

Gravitacijski valovi u prostorvremenu s pozitivnom kozmološkom konstantom

Ilčić, Fran

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:840276>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Fran Ilčić

GRAVITACIJSKI VALOVI U PROSTORVREMENU
S POZITIVNOM KOZMOLOŠKOM
KONSTANTOM

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Fran Ilčić

Diplomski rad

**Gravitacijski valovi u prostorvremenu
s pozitivnom kozmološkom
konstantom**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2023.

Fizika se temelji na promatranju prirode te izvlačenju i shvaćanju njenih pravilnosti. Ovaj proces oduvijek mi je drag, a pogotovo otkad sam vidio koliko lijepa matematika ispada najkorisniji alat za taj pothvat. No, moje prve doticaje s njim omogućio je moj otac, koji je uvijek imao odgovore na pitanja o funkcioniranju prirode. Zahvalan sam i njemu i majci za djetinjstvo puno kultivacije radoznalosti i razmišljanja. Ljubavi za razumijevanje kroz znanost nije nedostajalo ni na fakultetu. Za to je zaslužna cijela zajednica, no prije svega odlični predavači i odlični prijatelji. Istaknut ću svog mentora, Ivicu Smolića, koji je držao neke od najzanimljivijih kolegija uz predivan pristup matematički potpunog shvaćanja. Taj pristup, uz njegove savjete i strpljenje, omogućili su ovaj rad.

Sažetak

Gravitacijski valovi poznat su fenomen otkriven općom teorijom relativnosti. Nakon prvog Einsteinovog izvoda u lineariziranoj teoriji, njihova fizikalnost bila je upitna više desetljeća. Bondi-Sachsov formalizam otklonio je sumnje i dao baždarno neovisne rezultate u punoj teoriji za asimptotski ravne prostore. Kako su opažanja pokazala da naš svemir nije asimptotski ravan, već ima malu pozitivnu kozmološku konstantu $\Lambda > 0$, pokrenuo se razvoj teorije za asimptotski de Sitterove prostore. Iznosimo glavne metode i rezultate za obje vrste prostora i razmatramo poteškoće u razvoju pune teorije u $\Lambda > 0$ slučaju.

Ključne riječi: gravitacijski valovi, pozitivna kozmološka konstanta, de Sitterov prostor, linearizirana gravitacija, Bondi-Sachsov formalizam

Gravitational waves in spacetime with positive cosmological constant

Abstract

Gravitational waves are a well known phenomenon discovered by the means of general theory of relativity. After Einstein's first derivation in linearized theory, their physicality was under question for multiple decades. Bondi-Sachs formalism resolved the suspicions and gave gauge independent results in full theory for asymptotically flat spaces. As observations have shown our universe not to be asymptotically flat, but to have a small positive cosmological constant $\Lambda > 0$, development of the theory in asymptotically de Sitter spaces began. We present the main methods and results in both cases and study the difficulties in development of the full theory in the $\Lambda > 0$ case.

Keywords: gravitational waves, positive cosmological constant, de Sitter space, linearized gravity, Bondi-Sachs formalism

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Gravitacijski valovi u ravnom prostorvremenu	3
2.1	Linearizirana gravitacija	3
2.1.1	Pretpostavke modela	3
2.1.2	Einsteinova jednađba	5
2.1.3	Baždarna sloboda	6
2.1.4	Stupnjevi slobode i rješenje Einsteinove jednađbe	9
2.1.5	Fizikalne posljedice gravitacijskih valova	16
2.1.6	Nastanak i energija gravitacijskog vala	20
2.2	Bondi-Sachsov formalizam	24
2.2.1	Bondi-Sachsovo rješenje Einsteinovih jednađbi	27
3	Asimptopija i de Sitterov prostor	32
3.1	Asimptopija	32
3.1.1	Konformalni dijagrami	32
3.1.2	Asimptotski ravan prostor	36
3.2	De Sitterov prostor	38
3.2.1	Asimptotski de Sitterov prostor	43
4	Gravitacijski valovi u asimptotski de Sitterovom prostoru	45
4.1	Asimptopija i puna nelinearna teorija	45
4.1.1	Asimptotske simetrije	48
4.2	Linearizirana gravitacija s pozitivnom kozmološkom konstantom	50
5	Zaključak	56
	Dodaci	58
	A Spinori	58
	Literatura	63

1 Uvod

Još 1916. godine, Einstein je pokazao da u aproksimaciji slabog polja vremenski promjenjiv izvor daje metriku koja predstavlja propagaciju zakrivljenosti u prostorvremenu brzinom svjetlosti [8]. To je učinio pomoću linearizirane verzije jednadžbi polja. Kasnije je našao i energiju koje ovo zračenje nosi [9]. Tako je nastalo jedno od prvih predviđanja opće teorije relativnosti. No, osim što ono nije bilo provjerivo sljedećih stotinu godina, sama teorija iza gravitacijskih valova dugo je bila pod sumnjama nefizikalnosti. To je prije svega bilo zato što rezultati nisu bili izvedeni u punoj, nelinearnoj teoriji, već su se oslanjali na linearnu aproksimaciju, odnosno na prvi red perturbativnog razvoja.

Ove sumnje bile su razriješene 1960-ih kada su Bondi, Sachs i ostali suradnici formalizirali postupak rješavanja Einsteinove jednadžbe u baždarno nezavisnom obliku [10], zajedno s dosta dubokim modelom simetrija u konformalnoj beskonačnosti (Bondi-Metzner-Sachs grupa) koji je omogućio nalaženje fizikalnih rješenja u punoj teoriji. Veliki doprinos imao je i Penroseov formalizam koji se razvio u isto doba. Gravitacijski su valovi od tada teorijski vrlo dobro opisan fenomen opće teorije relativnosti, a 2010-ih su potvrđeni i eksperimentalno.

Svi ovi teorijski modeli, doduše, izgrađeni su u asimptotski ravnim prostorvremenima, odnosno s Einsteinovom jednadžbom bez kozmološke konstante. Već neko vrijeme jasno je da astrofizička mjerenja ukazuju da naš svemir nije ravan, već da se širi ubrzano, najbolje modelirano malom pozitivnom kozmološkom konstantom $\Lambda > 0$ [4]. Iako je konstanta mala, a tako i njeni očekivani doprinosi teoriji, ovo je znatno veći problem nego što se na prvu čini. Struktura konformalne beskonačnosti i njenih simetrija potpuno je drugačija. Također, neke su definicije i procedure dobivanja fizikalnih rješenja narušene.

Posljedično, potpuna nelinearna teorija gravitacijskog zračenja u prostorima s pozitivnom kozmološkom konstantom još ne postoji [5]. Linearizirana rješenja, s druge strane, poznata su te daju očekivano male promjene u odnosu na $\Lambda = 0$ slučaj, kao i neke uvide u suptilne teorijske razlike koje dobivamo [6].

Za početak nam je cilj objasniti sam fenomen gravitacijskih valova, teorijski i fizikalno. U poglavlju 2 stoga iznosimo prvo lineariziranu teoriju, a zatim Bondi-Sachsov formalizam, gravitacijskog zračenja u ravnom prostorvremenu. Kako se prelazak na

$\Lambda > 0$ slučaj temelji na uvođenju asimptotski de Sitterovih prostora, u poglavlju 3 proučavamo konformalne dijagrame i njihovu asimptotsku strukturu i de Sitterovo prostorvrijeme. Konačno, u poglavlju 4 istražujemo promjene koje nam kozmološka konstanta uvodi u teoriju gravitacijskog zračenja, formalizam potreban za njegov opis u lineariziranom režimu i bitnije rezultate.

Koristimo standardne matematičke alate opće teorije relativnosti, kao što su mnogostrukosti, tenzori, kovariantne (∇_a) i koordinatne (∂_a) derivacije, indeksna notacija, Riemannov tenzor zakrivljenosti i slično. Prostorvrijeme modeliramo mnogostrukostima (s metrikom g_{ab}), odnosno topološkim prostorima, pa nekad upotrebljavamo riječ “prostor” umjesto “prostorvrijeme”. Iz konteksta je jasno kada ovo nije slučaj i mislimo specifično na prostorni dio tenzora ili komponenti (za razliku od vremenskog). Neka od razmatranja koja iznosimo u literaturi postoje i u slučaju proizvoljnog broja dimenzija, tako da napominjemo da se ovdje ograničavamo na $4D$ prostorvrijeme sa standardnom signaturom metrike u gravitacijskoj fizici, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Koristimo volumnu formu $\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$, koja je totalno antisimetrična forma definirana komponentom $\epsilon_{0123} = \sqrt{|g|}$, za determinantu metrike g . Grčki indeksi označavaju komponente tenzora, dok latinički indeksi predstavljaju samu strukturu tenzora i njihovih produkata, no ova distinkcija nam često nije od velike važnosti. Velika latinička slova kao indeksi korišteni su za $2D$ kutne potprostore ili za spinore, a mala slova počevši od i (i, j, k, l, \dots) za prostorne koordinate. Spinori su korišteni u maloj mjeri, a osnove o njima nalaze se u dodatku A. Notacija simetrizacije i antisimetrizacije je standardna,

$$A_{(\mu}B_{\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu}B_{\nu} + A_{\nu}B_{\mu}), \quad A_{[\mu}B_{\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu}B_{\nu} - A_{\nu}B_{\mu}). \quad (1.1)$$

Vektore i putanje klasificiramo prema predznaku njihovog kvadrata $g_{ab}X^aX^b$, odnosno kvadrata linijskog elementa, na svjetlosne (0), vremenske (−) i prostorne (+). Trodimenzionalne hiperplohe dijelimo na iste klase suprotno od predznaka njihovih vektora normale.

2 Gravitacijski valovi u ravnom prostorvremenu

Gravitacijski su valovi, u suštini, perturbacije metrike koje putuju u prostorvremenu. Njihovo je postojanje posljedica Einsteinove jednadžbe. Ona dopušta oscilatorna rješenja koja odgovaraju propagaciji poremećaja pozadinske metrike duž vektorskih polja svjetlosnog tipa. Ovakve valove u stvarnosti stvaraju objekti oscilirajućih položaja masa. Zbog promjene položaja u vremenu mijenja se i njihov utjecaj na metriku kroz Einsteinovu jednadžbu. Ta promjenjivost služi kao izvor perturbacije koja se širi radijalno od izvora brzinom svjetlosti. Budući da je efekt sam po sebi vrlo slab u odnosu na ostale vrste zračenja u svemiru, opazivi su samo valovi iz izvora sa snažnim gravitacijskim poljem, npr. sustava dvije neutronske zvijezde ili crne rupe koje kruže jedna oko druge.

U ovom poglavlju izvodimo navedene rezultate iz Einsteinove jednadžbe u kontekstu ravnog prostorvremena, odnosno za $\Lambda = 0$. Prvo koristimo lineariziranu teoriju, što nam daje bitne konkretne rezultate, makar u aproksimativnom režimu. Slijedimo pristup iz Carrollovog udžbenika [1]. U drugom podpoglavlju iznosimo Bondi-Sachsov formalizam, koji je bio zaslužan za micanje sumnji s fizikalnosti fenomena gravitacijskih valova, dobivanjem istih bez potrebe za aproksimacijama te u obliku invarijantnog tenzora.

2.1 Linearizirana gravitacija

Slijedi razmatranje modela linearizirane opće teorije relativnosti. Uz intuitivne aproksimacije, model opisuje gravitacijske valove kao male perturbacije metrike u odnosu na ravan prostor. U fizikalnom svemiru, metrika nije ravna, već kroz Einsteinovu jednadžbu ovisi o materiji i energiji. No u vakuumu daleko od objekata možemo aproksimirati metriku ravnom, uz dodatni član koji predstavlja propagirajuće stupnjeve slobode, odnosno gravitacijske valove.

2.1.1 Pretpostavke modela

Promatrajući gravitacijske valove kao perturbacije na pozadinskoj metrici $g_{ab}^{(0)}$, rastavljamo ukupnu metriku g_{ab} kao

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Za vakuum u ravnom prostoru možemo izabrati koordinatni sustav u kojemu vrijedi $g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$, gdje je $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Tada je h_{ab} simetričan tenzor (budući da g_{ab} mora biti simetričan) koji predstavlja perturbacije pozadinske ravne metrike,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Uz aproksimaciju da su njegove komponente po iznosu znatno manje od 1, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, možemo ga promatrati kao tenzorsko polje u ravnom prostoru. Uzimamo da su doprinosi drugog reda zanemarivi $h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} \approx 0$. Ova je aproksimacija ključna u ovom pristupu gravitacijskom zračenju te je osnovni izvor njegove nerigoroznosti. Naime, perturbacije metrike nisu uvijek dovoljno male da bismo zanemarili doprinose viših redova. Stoga nije očito da se rezultati u prvom redu ne bi pokratili u punoj teoriji. No ispostavlja se da su oni ipak točni, što ćemo vidjeti u poglavlju o Bondi-Sachsovom formalizmu.

Nadalje definiramo $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ te $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. Inverz pune metrike možemo identificirati kao $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ (i dalje u istom koordinatnom sustavu) budući da imamo

$$\begin{aligned} g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} &= (\eta_{\mu\rho} + h_{\mu\rho})(\eta^{\rho\nu} - h^{\rho\nu}) \\ &= \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} - \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\chi}\eta^{\nu\sigma}h_{\chi\sigma} + h_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} - h_{\mu\rho}\eta^{\rho\chi}\eta^{\nu\sigma}h_{\chi\sigma} \\ &= \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} - \delta_{\mu}^{\chi}\eta^{\nu\sigma}h_{\chi\sigma} + h_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} + O(h^2) \\ &= \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\nu\sigma}h_{\mu\sigma} + h_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} + O(h^2) \\ &= \delta_{\mu\nu} + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dok se god bavimo posljedicama malih perturbacija, možemo koristiti samu ravnu metriku za podizanje i spužtanje indeksa, budući da su ostali doprinosi višeg reda od prvog;

$$\eta^{\mu\nu}A_{\nu\rho\dots}^{\sigma\dots} \approx A^{\mu}_{\rho\dots}{}^{\sigma\dots}, \quad \eta_{\mu\nu}A^{\nu}_{\rho\dots}{}^{\sigma\dots} \approx A_{\mu\rho\dots}{}^{\sigma\dots}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Einsteinova jednađba

Sljedeći je korak razmatranje Einsteinove jednađbe u lineariziranoj teoriji, koje će nam dati jednađbe gibanja za perturbaciju h_{ab} . Einsteinova jednađba glasi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

gdje su $R_{\mu\nu}$ i R Riccijev tenzor i skalar – kontrakcije Riemannovog tenzora zakrivljenosti $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, $T_{\mu\nu}$ je tenzor energije i impulsa, G Newtonova gravitacijska konstanta, a Λ kozmološka konstanta – zasad $\Lambda = 0$. Riemannov tenzor želimo izraziti preko perturbacije h_{ab} . Krećemo od formule za Christoffelove simbole,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.6)$$

Nakon uvrštavanja našeg oblika metrike (2.2), otpadaju svi članovi drugog reda u h_{ab} (pretpostavlja se da su derivacije perturbacije najmanje istog reda kao i same perturbacije) i derivacije ravne metrike, što nam ostavlja

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma} (\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) + O(h^2). \quad (2.7)$$

U nastavku teksta radi jednostavnosti izostavljamo članove reda $O(h^2)$ te se pretpostavlja aproksimacija $h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} \approx 0$, a isto pretpostavljamo za derivacije tenzora h_{ab} . Riemannov tenzor dobivamo iz standardne formule

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (2.8)$$

Ovdje otpadaju posljednja dva člana, budući da $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ ima samo članove prvog reda u h_{ab} pa produkt dva takva objekta ima samo članove drugog reda. Iz (2.7) i (2.8) imamo

$$\begin{aligned} R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\chi} \partial_\mu (\partial_\nu h_{\sigma\chi} + \partial_\sigma h_{\chi\nu} - \partial_\chi h_{\nu\sigma}) - \frac{1}{2}\eta^{\rho\chi} \partial_\nu (\partial_\mu h_{\sigma\chi} + \partial_\sigma h_{\chi\mu} - \partial_\chi h_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\chi} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\sigma\chi} + \partial_\mu \partial_\sigma h_{\chi\nu} - \partial_\mu \partial_\chi h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\sigma\chi} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\chi\mu} + \partial_\nu \partial_\chi h_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma h^\rho{}_\nu - \partial_\mu \partial^\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h^\rho{}_\mu + \partial_\nu \partial^\rho h_{\mu\sigma}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Kontrakcijom nalazimo Riccijev tenzor i skalar:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R^{\chi}_{\mu\chi\nu} \\
&= \frac{1}{2} (\partial_{\chi}\partial_{\mu}h^{\chi}_{\nu} - \partial_{\chi}\partial^{\chi}h_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}h^{\chi}_{\chi} + \partial_{\nu}\partial^{\chi}h_{\chi\mu}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h), \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= R^{\mu}_{\mu} \\
&= \frac{1}{2} (\partial^{\mu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\mu} + \partial^{\mu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\mu} - \square h^{\mu}_{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\mu}h) \\
&= \partial^{\mu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\mu} - \square h, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

gdje smo uveli oznake $\square = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$ i $h = h^{\mu}_{\mu}$. U Einsteinovoj jednadžbi (2.5) Riccijev se skalar množi s metrikom $g_{\mu\nu}$. Budući da (2.11) sadrži samo članove prvog reda u h_{ab} , u umnošku s metrikom (2.2) samo $\eta_{\mu\nu}$ daje nezanemarive članove. Uvrštavanjem u (2.5) dobivamo Einsteinovu jednadžbu za lineariziranu teoriju u ravnom prostorvremenu

$$\frac{1}{2} (\partial_{\mu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial^{\rho}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\rho} + \eta_{\mu\nu}\square h) = 8\pi GT_{\mu\nu}. \tag{2.12}$$

U vakuumu ($T_{\mu\nu} = 0$) ona se svodi na $R_{\mu\nu} = 0$, odnosno

$$\partial_{\mu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\chi}h^{\chi}_{\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h = 0. \tag{2.13}$$

2.1.3 Baždarna sloboda

Prije nego riješimo Einsteinovu jednadžbu za $h_{\mu\nu}$, trebamo se osvrnuti na problem nedefiniranog koordinatnog sustava u kojem radimo. Naime, krenuli smo odabirući na prostorvremenu koordinate u kojima se metrika razlikuje od $\eta_{\mu\nu}$ za mali iznos. No ovaj uvjet nije dovoljan za definiranje specifičnog sustava, a posljedično i tenzora h_{ab} . Dani tenzor metričke (točnije tenzorsko polje, no pod 'tenzor' mislimo 'tenzorsko polje' osim ako je iz konteksta jasno da mislimo na tenzor u točki) na mnogostrukosti u kojoj je gravitacija dovoljno slaba da opravda ovaj pristup može se rastaviti na ravnu metriku i perturbaciju na mnogo načina. Recimo, ako napravimo neku malu promjenu koordinata, tenzor η_{ab} više neće nužno imati oblik $diag(-1, 1, 1, 1)$,

odnosno ta matrica će predstavljati novi tenzor. No razlika metrike i tog novog tenzora može i dalje biti mala perturbacija. Time dobivamo dekompoziciju (2.2) istog tenzora metrike (definiranog neovisno o koordinatama) na nove tenzore η_{ab} i h_{ab} , za koje aproksimacija $h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} \approx 0$ i dalje vrijedi. Rezultirajuću slobodu u definiciji perturbacije h_{ab} nazivamo **baždarnom slobodom** te ćemo je sada matematički definirati.

Prostorvrijeme općenito modeliramo kao mnogostrukost M s tenzorom metrike. Kada pretpostavljamo prostorvrijeme Minkowskog, M je difeomorfna s \mathbb{R}^4 , a metrika je ravna, η_{ab} . Ravna metrika garantira da postoji globalni koordinatni sustav $x^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, čija slika je cijeli \mathbb{R}^4 , u kojem metrika ima komponente $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Poincaréove transformacije mijenjat će koordinatni sustav, a čuvati oblik metrike $\eta_{\mu\nu}$. No ostale promjene koordinata definirat će nove tenzore koji u njima imaju oblik $\eta_{\mu\nu}$. Budući da su svi mogući koordinatni sustavi difeomorfizmi između M i \mathbb{R}^4 , prelasci između njih su također difeomorfizmi. Stoga zaključujemo da skup svih mogućih tenzora ravne metrike možemo dobiti difeomorfizmima na M polazeći od neke od njih.

U našem slučaju imamo metriku različitu od ravne pa se ona ni u jednom sustavu neće moći zapisati kao $\eta_{\mu\nu}$. No različita je samo za malu perturbaciju, dok je mnogostrukost M koju koristimo i dalje je difeomorfna s \mathbb{R}^4 . Dakle, ako smo našli neki koordinatni sustav u kojem vrijedi dekompozicija (2.2), do ostalih takvih možemo doći difeomorfizmima. Ti difeomorfizmi moraju biti dovoljno "mali" u nekom smislu da bi aproksimacija $h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} \approx 0$ i dalje vrijedila. Takav difeomorfizam možemo zapisati kao povlačenje točaka mnogostrukosti i tenzora na njoj u smjeru nekog vektorskog polja ξ^a na M za parametar ε

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(0)} &= g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \\ \Psi_\xi^{(\varepsilon)} : M &\rightarrow M, \\ h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} &= (\Psi_\xi^{(\varepsilon)*} g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

U ovom pristupu ne mijenjamo zapravo koordinatni sustav, već mijenjamo tenzore na način na koji bi se njihove komponente promijenile pri prelasku u nove koordinate. Zato $\eta_{\mu\nu}$ i dalje predstavlja standardni dijagonalni oblik ravne metrike, dok je $\Psi_\xi^{(\varepsilon)*} \eta_{\mu\nu}$ povučeni tenzor ravne metrike koji više nema standardni oblik. Promatrajući komponente, vidimo da smo dobili perturbaciju u odnosu na novi tenzor ravne me-

trike, definiran novim koordinatama. Za dovoljno mali parametar ε one su dovoljno bliske starima pa će perturbacija metrike u njima i dalje biti mala. Uvrštavajući prvu relaciju u treću iz (2.14), imamo

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = (\Psi_{\xi}^{(\varepsilon)*} h^{(0)})_{\mu\nu} + (\Psi_{\xi}^{(\varepsilon)*} \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

budući da je povlačenje tenzora linearno preslikavanje. Kako je parametar ε malen, promjena tenzora pri povlačenju je veličina prvog reda u perturbativnom razvoju, isto kao i $|h_{\mu\nu}|$, pa je promjena samog $h_{\mu\nu}$ drugog reda te je možemo zanemariti. Dobivamo razliku perturbacija u dva koordinatna sustava kao Liejevu derivaciju tenzora η_{ab} :

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} &= h_{\mu\nu}^{(0)} + (\Psi_{\xi}^{(\varepsilon)*} \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} + O(\varepsilon h) \\ &= h_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon \frac{(\Psi_{\xi}^{(\varepsilon)*} \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}}{\varepsilon} + O(\varepsilon h) \\ &= h_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon \mathcal{L}_{\xi} \eta_{\mu\nu} + O(\varepsilon h). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Za Liejevu derivaciju tenzora metrike općenito vrijedi $\mathcal{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}$, a za ravnu metriku kovariantna derivacija prelazi u običnu koordinatnu. Konačan izraz za našu **baždarnu transformaciju** je dakle

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = h_{\mu\nu}^{(0)} + 2\varepsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}. \quad (2.17)$$

Parametar ε možemo apsorbirati u samo vektorsko polje ξ^a , uzevši da je ono malo, te ga izostaviti.

Ovime smo pokazali kakvu slobodu imamo u odabiru koordinatnog sustava u kojem definiramo perturbacije. Ta nam sloboda omogućuje biranje baždarenja pogodnog za rješavanje linearizirane Einsteinove jednadžbe u konkretnim uvjetima bez smanjivanja općenitosti. Različita baždarenja opisivat će istu fizikalnu situaciju, što možemo provjeriti računanjem promjene Riemannovog tenzora zakrivljenosti pri promjeni baždarenja uvrštavanjem (2.17) u (2.9) sa spuštenim prvim indeksom

$$\begin{aligned}
R_{\rho\sigma\mu\nu}^{(\varepsilon)} - R_{\rho\sigma\mu\nu}^{(0)} &= \varepsilon \left(\partial_\mu \partial_\sigma \partial_{(\rho} \xi_{\nu)} - \partial_\mu \partial_\rho \partial_{(\nu} \xi_{\sigma)} - \partial_\nu \partial_\sigma \partial_{(\rho} \xi_{\mu)} + \partial_\nu \partial_\rho \partial_{(\mu} \xi_{\sigma)} \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.1.4 Stupnjevi slobode i rješenje Einsteinove jednadžbe

Osim valnih rješenja u prostorvremenu, Einsteinova jednadžba nam daje i neke relacije između različitih komponenti perturbacije h_{ab} . Da bismo to vidjeli i istražili, korisno je izabrati koordinatni sustav. Iako će sama analiza provedena u specifičnom koordinatnom sustavu, mnogi od zaključaka bit će invarijantni, kao na primjer broj stupnjeva slobode koji opisuju gravitacijski val. Prelaženjem u druge koordinatne sustave može se izgubiti samo njihova očitost u zapisu. Prednost rada u odabranom koordinatnom sustavu dolazi iz baždarne slobode. Baždarenje, odnosno koordinatni sustav, možemo namjestiti tako da neke komponente otpadnu ili zadovolje korisne relacije bez da izgubimo na općenitosti fizikalne situacije.

Krećemo definiranjem dijelova tenzora h_{ab} koje ćemo koristiti. Konkretno odabir je motiviran našim subjektivnim razlikovanjem prostora i vremena, s matematičke strane ireducibilnim reprezentacijama rotacija u prostoru \mathbb{R}^3 , što olakšava fizikalno razumijevanje rezultata. Ove reprezentacije, ili dijelovi simetričnog tenzora ranga (0,2) koji se rotacijama transformiraju sami u sebe, su (uz konvencionalne konstante) skalar

$$\Phi = -\frac{1}{2}h_{00}, \tag{2.19}$$

3-vektor

$$w_i = h_{0i} = h_{i0}, \tag{2.20}$$

trag prostornog dijela

$$\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij} \tag{2.21}$$

i konačno, bestražni prostorni dio

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(h_{ij} - \frac{1}{3} \delta^{kl} h_{kl} \delta_{ij} \right). \tag{2.22}$$

Prostorni dio perturbacije može se rekonstruirati kao

$$h_{ij} = 2(s_{ij} - \Psi\delta_{ij}). \quad (2.23)$$

Sada nalazimo Riemannov tenzor i Einsteinovu jednadžbu zapisanu preko Φ , w_i , Ψ i s_{ij} . Uvrštavamo izraze (2.19-2.23) u Riemannov tenzor (2.9) sa spuštenim prvim indeksom (podsjetnik: indekse spuštamo s ravnom metrikom $\eta_{\mu\nu}$ pa izraz izgleda identično samo s indeksom ρ dolje u svim članovima) te nalazimo Einsteinovu jednadžbu. Izdvajamo slučajeve R_{0j0l} , R_{0jkl} i R_{ijkl} , dok ostale možemo dobiti simetrijom Riemannovog tenzora.

$$\begin{aligned} R_{0j0l} &= \frac{1}{2}(\partial_0\partial_j h_{0l} - \partial_0\partial_0 h_{lj} - \partial_l\partial_j h_{00} + \partial_l\partial_0 h_{0j}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0\partial_j w_l - \partial_0\partial_0 h_{jl} + 2\partial_j\partial_l\Phi + \partial_0\partial_l w_j) \\ &= \partial_j\partial_l\Phi + \partial_0\partial_{(j}w_{l)} - \frac{1}{2}\partial_0\partial_0 h_{jl}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} R_{0jkl} &= \frac{1}{2}(\partial_k\partial_j h_{0l} - \partial_k\partial_0 h_{lj} - \partial_l\partial_j h_{0k} + \partial_l\partial_0 h_{kj}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_k w_l - \partial_0\partial_k h_{lj} - \partial_j\partial_l w_k + \partial_0\partial_l h_{kj}) \\ &= \partial_j\partial_{[k}w_{l]} - \partial_0\partial_{[k}h_{l]j}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_k h_{li} - \partial_i\partial_k h_{lj} - \partial_j\partial_l h_{ki} + \partial_i\partial_l h_{kj}) \\ &= \partial_j\partial_{[k}h_{l]i} - \partial_i\partial_{[k}h_{l]j}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Za nalaženje Riccijevog tenzora koristimo $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = R_{\mu}{}^\rho{}_{\nu\rho}$ i $R_{00\mu\nu} = 0 = R_{\mu\nu 00}$. U nastavku ∇ i ∇^2 odnose se na derivacije po prostornim koordinatama, dok je $\square = -\partial_0\partial_0 + \nabla^2$.

$$\begin{aligned} R_{00} &= \eta^{\mu\nu} R_{0\mu 0\nu} = \delta^{jl} R_{0j0l} \\ &= \nabla^2\Phi + \partial_0\partial_j w^j + 3\partial_0\partial_0\Psi, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
R_{0k} &= \eta^{\mu\nu} R_{0\mu k\nu} = \delta^{jl} R_{0jkl} \\
&= \frac{1}{2} \partial_k \partial_j w^j - \frac{1}{2} \nabla^2 w_k + 3\partial_0 \partial_k \Psi + \frac{1}{2} \partial_0 \partial_j h_k^j \\
&= \frac{1}{2} \partial_k \partial_j w^j - \frac{1}{2} \nabla^2 w_k + 3\partial_0 \partial_k \Psi + \frac{1}{2} \partial_0 \partial_j (2s_k^j - 2\Psi \delta_k^j) \\
&= \frac{1}{2} \partial_k \partial_j w^j - \frac{1}{2} \nabla^2 w_k + 2\partial_0 \partial_k \Psi + \partial_0 \partial_j s_k^j, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ik} &= \eta^{\mu\nu} R_{i\mu k\nu} = -R_{i0k0} + \delta^{jl} R_{ijkl} \\
&= -R_{i0k0} + \frac{1}{2} (\partial_k \partial_j h_i^j - \partial_i \partial_k h^j_j - \nabla^2 h_{ik} + \partial_i \partial_j h_k^j) \\
&= -\partial_i \partial_k \Phi - \partial_0 \partial_{(i} w_{k)} + \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{ik} + \frac{1}{2} \partial_k \partial_j h_i^j + 3\partial_i \partial_k \Psi - \frac{1}{2} \nabla^2 h_{ik} + \partial_i \partial_j s_k^j - \partial_i \partial_k \Psi \\
&= -\partial_i \partial_k \Phi - \partial_0 \partial_{(i} w_{k)} + \partial_i \partial_k \Psi + \delta_{ik} \square \Psi - \square s_{ik} + 2\partial_j \partial_{(i} s_{k)}^j. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Riccijev skalar dobivamo daljnjom kontrakcijom

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + \delta^{ij} R_{ij} \\
&= -R_{00} - \nabla^2 \Phi - \partial_0 \partial_i w^i + \nabla^2 \Psi + 3\square \Psi - 0 + 2\partial_j \partial_i s^{ij} \\
&= -2\nabla^2 \Phi - 2\partial_0 \partial_i w^i - 2\partial_0 \partial_0 \Psi + 4\square \Psi + 2\partial_i \partial_j s^{ij}. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Za Einsteinovu jednadžbu dobivamo

$$8\pi GT_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \eta_{\mu\nu}; \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
8\pi GT_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} (-2\nabla^2 \Phi - 2\partial_0 \partial_i w^i - 2\partial_0 \partial_0 \Psi + 4\square \Psi + 2\partial_i \partial_j s^{ij}) (-1) \\
&= 2\nabla^2 \Psi + \partial_i \partial_j s^{ij}, \tag{2.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8\pi GT_{0k} &= R_{0k} - \frac{1}{2} R \cdot 0 \\
&= \frac{1}{2} \partial_k \partial_j w^j - \frac{1}{2} \nabla^2 w_k + 2\partial_0 \partial_k \Psi + \partial_0 \partial_j s_k^j, \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8\pi GT_{ik} &= R_{ik} - \frac{1}{2} (-2\nabla^2 \Phi - 2\partial_0 \partial_j w^j - 2\partial_0 \partial_0 \Psi + 4\square \Psi + 2\partial_j \partial_l s^{jl}) \delta_{ik} \\
&= 2\delta_{ik} \partial_0 \partial_0 \Psi + (\delta_{ik} \nabla^2 - \partial_i \partial_k)(\Phi - \Psi) + \delta_{ik} \partial_0 \partial_j w^j - \partial_0 \partial_{(i} w_{k)} \\
&\quad - \square s_{ik} + 2\partial_j \partial_{(i} s_{k)}^j - \delta_{ik} \partial_j \partial_l s^{jl}, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

gdje smo ponovo koristili ravnu metriku budući da su ostali doprinosi drugog reda u

perturbaciji.

Dobili smo Einsteinove jednadžbe za dijelove perturbacije metrike u nekom koordinatnom sustavu definiranom odgovarajućim baždarenjem. Sada možemo prijeći u druge sustave korištenjem baždarne transformacije (2.17), koja za dijelove Φ , w_i , Ψ i s_{ij} glasi (uz parametar ε apsorbiran u vektorsko polje ξ)

$$\begin{aligned}\Phi^{(\xi)} &= -\frac{1}{2}h_{00}^{(\xi)} = -\frac{1}{2}(h_{00}^{(0)} + 2\partial_0\xi_0) \\ &= \Phi^{(0)} - \partial_0\xi_0,\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}w_i^{(\xi)} &= h_{0i}^{(\xi)} = h_{0i}^{(0)} + 2\partial_{(0}\xi_i) \\ &= w_i^{(0)} + \partial_0\xi_i + \partial_i\xi_0,\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(\xi)} &= -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}^{(\xi)} = -\frac{1}{6}\delta^{ij}\left(h_{ij}^{(0)} + 2\partial_{(i}\xi_{j)}\right) \\ &= \Psi^{(0)} - \frac{1}{3}\partial_i\xi^i,\end{aligned}\tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}s_{ij}^{(\xi)} &= \frac{1}{2}\left(h_{ij}^{(\xi)} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}^{(\xi)}\delta_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{ij}^{(0)} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}^{(0)}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{2}\left(2\partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\delta^{kl}2\partial_{(k}\xi_{l)}\delta_{ij}\right) \\ &= s_{ij}^{(0)} + \partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\partial_k\xi^k\delta_{ij}.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Ovi nam izrazi govore kako se dijelovi perturbacije promijene pri promijeni koordinatnog sustava korištenog za linearizaciju metrike. Biramo sustav u kojem ćemo riješiti Einsteinovu jednadžbu tako da da budu zadovoljene relacije

$$\partial_i s^{ij} = 0,\tag{2.39}$$

$$\partial_i w^i = 0.\tag{2.40}$$

Ovdje su s_{ij} i w_i bestražni prostorni i vektorski dijelovi perturbacije nakon promijene koordinata, gdje je oznaka (ξ) izostavljena zbog jednostavnosti. Ovakvo baždarenje naziva se **transverzalno**. Promatrajući baždarne transformacije za s_{ij} i w_i , relacije

(2.39) i (2.40) impliciraju za ξ^a diferencijalne jednađbe

$$\partial_i s^{(0)ij} + \partial_i \partial^{(i} \xi^{j)} - \frac{1}{3} \partial_j \partial_k \xi^k = 0, \quad (2.41)$$

$$\partial_i w^{(0)i} + \partial_i \partial_0 \xi^i + \nabla^2 \xi_0 = 0, \quad (2.42)$$

koje definiraju baždarno vektorsko polje za našu željenu transformaciju. Prva definira prostorne komponente, koje ulaze u drugu, a druga vremensku. Budući da su ove jednađbe rješive za proizvoljno početno baždarenje, uvijek možemo prijeći u transverzalno. U ovom baždarenju neki od članova u Einsteinovoj jednađbi (2.32-2.34) otpadaju,

$$8\pi GT_{00} = 2\nabla^2 \Psi, \quad (2.43)$$

$$8\pi GT_{0k} = -\frac{1}{2} \nabla^2 w_k + 2\partial_0 \partial_k \Psi, \quad (2.44)$$

$$8\pi GT_{ik} = 2\delta_{ik} \partial_0 \partial_0 \Psi + (\delta_{ik} \nabla^2 - \partial_i \partial_k)(\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{k)} - \square s_{ik}. \quad (2.45)$$

Gravitacijski valovi bit će rješenja ovih jednađbi. Bitno je napomenuti da i dalje pretpostavljamo da je perturbacija mala, odnosno da gravitacijsko polje nije snažno. Ako imamo izvor zračenja, modelirat ćemo ga kao izoliranog u prostoru te promatrati ova rješenja u točkama prostorvremena daleko od njega. No sami su gravitacijski valovi u principu dozvoljeni Einsteinovom jednađbom i u svemiru bez izvora. Za dobivanje takvog općeg rješenja gravitacijskih valova u vakuumu, uzimamo $T_{\mu\nu} = 0$ svugdje te rješavamo jednađbe redom.

$$2\nabla^2 \Psi = 0 \quad (2.46)$$

Uz rubne uvjete ravnog prostora, $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi = 0$, zaključujemo da je $\Psi = 0$ na cijeloj \mathcal{M} . Ovo uvrštavamo u sljedeću jednađbu,

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 w_k = 0, \quad (2.47)$$

odakle isti zaključak ponavljamo za vektorski dio te je $w_k = 0$. Od prostornog dijela jednađbe prvo uzimamo trag;

$$(3\nabla^2 - \nabla^2)\Phi = 0, \quad (2.48)$$

odakle ponovo uz isti argument imamo $\Phi = 0$. Konačno, od zadnje jednađbe preostaje

$$\square s_{ij} = 0. \quad (2.49)$$

Sada vidimo jednu prednost rastava perturbacije h_{ab} na način koji smo odabrali – jedini dio koji preživljava je bestražni prostorni, s_{ab} . U literaturi se obično koristi h_{ab} umjesto s_{ab} , no uz pretpostavke

$$\begin{aligned} h_{0\mu} &= 0, \\ \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu h^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Za ovako definiranu perturbaciju kažemo da koristimo **transverzalno bestražno baždarenje** (eng. *transverse traceless – TT*). U matričnom zapisu ona ima oblik

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Primijetimo da nešto slično možemo dobiti i u ne-vakuumskom slučaju te bez transversalnog baždarenja. Promotrimo jednađbe (2.32-2.34). Ako pretpostavimo da je prostorni tenzor s_{ij} poznat (kao i tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$), prva od ovih jednađbi sadrži kao nepoznanicu samo prostornu derivaciju skalara Ψ pa integracijom definira Ψ svuda u prostorvremenu do na globalnu konstantu. Drugim riječima, Ψ nije nezavisan stupanj slobode perturbacije metrike, već je vezan za s_{ij} . Jednom kad znamo i Ψ , u jednađbi (2.33), koja ima tri komponente, preostaju samo prostorne derivacije vektora w_k , koji također ima tri komponente. On je dakle također definiran preko s_{ij} . Isto zaključujemo iz treće jednađbe (2.34) za preostali skalar Φ . Ovo nam daje bitan rezultat da *su svi nezavisni stupnjevi slobode gravitacijskog zračenja sadržani u bestražnom prostornom dijelu s_{ij}* . Za vakuumski slučaj pokazali smo da možemo naći baždarenje u kojem svi ostali dijelovi iščezavaju.

Nakon odstranjivanja zavisnih stupnjeva slobode, preostaje dakle valna jednađba

$$0 = \square h_{\mu\nu}^{TT} = -\partial_0 \partial_0 h_{\mu\nu}^{TT} + \nabla^2 h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (2.52)$$

Prostor njenih rješenja razapet je ravnim valovima oblika

$$h_{\mu\nu}^{TT}(x^a) = C_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}, \quad (2.53)$$

za konstantan simetričan tenzor $C_{\mu\nu}$ i valni kovektor k_μ (ili vektor k^μ). Kao i obično u definiranju realnih ravnih valova, fizikalna je samo realan dio kompleksnog izraza na desnoj strani. Za $C_{\mu\nu}$ mora vrijediti

$$C_{0\mu} = 0, \quad (2.54)$$

$$\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0, \quad (2.55)$$

dok iz uvjeta transverzalnosti slijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} \\ &= C^{\mu\nu} i k_\mu^{ik_\rho x^\rho} \\ &= C^{\mu\nu} i k_\mu, \end{aligned} \quad (2.56)$$

odnosno valni vektor je ortogonalan na tenzor $C_{\mu\nu}$. Uvrštavanjem u valnu jednadžbu dobivamo još jedan uvjet za k^μ

$$\begin{aligned} 0 &= \square h_{\mu\nu}^{TT} \\ &= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma (C_{\mu\nu} e^{ik_\chi x^\chi}) \\ &= \eta^{\rho\sigma} C_{\mu\nu} (i k_\rho i k_\sigma) e^{ik_\chi x^\chi} \\ &= -C_{\mu\nu} k_\rho k^\rho e^{ik_\chi x^\chi}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

što u netrivialnom slučaju implicira $k_\rho k^\rho = 0$, odnosno valni vektor je svjetlosnog tipa. Dobili smo bitan rezultat da se gravitacijski ravni valovi propagiraju u prostoru brzinom svjetlosti. Ako orijentiramo prostorne koordinate tako da je z koordinata paralelna s prostornim dijelom vektora k^μ , možemo ga zapisati

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega), \quad (2.58)$$

što uz ortogonalnost k^μ i $C_{\mu\nu}$ te uvjet $C_{0\mu} = 0$ povlači $C_{3\nu} = 0$, a uzevši u obzir i

simetriju i bestražnost, u takvom koordinatnom sustavu $C_{\mu\nu}$ ima oblik

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Ravan gravitacijski val stoga je u potpunosti definiran frekvencijom ω i komponentama C_{11} i C_{12} .

2.1.5 Fizikalne posljedice gravitacijskih valova

Jedno od ključnih pitanja koje trebamo odgovoriti kako bi teorija gravitacijskih valova bila znanstvena je kako gravitacijski val fizikalno utječe na sadržaj prostorstvremenata, odnosno koje su mu opazive posljedice. Ono što vidimo iz oblika perturbacije $h_{\mu\nu}$ je da postoji koordinatni sustav u kojemu su svi efekti sadržani u prostornom dijelu metrike okomitom na smjer propagacije vala. Dotični efekti su promjene komponenti metrike, što znači da se mijenjaju udaljenosti između stacionarnih točaka prostora razmaknutih u ravnini okomitoj na smjer propagacije. Drugim riječima, ako imamo dvije čestice fiksirane za neke položaje koje miruju jedna u odnosu na drugu, njihova udaljenost će varirati, iako se one ne gibaju. Nijedna čestica sama po sebi neće primijetiti utjecaj gravitacijskog zračenja, ali svakoj od njih će izgledati kao da se druga udaljava i približava, ne zbog gibanja u prostoru, već zbog promjene metrike na njemu. Ovo ćemo uskoro pokazati.

Ako promatramo čvrsto tijelo, npr. kristalnu rešetku, sile među česticama djelovat će suprotno ovoj promjeni u udaljenostima, nastojeći očuvati stabilne razmake između elemenata rešetke. Posljedično dobivamo oscilatorna pobuđenja rešetke kojima gravitacijski val predaje energiju materiji.

Način na koji možemo detektirati ovakve promjene udaljenosti temeljen je na korištenju svjetlosti, čija konstantnost brzine govori da će vrijeme potrebno za dolazak snopa od jedne točke do druge varirati upravo kao i njihova udaljenost. U praksi je najveći problem to što su promjene udaljenosti koje nadolazeći gravitacijski valovi uzrokuju kad stignu do Zemlje ekstremno male.

Sada ćemo izvesti promjene udaljenosti uzrokovane gravitacijskim ravnim valom. Promatramo neki skup čestica koje se slobodno gibaju u gravitacijskom polju, od-

nosno njihove su putanje geodezici. Kretanje svih njih opisujemo jednim vektorskim poljem $U^\mu(x)$. Zanima nas evolucija vektora separacije nekog para čestica $S^\mu(\tau)$ u vlastitom vremenu τ . Budući da su putanje geodezici, a svi utjecaji na promjene udaljenosti dolaze iz zakrivljenosti prostorvremena, koristimo jednadžbu devijacije geodezika s Riemannovim tenzorom

$$\frac{d^2}{d\tau^2}S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}U^\nu U^\rho S^\sigma. \quad (2.60)$$

Kao i do sada, zanemarujemo sve članove reda višeg od prvog u perturbaciji h_{ab} . Budući da nas prije svega zanimaju fizikalne situacije kao, na primjer, utjecaj gravitacijskih valova na Zemlju i detektore na njoj, možemo pretpostaviti da se čestice gibaju sporo. U tom slučaju vektorsko polje U^μ u nekom inercijalnom sustavu ima oblik jediničnog vektora u vremenskom smjeru $(1, 0, 0, 0)$ plus neko malo vektorsko polje koje opisuje relativno gibanje različitih čestica i njihovo gibanje uslijed zakrivljenosti prostorvremena. Za oba doprinosa iznad jediničnog vektora možemo reći da su prvog reda pa ih zanemarujemo jer se u jednadžbi pojavljuju u umnošku s Riemannovim tenzorom, koji je već objekt prvog reda. Stoga aproksimiramo $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Jedine komponente tenzora zakrivljenosti koje ostaju relevantne uslijed kontrakcije u jednadžbi (2.60) su $R^\mu{}_{00\sigma}$. Također za vlastito vrijeme τ uzimamo da je jednako koordinatnom jer su korekcije opet drugog reda. Kako nam promjena baždarenja također daje doprinos drugog reda u jednadžbi, ostaje nam sloboda definirati ga u korist jednostavnosti. Biramo transverzalno-bestražno baždarenje, što možemo uz aproksimaciju da nemamo puno materije, odnosno da po pitanju zakrivljenosti prostorvremena promatramo vakuum. U slučaju mjerenja na Zemlji, ovo je jako gruba aproksimacija, no kvalitativno daje dobru ideju. Idealno, promatramo skup od nekoliko čestica izoliranih u vakuumu. Najpraktičnije nam je iskoristiti izraz (2.9) za Riemannov tenzor i uvrstiti $h_{\mu 0}^{TT} = 0$,

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{00\sigma} &= \frac{1}{2} \left(\partial_0 \partial_0 h^{TT\mu}{}_\sigma - \partial_0 \partial^\mu h^{TT}{}_{\sigma 0} - \partial_\sigma \partial_0 h^{TT\mu}{}_0 + \partial_\sigma \partial^\mu h^{TT}{}_{00} \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h^{TT\mu}{}_\sigma. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Za vektor separacije dobivamo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\mu}_\sigma. \quad (2.62)$$

Vidimo da će val oblika (2.59), koji putuje u smjeru z , uzrokovati samo promjene x i y komponenti vektora separacije, budući da se ostale (t i z) množe s nulama iz perturbacije $h^{TT\mu}_\sigma$. Uz preimenovanje $C_{11} \rightarrow C_1$, $C_{12} \rightarrow C_2$, imamo

$$h_{\mu\nu}^{TT} = e^{ik_\rho x^\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & C_2 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Uvrštavanjem u jednadžbu za S^μ dobivamo sustav dvije jednadžbe koje možemo pojednostaviti razdvajanjem na slučajeve $C_2 = 0$ i $C_1 = 0$. U prvom slučaju jednadžbe su

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_1 e^{ik_\rho x^\rho}), \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_1 e^{ik_\rho x^\rho}). \quad (2.65)$$

Rješenje možemo pogoditi ako primijetimo par detalja. Druga derivacija komponente vektora separacije jednaka je njoj samoj pomnoženoj s drugom derivacijom komponente ravnog vala. Budući da ravni val sadrži faktor prvog reda, obje strane bit će male, odnosno događat će se neka vrsta malog osciliranja oko ravnotežnog iznosa vektora separacije (na što ukazuje i eksponencijalna funkcija). Stoga u prvom redu računa možemo aproksimirati $S^1(t)$ (ili $S^2(t)$) na desnoj strani jednadžbi s ravnotežnim $S^1(0)$ (ili $S^2(0)$). Tada je lako naći rješenje oblika

$$S^1 = \left(1 + \frac{1}{2} C_1 e^{ik_\rho x^\rho} \right) S^1(0), \quad (2.66)$$

$$S^2 = \left(1 - \frac{1}{2} C_1 e^{ik_\rho x^\rho} \right) S^2(0), \quad (2.67)$$

koje u prvom redu zaista rješava originalne jednadžbe. U slučaju $C_1 = 0$ jednadžbe

su

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_2 e^{ik_\rho x^\rho}), \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_2 e^{ik_\rho x^\rho}). \quad (2.69)$$

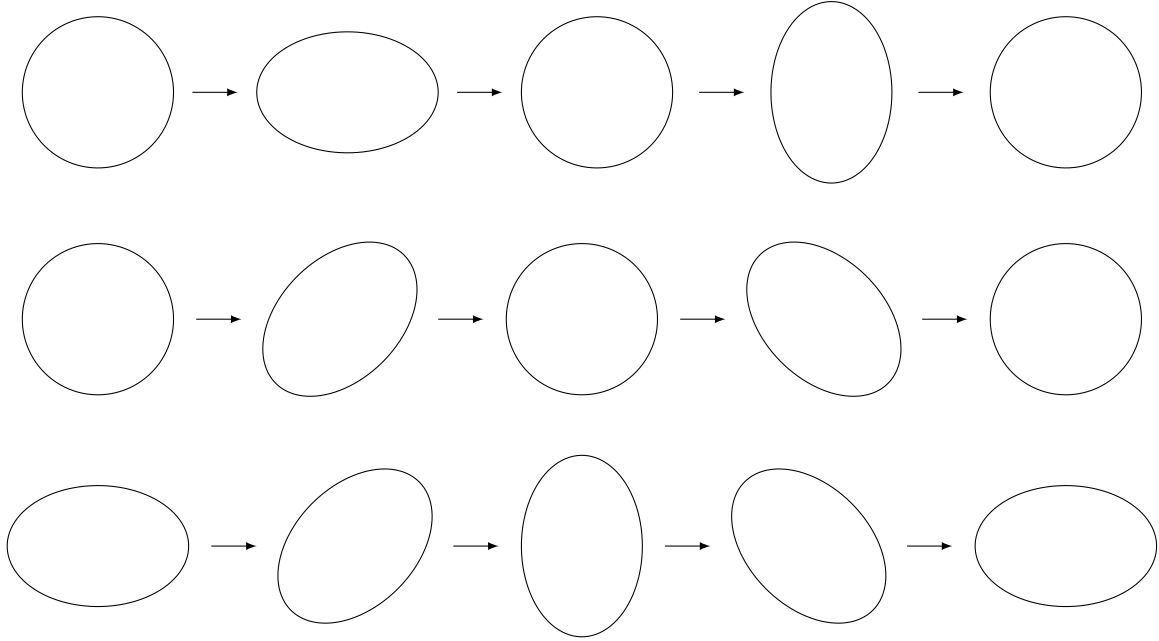
Rješavamo ih na isti način kao u prvom slučaju, osim što sada svaka komponenta vektora separacije dobiva male promjene proporcionalne preostaloj komponenti,

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2} C_2 e^{ik_\rho x^\rho} S^2(0), \quad (2.70)$$

$$S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2} C_2 e^{ik_\rho x^\rho} S^1(0). \quad (2.71)$$

Iz oblika rješenja možemo vidjeti kako bi efekt izgledao. U slučaju $C_2 = 0$, odnosno prvoj polarizaciji, čestice razdvojene samo u x koordinati tako će i ostati, dok će im udaljenost oscilirati. Česticama razdvojenima samo u y osi također će samo oscilirati udaljenost, no u protufazi. Sveukupno, ako promatramo kružnicu sastavljenu od čestica, realni dio izraza kaže da će ona oscilirati između elipse razvučene duž x osi i one duž y osi, prolazeći kroz kružni oblik svakih pola perioda. U drugoj polarizaciji, $C_1 = 0$, događa se isti efekt, no smjerovi u kojima se elipse protežu postaju osi $y = x$ i $y = -x$. Naravno, svaka linearna kombinacija ove dvije polarizacije također je mogući oblik vala. Na primjer, jednakim uključivanjem obje polarizacije uz odgovarajući fazni pomak možemo dobiti kružnu polarizaciju, što odgovara kruženju elipse.

Tipični detektor sadrži dva okomita tunela jednakih duljina od nekoliko kilometara, u koja se razdvoji laserski snop. Na krajevima tunela su zrcala obješena na nitima. Ovo je potrebno jer Zemlja, kao čvrsto tijelo, silama među česticama kompenzira za promjene udaljenosti koje stvara gravitacijsko zračenje, dok zrcala mogu slobodno oscilirati. Laserski snopovi se odbijaju od zrcala i prolaze duljinu tunela nekoliko stotina puta. Na taj način povećava se razlika prijeđenih puteva koja postoji zbog oscilacija duljina okomitih tunela u protufazi. Na kraju se snopovi ponovo spajaju te ulaze u detektorsku fotodiodu. Promatra se interferencija dvaju snopova. Budući da su se kretali u okomitim smjerovima, njihove prijeđene udaljenosti, a time i vremena putovanja, su različite. Ta se razlika manifestira kao fazni pomak koji uzrokuje destruktivnu interferenciju. Amplituda rezultirajućeg snopa u promatranoj



Slika 2.1: Vremenska evolucija metrike pri nadolazećem ravnom gravitacijskom valu na primjeru kružnice od čestica. Oblik kružnice prikazuje udaljenosti koje metrika definira (u ravnini okomitoj na smjer propagacije vala), dok same čestice miruju. Gore: polarizacija $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Sredina: polarizacija $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Dolje: primjer kružne polarizacije

točki tijekom nekog vremena dat će zapis gravitacijskog vala.

2.1.6 Nastanak i energija gravitacijskog vala

Za kraj poglavlja o standardnoj lineariziranoj teoriji ukratko ćemo razmotriti rezultate koji opisuju kako gravitirajući sustav može emitirati valove i o čemu njihov oblik ovisi. Zatim ćemo navesti formulu za gubitak energije sustava izračene gravitacijskim valovima.

Kako je transversalno bestražno baždarenje bilo omogućeno praznim svemirom, tj. za $T_{ab} = 0$ svuda, ne može ga se koristiti pri promatranju izvora, za koje $T_{ab} \neq 0$. Ono što možemo je pretpostaviti da je daleko od izvora svemir dovoljno sličan praznom te u principu možemo prijeći u TT baždarenje transformacijom perturbacije $h_{\mu\nu}$.

Zbog pojednostavljivanja računa kreće se definiranjem perturbacije obrnutog traga

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}, \quad (2.72)$$

koja sadrži sve informacije kao i originalna perturbacija, samo ima suprotan trag, te

za koju vrijedi pogodno svojstvo

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (2.73)$$

Odabire se baždarenje tako da vrijedi

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.74)$$

tzv. *Lorenzovo baždarenje*, nazvano po analogiji s uvjetom $\partial_\mu A^\mu = 0$ iz elektrodinamike. Uvrštavanjem u Riemannov tenzor nalazi se linearizirana Einsteinova jednažba za $\bar{h}^{\mu\nu}$, koja je znatno jednostavnijeg oblika nego u terminima $h^{\mu\nu}$,

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.75)$$

Budući da je ovo valna jednažba s izvorom, koristi se Greenova funkcija koja rješava jednažbu

$$\square_x G(x^\mu - y^\mu) = \delta^{(4)}(x^\mu - y^\mu) \quad (2.76)$$

pa je rješenje za perturbaciju

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\rho) = -16\pi G \int G(x^\rho - y^\rho) T_{\mu\nu}(y^\rho) d^4 y. \quad (2.77)$$

Rješenja jednažbe za Greenovu funkciju (2.76) predstavljaju efekte dospjele u točku x iz svih točaka y koje su razmaknute od x za svjetlosni put, odnosno koje su na njegovom svjetlosnom stošcu, s obzirom da je brzina valova jednažbe (2.75) jednaka 1, odnosno brzini svjetlosti. Mi se ograničavamo na svjetlosni stožac prošlosti, budući da on predstavljaju točke s kojih su valovi mogli doći do promatrane točke x . Tada Greenova funkcija glasi

$$G(x^\mu - y^\mu) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \delta(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0)) \theta(x^0 - y^0), \quad (2.78)$$

gdje delta-funkcija daje nulu kada y nije na svjetlosnom stošcu od x , a theta daje nulu za točke y u budućnosti od x , a vektori \vec{x} , \vec{y} su prostorni dijelovi točaka. Uz pretpostavku da je izvor – područje gdje je $T_{ab} \neq 0$ – kompaktan u prostoru te da je točka x dovoljno daleko, uzimamo $|\vec{x} - \vec{y}| = r$. Definiramo retardirano vrijeme

$t_r = t - r$, $t = x^0$ te dobivamo

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = 4G \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) d^3y. \quad (2.79)$$

Koristeći Fourierove transformate, pogodnosti koje daje Lorenzovo baždarenje te očuvanje energije $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, pokazuje se da se vremenske komponente perturbacije $\bar{h}_{\mu 0}$ mogu izraziti preko čisto prostornih \bar{h}_{ij} , da se sve komponente tenzora $T_{\mu\nu}$ mogu izraziti preko T_{00} te se dobiva izraz za \bar{h}_{ij} preko tenzora kvadrupolnog momenta gustoće energije izvora I_{ij} ;

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, \vec{y}) d^3y, \quad (2.80)$$

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r). \quad (2.81)$$

Posljednji izraz naziva se *kvadrupolna formula*.

Vidimo da gravitacijski val nastaje uslijed akceleracije kvadrupolnog momenta gravitirajućeg sustava. Ovo je u kontrastu s elektrodinamikom, gdje valovi nastaju uslijed promijenjivog dipolnog momenta gustoće naboja. Ova razlika je zapravo očekivana. U gravitaciji nemamo dvije suprotne vrste masa, kao što postoje pozitivni i negativni naboji. Stoga bi promjena dipolnog momenta implicirala akceleraciju centra mase cijelog sustava, što je nemoguće za izolirani sustav zbog očuvanja količine gibanja. Kvadrupolni moment je stoga prvi koji zapisuje promjene rasporeda mase u sustavu.

Klasični primjer zračećeg sustava, i najčešći u svemiru, je binarni sustav, odnosno par neutronske zvijezde ili crnih rupa koje kruže jedna oko druge. Kružnu promjenu pozicije masa mjeri upravo akceleracija kvadrupolnog momenta gustoće energije. Za kruženje u $x - y$ ravnini, on će imati elemente različite od nule u bloku $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2\}$ te će stvarati gravitacijski val koji se propagira u z osi. Budući da su gravitacijski valovi ekstremno slabi u kontekstu mjerljivih efekata, za detekciju je ključno da ih stvara sustav velike mase te da brzina rotiranja bude čim veća. Najlakše su opazivi sudari dvaju objekata ogromnih masa prije kojih dolazi da kratkotrajne ekstremno brze rotacije.

Preostaje nam proučiti energiju koju gravitacijski valovi nose. Budući da je izvod nešto zahtjevniji tehnički, čak i uz relativno grube aproksimacije, a nije ključan

za razumijevanje, ovdje ćemo ga ukratko opisati riječima. Kako prvi red perturbacije rješava Einsteinovu jednadžbu u vakuumu, tenzor energije i impulsa je po pretpostavci nula. Stoga se analiza nastavlja u drugom redu. U Riccijevom tenzoru dobivamo članove linearne u perturbaciji s uvrštenim drugim redom $R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}]$, ali dobivamo i kvadratične članove koji sada više ne otpadaju, no samo one s uvrštenom perturbacijom prvog reda $R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}]$ (budući da su ostali trećeg reda u h , što i dalje zanemarujemo). Drugi red Einsteinove jednadžbe daje nam jednakost između ove dvije skupine članova s obzirom da je na desnoj strani tenzor energije i impulsa koji je u svakom redu nula.

$$R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(1)}[h^{(2)}]\eta_{\mu\nu} = 8\pi G t_{\mu\nu} \quad (2.82)$$

Kvadratične članove u perturbaciji prvog reda promatramo kao utjecaj linearizirane metrike na drugi red zakrivljenosti prostorvremena, odnosno kao uzrok u samogravitirajućem učinku gravitacijskih valova, koji postoji zbog nelinearne prirode Einsteinove jednadžbe. Zato njih stavljamo u tenzor t_{ab} , koji zamjenjuje ulogu tenzora energije i impulsa,

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(2)}[h^{(1)}]\eta_{\mu\nu} \right). \quad (2.83)$$

Tenzor t_{ab} , doduše, nije baždarno invarijantan. Ovaj problem se riješi na način koji je i intuitivno potreban – usrednjavanjem preko nekoliko valnih duljina. Naime, u pojedinoj točki nemamo deformacije uslijed gravitacijskih valova, a znamo i da u njoj možemo definirati lokalni inercijalni sustav. Stoga ne bi ni imalo smisla da dobijemo izraz za energiju preko metrike i njenih derivacija lokalno. Upravo je nelokalni učinak na skali valne duljine onaj koji je opaziv, a time i onaj koji bi trebao uzrokovati transfer energije.

Krajnji rezultat je formula za snagu kojom sustav gravitacijskim zračenjem gubi energiju [1]

$$P = -\frac{G}{5} \left\langle \frac{d^3 J_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 J^{ij}}{dt^3} \right\rangle, \quad (2.84)$$

gdje kutne zagrade predstavljaju usrednjavanje po nekoliko valnih duljina. Vidimo da se i ova veličina svodi na kvadrupolni moment, konkretno na kvadrat njegove treće derivacije.

2.2 Bondi-Sachsov formalizam

Još otkad je Einstein napravio prvu verziju izvoda gravitacijskih valova, postavljalo se pitanje je li efekt stvaran ili samo posljedica linearizacije opće teorije relativnosti. Drugim riječima, bilo je upitno dolazi li do predviđanja gravitacijskog zračenja zbog aproksimacija uvedenih u model te bi li puna teorija njih poništila višim članovima. Prvi formalniji dokaz legitimnosti fenomena došao je od Bondija i Sachsa koji su promatrali proširenje mnogostrukosti prostorvremena dodavajući svjetlosnu beskonačnost. Osnovna ideja formalizma je rad u koordinatama adekvatnima za proučavanje limesa duž svjetlosnih linija. U takvom sustavu možemo proučavati gravitacijsko zračenje kao efekt koji najsporije iščezava za $r \rightarrow \infty$. U nastavku pristupamo formalizmu slijedeći [2] i [3].

Krećemo u generaliziranom koordinatnom sustavu x^μ na $4D$ Lorentzijanskom prostorvremenu (\mathcal{M}, g) . Mnogostrukost razlistavamo na svjetlosne hiperplohe Γ_c , odnosno $3D$ hiperplohe čiji su normalni kovektori svjetlosnog tipa. Prvu Bondi-Sachsovu koordinatu, $u(x)$, definiramo tako da je ona konstantna na pojedinoj hiperplohi, $(\forall x \in \Gamma_c) : u(x) = c$, te raste u smjeru budućnosti. Normalni kovektor n_a i činjenicu da su hiperplohe svjetlosne možemo zapisati kao

$$n_\mu = -\partial_\mu u, \quad n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0. \quad (2.85)$$

Bitan detalj je da vektor n^a zapisan u komponentama ne pokazuje u smjeru promjene koordinate u , za razliku od kovektora n_a . Štoviše, n^a je tangentan na hiperplohu Γ_c . Ovo je svojstvo svjetlosnih hiperploha. Pojedini geodezik generiran vektorskim poljem $n^a(x)$ sadržan je u jednoj hiperplohi. U danoj Γ_c , skup svih takvih geodezika pokriva ju u cijelosti pa kažemo da je Γ_c generirana vektorskim poljem n^a . Preostale koordinate definiramo tako da dvije budu konstantne duž pojedinog geodezika, odnosno parametriziraju skup svih takvih geodezika, dok je preostala koordinata parametar duž njih. Ovu zadnju navedenu nazivamo r , a druge dvije zovemo kutnim koordinatama x^A , $A \in \{0, 1\}$. Za objekte definirane na kutnom dijelu tangentnog prostora općenito ćemo koristiti velika latinička slova $A, B, C...$. Sama parametrizacija duž geodezika koordinatnom r je proizvoljna, što uzimamo u obzir funkcijom $\beta(x)$,

$$n^\mu = e^{-2\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial r}, \quad (2.86)$$

gdje je parcijalna derivacija uzeta s obzirom na Bondi-Sachsov koordinatni sustav.

U ovom trenutku veza s radijalnom i kutnim koordinatama sferičnog sustava još nije jasna. Pojedina hiperploha kao što je dosad definirana mogla bi biti, na primjer, skup svih prostornih ravnina paralelnih s nekom zadanom u ravnom prostoru vremenu, gdje su svake dvije odvojene u vremenskoj koordinati za vrijeme koje treba svjetlosti da prijeđe udaljenost među njima. No, ovo nije općenit slučaj. Ono što možemo pokazati da vrijedi je sljedeće. Znamo da u Bondi-Sachsovima koordinatama $x^\mu = (u, r, x^A)$ imamo vektor i kovektor n oblika

$$\begin{aligned} n_\mu &= (-1, 0, 0^A), \\ n^\mu &= (0, e^{-2\beta}, 0^A). \end{aligned} \quad (2.87)$$

No, također znamo da su oni povezani metrikom

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu. \quad (2.88)$$

Uvrštavajući dobivamo

$$(0, e^{-2\beta}, 0^A) = (-g^{uu}, -g^{ru}, -g^{Au}), \quad (2.89)$$

odnosno $g^{uu} = 0 = g^{Au}$ te $g^{ru} = -e^{-2\beta}$. Definiramo V , U^A i h^{AB}

$$g^{rr} = \frac{V}{r} e^{-2\beta}, \quad (2.90)$$

$$g^{rA} = -U^A e^{-2\beta}, \quad (2.91)$$

$$g^{AB} = \frac{1}{r^2} h^{AB}. \quad (2.92)$$

Napomena: h_{AB} nije perturbacija metrike kao $h_{\mu\nu}$ u prethodnom poglavlju, već tzv. konformalna 2-metrika na potprostoru konstantnih u i r . Metrika s podignutim indeksima zapisana pomoću ovih parametara ima oblik

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2\beta} & 0^B \\ -e^{-2\beta} & \frac{V}{r} e^{-2\beta} & -U^B e^{-2\beta} \\ 0^A & -U^A e^{-2\beta} & \frac{1}{r^2} h^{AB} \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

a nalaženjem inverza za metriku dobivamo

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{V}{r}e^{2\beta} + r^2h_{AB}U^AU^B & -e^{2\beta} & -r^2h_{AB}U^A \\ -e^{2\beta} & 0 & 0_B \\ -r^2h_{AB}U^B & 0_A & r^2h_{AB} \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

ili u alternativnom zapisu

$$ds^2 = -\frac{V}{r}e^{2\beta}du^2 - 2e^{2\beta}dudr + r^2h_{AB}(dx^A - U^Adu)(dx^B - U^Bdu). \quad (2.95)$$

Dosad smo iskoristili tri stupnja slobode u izboru koordinata, $g_{rr} = 0$ i $g_{rA} = 0$ ($A = 0, 1$). Budući da razmatramo $4D$ prostorvrijeme, preostaje još jedan stupanj slobode. Njega iskorištavamo uvjetom

$$\partial_r \det \left(\frac{1}{r^2} g_{AB} \right) = 0, \quad (2.96)$$

odnosno

$$\partial_r \det(h_{AB}) = 0. \quad (2.97)$$

Ovim uvjetom efektivno smo zadali da zadnje dvije koordinate našeg sustava, koje su konstantne duž geodezika koji generiraju hiperplohe Γ_c , imaju metriku koja daje površine proporcionalne kvadratu koordinate r . U ravnom prostoru ovo bi odgovaralo sferičnom sustavu, gdje površina sfere raste s kvadratom radijalne koordinate. U općenitom prostorvremenu, ova sfera može postati objekt drugačije geometrije, no element površine za dani položaj na tome objektu i dalje će ovisiti o koordinati r samo kroz faktor r^2 . Ovo fiksira Bondi-Sachsove koordinate u poopćenje sfernog koordinatnog sustava, eliminirajući ostale oblike hiperploha, kao npr. spomenuti skup paralelnih prostornih ravnina razmaknutih u vremenu. Bitno je držati na umu da je ova procedura općenita i može se provesti za svaku metriku. Svejedno, oblik metrike (2.95) u literaturi se obično naziva *Bondi-Sachsova metrika*.

Bondi-Sachsove koordinate možemo vizualno zamisliti kao niz svjetlosnih stožaca sa središtem u istoj točki prostora razmaknutih u vremenu. Retardirano vrijeme je konstantno na svakom stošcu i čini koordinatu u . Koordinata r povećava se duž svjetlosnih linija koje tvore pojedini stožac. Ona određuje skaliranje površinskog elementa na sferoidnom objektu definiranom s $u = konst.$, $r = konst.$ Kutne koordinate

x^A , $A = 1, 2$ zadaju točku na danom sferoidu.

2.2.1 Bondi-Sachsovo rješenje Einsteinovih jednadžbi

U ovom podpoglavlju pokazat ćemo glavne ideje izvoda Einsteinovih jednadžbi za Bondi-Sachsovu metriku. Ne ulazimo u detalje cijelog postupka budući da on sadrži integriranje mnoštva članova i slične komplikacije, a rezultati su dobro poznati.

Korisno je definirati komponente cijele Einsteinove jednadžbe

$$E_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R - 8\pi T_{ab}, \quad (2.98)$$

$$E_{ab} = 0. \quad (2.99)$$

Ovdje smo uzeli geometrijske jedinice $G = c = 1$. Primijetimo da su cijele jednadžbe E_{ab} simetrične na zamjenu indeksa. Za početak koristimo kontrahirani Bianchijev identitet i zakon očuvanja energije i impulsa,

$$\nabla_b R^b_a = \frac{1}{2}\nabla_a R, \quad (2.100)$$

$$\nabla_b T^b_a = 0, \quad (2.101)$$

iz kojih dobivamo tzv. *suplementarne uvjete*

$$\nabla_b E^b_a = 0. \quad (2.102)$$

Einsteinova jednadžba dijeli se u Bondi-Sachsovim koordinatama na *jednadžbe hiperplohe*

$$E_\mu^u = 0 \quad (2.103)$$

i *jednadžbe evolucije*

$$E_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}g^{CD}E_{CD} = 0, \quad (2.104)$$

zapisane u obliku pogodnom za rješavanje. Zbog simetrije u indeksima, preostaju samo jednadžbe E_r^A , koje su trivijalno zadovoljene ako su zadovoljene jednadžbe hiperplohe,

$$E_r^A = -e^{2\beta}E^{uA} = -e^{2\beta}g^{A\mu}E_\mu^u = 0, \quad (2.105)$$

gdje smo iskoristili Bondi-Sachsovu metriku (2.95). U dobivene jednađbe uvrštavaju se izrazi za Riemannov tenzor preko Bondi-Sachsove metrike u terminima parametara β , U^A , V i h_{AB} . Četiri jednađbe hiperplohe, jedna za svaki indeks μ , diferencijalne su jednađbe za β , U^A i V . Integriranjem se mogu dobiti izrazi za ove tri funkcije (4 komponente budući da U^A ima dvije) preko 2-metrike h_{AB} i tenzora energije i impulsa.

Za sada razmatramo specifično asimptotski ravni prostor. Konkretna definicija dana je u sljedećem poglavlju, no ovdje jednostavno namećemo uvjete na komponente metrike kako bi ona u limesu $r \rightarrow \infty$ bila ravna. Ravna metrika u Bondi-Sachsovim koordinatama lako se nalazi iz metrike Minkowskog u sfernim koordinatama uvrštavajući promjenu prve koordinate t u retardirano vrijeme $u = t - r$;

$$\eta_{ab}dx^a dx^b = -du^2 - 2dudr + r^2 q_{AB} dx^A dx^B, \quad (2.106)$$

gdje je q_{AB} metrika jedinične 2-sfere, npr. u standardnim sfernim koordinatama $x^A = (\theta, \phi)$, $q_{AB} = \text{diag}(1, \sin^2 \theta)$. Uvjeti za komponente glase

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta = 0, \quad (2.107)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U^A = 0, \quad (2.108)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V}{r} = 1, \quad (2.109)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{AB} = q_{AB}. \quad (2.110)$$

Kako bismo zapisali što u asimptotski ravnom prostoru ovaj formalizam otkriva o gravitacijskom zračenju, definiramo sljedeće standardne veličine.

Konformalna 2-metrika h_{AB} razvija se u asimptotski red po r^{-1} :

$$h_{AB}(u, r, x^C) = q_{AB} + \frac{c_{AB}(u, x^C)}{r} + \frac{d_{AB}(u, x^C)}{r^2} + \dots, \quad (2.111)$$

gdje je faktor u prvom redu definiran konkretno kao

$$c_{AB}(u, x^C) = \lim_{r \rightarrow \infty} [r(h_{AB} - q_{AB})]. \quad (2.112)$$

Budući da je prostorvrijeme asimptotski ravno, bilo koji izvori gravitacijskog polja po pretpostavci se nalaze u ograničenom području. Faktor c_{AB} zato predstavlja od-

stupanje u prvom redu od ravne metrike na prostoru “okomitom” na smjer širenja gravitacijskog vala u beskonačnosti. Stoga će on opisivati gravitacijsko zračenje. Uz *Newman-Penroseov* formalizam dokazano je da je tenzor

$$N_{AB}(u, x^C) = \frac{1}{2} \partial_u c_{AB} \quad (2.113)$$

geometrijski definirana veličina, neovisna o izboru koordinatnog sustava i perturbativnog računa [3]. Ovaj rezultat maknuo je sumnje s fizikalnosti fenomena gravitacijskih valova, s obzirom da imamo geometrijski objekt koji u proizvoljnom sustavu pada s r^{-1} za $r \rightarrow \infty$, a sadrži informacije o deformiranju prostornih udaljenosti u vremenu. Tenzor N_{AB} naziva se *Bondijev tenzor novosti* (eng. *Bondi news tensor*), sukladno ideji da on mjeri kako novosti o gravitacijskom polju pristižu u konformalnu beskonačnost.

Nadalje, definiramo *maseni aspekt*

$$M(u, x^A) = \lim_{r \rightarrow \infty} [V(u, r, x^A) - r], \quad (2.114)$$

gdje je naziv opravdan činjenicom da u statičnom sferno simetričnom slučaju, gdje metrika postaje Schwarzschildova, Bondi-Sachsove koordinate postaju Eddington-Finkelsteinove, a M je tada jednak Schwarzschildovoj masi. Budući da ovdje imamo kutnu ovisnost, masu definiramo kao

$$m(u) = \frac{1}{4\pi} \oint M(u, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.115)$$

odabравši standardne kutne koordinate iz sfernog sustava $x^A = (\theta, \phi)$.

Konformalna metrika može se zapisati pomoću spinora. Osnove o spinorima iznesene su u Dodatku A. Uvodimo kompleksnu *polarizacijsku dijadu* m^a s uvjetom $m^a \nabla_a u = 0$. Tada je njen oblik u Bondi-Sachsovima koordinatama $m^a = (0, 0, m^A)$. Preostalu slobodu u izboru spinora m^A fiksiramo zapisujući kontravarijantnu metriku h^{AB} pomoću njega,

$$h^{AB} = \frac{1}{\chi \bar{\chi}} (m^A \bar{m}^B + m^B \bar{m}^A), \quad (2.116)$$

uz normalizaciju $\chi \in \mathbb{C}$, $m_A \bar{m}^A = \chi \bar{\chi}$, gdje je $m_A = h_{AB} m^B$, te uvjetom $m_A m^A = 0$. Preostaje samo fazna sloboda $m^A \rightarrow e^{i\varphi} m^A$, koja nam ovdje nije bitna. Spinori m^a i \bar{m}^a (njegov kompleksni konjugat) na jednostavan su način povezani s baznim

vektorima iz *Newman-Penroseove svjetlosne tetrade* (A.17) definirane za metriku g_{ab} :

$$m_{(NP)}^a = \frac{1}{r} m^a, \quad \bar{m}_{(NP)}^a = \frac{1}{r} \bar{m}^a. \quad (2.117)$$

U beskonačnosti, gdje konformalna metrika h_{AB} teži u metriku 2-sfere q_{AB} , za polarizacijsku dijadu vrijedi

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m^A = q^A, \quad (2.118)$$

$$q^{AB} = \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (q^A \bar{q}^B + q^B \bar{q}^A). \quad (2.119)$$

Pomoću polarizacijske dijade u beskonačnosti definiramo *Bondijevu funkciju novosti*:

$$N(u, x^C) = \frac{1}{\chi\bar{\chi}} q^A q^B N_{AB}. \quad (2.120)$$

Jedan od rezultata koje daje Einsteinova jednačba povezuje masu i Bondijevu funkciju novosti,

$$\frac{d}{du} m(u) = -\frac{1}{4\pi} \oint |N(u, \theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.121)$$

Ovaj izraz poznat je kao *Bondijeva formula gubitka mase* (eng. *Bondi mass loss formula*). Vidimo da funkcija novosti opisuje kako izvor gubi masu, budući da je izraz pod integralom uvijek pozitivan. Ako u beskonačnosti nema nadolazećih valova na nekoj hiperplohi Γ_c , masa se ne mijenja u trenutku $u = c$. Možemo zaključiti da tenzor novosti N_{AB} opisuje tok energije koja odlazi u beskonačnost. To je upravo energija koja može prijeći u materiju u kojoj gravitacijski val uzrokuje oscilacije. S obzirom da osciliranje čestica materije nastoji poništiti promjene udaljenosti koje gravitacijski val uzrokuje, što smo vidjeli u poglavlju o lineariziranoj gravitaciji, lako je zamisliti kako će njihove oscilacije stvarati suprotnu perturbaciju, umanjujući amplitudu nadolazećeg vala. Time efektivno dobivamo refleksiju i transmisiju, kao kod elektromagnetskog zračenja.

Bondi-Sachsov formalizam daje alate za analitičke i numeričke račune vezane uz gravitacijske valove. Također daje vezu linearizirane teorije s geometrijom, konkretno sa spinorima i Newman-Penroseovim formalizmom. Tu vezu ovdje nećemo istražiti dovoljno za potpuno razumijevanje budući da bi to zahtijevalo poznavanje nekoliko ekstenzivnih formalizama, no mnogi od rezultata koje iznosimo na rigoroz-

noj su razini njene posljedice. Ovdje ključnu ulogu imaju i simetrije u beskonačnosti, čije je razumijevanje omogućio Bondi-Sachsov formalizam. One čine *Bondi-Metzner-Sachsovu (BMS)* grupu, koja omogućava ekstrakciju fizikalnih rezultata kao onih koji su invarijantni na grupne transformacije.

Ono što je bitno držati na umu je da konceptualni detalji iza ove grupe i cijelog formalizma imaju konkretne implikacije za fizikalno razumijevanje fenomena. Problem je što u slučaju pozitivne kozmološke konstante, makar malog iznosa, ovi detalji velikim dijelom prestaju vrijediti ili se drastično mijenjaju. Posljedično, za $\Lambda = 0$ imamo alate za računanje izračene energije, momenta, angularnog momenta i prostorne deformacije koje izvori gravitacijskog zračenja uzrokuju u punoj, nelinearnoj teoriji opće relativnosti, dok u slučaju $\Lambda > 0$ to još nemamo [4]. Diskusija koja slijedi nakon razmatranja konformalnih dijagrama pokriva neke od problema koji nastaju te neka od rješenja u lineariziranom režimu.

3 Asimptopija i de Sitterov prostor

Do sad smo izgradili razumijevanje gravitacijskih valova u ravnom prostorvremenu. Budući da smo razmatrali i izvore gravitacijskog zračenja, nismo se ograničili na striktno ravne metrike, već na one koje daleko od izvora zadovoljavaju Einsteinovu jednažbu s $\Lambda = 0$ i u limesu $r \rightarrow \infty$ teže ravnome prostoru. U ovom ćemo poglavlju kao prvo konkretnije definirati ovaj koncept približavanja ravnom prostoru u beskonačnosti. Taj pothvat nas prirodno vodi u razmatranje konformalnih dijagrama. Oni pak olakšavaju shvaćanje prostorvremena za koje $\Lambda \neq 0$. U ovom radu nas zanima slučaj $\Lambda > 0$, koji će biti predstavljen de Sitterovim prostorom kao trivijalnim primjerom, dok ćemo u općenitoj situaciji imati prostore koji teže de Sitterovom u beskonačnosti, analogno $\Lambda = 0$ slučaju.

3.1 Asimptopija

3.1.1 Konformalni dijagrami

Za vizualizaciju i diskusiju raznih modela prostorvremena, korisno je nacrtati ih u kompaktnom obliku. Na primjer, ako želimo proučavati kako se određena polja ponašaju u limesima $r \rightarrow \infty$, ili općenito $\alpha \rightarrow \infty$ za neku koordinatu α , pomaže imati dijagram gdje je taj limes prikazan nekim područjem koje stane na papir. Ono što nije očito jest da topološka i geometrijska struktura tog područja zapravo igraju veliku ulogu u nalaženju rezultata i njihovoj fizikalnosti. Stoga je poželjno imati jasno definirane dijagrame koji prikazuju cijele mnogostrukosti u kompaktificiranom obliku. Također je pogodno zadržati osnovne strukture početne mnogostrukosti, konkretno ključna nam je kauzalnost. Ovi zahtjevi odlično su ispunjeni *Carter-Penroseovim dijagramima*, koje također zovemo *konformalni dijagrami*.

Osnovna je metoda iza njihovog nalaženja razmatranje transformacija metrike lokalnom promjenom skale. Za prostorvrijeme (\mathcal{M}, g_{ab}) , *konformalna transformacija* daje novu, nefizikalnu metriku \hat{g}_{ab} množenjem stare lokalnim faktorom $\Omega^2(x) > 0$:

$$\hat{g}_{ab}(x) = \Omega^2(x)g_{ab}(x). \quad (3.1)$$

Prva stvar za uočiti je očuvanje kauzalnosti. Za proizvoljan vektor $X^a \in \mathcal{M}$ predznak

produkta

$$\hat{g}_{ab}X^aX^b = \Omega^2g_{ab}X^aX^b \quad (3.2)$$

se ne mijenja. Svjetlosni vektori dakle ostaju svjetlosni, a isto vrijedi za prostorne i vremenske. Posljedično, svjetlosne linije također ostaju svjetlosne, budući da je krivulja svjetlosna ako i samo ako joj je tangenti vektor svuda svjetlosni, a isto tako i prostorne i vremenske linije. Riemannov se tenzor mijenja, no lako se nalazi relacija između starog R_{abcd} i novog \hat{R}_{abcd} .

Konformalnu transformaciju možemo namjestiti tako da se početna metrika množi sve manjim faktorom kako se udaljavamo od nekog područja u prostorvremenu (obično od središta koordinatnog sustava kojeg koristimo) te da teži u nulu kako se udaljavamo beskonačno. Na taj način možemo dobiti metriku s kojom je cijela mnogostrukost konačna u geometrijski vjernom prikazu (dijagramu). S obzirom da svjetlosne linije ostaju svjetlosne, nije teško naći koordinate u kojima one u svakoj točki prolaze pod kutem od 45° (između prostorne i vremenske osi). Kako je početna mnogostrukost neograničena u prostoru i vremenu s obzirom na početnu metriku, u dijagramu će biti predstavljena otvorenim skupom čiji rub dodajemo rukom. Time dobivamo mnogostrukost s rubom $\widehat{\mathcal{M}}$, čija je unutrašnjost difeomorfna s početnom \mathcal{M} , a rub predstavlja točke u beskonačnosti. Topologija ruba ovisi o početnom prostorvremenu pa ovisno o njemu dobivamo različite oblike dijagrama. Za kraj, kako bismo $4D$ prostore mogli nacrtati na $2D$ papiru, potiskujemo dvije dimenzije promatrajući samo vrijeme i radijalni smjer u prostoru, dok svaku sferu danog trenutka i radijusa prikazujemo kao pojedinu točku u dijagramu. Ovime se ograničavamo na (barem približno) sferno simetrične prostore.

Krenimo sa slučajem ravnog prostora Minkowskog. Njegova metrika u sfernom sustavu definirana je elementom linije

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dr^2 + r^2q_{AB}dx^A dx^B. \quad (3.3)$$

Koordinate dx^A ćemo potisnuti na dijagramu, a t i r moramo kompaktificirati. Njihove domene su

$$\begin{aligned} -\infty < t < \infty, \\ 0 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Moramo ih nekako glatko preslikati u nove koordinate koje će imati konačne granice domena. Mogli bismo jednostavno na njih primijeniti funkciju kao što je \arctan , no tada bismo izgubili svojstvo da su radijalne svjetlosne linije svuda pod kutem od 45° , koje početna metrika već ima. Ovaj se problem rješava odabirući koordinate koje prirodno rastu u smjerovima $\pm 45^\circ$:

$$\begin{aligned}u &= t - r, \\v &= t + r,\end{aligned}\tag{3.5}$$

te kompaktificirajući njih;

$$\begin{aligned}U &= \arctan u, \\V &= \arctan v.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Domene ovih koordinata sada su

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}, \quad U \leq V.\tag{3.7}$$

Za kraj ponovo konstruiramo vremensku i prostornu koordinatu:

$$\begin{aligned}T &= V + U, \\R &= V - U,\end{aligned}\tag{3.8}$$

s domenama

$$0 \leq R < \pi, \quad -(\pi - R) < T < \pi - R.\tag{3.9}$$

Ove domene definiraju oblik dijagrama. Metriku nalazimo uvrštavajući promjene koordinata u diferencijalni oblik

$$\begin{aligned}ds^2 &= -\frac{1}{2}(dudv + dvdu) + \frac{1}{4}(v - u)^2 q_{AB} dx^A dx^B \\&= \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} [-2(dU dV + dV dU) + \sin^2(V - U) q_{AB} dx^A dx^B] \\&= \frac{1}{\Omega^2(T, R)} (-dT^2 + dR^2 + \sin^2(R) q_{AB} dx^A dx^B),\end{aligned}\tag{3.10}$$

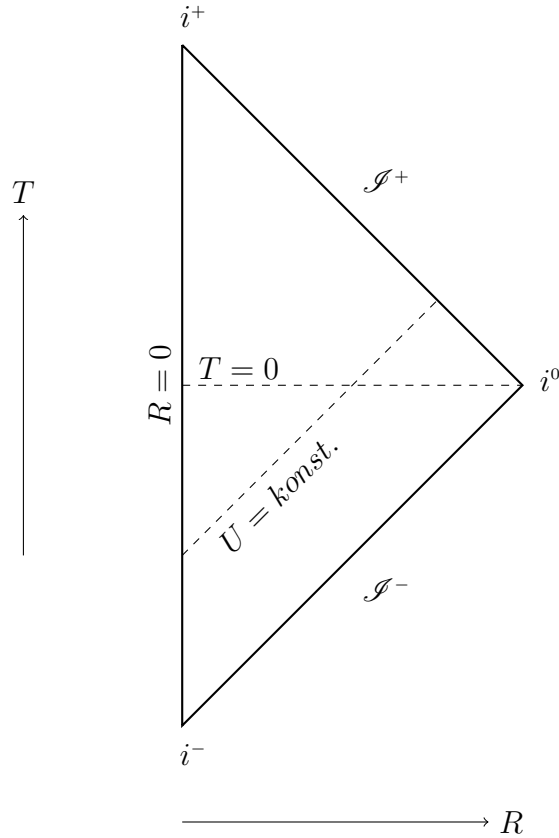
gdje smo u zadnjem retku definirali konformalni faktor

$$\begin{aligned}\Omega &= 2 \cos U \cos V \\ &= \cos T + \cos R.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Drugim riječima, dobili smo nefizikalnu metriku

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \Omega^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -dT^2 + dR^2 + \sin^2(R) q_{AB} dx^A dx^B.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Dodavajući rub, tzv. konformalnu beskonačnost, $R = \pi$ i $T = \pm(\pi - R)$, dobivamo konformalni dijagram za prostorvrijeme Minkowskog na slici (3.1.1).



Slika 3.1: Konformalni dijagram prostora-vremena Minkowskog. Svaka točka unutrašnjosti dijagrama (i svjetlosne beskonačnosti \mathcal{S}^+ , \mathcal{S}^-) predstavlja sferu S^2 konstantnih t i r . Linije konstantnog r sve započinju u prošloj vremenskoj beskonačnosti i^- i završavaju u budućoj i^+ , prolazeći sinusoidnim (za pola perioda) putanjama kroz dijagram. Sve linije konstantnog t započinju negdje na $R = 0$ te završavaju u prostornoj beskonačnosti i^0 prolazeći sinusoidom od četvrtine perioda.

Svjetlosna beskonačnost ima dva dijela, prošli \mathcal{S}^- i buduću \mathcal{S}^+ . Njihove topolo-

gije su $S^2 \times \mathbb{R}$. Vremenske i prostorna beskonačnost, i^- , i^+ i i^0 , kao i točke lijevog ruba dijagrama, zaista su točke jer imamo $R = 0$ ili $R = \pi$ pa je kutni dio metrike jednak nuli. Linije konstantnog U , ili ekvivalentno konstantnog u , rastu pod kutem od 45° , dok one za V ili v padaju.

Osim što smo konstruirali kompaktn prikaz prostorstvremena Minkowskog, dobili smo prirodno definiranu strukturu točkaka u beskonačnosti. Ovdje nećemo to dokazati, no ta struktura ne ovisi o izboru koordinata i procesu kompaktifikacije, već je svojstvo samog početnog prostorstvremena. De Sitterov prostor imat će drugačiji dijagram i drugačiju strukturu konformalne beskonačnosti. Prije nego dođemo do njega, pogledajmo kako možemo iskoristiti konformalnu kompaktifikaciju bez ograničavanja na prazan prostor u kojem nema izvora zračenja.

3.1.2 Asimptotski ravan prostor

Primijetimo da na budućoj svjetlosnoj beskonačnosti \mathcal{I}^+ imamo dobro definiranu koordinatu u , koja raste od $-\infty$ u točki i^0 do $+\infty$ u točki i^+ . Prisjetimo se da je Bondijev tenzor novosti N_{AB} , koji mjeri gravitacijsko zračenje, jednak derivaciji koeficijenta c_{AB} upravo po koordinati u za limes $r \rightarrow \infty$. Koordinatu u općenito smo definirali kao parametar konstantan na pojedinoj svjetlosnoj hiperplohi Γ_c , no u slučaju prostora Minkowskog lako smo ju identificirali s retardiranim vremenom $t-r$. Sada nam konformalni dijagrami omogućuju da limes $r \rightarrow \infty$ poistovjetimo s promatranjem točkaka na konformalnoj beskonačnosti \mathcal{I}^+ . Kako bismo ovu identifikaciju imali i u općenitijem, nepraznom prostorstvremenu, definiramo asimptotski ravno prostorstvrijeme. Ovdje iznosimo definiciju koja je sasvim dovoljna za naša razmatranja, a detaljniju obradu i matematički potpuniju verziju može se naći u Waldovom udžbeniku [7].

Definicija. Za prostorstvrijeme (\mathcal{M}, g_{ab}) kažemo da je **asimptotski ravno** ako postoji mnogostrukost $\widehat{\mathcal{M}}$ s rubom \mathcal{I} opremljena glatkom metrikom \hat{g}_{ab} (koja daje kovarijantnu derivaciju $\hat{\nabla}$) i konformalna izometrija u unutrašnjost od $\widehat{\mathcal{M}}$, $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{I}$ (kojom poistovijećujemo \mathcal{M} i $\Psi(\mathcal{M})$) s glatkim konformalnim faktorom $\Omega : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. $\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ na \mathcal{M} te vrijedi

1) $\widehat{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M} =: \mathcal{I} = \overline{J^+(i^0)} \cup \overline{J^-(i^0)}$, gdje su $\overline{J^+(i^0)}$ i $\overline{J^-(i^0)}$ zatvarači kauzalne budućnosti i prošlosti točke $i^0 \in \mathcal{I}$,

2) $\Omega = 0$ na \mathcal{I} , dok je $n_a := \nabla_a \Omega$ nigdje iščezavajuća na \mathcal{I} ,

3) \mathcal{I} je geodetski potpun s obzirom na \hat{g}_{ab} , odnosno geodezici u njemu se nastavljaju neprekinuto za proizvoljne vrijednosti svojih afinih parametara.

Ova definicija osigurava da se asimptotski ravno prostorstvrijeme može konformalno transformirati i dati dijagram koji ima istu strukturu ruba kao ravno prostorstvrijeme.

Sada možemo Bondijev tenzor novosti N_{ab} promatrati kao tenzor na \mathcal{I}^+ . Može se pokazati [3] da vakuumska Einsteinova jednačba na \mathcal{I}^+ ,

$$R_{ab} = 0, \quad (3.13)$$

osigurava postojanje konformalne transformacije za koju je $\hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b \Omega = 0$ na \mathcal{I}^+ , što daje skup prirodno preferiranih konformalnih faktora Ω za koje je \mathcal{I}^+ hiperploha bez divergencije i smicanja. Ovime efektivno vidimo da divergencija i smicanje konformalnog faktora u beskonačnosti ne mogu odgovarati fizikalnim efektima, odnosno ne mogu predstavljati gravitacijske valove. Stoga se u Bondi-Sachsovom formalizmu ograničavamo na ove prirodno preferirane odabire. Nadalje, jedan takav odabir čini inverz Bondi-Sachsove radijalne koordinate, $\Omega = l = r^{-1}$. Štoviše, faktor Ω^2 u definiciji konformalne transformacije dijelom je i motiviran time što omogućava korištenje potencija Ω^n za asimptotski razvoj analogan s r^{-n} i u općenitom, ne nužno asimptotski ravnom, prostoru. U slučaju $\Omega = r^{-1}$, dobivamo dodatnu pogodnost da se $n_a = \nabla_a \Omega$ (odnosno n^a) poklapa sa svjetlosnim vektorskim poljem normalnim (i tangentnim) na svjetlosne hiperplohe Γ_c iz Bondi-Sachs formalizma, uz odgovarajuću normalizaciju. Dodatnim konformalnim transformiranjem možemo doći do prirodnog koordinatnog sustava $\hat{x}^a = (u, l, x^A)$ u kojem je u afini parametar duž geodezika koji generiraju \mathcal{I}^+ . U njemu za kutni dio metrike asimptotski vrijedi

$$h_{AB} = q_{AB} + l c_{AB} + O(l^2), \quad (3.14)$$

a za tenzor novosti $N_{AB} = (\partial_u c_{AB})/2$ može se pokazati da je jednak koeficijentu prvog reda asimptotskog razvoja smicanja $\nabla_a \nabla_b l$ (povučenom na \mathcal{I}^+),

$$N_{ab} = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{1}{l} \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b l \right). \quad (3.15)$$

Ovaj rezultat dokazuje da je tenzor novosti prirodno geometrijski definirana veličina,

odnosno da nije uklonjiv biranjem različitih koordinata. Ovakav rezultat ne postoji u prostorvremenu s $\Lambda > 0$. Što se tiče intuicije oko oblika tenzora N_{ab} , koji predstavlja gravitacijske valove, iz smicanja možemo primijetiti da će, na primjer, komponenta N_{AA} biti različita od nule ukoliko konformalni faktor ima 'akceleraciju' u smjeru A , i analogno za ostale komponente. Kako su konformalni faktor i metrika usko vezani, konkretno $\tilde{\Omega}^{-2}\tilde{g}_{ab} = g_{ab}$ za svaku transformaciju faktora $\tilde{\Omega}$ i konačne metrike \tilde{g}_{ab} , nije neobično da će vodeći red ovakvih akceleracija biti stvaran kvadrupolnim momentom zračećih sustava, koji se propagira kao iskrivljenje kutnog dijela metrike u smjeru rasta koordinate u . Time imamo vezu s oblikom $\partial_u c_{AB}$.

3.2 De Sitterov prostor

De Sitterov prostor je maksimalno simetrično prostorvrijeme za $\Lambda > 0$. Da bismo objasnili značenje ove definicije, pogledajmo najprije što znači da je prostorvrijeme maksimalno simetrično. Pod simetrijom se misli na izometriju, odnosno simetriju metrike. Generatori izometrija, točnije vektori duž kojih možemo pomaknuti točke prostorvremena i dobiti istu metriku koju smo imali u svakoj pojedinoj točki, zovu se *Killingovi vektori*. Ovo pomicanje definira Liejevu derivaciju pa Killingov vektor X^a po definiciji zadovoljava

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = 0, \quad (3.16)$$

što je ekvivalentno jednadžbi

$$\nabla_{(a} X_{b)} = 0. \quad (3.17)$$

Maksimalno simetrični prostori su oni čija svaka točka je ekvivalentna, a tako i svaki smjer (pazeći na signaturu metrike), odnosno oni su homogeni i izotropni. Tada imamo maksimalan broj linearno nezavisnih Killingovih vektorskih polja. Za n -dimenzionalni prostor, to će biti n translacija i $\frac{1}{2}n(n-1)$ rotacija, odnosno Lorentzovih transformacija. Riemannov tenzor, uzevši njegove simetrije u obzir, u maksimalno simetričnom prostoru ima oblik

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (3.18)$$

U $4D$ prostorvremenu ($n = 4 = g^a_a$) imamo

$$R_{abcd} = \frac{R}{12}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R^c_{acb} = \frac{R}{12}(4g_{ab} - g_{ab}) \\ &= \frac{R}{4}g_{ab}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Einsteinova jednađžba

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (3.21)$$

za vakuum $T_{ab} = 0$ daje

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab}. \quad (3.22)$$

Uspoređujući dva rezultata za R_{ab} , vidimo da maksimalno simetrično $4D$ prazno prostorvrijeme ima Riccijev skalar

$$R = 4\Lambda. \quad (3.23)$$

U slučaju $\Lambda = 0$ ovo je ravan prostor Minkowskog. Za $\Lambda > 0$ dobivamo de Sitterov prostor, koji dakle ima svugdje jednaku pozitivnu zakrivljenost R .

Jedan zapis metrike de Sitterovom prostora dobivamo razmatranjem $4D$ hiperboloida u $5D$ ravnom prostoru, budući da takav objekt ima konstantnu skalarnu zakrivljenost. Metrika $5D$ prostorvremena Minkowskog dana je elementom linije

$$ds_5^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2. \quad (3.24)$$

Hiperboloid zadajemo kao skup točaka koje zadovoljavaju

$$-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = l^2 \quad (3.25)$$

s kozmološkim radijusom l . Možemo ga parametrizirati pomoću 4 koordinate $x^\mu = (\tau, \chi, x^A)$, gdje su zadnje dvije kutne koordinate $x^A = (\theta, \phi)$ s kutnim elementom

$$q_{AB}dx^A dx^B = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad (3.26)$$

kojeg bismo obično zvali $d\Omega^2$, no ovdje to izbjegavamo jer je Ω konformalni faktor.

Parametrizacija je zadana sa

$$\begin{aligned}
 t &= l \sinh(\tau/l) \\
 w &= l \cosh(\tau/l) \cos \chi \\
 z &= l \cosh(\tau/l) \sin \chi \cos \theta \\
 y &= l \cosh(\tau/l) \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\
 x &= l \cosh(\tau/l) \sin \chi \sin \theta \cos \phi.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Uvrštavajući u linijski element dobivamo

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh^2(\tau/l) (d\chi^2 + \sin^2 \chi q_{AB} dx^A dx^B), \tag{3.28}$$

gdje su domene τ i χ

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 \leq \chi \leq \pi. \tag{3.29}$$

Iz oblika metrike vidimo da je ovako definirani hiperboloid hipersfera S^3 koja evoluira u vremenu. Radijus joj se smanjuje do minimalnog iznosa, l , u trenutku $\tau = 0$ te se nakon toga povećava. Ovo je jedan način za opisati de Sitterov prostor koji proizlazi iz odabranih koordinata. No topologija same mnogostrukosti je neovisna o koordinatama pa očitavamo da je ona za de Sitterov prostor $\mathbb{R} \times S^3$.

Računanjem Riemannovog tenzora za gornju metriku lako se nalazi izraz za Riccijev skalar preko kozmološkog radijusa l ,

$$R = \frac{12}{l^2}, \tag{3.30}$$

a korištenjem (3.23) i za kozmološku konstantu

$$\Lambda = \frac{3}{l^2}. \tag{3.31}$$

Kako bismo dobili konformalni dijagram, kompaktificiramo vremensku koordinatu transformacijom

$$\cosh(\tau/l) = \frac{1}{\cos \tau'}. \tag{3.32}$$

Diferenciranjem ovog rezultata nalazimo transformirani $d\tau^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \sinh(\tau/l) d\tau &= \frac{\sin \tau'}{\cos^2 \tau'} d\tau' \\
d\tau^2 &= \frac{l^2}{\sinh^2(\tau/l)} \frac{\sin^2 \tau'}{\cos^4 \tau'} d\tau'^2 \\
&= \frac{l^2}{\cos^2 \tau'} \frac{\sin^2 \tau'}{(\cosh^2(\tau/l) - 1) \cos^2 \tau'} d\tau'^2 \\
&= \frac{l^2}{\cos^2 \tau'} \frac{1 - \cos^2 \tau'}{\left(\frac{1}{\cos^2 \tau'} - 1\right) \cos^2 \tau'} d\tau'^2 \\
&= \frac{l^2}{\cos^2 \tau'} d\tau'^2 = l^2 \cosh^2(\tau/l) d\tau'^2, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnja dva reda ponovo uvrstili samu transformaciju. Dobili smo isti faktor koji se nalazi ispred ostatka metrike pa za konformalni faktor biramo

$$\Omega(x) = \frac{\cos \tau'}{l} = \frac{1}{l \cosh \tau} \tag{3.34}$$

te za nefizikalnu metriku imamo

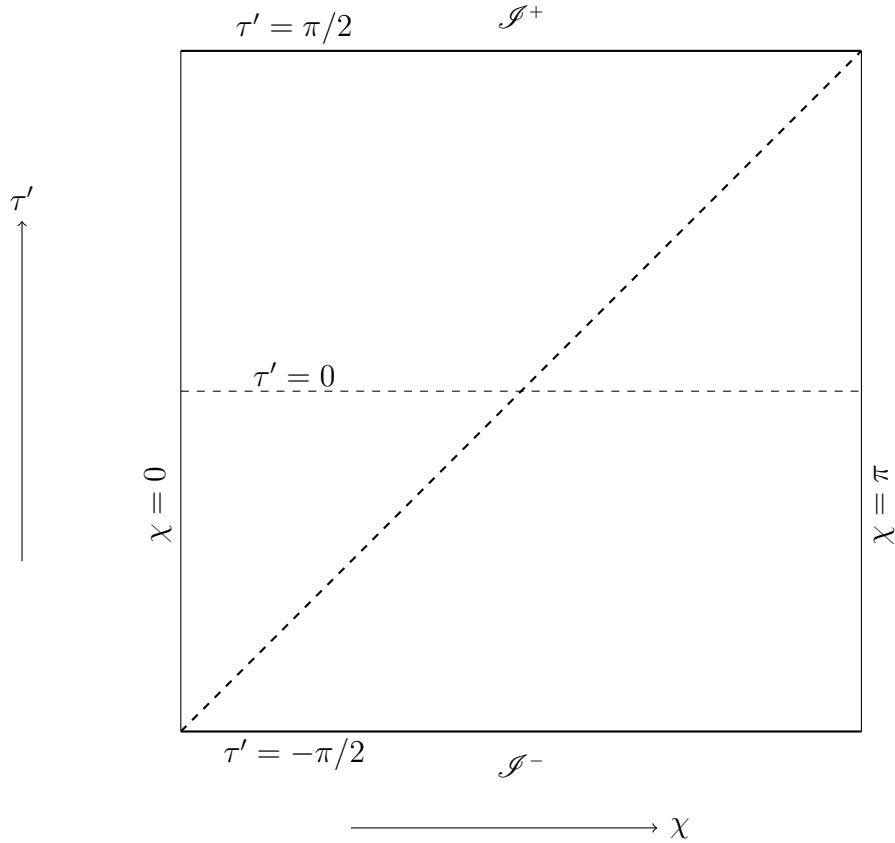
$$\begin{aligned}
d\hat{s}^2 &= \Omega^2 ds^2 \\
&= -d\tau'^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi q_{AB} dx^A dx^B \tag{3.35}
\end{aligned}$$

s domenama

$$-\frac{\pi}{2} < \tau' < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \chi \leq \pi. \tag{3.36}$$

Dodajući točke $\tau' = \pm \frac{\pi}{2}$ i potiskujući kutne koordinate x^A , dobivamo dijagram na slici (3.2).

Konformalni dijagram de Sitterovog prostora otkriva nam neke od ključnih razlika u odnosu na ravan prostor. Umjesto trokutnog, de Sitterov prostor ima kvadratni oblik dijagrama. Njegovi rubovi u prostornoj domeni (lijevi i desni rub) s obje strane dijagrama imaju topologiju linijskog segmenta. Točke ovih rubova predstavljaju pojedine točke prostorvremena. To je posljedica topologije $\mathbb{R} \times S^3$ de Sitterovog prostora – granične vrijednosti koordinate χ predstavljaju polove prostorne 3-sfere. S druge strane, točke konformalne beskonačnosti predstavljaju 2-sfere prostorvremena kao i kod ravnog prostora, s obzirom da za njih $\sin \chi$ nije jednak nula. No, za razliku od ravnog prostora, \mathcal{I}^+ i \mathcal{I}^- nisu svjetlosne hiperplohe, već prostorne. Kovektor



Slika 3.2: Konformalni dijagram de Sitterovog prostora. Točke dijagrama predstavljaju 2–sfere, osim onih na lijevoj i desnoj vertikalnoj liniji, za koje je $\sin \chi = 0$. Konformalna prošlost \mathcal{I}^- i budućnost \mathcal{I}^+ sada su prostorne hiperplohe topologije S^3 , za razliku od ravnog prostora gdje su bile svjetlone s topologijom $S^2 \times \mathbb{R}$. Kosa crtana linija označava kozmološki horizont. Događaji locirani u prostoru na $\chi = 0$ ne mogu kauzalno utjecati na desno-donju regiju prostorvremena, dok opažači u $\chi = \pi$ ne mogu detektirati događaje iz lijevo-gornje.

normale na njih,

$$n_a := \nabla_a \Omega, \quad (3.37)$$

svjetlosnog je tipa. Primijetimo također da je dijagram prostora Minkowskog imao svojstvo da za svake dvije točke možemo naći neki dio prostorvremena koji čini njihovu zajedničku kauzalnu prošlost i analogno za budućnost. U de Sitterovom prostoru možemo imati točke koje, na primjer, nemaju presjek budućih svjetlosnih stožaca. Opažači u tim točkama ne mogu poslati informacije jedan drugome, makar imaju beskonačno vremena (gornji rub dijagrama dodan je rukom, no samo fizikalno vrijeme nema gornju granicu). To je poznato svojstvo širećeg svemira – dovoljno udaljene točke udaljavaju se brže nego što svjetlost prelazi put između njih te su zauvijek kauzalno odvojene.

De Sitterov prostor samo je maksimalno simetrična, jednostavna verzija svemira

s pozitivnom kozmološkom konstantom. No struktura njegove beskonačnosti dobro opisuje i općenitije slučajeve, a tako i trenutni model našeg svemira. Mjerenja pokazuju da se svemir širi ubrzano te da je najbolji opis onaj s pozitivnom kozmološkom konstantom. Iako njegov početak nije pratio de Sitterov slučaj, evolucija svemira u budućnosti će, čini se, imati asimptotski de Sitterov opis.

3.2.1 Asimptotski de Sitterov prostor

Analogno slučaju ravnog prostora, želimo imati model koji dopušta materiju i energiju te nesimetričnost sadržaja svemira, dok globalno ima strukturu de Sitterovog prostora. Ključna je opet konformalna beskonačnost, no ovaj puta ona kakvu ima prostorvrijeme s pozitivnom kozmološkom konstantom. Slijedi definicija po Ashtekaru [4].

Definicija. Za prostorvrijeme (\mathcal{M}, g_{ab}) kažemo da je **slabo asimptotski de Sitterovo** ako postoji mnogostrukost $\widehat{\mathcal{M}}$ s rubom \mathcal{S} opremljena glatkom metrikom \hat{g}_{ab} (koja daje kovarijantnu derivaciju $\hat{\nabla}$) i konformalna izometrija u unutrašnjost od $\widehat{\mathcal{M}}$, $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{S}$ (kojom poistovjećujemo \mathcal{M} i $\Psi(\mathcal{M})$) s glatkim konformalnim faktorom $\Omega : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. $\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ na \mathcal{M} te vrijedi

- 1) $\Omega = 0$ na \mathcal{S} , dok je $n_a := \nabla_a \Omega$ nigdje iščezavajuća na \mathcal{S} ,
- 2) g_{ab} zadovoljava Einsteinovu jednadžbu s pozitivnom kozmološkom konstantom,

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}, \quad \Lambda > 0, \quad (3.38)$$

dok tenzor energije i impulsa trne u beskonačnost tako da $\Omega^{-1} T_{ab}$ ima glatki limes u \mathcal{S} .

Kažemo da je (\mathcal{M}, g_{ab}) **asimptotski de Sitterovo** ako također zadovoljava uvjet

- 3) \mathcal{S} je geodetski potpun s obzirom na \hat{g}_{ab} , odnosno geodezici u njemu se nastavljaju neprekinuto za proizvoljne vrijednosti svojih afinih parametara

te da je **snažno asimptotski de Sitterovo** ako je, uz sva tri gornja uvjeta,

- 4) u konformalnom upotpunjenju intrinzična metrika q_{ab} na \mathcal{S} konformalno ravna.

Intrinzična metrika inducirana je normalom n_a na hiperplohu \mathcal{S} ,

$$q_{ab} = \hat{g}_{ab} - \frac{1}{n^c n_c} n_a n_b, \quad (3.39)$$

što daje 3D metriku na \mathcal{I} . Budući da je kozmološka konstanta pozitivna, \mathcal{I} je prostornog tipa, a normala n_a vremenskog. Metrici stoga oduzimamo vremenske komponente u obliku člana $n_a n_b$, normiranog s $n^c n_c$, pa preostaju prostorne. Zbog ortogonalnosti, preostale komponente upravo su one koje opisuju metriku na promatranjoj plohi.

Topologija konformalne beskonačnosti \mathcal{I} daje klasifikaciju asimptotski de Sitterovih prostora. Držimo na umu da \mathcal{I} može predstavljati i prošlu i buduću beskonačnost \mathcal{I}^\pm .

U globalno asimptotski de Sitterovom prostoru \mathcal{I} je 3-sfera S^3 . Ovdje spada obični de Sitterov prostor.

Prostor je *asimptotski de Sitterov na Poincaréovom podskupu* ako je topologija \mathcal{I} jednostavno \mathbb{R}^3 , što je ekvivalentno 3-sferi bez jedne točke $S^3 \setminus \{p\}$. Standardna kozmologija koristi Friedmann-Lemaître prostor s upotpunjenjem ove topologije, gdje točka p predstavlja prostornu beskonačnost i^0 .

Asimptotski Schwarzschild-de Sitterov prostor ima za \mathcal{I} 3-sferu bez dvije točke $S^3 \setminus \{p_1, p_2\}$, ili ekvivalentno $S^2 \times \mathbb{R}$. Osim i^0 , ovdje imamo i prošlu, odnosno buduću vremensku beskonačnost i^\pm na \mathcal{I}^\pm . Ovaj je slučaj koristan za razmatranje sustava kao što su zvijezde ili crne rupe.

Odgovarajućom konformalnom transformacijom možemo prijeći iz klase s manje točaka odstranjenih iz S^3 u neku s više, ukoliko izaberemo konformalni faktor koji za te točke divergira. Također, možemo nastaviti odstranjivati točke i imati \mathcal{I} s topologijom $S^3 \setminus \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ gdje bi točke p_n osim beskonačnosti i^0 predstavljale kompaktne objekte u svemiru.

Četvrti uvjet iz definicije razmotrit ćemo nešto preciznije u sljedećem poglavlju. U opisu gravitacijskog zračenja koristit ćemo ponajprije asimptotski de Sitterov prostor, dok će se snažno asimptotski de Sitterov prostor pokazati kao prejako ograničenje.

4 Gravitacijski valovi u asimptotski de Sitterovom prostoru

Astrofizičkim opažanjima utvrđeno je da se svemir ubrzano širi. Najjednostavniji smislen model trenutno je mala pozitivna kozmološka konstanta te asimptotski de Sitterov prostor. Prelazak u ovaj slučaj iz asimptotski ravnog prostora nije trivijalan u kontekstu gravitacijskih valova. Ovo je jasno već i na nekim očitim posljedicama, kao što su pomak ka crvenom dijelu spektra za sve vrste zračenja zahvaljujući rastezanju prostora na kojem se valovi propagiraju, ili promjena strukture konformalne beskonačnosti na kojoj se asimptotski efekti analiziraju. Svejedno, očekivali bismo da za vrlo malu kozmološku konstantu fizika lokalnih fenomena nije pretjerano različita te da se u limesu $\Lambda \rightarrow 0$ svodi na ravan slučaj. Posljedično, novi efekti bi se trebali moći uzeti u obzir uz male promjene modela. No, detaljna analiza pokazuje da se javljaju suptilni problemi koji uopće nisu trivijalni. Linearizirana teorija očekivano daje nove članove u jednadžbama, ali matematički potpuna obrada gravitacijskog zračenja u punoj nelinearnoj teoriji, kakvu smo imali u $\Lambda = 0$ slučaju, još nije postignuta.

U ovom poglavlju najprije ćemo pogledati na koje probleme nailazimo i zašto, a zatim ćemo razmotriti lineariziranu teoriju i modifikacije koje kozmološka konstanta uvodi te njihovo ponašanje za limes kada je ona mala.

4.1 Asimptopija i puna nelinearna teorija

Započinjemo analizom strukture konformalne beskonačnosti asimptotski de Sitterovog prostora. Einsteinova jednadžba

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab} \quad (4.1)$$

može se izraziti u terminima reskalirane metrike \hat{g}_{ab} i njenog tenzora zakrivljenosti \hat{R}_{abcd} uvrštavajući relaciju $\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$. Rezultat je [4]

$$\hat{R}_{ab} - \frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{ab} + 2\Omega^{-1}(\nabla_a n_b - \hat{g}_{ab}\nabla_c n^c) + 3\Omega^{-2}\hat{g}_{ab}n^c n_c + \Omega^{-2}\Lambda\hat{g}_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad (4.2)$$

uz $n_a = \nabla_a \Omega$ kao i u definiciji. Ovu jednadžbu možemo pomnožiti s Ω^2 i izvrijedniti je na \mathcal{S} , gdje po definiciji vrijedi $\Omega = 0$. Preostaje relacija za n_a ,

$$\begin{aligned} 3\hat{g}_{ab}n^c n_c &\hat{=} -\Lambda\hat{g}_{ab} \\ n^c n_c &\hat{=} -\frac{\Lambda}{3} = -\frac{1}{l^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdje po uzoru na Ashtekara [4] koristimo $\hat{=}$ za jednakost na \mathcal{S} . U posljednjoj jednakosti upotrijebili smo pokratu (3.31). Kao derivacija konformalnog faktora koji je konstantan na hiperplohi \mathcal{S} , n_a predstavlja normalu na nju. Vidimo, dakle, da je normala na konformalnu beskonačnost vremenskog tipa za $\Lambda > 0$ te je njena duljina jednaka inverzu kozmološkog radijusa. U limesu $l \rightarrow \infty$, odnosno $\Lambda \rightarrow 0$, normala doista postaje svjetlosnog tipa, kao što bi i trebala biti u ravnom prostoru. No, dok god imamo $\Lambda > 0$, konformalna beskonačnost \mathcal{S} bit će prostornog tipa. Nedostatak mogućnosti definiranja vremenske derivacije duž \mathcal{S} jedan je od problema koji onemogućuju zadržavanje Bondi-Sachsovog formalizma.

Sloboda u izboru konformalnog faktora Ω obično se koristi za fiksiranje $\nabla_a n^a \hat{=} 0$. Dio jednadžbe (4.2) uz Ω^{-1} govori da je tada i $\nabla_a n_b \hat{=} 0$, što je korisno u računima. Sloboda koja preostaje dana je transformacijama oblika $\Omega' = \omega\Omega$ za funkcije ω koje nemaju derivaciju okomitu na \mathcal{S} , to jest $n^a \nabla_a \omega \hat{=} 0$.

U analizi zakrivljenosti možemo se poslužiti rastavom Riemannovog tenzora \hat{R}_{abcd} na Weylov tenzor \hat{C}_{abcd} i Schoutenov tenzor \hat{S}_{ab} ,

$$\hat{R}_{abcd} = \hat{C}_{abcd} + g_{a[c}\hat{S}_{d]b} - g_{b[c}\hat{S}_{d]a}. \quad (4.4)$$

Weylov tenzor je bestražni dio Riemannovog tenzora i sadrži informacije o deformaciji metrike, dok cijeli Riemannov tenzor uz to sadrži i informacije o skaliranju, odnosno promjeni “volumena” metrike. One su pohranjene u Schoutenovom tenzoru, koji je dan izrazom

$$\hat{S}_{ab} := \hat{R}_{ab} - \frac{\hat{R}}{6}\hat{g}_{ab}. \quad (4.5)$$

Gravitacijski valovi su deformacije pa će biti sadržani u Weylovom tenzoru. Ashtekar i ostali [4] pokazali su koristeći gornji izbor konformalnog faktora da Einsteinova jednadžba daje

$$\hat{C}_{abcd}n^d \hat{=} 0. \quad (4.6)$$

Budući da je hiperploha \mathcal{S} prostorna, Weylov tenzor je zbog bestražnosti i simetrija naslijeđenih od Riemannovog tenzora u potpunosti definiran komponentama

$$\hat{E}_{ac} := l^2 \hat{C}_{abcd} n^b n^d, \quad \hat{B}_{ac} := \frac{1}{2} l^2 \epsilon_{abef} \hat{C}^{be}_{cd} n^f n^d, \quad (4.7)$$

koje se nazivaju električna i magnetska komponenta, po analogiji s elektrodinamikom. Napomenimo da podizanje i spuštanje indeksa radimo konformalnom metrikom \hat{g}_{ab} za koje su ovi tenzori definirani. Kako je $\hat{C}_{abcd} n^d \hat{=} 0$, obje ove komponente iščezavaju na \mathcal{S} . Stoga cijeli Weylov tenzor iščezava na konformalnoj beskonačnosti,

$$\hat{C}_{abcd} \hat{=} 0. \quad (4.8)$$

U sljedećem redu, doduše, i dalje možemo imati neiščezavajuću Weylovu zakrivljenost $K_{abcd} := \Omega^{-1} \hat{C}_{abcd}$. Ovo ima smisla, budući da u beskonačnosti očekujemo da gravitacijski poremećaji asimptotski padaju prema nuli. Sama metrika q_{ab} na hiperplohi \mathcal{S} i dalje ne mora biti konformalno ravna.

Pogledajmo što implicira zahtjev da ona ipak bude ravna, odnosno definicija *strogo* asimptotski de Sitterovog prostora. Konformalna ravnost metrike ekvivalentna je iščezavanju Bachovog tenzora

$$B_{abc} := D_{[a} \left(\mathcal{R}_{b]c} - \frac{1}{4} q_{b]c} \mathcal{R} \right) \quad (4.9)$$

za Riccijev tenzor \mathcal{R}_{ab} i kovarijantnu derivaciju D_a dobivene iz metrike u pitanju (ovdje q_{ab}). Kako ekstrinzična zakrivljenost hiperplohe \mathcal{S} iščezava uslijed odabira konformalnog sustava s $\nabla_a n_b \hat{=} 0$, Riemannov tenzor na \mathcal{S} može se zapisati projekcijom

$$\mathcal{R}_{abcd} = q_a^k q_b^l q_c^m q_d^n R_{klmn}. \quad (4.10)$$

Koristeći rastav (4.4), može se pokazati [4] da je Bachov tenzor dan s

$$B_{abc} \hat{=} -\frac{1}{2} q_a^m q_b^n q_c^l K_{mnlp} n^p. \quad (4.11)$$

Analogno nultom redu Weylovog tenzora, K_{abcd} je također opisan svojim električnim

i magnetskim komponentama

$$\mathcal{E}_{ac} := l^2 K_{abcd} n^b n^d, \quad \mathcal{B}_{ac} := \frac{1}{2} l^2 \epsilon_{abef} K^{be}{}_{cd} n^f n^d. \quad (4.12)$$

U izrazu (4.11) vidimo da je električna komponenta \mathcal{E}_{ab} ortogonalna Bachovom tenzoru, dok mu je magnetska komponenta \mathcal{B}_{ab} (u kojoj $\epsilon_{abef} n^f$ odabire komponente ortogonalne s n^f , što upravo rade i metrike $q_a{}^m q_b{}^n q_c{}^l$ u (4.11)) proporcionalna. Zaključujemo da Bachov tenzor iščezava ako i samo ako B_{ab} iščezava. Drugim riječima, konformalna ravnost metrike q_{ab} ekvivalentna je iščezavanju magnetskog dijela Weylove zakrivljenosti u prvom redu asimptotskog razvoja. Ovo predstavlja drastično i nefizikalno ograničenje skupa mogućih rješenja za zračenje, dok je uvjet konformalne ravnosti privlačan iz razloga koje ćemo uskoro razjasniti.

Još jedan rezultat koji slijedi [4] iz Einsteinove jednadžbe je ograničenje komponenti asimptotskog tenzora energije i impulsa, $\Omega^{-1} T_{ab}$:

$$\begin{aligned} \lim_{\rightarrow \mathcal{I}} \Omega^{-1} T_{ab} n^a q_c{}^b &\hat{=} 0, \\ \lim_{\rightarrow \mathcal{I}} \Omega^{-1} T_{ab} q_c{}^a q_d{}^b &\hat{=} 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Definicija asimptotski de Sitterovog prostora kaže samo da T_{ab} mora imati glatki limes u \mathcal{I} . No, iz ovih ograničenja vidimo da neke od komponenti iščezavaju. Kako komponente q_{ab} i n_a zajedno čine cijeli skup koordinata (q_{ab} je 3D metrika, a n_a je ortogonalan na njenu hiperplohu), preostaje samo komponenta $\Omega^{-1} T_{ab} n^a n^b$.

4.1.1 Asimptotske simetrije

Sljedeći alat koji valja razmotriti su simetrije konformalne beskonačnosti. Ovdje nećemo ulaziti u detalje računa, budući da bi to zahtijevalo velike digresije s ograničenim doprinosima razumijevanju. Sumiramo rezultate dosadašnjih istraživanja prema [4].

Grupa asimptotske simetrije je skup difeomorfizama, odnosno glatkih preslikavanja $(\mathcal{M}, g_{ab}) \mapsto (\mathcal{M}', g'_{ab})$, koji čuvaju rubne uvjete. Rubne uvjete čini struktura konformalne beskonačnosti \mathcal{I} , uključujući metriku i njenu zakrivljenost.

U slučaju asimptotski ravnih prostora, \mathcal{I} je svjetlosnog tipa, kao i normala n_a . Normala je stoga ujedno i tangentna na \mathcal{I} ($n^a n_a \hat{=} 0$), što čini intrinzičnu metriku q_{ab}

degeneriranom. Njena signatura je $(0, +, +)$. Drugim riječima, metrika q_{ab} ekvivalentna je h_{AB} , kutnom dijelu iz Bondi-Sachsovog formalizma, ovisnom o vremenskoj koordinati. Diferencijal same vremenske koordinate ne ulazi u metriku. Sjetimo se, derivacija prvog reda asimptotske perturbacije ove metrike upravo je Bondijev tenzor novosti N_{AB} . Topologija hiperplohe \mathcal{S} je $S^2 \times \mathbb{R}$ te je rubni uvjet dan parom polja (q_{ab}, n_a) na njoj. Polje n_a je potpuno (afini parametar poprima sve vrijednosti iz \mathbb{R}) i prirodno generira geodezike duž \mathbb{R} s konstantnim položajem na S^2 . Polje q_{ab} ima gornju signaturu te zadovoljava $q_{ab}n^b \hat{=} 0$ i $\mathcal{L}_n q_{ab} \hat{=} 0$, dok su dva različita rubna uvjeta vezana transformacijom $q'_{ab} \hat{=} \omega^2 q_{ab}$, $n'^a \hat{=} \omega^{-1} n^a$, $\mathcal{L}_n \omega \hat{=} 0$. Sva ova svojstva slijede iz definicije asimptotski ravnog prostora. Posljedično, svaki q_{ab} je konformalno transformirana metrika jedinične sfere. Grupa koja čuva ove rubne uvjete je BMS (Bondi-Metzner-Sachs) grupa. Ona je beskonačno-dimenzionalna, no znatno manja od grupe svih difeomorfizama $\text{Diff}(\mathcal{S})$. Također sadrži normalnu 4-dimenzionalnu podgrupu translacija. Ova struktura omogućava definiranje BMS naboja, odnosno gravitacijskih momenata koji izlaze preko \mathcal{S} , koristeći generatore simetrija. Ovi momenti svi iščezavaju kada je Bondijev tenzor novosti jednak nuli, $N_{ab} = 0$, dok inače mogu biti različiti od nule.

Prijelazom u $\Lambda > 0$ slučaj dobivamo asimptotski de Sitterov prostor s prostornom konformalnom beskonačnošću \mathcal{S} . Neovisno o njegovoj topologiji (vidjeli smo nekoliko mogućnosti u analizi definicije), \mathcal{S} ima vremensku normalu n_a . Ona mu stoga više nije tangentna. Time se gube prirodno generirani geodezici, kao i degenerirana struktura metrike q_{ab} , koja sada ima signaturu $(+, +, +)$ i nije nužno konformalno vezana uz jediničnu metriku sfere S^3 . Također nema preferiranih translacijskih niti rotacijskih podgrupa. Grupa asimptotskih simetrija jednostavno je cijeli $\text{Diff}(\mathcal{S})$. Stoga ne postoji način za definiranje naboja i momenata koji bi opisivali zračenje energije ili impulsa u beskonačnost. Ovo je problem u teoriji gravitacijskih valova, budući da za $\Lambda = 0$ slučaj imamo geometrijsku strukturu koja je omogućila vrlo jasno i uspješno definiranje veličina u modelu koji se slaže s opažanjima, a raspada se čim je $\Lambda > 0$, makar je različita od nule za proizvoljno mali iznos.

Pogledajmo što se mijenja kada unesemo uvjet strogo asimptotski de Sitterovog prostora. Zahtijevamo da metrika q_{ab} bude konformalno ravna. To znači da od svih mogućih difeomorfizama preostaju samo oni koji transformiraju q_{ab} konformalnom izometrijom. Ovo reducira grupu simetrija $\text{Diff}(\mathcal{S})$ na 10-dimenzionalnu grupu poz-

natu kao *de Sitterova grupa*, $G_{dS} := \text{SO}(1, 4)$. Generatori ove grupe prirodno odgovaraju generatorima Poincaréove grupe te omogućuju definiranje de Sitterovih naboja za translacijske i Lorentzove stupnjeve slobode. No, ovi naboji su očuvani apsolutno te njihovi momenti iščezavaju. Dokaz [4] se temelji na strukturi grupe simetrija koju sada iscrpljuje dotičnih 10 generatora te na ograničenju komponenti tenzora energije i impulsa (4.13). Iščezavanje de Sitterovih momenata implicira da nema prijenosa energije i impulsa preko konformalne beskonačnosti, odnosno da gravitacijski valovi ne odnose energiju.

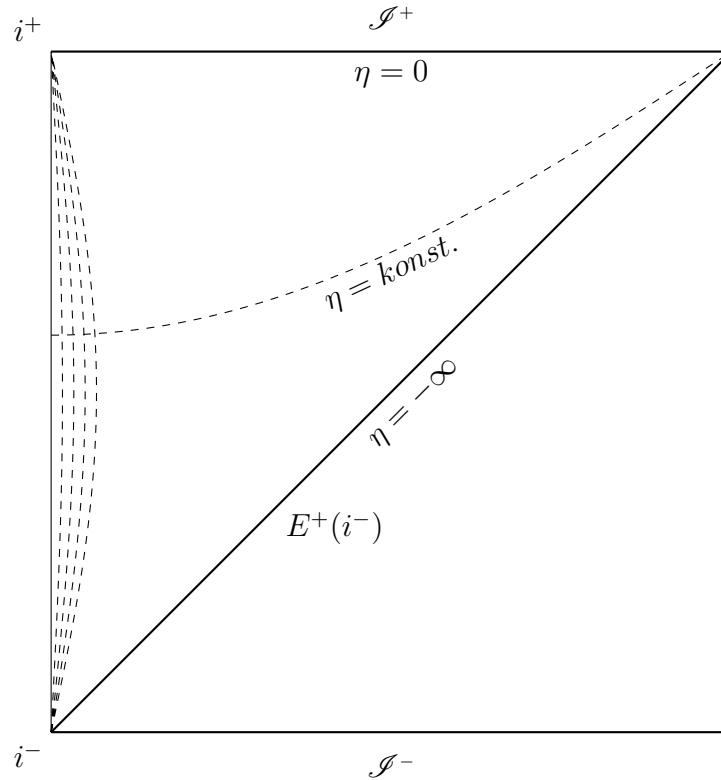
Uvjet konformalno ravne metrike q_{ab} , kao što smo vidjeli, ekvivalentan je iščezavanju magnetskog dijela \mathcal{B}_{ab} asimptotske Weylove zakrivljenosti. Električni dio \mathcal{E}_{ab} i dalje može postojati, samo ne može odnositi energiju i impuls. U $\Lambda = 0$ slučaju, situacija je drugačija. Svjetlosni tip beskonačnosti \mathcal{I} daje strukturu grupnih transformacija zbog koje je sva informacija o Riemannovoj zakrivljenosti sadržana u tenzorima \mathcal{B}_{ab} i N_{ab} . U Bondijevom konformalnom sustavu, tenzor novosti N_{ab} je transverzalan i bestražan, dok je \mathcal{B}_{ab} proporcionalan njegovoj derivaciji. Kada nametnemo uvjet $\mathcal{B}_{ab} = 0$, oba dijela iščezavaju [4]. Stoga, u asimptotski ravnom prostoru uopće nema gravitacijskog zračenja u beskonačnosti u slučaju $\mathcal{B}_{ab} = 0$.

Sve u svemu, strogo asimptotski de Sitterovi prostori korisni su zbog mogućnosti definiranja de Sitterovih naboja i zbog unaprijeđenja asimptotske grupne strukture. S druge strane, fizikalno gledajući su prestrogo ograničenje, budući da ne dopuštaju gravitacijske valove s energijom i impulsom. Smislen fizikalni model, za razliku od $\Lambda = 0$ slučaja, još nije definiran te predstavlja otvoreno pitanje.

4.2 *Linearizirana gravitacija s pozitivnom kozmološkom konstantom*

Za analizu valova u asimptotski de Sitterovom prostoru pogodno je izabrati koordinatni sustav koji pokriva samo budući Poincaréov podskup (*eng. Poincaré patch*) prostorvremena. Ako se u prostornom području uz lijevi rub dijagrama nalazi izvor zračenja, njegovi valovi nalaze se u gornje-lijevoj polovici dijagrama. Ostatak dijagrama kauzalno je nepovezan s izvorom, promatrači čije svjetske linije su sadržane u donje-desnoj polovici ne mogu opaziti izvor. Stoga možemo promatrati samo prvu polovicu. Njen rub čini svjetlosna budućnost $E^+(i^-)$ točke i^- koja predstavlja konfor-

malnu prošlost izvora. $E^+(i^-)$ zovemo kozmološki horizont. Promatrani gornji trokut je Poincaréov podskup prostorvremena. U razmatranju gravitacijskog zračenja, uvjet da nema nadolazećih valova iz prošlosti \mathcal{I}^- možemo nametnuti i na plohi $E^+(i^-)$.



Slika 4.1: Konformalni dijagram asimptotski de Sitterovog prostora s izvorom zračenja uz lijevi rub označenim iscrtkanim linijama. Naznačena je i vremenska koordinata η i njevo ponašanje na Poincaréovom podskupu (gornji trokut). Kozmološki horizont $E^+(i^-)$ čini rub kauzalne budućnosti izvora te od njega počinje domena koordinate η .

Koristimo koordinate (η, x, y, z) , gdje η poprima vrijednosti $-\infty < \eta < 0$ na Poincaréovom podskupu. Metrika samog de Sitterovog prostora \bar{g}_{ab} u ovim koordinatama može se izraziti kao ravna metrika pomnožena faktorom a^2 ovisnim o vremenu,

$$\bar{g}_{ab}dx^a dx^b = \left(\frac{l}{\eta}\right)^2 (-d\eta^2 + d\vec{x}^2) =: a^2(\eta)\mathring{g}_{ab}dx^a dx^b, \quad (4.14)$$

gdje je l kozmološki radijus kao i u prethodnim poglavljima. Ovdje vidimo njegovu vezu s Hubbleovim parametrom H koji se definira za ovakav oblik metrike, $H = l^{-1} = \sqrt{\Lambda/3}$. Zbog kolizije s nazivom koordinate η , ravnu metriku u ovom poglavlju označavat ćemo s \mathring{g}_{ab} .

Za proučavanje limesa $\Lambda \rightarrow 0$, s druge strane, korisnije je fizikalno vrijeme t .

Vrijeme t i metrika u njegovom koordinatnom sustavu dani su relacijama

$$\frac{\eta}{l} = -e^{-t/l},$$

$$\bar{g}_{ab} dx^a dx^b = -dt^2 + e^{2t/l} d\vec{x}^2. \quad (4.15)$$

S obzirom da je $l^{-1} = \sqrt{\Lambda/3}$, metrika \bar{g}_{ab} očito teži u ravnu metriku $\overset{\circ}{g}_{ab}$ za $\Lambda \rightarrow 0$.

Sada možemo općenitu asimptotski de Sitterovu metriku g_{ab} , daleko od gravitirajućih izvora, linearizirati oko \bar{g}_{ab} , kao što smo u asimptotski ravnom prostoru linearizirali oko $\overset{\circ}{g}_{ab}$,

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} + \gamma_{ab}, \quad (4.16)$$

za malu perturbaciju γ_{ab} . Ponovo dolazimo do baždarne slobode - ako postoji jedan, postoji (neprebrojivo) mnogo koordinatnih sustava u kojima je ukupna metrika jednaka pozadinskoj (sada de Sitterovoj), definiranoj za taj sustav, s malom perturbacijom. Fizikalna ekvivalentnost ovih opisa daje baždarnu slobodu u izboru tenzora perturbacije. Tu slobodu i ovdje možemo iscrpiti transverzalnim bestražnim (i čisto prostornim) baždarenjem,

$$\eta^a \gamma_{ab} = 0,$$

$$\bar{g}^{ab} \gamma_{ab} = 0, \quad (4.17)$$

$$\bar{\nabla}_a \gamma^{ab} = 0.$$

Vektor η^a jednostavno je derivacija po koordinati η , $\eta^a \partial_a = \partial_\eta$. Derivacije dobivene metrikom \bar{g}_{ab} također zapisujemo s povlakom: $\bar{\nabla}_a, \bar{\square}$. Einsteinova jednadžba u vakuumu daje dodatan član u odnosu na $\Lambda = 0$ slučaj isključivo zbog kozmološke konstante u samoj jednadžbi, odnosno struktura dijagrama i koordinatnih sustava ovdje ne igra ulogu. Rezultat [5] je

$$\bar{\square} \gamma_{ab} - \frac{2}{3} \Lambda \gamma_{ab} = 0. \quad (4.18)$$

Vidimo da se u limesu $\Lambda \rightarrow 0$ osnovna jednadžba linearizirane teorije svodi na $\Lambda = 0$ slučaj. Ovo je znatno bolja situacija nego kod pune nelinearne teorije. Računi su

jednostavniji ako se perturbacija izrazi kao odstupanje od ravne metrike u (4.14),

$$\bar{g}_{ab} = a^2(\eta)(\dot{g}_{ab} + h_{ab}). \quad (4.19)$$

Baždarni uvjeti za h_{ab} zadaju se ravnom metrikom,

$$\begin{aligned} \eta^a h_{ab} &= 0, \\ \dot{g}^{ab} h_{ab} &= 0, \\ \dot{\nabla}_a h^{ab} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Zbog toga te zbog različite ovisnosti pozadinske metrike o vremenskoj koordinati, Einsteinova jednadžba za h_{ab} izgleda nešto drugačije,

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{\circ}{\square} h_{ab} - 2 \frac{a'}{a} h'_{ab} \\ &= \overset{\circ}{\square} h_{ab} + \frac{2}{\eta} h'_{ab}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ovdje jednadžba gubi ovisnost o Λ , koja je pohranjena u evoluciji prave pozadinske metrike u odnosu na ravnu. Crtane veličine su derivacije po η , $h'_{ab} := \eta^c \overset{\circ}{\nabla}_c h_{ab} = \partial_\eta h_{ab}$. Baždarni uvjeti identični su uvjetima (2.50) u $\Lambda = 0$ analizi. Napomenimo da su kovariantne derivacije za ravnu metriku $\overset{\circ}{\nabla}_a$ jednake su koordinatnima.

Ponovo, dakle, dobivamo valnu jednadžbu za propagaciju gravitacijskog zračenja, samo sada imamo dodatan mali član koji djeluje kao smetnja glavnom obliku vala. Sam učinak vala na prostorvrijeme i na materiju bit će isti kao za ravan pozadinski prostor, budući da je analiza vektora separacije neovisna o Λ , osim što će sam val imati drugačiji oblik. Rješenja se obično zapisuju u obliku Fourierovog transformata, ograničavajući se na realan dio,

$$h_{ab}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 h_{\vec{k}}^{(s)}(\eta) \epsilon_{ab}^{(s)}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (4.22)$$

s polarizacijskim tenzorima $\epsilon_{ab}^{(s)}$ za dvije kružne polarizacije s . Uvrštavanjem u (4.21), dobiva se [5] diferencijalna jednadžba za koeficijente $h_{\vec{k}}^{(s)}(\eta)$,

$$(h_{\vec{k}}^{(s)})'' - \frac{2}{\eta} (h_{\vec{k}}^{(s)})' + k^2 h_{\vec{k}}^{(s)} = 0, \quad (4.23)$$

s rješenjem

$$h_{\vec{k}}^{(s)}(\eta) = -\frac{2}{l} \left[E_{\vec{k}}^{(s)}(\eta \cos(k\eta) - k^{-1} \sin(k\eta)) - B_{\vec{k}}^{(s)}(\eta \sin(k\eta) + k^{-1} \cos(k\eta)) \right]. \quad (4.24)$$

Analiza Weylove zakrivljenosti pokazuje [5] da koeficijenti $E_{\vec{k}}^{(s)}$ direktno određuju električni dio \mathcal{E}_{ab} asimptotskog Weylovog tenzora na \mathcal{I}^+ , a koeficijenti $B_{\vec{k}}^{(s)}$ magnetski dio \mathcal{B}_{ab} . Zahtjev konformalne ravnosti, ekvivalentan uvjetu $\mathcal{B}_{ab} = 0$, implicira dakle $B_{\vec{k}}^{(s)}|_{\eta=0} = 0$ te ostavlja samo prvu polovicu rješenja. Možemo zaključiti da valovi uz $E_{\vec{k}}^{(s)}$ ne odnose energiju u beskonačnost.

Ovime dolazimo do kraja razmatranja osnova teorije gravitacijskih valova. Sam formalizam nastavlja se u širinu i u dubinu. Neki od bitnijih rezultata su konkretno definiranje integrala za de Sitterove Killingove vektore i naboje, kao i simetrija i naboja BMS grupe za asimptotski ravne prostore. Promatranjem tenzora energije i impulsa te Greenovih funkcija za diferencijalnu jednadžbu gravitacijskih valova, dolazi se i do kvadrupolne formule za $\Lambda > 0$ [6]. Zanimljivu analizu pruža hamiltonijanski pristup, koji omogućava definiranje momenata i energije u lineariziranoj teoriji [5]. Također postoje obrade u više koordinatnih sustava na asimptotski de Sitterovom prostoru, pokazujući da se rezultati poklapaju i kada ne gledamo samo Poincaréov podskup prostora.

Za kraj, navedimo neke od ključnih modifikacija koje kozmološka konstanta uvodi u lineariziranu teoriju. Više se može naći u članku [6]. Kao prvo, valna jednadžba ima član efektivne mase. On je vrlo malen, no nakupljanjem na putu do beskonačnosti može stvoriti signifikantne promjene.

Nadalje, propagacija retardiranog polja nije cijela sadržana u oplošju svjetlosnog stošca, odnosno postoji dio koji se propagira sporije od svjetlosti. Ovo dodaje mali član koji se treba integrirati po cijeloj unutrašnjosti stošca te može stvarati bitne razlike.

Beskonačnost \mathcal{I} više nije karakterizirana limesom koordinate r u beskonačnost pa se ne može koristiti razvoj u r^{-1} kao za $\Lambda = 0$.

U formuli za retardiranu perturbaciju metrike uzrokovanu izvorom, osim treće vremenske derivacije kvadrupolnog momenta mase kojeg smo imali i prije, javljaju se

i članovi nižih derivacija. Također se javljaju članovi kvadrupolnog momenta pritiska, a ne samo mase.

Valne duljine perturbacija metrike eksponencijalno rastu tijekom perturbacije. U asimptotskom režimu postaju i znatno veće od kozmološkog radijusa l . Ovaj efekt pomaka ka crvenom direktna je posljedica širenja prostorvremena.

Prostorni tip beskonačnosti \mathcal{S}^+ omogućava da u njenoj blizini valovi nose negativne energije, iako ih kvadrupolni izvori ne mogu stvarati.

Za uklanjanje problema među ovim rezultatima, potrebna je potpunija teorija. Sve u svemu, gravitacijski valovi su dobro poznat efekt, s jasnim osnovnim modifikacijama i u širećem svemiru, no suptilna problematika i matematička nepotpunost predstavljaju izazov za modernu teorijsku fiziku.

5 Zaključak

Einstein je pokazao da je gravitacija posljedica zakrivljenosti prostorvremena koje stvaraju energija i impuls. Ta je zakrivljenost efekt koji se širi brzinom svjetlosti. Izvori gravitacije promjenjivog kvadrupolnog momenta, vidjeli smo, stvaraju perturbaciju zakrivljenosti koja odnosi energiju te sporo trne u beskonačnosti. Ovaj je fenomen omogućen činjenicom da je gravitacijsko polje upravo zakrivljenost samog prostorvremena u kojemu se propagira. Rezultat su valna rješenja za perturbaciju metrike. Dovoljno masivni sustavi rotirajućih objekata u svemiru mogu nadjačati činjenicu da je gravitacijsko zračenje ekstremno slab efekt i poslati valove koje možemo detektirati na Zemlji. Njihova je fizikalna posljedica osciliranje udaljenosti između međusobno mirujućih točaka prostora, koje se može izmjeriti laserskim interferometrima.

Povijest istraživanja gravitacijskih valova sadrži dug period poznavanja samo linearizirane teorije. Einsteinova je jednadžba nelinearna, što ju čini teškom za riješiti, a ideja malih perturbacija čini linearizaciju još prirodnijom. No, tako dobiveni rezultati bili su upitni u punoj teoriji. Ovo je riješio Bondi-Sachsov formalizam promatranjem asimptotske strukture prostorvremena. Na njoj možemo definirati geometrijske objekte koji potvrđuju da Einsteinova puna teorija podržava valna rješenja koja odnose energiju u beskonačnost.

No, nakon proučavanja ovih metoda, došli smo do modernijeg pitanja. Konkretno, budući da opažanja upućuju na ubrzano širenje svemira i pozitivnu kozmološku konstantu, potrebna je teorija gravitacijskog zračenja za $\Lambda > 0$. Iako postoji linearizirana teorija, s očekivanim preinakama, struktura konformalne beskonačnosti de Sitterovog prostora donosi značajne probleme u kontekstu pune teorije.

Vidjeli smo, na primjer, da nametanjem uvjeta konformalne ravnosti možemo dobiti model koji podržava smislenu grupu simetrija s fizikalnim nabojima i momentima. No, ispada da takvo ograničenje zabranjuje gravitacijske valove koji odnose energiju, iako valove općenito dopušta. Na prvu bismo se mogli zapitati je li to stvarna posljedica širenja svemira. Možda valovi ne mogu stići udaljiti se od svog izvora, ili zbog samog efekta širenja vraćaju energiju izvoru. Moramo držati na umu da ukoliko smo uračunali efekt širenja svemira, energija i dalje mora biti očuvana. Stoga je valovi ne mogu jednostavno izgubiti. Konformalna beskonačnost \mathcal{I}^+ je za $\Lambda > 0$ u

budućnosti svake točke, odnosno ako se energija valova rasporedi po prostoru, i dalje će stići u \mathcal{I}^+ i doprinijeti energiji zračenja. Činjenica da je ovo zabranjeno uvjetom modela znači da u njemu izvori zračenja ne mogu izgubiti energiju u beskonačnost. To je velik problem, budući da valovi koje opažamo predaju energiju našim mjernim uređajima, a putovali su ekstremno velike udaljenosti od svojih izvora. Ideja da bi se u nekom trenutku energija morala vratiti čini se apsurdna. Jedan konkretniji primjer su sudaranja crnih rupa, za koja su (za $\Lambda = 0$) dobro poznati energija i momenti koji se izrače u beskonačnost. Za kompenzaciju ovog gubitka, događa se ubrzanje gibanja rezultatne crne rupe (tzv. *black hole kick*). Ovaj efekt dobro je proučavan eksperimentalno te baca veliku sumnju na bilo kakav model bez zračenja energije.

S druge strane, bez nametanja ovakvog uvjeta nemamo nikakvih alata za definiranje fizikalnog gravitacijskog zračenja na konformalnoj beskonačnosti, niti drugih rezultata u punoj teoriji. Drugim riječima, zadovoljavajući teorijski model trenutno ne postoji. Da nemamo eksperimentalna opažanja, bili bismo u istoj poziciji neznanja kao s $\Lambda = 0$ teorijom prije Bondi-Sachsovog formalizma. Ovo, dakle, čini otvoreno pitanje gravitacijske fizike.

Linearizirana teorija daje još neke uvide u problematiku. Za osnovne rezultate može se vidjeti da doprinose malim članovima koji teže u nulu s kozmološkom konstantom. No, javljaju se i efekti za koje to nije slučaj. Bolja teorija potrebna je i za potvrdu ovih rezultata.

Dodaci

Dodatak A Spinori

Spinori su u osnovi kompleksni vektori s antisimetričnim produktom. Njihova korist dolazi iz toga što vrlo male gradivne jedinice koje je lako proučavati, 2D spinori, na jednostavan i matematički rigorozan način tvore vektore i tenzore viših dimenzija i rangova, čija razna svojstva možemo dobiti na vrlo praktičan način preko osnovnih jedinica. Među tim svojstvima su kovarijantne derivacije, inercijalni koordinatni sustavi, baze svjetlosnih vektora, dekompozicije tenzora, klasifikacije objekata, jednadžbe polja proizvoljnog spina itd. Krenimo od formalne definicije.

Definicija. *Simplektička linearna struktura* na parno-dimenzionalnom vektorskom prostoru S je nedegenerirana bilinearna antisimetrična 2-forma. Djelovanje ove forme na par vektora $\xi, \eta \in S$ također se naziva *anti-skalarni produkt* i označava se $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$. (Nedegeneriranost znači da je $[\xi, \eta] = 0$ za sve η samo kada je $\xi = 0$.) Prostor S s ovom strukturom naziva se *simplektički vektorski prostor*, a njegove elemente zovemo *spinori*.

Prva zanimljivost koju možemo uočiti je da su u simplektičkom prostoru svi vektori ortogonalni sami sebi

$$[\xi, \xi] = -[\xi, \xi] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Ako se ograničimo na 2-dimenzionalni kompleksni simplektički prostor (u daljnjem tekstu S), kojeg razapinju dva kompleksna vektora (spinora), nedegeneriranost i linearnost simplektičkog produkta impliciraju da je skup vektora ortogonalnih nekom izabranom ξ upravo skup svih vektora proporcionalnih ξ .

Sljedeći je korak definiranje izomorfizma s dualnim prostorom S^* , odnosno prostorom svih linearnih preslikavanja $S \rightarrow \mathbb{C}$. Lorentzovom vektorima u^a prirodno je pridružiti dual u_a preko metrike Minkowskog, $u_a = \eta_{ab}u^b$. Kako je ekvivalent metrike u simplektičkom prostoru anti-skalarni produkt, prirodno definiran izomorfizam $S \rightarrow S^*$ upravo je

$$\xi \mapsto [\xi, \] \in S^*, \quad (\text{A.2})$$

gdje $[\xi, \]$ djeluje na η tako da $\eta \mapsto [\xi, \eta]$.

Baza prostora S konstruirana se uzimajući proizvoljni spinor $o \neq 0$ te skalirajući proizvoljni spinor ι za koji $[o, \iota] \neq 0$ tako da

$$[o, \iota] = 1. \quad (\text{A.3})$$

Jednom kada imamo bazu, spinore možemo zapisivati preko komponenti u njoj:

$$\xi = \xi^0 o + \xi^1 \iota = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix} = \xi^A. \quad (\text{A.4})$$

Dual od $\xi^A \in S$ zapisujemo $\xi_A \in S^*$. Od ovih spinora sada gradimo algebru i spinore viših redova na način analogan izgradnji tenzora. Sam anti-skalarni simpleksički produkt možemo identificirati s elementom $S^* \times S^*$, budući da on uzima dva spinora iz S i daje kompleksan broj. Ovaj element zapisujemo $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$ te vrijedi

$$\epsilon_{AB} \xi^A \eta^B = [\xi, \eta]. \quad (\text{A.5})$$

Po definiciji vrijedi

$$\epsilon_{AB} o^A o^B = \epsilon_{AB} \iota^A \iota^B = 0, \quad \epsilon_{AB} o^A \iota^B = 1 \quad (\text{A.6})$$

pa imamo

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Dualni spinor po definiciji odgovara

$$\xi_B = \epsilon_{AB} \xi^A = \xi^A \epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA} \xi^A, \quad (\text{A.8})$$

odakle vidimo dvije stvari. Kao prvo

$$[\xi, \eta] = \epsilon_{AB} \xi^A \eta^B = \xi_B \eta^B = -\xi^A \eta_A, \quad (\text{A.9})$$

zamjena položaja kontrahiranih indeksa daje negativan predznak. Kao drugo, predznak je pozitivan kada u kontrakciji s ϵ_{AB} imamo susjedne kontrahirane indekse ako mu spinor stavimo slijeva, odnosno kada kontrakcija susjednih indeksa ide lijevo-

gore desno-dolje. Ovaj zadnji dio je razlog definiranju anti-skalarog produkta na S^* (koji je element $S \times S$) s negativnim predznakom ispred inverza:

$$\epsilon^{AB} = -(\epsilon^{-1})^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

budući da tako dobivamo konzistentnost s pravilom susjednih indeksa lijevo-gore desno-dolje za pozitivan predznak:

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B = -\xi_B \epsilon^{BA}, \quad \epsilon^{AB} \epsilon_{AC} = -\epsilon^{BA} \epsilon_{AC} = -\delta^B_C = \delta_C^B. \quad (\text{A.11})$$

Korištenjem (2.11) lako dobivamo

$$\epsilon^{AB} = o^A \iota^B - o^B \iota^A. \quad (\text{A.12})$$

Ključan dio spinornog formalizma je i definiranje **kompleksno konjugiranog prostora** \bar{S} . Naime, prostori S i \bar{S} nisu isti prostor, budući da pokušaj identificiranja međusobno konjugiranih elemenata ne bi bio izomorfizam. Npr. za $\xi, \eta \in S$, $\alpha \in \mathbb{C}$, linearna kombinacija $\xi + \alpha\eta$ morala bi biti preslikana u $\bar{\xi} + \overline{\alpha\eta}$, a ne u $\bar{\xi} + \alpha\bar{\eta}$. U suprotnom bismo mogli faktorizirati spinor η s proizvoljnim kompleksnim brojem α koji bi ostao nekonjugiran te identifikacija ne bi bila dobro definirana. No ovakvo preslikavanje ne čuva linearne kombinacije. Konkretno, to bi bio anti-izomorfizam. U skladu s ovim problemom, dobili bismo i mogućnost razlikovanja realnih i imaginarnih spinora, što ne bi bilo konzistentno s proizvoljnošću odabira baze. Stoga se definira anti-izomorfizam u novi prostor \bar{S} različit od S . Standardni zapis koristi crtane indekse

$$\xi^A \mapsto \bar{\xi}^A = \bar{\xi}^{A'}. \quad (\text{A.13})$$

Dualni prostor od \bar{S} je $\bar{S}^* = \bar{S}^{*'}$ s donjim crtanim indeksima. Potpuna tenzorska algebra spinora izgrađena je od četiri prostora S, S^*, \bar{S} i \bar{S}^* . Kako su S i \bar{S} prostori povezani kompleksnom konjugacijom, a ne simplektičkom strukturom, crtani indeksi spinora potpuno su nezavisni od običnih te u praksi nije bitan relativan položaj jednih u odnosu na druge, dok je relativan položaj samih crtanih indeksa bitan, kao i kod običnih.

Budući da kompleksna konjugacija mijenja obične indekse u crtane i obratno,

za spinor jednakog broja običnih i crtanih indeksa τ moguće je $\bar{\tau} = \tau$ i tada je τ **Hermitski**. Najjednostavniji takvi spinori su oni s po jednim indeksom svake vrste, $\tau^{AA'}$. Oni su elementi $S \times \bar{S}$ pa se mogu prikazati u bazi $(o, \iota) \times (\bar{o}, \bar{\iota})$:

$$\tau^{AA'} = \alpha o^A \bar{o}^{A'} + \beta \iota^A \bar{\iota}^{A'} + \gamma o^A \bar{\iota}^{A'} + \delta \iota^A \bar{o}^{A'}. \quad (\text{A.14})$$

Ovaj spinor je Hermitski akko su α i β realni brojevi, a γ i δ kompleksni konjugati jedan drugome. Ovo nam daje 4-realnodimenzionalan vektorski prostor, što omogućava identifikaciju s 4-vektorima

$$u^a = u^{AA'} = \begin{pmatrix} u^0 + u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & u^0 - u^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

definiranu tako da vrijedi

$$u^a u_a = \det(u^{AA'}). \quad (\text{A.16})$$

Dobiveni bazni vektori

$$l^a = o^A \bar{o}^{A'}, \quad n^a = \iota^A \bar{\iota}^{A'}, \quad m^a = o^A \bar{\iota}^{A'}, \quad \bar{m}^a = \iota^A \bar{o}^{A'} \quad (\text{A.17})$$

čine tzv. *Newman-Penroseovu svjetlosnu tetradu*. Za metriku g_{ab} dobivamo

$$g_{AA'BB'} = g_{ABA'B'} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'}, \quad g^{ABA'B'} = \epsilon^{AB} \epsilon^{A'B'}. \quad (\text{A.18})$$

Identifikacija Lorentzovog indeksa s parom spinorskih općenita je procedura prijelaza s prostora Minkowskog na spinorni. Ovaj prijelaz je obostran, no za neke spinore dobit ćemo kompleksne 4-vektore. Specifično, u slučaju realnih svjetlosnih vektora imamo $0 = u_a u^a = u_{AA'} u^{AA'} = \det u^{AA'}$, što za posljedicu ima da se svaki svjetlosni vektor može zapisati kao umnožak spinora i njegovog kompleksnog konjugata, $u^{AA'} = \pm \alpha^A \bar{\alpha}^{A'}$. Ovaj raspis nije jedinstven, već u odabiru α^A imamo slobodu u izboru faze koja se skrati. U suprotnom smjeru, svaki spinor α^A definira jedinstveni realni nul vektor $\alpha^A \bar{\alpha}^{A'}$.

Spinorna analiza ekvivalentna je tenzorskoj jednom kada imamo kovarijantnu derivaciju $\nabla_a = \nabla_{AA'}$ na spinornom svežnju na mnogostrukosti prostorvremena \mathcal{M} . Nju se uvodi aksiomatski, analogno onoj iz diferencijalne geometrije, uz ključan aksiom

očuvanja simplektičke strukture

$$\nabla_{AA'}\epsilon_{BC} = 0 = \nabla_{AA'}\epsilon_{B'C'}. \quad (\text{A.19})$$

Spinori su kompleksni objekti pa efikasnije iskorištavaju komponente, omogućujući bogatu i potpunu analitičku strukturu. Obične tenzore reproduciraju u parovima komponenti, ostavljajući dodatnu slobodu u fazi, a osnovne i bitne karakteristike često pokazuju na očit način. Zbog ovakvih i drugih matematičkih elegantnosti, spinorni formalizam igrao je veliku ulogu u razvoju moderne opće teorije relativnosti, kao i kvantne teorije. Stoga nije neobično da se kroz Newman-Penroseove metode javio i u Bondi-Sachsovom formalizmu i analizi konformalne beskonačnosti.

Literatura

- [1] Carroll, Sean M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, 2004.
- [2] Prahar (<https://physics.stackexchange.com/users/8821/prahar>), Derivation of Bondi metric.
- [3] Thomas Mädler and Jeffrey Winicour *Bondi-Sachs Formalism*, 2016., Scholarpedia, 11(12):33528., 10.4249/scholarpedia.33528.
- [4] Abhay Ashtekar, Beatrice Bonga, Aruna Kesavan *Asymptotics with a positive cosmological constant: I. Basic framework*, 2014., <https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.3816>.
- [5] Abhay Ashtekar, Beatrice Bonga, Aruna Kesavan *Asymptotics with a positive cosmological constant. II. Linear fields on de Sitter spacetime*, 2015., <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.06152>.
- [6] Abhay Ashtekar, Beatrice Bonga, Aruna Kesavan *Asymptotics with a positive cosmological constant. III. The quadrupole formula*, 2015., <https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.05593>.
- [7] Wald, Robert M. *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [8] A. Einstein *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation* (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1916.)
- [9] A. Einstein *Über Gravitationswellen* (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1918.)
- [10] H. Bondi *Radiation from an isolated system*, in Proceedings on Theory of Gravitation, edited by L. Infeld (Gauthier- Villars, Paris, PWN Editions Scientific de Pologne, Warszawa, and Pergamon Press, Oxford, 1964.)
- [11] Stewart, John *Advanced General Relativity*, Cambridge UP, 1991.