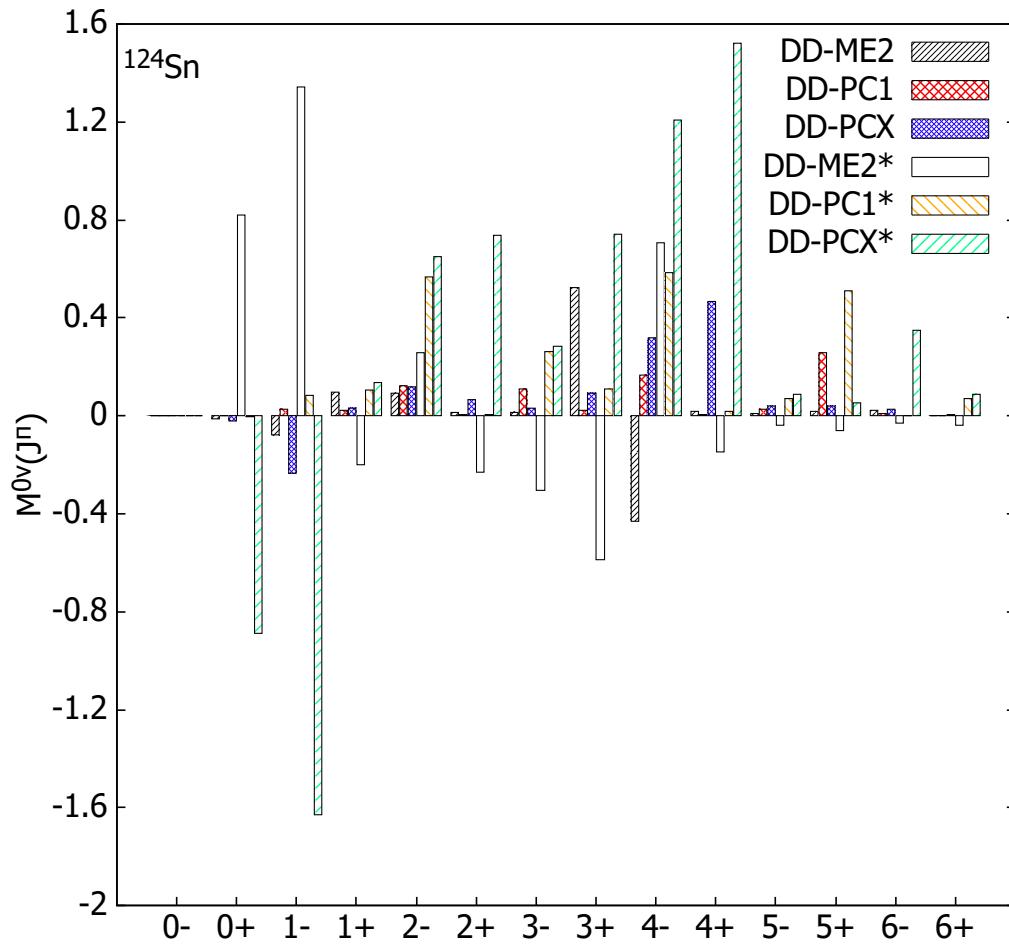
Tablica 12.19: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{124}\text{Sn}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                   | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |        |
|-------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{124}\text{Sn}$ | 0.235    | 0.766  | 0.980  | 0.784          | 2.324  | 4.132  |

Tablica 12.20: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{124}\text{Sn}$  dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                   | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|-------------------|------------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{124}\text{Sn}$ | 0.300            | 0.330  | 0.237  |

Rezultat pn-QRPA modela za  $0\nu\beta\beta$  nuklearni matrični element za raspad  $^{124}\text{Sn}$  naveden u Ref. [17] je 5.30. IBM-2 rezultat za istu veličinu je naveden u Ref. [32] kao 3.50. U slučaju raspada  $^{124}\text{Sn}$ , naši rezultati, pogotovo rezultati dobiveni koristeći puni relativistički operator prijelaza, su puno bliži rezultatima drugih grupa. Na slici 12.9 je prikazana multipolna dekompozicija  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa za raspad  $^{124}\text{Sn}$ .



Slika 12.9: Doprinosi pojedinačnih multipola matričnom elementu za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Te}$ , sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

Rezultati dobiveni s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza imaju, za DD-ME2, DD-PC1 i DD-PCX interakciju, redom maksimalne doprinose za stanja međujezgre s  $J^\pi=3^+$ ,  $J^\pi=5^+$  i  $J^\pi=4^+$ . Osim toga, rezultat za DD-ME2 interakciju pokazuje značajan doprinos negativnog predznaka na  $J^\pi=4^-$ . S druge strane, ako koristimo puni relativistički operator prijelaza, multipolna dekompozicija DD-ME2 i DD-PCX rezultata ima maksimum na  $J^\pi=1^-$ , ali u slučaju DD-PCX interakcije doprinos stanja tog multipolariteta je negativan. Rezultat za interakciju DD-PC1 ima najveći doprinos za stanje multipolariteta  $J^\pi=2^-$ . Uspoređujući naše rezultate s rezultatima drugih modela, nalazimo da multipolna dekompozicija pn-QRPA rezultata iz Ref. [17] ima maksimum na  $J^\pi=1^-$ , kao dvije od tri interakcije korištene u ovom radu kad se računa s



punim relativističkim operatorom prijelaza, ali da za razliku od naših DD-PCX rezultata to stanje međujezgre doprinosi ukupnom matričnom elementu s pozitivnim predznakom. Susjedno stanje na  $J^\pi=1^+$  jedino daje negativan doprinos ukupnom matričnom elementu.

Prikazujemo i DD-ME2 rezultate za  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente za  $^{124}\text{Sn}$  na  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su prikazani u tablici 12.21

Tablica 12.21: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{124}\text{Sn}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija.

|                   | PN-RQRPA | PN-RQRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|-------------------|----------|----------------|------------------|
| $^{124}\text{Sn}$ | 0.069    | 0.486          | 0.141            |

Vidimo da je smanjenje snage  $T=0$  sparivanja dovelo do manjih matričnih elemenata i manjeg omjera rezultata dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom prijelaza.

### 12.2.8 $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$

Rezultati za nuklearni matrični element  $0\nu\beta\beta$  raspada  $^{128}\text{Te}$  prikazan je u tablici 12.22. U tablici 12.23 prikazan je omjer između rezultata za NME dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i s punim relativističkim operatorom prijelaza.

Tablica 12.22: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{128}\text{Te}$ , za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                   | PN-RQRPA |        |        | PN-RQRPA(rel.) |        |        |
|-------------------|----------|--------|--------|----------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2   | DD-PC1 | DD-PCX | DD-ME2         | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{128}\text{Te}$ | 0.383    | 0.206  | 0.284  | 1.112          | 1.205  | 2.253  |

Tablica 12.23: Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{128}\text{Te}$  dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni  $V_{0pp}$ .

|                   | M(nrel.)/M(rel.) |        |        |
|-------------------|------------------|--------|--------|
|                   | DD-ME2           | DD-PC1 | DD-PCX |
| $^{128}\text{Te}$ | 0.345            | 0.171  | 0.126  |

Rezultat pn-QRPA modela za  $0\nu\beta\beta$  nuklearni matrični element za raspad  $^{128}\text{Te}$  naveden u Ref. [17] je 4.92. Svi naši rezultati su ispod toga, s time da se rezultat za DD-PCX interakciju

dobiven koristeći puni relativistički operator prijelaza donekle približava navedenoj vrijednosti. IBM-2 rezultat za ovaj NME je naveden u Ref. [32] kao 4.48, što znači da stoji u istom odnosu prema našim rezultatima kao i rezultat nerelativističke pn-QRPA. Omjeri rezultata dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih koristeći puni relativistički operator prijelaza su isto mali, pogotovo za interakcije s točkastim vezanjem. Na slici 12.10 je prikazana multipolna dekompozicija  $0\nu\beta\beta$  matričnog elementa za  $^{128}\text{Te}$ . Rezultati dobiveni koristeći nerelativističku redukciju operatora prijelaza pokazuju sličnost rezultatima dobivenima koristeći puni relativistički operator. Za obje varijante računa, rezultati za interakciju DD-ME2 imaju maksimum za stanje s  $J^\pi=3^+$ , a DD-PC1 i DD-PCX rezultati za stanje s  $J^\pi=4^-$ , s time da multipolna dekompozicija DD-PCX rezultata dobivenih koristeći puni relativistički operator prijelaza pokazuje još jedan značajan vrh na  $J^\pi=2^+$ . Što se tiče usporedbe naših rezultata s rezultatima drugih modela, multipolna dekompozicija NME dobivenih s nerelativističkim pn-QRPA računom u Ref. [17] i Ref. [213] ne sadržavaju međusobno poništenje doprinosa (doprinosi od svih stanja doprinose ukupnom matričnom elementu s istim predznakom), i ima vrh na  $J^\pi=1^-$ . Prikazujemo i DD-ME2 rezultate za  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente za  $^{128}\text{Te}$  na  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su dani u tablici 12.24.

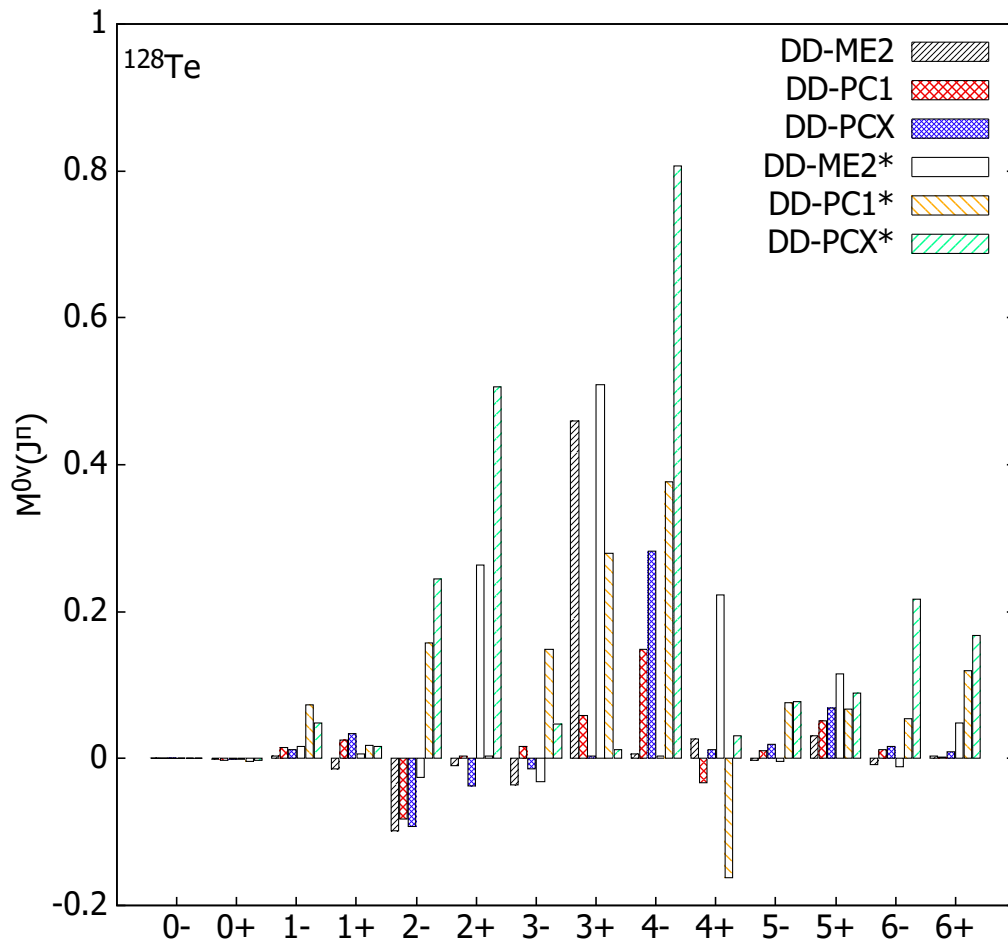
Tablica 12.24: Rezultati za nuklearni matrični element za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{128}\text{Te}$ , za  $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija.

|                   | PN-RQRPA | PN-RQRPA(rel.) | M(nrel.)/M(rel.) |
|-------------------|----------|----------------|------------------|
| $^{128}\text{Te}$ | 0.345    | 1.050          | 0.338            |

Isključenjem izoskalarnog sparivanja dobili smo nešto manju vrijednost nuklearnog matričnog elementa za obje varijante računa, koristeći nerelativističku redukciju operatora prijelaza i koristeći puni relativistički operator, i nešto manju vrijednost omjera rezultata za dvije varijante računa.

## 12.3 Usporedba s drugim teorijskim pristupima i rasprava

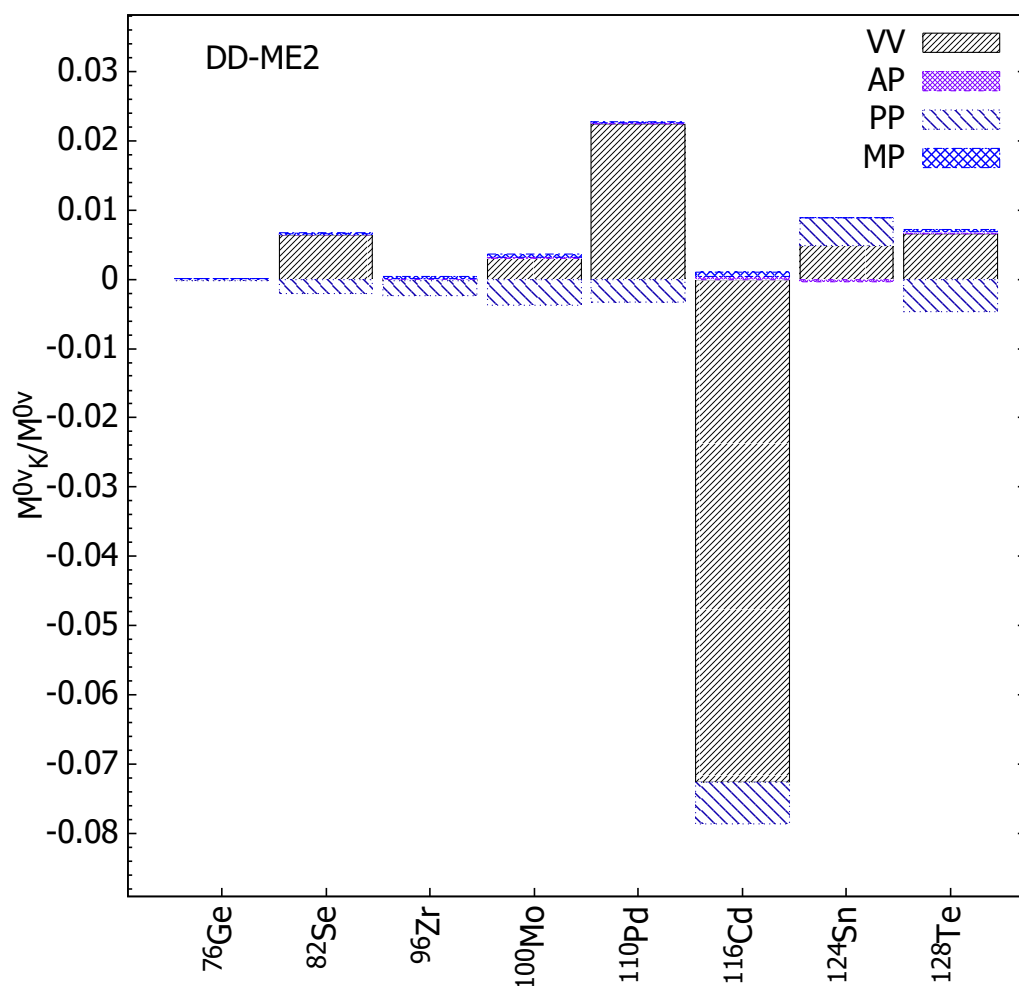
Osim multipolne dekompozicije, koja je za različite nuklide koje razmatramo prikazana u prijašnjem odjeljku, zanimljivo je razmotriti koliko razni kanali raspada, definirani za puni relativistički operator prijelaza u jednadžbama (3.36)–(3.40) i za njegovu nerelativističku redukciju u jednadžbama (3.43)–(3.47), doprinose ukupnom  $0\nu\beta\beta$  nuklearnom matričnom elementu. Iz prijašnjih istraživanja očekujemo da kanali osim AA doprinose malo[45]. Na slici 12.11 je prikazan doprinos kanala osim AA (koji dominira) apsolutnoj vrijednosti  $0\nu\beta\beta$  matričnog ele-



Slika 12.10: Doprinosi pojedinačnih multipola  $0\nu\beta\beta$  matričnom elementu za  $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$  raspad, sve tri interakcije, za  $g_A=1.27$  i optimalan  $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom.

menta za rezultate dobivene koristeći nerelativističku redukciju operatora prijelaza, za DD-ME2 interakciju. Druge interakcije, i rezultati za puni relativistički operator prijelaza, su analogni. Vidimo da osim za  $^{116}\text{Cd}$ , nijedan doprinos ne prelazi 1%, a i za taj nuklid najveći doprinos osim AA je oko 7%.

S obzirom da za  $0\nu\beta\beta$  raspad ne postoje eksperimentalni podaci, jedina usporedba koju možemo napraviti je s rezultatima drugih modela. U tablici 12.25 prikazana je takva usporedba, za sve nuklide koje smo razmatrali u ovom poglavlju, i rješenja pn-QRPA[17], QRPA[215, 216, 105], RQRPA[215], SRPA [215], PHFB[217], EDF[88], ISM [218], IBM-2[32] i GCM[43] modela. Nadalje, ovu usporedbu možemo prikazati i grafički, što je napravljeno na slici 12.12.



Slika 12.11: Doprinosi pojedinačnih kanala raspada, osim AA,  $0\nu\beta\beta$  matričnom elementu za sve nuklide koje razmatramo u poglavlju relativno prema ukupnom NME, DD-ME2 interakcija, za  $g_A=1.27$  i optimalne vrijednosti  $V_{0pp}$ .

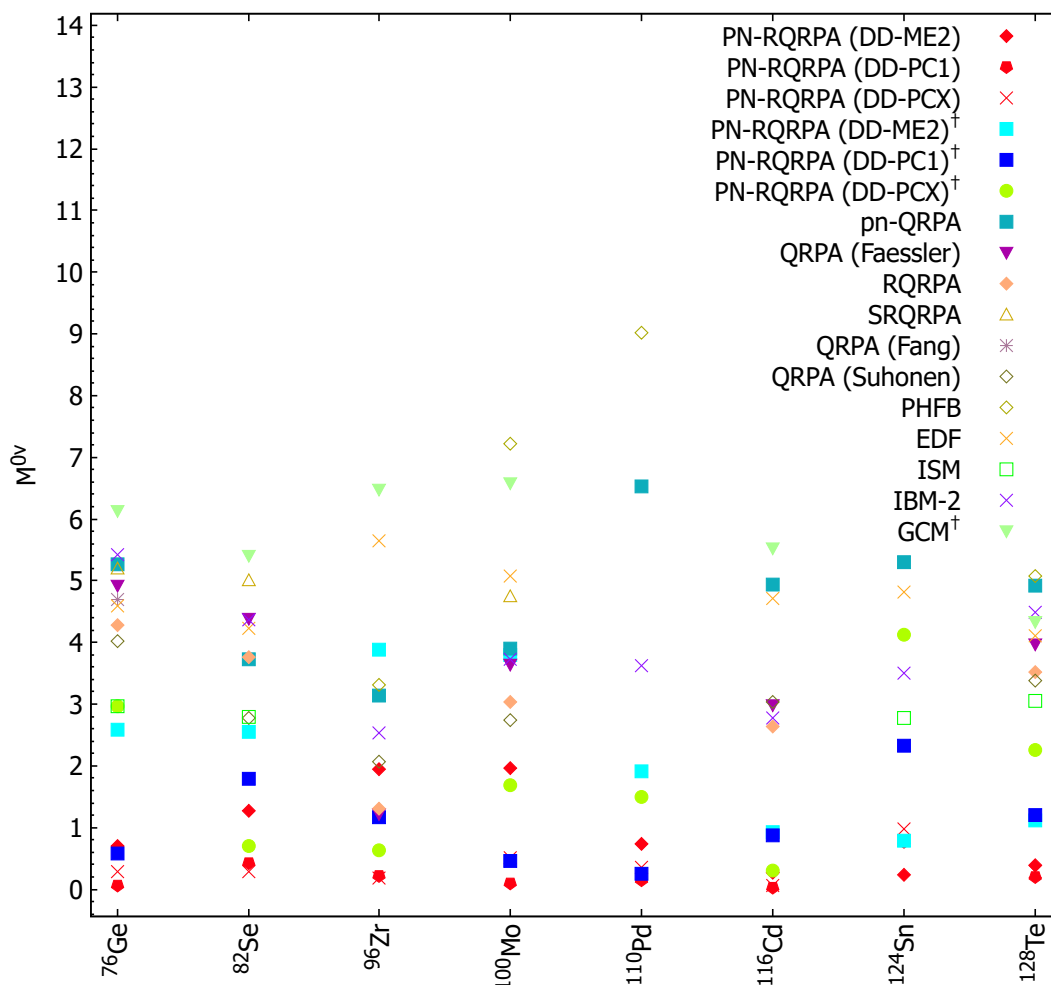
Prvo što možemo primijetiti je da je raspon rezultata za razne modele velik, čak i u usporedbi sa slučajem za  $2\nu\beta\beta$  raspade (gdje postoje eksperimentalni podaci koji ograničavaju teorijske modele). Čak i u konzervativnim procjenama (recimo u Ref. [219], gdje se promatra manje vrsta modela nego u ovom radu) nuklearni matrični elementi izračunati s različitim modelima se razlikuju za faktor 2–3. Iz slike 12.12 je očito da je taj faktor veći ako se uključi više teorijskih pristupa, i važno je istaknuti da to vrijedi čak i ako zanemarimo rezultate ovog rada – koji su sistematski ispod većine rezultata, pogotovo ako je u njihovom računu korišten nerelativistički reducirani operator.

Velike sistematske neodređenosti u matričnim elementima za  $0\nu\beta\beta$  raspad uglavnom proiz-

Tablica 12.25: Rezultati za  $0\nu\beta\beta$  raspad  $^{76}\text{Ge}$ - $^{128}\text{Te}$ , uspoređeni s rezultatima pn-QRPA[17], QRPA[215], RQRPA[215] i SRQRPA[215], QRPA[216, 105], PHFB (projicirani Hartree-Fock-Bogoliubov)[217], EDF [88], ISM[218], IBM-2[32] i GCM[43]. Rezultati dobiveni s relativističkim operatorom prijelaza su označeni s križićem.

|                                | $^{76}\text{Ge}$ | $^{82}\text{Se}$ | $^{96}\text{Zr}$ | $^{100}\text{Mo}$ | $^{110}\text{Pd}$ | $^{116}\text{Cd}$ | $^{124}\text{Sn}$ | $^{128}\text{Te}$ |
|--------------------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| PN-RQRPA (DD-ME2)              | 0.631            | 1.712            | 1.632            | 1.967             | 0.729             | 0.261             | 0.235             | 0.383             |
| PN-RQRPA (DD-PC1)              | 0.087            | 0.477            | 0.051            | 0.092             | 0.145             | 0.021             | 0.766             | 0.206             |
| PN-RQRPA (DD-PCX)              | 0.295            | 0.33             | 0.189            | 0.514             | 0.354             | 0.056             | 0.98              | 0.284             |
| PN-RQRPA (DD-ME2) <sup>†</sup> | 2.613            | 2.543            | 3.505            | 3.791             | 1.904             | 0.928             | 0.784             | 1.112             |
| PN-RQRPA (DD-PC1) <sup>†</sup> | 0.086            | 1.961            | 0.273            | 0.462             | 0.255             | 0.879             | 2.324             | 1.205             |
| PN-RQRPA (DD-PCX) <sup>†</sup> | 2.958            | 0.827            | 0.625            | 1.694             | 1.497             | 0.308             | 4.132             | 2.253             |
| pn-QRPA[17]                    | 5.26             | 3.73             | 3.14             | 3.9               | 6.52              | 4.93              | 5.3               | 4.92              |
| QRPA[215]                      | 4.92             | 4.39             | 1.22             | 3.64              | –                 | 2.99              | –                 | 3.97              |
| RQRPA[215]                     | 4.28             | 3.77             | 1.31             | 3.03              | –                 | 2.64              | –                 | 3.52              |
| SRQRPA[215]                    | 4.3-6.2          | 3.9-6.1          | –                | 4.0-5.5           | –                 | –                 | –                 | –                 |
| QRPA[105]*                     | 4.69             | –                | –                | –                 | –                 | –                 | –                 | –                 |
| QRPA[216]                      | 4.029            | 2.771            | 2.065            | 2.737             | –                 | 3.034             | –                 | 3.383             |
| PHFB[217]                      | –                | –                | 3.318            | 7.216             | 9.0246            | –                 | –                 | 5.0701            |
| EDF[88]                        | 4.6              | 4.22             | 5.65             | 5.08              | –                 | 4.72              | 4.81              | 4.11              |
| ISM[218]                       | 2.96             | 2.79             | –                | –                 | –                 | –                 | 2.77              | 3.05              |
| IBM-2[32]                      | 5.42             | 4.37             | 2.53             | 3.73              | 3.62              | 2.78              | 3.5               | 4.48              |
| GCM[43] <sup>†</sup>           | 6.13             | 5.4              | 6.47             | 6.58              | –                 | 5.52              | –                 | 4.33              |

laze iz različitih načina na koji se uzima u obzir valna funkcija u zadanom modelu[219, 220], odnosno koja aproksimacija se koristi budući da bi dijagonalizacija mnogočestičnog Hamiltonijana u punom prostoru modela bila računalno prezahtjevna[219]. Nadalje, na apsolutnu vrijednost NME za  $0\nu\beta\beta$  raspad utječu korelacije izvan srednjeg polja koje su uključene u teoriju - općenito, što je više korelacija uključeno, NME je manji po apsolutnoj vrijednosti[219]. Vidimo da su naši rezultati manji od rezultata drugih grupa, pogotovo nerelativističkih pn-QRPA računa. Rezultati dobiveni koristeći nerelativističku redukciju operatora su uglavnom ispod  $M^{0\nu}=1$ , gdje su i neki od rezultata dobivenih s interakcijama s točkastim vezanjem za puni relativistički operator prijelaza. Drugi takvi rezultati i većina rezultata dobivenih s interakcijom s izmjenom mezona DD-ME2 i punim relativističkim operatorom prijelaza su unutar raspona koji daju drugi teorijski modeli. Naši rezultati unutar tog raspona se čine bliži rezultatima međudjelujućeg modela ljsaka nego pn-QRPA. Rezultati međudjelujućeg modela ljsaka su obično manji po apsolutnoj vrijednosti od rezultata drugih modela. Zanimljivo je da su rezultati GCM modela s punim relativističkim operatorom prijelaza, jedinog drugog modela koji koristi puni relativistički operator prijelaza, obično pri samom vrhu raspona. Naši rezultati za NME  $0\nu\beta\beta$



Slika 12.12: Sažetak  $0\nu\beta\beta$  nuklearnih matričnih elemenata izračunatih pomoću PN-RQRPA koristeći DD-ME2, DD-PC1 and DD-PCX interakcije, u usporedbi s rezultatima pn-QRPA[17], QRPA[215], RQRPA[215] i SRQRPA[215], QRPA[216, 105], PHFB (projicirani Hartree-Fock-Bogoliubov)[217], EDF [88], ISM[218], IBM-2[32] i GCM[43]. Rezultati dobiveni s relativističkim operatorom prijelaza su označeni s križićem.

raspada su najbliže rezultatima drugih modela za račun koristeći puni relativistički operator prijelaza za interakciju DD-ME2 i raspade  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$  i  $^{100}\text{Mo}$ , zatim za isti operator i interakciju DD-PCX za raspade  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{124}\text{Sn}$  i  $^{128}\text{Te}$ , dok su za interakciju DD-PC1 naši rezultati sistematski manji od rezultata drugih modela čak i ako se koristi puni relativistički operator, ali im se približavamo za račun s punim relativističkim operatorom prijelaza za raspade  $^{82}\text{Se}$  i  $^{124}\text{Sn}$ . Pogotovo male rezultate u usporedbi s rezultatima drugih grupa dobivamo za  $^{110}\text{Pd}$ .

Moguće je da problem malih vrijednosti NME nastaje zbog pretjerane jakosti korelacija

unutar naše implementacije PN-RQRPA. Sličan problem je, posebno za interakcije s točkastim vezanjem, raspravljan u Ref. [48], gdje su navedene još manje vrijednosti NME. Također je moguće da kao i u slučaju  $2\nu\beta\beta$  matičnih elemenata, dobivamo male NME jer jezgre koje razmatramo imaju vrijednosti parametra deformacije  $\beta$  iznad 0.1[221], i stoga ih je potrebno razmatrati u modelu koji uključuje deformaciju. Potrebna su daljnja istraživanja i proširenja modela koji je korišten u ovom radu.

# Poglavlje 13

## Zaključak

U ovom radu uveden je opis nuklearnih matričnih elemenata dvoneutrinskih i bezneutrinskih dvostrukih beta raspada u okviru teorije relativističkog energijskog funkcionala gustoće, i predstavljani su prvi rezultati. Koristeći tri različite interakcije, DD-ME2 interakciju temeljenu na izmjeni masivnih mezona, i interakcije s točkastim vezanjem DD-PC1 i DD-PCX, opisani su dvoneutrinski dvostruki beta raspad nuklida  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{128}\text{Te}$ ,  $^{130}\text{Te}$ ,  $^{136}\text{Xe}$  i  $^{150}\text{Nd}$ , kao i bezneutrinski raspad nuklida  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{110}\text{Pd}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ , i  $^{128}\text{Te}$ . Za opis osnovnog stanja jezgara koje sudjeluju u raspadu korišteni su relativistički Hartree-BCS i Hartree-Bogoliubov modeli. Prijelazi iz osnovnog stanja, odnosno beta raspad u susjedne neparano-neparne jezgre, opisani su pomoću relativističke proton-neutron kvazičestične aproksimacije slučajnih faza (PN-RQRPA). Svi modeli koji se koriste, RHB, RHBCS i PN-RQRPA, mogu se izvesti iz relativističkog nuklearnog energijskog funkcionala gustoće, i u potpunosti su Lorentz-invarijantni. Korelacije sparivanja u  $T = 1$  kanalu opisane su preko separabilne interakcije, dok rezidualna PN-RQRPA sila također sadrži  $T = 0$  kanal sparivanja. Ista sila se koristi u osnovnom i u pobuđenim stanjima u izovektorskom kanalu, što znači da Fermi matrični element  $2\nu\beta\beta$  raspada iščezava. U opisu bezneutrinskih dvostrukih beta raspada korišten je puni relativistički operator prijelaza kao i njegova nerelativistička redukcija [34, 44].

Ispostavlja se da je snaga izoskalarne ( $T=0$ ) sparivanja  $V_{0pp}$  slobodan parametar našeg teorijskog pristupa budući da ne doprinosi na razini osnovnog stanja. Da bi odredili optimalnu vrijednost parametra  $V_{0pp}$ , slijedili smo pristup uveden u Ref. [26, 27, 28], odnosno odredili smo  $V_{0pp}$  iz globalne prilagodbe poluživota jednostrukih  $\beta$  raspada na eksperimentalne podatke. Korištene su parno-parne jezgre u rasponu  $8 \leq Z \leq 82$  za koje su dostupni eksperimentalni podaci o jednostrukom  $\beta$  raspadu, gdje je efekt promjene  $V_{0pp}$  na relativnu promjenu poluživota  $T_{1/2}$  veći od 20%, i gdje su poluživoti  $< 10^3$  s. Nadalje, ansatz s kojim je provedena prilagodba sadrži ovisnost o  $(N - Z)$ . Tako imamo određeni stupanj izospinske ovisnosti u  $V_{0pp}$ . Kao



rezultat dobijemo niz vrijednosti za snagu izoskalarnog sparivanja, uglavnom oko  $V_{0pp} \approx 1$ , što ukazuje na slabo slamanje izospinske simetrije u našem teorijskom okviru, bez obzira na interakciju koja se koristi.

Kako smo pokazali u odjeljku 11.4, naši rezultati za  $2\nu\beta\beta$  raspade su barem jednako dobri kao rezultati drugih pristupa, kad se usporede s eksperimentalnim vrijednostima[196, 40]. Što se tiče mogućih poboljšanja vrijednosti nuklearnih matričnih elemenata, odnosno njihovog približavanja vrijednostima izvedenima iz eksperimenta, moguće je da neki od efekata koji smo zanemarili u prvoj implementaciji teorijskog okvira može rezultirati takvim približavanjem. Time se otvara jedna od mnogih mogućnosti za daljnja istraživanja. Zanimljivo je primijetiti da smo najdalje od eksperimentalnih podataka upravo za nuklide  $^{76}\text{Ge}$  i  $^{82}\text{Se}$ . Isti nuklidi su nedavno razmatrani u okviru teorije temeljene na metodi miješanja konfiguracija sa sačuvanjem simetrija (SCCM) zasnovanoj na Gogny funkcionalima[41] i pokazuje se da rezultati različitih računa odgovaraju eksperimentalnim vrijednostima samo ako se uključe triaksijalni oblici[41], odnosno da smo očito daleko od sferne simetrije na razini srednjeg polja. Stoga je važan razvoj PN-RQRPA modela koji bi mogao uzeti u obzir deformacije u jezgrama. Daljnji razvoj predstavljenog teorijskog okvira je usko vezan i za razvoj novih relativističkih energijskih funkcionala gustoće, kao i numeričkih metoda pomoću kojih se provode računi u okviru PN-RQRPA.

Osim nuklearnih matričnih elemenata, na potpuno samosuglasan način smo izračunali i faktore faznog prostora i vremena poluživota za dvoneutrinske dvostruke beta raspade. Naš izračun faktora faznog prostora je temeljen na radu prikazanom u Ref. [42, 33], ali unatoč tome naši rezultati su nešto drugačiji od onih koji su navedeni u tim radovima. Što se tiče vremena poluživota, dobivena odstupanja od eksperimentalnih podataka su dijelom zbog razlike između naših faktora faznog prostora i faktora faznog prostora koji su korišteni da bi se dobili eksperimentalni NME[40].

Matrični elementi bezneutrinskih dvostrukih beta raspada su također razmotreni u ovom radu. Zbog toga što se radi o prvoj primjeni PN-RQRPA na problem dvostrukih beta raspada i zbog računalnih resursa koje računi bezneutrinskih dvostrukih beta raspada zahtijevaju, ograničili smo multipole stanja u međujezgri preko kojih raspad ide na  $J=0-6$ . Također, budući da matrične elemente za bezneutrinski raspad računamo preko formule koja nije prikladna za dodavanje Jastrow operatora[34], u ovom koraku ne implementiramo tretman kratkodosežnih korelacija. Svi rezultati su izračunati u aproksimaciji prosječne energije.

Pokazuje se da su naši rezultati za  $0\nu\beta\beta$  raspade manji od rezultata drugih istraživačkih grupa[47], što je nastavak trenda koji je bio vidljiv već i u slučaju dvoneutrinskih dvostrukih beta raspada. Zaključujemo da su optimalne vrijednosti  $V_{0pp}$  parametra izvedene iz računa za

jednostruke beta raspade preblizu točki gdje QRPA računi kolapsiraju, što rezultira malim vrijednostima  $2\nu\beta\beta$  matričnog elementa. Budući da su naši rezultati na optimalnim vrijednostima parametra  $V_{0pp}$  manji od rezultata drugih modela, postavlja se pitanje bi li bili bliži očekivanim rezultatima u slučaju da izoskalarno sparivanje iščezava. Razmotreni su doprinosi svih multipolariteta u računu ukupnoga nuklearnog matričnog elementa. U prikazu doprinosa NME izračunatih na optimalnim vrijednostima  $V_{0pp}$  vidljivo je značajno poništavanje između doprinosa različitih multipolariteta. Međutim, pokazuje se da je ovisnost  $0\nu\beta\beta$  NME o parametru  $V_{0pp}$  izrazito mala osim djelomično za DD-ME2 interakciju. Također su razmotreni NME za DD-ME2 interakciju i  $V_{0pp} = 0$ . Ti rezultati su općenito bliži očekivanima, mada i dalje ispod njih.

Implementacija punog relativističkog operatora prijelaza daje rezultate koje smatramo značajnima i vrijednima daljnjeg istraživanja. Razlika između rezultata dobivenih sa punim relativističkim operatorom prijelaza i rezultata dobivenih koristeći nerelativističku redukciju operatora prijelaza je u slučaju nekih nuklida reda nekoliko desetaka postotaka, što je konzistentno s prijašnjim tretmanima punog relativističkog operatora prijelaza u okviru GCM metode[43], ali neki nuklidi pokazuju razliku u redu veličine, što je bliže onome što su prijašnja istraživanja utvrdila kao anomalni rezultat. Pokazano je da nerelativistička aproksimacija nije opravdana u slučaju PN-RQRPA.

Što se tiče smjernica za daljnja istraživanja koja bi se nastavljala na sadašnji rad, budući da se radi tek o prvoj implementaciji PN-RQRPA u kontekstu problema dvostrukih beta raspada, takve prilike su mnogobrojne. Kratkoročno, naši naporu će se usredotočiti na proširenje računa  $0\nu\beta\beta$  matričnih elemenata, uključujući prijelaze višeg multipolariteta prema i od međujezgre, dodatnu optimizaciju računalnog koda, itd. Postoji više načina na koji računi predstavljeni u ovom radu mogu biti unaprijeđeni. Prema našoj procjeni, značajan potencijal za unaprijeđenje modela ima uključivanje efekata deformacije jezgara. Već u slučaju  $2\nu\beta\beta$  raspada vidimo naznake da su efekti deformacija značajni. Na Sveučilištu u Zagrebu se aktivno razvija računalni model koji bi omogućio PN-RQRPA račune s deformiranim jezgrama, što znači da bi po završetku tog razvoja bilo moguće proširiti naš model tako da dobijemo  $2\nu\beta\beta$  i  $0\nu\beta\beta$  nuklearne matrične elemente za deformirane jezgre. Treba napomenuti da bi ovaj korak značio značajan porast računalne složenosti problema[47], ali bi omogućio po prvi puta da se u okviru pristupa baziranog na QRPA opišu  $0\nu\beta\beta$  matrični elementi za deformirane jezgre koristeći puni relativistički operator.

Moguća su i manja unaprijeđenja. Primjerice, računalni kod koji koristimo za PN-RQRPA račune je prilagođen iz koda koji uključuje efekte konačne temperature[130, 24]. Nije nam poznat nijedan tretman dvostrukih beta raspada na konačnoj temperaturi, ali proširiti naš račun

na konačnu temperaturu bi bilo jednostavno.

Naposlijetku, moguće je proširenje modela koje bi popravilo jedan od očitih nedostataka našeg računa  $0\nu\beta\beta$  nuklearnih matricnih elemenata, nedostatak odgovarajućeg tretmana kratkodosežnih korelacija. Kao što je već spomenuto, način na koji računamo  $0\nu\beta\beta$  NME znači da je teško dodati fenomenološku Jastrow funkciju s kojom se često rješava problem kratkodosežnih korelacija. Međutim, sam Jastrow pristup ima svoja ograničenja; među ostalim, ne poštuje normalizaciju valne funkcije i mijenja preklope između međustanja[51]. Jedna od mogućnosti za budući rad bi bila ugrađivanje tzv. metode unitarnog koreliranog operatora (engl. Unitary Correlation Operator Method, UCOM)[50, 49], koja predstavlja razrađeniji tretman kratkodosežnih korelacija. Time, uz istodobno uključivanje efekata deformacije, bi približili svoj račun najsofisticiranijim trenutnim teorijskim tretmanima dvostrukog beta raspada.

U svakom slučaju, perspektive za daljnji rad u ovom području su znatne, i s ovim radom su završeni početni koraci prema opisu dvostrukih beta raspada baziranom na relativističkom energijskom funkcionalu gustoće koji bi uzeo u obzir sve relevantne efekte u jezgrama na samosuglasan način i konkurirao najnaprednijim teorijskim pristupima danas.

# Popis slika

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 1.1   | Grafički prikaz Schechter-Valle teorema. . . . .   | 4   |
| 11.1  | Konvergenција $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ i $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ raspad s povećanjem maksimalne energije $pn$ parova. Rezultati RHBCS+PN-RQRPA modela s DD-ME2 interakcijom. . . . .   | 102 |
| 11.2  | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ NME za $2\nu\beta\beta$ raspade o snazi izoskalarnog sparivanja za $A=48-150$ nuklide. RHBCS+PN-RQRPA račun s DD-ME2 interakcijom. . . . .   | 104 |
| 11.3  | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ nuklearnog matričnog elementa za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ . DD-ME2 interakcija, za $g_A=1.0$ . . . . .  | 106 |
| 11.4  | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . . | 107 |
| 11.5  | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ raspad o snazi $T=0$ sparivanja $V_{0pp}$ , RHBCS+PN-RQRPA račun, obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 108 |
| 11.6  | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ nuklearnog matričnog elementa za $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ raspad, DD-ME2 interakcija. . . . .   | 111 |
| 11.7  | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . . | 112 |
| 11.8  | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ raspad o snazi $T=0$ sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 113 |
| 11.9  | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ nuklearnog matričnog elementa za $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ raspad, DD-ME2 interakcija. . . . .   | 115 |
| 11.10 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . . | 116 |
| 11.11 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ raspad o snazi sparivanja $T=0$ $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 117 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 11.12 | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$ raspad, DD-ME2 interakcija. . . . .  | 118 |
| 11.13 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . .   | 119 |
| 11.14 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$ raspad o snazi sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 120 |
| 11.15 | Kumulativna suma nuklearnog matričnog elementa za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ , DD-ME2 interakcija. . . . .  | 121 |
| 11.16 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . . | 122 |
| 11.17 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ raspad o snazi sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 123 |
| 11.18 | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ nuklearnog matričnog elementa za $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ raspad, DD-ME2 interakcija. . . . .   | 124 |
| 11.19 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . . | 125 |
| 11.20 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ raspad o snazi sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 126 |
| 11.21 | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ nuklearnog matričnog elementa za $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$ raspad, DD-ME2 interakcija. . . . .   | 127 |
| 11.22 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . . | 128 |
| 11.23 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$ raspad o snazi sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 129 |
| 11.24 | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ nuklearnog matričnog elementa za $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$ raspad, za DD-ME2 interakciju. . . . .  | 130 |
| 11.25 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$ raspad o parametru snage izoskalarnog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . . | 131 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 11.26 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$ raspad o snazi sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 132 |
| 11.27 | Kumulativna suma $2\nu\beta\beta$ nuklearnog matričnog elementa za $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$ raspad, za DD-ME2 interakciju. . . . .  | 133 |
| 11.28 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$ raspad o parametru snage izoskalaranog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . .                  | 134 |
| 11.29 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$ raspad o snazi sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 135 |
| 11.30 | Kumulativna suma nuklearnog matričnog elementa za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ , DD-ME2 interakcija. . . . .  | 136 |
| 11.31 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ raspad o parametru snage izoskalaranog sparivanja $V_{0pp}$ , za definiciju faktora preklopa izraženu u jednadžbi (2.11) (označeno kao var. 1) i za definiciju faktora preklopa iz rada Šimkovic et al.[34], jednadžba (2.12) (označeno kao var. 2), DD-ME2 interakcija, $g_A = 1.0$ i $g_A = 1.27$ . . . . .                  | 137 |
| 11.32 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ matričnog elementa za $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ raspad o snazi sparivanja $V_{0pp}$ , obje interakcije s točkastim vezanjem. . . . .   | 138 |
| 11.33 | Sažetak $2\nu\beta\beta$ nuklearnih matričnih elemenata izračunatih pomoću PN-RQRPA koristeći DD-ME2, DD-PC1 and DD-PCX interakcije, u usporedbi s rezultatima računa zasnovanima na pn-QRPA, implementacije Deppisch [38], Pirinen[3], i Šimkovic[30], modela međudjelujućih bozona (IBM)[36], i međudjelujućeg modela ljsaka [32]. Vrijednosti NME izvedene iz eksperimentalnih podataka[40] su također prikazane. . . . . | 145 |
| 11.34 | Ovisnost $2\nu\beta\beta$ nuklearnih matričnih elemenata za raspade od $^{48}\text{Ca}$ do $^{150}\text{Nd}$ , sve interakcije, za $g_A=1$ i za definiciju faktora preklopa prikazanu u jednadžbi (2.11), za RHB+PN-RQRPA model. . . . .   | 149 |
| 12.1  | Konvergencija matričnog elementa za $0\nu\beta\beta$ raspade $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ i $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ s povećanjem maksimalne energije $pn$ parova. DD-ME2 interakcija, $V_{0pp}=0$ . . .   | 151 |
| 12.2  | Doprinosi pojedinačnih multipola $0\nu\beta\beta$ matričnom elementu za $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ raspade, sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .  | 153 |
| 12.3  | Ovisnost $0\nu\beta\beta$ matričnog elementa za raspad $^{76}\text{Ge}$ o parametru snage izoskalaranog sparivanja $V_{0pp}$ , za sve tri interakcije koje se razmatraju u ovom radu, nerelativistička redukcija operatora prijelaza. Matrični elementi s negativnim predznakom. . . . .   | 155 |
| 12.4  | Doprinosi pojedinačnih multipola $0\nu\beta\beta$ matričnom elementu za $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ raspad, sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .   | 157 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 12.5  | Doprinosi pojedinačnih multipola $0\nu\beta\beta$ matičnom elementu za ${}^{96}\text{Zr} \rightarrow {}^{96}\text{Mo}$ raspad, sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .   | 159 |
| 12.6  | Doprinosi pojedinačnih multipola $0\nu\beta\beta$ matičnom elementu za ${}^{100}\text{Mo} \rightarrow {}^{100}\text{Ru}$ raspad, sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .   | 161 |
| 12.7  | Doprinosi pojedinačnih multipola $0\nu\beta\beta$ matičnom elementu za ${}^{110}\text{Pd} \rightarrow {}^{110}\text{Cd}$ raspad, sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .   | 163 |
| 12.8  | Doprinosi pojedinačnih multipola $0\nu\beta\beta$ matičnom elementu za ${}^{116}\text{Cd} \rightarrow {}^{116}\text{Sn}$ raspad, sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .   | 165 |
| 12.9  | Doprinosi pojedinačnih multipola matičnom elementu za $0\nu\beta\beta$ raspad ${}^{124}\text{Sn} \rightarrow {}^{124}\text{Te}$ , sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .  | 167 |
| 12.10 | Doprinosi pojedinačnih multipola $0\nu\beta\beta$ matičnom elementu za ${}^{128}\text{Te} \rightarrow {}^{128}\text{Xe}$ raspad, sve tri interakcije, za $g_A=1.27$ i optimalan $V_{0pp}$ . Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .   | 170 |
| 12.11 | Doprinosi pojedinačnih kanala raspada, osim AA, $0\nu\beta\beta$ matičnom elementu za sve nuklide koje razmatramo u poglavlju relativno prema ukupnom NME, DD-ME2 interakcija, za $g_A=1.27$ i optimalne vrijednosti $V_{0pp}$ . . . . .  | 171 |
| 12.12 | Sažetak $0\nu\beta\beta$ nuklearnih matičnih elemenata izračunatih pomoću PN-RQRPA koristeći DD-ME2, DD-PC1 and DD-PCX interakcije, u usporedbi s rezultatima pn-QRPA[17], QRPA[215], RQRPA[215] i SRQRPA[215], QRPA[216, 105], PHFB (projicirani Hartree-Fock-Bogoliubov)[217], EDF [88], ISM[218], IBM-2[32] i GCM[43]. Rezultati dobiveni s relativističkim operatorom prijelaza su označeni s križićem. . . . . | 173 |

# Popis tablica

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 6.1  | Energije vezanja BE, radijusi naboja $r_c$ i razlike između radijusa neutronske i protonske raspodjele $r_{np} = r_n - r_p$ za jezgre koje su korištene u podešavanju parametara DD-ME2 interakcije, uspoređeni s eksperimentalnim vrijednostima u zgradama; odstupanja u postocima su dana u posljednja tri stupca[19]. . . . .   | 65  |
| 6.2  | Parametri za efektivne interakcije DD-ME2 i DD-ME1[19]. . . . .  | 66  |
| 6.3  | Svojstva beskonačne nuklearne materije pri gustoći zasićenja za interakcije DD-ME1 i DD-ME2[19]. Podaci o derivaciji energije simetrije na gustoći zasićenja iz Ref. [155]. . . . .  | 67  |
| 7.1  | Vrijednosti $N$ za jezgre unutar izotopnih lanaca $62 \leq Z \leq 72$ i $90 \leq Z \leq 98$ čije se energije vezanja koriste za prilagođavanje parametara interakcije DD-PC1[21].  | 73  |
| 7.2  | Parametri za efektivnu interakciju DD-PC1[21]. . . . .   | 74  |
| 7.3  | Parametri za efektivnu interakciju DD-PCX i pridružene nepouzdanosti[22]. . . . .  | 76  |
| 7.4  | Svojstva beskonačne nuklearne materije pri gustoći zasićenja za interakcije DD-PC1 i DD-PCX[130]. . . . .  | 76  |
| 8.1  | Parametri separabilne interakcije sparivanja $G_p$ i $G_n$ , dobiveni prilagođavanjem na procijepe sparivanja dobivene iz RHB računa sa DD-ME2 interakcijom, za neke od jezgara od interesa za ovaj rad, zaključno sa $^{128}\text{Xe}$ . . . . .  | 78  |
| 8.2  | Parametri separabilne interakcije sparivanja $G_p$ i $G_n$ , dobiveni prilagođavanjem na procijepe sparivanja dobivene iz RHB računa za DD-PC1 i DD-PCX interakcije, za neke od jezgara od interesa za ovaj rad, zaključno sa $^{128}\text{Xe}$ . . . . .  | 79  |
| 9.1  | Faktori faznog prostora za $2\nu\beta\beta$ raspad dobiveni sa pojednostavljenom formulom, uspoređeni s rezultatima drugih računa. Sve vrijednosti PSF su u jedinicama $10^{-21}\text{yr}^{-1}$ ; Q-vrijednosti su u jedinicama elektronske mase. Primjetimo da su naši rezultati dani za Q-vrijednosti koje koristi Suhonen[188], ali za $g=1.0$ , što čini naše rezultate manjima. . . . . | 87  |
| 11.1 | Parametri ansatza za snagu $T = 0$ sparivanja (jed. (11.1)) dobiveni prilagodbom vremena poluživota jednostrukih $\beta$ -raspada na eksperimentalne vrijednosti, za DD-PCX, DD-PC1 i DD-ME2 interakcije[197]. . . . .   | 105 |
| 11.2 | Vrijednosti parametra snage $T = 0$ sparivanja $V_{0pp}$ dobivene prilagodbom vremena poluživota jednostrukih $\beta$ -raspada na eksperimentalne vrijednosti, za DD-PCX, DD-PC1 i DD-ME2 interakcije[197]. . . . .  | 105 |



|  |     |
|--|-----|
| 11.3 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ , dobivene iz RHBCS+PN-RQRPA modela, za različite interakcije. . . . .  | 106 |
| 11.4 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ , za različite interakcije. . . . .   | 110 |
| 11.5 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ , za različite interakcije. . . . .   | 114 |
| 11.6 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$ , za različite interakcije. . . . .   | 115 |
| 11.7 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$ , za različite interakcije. . . . .   | 120 |
| 11.8 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$ , za različite interakcije. . . . .   | 123 |
| 11.9 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$ , za različite interakcije. . . . .   | 126 |
| 11.10 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$ , za različite interakcije. . . . .  | 129 |
| 11.11 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$ , za različite interakcije. . . . .  | 132 |
| 11.12 Energije vezanja i $Q$ vrijednosti za $2\nu\beta\beta$ raspad $^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$ , za različite interakcije. . . . .  | 135 |
| 11.13 Usporedba NME za $2\nu\beta\beta$ raspad izračunat u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, $V_{0pp} = 0$ ) i pn-QRPA NME iz Ref. [3]. . . . .   | 139 |
| 11.14 Usporedba NME za $2\nu\beta\beta$ raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, $V_{0pp} = 0$ ) i pn-QRPA matičnih elemenata iz Ref. [30], sa faktorima renormalizacije sparivanja $g_{pp}^{T=1}$ and $g_{pp}^{T=0}$ danima u zadnja dva stupca. . . . . | 140 |
| 11.15 Usporedba NMEs za $2\nu\beta\beta$ raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, $V_{0pp} = 0$ ) u aproksimaciji prosječne energije i IBM matičnih elemenata iz Ref. [36]. . . . .   | 140 |
| 11.16 Usporedba NMEs za $2\nu\beta\beta$ raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, optimizirani $V_{0pp}$ ) u aproksimaciji prosječne energije i ISM matičnih elemenata (Ref. [37] osim ako je naznačeno drugačije). . . . .                               | 141 |
| 11.17 Usporedba NMEs za $2\nu\beta\beta$ raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, optimizirani $V_{0pp}$ ) i pn-QRPA matičnih elemenata iz Ref. [38]. . . . .   | 141 |
| 11.18 Usporedba NMEs za $2\nu\beta\beta$ raspad izračunatih u PN-RQRPA pristupu (DD-ME2 interakcija, optimizirani $V_{0pp}$ ) u aproksimaciji prosječne energije i matičnih elemenata izračunatih pomoću efektivne teorije iz Ref [39]. . . . .                              | 142 |
| 11.19 Nuklearni matični elementi za $2\nu\beta\beta$ raspad dobiveni s DD-ME2 interakcijom i optimiziranom vrijednošću snage izoskalarnog sparivanja uspoređeni s NME dobivenim iz eksperimentalnih podataka. . . . .  | 143 |
| 11.20 Nuklearni matični elementi za $2\nu\beta\beta$ raspad dobiveni s DD-PC1 interakcijom i optimiziranom vrijednošću snage izoskalarnog sparivanja uspoređeni s NME dobivenim iz eksperimentalnih podataka. . . . .  | 143 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 11.21 | Nuklearni matrični elementi za $2\nu\beta\beta$ raspad dobiveni s DD-PCX interakcijom i optimiziranom vrijednošću snage izoskalarnog sparivanja uspoređeni s NME dobivenim iz eksperimentalnih podataka. . . . .   | 144 |
| 11.22 | Vremena poluživota za $2\nu\beta\beta$ raspad izračunata u RHBCS+PN-RQRPA modelu pomoću DD-ME2, DD-PC1 i DD-PCX interakcija, i faznim faktorima iz Ref. [74], za vrijednosti $V_{0pp}$ optimizirane pomoću vremena poluživota za jednos-truki beta raspad, u usporedbi s nedavnim eksperimentalnim rezultatima[40]. Sve vrijednosti su u godinama. . . . . | 147 |
| 12.1  | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{76}\text{Ge}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .   | 152 |
| 12.2  | Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{76}\text{Ge}$ dobivenih za nerelativističku redukciju operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .  | 152 |
| 12.3  | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{76}\text{Ge}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. . . . .   | 154 |
| 12.4  | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{82}\text{Se}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .   | 156 |
| 12.5  | Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{82}\text{Se}$ dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .   | 156 |
| 12.6  | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{82}\text{Se}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prije-laza označeni su zvjezdicom. . . . .  | 157 |
| 12.7  | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{96}\text{Zr}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .   | 158 |
| 12.8  | Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{96}\text{Zr}$ dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .   | 158 |
| 12.9  | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{96}\text{Zr}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prije-laza označeni su zvjezdicom. . . . .  | 159 |
| 12.10 | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{100}\text{Mo}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .  | 160 |
| 12.11 | Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{100}\text{Mo}$ dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .  | 160 |
| 12.12 | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{100}\text{Mo}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .  | 161 |
| 12.13 | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{110}\text{Pd}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .  | 162 |
| 12.14 | Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{110}\text{Pd}$ dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .  | 162 |
| 12.15 | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{110}\text{Pd}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. Rezultati dobiveni s punim relativističkim operatorom prijelaza označeni su zvjezdicom. . . . .  | 164 |
| 12.16 | Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{116}\text{Cd}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .  | 164 |

|  |     |
|--|-----|
| 12.17 Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{116}\text{Cd}$ dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .  | 164 |
| 12.18 Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{116}\text{Cd}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. . . . .  | 166 |
| 12.19 Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{124}\text{Sn}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .  | 166 |
| 12.20 Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{124}\text{Sn}$ dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .  | 166 |
| 12.21 Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{124}\text{Sn}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. . . . .  | 168 |
| 12.22 Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{128}\text{Te}$ , za optimalni $V_{0pp}$ .  | 168 |
| 12.23 Omjeri rezultata za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{128}\text{Te}$ dobivenih s nerelativističkom redukcijom operatora prijelaza i rezultata dobivenih s punim relativističkim operatorom, za optimalni $V_{0pp}$ . . . . .  | 168 |
| 12.24 Rezultati za nuklearni matrični element za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{128}\text{Te}$ , za $V_{0pp} = 0$ , DD-ME2 interakcija. . . . .  | 169 |
| 12.25 Rezultati za $0\nu\beta\beta$ raspad $^{76}\text{Ge}$ - $^{128}\text{Te}$ , uspoređeni s rezultatima pn-QRPA[17], QRPA[215], RQRPA[215] i SRQRPA[215], QRPA[216, 105], PHFB (projicirani Hartree-Fock-Bogoliubov)[217], EDF [88], ISM[218], IBM-2[32] i GCM[43]. Rezultati dobiveni s relativističkim operatorom prijelaza su označeni s križićem. | 172 |

# Bibliografija

- [1] A. Faessler and F. Simkovic, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **24**, 2139 (1998).
- [2] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, *Sixty Years of Double Beta Decay* (World Scientific, 2001) <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/4032>.
- [3] P. Pirinen and J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **91**, 054309 (2015).
- [4] J. Engel and J. Menéndez, *Reports on Progress in Physics* **80**, 046301 (2017).
- [5] C. F. Jiao, M. Horoi, and A. Neacsu, *Phys. Rev. C* **98**, 064324 (2018).
- [6] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Phys. Rev. D* **25**, 2951 (1982).
- [7] J. B. Albert, M. Auger, D. J. Auty, P. S. Barbeau, E. Beauchamp, D. Beck, V. Belov, C. Benitez-Medina, J. Bonatt, M. Breidenbach, T. Brunner, A. Burenkov, G. F. Cao, C. Chambers, J. Chaves, B. Cleveland, S. Cook, A. Craycraft, T. Daniels, M. Danilov, S. J. Daugherty, C. G. Davis, J. Davis, R. DeVoe, S. Delaquis, A. Dobi, A. Dolgolenko, M. J. Dolinski, M. Dunford, W. Fairbank, J. Farine, W. Feldmeier, P. Fierlinger, D. Franco, D. Fudenberg, G. Giroux, R. Gornea, K. Graham, G. Gratta, C. Hall, K. Hall, C. Hargrove, S. Herrin, M. Hughes, X. S. Jiang, A. Johnson, T. N. Johnson, S. Johnston, A. Karelin, L. J. Kaufman, R. Killick, S. Kravitz, A. Kuchenkov, K. S. Kumar, D. S. Leonard, F. Leonard, C. Licciardi, R. MacLellan, M. G. Marino, B. Mong, M. Montero Díez, D. Moore, R. Nelson, K. O'Sullivan, A. Odian, I. Ostrovskiy, C. Ouellet, A. Piepke, A. Pocar, C. Y. Prescott, A. Rivas, P. C. Rowson, M. P. Roza, J. J. Russell, A. Sabourov, D. Sinclair, K. Skarpaas, S. Slutsky, V. Stekhanov, V. Strickland, M. Tarka, T. Tolba, D. Tosi, K. Twelker, P. Vogel, J.-L. Vuilleumier, A. Waite, J. Walton, T. Walton, M. Weber, L. J. Wen, U. Wichoski, J. Wodin, J. D. Wright, L. Yang, Y.-R. Yen, O. Y. Zeldovich, and Y. B. Zhao (EXO Collaboration), *Phys. Rev. C* **89**, 015502 (2014).
- [8] A. Gando, Y. Gando, H. Hanakago, H. Ikeda, K. Inoue, R. Kato, M. Koga, S. Matsuda, T. Mitsui, T. Nakada, K. Nakamura, A. Obata, A. Oki, Y. Ono, I. Shimizu, J. Shirai, A. Suzuki, Y. Takemoto, K. Tamae, K. Ueshima, H. Watanabe, B. D. Xu, S. Yamada, H. Yoshida, A. Kozlov, S. Yoshida, T. I. Banks, J. A. Detwiler, S. J. Freedman, B. K. Fujikawa, K. Han, T. O'Donnell, B. E. Berger, Y. Efremenko, H. J. Karwowski, D. M. Markoff, W. Tornow, S. Enomoto, and M. P. Decowski (KamLAND-Zen Collaboration), *Phys. Rev. C* **86**, 021601 (2012).
- [9] K. Alfonso, D. R. Artusa, F. T. Avignone, O. Azzolini, M. Balata, T. I. Banks, G. Bari, J. W. Beeman, F. Bellini, A. Bersani, M. Biassoni, C. Brofferio, C. Bucci, A. Caminata, L. Canonica, X. G. Cao, S. Capelli, L. Cappelli, L. Carbone, L. Cardani, N. Casali, L. Cassina, D. Chiesa, N. Chott, M. Clemenza, S. Copello, C. Cosmelli, O. Cremonesi, R. J. Creswick, J. S. Cushman, I. Dafinei, A. Dally, S. Dell'Oro, M. M. Deninno, S. Di Domizio, M. L. Di Vacri, A. Drobizhev, L. Ejzak, D. Q. Fang, M. Faverzani, G. Fernandes, E. Ferri, F. Ferroni, E. Fiorini, S. J. Freedman, B. K. Fujikawa, A. Giachero, L. Gironi, A. Giuliani, P. Gorla, C. Gotti, T. D. Gutierrez, E. E. Haller, K. Han, E. Hansen, K. M. Heeger, R. Hennings-Yeomans, K. P. Hickerson, H. Z. Huang, R. Kadel, G. Keppel, Y. G. Kolomensky, K. E. Lim, X. Liu, Y. G. Ma, M. Maino, M. Martinez, R. H. Maruyama, Y. Mei, N. Moggi, S. Morganti, S. Nisi, C. Nones, E. B. Norman, A. Nucciotti, T. O'Donnell, F. Orto, D. Orlandi, J. L. Ouellet, C. E. Pagliarone, M. Pallavicini, V. Palmieri, L. Pattavina, M. Pavan, M. Pedretti, G. Pessina, V. Pettinacci, G. Piperno, S. Pirro, S. Pozzi, E. Previtali, C. Rosenfeld, C. Rusconi, E. Sala, S. Sangiorgio, D. Santone, N. D. Scielzo, M. Sisti, A. R. Smith, L. Taffarello, M. Tenconi, F. Terranova, C. Tomei, S. Trentalange, G. Ventura, M. Vignati, S. L. Wagaarachchi, B. S. Wang,

- H. W. Wang, L. Wielgus, J. Wilson, L. A. Winslow, T. Wise, L. Zanotti, C. Zarra, G. Q. Zhang, B. X. Zhu, and S. Zucchelli (CUORE Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **115**, 102502 (2015).
- [10] K.-H. Ackermann, M. Agostini, M. Allardt, M. Altmann, E. Andreotti, A. M. Bakalyarov, M. Balata, I. Barabanov, M. Barnabé Heider, N. Barros, L. Baudis, C. Bauer, N. Becerici-Schmidt, E. Bellotti, S. Belogurov, S. T. Belyaev, G. Benato, A. Bettini, L. Bezrukov, T. Bode, V. Brudanin, R. Brugnera, D. Budjáš, A. Caldwell, C. Cattadori, A. Chernogorov, O. Chkvorets, F. Cossavella, A. D'Andragora, E. V. Demidova, A. Denisov, A. di Vacri, A. Domula, V. Egorov, R. Falkenstein, A. Ferella, K. Freund, F. Froberg, N. Frodyma, A. Gangapshv, A. Garfagnini, J. Gasparro, S. Gazzana, R. Gonzalez de Orduna, P. Grabmayr, V. Gurentsov, K. Gusev, K. K. Guthikonda, W. Hampel, A. Hegai, M. Heisel, S. Hemmer, G. Heusser, W. Hofmann, M. Hult, L. V. Inzhechik, L. Ioannucci, J. Janicskó Csáthy, J. Jochum, M. Junker, R. Kankanyan, S. Kianovsky, T. Kihm, J. Kiko, I. V. Kirpichnikov, A. Kirsch, A. Klimenko, M. Knapp, K. T. Knöpfle, O. Kochetov, V. N. Kornoukhov, K. Kröniger, V. Kusminov, M. Laubenstein, A. Lazzaro, V. I. Lebedev, B. Lehnert, D. Lenz, H. Liao, M. Lindner, I. Lippi, J. Liu, X. Liu, A. Lubashevskiy, B. Lubsandorzhev, A. A. Machado, B. Majorovits, W. Maneschg, G. Marissens, S. Mayer, G. Meierhofer, I. Nemchenok, L. Niedermeier, S. Nisi, J. Oehm, C. O'Shaughnessy, L. Pandola, P. Peiffer, K. Pelczar, A. Pullia, S. Riboldi, F. Ritter, C. Rossi Alvarez, C. Sada, M. Salathe, C. Schmitt, S. Schönert, J. Schreiner, J. Schubert, O. Schulz, U. Schwan, B. Schwingenheuer, H. Seitz, E. Shevchik, M. Shirchenko, H. Simgen, A. Smolnikov, L. Stanco, F. Stelzer, H. Strecker, M. Tarka, U. Trunk, C. A. Ur, A. A. Vasenko, S. Vogt, O. Volynets, K. von Sturm, V. Wagner, M. Walter, A. Wegmann, M. Wojcik, E. Yanovich, P. Zavarise, I. Zhitnikov, S. V. Zhukov, D. Zinatulina, K. Zuber, and G. Zuzel, *The European Physical Journal C* **73**, 2330 (2013).
- [11] N. Abgrall, E. Aguayo, F. T. Avignone, A. S. Barabash, F. E. Bertrand, M. Boswell, V. Brudanin, M. Busch, A. S. Caldwell, Y.-D. Chan, C. D. Christofferson, D. C. Combs, J. A. Detwiler, P. J. Doe, Y. Efremenko, V. Egorov, H. Ejiri, S. R. Elliott, J. Esterline, J. E. Fast, P. Finnerty, F. M. Fraenkle, A. Galindo-Uribarri, G. K. Giovanetti, J. Goett, M. P. Green, J. Gruszko, V. E. Guisepe, K. Gusev, A. L. Hallin, R. Hazama, A. Hegai, R. Henning, E. W. Hoppe, S. Howard, M. A. Howe, K. J. Keeter, M. F. Kidd, A. Knecht, O. Kochetov, S. I. Konovalov, R. T. Kouzes, B. D. LaFerriere, J. Leon, L. E. Leviner, J. C. Loach, P. N. Luke, S. MacMullin, R. D. Martin, S. Mertens, L. Mizouni, M. Nomachi, J. L. Orrell, C. O'Shaughnessy, N. R. Oerman, D. Phillips, A. W. P. Poon, K. Pushkin, D. C. Radford, K. Rielage, R. G. H. Robertson, M. C. Ronquest, A. G. Schubert, B. Shanks, T. Shima, M. Shirchenko, K. J. Snavely, N. Snyder, D. Steele, J. Strain, A. M. Suriano, J. Thompson, V. Timkin, W. Tornow, R. L. Varner, S. Vasilyev, K. Vetter, K. Vorren, B. R. White, J. F. Wilkerson, T. Williams, W. Xu, E. Yakushev, A. R. Young, C.-H. Yu, and V. Yumatov, *Advances in High Energy Physics* **2014**, 365432 (2014).
- [12] M. Bongrand, *Physics Procedia* **61**, 211 (2015), 13th International Conference on Topics in Astroparticle and Underground Physics, TAUP 2013.
- [13] A. M. and, *Journal of Physics: Conference Series* **587**, 012030 (2015).
- [14] N. Paar, T. Nikšić, D. Vretenar, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **69**, 054303 (2004).
- [15] N. Paar, T. Marketin, D. Vale, and D. Vretenar, *International Journal of Modern Physics E* **24**, 1541004 (2015), <https://doi.org/10.1142/S0218301315410049>.
- [16] D. Vretenar, A. Afanasjev, G. Lalazissis, and P. Ring, *Physics Reports* **409**, 101 (2005).
- [17] J. Hyvärinen and J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **91**, 024613 (2015).
- [18] F. Simkovic, G. Pantis, and A. Faessler, *Nonaccelerator new physics. Proceedings, 1st International Workshop, NANP'97, Dubna, Russia, July 7-11, 1997*, *Phys. Atom. Nucl.* **61**, 1218 (1998), [*Yad. Fiz.*61,1318(1998)], arXiv:nucl-th/9711060 [nucl-th].
- [19] G. A. Lalazissis, T. Nikšić, D. Vretenar, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **71**, 024312 (2005).
- [20] F. Hofmann, C. M. Keil, and H. Lenske, *Phys. Rev. C* **64**, 034314 (2001).
- [21] T. Nikšić, D. Vretenar, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **78**, 034318 (2008).
- [22] E. Yüksel, T. Marketin, and N. Paar, *Phys. Rev. C* **99**, 034318 (2019).
- [23] T. Nikšić, N. Paar, D. Vretenar, and P. Ring, *Computer Physics Communications* **185**, 1808 (2014).
- [24] A. Ravlić, E. Yüksel, Y. F. Niu, G. Colò, E. Khan, and N. Paar, *Phys. Rev. C* **102**, 065804 (2020).
- [25] D. Vale, Y. F. Niu, and N. Paar, *Phys. Rev. C* **103**, 064307 (2021).

- [26] A. Ravlić, E. Yüksel, Y. F. Niu, and N. Paar, *Phys. Rev. C* **104**, 054318 (2021).
- [27] T. Marketin, L. Huther, and G. Martínez-Pinedo, *Phys. Rev. C* **93**, 025805 (2016).
- [28] Z. Niu, Y. Niu, H. Liang, W. Long, T. Nikšić, D. Vretenar, and J. Meng, *Physics Letters B* **723**, 172 (2013).
- [29] J. Suhonen, *From Nucleons to Nucleus*, Theoretical and Mathematical Physics (Springer, Berlin, Germany, 2007).
- [30] F. Šimkovic, A. Smetana, and P. Vogel, *Phys. Rev. C* **98**, 064325 (2018).
- [31] T. Marketin, N. Paar, T. Nikšić, and D. Vretenar, *Phys. Rev. C* **79**, 054323 (2009).
- [32] J. Barea, J. Kotila, and F. Iachello, *Phys. Rev. C* **87**, 014315 (2013).
- [33] J. Kotila and F. Iachello, *Phys. Rev. C* **87**, 024313 (2013).
- [34] F. Šimkovic, A. Faessler, V. Rodin, P. Vogel, and J. Engel, *Phys. Rev. C* **77**, 045503 (2008).
- [35] J. Barea, J. Kotila, and F. Iachello, *Phys. Rev. C* **91**, 034304 (2015).
- [36] F. Iachello, J. Barea, and J. Kotila, *Nuclear and Particle Physics Proceedings* **265-266**, 25 (2015), proceedings of the Neutrino Oscillation Workshop.
- [37] L. Coraggio, L. De Angelis, T. Fukui, A. Gargano, N. Itaco, and F. Nowacki, *Phys. Rev. C* **100**, 014316 (2019).
- [38] F. F. Deppisch and J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **94**, 055501 (2016).
- [39] E. A. Coello Pérez, J. Menéndez, and A. Schwenk, *Phys. Rev. C* **98**, 045501 (2018).
- [40] A. Barabash, *Universe* **6**, 10.3390/universe6100159 (2020).
- [41] T. R. Rodríguez, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **44**, 034002 (2017).
- [42] J. Kotila and F. Iachello, *Phys. Rev. C* **85**, 034316 (2012).
- [43] J. M. Yao, L. S. Song, K. Hagino, P. Ring, and J. Meng, *Phys. Rev. C* **91**, 024316 (2015).
- [44] L. S. Song, J. M. Yao, P. Ring, and J. Meng, *Phys. Rev. C* **90**, 054309 (2014).
- [45] L. S. Song, J. M. Yao, P. Ring, and J. Meng, *Phys. Rev. C* **95**, 024305 (2017).
- [46] J. Hyvärinen and J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **91**, 024613 (2015).
- [47] M. T. Mustonen and J. Engel, *Phys. Rev. C* **87**, 064302 (2013).
- [48] J. Terasaki, *Phys. Rev. C* **91**, 034318 (2015).
- [49] H. Feldmeier, T. Neff, R. Roth, and J. Schnack, *Nuclear Physics A* **632**, 61 (1998).
- [50] N. Paar, P. Papakonstantinou, H. Hergert, and R. Roth, *Phys. Rev. C* **74**, 014318 (2006).
- [51] J. Engel, J. Carlson, and R. B. Wiringa, *Phys. Rev. C* **83**, 034317 (2011).
- [52] M. Goeppert-Mayer, *Phys. Rev.* **48**, 512 (1935).
- [53] W. Haxton and G. Stephenson, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **12**, 409 (1984).
- [54] K. C. Wali, Introduction to grand unified theories, in *Gravitation, Gauge Theories and the Early Universe*, edited by B. R. Iyer, N. Mukunda, and C. V. Vishveshwara (Springer Netherlands, Dordrecht, 1989) pp. 237–280.
- [55] S. Raby, *The European Physical Journal C* **59**, 223 (2009).
- [56] H. Ejiri, J. Suhonen, and K. Zuber, *Physics Reports* **797**, 1 (2019), neutrino-nuclear responses for astro-neutrinos, single beta decays and double beta decays.
- [57] F. T. Avignone, S. R. Elliott, and J. Engel, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 481 (2008).
- [58] W. H. Furry, *Phys. Rev.* **56**, 1184 (1939).
- [59] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).
- [60] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar, *Phys. Rev.* **109**, 1015 (1958).
- [61] B. Kayser, F. Gibrat-Debu, and F. Perrier, *The Physics of Massive Neutrinos* (World Scientific, 1989) <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/0655> .
- [62] E. Takasugi, *Physics Letters B* **149**, 372 (1984).
- [63] M. Duerr, M. Lindner, and A. Merle, *Journal of High Energy Physics* **2011**, 91 (2011).

- [64] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Advanced book classics (Avalon Publishing, 1995).
- [65] J. F. Nieves, *Physics Letters B* **147**, 375 (1984).
- [66] M. Hirsch, S. Kovalenko, and I. Schmidt, *Physics Letters B* **642**, 106 (2006).
- [67] M. Hirsch, H. V. Klapdor-Kleingrothaus, and S. G. Kovalenko, *Phys. Rev. D* **57**, 1947 (1998).
- [68] S. R. Elliott, A. A. Hahn, and M. K. Moe, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2582 (1986).
- [69] H. Ejiri, K. Fushimi, T. Kamada, H. Kinoshita, H. Kobiki, H. Ohsumi, K. Okada, H. Sano, T. Shibata, T. Shima, N. Tanabe, J. Tanaka, T. Taniguchi, T. Watanabe, and N. Yamamoto, *Physics Letters B* **258**, 17 (1991).
- [70] M. Günther, J. Hellmig, G. Heusser, M. Hirsch, H. V. Klapdor-Kleingrothaus, B. Maier, H. Päs, F. Petry, Y. Ramachers, H. Strecker, M. Völlinger, A. Balysh, S. T. Belyaev, A. Demehin, A. Gurov, I. Kondratenko, D. Kotel'nikov, V. I. Lebedev, and A. Müller, *Phys. Rev. D* **55**, 54 (1997).
- [71] A. S. Barabash, *AIP Conference Proceedings* **1686**, 020003 (2015), <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4934892>.
- [72] A. Staudt, T. Kuo, and H. Klapdor-Kleingrothaus, *Physics Letters B* **242**, 17 (1990).
- [73] J. Terasaki, *Phys. Rev. C* **93**, 024317 (2016).
- [74] S. Stoica and M. Mirea, *Frontiers in Physics* **7**, 12 (2019).
- [75] S. Stoica, *Chinese Physics C* **43**, 064108 (2019).
- [76] J. Suhonen and O. Civitarese, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **39**, 085105 (2012).
- [77] J. Terasaki and Y. Iwata, *Phys. Rev. C* **100**, 034325 (2019).
- [78] H. Ejiri, *Frontiers in Physics* **7**, 30 (2019).
- [79] F. Šimkovic, J. Schwieger, G. Pantis, and A. Faessler, *Foundations of Physics* **27**, 1275 (1997).
- [80] F. Šimkovic, A. Faessler, H. Müther, V. Rodin, and M. Stauf, *Phys. Rev. C* **79**, 055501 (2009).
- [81] V. Rodin, A. Faessler, F. Šimkovic, and P. Vogel, *Czechoslovak Journal of Physics* **56**, 495 (2006).
- [82] S. Stoica and H. Klapdor-Kleingrothaus, *Nuclear Physics A* **694**, 269 (2001).
- [83] P. Beneš, F. Šimkovic, A. Faessler, and W. Kamiński, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **57**, 257 (2006), international Workshop of Nuclear Physics 27th course.
- [84] S. Stoica and H. V. Klapdor-Kleingrothaus, *The European Physical Journal A - Hadrons and Nuclei* **17**, 529 (2003).
- [85] E. Caurier, G. Martínez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, and A. P. Zuker, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 427 (2005).
- [86] J. Kostensalo and J. Suhonen, *Physics Letters B* **802**, 135192 (2020).
- [87] J. Suhonen and J. Kostensalo, *Frontiers in Physics* **7**, 29 (2019).
- [88] T. R. Rodríguez and G. Martínez-Pinedo, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 252503 (2010).
- [89] J. Menéndez, T. R. Rodríguez, G. Martínez-Pinedo, and A. Poves, *Phys. Rev. C* **90**, 024311 (2014).
- [90] J. Barea and F. Iachello, *Phys. Rev. C* **79**, 044301 (2009).
- [91] B. A. Brown, D. L. Fang, and M. Horoi, *Journal of Physics: Conference Series* **966**, 012017 (2018).
- [92] L. de Oliveira, A. R. Samana, F. Krmpotic, A. E. Mariano, and C. A. Barbero, *Journal of Physics: Conference Series* **630**, 012048 (2015).
- [93] V. d. S. Ferreira, A. R. Samana, F. Krmpotić, and M. Chiapparini, *Phys. Rev. C* **101**, 044314 (2020).
- [94] C. F. Jiao, J. Engel, and J. D. Holt, *Phys. Rev. C* **96**, 054310 (2017).
- [95] P. K. Rath, A. Kumar, R. Chandra, R. Gautam, P. K. Raina, and B. M. Dixit, *International Journal of Modern Physics E* **28**, 1950096 (2019), <https://doi.org/10.1142/S0218301319500964>.
- [96] J. Kotila, J. Suhonen, and D. S. Delion, *Journal of Physics G - Nuclear and Particle Physics* **37**, 10.1088/0954-3899/37/1/015101 (2010).
- [97] J. Terasaki and Y. Iwata, *The European Physical Journal Plus* **136**, 908 (2021).
- [98] M. Horoi, *AIP Conference Proceedings* **1417**, 57 (2011), <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.3671037>.

- [99] D. Gambacurta, M. Grasso, and F. Catara, *Phys. Rev. C* **81**, 054312 (2010).
- [100] J. Kotila, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences* **8**, 10.3389/fspas.2021.652180 (2021).
- [101] S. Ünlü, N. Çakmak, and C. Selam, *Nuclear Physics A* **970**, 379 (2018).
- [102] J. Suhonen, *Nuclear Physics. A* **864**, 10.1016/j.nuclphysa.2011.06.021 (2011).
- [103] G. Martínez-Pinedo, K. Langanke, and P. Vogel, *Nuclear Physics A* **651**, 379 (1999).
- [104] S. Frauendorf and A. Macchiavelli, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **78**, 24 (2014).
- [105] D.-L. Fang, A. Faessler, V. Rodin, and F. Simkovic, *PHYSICAL REVIEW C* **83**, 10.1103/PhysRevC.83.034320 (2011).
- [106] J. Hyvarinen and J. Suhonen, *Advances in High Energy Physics* **2016**, 10.1155/2016/4714829 (2016).
- [107] D. S. Delion, A. Dumitrescu, and J. Suhonen, *Physical Review C* **100**, 10.1103/PhysRevC.100.024331 (2019).
- [108] D.-L. Fang, A. Faessler, and F. Simkovic, *Physical Review C* **97**, 10.1103/PhysRevC.97.045503 (2018).
- [109] A. A. Raduta and C. M. Raduta, *Journal of Physics: Conference Series* **413**, 012014 (2013).
- [110] F. Šimkovic, R. Dvornický, D. c. v. Štefánik, and A. Faessler, *Phys. Rev. C* **97**, 034315 (2018).
- [111] L. M. Robledo, T. R. Rodríguez, and R. R. Rodríguez-Guzmán, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **46**, 013001 (2018).
- [112] C. Conti, F. Krmpótić, and B. V. Carlson, *PoS XXXIV BWNP*, 126 (2012).
- [113] J. Schwieger, F. Simkovic, A. Faessler, and W. A. Kaminski, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **23**, 1647 (1997).
- [114] O. Civitarese and J. Suhonen, *Nuclear Physics A* **575**, 251 (1994).
- [115] J. Suhonen, J. Toivanen, A. S. Barabash, I. A. Vanushin, V. I. Umatov, R. Gurriarán, F. Hubert, and P. Hubert, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **358**, 297 (1997).
- [116] F. Šimkovic, V. Rodin, A. Faessler, and P. Vogel, *Phys. Rev. C* **87**, 045501 (2013).
- [117] O. Civitarese and J. Suhonen, *Nuclear Physics A* **607**, 152 (1996).
- [118] F. Šimkovic, R. Hodák, A. Faessler, and P. Vogel, *Phys. Rev. C* **83**, 015502 (2011).
- [119] P. Vogel, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **39**, 124002 (2012).
- [120] S. M. Bilenky and S. T. Petcov, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 671 (1987).
- [121] S. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Prentice Hall Advanced Reference Series Prentice Hall Labora (Prentice Hall, 1990).
- [122] A. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Investigations in Physics Series (Princeton University Press, 1996).
- [123] F. Šimkovic, G. Pantis, J. D. Vergados, and A. Faessler, *Phys. Rev. C* **60**, 055502 (1999).
- [124] B. D. Serot and J. D. Walecka, *International Journal of Modern Physics E* **06**, 515 (1997), <https://doi.org/10.1142/S0218301397000299> .
- [125] B. D. Serot, *Reports on Progress in Physics* **55**, 1855 (1992).
- [126] R. J. Furnstahl and B. D. Serot, *Comments Nucl.Part.Phys.* **2**, A23 (2000).
- [127] D. Vretenar, G. A. Lalazissis, and P. Ring, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4595 (1999).
- [128] J. F. Boudreau and E. S. Swanson, in *Applied Computational Physics* (Oxford University Press, 2017) [https://academic.oup.com/book/0/chapter/194826258/chapter-ag-pdf/44618288/book\\_26392\\_section\\_194826258.ag.pdf](https://academic.oup.com/book/0/chapter/194826258/chapter-ag-pdf/44618288/book_26392_section_194826258.ag.pdf) .
- [129] S. M. Blinder, *American Journal of Physics* **33**, 431 (1965), <https://doi.org/10.1119/1.1971665> .
- [130] E. Yüksel, N. Paar, G. Colò, E. Khan, and Y. F. Niu, *Phys. Rev. C* **101**, 044305 (2020).
- [131] N. Bogolyubov, *Sov. Phys. JETP* **7**, 41 (1958).
- [132] J. G. Valatin, *Phys. Rev.* **122**, 1012 (1961).
- [133] P. K. Panda, R. Sahu, and S. P. Misra, *Phys. Rev. C* **45**, 2079 (1992).
- [134] T. Gonzalez-Llarena, J. Egido, G. Lalazissis, and P. Ring, *Physics Letters B* **379**, 13 (1996).



- [135] T. Nikšić, P. Ring, and D. Vretenar, *Phys. Rev. C* **71**, 044320 (2005).
- [136] M. Stoitsov, P. Ring, D. Vretenar, and G. A. Lalazissis, *Phys. Rev. C* **58**, 2086 (1998).
- [137] W. Poeschl, D. Vretenar, and P. Ring, *Computer Physics Communications* **103**, 217 (1997).
- [138] D. Vretenar, G. A. Lalazissis, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **57**, 3071 (1998).
- [139] N. Paar, P. Ring, T. Nikšić, and D. Vretenar, *Phys. Rev. C* **67**, 034312 (2003).
- [140] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Physics and astronomy online library (Springer, 2004).
- [141] A. A. Raduta and C. M. Raduta, *International Journal of Modern Physics E* **25**, 1650017 (2016), <https://doi.org/10.1142/S0218301316500178>.
- [142] D. Rowe, *Nuclear Collective Motion: Models and Theory* (World Scientific, 2010).
- [143] J. Schwieger, F. Šimković, and A. Faessler, *Nuclear Physics A* **600**, 179 (1996).
- [144] M. Sambataro, *Czechoslovak Journal of Physics* **48**, 225 (1998).
- [145] D. Ni and Z. Ren, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **39**, 125105 (2012).
- [146] S. P. Pandya, *Phys. Rev.* **103**, 956 (1956).
- [147] J. Yao, J. Meng, Y. Niu, and P. Ring, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **126**, 103965 (2022).
- [148] in *The Quantum Mechanics of Many-Body Systems*, Pure and Applied Physics, Vol. 11, edited by D. Thouless (Elsevier, 1961) pp. 59–93.
- [149] C. Fuchs, H. Lenske, and H. H. Wolter, *Phys. Rev. C* **52**, 3043 (1995).
- [150] M. Stoitsov, *Physics of Particles and Nuclei* **41**, 868 (2010).
- [151] B. D. Serot, 2 covariant effective field theory for nuclear structure and nuclear currents, in *Extended Density Functionals in Nuclear Structure Physics*, edited by G. A. Lalazissis, P. Ring, and D. Vretenar (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004) pp. 31–63.
- [152] T. Nikšić, D. Vretenar, P. Finelli, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **66**, 024306 (2002).
- [153] S. Typel and H. Wolter, *Nuclear Physics A* **656**, 331 (1999).
- [154] F. de Jong and H. Lenske, *Phys. Rev. C* **57**, 3099 (1998).
- [155] G. F. Burgio and I. Vidaña, *Universe* **6**, 10.3390/universe6080119 (2020).
- [156] T. Hoch, D. Madland, P. Manakos, T. Mannel, B. Nikolaus, and D. Strottman, *Physics Reports* **242**, 253 (1994).
- [157] T. Bürvenich, D. G. Madland, J. A. Maruhn, and P.-G. Reinhard, *Phys. Rev. C* **65**, 044308 (2002).
- [158] B. D. Serot and J. D. Walecka, Relativistic nuclear many-body theory, in *Recent Progress in Many-Body Theories: Volume 3*, edited by T. L. Ainsworth, C. E. Campbell, B. E. Clements, and E. Krotscheck (Springer US, Boston, MA, 1992) pp. 49–92.
- [159] P. Finelli, N. Kaiser, D. Vretenar, and W. Weise, *Nuclear Physics A* **791**, 57 (2007).
- [160] W. Long, J. Meng, N. V. Giai, and S.-G. Zhou, *Phys. Rev. C* **69**, 034319 (2004).
- [161] W.-H. Long, N. Van Giai, and J. Meng, *Physics Letters B* **640**, 150 (2006).
- [162] A. Fetter and J. Walecka, *Quantum Theory of Many-particle Systems*, Dover Books on Physics (Dover Publications, 2003).
- [163] O. Pohl and C. Fuchs, *Phys. Rev. C* **74**, 034325 (2006).
- [164] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51**, 38 (1995).
- [165] R. Machleidt, K. Holinde, and C. Elster, *Physics Reports* **149**, 1 (1987).
- [166] R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **63**, 024001 (2001).
- [167] D. R. Entem and R. Machleidt, Chiral symmetry and the nucleon-nucleon interaction: Developing an accurate nn potential based upon chiral effective field theory, in *Challenges of Nuclear Structure*, pp. 113–127.
- [168] J. J. de Swart, R. A. M. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester, and T. A. Rijken, in *Few-Body Problems in Physics '95*, edited by R. Guardiola (Springer Vienna, Vienna, 1996) pp. 438–447.
- [169] S. Bogner, T. Kuo, and A. Schwenk, *Physics Reports* **386**, 1 (2003).
- [170] T. Nikšić, D. Vretenar, G. A. Lalazissis, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **77**, 034302 (2008).

- [171] N. Paar, D. Vretenar, E. Khan, and G. Colò, Reports on Progress in Physics **70**, 691 (2007).
- [172] X. Roca-Maza, X. Viñas, M. Centelles, B. K. Agrawal, G. Colò, N. Paar, J. Piekarewicz, and D. Vretenar, Phys. Rev. C **92**, 064304 (2015).
- [173] A. Tamii, I. Poltoratska, P. von Neumann-Cosel, Y. Fujita, T. Adachi, C. A. Bertulani, J. Carter, M. Dozono, H. Fujita, K. Fujita, K. Hatanaka, D. Ishikawa, M. Itoh, T. Kawabata, Y. Kalmykov, A. M. Krumbholz, E. Litvinova, H. Matsubara, K. Nakanishi, R. Neveling, H. Okamura, H. J. Ong, B. Özel-Tashenov, V. Y. Ponomarev, A. Richter, B. Rubio, H. Sakaguchi, Y. Sakemi, Y. Sasamoto, Y. Shimbara, Y. Shimizu, F. D. Smit, T. Suzuki, Y. Tameshige, J. Wambach, R. Yamada, M. Yosoi, and J. Zenihiro, Phys. Rev. Lett. **107**, 062502 (2011).
- [174] D. Patel, U. Garg, M. Fujiwara, T. Adachi, H. Akimune, G. Berg, M. Harakeh, M. Itoh, C. Iwamoto, A. Long, J. Matta, T. Murakami, A. Okamoto, K. Sault, R. Talwar, M. Uchida, and M. Yosoi, Physics Letters B **726**, 178 (2013).
- [175] D. H. Youngblood, H. L. Clark, and Y.-W. Lui, Phys. Rev. Lett. **82**, 691 (1999).
- [176] M. Bender, K. Rutz, P.-G. Reinhard, and J. A. Maruhn, The European Physical Journal A **8**, 59 (2000).
- [177] P.-G. Reinhard and W. Nazarewicz, Phys. Rev. C **81**, 051303 (2010).
- [178] X. Roca-Maza, N. Paar, and G. Colò, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **42**, 034033 (2015).
- [179] D. Vautherin, Phys. Rev. C **7**, 296 (1973).
- [180] J. Berger, M. Girod, and D. Gogny, Nuclear Physics A **428**, 23 (1984).
- [181] T. Nikšić, P. Ring, D. Vretenar, Y. Tian, and Z.-y. Ma, Phys. Rev. C **81**, 054318 (2010).
- [182] Y. Tian, Z.-y. Ma, and P. Ring, Phys. Rev. C **80**, 024313 (2009).
- [183] J. Berger, M. Girod, and D. Gogny, Computer Physics Communications **63**, 365 (1991).
- [184] M. Mirea, T. Pahomi, and S. Stoica, Rom. Rep. Phys. **67**, 872 (2015).
- [185] F. Salvat, J. Fernández-Varea, and W. Williamson, Computer Physics Communications **90**, 151 (1995).
- [186] F. Salvat, J. D. Martínez, R. Mayol, and J. Parellada, Phys. Rev. A **36**, 467 (1987).
- [187] J. Suhonen and O. Civitarese, Phys. Rev. C **49**, 3055 (1994).
- [188] J. Suhonen and O. Civitarese, Physics Reports **300**, 123 (1998).
- [189] S. Stoica and M. Mirea, Phys. Rev. C **88**, 037303 (2013).
- [190] I. Talmi, Helvetica Physica Acta **25**, 185 (1952).
- [191] M. Moshinsky, Nuclear Physics **13**, 104 (1959).
- [192] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (Dover Publications, Inc., USA, 1974).
- [193] W. Greiner and D. Bromley, *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations* (Springer, 2000).
- [194] A. Krasznahorkay, H. Akimune, M. Fujiwara, M. N. Harakeh, J. Jänecke, V. A. Rodin, M. H. Urin, and M. Yosoi, Phys. Rev. C **64**, 067302 (2001).
- [195] J. Suhonen, Phys. Rev. C **96**, 055501 (2017).
- [196] A. Barabash, Physics Procedia **74**, 416 (2015), fundamental Research in Particle Physics and Cosmophysics.
- [197] N. Popara, A. Ravlić, and N. Paar, Phys. Rev. C **105**, 064315 (2022).
- [198] K. Kaneko, Y. Sun, and T. Mizusaki, Phys. Rev. C **97**, 054326 (2018).
- [199] F. Šimkovic, P. Domin, and S. V. Semenov, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **27**, 2233 (2001).
- [200] O. Civitarese and J. Suhonen, Nuclear Physics A **653**, 321 (1999).
- [201] R. Álvarez-Rodríguez, P. Sarriguren, E. M. de Guerra, L. Paceaescu, A. Faessler, and F. Šimkovic, Phys. Rev. C **70**, 064309 (2004).
- [202] A. A. Raduta, A. Escuderos, A. Faessler, E. Moya de Guerra, and P. Sarriguren, Phys. Rev. C **69**, 064321 (2004).
- [203] A. Bobyk, W. Kamiński, and P. Zaręba, Nuclear Physics A **669**, 221 (2000).

- 
- [204] J. Suhonen, *Physics Letters B* **607**, 87 (2005).
- [205] E. Caurier, F. Nowacki, and A. Poves, *Physics Letters B* **711**, 62 (2012).
- [206] A. Barabash, *Nuclear Physics A* **935**, 52 (2015).
- [207] J. Toivanen and J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **55**, 2314 (1997).
- [208] B. Pritychenko, *Nuclear Data Sheets* **120**, 102 (2014).
- [209] M. Kortelainen, O. Civitarese, J. Suhonen, and J. Toivanen, *Physics Letters B* **647**, 128 (2007).
- [210] O. Civitarese and J. Suhonen, *Physics Letters B* **626**, 80 (2005).
- [211] J. Suhonen and O. Civitarese, *Physics Letters B* **668**, 277 (2008).
- [212] M. Kortelainen and J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **75**, 051303 (2007).
- [213] M. Kortelainen and J. Suhonen, *Phys. Rev. C* **76**, 024315 (2007).
- [214] O. Civitarese and J. Suhonen, *Nuclear Physics A* **761**, 313 (2005).
- [215] A. Faessler, V. Rodin, and F. Šimkovic, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **39**, 124006 (2012).
- [216] J. Suhonen and M. Kortelainen, *International Journal of Modern Physics E* **17**, 1 (2008), <https://doi.org/10.1142/S0218301308009495>.
- [217] P. K. Rath, R. Chandra, K. Chaturvedi, P. K. Raina, and J. G. Hirsch, *Phys. Rev. C* **82**, 064310 (2010).
- [218] J. Menéndez, A. Poves, E. Caurier, and F. Nowacki, *Nuclear Physics A* **818**, 139 (2009).
- [219] J. Meng, L. S. Song, and J. M. Yao, Nuclear matrix elements for neutrinoless double-beta decay in covariant density functional theory, in *Quarks, Nuclei and Stars*, pp. 275–300, [https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789813220669\\_019](https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789813220669_019).
- [220] J. Engel, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **42**, 034017 (2015).
- [221] S. Raman, C. Nestor, and P. Tikkanen, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **78**, 1 (2001).

# Životopis i popis objavljenih radova

## Datum rođenja

1.6.1989., Split, R. Hrvatska

## Obrazovanje

1995-2003 Osnovna Škola Mertojak, Split, Hrvatska

2003-2007 Treća Gimnazija, Split, Hrvatska

2007-2013 Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska

Diplomski rad: "Nuklearni procesi u evoluciji supernove"

mentor: prof. dr. sc. Nils Paar

2013-2022 Poslijediplomski doktorski studij fizike, teorijska nuklearna fizika, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska.

## Radno iskustvo

2016-2022 Veterinarski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, asistent

## Stručno usavršavanje

16.7.-6.8.2016 Sudjelovanje na ljetnoj školi "2016 TALENT Density Functional Theory (DFT) Course", York, Velika Britanija

13.12.2012 Sudjelovanje na znanstvenom skupu "Nuclear and Subnuclear Physics: New Achievements of Croatian Scientists", Hrvatska akademija znanosti i umjetnosti, Zagreb

7.-10.6.2011 Sudjelovanje na međunarodnom znanstvenom simpoziju "Advances in Many-Body Nuclear Theory", Primošten

## Iskustvo u nastavi

2016-2022 Veterinarski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, izvođenje nastave (kvalitativno-numeričke i laboratorijske vježbe na kolegiju "Fizika i biofizika")

2013-2016 Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, izvođenje nastave na kolegiju "Početni fizički praktikum 1"

2013-2021 Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, izvođenje nastave na kolegiju "Praktikum fizike" za studente kemije

## **Popis publikacija u znanstvenim časopisima**

1. N. Popara, A. Ravlić, i N. Paar, "Two-neutrino double- $\beta$  decay matrix elements based on a relativistic nuclear energy density functional", Phys. Rev. C 105, 064315 (2022)
2. S. Pašić, N. Popara, "A simple classroom exercise for teaching principles of ultrasound diagnostic using two springs" Phys. Educ. 57 065006 (2022)