Izračunljivost poopćenih grafova

Jelić, Matea

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Jelić

Izračunljivost poopćenih grafova

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2023.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Jelić

Izračunljivost poopćenih grafova

DOKTORSKI RAD

Mentor:

prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2023.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Matea Jelić

Computability of generalized graphs

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2023.

ZAHVALA

Hvala mom mentoru, profesoru Zvonku Iljazoviću, što me uveo u svijet izračunljivosti i pružao mi veliku profesionalnu i ljudsku podršku tijekom nastanka ove disertacije. Nadam se da ćemo i u budućnosti ovako ugodno i uspješno surađivati.

Hvala mojim profesorima s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu što su mi prenijeli temeljna matematička znanja zbog kojih sam mogla lako usvajati nove koncepte i što su mi pokazali svu ljepotu teorijske matematike.

Hvala svim mojim prijateljima, pogotovo onima iz studentskih dana, što su bili dio ovog putovanja. Bilo je izazovno, ali uz njih je bilo lakše.

Hvala mom bratu Ivanu što je uvijek mislio da sam mudrija i sposobnija nego što jesam pa sam morala mnogo raditi ne bih li to, barem donekle, opravdala.

Hvala mojim roditeljima, Ani i Mati, što su me uvijek gurali naprijed, a opet bili dovoljno blizu da znam da se na njih mogu osloniti. Hvala im i što su mi usadili dobre radne navike i snažan osjećaj odgovornosti. Oni su temelj svih mojih osobnih i profesionalnih uspjeha.

Hvala mom suprugu Ivanu što je uvijek vjerovao u mene i što je meni, i našoj maloj obitelji, pružao bezuvjetnu ljubav i potporu. Uspjeh svakog od nas timski je rad.

Na kraju, hvala mom malenom sinu Luki što mi je bio najveća motivacija. Hvala mu i što mi je pokazao da mogu puno više nego što sam mislila (i to uz puno manje sna nego što sam mislila).

SAŽETAK

U izračunljivom topološkom prostoru, svaki izračunljiv skup je ujedno i poluizračunljiv, ali obrat općenito ne vrijedi. Zato u ovom radu prvo proučavamo uvjete uz koje je spomenuti obrat istinit. Pri tome će topološka svojstva skupa biti od izrazite važnosti, što znači da ova disertacija spada u područje izračunljive analize, ali i topologije. Kasnije, proučavamo i uvjete uz koje se poluizračunljiv skup, budući da općenito nije izračunljiv, može aproksimirati nekim svojim izračunljivim podskupom do na zadanu točnost.

Prvo se bavimo lančastim i cirkularno lančastim kontinuumima i njihovim utjecajem na izračunljive skupove. Točnije, pokazujemo da je poluizračunljiv skup T u nekom izračunljivom topološkom prostoru i izračunljiv ako je $T = S \cup K_0 \cup \cdots \cup K_n$, gdje je S izračunljiv skup, a $K_0, \dots, K_n$ konačan niz lančastih ili cirkularno lančastih kontinuma koji se sijeku, međusobno ili s S, samo u krajnim točkama (u slučaju lančastih kontinuuma) ili u jednoj fiksiranoj točki (u slučaju barem jednog cirkularno lančastog kontinuuma). Rezultat primjenjen na lukove i topološke kružnice alternativno iskazujemo koristeći terminologiju adjunkcijskih prostora.

Nadalje, definiramo lančasti graf kao topološki prostor koji se može prikazati kao unija konačno mnogo izoliranih točaka i konačno mnogo lančastih kontinuuma takvih da se svaka dva različita kontinuuma sijeku u najviše konačno mnogo točaka. Pokazujemo da pojam lančastog grafa poopćuje pojam topološkog grafa i da je izračunljiv, uvjetno govoreći, svaki onaj lančasti graf koji je poluizračunljiv i čije su krajnje točke izračunljive (što je također vrijedilo i za topološke grafove). Taj se dokaz oslanja na činjenicu da za kontinuum K lančast od a do b i za neki $c \in K$ te za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji netrivijalni kontinuum $L \subseteq K$ takav da je $c \in L$ i $L \subseteq B(c, \varepsilon)$, koju također dokazujemo.

Na kraju, tražimo uvjete uz koje se poluizračunljiv skup S može, do na zadanu točnost, aproksimirati nekim svojim izračunljivim podskupom $\hat{S}$. Dokazujemo da se svaki poluizračunljiv kontinuum S lančast od a do b, gdje je a izračunljiva točka, može po volji dobro aproksimirati nekim svojim izračunljivim potkontinuumom $\hat{S}$ lančastim od a do c, gdje je c izračunljiva točka. U tu svrhu koristimo niz relacija definiranih na skupu $\mathbb{N}$, a rezultat iskazujemo i u izračunljivom metričkom prostoru koristeći Hausdorffovu metriku.

Ključne riječi: izračunljiv topološki prostor, lančasti kontinuum, cirkularno lančasti kontinuum, adjunkcijski prostor, izračunljiv tip, lančasti graf, $\mathscr{U}$ – blizu

SUMMARY

Every computable set in an arbitrary computable topological space is also semicomputable, but reverse does not hold in general. Therefore, in this thesis we examine conditions which force a semicomputable set to be a computable one. Topological properties of a set are of a great importance, which means that this thesis belongs to the field of computable analysis, as well as topology. Later, we study the conditions under which every semicomputable set, since it is not computable in general, can be approximated by its computable subset for any given precision.

Firstly, we examine chainable and circulary chinable continuua and how can they impact computable sets. Actually, we show that a semicomputable set T in an arbitrary topological space is also computable if $T = S \cup K_0 \cup \cdots \cup K_n$, where S is a computable set and $K_0, \dots, K_n$ a finite sequence of chainable or circularly chainable continuua which intersect, one another or S, in endpoints (in case of chainable continuua) or in one fixed point (in case of at least one circularly chainable continuum). The result applied to arcs and topological circles is also stated using terminology of adjunction spaces.

Furthermore, we define the notion of a chainable graph as a topological space that can be expressed as the union of finitly many isolated points and finitly many chainable continuua such that every two of them intersect in at most finitly many points. We show that a chainable graph generalizes a topological graph. Also, we prove that every semicoputable chainable graph with computable endpoints is computable (which is also true for topological graphs). The proof relies on a fact that for given continuum K chainable from a to b and arbitrary $c \in K$ and $\varepsilon > 0$, there exists a nontrivial continuum $L \subseteq K$ such that $c \in L$ and $L \subseteq B(c, \varepsilon)$. We also prove the aforementioned statement.

Finaly, we examine the conditions under which a semicomputable set S can be, up to an arbitrary precision, approximated by some computable subset $\hat{S}$. We prove that every semicomputable continuum S chainable from a to b, where a is a computable point, can by aproximated good enough with some computable subcontinuum $\hat{S}$ chainable from a to c, where c is a computable point. For that purpose we use relations defined on $\mathbb{N}$, and we state the previous result using Hausdorff metric, as well.

Key words: computable topological space, chainable continuum, circularly chainable continuum, adjunction space, computable type, chainable graph, $\mathscr{U}$ – close

SADRŽAJ

Uvod

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji program (konačan niz jednostavnih pravila) koji je računa, to jest koji za ulazne podatke $(x_1, \ldots, x_n)$ daje rezultat $f(x_1, \ldots, x_n)$. Izračunljiva funkcija je temeljni pojam *teorije izračunljivosti* i omogućuje definiranje drugih izračunljivih objekata u $\mathbb{N}^k$ poput izračunljivo prebrojivih i izračunljivih skupova, koji se kasnije koriste za definiranje poluizračunljivih i izračunljivih skupova u različitim prostorima. Na primjer, za kompaktan skup S u euklidskom prostoru kažemo da je *izračunljiv* ako se može, za svaku odabranu preciznost, efektivno aproksimirati s konačno mnogo racionalnih točaka. S druge strane, kažemo da je S *poluizračunljiv* ako njegov komplement možemo efektivno prekriti otvorenim racionalnim kuglama. Pojmovi poluizračunljivog i izračunljivog skupa imaju smisla i u općenitijim prostorima poput *izračunljivog metričkog prostora* i *izračunljivog topološkog prostora*. U svakom od spomenutih ambijentnih prostora vrijedi implikacija:

$$S \text{ je izračunljiv skup} \Longrightarrow S \text{ je poluizračunljiv skup.}$$

Da obrat općenito ne vrijedi pokazao je, primjerice, Miller u [18] konstruiravši takav broj $A < 1$ koji nije izračunljiv, a za koji je segment $[A, 1]$ poluizračunljiv. S obzirom na to da A nije izračunljiv broj, onda ni segment $[A, 1]$ nije izračunljiv skup. Dakle, skup $[A, 1]$ je primjer poluizračunljivog skupa koji nije izračunljiv. Štoviše, dok su izračunljivi brojevi gusti u svakom nepraznom izračunljivom skupu u $\mathbb{R}$, postoji neprazan poluizračunljiv skup u $\mathbb{R}$ koji uopće ne sadrži izračunljiv broj. Pri tome smatramo da je izračunljiv broj onaj koji se može efektivno aproksimirati racionalnim brojem do na željenu preciznost. Više na tu temu može se pronaći u [17, 22, 23]. Također, postoje i poluizračunljivi skupovi o čijoj se izračunljivosti još uvijek ništa ne zna [7].

Zadnjih se godina efikasno radi na traženju uvjeta uz koje je poluizračunljiv skup A izračunljiv i rezultati se iskazuju u terminima *izračunljivog tipa* prostora A [1, 5, 10–12, 14, 26–29]. Na taj se način radi svojevrsna klasifikacija prostora i pritom se pokazuje da topologija na skupu

A igra ključnu ulogu. Za topološki prostor A kažemo da ima izračunljiv tip ako je svaki poluizračunljiv skup, u proizvoljnom izračunljivom topološkom prostoru, koji je homeomorfan A ujedno i izračunljiv. Nadalje, za topološki par (A,B) (par prostora (A,B) takvih da je $B \subseteq A$) kažemo da ima izračunljiv tip ako za poluizračunljiv skup S, u po volji izabranom izračunljivom topološkom prostoru, za koji postoji homeomorfizam $f : A \to S$ takav da je $f(B)$ poluizračunljiv skup vrijedi da je izračunljiv. Na primjer, ako je M kompaktna mnogostrukost s rubom, onda uređeni par te mnogostrukosti i njenoga ruba ima izračunljiv tip [10, 14]. Dakle, topološki par $([0,1],\{0,1\})$ ima izračunljiv tip, iako segment $[0,1]$ (po Millerovom primjeru) nema izračunljiv tip. Inspirirani navedenim, Iljazović, Čičković i Validžić proučavali su one prostore koji podsjećaju na lukove s izračunljivim krajnjim točkama - *lančaste kontinuume* s izračunljivim krajnjim točkama. Kontinuum K lančast od a do b je kompaktan i povezan metrički prostor koji se može prekriti s konačnom mnogo otvorenih skupova $C_0,\dots,C_n$ koji su proizvoljno malog dijametra i takvi da se sijeku oni i samo oni koji su susjedi uz dodatan uvjet da je $a \in C_0$ i $b \in C_n$ [6, 20]. Za a i b kažemo da su krajnje točke. Nadalje, poznato je da svaka topološka kružnica ima izračunljiv tip. Štoviše, svaka kompaktna mnogostrukost (bez ruba) ima izračunljiv tip [9, 10, 14]. Međutim, Varšavska kružnica (koja nije topološka kružnica, dapače, uopće nije mnogostrukost) također ima izračunljiv tip. Zbog toga su već navedeni autori promatrali *cirkularno lančaste kontinuume* - prostore koji nalikuju topološkim kružnicama, a čiji je primjer upravo spomenuta Varšavska kružnica. Slično, to su oni kompaktni i povezani metrički prostori koji se mogu prekriti s konačnom mnogo otvorenih skupova $C_0,\dots,C_n$ koji su proizvoljno malog dijametra i takvi da se sijeku oni i samo oni koji su susjedi s time da ovdje prvi i zadnji skup također smatramo susjedima. Iljazović, Čičković i Validžić pokazali su u [29] da je svaki poluizračunljiv cirkularno lančasti kontinuum koji nije lančast izračunljiv, to jest da svaki cirkularno lančasti kontinum koji nije lančast ima izračunljiv tip. Također, pokazali su da je izračunljiv svaki poluizračunljiv kontinuum K lančast od a do b, gdje su a i b izračunljive točke, to jest da $(K,\{a,b\})$ ima izračunljiv tip ako je K kontinuum koji je lančast od a do b. S obzirom na navedeno, prirodno se postavlja pitanje čime se može zamijeniti uvjet izračunljivosti točaka a i b, to jest na koji se način spomenute tvrdnje mogu generalizirati.

Također, u posljednje je vrijeme napravljen značajan iskorak po pitanju izračunljivosti grafova. Topološkim grafom nazivamo prostor kojeg čini konačno mnogo lukova takvih da se oni međusobno različiti lukovi koji se sijeku, sijeku jedino u svojim krajnjim točkama. Lukove još nazivamo bridovima, a njihove krajnje točke vrhovima. Od svih točaka grafa posebno su važne one koje su vrhovi točno jednoga brida i nazivaju se krajnjim točkama grafa. Jasno je da nema svaki graf izračunljiv tip jer je već segment [0,1] jedan primjer grafa. Međutim, Iljazović je u [11] pokazao da ako je G topološki graf, a E skup svih krajnjih točaka toga grafa, onda topološki par (G,E) ima izračunljiv tip. S obzirom na to da se u dosadašnjim istraživanjima pokazalo da određene tvrdnje iskazane za lukove vrijede i ako se oni zamijene lančastim kontinuumima, postavlja se pitanje ima li smisla definitirati općenitiji graf od topološkog grafa koji će za bridove, umjesto lukova, imati lančaste kontinuume i možemo li očekivati da će i u tom slučaju vrijediti spomenuti rezultat.

Budući da poluizračunljiv skup općenito nije izračunljiv, opravdano je pitati se uz koje će uvjete vrijediti ta implikacija. Međutim, istraživanje može ići i u drugom smjeru, to jest može se postaviti pitanje pod kojim će se uvjetima poluizračunljiv skup S moći aproksimirati nekim svojim izračunljivim podskupom S' do na traženu točnost. Ako je S, na primjer, poluizračunljiv luk u euklidskom prostoru s krajnjim točkama a i b, onda postoje izračunljive točke a' i b' i izračunljiv luk S' čije su krajnje točke a' i b' takav da je $S' \subseteq S$ te da S' aproksimira S s obzirom na neku unaprijed zadanu točnost. Iljazović i Pažek dokazali su da ovaj rezultat vrijedi i u izračunljivom metričkom prostoru [8, 13], a Čačić, Horvat i Iljazović da njegova prirodna generalizacija vrijedi i u izračunljivom topološkom prostoru [26]. Štoviše, isti zaključak vrijedi i ako umjesto poluizračunljivoga luka promatramo poluizračunljiv lančasti kontinuum koji je dekompozabilan, to jest koji se može zapisati kao unija neka svoja dva prava potkontinuuma [26]. Topološka sinusna krivulja i segment [0,1] samo su neki od primjera dekompozabilnih lančastih kontinuuma, no postoje i oni kontinuumi koji nisu dekompozabilni, iako takvo što nije trivijalno dokazati [20]. Međutim, s obzirom na to da takvi kontinuumi ipak postoje, ima smisla pitati se u kojim se slučajevima može ispustiti uvjet dekompozabilnosti skupa S, odnosno čime se može zamijeniti.

Disertacija je podijeljenja u četiri poglavlja. U prvom poglavlju navodimo osnovne pojmove i tvrdnje iz izračunljive analize i topologije koje ćemo opetovano koristiti prilikom dokazivanja novih rezultata. U drugom poglavlju pokazujemo da uređeni par (A,B) ima izračunljiv tip ako je A skup koji se sastoji (uz određene uvjete) od konačno mnogo lukova i topoloških kružnica te skupa B koji ima izračunljiv tip. Dokazane tvrdnje proširuju rezultate iz [29] i okupljene su u članku pod naslovom *Computability of sets with attached arcs* prihvaćenim za objavu u časopisu Mathematical Communications. U trećem poglavlju pokazujemo da rezultat dokazan za topološke grafove vrijedi i za općenitiji graf koji će za bridove, umjesto lukova, imati baš lančaste kontinuume (uz određene dodatne uvjete). I ovaj rezultat oblikovan je u članku koji je u postupku recenziranja. Napokon, u četvrtom poglavlju dokazujemo da se poluizračunljiv skup S koji je kontinuum lančast od a do b, gdje je a izračunljiva točka, može po volji dobro aproksimirati svojim izračunljivim potkontiuumom $\hat{S}$ koji je lančast od a do $\hat{b}$, gdje je $\hat{b} \in S$ izračunljiva točka. Rezultat se nalazi u članku [16].

1. Osnovni pojmovi

U prvom poglavlju dajemo kratki pregled već poznatih pojmova i tvrdnji vezanih za izračunljive funkcije i izračunljive metričke i topološke prostore koji će se često koristiti u nastavku rada. Više se može pronaći u [2, 3, 8, 21, 24, 30, 31].

1.1. Izračunljive funkcije

Smatramo da su osnovni pojmovi teorije izračunljivosti, poput (parcijalno) izračunljivih funkcija u

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

to jest $\mathbb{N}^k$, i izračunljivo (prebrojivih) skupova u $\mathbb{N}^k$, poznati. Ipak, navodimo osnovne rezultate koji ih se tiču, a imaju važnu ulogu u dokazima koji slijede.

Teorem 1.1.1 (Teorem o projekciji)**.** Neka su $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 1$ i neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ izračunljivo prebrojiv skup. Tada je skup $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid (\exists y \in \mathbb{N}^n)(x, y) \in T\}$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^k$.

Teorem 1.1.2 (Teorem o selektoru)**.** Neka su $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 1$, neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ izračunljivo prebrojiv skup i neka su $S_1 \subseteq \mathbb{N}^k$ i $S_2 \subseteq \mathbb{N}^n$ izračunljivo prebrojivi skupovi sa svojstvom da za svaki $x \in S_1$ postoji $y \in S_2$ takav da je $(x, y) \in T$. Tada postoji parcijalno izračunljiva funkcija $f : S_1 \to \mathbb{N}^n$ takva da je $f(S_1) \subseteq S_2$ i $(x, f(x)) \in T$ za svaki $x \in S_1$.

Pojam izračunljive funkcije u $\mathbb{N}$ može se proširiti na izračunljive funkcije u $\mathbb{Q}$, to jest $\mathbb{R}$.

Definicija 1.1.3. Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoje izračunljive funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x) + 1}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Definicija 1.1.4. Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoji izračunljiva funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$. Funkciju F nazivamo **racionalnom aproksimacijom** od f.

Za skup X, neka $\mathscr{P}(X)$ označava familiju svih podskupova od X, a za $m, n \in \mathbb{N}$ neka je

$$\mathbb{N}^n_m = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1, \ldots, x_n \leq m\}.$$

Definicija 1.1.5. Neka su $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 1$. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **izračunljiva** ako je skup

$$\overline{\Phi} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x)\}$$

izračunljiv u $\mathbb{N}^{k+n}$ i ako postoji izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Sada navodimo važne rezultate vezane za izračunljive funkcije čiji se dokazi mogu pronaći u [25]. U tvrdnjama koje slijede, neka su $k, m, n \in \mathbb{N}, k, m, n \geq 1$.

Propozicija 1.1.6. Ako su $\Theta, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ izračunljive funkcije, onda su i funkcije $\Lambda_1, \Lambda_2 : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Lambda_1(x) = \Theta(x) \cup \Psi(x), \Lambda_2(x) = \Theta(x) \cap \Psi(x)$, $x \in \mathbb{N}^k$, izračunljive.

Propozicija 1.1.7. Neka su $\Theta, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ izračunljive funkcije. Tada je skup

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Theta(x) \subseteq \Psi(x)\}$$

izračunljiv u $\mathbb{N}^k$.

Propozicija 1.1.8. Ako su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $\Phi : \mathbb{N}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ izračunljive funkcije, onda je i funkcija $\Phi \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ izračunljiva.

Propozicija 1.1.9. Ako su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ izračunljive funkcije, onda je i funkcija $f(\Phi) : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$, $f(\Phi)(x) = f(\Phi(x)), x \in \mathbb{N}^k$, izračunljiva.

Propozicija 1.1.10. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^n$ izračunljivo prebrojiv skup i neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ izračunljiva funkcija. Tada je skup

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq T\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^k$.

Propozicija 1.1.11. Ako su $\Phi_1 : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Phi_2 : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ izračunljive funkcije, onda je i funkcija $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^{n+m})$, $\Phi(x) = \Phi_1(x) \times \Phi_2(x)$, $x \in \mathbb{N}^k$, izračunljiva.

Propozicija 1.1.12. Ako su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ izračunljive funkcije, onda je i funkcija $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$,

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y),$$

$x \in \mathbb{N}^k$, izračunljiva.

Od sada pa nadalje, neka je $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $j \mapsto [j]$ bilo koja odabrana izračunljiva funkcija čija je slika skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

Propozicija 1.1.13. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ izračunljiva funkcija takva da je $\Phi(x) \neq \emptyset$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(x) = [f(x)]$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

1.2. Izračunljiv metrički prostor

Definicija 1.2.1. Neka je (X,d) metrički prostor i neka je $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz gust u (X,d). Kažemo da je (X,d,α) **izračunljiv metrički prostor** ako je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i,\alpha_j)$ izračunljiva.

Na primjer, ako je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$, gdje je $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ i $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ neka efektivna enumeracija od $\mathbb{Q}^n$, onda je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor. Detaljnije se može pronaći u [25].

Neka je (X,d,α) bilo koji odabrani izračunljiv metrički prostor. Za $x \in X$ i $r > 0$ neka $B(x,r)$ označava otvorenu kuglu u (X,d) središta x i radijusa r. Neka je $i \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Za $B(\alpha_i, r)$ kažemo da je **(otvorena) racionalna kugla** u (X,d,α).

Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bilo koja odabrana izračunljiva funkcija čija je slika skup svih pozitivnih racionalnih brojeva i neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bilo koje odabrane izračunljive funkcije takve da je $\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$.

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$I_i = B(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}). \tag{1.1}$$

Primjetimo da $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ predstavlja efektivnu enumeraciju svih otvorenih racionalnih kugala u (X,d,α). Svaku konačnu uniju racionalnih kugala u (X,d,α) nazivat ćemo **otvorenim racionalnim skupom** u (X,d,α). Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = \bigcup_{i\in[j]} I_i.$$

Očito je da $(J_j)_{j\in\mathbb{N}}$ predstavlja efektivnu enumeraciju svih otvorenih racionalnih skupova u (X,d,α).

Sada možemo definirati sljedeće:

Definicija 1.2.2. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ zatvoren u (X,d). Kažemo da je S **izračunljivo prebrojiv** u (X,d,α) ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$.

Definicija 1.2.3. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ kompaktan u (X,d). Kažemo da je S **poluizračunljiv** u (X,d,α) ako je skup

$$\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$.

Sada, neka je (X,d) metrički prostor, $S,T \subseteq X$ i $\varepsilon > 0$. Kažemo da su S i T ε **– blizu**, i pišemo $S \approx_\varepsilon T$, ako za svaki $x \in S$ postoji $y \in T$ takav da je $d(x,y) < \varepsilon$ i ako za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da je $d(x,y) < \varepsilon$.

Dalje, neka je $\mathscr{K}$ familija svih nepraznih kompaktnih skupova u (X,d). Funkcija d_H : $\mathscr{K} \times \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$d_H(K,L) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid K \approx_\varepsilon L\}$$

je metrika na $\mathscr{K}$ i nazivamo je **Hausdorffovom metrikom** (detaljno u [6]).

U izračunljivom metričkom prostoru (X,d,α) za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\Lambda_i = \{\alpha_j \mid j \in [i]\}.$$

Očito je da $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ predstavlja efektivnu enumeraciju svih nepraznih konačnih podskupova od $\{\alpha_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Lako se pokaže (vidjeti [25]) da vrijedi sljedeće:

Propozicija 1.2.4. Neka je (X,d) metrički prostor, $K \subseteq X$ neprazan i kompaktan u (X,d) te $\mathscr{A} \subseteq X$ gust u (X,d). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan $A \subseteq \mathscr{A}$ takav da je $K \approx_\varepsilon A$.

Zato, ako je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ neprazan i kompaktan u (X,d), s obzirom na to da je $\alpha(\mathbb{N}) \subseteq X$ gust u (X,d), za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i_k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{i_k}.$$

Neformalno govoreći, svaki neprazan i kompaktan skup u izračunljivom metričkom prostoru možemo proizvoljno dobro aproksimirati konačnim podskupom od $\alpha(\mathbb{N})$. Ako to možemo učiniti i efektivno, za skup kažemo da je *izračunljiv*.

Definicija 1.2.5. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ kompaktan u (X,d). Kažemo da je S **izračunljiv** u (X,d,α) ako postoji izračunljiva funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)} \tag{1.2}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Lako se pokaže [10], da uvjet (1.2) možemo zamijeniti s

$$d_H(K,\Lambda_{f(k)}) < 2^{-k}.$$

Također, vrijedi i sljedeće:

Propozicija 1.2.6. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ kompaktan u (X,d). Skup S je **izračunljiv** skup u (X,d,α) ako i samo ako je S izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv u (X,d,α).

Može se pokazati da navedene definicije ne ovise o izboru funkcija q, τ_1, τ_2 i niza $([j])_{j\in\mathbb{N}}$.

Definicija 1.2.7. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i $x \in X$. Kažemo da je x **izračunljiva točka** u (X,d,α) ako postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x,\alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

1.3. Izračunljiv topološki prostor

Općenitiji ambijentni prostor od izračunljivog metričkog prostora je izračunljiv topološki prostor. Ovdje dajemo osnovne definicije, a više se može pronaći u [32, 33].

Definicija 1.3.1. Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor i neka je $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathscr{T}$ takav da je skup $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathscr{T}$. Uređenu trojku $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ nazivamo **izračunljivim topološkim prostorom** ako postoje izračunljivo prebrojivi skupovi $C, D \subseteq \mathbb{N}^2$ takvi da vrijedi sljedeće:

1. ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in C$, onda je $I_i \subseteq I_j$;
2. ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in D$, onda je $I_i \cap I_j = \emptyset$;
3. ako su $x \in X$ i $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i \cap I_j$, onda postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $(k,i),(k, j) \in C$;
4. ako su $x, y \in X$, $x \neq y$, onda postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $y \in I_j$ i $(i, j) \in D$.

Napomena 1.3.2. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Može se pokazati da postoje izračunljivo prebrojivi skupovi $C, D \subseteq \mathbb{N}^2$ koji, osim svojstava 1.– 4. iz definicije, zadovoljavaju još i sljedeće:

5. ako su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in C$ i $(j, k) \in C$, onda je $(i, k) \in C$; $(i, i) \in C$ za svaki $i \in \mathbb{N}$;
6. ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in D$, onda je $(j, i) \in D$;
7. ako su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j) \in C$ i $(j, k) \in D$, onda je $(i, k) \in D$.

Za takve C i D kažemo da su **prave karakteristične relacije**. Dakle, čim je dan izračunljiv topološki prostor $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, podrazumijevamo postojanje pravih karakterističnih relacija. Primjetimo i da je svaki izračunljiv topološki prostor Haussdorfov i 2 – prebrojiv.

Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Stavimo

$$J_j = \bigcup_{i\in[j]} I_i.$$

Prisjetimo se da je $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $j \to [j]$ neka izračunljiva funkcija čija je slika skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$. Neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bilo koje izračunljive funkcije takve da je

$$\{(\sigma(j,0), \dots, \sigma(j, \eta(j))) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Umjesto $\sigma(i,j)$ pisat ćemo $(i)_j$, a $\overline{j}$ umjesto $\eta(j)$. Prema tome, $\{((j)_0,\dots,(j)_{\overline{j}}) \mid j\in\mathbb{N}\}$ je skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Uz uvedene oznake, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 1.3.3. Funkcija $\Psi:\mathbb{N}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\Psi(i)=\{(i)_0,\dots,(i)_{\overline{i}}\}$, $i\in\mathbb{N}$, je izračunljiva.

Dakle, s obzirom na to da je funkcija $\mathbb{N}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $j\mapsto\{(j)_0,\dots,(j)_{\overline{j}}\}$ izračunljiva i da joj je slika upravo skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$ možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je baš

$$[j]=\{(j)_0,\dots,(j)_{\overline{j}}\}$$

za svaki $j\in\mathbb{N}$. Zato ćemo, kada to bude potrebno, pisati

$$J_j=I_{(j)_0}\cup\dots\cup I_{(j)_{\overline{j}}}.$$

Također, s obzirom na to da je skup $S=\{(i,j)\mid \overline{j}=0,(j)_0=i\}$ očito izračunljiv i da za svaki $i\in\mathbb{N}$ postoji $j\in\mathbb{N}$ takav da je $(i,j)\in S$, po Propoziciji 1.1.2 postoji izračunljiva funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ takva da je $I_i=J_{f(i)}$ za svaki $i\in\mathbb{N}$.

Definicija 1.3.4. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $S\subseteq X$ zatvoren u $(X,\mathscr{T})$. Kažemo da je S **izračunljivo prebrojiv** u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ ako je skup

$$\{i\in\mathbb{N}\mid S\cap I_i\neq\emptyset\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$.

Definicija 1.3.5. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $S\subseteq X$ kompaktan u $(X,\mathscr{T})$. Kažemo da je S **poluizračunljiv** u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ ako je skup

$$\{j\in\mathbb{N}\mid S\subseteq J_j\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$.

Definicija 1.3.6. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $S\subseteq X$ kompaktan u $(X,\mathscr{T})$. Kažemo da je S **izračunljiv** u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ ako je S izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.

Definicije poluizračunljivog i izračunljivog skupa ne ovise o izboru niza $([j])_{j\in\mathbb{N}}$.

Ako je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor, onda je $(X,\mathscr{T}_d,(I_i))$ izračunljiv topološki prostor, gdje je $\mathscr{T}_d$ topologija inducirana metrikom d, a (I_i) niz definiran s (1.1) (vidjeti [14]). Jasno je da je S izračunljivo prebrojiv/poluizračunljiv/izračunljiv u (X,d,α) ako i samo ako je S izračunljivo prebrojiv/poluizračunljiv/izračunljiv u $(X,\mathscr{T}_d,(I_i))$.

Definicija 1.3.7. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Za $x \in X$ kažemo da je **izračunljiva točka** u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid x \in I_i\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$.

Također, x je izračunljiva točka u (X,d,α) ako i samo ako je izračunljiva u $(X,\mathscr{T}_d,(I_i))$.

Dokazi sljedećih tvrdnji, koje ćemo često koristiti u disertaciji, mogu se pronaći u [14].

Teorem 1.3.8. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Tada postoje izračunljivo prebrojivi podskupovi $\mathscr{C},\mathscr{D} \subseteq \mathbb{N}^2$ takvi da vrijedi sljedeće:

1. ako su $i,j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,j) \in \mathscr{C}$, onda je $J_i \subseteq J_j$;
2. ako su $i,j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,j) \in \mathscr{D}$, onda je $J_i \cap J_j = \emptyset$;
3. ako je $\mathscr{F}$ konačna familija nepraznih kompaktnih skupova u $(X,\mathscr{T})$ i $A \subseteq \mathbb{N}$ konačan podskup od $\mathbb{N}$, onda za svaki $K \in \mathscr{F}$ postoji $i_K \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi sljedeće:
   (i) $K \subseteq J_{i_k}$;
   (ii) ako su $K,L \in \mathscr{F}$ takvi da je $K \cap L = \emptyset$, onda je $(i_K,i_L) \in \mathscr{D}$;
   (iii) ako su $a \in A$ i $K \in \mathscr{F}$ takvi da je $K \subseteq J_a$, onda je $(i_k,a) \in \mathscr{C}$.

Propozicija 1.3.9. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.

(i) Ako je $m \in \mathbb{N}$, onda je $S \setminus J_m$ poluizračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.

(ii) Ako je $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, onda je skup $\{(j_1,\dots,j_k) \in \mathbb{N}^k \mid S \subseteq J_{j_1} \cup \cdots \cup J_{j_k}\}$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^k$.

Dokaz sljedeće propozicije može se pronaći u [11].

Propozicija 1.3.10. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $x_0,\dots,x_n \in X$. Tada vrijedi sljedeće:

$$x_0,\dots,x_n \text{ su izračunljive točke } \iff \{x_0,\dots,x_n\} \text{ je poluizračunljiv skup}$$

$$\iff \{x_0,\dots,x_n\} \text{ je izračunljiv skup.}$$

Ako je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor, topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ općenito nije metrizabilan [14]. Medutim, ako je S kompaktan skup u $(X, \mathscr{T})$, onda je S, kao potprostor od $(X, \mathscr{T})$, kompaktan Hausdorffov 2 – prebrojiv prostor, što implicira da je S normalan i 2 – prebrojiv pa je onda i metrizabilan. Ovu činjenicu ćemo često koristiti u dokazima koji slijede.

U cilju postizanja svojevrsne klasifikacija topoloških prostora, rezultate do kojih dolazimo uglavnom ćemo iskazivati koristeći terminologiju *izračunljivog tipa*.

Definicija 1.3.11. Neka je A topološki prostor. Kažemo da A ima **izračunljiv tip** ako za svaki izračunljiv topološki prostor $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ i svaki poluizračunljiv skup S u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ koji je homeomorfan A, vrijedi da je S izračunljiv.

Definicija 1.3.12. Neka su A i B topološki prostori takvi da je $B \subseteq A$, to jest da je (A, B) topološki par. Kažemo da (A, B) ima **izračunljiv tip** ako za svaki izračunljiv topološki prostor $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ i sve poluizračunljive skupove S i T u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ za koje postoji homeomorfizam $f : A \to S$ takav da je $f(B) = T$, vrijedi da je S izračunljiv.

1.4. Lančasti i cirkularno lančasti kontinuumi

Definicija 1.4.1. Neka je X skup i neka je $\mathscr{C} = (C_0, \dots, C_m)$ konačan niz podskupova od X. Za $\mathscr{C}$ kažemo da je **lanac** u X ako vrijedi

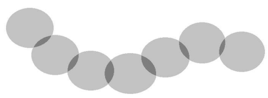
$$C_i \cap C_j = \emptyset \iff 1 < |i-j|$$

za sve $i, j \in \{0, \dots, m\}$.

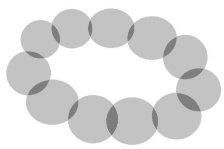
Ako za sve $i, j \in \{0, \dots, m\}$ vrijedi

$$C_i \cap C_j = \emptyset \iff 1 < |i-j| < m,$$

onda za $\mathscr{C}$ kažemo da je **cirkularni lanac** u X.



Slika 1.1: Lanac.



Slika 1.2: Cirkularni lanac.

Skupove $C_0, \dots, C_m$ (cirkularnog) lanca $\mathscr{C}$ nazivat ćemo **karikama**.

Često ćemo, zbog jednostavnije notacije, ispuštati zagrade pri označavanju (cirkularnih) lanaca, to jest pisat ćemo $C_0, \dots, C_m$ umjesto $(C_0, \dots, C_m)$.

Definicija 1.4.2. Neka je X skup, $A \subseteq X$ i $a, b \in A$. Kažemo da niz $(C_0, \dots, C_m)$ **pokriva** A ako je $A \subseteq C_0 \cup \dots \cup C_m$, to jest da **pokriva** A **od** a **do** b ako je još $a \in C_0$ i $b \in C_m$.

Definicija 1.4.3. Neka je (X, d) metrički prostor. (Cirkularni) lanac $C_0, \dots, C_m$ nazivamo ε – **(cirkularnim) lanacem**, za neki $\varepsilon > 0$, ako je $\operatorname{diam} C_i < \varepsilon$ za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$, a **otvorenim (cirkularnim) lancem** ako je svaki C_i otvoren u (X, d).

Analogno definiramo **kompaktni (cirkularni) lanac**.

Prisjetimo se da svaki povezani i kompaktni metrički prostor nazivamo kontinuumom.

Definicija 1.4.4. Neka je (X,d) kontinuum. Kažemo da je (X,d) **(cirkularno) lančast** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε – (cirkularni) lanac $C_0,\dots,C_m$ u (X,d) koji pokriva X.

Definicija 1.4.5. Neka je (X,d) kontinuum i $a,b \in X$. Kažemo da je (X,d) **lančast od** a **do** b ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε – lanac $C_0,\dots,C_m$ u (X,d) koji pokriva X od a do b.

Dokazi sljedećih propozicija mogu se pronaći u [13].

Propozicija 1.4.6. Neka je (X,d) kontinuum i neka su $a,b \in X$. Tada je (X,d) lančast od a do b ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktni ε – lanac u (X,d) koji pokriva X od a do b.

Propozicija 1.4.7. Neka je (X,d) kontinuum. Tada je (X,d) (cirkularno) lančast ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktni ε – (cirkularni) lanac u (X,d) koji pokriva X.

Slično definiramo otvoreni, to jest kompaktni (cirkularni) lanac u topološkom prostoru. Prvo, topološki prostor $(X,\mathscr{T})$ koji je Hausdorffov, povezan i kompaktan nazivamo **kontinuumom**.

Za familije skupova $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ kažemo da $\mathscr{A}$ **profinjuje** $\mathscr{B}$ ako za svaki $A \in \mathscr{A}$ postoji $B \in \mathscr{B}$ takav da je $A \subseteq B$.

Definicija 1.4.8. Za kontinuum $(X,\mathscr{T})$ kažemo da je **(cirkularno) lančast** ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathscr{U}$ od $(X,\mathscr{T})$ postoji otvoreni (cirkularni) lanac $C_0,\dots,C_m$ u $(X,\mathscr{T})$ koji pokriva X i za koji $\{C_0,\dots,C_m\}$ profinjuje $\mathscr{U}$.

Definicija 1.4.9. Za kontinuum $(X,\mathscr{T})$ kažemo da je **lančast od** a **do** b ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathscr{U}$ od $(X,\mathscr{T})$ postoji otvoreni lanac $C_0,\dots,C_m$ u $(X,\mathscr{T})$ koji pokriva X od a do b i za koji $\{C_0,\dots,C_m\}$ profinjuje $\mathscr{U}$.

Vrijedi da je metrički prostor (X,d) (cirkularno) lančasti kontinuum ako i samo ako je topološki prostor $(X,\mathscr{T}_d)$ (cirkularno) lančasti kontinuum. Također, kontinuum (X,d) je lančast od a do b ako i samo ako je kontinuum $(X,\mathscr{T}_d)$ lančast od a to b. Više u [29].

Napomena 1.4.10. Neka su X i Y topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam. Lako se pokaže da je X (cirkularno) lančasti kontinuum ako i samo ako je Y (cirkularno) lančasti kontinuum. Nadalje, za $a,b \in X$, kontinuum X je lančast od a do b ako i samo ako je kontinuum Y lančast od $f(a)$ do $f(b)$.

Primjer 1.4.11. Po Propoziciji 1.4.6 prostor $[0,1]$ (s euklidskom metrikom) je kontinuum koji je lančast od 0 do 1. Stoga je $[0,1]$ s euklidskom topologijom kontinuum koji je lančast od 0 do 1. Slično, jedinična kružnica S^1 u $\mathbb{R}^2$ je cirkularno lančasti kontinuum, ali nije lančast (vidjeti [4]).

Svaki topološki prostor homeomorfan prostoru $[0,1]$ nazivamo **lukom**. Ako je A luk i $f : [0,1] \to A$ homeomorfizam, kažemo da su $f(0)$ i $f(1)$ **krajnje točke** od A (ova definicija ne ovisi o izboru funkcije f). Po Primjeru 1.4.11 i Napomeni 1.4.10 zaključimo sljedeće: ako je A luk s krajnjim točkama a i b, onda je A lančast od a do b.

Topološki prostor homeomorfan prostoru S^1 nazivamo **topološkom kružnicom**. Po Primjeru 1.4.11 i Napomeni 1.4.10, svaka je topološka kružnica cirkularno lančasti kontinuum koji nije lančast.

Primjer 1.4.12. Neka je

$$K = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

i neka su $a = (0,-1)$, $b = (1, \sin 1)$. Poznato je da je kontinuum K lančast od a do b. Međutim, K nije luk s obzirom na to da nije lokalno povezan.

Dalje, označimo

$$W = K \cup (\{0\} \times [-2,-1]) \cup ([0,1] \times \{-2\}) \cup (\{1\} \times [-2, \sin 1]).$$

Prostor W nazivamo **Varšavskom kružnicom**. To je cirklarno lančasti kontinuum koji nije lančast, a budući da nije lokalno povezan, nije ni topološka kružnica.

2. PROSTORI DOBIVENI LIJEPLJENJEM LUKOVA

U ovom poglavlju dokazujemo da je poluizračunljiv skup T u izračunljivom topološkom prostoru, a koji se sastoji od konačno mnogo (cirkularno) lančastih kontinuma $K_0, \dots, K_n$ i izračunljivog skup S (uz neke dodatne uvjete), ujedno i izračunljiv. Da bismo dokazali taj rezultat, prvo ćemo obrazložiti slučaj kada je istaknuti K_i lančasti, a zatim cirkularno lančasti kontinuum. Na kraju poglavlja, rezultat primjenjen na lukove (i topološke kružnice) iskazujemo koristeći terminologiju adjunkcijskih prostora koja će opravdati naslov poglavlja i približiti rezultat čitatelju.

2.1. SLUČAJ LANČASTOG KONTINUUMA

Sljedeći rezultat dokazan je u [29]:

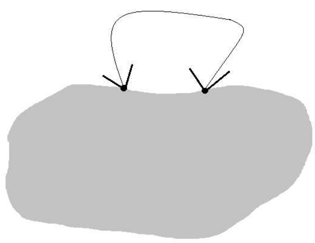
Teorem 2.1.1. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je K poluizračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ koji je, kao potprostor od $(X, \mathscr{T})$, kontinuum koji je lančast od a do b, gdje su a i b izračunljive točke. Tada je K izračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$.

Primjetimo da je po Propoziciji 1.3.10 uvjet da su točke a i b izračunljive ekvivalentan uvjetu da je skup $\{a, b\}$ poluizračunljiv. Jasno je, onda, da je rezultat koji sada dokazujemo (za $a \neq b$) generalizacija prethodnog teorema (stavimo $S = \{a, b\}$ i $L = \emptyset$).

Propozicija 2.1.2. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je K, kao potprostor od $(X, \mathscr{T})$, kontinuum koji je lančast od a do b, $a, b \in X$, $a \neq b$. Neka je $S \subseteq X$ takav da je $S \cap K = \{a, b\}$ i neka je $L \subseteq X$ kompaktan skup u $(X, \mathscr{T})$ takav da je $L \cap K \subseteq \{a, b\}$ (vidjeti Sliku 2.1). Ako su S i $S \cup L \cup K$ poluizračunljivi skupovi u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, onda je K izračunljivo prebrojiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$.

Dokaz. S obzirom na to da je K kompaktan pa onda i metrizabilan, neka d označava metriku na K koja inducira danu topologiju na K (to jest relativnu topologiju na K u $(X, \mathscr{T})$). Sada je kontinuum (K, d) lančast od a do b.

Budući da je X Hausdorffov, postoje $U_a, U_b \in \mathscr{T}$ takvi da je $a \in U_a$, $b \in U_b$ i $U_a \cap U_b = \emptyset$.



Slika 2.1: $S \cup L \cup K$: sivi skup je S, unija ravnih linija je L, a luk čije krajnje točke leže u S je K.

Pretpostavimo prvo da je $(S \cup L) \setminus (U_a \cup U_b) \neq \emptyset$. Skupovi K i $(S \cup L) \setminus (U_a \cup U_b)$ su očito disjunktni i kompaktni u $(X, \mathscr{T})$. Disjunktni su jer je $K \cap (S \cup L) = \{a, b\}$ i $a, b \notin (S \cup L) \setminus (U_a \cup U_b)$, a $(S \cup L) \setminus (U_a \cup U_b)$ je kompaktan u $(X, \mathscr{T})$ jer je zatvoren i sadržan u kompaktnom skupu $S \cup L$.

Po Teoremu 1.3.8 postoji $\mu \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$(S \cup L) \setminus (U_a \cup U_b) \subseteq J_\mu \quad \text{i} \quad K \cap J_\mu = \emptyset. \tag{2.1}$$

Označimo sada

$$S' = (S \cup L \cup K) \setminus J_\mu.$$

Iz (2.1) zaključujemo da je $(S \cup L) \setminus J_\mu \subseteq U_a \cup U_b$ pa je

$$S' = (S \setminus J_\mu) \cup (L \setminus J_\mu) \cup K = A \cup B \cup L_1 \cup L_2 \cup K,$$

gdje je $A = (S \setminus J_\mu) \cap U_a$, $B = (S \setminus J_\mu) \cap U_b$, $L_1 = (L \setminus J_\mu) \cap U_a$ i $L_2 = (L \setminus J_\mu) \cap U_b$. Iz Propozicije 1.3.9 slijedi da je S' poluizračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, a lako se pokaže i da su A i B poluizračunljivi u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Naime, jasno je da su A i B otvoreni u $S \setminus J_\mu$, a jer je $S \setminus J_\mu = A \cup B$, oni su i zatvoreni u $S \setminus J_\mu$. Budući da je $S \setminus J_\mu$ kompaktan u $(X, \mathscr{T})$, A i B su također kompaktni u $(X, \mathscr{T})$ pa onda postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$A \subseteq J_\alpha, \quad B \subseteq J_\beta \quad \text{i} \quad J_\alpha \cap J_\beta = \emptyset.$$

Sada je $A = (S \setminus J_\mu) \setminus J_\beta$ i $B = (S \setminus J_\mu) \setminus J_\alpha$ iz čega slijedi da su A i B poluizračunljivi u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Slično zaključujemo da su L_1 i L_2 kompaktni u $(X, \mathscr{T})$.

Dakle, dosad smo pokazali da je S' poluizračunljiv u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ i da vrijedi

$$S' = A \cup B \cup L_1 \cup L_2 \cup K,$$

gdje su A i B poluizračunljivi u $(X,\mathscr{T},(I_i))$, a L_1 i L_2 kompaktni u $(X,\mathscr{T})$ i takvi da je $(A\cup L_1)\cap(B\cup L_2)=\emptyset$ i $a\in A$, $b\in B$ (prisjetimo se (2.1) i da $a,b\in K$ implicira $a,b\notin J_\mu$).

Isto zaključujemo i pretpostavimo li da je $(S\cup L)\setminus(U_a\cup U_b)=\emptyset$. Naime, označimo li tada

$$S' = S \cup L \cup K,$$

dobijamo da je

$$S' = A \cup B \cup L_1 \cup L_2 \cup K,$$

gdje su $A=S\cap U_a$ i $B=S\cap U_b$ poluizračunljivi, a $L_1=L\cap U_a$ i $L_2=L\cap U_b$ kompaktni skupovi za koje je $(A\cup L_1)\cap(B\cup L_2)=\emptyset$ i $a\in A$, $b\in B$.

Neka su sada $\mathscr{C},\mathscr{D}\subseteq\mathbb{N}^2$ iz Teorema 1.3.8 i neka je $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bilo koja izračunljiva funkcija takva da je $I_i=J_{f(i)}$ za svaki $i\in\mathbb{N}$.

Neka je $i\in\mathbb{N}$ takav da je $I_i\cap K\neq\emptyset$. Tvrdimo da postoji $x\in I_i\cap K$, $x\neq a,b$. Naime, pretpostavimo li suprotno, to jest da je $I_i\cap K\subseteq\{a,b\}$, onda je $I_i\cap K$ konačan pa i zatvoren u K. Također, $I_i\cap K$ je otvoren u K, iz čega, s obzirom na to da je K povezan, slijedi da je $I_i\cap K=K$. Budući da je K konačan i Hausdorffov, diskretan je, što je u kontradikciji s činjenicom da je povezan i da je $\operatorname{card}(K)\geq 2$.

Dakle, postoji $x\in I_i\cap(K\setminus\{a,b\})$. Neka je $r\in\mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$0<r<\min\{d(a,x),d(b,x)\}$$

i

$$B(x,r)\subseteq I_i\cap K\subseteq I_i=J_{f(i)}. \tag{2.2}$$

S obzirom na to da je kontinuum (K,d) lančast od a do b, postoji kompaktan r – lanac $K_0,\dots,K_n$ u (K,d) koji pokriva K i takav da je $a\in K_0$ i $b\in K_n$.

Neka je $p\in\{0,\dots,n\}$ takav da je $x\in K_p$. Iz (2.2) i činjenice da je $\operatorname{diam}K_p<r$, slijedi da je $K_p\subseteq I_i$, to jest

$$K_p\subseteq J_{f(i)}. \tag{2.3}$$

Primjetimo da je $p\neq 0,n$, jer je $r<d(x,a),d(x,b)$.

Označimo sada

$$F=A\cup L_1\cup K_0\cup\cdots\cup K_{p-1} \quad \text{i} \quad G=B\cup L_2\cup K_{p+1}\cup\cdots\cup K_n$$

i primjetimo da je

$$S' = F \cup K_p \cup G. \tag{2.4}$$

Tvrdimo da su skupovi F i G disjunktni. Naime, jasno je da su skupovi A i B disjunktni, a s obzirom na to da je $A \subseteq S$, $A \subseteq U_a$ i $S \cap K = \{a,b\}$, imamo da je $A \cap K \subseteq \{a\}$. Međutim, $a \notin K_j$, za svaki $j \in \{p+1,\dots,n\}$, jer je $a \in K_0$, $p+1 \geq 2$, a $K_0,\dots,K_n$ je lanac pa je onda $A \cap K_{p+1} = \emptyset,\dots,\ A \cap K_n = \emptyset$. Slično je $B \cap K_0 = \cdots = B \cap K_{p-1} = \emptyset$. Otprije znamo da je $(A \cup L_1) \cap (B \cup L_2) = \emptyset$, a zbog definicije lanca je $\big(K_0 \cup \cdots \cup K_{p-1}\big) \cap \big(K_{p+1} \cup \cdots \cup K_n\big) = \emptyset$. Dakle, $F \cap G = \emptyset$.

Sada, s obzirom na to da su F, K_p i G kompaktni u $(X,\mathscr{T})$, F i G disjunktni i da vrijedi (2.3), po Teoremu 1.3.8 zaključujemo da postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da je $F \subseteq J_u$, $K_p \subseteq J_v$, $G \subseteq J_w$, $(u,w) \in \mathscr{D}$ i $(v, f(i)) \in \mathscr{C}$. Iz (2.4) slijedi da je $S' \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$, a iz definicija skupova F i G da je $A \subseteq J_u$ i $B \subseteq J_w$.

Dakle, ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da je

(1) $S' \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$;

(2) $A \subseteq J_u$;

(3) $B \subseteq J_w$;

(4) $(u,w) \in \mathscr{D}$;

(5) $(v, f(i)) \in \mathscr{C}$.

Neka je sada Ω skup svih $(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4$ za koje vrijedi (1) – (5). Pokazali smo da ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,u,v,w) \in \Omega$.

S druge strane, neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,u,v,w) \in \Omega$. Tvrdimo da je $I_i \cap K \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $I_i \cap K = \emptyset$. S obzirom na to da je $J_v \subseteq I_i$ po (5), slijedi da je $J_v \cap K = \emptyset$, a budući da zbog (1) vrijedi $K \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$, zaključujemo da je $K \subseteq J_u \cup J_w$. Vrijedi $a \in J_u$ i $b \in J_w$ zato što je $A \subseteq J_u$ i $B \subseteq J_w$. Dakle, skupovi J_u i J_w su otvoreni u $(X,\mathscr{T})$, disjunktni su, unija im sadrži K i svaki od njih siječe K. Prema tome, zaključujemo da K nije povezan što je neistina pa smo time pokazali da I_i siječe K.

Dakle, vrijedi:

$$I_i \cap K \neq \emptyset \text{ ako i samo postoje } u,v,w \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } (i,u,v,w) \in \Omega. \tag{2.5}$$

Definirajmo sada skupove:

$$\Omega_1 = \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid S' \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w\};$$
$$\Omega_2 = \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid A \subseteq J_u\};$$
$$\Omega_3 = \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid B \subseteq J_w\};$$
$$\Omega_4 = \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid (u,w) \in \mathscr{D}\};$$
$$\Omega_5 = \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid (v,f(i)) \in \mathscr{C}\}.$$

Jasno je da je $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4 \cap \Omega_5$. Budući da je S' poluizračunljiv, po Propoziciji 1.3.9 zaključujemo da je

$$\overline{\Omega}_1 = \{(u,v,w) \in \mathbb{N}^3 \mid S' \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$. Neka je $I : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}^3$ funkcija dana sa $I = (I_2^4, I_3^4, I_4^4)$, gdje je $I_m^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, m \leq n$, projekcija na $m-$tu koordinatu. S obzirom na to da je I izračunljiva funkcija, a

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid S' \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w\} \\ &= \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid (u,v,w) \in \overline{\Omega}_1\} \\ &= \{(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4 \mid I(i,u,v,w) \in \overline{\Omega}_1\} \\ &= I^{-1}(\overline{\Omega}_1),\end{aligned}$$

zaključujemo da je Ω_1 izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$ (kao praslika izračunljivo prebrojivog skupa po izračunljivoj funkciji). Analogno zaključujemo da su Ω_2 i Ω_3 izračunljivo prebrojivi u $\mathbb{N}^4$. Nadalje, s obzirom na to da su $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ izračunljivo prebrojivi u $\mathbb{N}^2$, skupovi Ω_4 i Ω_5 su također izračunljivo prebrojivi u $\mathbb{N}^4$ (do čega dolazimo razmatranjem analognim prethodnom). Dakle, Ω je izračunljivo prebrojiv kao konačan presjek izračunljivo prebrojivih skupova. Napokon, iz (2.5) po Teoremu 1.1.1 slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset\}$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$, to jest da je K izračunljivo prebrojiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, čime je dokaz završen. ■

2.2. Slučaj cirkularno lančastog kontinuuma

Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ iz Teorema 1.3.8.

Definicija 2.2.1. Za konačan niz $\mathscr{H}_l = (J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}})$, $l \in \mathbb{N}$, kažemo da je **formalni cirkularni lanac** ako

$$\text{za sve } i, j \in \{0, \ldots, \bar{l}\} \text{ takve da je } 1 < |i-j| < \bar{l}, \text{ vrijedi } ((l)_i, (l)_j) \in \mathscr{D}. \tag{2.6}$$

Primjetimo da je *biti formalni cirkularni lanac* ustvari svojstvo broja l, a ne niza $\mathscr{H}_l$. Preciznije bi bilo reći da l *definira formalni cirkularni lanac* $\mathscr{H}_l = (J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}})$ ako vrijedi (2.6). Naime, može se dogoditi da je za neke $l, l' \in \mathbb{N}$ ispunjeno $\mathscr{H}_l = \mathscr{H}_{l'}$, pri čemu l predstavlja formalni cirkularni lanac, a l' ne predstavlja, to jest pri čemu je $\mathscr{H}_l$ formalni cirkularni lanac, a $\mathscr{H}_{l'}$ nije.

Sljedeće ćemo propozicije često koristiti pri dokazivanju svojstva izračunljive prebrojivosti skupova.

Propozicija 2.2.2. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Skup

$$\{l \in \mathbb{N} \mid \mathscr{H}_l \text{ je formalni cirkularni lanac}\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$.

Dokaz. Neka su $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ iz Teorema 1.3.8. Označimo

$$\Omega = \{l \in \mathbb{N} \mid \mathscr{H}_l \text{ je formalni cirkularni lanac}\}.$$

Za $l \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} l \in \Omega &\iff \mathscr{H}_l \text{ je formalni cirkularni lanac} \\ &\iff ((l)_i, (l)_j) \in \mathscr{D} \text{ za } i, j \in \{0, \ldots, \bar{l}\}, 1 < |i-j| < \bar{l} \\ &\iff \Phi(l) \subseteq \mathscr{D} \end{aligned}$$

gdje je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$, $\Phi(l) = \{((l)_i, (l)_j) \mid i, j \in \{0, \ldots, \bar{l}\}, 1 < |i-j| < \bar{l}\}, l \in \mathbb{N}$. Dalje, definirajmo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$ s $\Psi(l) = \{(l, i, j) \mid i, j \leq \bar{l}, 1 < |i-j| < \bar{l}\}, l \in \mathbb{N}$ i funkciju $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ s $f(l, i, j) = ((l)_i, (l)_j), (l, i, j) \in \mathbb{N}^3$. S obzirom na to da su koordinatne funkcije od f izračunljive, f je izračunljiva. Također, jasno je da je $\overline{\Psi}$ rekurzivan skup i da je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \varphi(l) = \max\{l, \bar{l}\}, l \in \mathbb{N}$, izračunljiva pa je funkcija Ψ izračunljiva. S obzirom na to da je $\Phi = f(\Psi)$, po Propoziciji 1.1.9 je i Φ izračunljiva. Napokon, Ω je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$ po Propoziciji 1.1.10. ∎

Propozicija 2.2.3. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Tada je

$$\{(l,u) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq \bigcup \mathscr{H}_l \cup J_u\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$.

Dokaz. Prvo primjetimo da je

$$\begin{aligned} \bigcup \mathscr{H}_l \cup J_u &= J_{(l)_0} \cup \cdots \cup J_{(l)_{\bar{l}}} \cup J_u = \\ &= \bigcup_{i \in [(l)_0]} I_i \cup \cdots \cup \bigcup_{i \in [(l)_{\bar{l}}]} I_i \cup \bigcup_{i \in [u]} I_i = \\ &= \bigcup_{i \in [(l)_0] \cup \cdots \cup [(l)_{\bar{l}}] \cup [u]} I_i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Neka je $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}), \Lambda(l) = [(l)_0] \cup \cdots \cup [(l)_{\bar{l}}], l \in \mathbb{N}$. Prvo ćemo pokazati da je Λ izračunljiva funkcija. U tu svrhu, neka su $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}), \Psi(i,l) = [(l)_i]$, $(i,l) \in \mathbb{N}^2$ i $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$, $\Phi(l) = \{0, \ldots, \bar{l}\} \times \{l\}, l \in \mathbb{N}$, funkcije. Po Propozicijama 1.1.8 i 1.1.11, jasno je da su Ψ i Φ izračunljive. Sada je

$$\Lambda(l) = \bigcup_{y \in \Phi(l)} \Psi(y),$$

$l \in \mathbb{N}$, pa je po Propoziciji 1.1.12 i Λ izračunljiva. Definirajmo sada $\Gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}), \Gamma(l,u) = \Lambda(l) \cup [u], (l,u) \in \mathbb{N}^2$. Vrijedi

$$\Gamma(l,u) = \Lambda(l) \cup [u] = \Lambda(I_1^2(l,u)) \cup [I_2^2(l,u)]$$

pa je po Propozicijama 1.1.6 i 1.1.8, Γ izračunljiva funkcija. Nadalje, po Propoziciji 1.1.13 postoji izračunljiva funkcija $\xi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $\Gamma(l,u) = [\xi(l,u)]$ za svaki $(l,u) \in \mathbb{N}^2$ pa onda iz (2.7) zaključujemo da je

$$\bigcup \mathscr{H}_l \cup J_u = \bigcup_{i \in \Gamma(l,u)} I_i = \bigcup_{i \in [\xi(l,u)])} I_i = J_{\xi(l,u)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \{(l,u) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq \bigcup \mathscr{H}_l \cup J_u\} &= \{(l,u) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq J_{\xi(l,u)}\} \\ &= \xi^{-1}(\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}) \end{aligned}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ kao praslika izračunljivo prebrojivog skupa po izračunljivoj funkciji. ∎

Lema 2.2.4. Neka je (K,d) neprazan povezan metrički prostor i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Ako postoje otvoreni skupovi $C_0,\dots,C_m$ u (K,d) koji pokrivaju K takvi da je $\operatorname{diam} C_j < \varepsilon$ za svaki $j \in \{0,\dots,m\}$ i za koje vrijedi $C_i \cap C_j = \emptyset$ za sve $i,j \in \{0,\dots,m\}$ takve da je $|i-j| > 1$, onda postoji otvoreni ε – lanac u (K,d) koji pokriva K.

Dokaz. Neka je

$$v = \min\{i \in \{0,\dots,m\} \mid C_i \neq \emptyset\}$$

i

$$w = \max\{i \in \{0,\dots,m\} \mid C_i \neq \emptyset\}.$$

Jasno je da su brojevi v i w dobro definirani

Konačan niz $C_v,\dots,C_w$ očito pokriva K. Tvrdimo da je $C_v,\dots,C_w$ traženi lanac. Dovoljno je dokazati da je $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ za svaki $i \in \{v,\dots,w-1\}$.

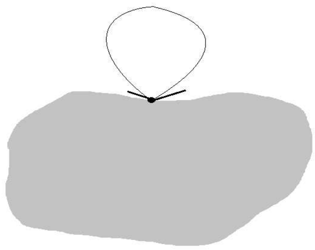
Pretpostavimo da je $C_i \cap C_{i+1} = \emptyset$ za neki $i \in \{v,\dots,w-1\}$. Označimo $U = C_v \cup \dots \cup C_{i-1}$ i $V = C_{i+1} \cup \dots \cup C_w$. Očito je da su U i V otvoreni i disjunktni skupovi u (K,d), a s obzirom na to da je $K = C_v \cup \dots \cup C_w$ vrijedi $K = U \cup V$ i $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ (jer je $C_v \neq \emptyset$ i $C_w \neq \emptyset$ po definiciji od v i w). Dakle, (U,V) je separacija od (K,d), što je u kontradikciji s povezanošću od K. Prema tome, $C_v,\dots,C_w$ je otvoreni ε – lanac u (K,d) koji pokriva K. ∎

Sljedeći rezultat dokazan je u [29]:

Teorem 2.2.5. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je K poluizračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ koji je, kao potprostor od $(X,\mathscr{T})$, cirkularno lančasti kontinuum koji nije lančast. Tada je K izračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.

Sada dajemo rezultat sličan Propoziciji 2.1.2.

Propozicija 2.2.6. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je K, kao potprostor od $(X,\mathscr{T})$, kontinuum koji je cirkularno lančast, ali nije lančast i neka je $a \in X$. Neka je $S \subseteq X$ takav da je $S \cap K = \{a\}$ i neka je $L \subseteq X$ kompaktan skup u $(X,\mathscr{T})$ takav da je $L \cap K \subseteq \{a\}$ (vidjeti Sliku 2.2). Ako su S i $S \cup L \cup K$ poluizračunljivi skupovi u $(X,\mathscr{T},(I_i))$, onda je K izračunljivo prebrojiv u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.



Slika 2.2: $S \cup L \cup K$: sivi skup je S, unija ravnih linija je L, a kružnica iznad S je K.

Dokaz. Prvo primjetimo da je $\operatorname{card} K \geq 2$ s obzirom na to da K nije lančast.

Slično kao i ranije, označimo s d metriku na K koja inducira relativnu topologiju na K u $(X, \mathscr{T})$. Sada je (K,d) cirkularno lančasti kontinuum koji nije lančast.

Neka je

$$S' = S \cup L \cup K. \tag{2.8}$$

Po pretpostavci propozicije, jasno je da su S' i S poluizračunljivi u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ i da je L kompaktan u $(X, \mathscr{T})$. Očito je $a \in S$ i

$$(S \cup L) \cap K = \{a\}. \tag{2.9}$$

S obzirom na to da (K,d) nije lančast, postoji $\varepsilon_0 > 0$ za kojeg nema otvorenog ε_0 – lanca u (K,d) koji pokriva K. Budući da je K kompaktan i da za sve $z \in K$ i $\varepsilon > 0$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $z \in J_j$ i $\operatorname{diam}(J_j \cap K) < \varepsilon$, postoje $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$K \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} J_{a_i}$$

i

$$\operatorname{diam}(J_{a_i} \cap K) < \frac{\varepsilon_0}{3} \tag{2.10}$$

za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$. Neka je $\lambda > 0$ Lebesgueov broj otvorenog pokrivača

$$\{J_{a_0} \cap K, \ldots, J_{a_m} \cap K\} \tag{2.11}$$

kompaktnog metričkog prostora (K,d).

Budući da je $S \cup L$ kompaktan u $(X, \mathscr{T})$, postoji $\alpha \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$S \cup L \subseteq J_\alpha \quad \text{i} \quad \operatorname{diam}(J_\alpha \cap K) < \frac{\varepsilon_0}{3}. \tag{2.12}$$

Naime, neka je $r \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < r < \frac{\varepsilon_0}{6}$. Skupovi $S \cup L$ i $K \setminus B(a,r)$ su očito kompaktni u $(X, \mathscr{T})$ i po (2.9) disjunktni pa zato postoji $\alpha \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \cup L \subseteq J_\alpha \quad \text{i} \quad (K \setminus B(a,r)) \cap J_\alpha = \emptyset.$$

Iz toga slijedi da je $J_\alpha \cap K \subseteq B(a,r)$ pa je onda $\mathrm{diam}(J_\alpha \cap K) \leq 2r < \frac{\varepsilon_0}{3}$.

Neka su sada $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ kao u Teoremu 1.3.8 i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bilo koja izračunljiva funkcija takva da je $I_i = J_{f(i)}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in I_i \cap K$, $x \neq a$. Naime, u suprotnom bismo imali da je $I_i \cap K = \{a\}$ što bi povlačilo da je $\{a\}$ otvoren skup u K, a to je nemoguće jer je $\{a\}$ zatvoren, K je povezan i $\mathrm{card}(K) \geq 2$.

Neka je $r \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < r < \min\{\frac{1}{2}d(a,x), \lambda\}$$

i

$$B(x,r) \subseteq I_i \cap K \subseteq I_i = J_{f(i)}. \tag{2.13}$$

Sada, jer je (K,d) cirkularno lančasti kontinuum, postoji kompaktan r – cirkularni lanac $K_0,\ldots,K_n$ u (K,d) koji pokriva K. Za svaki $l \in \{1,\ldots,n\}$ konačan niz $K_l,\ldots,K_n,K_0,\ldots,K_{l-1}$ je također r – cirkularni lanac koji pokriva K pa možemo pretpostaviti da je $a \in K_0$. Također, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da $a \notin K_j$ za svaki $j \neq 0$. Uistinu, $a \notin K_j$ za svaki $j \in \{2,\ldots,n-1\}$ pa cirkularni lanac $K_0,\ldots,K_n$ možemo zamijeniti cirkularnim lancem $K_n \cup K_0 \cup K_1, K_2,\ldots,K_{n-1}$ (koji je r – cirkularni lanac ako je $K_0,\ldots,K_n$ $\frac{r}{3}$ – cirkularni lanac).

Neka je $p \in \{0,\ldots,n\}$ takav da je $x \in K_p$. Iz (2.13) i nejednakosti $\mathrm{diam}\, K_p < r$ slijedi da je

$$K_p \subseteq I_i = J_{f(i)}. \tag{2.14}$$

Jasno je da je $p \neq 0$, s obzirom na to da je $r < d(x,a)$.

Za svaki $j \in \{0,\ldots,n\}$ je $\mathrm{diam}\, K_j < \lambda$ pa onda postoji $k_j \in \{0,\ldots,m\}$ takav da je

$$K_j \subseteq J_{a_{k_j}} \tag{2.15}$$

(prisjetimo se da je λ Lebesgueov broj otvorenog pokrivača iz (2.11)).

Budući da vrijedi $a \notin K_j$ za svaki $j \in \{1,\ldots,n\}$, iz (2.9) slijedi da je

$$(S \cup L) \cap K_j = \emptyset.$$

Također, za sve $j, j' \in \{0,\ldots,n\}$ takve da je $1 < |j-j'| < n$ vrijedi $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$. Koristeći još (2.12), (2.14), (2.15) i Teorem 1.3.8 zaključujemo da postoje $u_0,\ldots,u_n,u \in \mathbb{N}$ takvi da je

$K_j \subseteq J_{u_j}$ za sve $j \in \{0,\ldots,n\}$;

$S \cup L \subseteq J_u$;

$(u_j, u_{j'}) \in \mathscr{D}$ za sve $j, j' \in \{0, \ldots, n\}$ takve da je $1 < |j - j'| < n$;

$(u, u_j) \in \mathscr{D}$ za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$;

$(u_p, f(i)) \in \mathscr{C}$ i $(u, \alpha) \in \mathscr{C}$;

$(u_j, a_{k_j}) \in \mathscr{C}$ za sve $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Iz (2.8) je $S' = S \cup L \cup \bigcup_{j=0}^{n} K_j$ pa je onda $S' \subseteq J_u \cup J_{u_0} \cup \cdots \cup J_{u_n}$.

Neka je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $((l)_0, \ldots, (l)_{\bar{l}}) = (u_0, \ldots, u_n)$. Tada vrijedi sljedeće:

(1) $S' \subseteq \bigcup \mathscr{H}_l \cup J_u$;

(2) $S \subseteq J_u$;

(3) $\mathscr{H}_l$ je formalni cirkularni lanac;

(4) $(u, (l)_j) \in \mathscr{D}$ za svaki $j \in \{1, \ldots, \bar{l}\}$;

(5) $1 \leq p \leq \bar{l}$ i $((l)_p, f(i)) \in \mathscr{C}$;

(6) $(u, \alpha) \in \mathscr{C}$;

(7) za svaki $j \in \{0, \ldots, \bar{l}\}$ postoji $j' \in \{0, \ldots, m\}$ takav da je $((l)_j, a_{j'}) \in \mathscr{C}$.

Neka je Ω skup svih $(i, l, u, p) \in \mathbb{N}^4$ takvih da vrijedi (1) – (7). Pokazali smo sljedeće: ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $l, u, p \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, l, u, p) \in \Omega$.

Obratno, pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da postoje $l, u, p \in \mathbb{N}$ za koje je $(i, l, u, p) \in \Omega$, to jest za koje vrijede tvrdnje (1) – (7). Tvrdimo da je $I_i \cap K \neq \emptyset$.

Pretpostavimo suprotno, to jest da je $I_i \cap K = \emptyset$. Onda je $J_{f(i)} \cap K = \emptyset$, a zbog (5) je $J_{(l)_p} \subseteq J_{f(i)}$ što povlači da je $J_{(l)_p} \cap K = \emptyset$. Iz (1) zaključujemo da je $K \subseteq \bigcup \mathscr{H}_l \cup J_u$, točnije

$$K \subseteq J_{(l)_0} \cup \cdots \cup J_{(l)_{p-1}} \cup J_{(l)_{p+1}} \cup \cdots \cup J_{(l)_{\bar{l}}} \cup J_u,$$

to jest

$$K \subseteq J_{(l)_{p+1}} \cup \cdots \cup J_{(l)_{\bar{l}}} \cup (J_{(l)_0} \cup J_u) \cup J_{(l)_1} \cdots \cup J_{(l)_{p-1}}.$$

Dakle, K se može prikazati kao unija sljedećih skupova:

$$J_{(l)_{p+1}} \cap K, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}} \cap K, (J_{(l)_0} \cap K) \cup (J_u \cap K), J_{(l)_1} \cap K, \ldots, J_{(l)_{p-1}} \cap K. \tag{2.16}$$

Neka je M unija sljedećih skupova:

$$J_{(l)_{p+1}} \cap K, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}} \cap K, J_{(l)_0} \cap K, J_{(l)_1} \cap K, \dots, J_{(l)_{p-1}} \cap K. \tag{2.17}$$

Zbog (6) je $J_u \subseteq J_\alpha$, to jest $J_u \cap K \subseteq J_\alpha \cap K$ što zajedno s (2.12) daje

$$\operatorname{diam}(J_u \cap K) < \frac{\varepsilon_0}{3}. \tag{2.18}$$

Slično, koristeći (7) i (2.10), zaključujemo da je

$$\operatorname{diam}(J_{(l)_j} \cap K) < \frac{\varepsilon_0}{3} \tag{2.19}$$

za svaki $j \in \{0, \dots, \bar{l}\}$.

Sada ćemo pokazati da je

$$(J_{(l)_0} \cap K) \cap (J_u \cap K) \neq \emptyset. \tag{2.20}$$

Inače, ako su $J_u \cap K$ i $J_{(l)_0} \cap K$ disjunktni, onda je $J_u \cap K$ disjunktan sa svakim od skupova iz (2.17) (slijedi iz (4)) pa su onda $J_u \cap K$ i M disjunktni. Iz definicije skupa M imamo da je $K = M \cup (J_u \cap K)$ što znači da je $(M, J_u \cap K)$ separacija od K: M i $J_u \cap K$ su očito otvoreni u K, $J_u \cap K$ je neprazan jer je $a \in J_u$ po (2) i M je neprazan jer bi suprotno povlačilo da je $K = J_u \cap K$ iz čega bi, koristeći (2.18), mogli zaključiti da postoji (trivijalni) otvoreni ε_0 – lanac u K koji pokriva K što je nemoguće zbog izbora od ε_0.

Prema tome, (2.20) vrijedi pa koristeći još (2.18) i (2.19) zaključujemo da je

$$\operatorname{diam}\big((J_{(l)_0} \cap K) \cup (J_u \cap K)\big) < \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} < \varepsilon_0. \tag{2.21}$$

Promotrimo sada konačan niz skupova iz (2.16). Zbog (3) i (4) je jasno da su skupovi koji nisu susjedi disjunktni. Svi skupovi su otvoreni u K i dijametri su im, po (2.19) i (2.21), strogo manji od ε_0. Zato po Lemi 2.2.4 postoji otvoreni ε_0 – lanac u (K, d) koji pokriva K, što je nemoguće zbog izbora broja ε_0 pa je $I_i \cap K \neq \emptyset$.

Dakle, pokazali smo sljedeće:

$$I_i \cap K \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \text{postoje } l, u, p \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } (i, l, u, p) \in \Omega. \tag{2.22}$$

Definirajmo sada skupove:

$$\Omega_1 = \{(i,l,u,p) \in \mathbb{N}^4 \mid S' \subseteq \bigcup \mathscr{H}_l \cup J_u\};$$
$$\Omega_2 = \{(i,l,u,p) \in \mathbb{N}^4 \mid S \subseteq J_u\};$$
$$\Omega_3 = \{(i,l,u,p) \in \mathbb{N}^4 \mid \mathscr{H}_l \text{ je formalni cirkularni lanac}\};$$
$$\Omega_4 = \{(i,l,u,p) \in \mathbb{N}^4 \mid (\forall j \in \{1,\dots,\bar{l}\})(u,(l)_j) \in \mathscr{D}\};$$
$$\Omega_5 = \{(i,l,u,p) \in \mathbb{N}^4 \mid 1 \le p \le \bar{l}, ((l)_p, f(i)) \in \mathscr{C}\};$$
$$\Omega_6 = \{(i,l,u,p) \in \mathbb{N}^4 \mid (u,\alpha) \in \mathscr{C}\};$$
$$\Omega_7 = \{(i,l,u,p) \in \mathbb{N}^4 \mid (\forall j \in \{0,\dots,\bar{l}\})(\exists j' \in \{0,\dots,m\})((l)_j, a_{j'}) \in \mathscr{C}\}.$$

Jasno je da je $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4 \cap \Omega_5 \cap \Omega_6 \cap \Omega_7$. Skup Ω_2 je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$ zato što je S poluizračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Koristeći tehnike iz Propozicije 2.1.2 i Propozicije 2.2.2 i 2.2.3, zaključujemo da su Ω_1 i Ω_3 izračunljivo prebrojivi u $\mathbb{N}^4$. Također, i Ω_6 je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$.

Definirajmo sada

$$\overline{\Omega}_4 = \{(l,u) \in \mathbb{N}^2 \mid (\forall j \in \{1,\dots,\bar{l}\})(u,(l)_j) \in \mathscr{D}\}.$$

Neka su $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ i $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$ funkcije dane sa $g(l,u,j) = (u,(l)_j))$, $(l,u,j) \in \mathbb{N}^3$ i $\Psi(l,u) = \{(l,u,j) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \le j \le \bar{l}\}$, $(l,u) \in \mathbb{N}^2$. S obzirom na to da su one izračunljive, i funkcija $g(\Psi) : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\begin{aligned} g(\Psi)(l,u) = g(\Psi(l,u)) &= \\ &= g(\{(l,u,j) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \le j \le \bar{l}\}) = \\ &= \{(u,(l)_j)) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \le j \le \bar{l}\}, \end{aligned}$$

$(l,u) \in \mathbb{N}^2$, je po Propoziciji 1.1.9 izračunljiva. Budući da vrijedi

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_4 &= \{(l,u) \in \mathbb{N}^2 \mid (\forall j \in \{1,\dots,\bar{l}\})(u,(l)_j) \in \mathscr{D}\} = \\ &= \{(l,u) \in \mathbb{N}^2 \mid g(\Psi)(l,u) \subseteq \mathscr{D}\}, \end{aligned}$$

skup $\overline{\Omega}_4$ je po Propoziciji 1.1.10 izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$. Sada, kao u dokazu Propozicije 2.1.2, zaključujemo da je i Ω_4 izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$. Dalje, neka je

$$\overline{\Omega}_5 = \{(i,l,p) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \le p \le \bar{l}, ((l)_p, f(i)) \in \mathscr{C}\}.$$

Funkcija $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$, $h(i,l,p) = ((l)_p, f(i))$, $(i,l,p) \in \mathbb{N}^3$ je izračunljiva i vrijedi

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_5 &= \{(i,l,p) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \le p \le \bar{l}, ((l)_p, f(i)) \in \mathscr{C}\} = \\ &= \{(i,l,p) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \le p \le \bar{l}\} \cap \{(i,l,p) \in \mathbb{N}^3 \mid ((l)_p, f(i)) \in \mathscr{C}\} = \\ &= \{(i,l,p) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \le p \le \bar{l}\} \cap h^{-1}(\mathscr{C})\end{aligned}$$

pa koristeći Propoziciju 1.1.6 zaključemo da je $\overline{\Omega}_5$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$ pa je onda i Ω_5 izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$. Napokon, definirajmo

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_7 &= \{l \in \mathbb{N} \mid (\forall j \in \{0,\ldots,\bar{l}\})(\exists j' \in \{0,\ldots,m\})((l)_j, a_{j'}) \in \mathscr{C}\} = \\ &= \{l \in \mathbb{N} \mid (\forall j \in \{0,\ldots,\bar{l}\})(\exists k \in A)((l)_j, k) \in \mathscr{C}\}\end{aligned}$$

gdje je $A = \{a_0, \ldots, a_m\}$ konačan u $\mathbb{N}$ pa onda i izračunljiv. Definirajmo sada

$$T = \{(j,l,k) \in \mathbb{N}^3 \mid ((l)_j, k) \in \mathscr{C}\}.$$

Jasno je da je T izračunljivo prebrojiv skup u $\mathbb{N}^3$. Dalje, definirajmo

$$S = \{(j,l) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{N})(k \in A \wedge (j,l,k) \in T)\}.$$

Da bismo pokazali da je S izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$, neka je

$$R = \{(j,l,k) \in \mathbb{N}^3 \mid k \in A\} \cap T.$$

Skup R je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$ zato što su A i T izračunljivo prebrojivi, a budući da vrijedi

$$S = \{(j,l) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{N})(j,l,k) \in R\},$$

po Teoremu 1.1.1 zaključujemo da je S izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$. Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ dana sa $\Phi(l) = \{0,\ldots,\bar{l}\} \times \{l\}$, $l \in \mathbb{N}$. Po Propoziciji 1.1.11 je Φ izračunljiva. Budući da možemo pisati

$$\overline{\Omega}_7 = \{l \in \mathbb{N} \mid \Phi(l) \subseteq S\}$$

po Teoremu 1.1.10 zaključemo da je $\overline{\Omega}_7$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$. Kao i ranije, Ω_7 je također izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$ pa je posljedično i Ω. Napokon, iz (2.22) primjenom Teorema 1.1.1 zaključujemo da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset\}$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$ pa je onda K izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathscr{T}, (I)_i)$, što završava dokaz. ∎

2.3. KONAČNO MNOGO KONTINUUMA

Sljedeći rezultat dokazujemo koristeći Propoziciju 2.1.2 i Propoziciju 2.2.6.

Teorem 2.3.1. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je $S \subseteq X$ izračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Neka je $(K_0, \{a_0, b_0\}), \ldots, (K_n, \{a_n, b_n\})$ konačan niz parova takvih da je svaki K_i, kao potprostor od $(X, \mathscr{T})$, ili kontinuum koji je lančast od a_i do b_i, gdje su $a_i, b_i \in K_i$ takvi da je $a_i \neq b_i$ ili kontinuum koji je cirkularno lančast, ali nije lančast, gdje su $a_i, b_i \in K_i$ takvi da je $a_i = b_i$.

Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

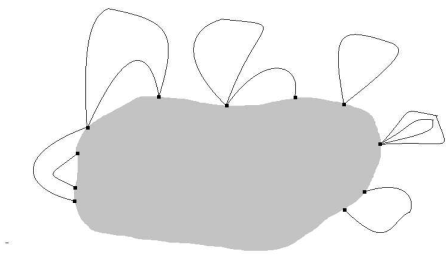
(1) $K_i \cap S = \{a_i, b_i\}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$;

(2) $K_i \cap K_j \subseteq S$ za sve $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ takve da je $i \neq j$.

Neka je

$$T = S \cup K_0 \cup \cdots \cup K_n.$$

Vidjeti Sliku 2.3. Ako je T poluizračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, onda je T i izračunljiv.



Slika 2.3: Skup T: sivi skup je S.

Dokaz. Neka je $i \in \{0, \ldots, n\}$. Označimo li

$$L_i = \bigcup_{j \neq i} K_j,$$

onda je $T = S \cup L_i \cup K_i$. Po pretpostavci su S i T poluizračunljivi. Iz (1) i (2) slijedi da je $L_i \cap K_i \subseteq \{a_i, b_i\}$, što zajedno s (1) i Propozicijama 2.1.2 i 2.2.6 implicira da je K_i izračunljivo prebrojiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$.

Zato je i T, kao konačna unija izračunljivo prebrojivih skupova, opet izračunljivo prebrojiv skup. S obzirom na to da je T i poluizračunljiv, T je izračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. ■

2.4. Adjunkcijski prostori

Teorem 2.3.1, jasno je, vrijedi i u slučaju kada je svaki kontinuum K_i definiran s $K_i = [0,1]$. U tom bismo slučaju mogli reći da je poluizračunljiv skup dobiven *lijepljenjem* konačno mnogo lukova preko njihovih krajnjih točaka i topoloških kružnica preko neke istaknute točke (pazeći pritom da se svi oni sijeku eventualno u tim točkama) na neki izračunljiv skup zapravo izračunljiv. Definicije i tvrdnje koje slijede opravdat će nam ovu terminologiju.

Neka je X topološki prostor i neka je $\mathscr{F}$ neka particija od X. Neka je $p : X \to \mathscr{F}$ (jedinstvena) funkcija takva da je $x \in p(x)$ za svaki $x \in X$ (takvu p nazivamo kvocijentim preslikavanjem). Topologiju na $\mathscr{F}$ definiramo na sljedeći način: $V \subseteq \mathscr{F}$ je otvoren ako i samo ako je $p^{-1}(V)$ otvoren u X. Ovako definiranu topologiju nazivamo **kvocijentnom topologijom** i $\mathscr{F}$, zajedno s kvocijentom topologijom, nazivamo **kvocijentim prostorom** od X. Jasno je da je $p : X \to \mathscr{F}$ neprekidna surjekcija. Primjetimo da je $p^{-1}(V) = \bigcup V$.

Napomena 2.4.1. Prisjetimo se poznatih činjenica (vidjeti [19]):

(i) Neka su X i Y topološki prostori takvi da je X kompaktan a Y Hausdorffov. Neka je $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija i neka je $X/f = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$. Tada su X/f (sa kvocijentom topologijom) i Y homeomorfni.

(ii) Neka je $\mathscr{F}$ particija od $[0,1]$ dana sa $\mathscr{F} = \{\{x\} \mid 0 < x < 1\} \cup \{\{0,1\}\}$. Ako je dana euklidska topologija na $[0,1]$ i kvocijentna topologija na $\mathscr{F}$, onda su $\mathscr{F}$ i jedinična kružnica S^1 homeomorfni.

Neka su A i B topološki prostori i neka je C potprostor od B te $f : C \to A$ preslikavanje. Promatrajmo topološki prostor $A \sqcup B$ – disjunktnu uniju od A i B, to jest $A \sqcup B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$ (ubuduće, identificirat ćemo A s $A \times \{1\}$ i B s $B \times \{2\}$) pri čemu je topologija na $A \sqcup B$ dana sa: $U \subseteq A \sqcup B$ je otvoren ako i samo ako je $U \cap A$ otvoren u A i $U \cap B$ otvoren u B.

Neka je na $A \sqcup B$ dana particija $\mathscr{F}$ sa:

$$\mathscr{F} = \{\{a\} \mid a \in A \setminus f(C)\} \cup \{\{a\} \cup f^{-1}(\{a\}) \mid a \in f(C)\} \cup \{\{b\} \mid b \in B \setminus C\}.$$

Tada $\mathscr{F}$, zajedno s kvocijentom topologijom, nazivamo **adjunkcijskim prostorom** dobivenim lijepljenjem B na A po funkciji f i označavamo sa $A \cup_f B$.

Primjer 2.4.2. Neka je X Hausdorffov prostor i neka su A, B i C kompaktni skupovi u X takvi da je $A \cap B = C$. Neka je $f : C \to A$ definirana s $f(x) = x$. Tada su $A \cup_f B$ i $A \cup B$ homeomorfni.

Uistinu, uz prirodno definiranu fukciju $g : A \sqcup B \to A \cup B$ jasno je da su $(A \sqcup B)/g$ i $A \cup B$ homeomorfni po Napomeni 2.4.1. Štoviše, $(A \sqcup B)/g = A \cup_f B$.

Napomena 2.4.3. Ako su A i B topološki prostori, a C zatvoren potprostor od B i $f : C \to A$ neprekidna funkcija, možemo identificirati A s očitim potprostorom od $A \cup_f B$: taj potprostor je slika od A po kompoziciji

$$A \xrightarrow{i} A \sqcup B \xrightarrow{p} A \cup_f B,$$

gdje je i inkluzija, a p kvocijentno preslikavanje. Lako se pokaže da je taj potprostor zapravo homeomorfan A [19].

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $I_0, \dots, I_n$ konačan niz topoloških prostora definiranih s $I_i = [0,1]$, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$. Također, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$, neka je $\partial I_i = \{0,1\}$. Tada je $\partial I_0 \sqcup \cdots \sqcup \partial I_n$ potprostor disjunktne unije $I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n$.

Neka je A topološki prostor i neka je $f : \partial I_0 \sqcup \cdots \sqcup \partial I_n \to A$ bilo koja funkcija. Promatramo li adjunkcijski prostor

$$A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n), \tag{2.23}$$

uz pretpostavku da A ima izračunljiv tip, prirodno je pitati se ima li tada i (2.23) izračunljiv tip? Sljedeći jednostavni primjer pokazuje da je odgovor na to pitanje općenito negativan.

Primjer 2.4.4. Neka je $A = \{0,1\}$. Po Propoziciji 1.3.10 jasno je da A ima izračunljiv tip. Neka je $f : \{0,1\} \to A$ idetiteta i neka je dan adjunkcijski prostor $A \cup_f [0,1]$. Po Primjeru 2.4.2 slijedi da su $A \cup_f [0,1]$ i $[0,1]$ homeomorfni, a poznato je da $[0,1]$ nema izračunljiv tip (jer postoji $\gamma < 1$ takav da je $[\gamma, 1]$ poluizračunljiv skup koji nije izračunljiv) pa onda ni $A \cup_f [0,1]$ nema izračunljiv tip.

Ipak, imamo sljedeći rezultat:

Teorem 2.4.5. Neka je A topološki prostor i neka je $I_0, \dots, I_n$ niz topoloških prostora takav da je $I_i = [0,1]$, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ i neka je $f : \partial I_0 \sqcup \cdots \sqcup \partial I_n \to A$ funkcija. Ako A ima izračunljiv tip, onda

$$(A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n), A)$$

ima izračunljiv tip (gdje je A identificiran s potprostorom od $A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ kao u Napomeni 2.4.3).

Dokaz. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su T i S takvi poluizračunljivi skupovi u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ za koje postoji homeomorfizam $g : A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n) \to T$ koji preslikava A u S. Preciznije, vrijedi $g(p(i(A)) = S$, gdje je $i : A \to A \sqcup (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ inkluzija, a $p : A \sqcup (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n) \to A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ kvocijentno preslikavanje. Poistovjećivat ćemo A i I_i s odgovarajućim slikama po inkluzijama

$$A \to A \sqcup (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n) \text{ i } I_i \to A \sqcup (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n),$$

redom.

Tvrdimo da je T izračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Da bismo mogli primjeniti Teorem 2.3.1 dovoljno je pokazati da T, uvjetno govoreći, izgleda kao na Slici 2.3. U tu svrhu, s obzirom na to da je g homeomorfizam, moramo pokazati da $A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ izgleda kao na Slici 2.3.

Budući da je T Hausdorffov prostor (kao potprostor od $(X, \mathscr{T})$), $A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ je također Hausdorffov prostor. Nadalje, očito je da je $A \sqcup (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ kompaktan ako je A kompaktan (inače tvrdnja trivijalno vrijedi).

Neka je $i \in \{0, \ldots, n\}$. Tada je $p(I_i)$ kompaktan u $A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$. S obzirom na to da je p surjekcija,

$$A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n) = p(A) \cup p(I_1) \cup \cdots \cup p(I_n).$$

Po definiciji adjunkcijskog prostora vrijedi da je p injektivan na $I_i \setminus \{1\}$ i da točke $0, 1 \in I_i$ preslikava u istu točku u adjunkcijskom prostoru $A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ ako i samo ako je $f(0) = f(1)$. Prema tome,

$$p|_{I_i} : I_i \to p(I_i)$$

je neprekidna surjekcija koja je ili injektivna (posebno $p(0) \neq p(1)$) ili je injektivna na $I_i \setminus \{1\}$ i vrijedi $p(0) = p(1)$. U prvome je slučaju $p|_{I_i}$ je homeomorfizam (jer je I_i kompaktan a $p(I_i)$ Hausdorffov), pa je $p(I_i)$ homeomorfan $[0, 1]$. U drugome slučaju, iz Napomene 2.4.1 slijedi da je $p(I_i)$ homemorfan S^1. Dakle, $p(I_i)$ je ili luk ili topološka kružnica.

Funkcija f je neprekidna s obzirom na to da je $\partial I_0 \sqcup \cdots \sqcup \partial I_n$ diskretni prostor koji je još zatvoren u $I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n$. Prema tome, kao što je već ranije spomenuto, A i $p(A)$ su homeomorfni. Nadalje, $p(A)$ i S su također homeomorfni (homeomorfizam je restrikcija od g) pa slijedi da su A i S homemomorfni. Ovo, zajedno s činjenicom da A ima izračunljiv tip, implicira da je S izračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$.

Sada imamo da je $A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n)$ zapravo unija skupova $p(A)$, $p(I_0)$, ..., $p(I_n)$. Za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ postoje $x_i, y_i \in p(A)$ takvi da je $p(I_i) \cap p(A) = \{x_i, y_i\}$ i da je $p(I_i)$ ili luk s krajnjim točkama x_i i y_i, $x_i \neq y_i$ ili je topološka kružnica i $x_i = y_i$. Nadalje, ako su $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takvi da je $i \neq j$, onda je $p(I_i) \cap p(I_j) \subseteq p(A)$.

Iz ovoga i činjenice da je $g : A \cup_f (I_0 \sqcup \dots \sqcup I_n) \to T$ homemorfizam, možemo zaključiti da za konačni niz $(K_i, \{a_i, b_i\})_{0 \leq i \leq n}$ definiran s $K_i = g(p(I_i))$, $a_i = g(x_i)$, $b_i = g(y_i)$ vrijedi da je $T = S \cup K_0 \cup \dots \cup K_n$ i da su onda ispunjene pretpostavke Teorema 2.3.1 pa je onda T izračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. ■

3. LANČASTI GRAF

3.1. POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA

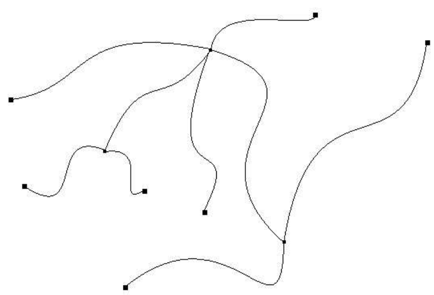
Na početku poglavlja prisjećamo se pojma grafa.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $\mathscr{I}$ neprazna konačna familija (nedegeneriranih) linijskih segmenata u $\mathbb{R}^n$ takva da vrijedi sljedeće:

$$\text{ako su } I, J \in \mathscr{I} \text{ takvi da je } I \neq J \text{ i } I \cap J \neq \emptyset, \text{ onda je } I \cap J = \{a\}, \tag{3.1}$$

gdje je a krajnja točka segmenata I i J. Svaki topološki prostor G homeomorfan $\bigcup_{I \in \mathscr{I}} I$ nazivamo **grafom**.

Ako je G graf i $x \in G$, kažemo da je x **krajnja točka** od G ako postoji otvorena okolina N od x u G homeomorfna $[0, \infty)$ po homeomorfizmu koji preslikava x u 0. Ako je f homeomorfizam a $\mathscr{I}$ familija iz definicije od G, onda je x krajnja točka od G ako i samo ako postoji jedinstveni $I \in \mathscr{I}$ takav da je $f(x)$ krajnja točka od I (više se može pronaći u [11]). Vidjeti Sliku 3.1.



Slika 3.1: Graf. Istaknute točke su njegove rubne točke.

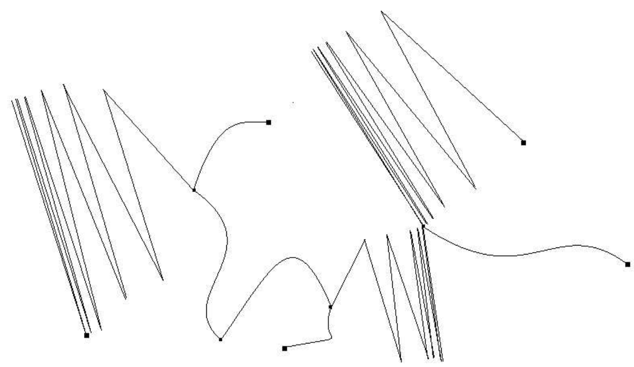
Uvedimo sada pojam lančastog grafa.

Definicija 3.1.1. Neka je A topološki prostor i neka je $V \subseteq A$ konačan podskup od A, a $\mathscr{K}$ konačna familija parova oblika $(K,\{a,b\})$, gdje su $a,b \in V, a \neq b$ i gdje je $K \subseteq A$ kontinuum koji je lančast od a do b. Neka je

$$A = V \cup \bigcup_{(K,\{a,b\}) \in \mathscr{K}} K$$

i neka vrijedi sljedeće: ako su $(K,\{a,b\})$, $(L,\{c,d\}) \in \mathscr{K}$ i $K \neq L$, onda je $\mathrm{card}(K \cap L) < \aleph_0$. Tada uređenu trojku $(A,\mathscr{K},V)$ nazivamo **lančastim grafom**.

Definicija 3.1.2. Neka je $(A,\mathscr{K},V)$ lančasti graf i neka je $a \in V$. Kažemo da je a **krajnja točka** od $(A,\mathscr{K},V)$ ako postoje točno jedan $K \subseteq A$ i barem jedan $b \in V$ takvi da je $(K,\{a,b\}) \in \mathscr{K}$.



Slika 3.2: Lančasti graf. Istaknute točke su njegove krajnje točke. Tri lančasta kontinuuma su homeomorfna kontinuumu K iz Primjera 1.4.12.

Primjer 3.1.3. Neka je G graf, neka je $\mathscr{I}$ familija iz definicije od G i neka je f homeomorfizam iz definicije od G. Neka je E skup svih krajnjih točaka svih $I \in \mathscr{I}$. Neka je $\mathscr{K}$ familija svih parova oblika $(f(I),\{f(a),f(b)\})$ takvih da je $I \in \mathscr{I}$ i da su a i b krajnje točke od I. Napokon, neka je $V = f(E)$. Tada je očito da je $(G,\mathscr{K},V)$ lančasti graf. Vrijedi da je x krajnja točka od G ako i samo ako je x krajnja točka od $(G,\mathscr{K},V)$.

Primjer 3.1.4. Pretpostavimo da je K kontinuum koji je lančast od a do b, $a \neq b$. Tada je $(K,\{(K,\{a,b\})\},\{a,b\})$ lančasti graf s krajnjim točkama a i b.

Ako je $(G,\mathscr{K},V)$ lančasti graf, G nije nužno graf, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 3.1.5. Neka su K, a i b iz Primjera 1.4.12. Tada je $(K, \{(K, \{a,b\})\}, \{a,b\})$ lančasti graf. Međutim, K nije graf: K nije lokalno povezan, a jednostavno se može pokazati da je svaki graf lokalno povezan.

Primjer 3.1.6. Neka su K, a i b iz Primjera 1.4.12 i neka je $c = (0,1)$. S obzirom na to da je kontinuum K također lančast od b do c, uređena trojka $(K, \{(K, \{b,a\}), (K, \{b,c\})\}, \{a,b,c\})$ je lančasti graf s krajnjim točkama a, b i c.

3.2. Izračunljivost lančastog grafa

Sljedeći je rezultat dokazan u [11].

Teorem 3.2.1. Neka je G graf i neka je E skup svih krajnjih točaka od G. Tada (G,E) ima izračunljiv tip.

Primjer 3.2.2. Neka je $(K,\{(K,\{b,a\}),(K,\{b,c\})\},\{a,b,c\})$ lančasti graf iz Primjera 3.1.6. Koristeći Napomenu 1.4.10 i Teorem 2.1.1, jasno je da $(K,\{a,b,c\})$ ima izračunljiv tip, iako K nije graf.

U ovom poglavlju dokazujemo da rezultat analogan prethodnom vrijedi općenito za lančaste grafove.

Teorem 3.2.3. Ako je $(A,\mathscr{K},V)$ lančasti graf i B skup svih njegovih krajnjih točaka, onda (A,B) ima izračunljiv tip.

Po Primjerima 3.1.3 i 3.1.5, Teorem 3.2.3 je generalizacija Teorema 3.2.1. Nadalje, po Primjeru 3.1.4, Teorem 3.2.3 je generalizacija Teorema 2.1.1, koji se još može iskazati i ovako: ako je K kontinuum koji je lančast od a do b, onda $(K,\{a,b\})$ ima izračunljiv tip.

Napomena 3.2.4. Koristeći Napomenu 1.4.10 možemo zaključiti sljedeće: ako je $(A,\mathscr{K},V)$ lančasti graf, B skup svih njegovih krajnjih točaka, A' topološki prostor i $f:A\to A'$ homeomorfizam, onda je

$$(A',\{(f(K),\{f(a),f(b)\})\mid (K,\{a,b\})\in\mathscr{K}\},f(V))$$

lančasti graf i $f(B)$ je skup svih njegovih krajnjih točaka.

Definicija 3.2.5. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su S i T podskupovi od X takvi da je $S\subseteq T$. Kažemo da je S **izračunljivo prebrojiv do na** T ako postoji izračunljivo prebrojiv podskup Ω od $\mathbb{N}$ takav da za svaki $i\in\mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } I_i\cap S\neq\emptyset,\ \text{onda je } i\in\Omega;$$

$$\text{ako je } i\in\Omega,\ \text{onda je } I_i\cap T\neq\emptyset.$$

Jasno je da je u slučaju kada je S zatvoren i izračunljivo prebrojiv do na S, S onda i izračunljivo prebrojiv u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.

Napomena 3.2.6. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $S_0, \dots, S_k$ i T podskupovi od X takvi da je S_i izračunljivo prebrojiv do na T za svaki $i \in \{0, \dots, k\}$. Tada direktno slijedi da je $S_0 \cup \cdots \cup S_k$ izračunljivo prebrojiv do na T.

Sada možemo dokazati Teorem 3.2.3. U smislu Napomene 3.2.4 dovoljno je dokazati sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.2.7. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su S i T poluizračunljivi skupovi u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Ako postoje $\mathscr{K}$ i V takvi da je $(S, \mathscr{K}, V)$ lančasti graf, a T skup svih njegovih krajnjih točaka, onda je S izračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$.

Prije samog dokaza Propozicije 3.2.7 potrebne su nam još neke činjenice o lančastim kontinuumima. Na primjer, dokazat ćemo da za dani kontinuum K i bilo koju njegovu točku c možemo pronaći potkontinuum L od K koji, ne samo da sadrži točku c, nego joj je i *dovoljno blizu*. Preciznije, pokazat ćemo sljedeće:

Lema 3.2.8. Neka je kontinuum (K,d) lančast od a do b, $a,b \in K, a \neq b$ i neka je $c \in K$ bilo koji. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji netrivijalni kontinuum $L \subseteq K$ takav da je $c \in L$ i $L \subseteq B(c, \varepsilon)$.

Prvo ćemo dokazati nekoliko lema koje će nam koristiti u dokazu spomenute tvrdnje.

Lema 3.2.9. Neka je kontinuum (K,d) lančast od a do b, $a,b \in K$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε – lanac $C_0, \dots, C_m$ u (K,d) koji pokriva K od a do b takav da je $\overline{C_0}, \dots, \overline{C_m}$ također lanac u (K,d).

Dokaz. S obzirom na to da je kontinuum (K,d) lančast od a do b, postoji kompaktan $\frac{\varepsilon}{4}$ – lanac $K_0, \dots, K_m$ u (K,d) koji pokriva K od a do b. Definirajmo

$$\delta = \min\left\{\min\left\{d(K_i, K_j) \mid |i-j| \geq 2\right\}, \varepsilon\right\}. \tag{3.2}$$

Budući da je $d(K_i, K_j) > 0$ za disjunktne skupove K_i i K_j, broj δ je pozitivan.

Za svaki $i \in \{0, \dots, m\}$, jer je K_i kompaktan, postoje $k_i \in \mathbb{N}$ i $x_0^i, \dots, x_{k_i}^i \in K_i$ takvi da vrijedi

$$K_i \subseteq \bigcup_{l=0}^{k_i} B\left(x_l^i, \frac{\delta}{4}\right). \tag{3.3}$$

Stavimo

$$C_i = \bigcup_{l=0}^{k_i} B\left(x_l^i, \frac{\delta}{4}\right)$$

za $i \in \{0,\dots,m\}$. Tako definirani C_i su otvoreni skupovi u (K,d) i po (3.3) je $a \in C_0$, $b \in C_m$,

$$K \subseteq C_0 \cup \cdots \cup C_m$$

i za sve $i,j \in \{0,\dots,m\}$ takve da je $|i-j| \leq 1$ vrijedi $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Posebno, $\overline{C_i} \cap \overline{C_j} \neq \emptyset$.

Nadalje, za bilo koje $x,y \in C_i$ postoje $l,p \in \{0,\dots,k_i\}$ takvi da je $x \in B\left(x_l^i, \frac{\delta}{4}\right)$ i $y \in B\left(x_p^i, \frac{\delta}{4}\right)$. Dakle,

$$d(x,y) \leq d(x,x_l^i) + d(x_l^i,x_p^i) + d(x_p^i,y) < \frac{\delta}{4} + \operatorname{diam} K_i + \frac{\delta}{4} < \frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\delta}{4} \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

to jest $\operatorname{diam} C_i < \varepsilon$ za svaki $i \in \{0,\dots,m\}$.

Jasno je da za sve $i,j \in \{0,\dots,m\}$ takve da je $|i-j| \geq 2$ i sve $l \in \{0,\dots,k_i\}$, $s \in \{0,\dots,k_j\}$ vrijedi

$$\overline{B}\left(x_l^i, \frac{\delta}{4}\right) \cap \overline{B}\left(x_s^j, \frac{\delta}{4}\right) = \emptyset$$

jer bismo inače imali

$$d(x_l^i, x_s^j) \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta \leq d(K_i,K_j),$$

što je nemoguće. Iz toga, budući da za svaki $i \in \{0,\dots,m\}$ vrijedi

$$\overline{C_i} \subseteq \bigcup_{l=0}^{k_i} \overline{B}\left(x_l^i, \frac{\delta}{4}\right),$$

zaključujemo da je $\overline{C_i} \cap \overline{C_j} = \emptyset$ za sve $i,j \in \{0,\dots,m\}$ takve da je $|i-j| \geq 2$. Posebno, $C_i \cap C_j = \emptyset$. Dakle, $C_0,\dots,C_m$ je traženi lanac u (K,d). ■

Lema 3.2.10. Neka je (K,d) kontinuum koji je lančast od a do b, $a,b \in K$ i neka je $c \in K$ bilo koji. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoreni ε – lanac $C_0,\dots,C_m$ u (K,d) koji pokriva K od a do b takav da vrijedi sljedeće:

1. $\overline{C_0},\dots,\overline{C_m}$ je također lanac;

2. postoji jedinstveni $u \in \{0,\dots,m\}$ takav da je $c \in C_u$.

Dokaz. S obzirom na to da je kontinuum (K,d) lančast od a do b, po prethodnoj lemi, postoji otvoreni $\frac{\varepsilon}{3}$ – lanac $D_0,\dots,D_n$ u (K,d) koji pokriva K od a do b takav da je $\overline{D_0},\dots,\overline{D_n}$ također lanac. Neka je $k \in \{0,\dots,n\}$ takav da je $c \in D_k$. Ako je $k=0$ onda $C_0 = D_0 \cup D_1$ i $C_i = D_{i+1}$ za $i \in \{1,\dots,n-1\}$ definira traženi lanac. Slično, ako je $k=n$ lanac je definiran sa $C_i = D_i$ za $i \in \{0,\dots,n-2\}$ i $C_{n-1} = D_{n-1} \cup D_n$. Konačno, ako je $k \neq 0,n$ stavimo $C_{k-1} = D_{k-1} \cup D_k \cup D_{k+1}$. Ako je, uz to, $k \geq 2$ stavimo $C_i = D_i$ za $i \in \{0,\dots,k-2\}$, a ako je $k \leq n-2$ onda $C_i = D_{i+2}$ za $i \in \{k,\dots,n-2\}$. ■

Sljedeća je lema dokazana u [13].

Lema 3.2.11. Neka je X skup i neka su $C_0,\dots,C_m$ i $D_0,\dots,D_n$ dva lanca u X takva da $\{D_0,\dots,D_n\}$ profinjuje $\{C_0,\dots,C_m\}$. Pretpostavimo da su $i,j,k \in \{0,\dots,m\}$ i $p,q \in \{0,\dots,n\}$ takvi da je $i<k<j$, $p<q$, $D_p \subseteq C_i$ i $D_q \subseteq C_j$. Tada postoji $r \in \{0,\dots,n\}$ takav da je $p<r<q$ i $D_r \subseteq C_k$.

Sada se lako dokaže sljedeće:

Lema 3.2.12. Neka je X skup i neka su $C_0,\dots,C_m$ i $D_0,\dots,D_n$ dva lanca u X takva da $\{D_0,\dots,D_n\}$ profinjuje $\{C_0,\dots,C_m\}$. Pretpostavimo da su $i,j,k \in \{0,\dots,m\}$ i $p,q \in \{0,\dots,n\}$ takvi da je $i<k<j$, $p \neq q$, $D_p \subseteq C_i$ i $D_q \subseteq C_j$. Tada postoji $r \in \{0,\dots,n\}$ takav da je $\min\{p,q\} < r < \max\{p,q\}$ i $D_r \subseteq C_k$.

Dokaz. Ako je $p<q$ zaključak slijedi iz Leme 3.2.11. Inače, ako je $p>q$, ista lema, samo pimjenjena na lanac $D'_0,\dots,D'_n$ definiran s $D'_j = D_{n-j}$ za svaki $j \in \{0,\dots,n\}$, dokazuje tvrdnju. ■

Da bismo dokazali Lemu 3.2.8, moramo posebno promotriti slučaj kada je $c=a$ ili $c=b$ i slučaj kada je $c \neq a,b$. Stoga ćemo se prisjetiti sljedećeg: neka su $\mathscr{A}=(A_0,\dots,A_m)$ i $\mathscr{B}=(B_0,\dots,B_n)$ konačni nizovi podskupova od X. Kažemo da $\mathscr{A}$ **strogo profinjuje** $\mathscr{B}$ ako $\{A_0,\dots,A_m\}$ profinjuje $\{B_0,\dots,B_n\}$, $A_0 \subseteq B_0$ i $A_m \subseteq B_n$.

Dokaz sljedeće leme može se pronaći u [15].

Lema 3.2.13. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i neka je $(\mathscr{C}^i)_{i\in\mathbb{N}}$, gdje je $\mathscr{C}^i = (C^i_0,\dots,C^i_{m_i})$, niz lanaca takav da $\overline{C^{i+1}_0},\dots,\overline{C^{i+1}_{m_{i+1}}}$ strogo profinjuje $C^i_0,\dots,C^i_{m_i}$ za svaki $i\in\mathbb{N}$ i da vrijedi $\operatorname{diam} C^i_j < 2^{-i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ i za svaki $j \in \{0,\dots,m_i\}$. Neka je

$$S = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (\overline{C^i_0} \cup \dots \cup \overline{C^i_{m_i}}).$$

Tada je S lančast od a do b, gdje je $a \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C^i_0$, $b \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C^i_{m_i}$.

Sada, koristeći prethodne leme, dokazujemo sljedeće:

Lema 3.2.14. Neka je kontinuum (K,d) lančast od a do b, $a,b \in K, a \neq b$ i neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji. Tada postoje $c \in K$ i $L \subseteq K$ takvi da je $c \neq a$, L je kontinuum koji je lančast od a do c i $L \subseteq B(a,\varepsilon)$.

Dokaz. Prvo ćemo konstruirati niz lanaca $(\mathscr{C}^i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathscr{C}^i = (C_0^i, \dots, C_{m_i}^i)$, takvih da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

1. $\mathscr{C}^i$ pokriva K od a do b i $\operatorname{diam} C_j^i < 2^{-i}$ za svaki $j \in \{0, \dots, m_i\}$;

2. $\overline{C_0^{i+1}}, \dots, \overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ strogo profinjuje $C_0^i, \dots, C_{m_i}^i$;

3. $\operatorname{diam} C_j^0 < \min\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{d(a,b)}{4}\}$ za svaki $j \in \{0, \dots, m_0\}$.

S obzirom na to da je kontinuum (K,d) lančast od a do b, postoji otvoreni $\min\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{d(a,b)}{4}, 1\}$ – lanac $\mathscr{C}^0 = (C_0^0, \dots, C_{m_0}^0)$ u (K,d) koji pokriva K od a do b. Budući da je $\operatorname{diam} C_j^0 < \frac{d(a,b)}{4}$ za svaki $j \in \{0, \dots, m_0\}$, vrijedi

$$d(a,b) \leq \operatorname{diam}(C_0^0 \cup \dots \cup C_{m_0}^0) \leq \operatorname{diam} C_0^0 + \dots + \operatorname{diam} C_{m_0}^0 < (m_0+1)\frac{d(a,b)}{4}$$

pa je onda $m_0 + 1 > 4$, to jest $m_0 \geq 4$. Primjetimo da je $\operatorname{diam}(C_0^0 \cup C_1^0 \cup C_2^0) < \varepsilon$.

Neka je sada $\mathscr{C}^i = (C_0^i, \dots, C_{m_i}^i)$ otvoreni lanac u (K,d) koji ispunjava navedene uvjete. S obzirom na to da je $\mathscr{U} = \{C_0^i, \dots, C_{m_i}^i\}$ otvoreni pokrivač od (K,d), postoji Lebesqueov broj $\lambda > 0$ od $\mathscr{U}$. Jer je $a \in C_0^i$ i C_0^i je otvoren skup, postoji $r_a > 0$ takav da je $B(a, r_a) \subseteq C_0^i$. Slično, postoji $r_b > 0$ takav da je $B(b, r_b) \subseteq C_{m_i}^i$. Budući da je (K,d) lančasti kontinuum, postoji otvoreni $\min\{r_a, r_b, \lambda, 2^{-(i+1)}\}$ – lanac $\mathscr{C}^{i+1} = (C_0^{i+1}, \dots, C_{m_{i+1}}^{i+1})$ u (K,d) koji pokriva K od a do b. Zbog toga što je $\operatorname{diam} \overline{C_j^{i+1}} = \operatorname{diam} C_j^{i+1} < \lambda$ za svaki $j \in \{0, \dots, m_{i+1}\}$, lanac $\overline{C_0^{i+1}}, \dots, \overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ profinjuje $C_0^i, \dots, C_{m_i}^i$. Nadalje, $a \in C_0^{i+1}$ i $\operatorname{diam} \overline{C_0^{i+1}} = \operatorname{diam} C_0^{i+1} < r_a$ pa je $\overline{C_0^{i+1}} \subseteq B(a, r_a)$, a onda je $\overline{C_0^{i+1}} \subseteq C_0^i$. Analogno, $\overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}} \subseteq C_{m_i}^i$. Ovime je završena rekurzivna konstrukcija niza $(\mathscr{C}^i)$ sa svojstvima 1. – 3.

Sada želimo, za svaki $i \in \mathbb{N}$, odabrati

$$n_i \in \{2, \dots, m_i - 2\} \tag{3.4}$$

takav da

$$\overline{C_0^{i+1}}, \dots, \overline{C_{n_{i+1}}^{i+1}} \text{ strogo profinjuje } C_0^i, \dots, C_{n_i}^i. \tag{3.5}$$

Neka je $n_0 = 2$. Jer je $m_0 \geq 4$, jasno je da je $n_0 \in \{2, \dots, m_0 - 2\}$. Pretpostavimo da za $i \in \mathbb{N}$ postoji $n_i \in \{2, \dots, m_i - 2\}$ takav da vrijedi (3.4).

Neka je

$$k = \min\{j \in \{0, \dots, m_{i+1}\} \mid \overline{C_j^{i+1}} \subseteq C_{n_i}^i\}. \tag{3.6}$$

Broj k je dobro definiran. Naime, ako pretpostavimo da ne postoji $j \in \{0, \ldots, m_{i+1}\}$ takav da je $\overline{C_j^{i+1}} \subseteq C_{n_i}^i$ i uzmemo li u obzir da $\overline{C_0^{i+1}}, \ldots, \overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ strogo profinjuje $C_0^i, \ldots, C_{m_i}^i$, dobijamo da je $K = U \cup V$, gdje su U i V dani sa

$$U = \bigcup \{C_j^{i+1} \mid \overline{C_j^{i+1}} \subseteq C_l^i \text{ za neki } l < n_i\};$$

$$V = \bigcup \{C_j^{i+1} \mid \overline{C_j^{i+1}} \subseteq C_{l'}^i \text{ za neki } l' > n_i\}.$$

Skupovi U i V su neprazni. Naime, $C_0^{i+1} \subseteq \overline{C_0^{i+1}} \subseteq C_0^i$ i $0 < n_i$ jer je $n_i \geq 2$ pa je $C_0^{i+1} \subseteq U$. Posebno, $U \neq \emptyset$. Također, $C_{m_{i+1}}^{i+1} \subseteq \overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}} \subseteq C_{m_i}^i$ i $m_i > n_i$ jer je $n_i \leq m_i - 2$ pa je $C_{m_{i+1}}^{i+1} \subseteq V$, to jest $V \neq \emptyset$. Dalje, ako su $l, l' \in \{0, \ldots, m_i\}$ takvi da je $l < n_i < l'$, onda je $C_l^i \cap C_{l'}^i = \emptyset$ jer je $\mathscr{C}^i$ lanac pa slijedi da je $U \cap V = \emptyset$. Napokon, jasno je da su U i V otvoreni u (K, d) pa zaključujemo da je (U, V) separacija od (K, d), što je nemoguće zato što je (K, d) povezan. Prema tome, k je dobro definiran.

S obzirom na to da je $n_i \geq 2$, vrijedi $C_{n_i}^i \cap C_0^i = \emptyset$. Jer je $\overline{C_k^{i+1}} \subseteq C_{n_i}^i$ i $\overline{C_0^{i+1}} \subseteq C_0^i$, vrijedi $C_k^{i+1} \cap C_0^{i+1} = \emptyset$ pa je $k \geq 2$. Slično, $n_i \leq m_i - 2$ pa je $C_{n_i}^i \cap C_{m_i}^i = \emptyset$. Jer je $\overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}} \subseteq C_{m_i}^i$, vrijedi $C_{m_{i+1}}^{i+1} \cap C_k^{i+1} = \emptyset$ pa je onda $k \leq m_{i+1} - 2$. Dakle, $k \in \{2, \ldots, m_{i+1} - 2\}$.

Tvrdimo da $\overline{C_0^{i+1}}, \ldots, \overline{C_k^{i+1}}$ strogo profinjuje $C_0^i, \ldots, C_{n_i}^i$. Očito je $\overline{C_0^{i+1}} \subseteq C_0^i$ i $\overline{C_k^{i+1}} \subseteq C_{n_i}^i$ pa preostaje pokazati da za svaki $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ postoji $j' \in \{0, \ldots, n_i\}$ takav da je $\overline{C_j^{i+1}} \subseteq C_{j'}^i$. Pretpostavimo suprotno. Tada je broj

$$k' = \min\{j \in \{1, \ldots, k-1\} \mid (\exists j' \in \{n_i + 1, \ldots, m_i\}) \, \overline{C_j^{i+1}} \subseteq C_{j'}^i\}$$

dobro definiran.

Po definiciji od k' je $\overline{C_{k'}^{i+1}} \subseteq C_{j'}^i$ za neki $j' > n_i$ i $\overline{C_{k'-1}^{i+1}} \subseteq C_{j''}^i$ za neki $j'' \leq n_i$. Međutim, ako je $j'' = n_i$, onda je $\overline{C_{k'-1}^{i+1}} \subseteq C_{n_i}^i$, što zajedno s $k' - 1 < k' \leq k - 1 < k$, proturječi (3.6) (izboru od k). Dakle, $j'' < n_i$.

Nejednakost $j'' < n_i < j'$ implicira $C_{j'}^i \cap C_{j''}^i = \emptyset$ pa onda i $C_{k'}^{i+1} \cap C_{k'-1}^{i+1} = \emptyset$, što je nemoguće pa zaključujemo da $\overline{C_0^{i+1}}, \ldots, \overline{C_k^{i+1}}$ strogo profinjuje $C_0^i, \ldots, C_{n_i}^i$.

Sada možemo staviti $n_{i+1} = k$.

Dakle, postoji niz $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ takav da vrijedi (3.4) i (3.5) za svaki $i \in \mathbb{N}$. Znamo da je $\operatorname{diam} C_j^i < 2^{-i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ i svaki $j \in \{0, \ldots, n_i\}$. Po Lemi 3.2.13

$$L = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\overline{C_0^i} \cup \cdots \cup \overline{C_{n_i}^i})$$

je kontinuum koji je lančast od a' do c, gdje je $a' \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_0^i$ i $c \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_{n_i}^i$. Međutim, po konstrukciji je $a \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_0^i$ i $\operatorname{diam} C_0^i \to 0$ pa je $a = a'$.

S druge je strane $c \in C_{n_0}^0 = C_2^0$ pa je $a \neq c$. Nadalje,

$$L \subseteq \overline{C_0^1} \cup \overline{C_1^1} \cup \cdots \cup \overline{C_{n_1}^1} \subseteq C_0^0 \cup C_1^0 \cup C_2^0$$

i posljedično je

$$\operatorname{diam} L \leq \operatorname{diam}(C_0^0 \cup C_1^0 \cup C_2^0) < \varepsilon.$$

Sada $a \in L$ implicira $L \subseteq B(a, \varepsilon)$. ■

Dokazat ćemo još jednu lemu koja je od iznimne važnosti za dokazivanje Leme 3.2.8.

Lema 3.2.15. Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i neka je $(\mathscr{C}^i)_{i\in\mathbb{N}}$, gdje je $\mathscr{C}^i = (C_0^i, \dots, C_{m_i}^i)$, niz otvorenih lanaca takvih da je $\overline{C_0^i}, \dots, \overline{C_{m_i}^i}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, također lanac sa svojstvom da $\overline{C_0^{i+1}}, \dots, \overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ profinjuje $C_0^i, \dots, C_{m_i}^i$ i da je $\operatorname{diam} C_j^i < 2^{-i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ i za svaki $j \in \{0, \dots, m_i\}$. Neka je

$$S = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left(\overline{C_0^i} \cup \cdots \cup \overline{C_{m_i}^i} \right).$$

Tada je S neprazan, povezan i kompaktan (to jest neprazan kontinuum).

Dokaz. Označimo

$$F_i = \overline{C_0^i} \cup \cdots \cup \overline{C_{m_i}^i}.$$

Budući da $\overline{C_0^{i+1}}, \dots, \overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ profinjuje $C_0^i, \dots, C_{m_i}^i$ (pa onda i $\overline{C_0^i}, \dots, \overline{C_{m_i}^i}$), $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je padajući niz zatvorenih i nepraznih podskupova od (X,d), to jest $\{F_i\}$ je centrirana familija zatvorenih podskupova kompakta (X,d) pa je $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$, to jest $S \neq \emptyset$.

Nadalje, s obzirom na to da je S presjek zatvorenih podskupova od (X,d), S je također zatvoren u (X,d), što zajedno s činjenicom da je (X,d) kompaktan, implicira da je S isto kompaktan.

Ostaje samo pokazati da je S povezan. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je (A,B) separacija od S. Stavimo

$$r = d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Jasno je da je $r > 0$ zato što su A i B disjunktni kompakti. Neka je onda $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam} C_j^{i_0} < \frac{r}{2}$ za svaki $j \in \{0, \dots, m_{i_0}\}$.

Sada ćemo definirati niz $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, gdje je $k_i \in \{0, \dots, m_i\}$, takav da vrijedi

$$\overline{C_{k_{i+1}}^{i+1}} \subseteq C_{k_i}^i$$

za svaki $i \geq i_0$.

Prvo primjetimo da svaki element lanca $\mathscr{C}^{i_0}$ siječe najviše jedan od skupova A i B. Naime, pretpostavimo da postoji $j \in \{0, \ldots, m_{i_0}\}$ takav da je $C_j^{i_0} \cap A \neq \emptyset$ i $C_j^{i_0} \cap B \neq \emptyset$. Onda za neke $a \in C_j^{i_0} \cap A$ i $b \in C_j^{i_0} \cap B$ vrijedi

$$d(a,b) \leq \operatorname{diam} C_j^{i_0} < \frac{r}{2} < r = d(A,B),$$

što je očita kontradikcija. Dakle, za svaki $j \in \{0, \ldots, m_{i_0}\}$, zaključujemo da vrijedi

$$C_j^{i_0} \cap A \neq \emptyset \implies C_j^{i_0} \cap B = \emptyset \quad \text{i} \quad C_j^{i_0} \cap B \neq \emptyset \implies C_j^{i_0} \cap A = \emptyset. \tag{3.7}$$

S obzirom na to da je (A,B) separacija od S i da $\overline{C_0^{i_0+1}}, \ldots, \overline{C_{m_{i_0+1}}^{i_0+1}}$ profinjuje $C_0^{i_0}, \ldots, C_{m_{i_0}}^{i_0}$, imamo

$$S = A \cup B \subseteq \overline{C_0^{i_0+1}} \cup \cdots \cup \overline{C_{m_{i_0+1}}^{i_0+1}} \subseteq C_0^{i_0} \cup \cdots \cup C_{m_{i_0}}^{i_0}$$

pa onda postoje $u_{i_0}, v_{i_0} \in \{0, \ldots, m_{i_0}\}$ takvi da vrijedi

$$C_{u_{i_0}}^{i_0} \cap A \neq \emptyset \quad \text{i} \quad C_{v_{i_0}}^{i_0} \cap B \neq \emptyset. \tag{3.8}$$

Zbog (3.7) zaključujemo da vrijedi

$$C_{u_{i_0}}^{i_0} \cap B = \emptyset \quad \text{i} \quad C_{v_{i_0}}^{i_0} \cap A = \emptyset. \tag{3.9}$$

Također, (3.8) implicira

$$|u_{i_0} - v_{i_0}| \geq 2. \tag{3.10}$$

Naime, ako pretpostavimo suprotno, to jest $|u_{i_0} - v_{i_0}| \leq 1$ onda je $C_{u_{i_0}}^{i_0} \cap C_{v_{i_0}}^{i_0} \neq \emptyset$. Tada za $x \in C_{u_{i_0}}^{i_0} \cap C_{v_{i_0}}^{i_0}$ i $a \in C_{u_{i_0}}^{i_0} \cap A$, $b \in C_{v_{i_0}}^{i_0} \cap B$ imamo

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) \leq \operatorname{diam} C_{u_{i_0}}^{i_0} + \operatorname{diam} C_{v_{i_0}}^{i_0} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r = d(A,B), \tag{3.11}$$

što je očita neistina.

Sada tvrdimo da postoji $k_{i_0} \in \{0, \ldots, m_{i_0}\}$, $\min\{u_{i_0}, v_{i_0}\} < k_{i_0} < \max\{u_{i_0}, v_{i_0}\}$ takav da vrijedi

$$C_{k_{i_0}}^{i_0} \cap A = C_{k_{i_0}}^{i_0} \cap B = \emptyset. \tag{3.12}$$

Uistinu, pretpostavimo suprotno, to jest da je

$$C_w^{i_0} \cap A \neq \emptyset \quad \text{ili} \quad C_w^{i_0} \cap B \neq \emptyset$$

za svaki $w \in \{\min\{u_{i_0}, v_{i_0}\}+1, \dots, \max\{u_{i_0}, v_{i_0}\}-1\}$. Prvo, uzmimo da je $v_{i_0} > u_{i_0}$. Ako je $C_w^{i_0} \cap A = \emptyset$ za svaki $w \in \{u_{i_0}+1, \dots, v_{i_0}-1\}$, onda je $C_w^{i_0} \cap B \neq \emptyset$ za svaki $w \in \{u_{i_0}+1, \dots, v_{i_0}-1\}$. Dakle, za neki $x \in C_{u_{i_0}}^{i_0} \cap C_{u_{i_0}+1}^{i_0}$ i $a \in C_{u_{i_0}}^{i_0} \cap A$, $b \in C_{u_{i_0}+1}^{i_0} \cap B$ do kontradikcije dolazimo slično kao u (3.11). Sada, ako postoji $w \in \{u_{i_0}+1, \dots, v_{i_0}-1\}$ takav da je $C_w^{i_0} \cap A \neq \emptyset$ onda je

$$z = \max\left\{k \in \{u_{i_0}+1, \dots, v_{i_0}-1\} \mid C_k^{i_0} \cap A \neq \emptyset\right\}$$

dobro definiran i smijemo zaključiti da je $C_{z+1}^{i_0} \cap B \neq \emptyset$. Slično kao prije, za neki $x \in C_z^{i_0} \cap C_{z+1}^{i_0}$ i $a \in C_z^{i_0} \cap A$, $b \in C_{z+1}^{i_0} \cap B$ dobijamo kontradikciju. Do istih zaključaka dolazimo i u slučaju $v_{i_0} < u_{i_0}$ što dokazuje (3.12).

Pretpostavimo, dakle, da su $i \in \mathbb{N}, i \geq i_0$ i $u_i, k_i, v_i \in \{0, \dots, m_i\}$ takvi da vrijedi sljedeće:

1. $\min\{u_i, v_i\} < k_i < \max\{u_i, v_i\}$;
2. $C_{u_i}^i \cap A \neq \emptyset$;
3. $C_{v_i}^i \cap B \neq \emptyset$;
4. $C_{k_i}^i \cap A = C_{k_i}^i \cap B = \emptyset$.

Tvrdimo da postoje $u_{i+1}, k_{i+1}, v_{i+1} \in \{0, \dots, m_{i+1}\}$ za koje je:

a) $\min\{u_{i+1}, v_{i+1}\} < k_{i+1} < \max\{u_{i+1}, v_{i+1}\}$;

b) $C_{u_{i+1}}^{i+1} \cap A \neq \emptyset$;

c) $C_{v_{i+1}}^{i+1} \cap B \neq \emptyset$;

d) $C_{k_{i+1}}^{i+1} \cap A = C_{k_{i+1}}^{i+1} \cap B = \emptyset$;

e) $\overline{C_{k_{i+1}}^{i+1}} \subseteq C_{k_i}^i$.

Naime, po 3. postoji $x \in B$ takav da je

$$x \in C_{v_i}^i. \tag{3.13}$$

Kao i ranije,

$$B \subseteq S \subseteq \overline{C_0^{i+2}} \cup \dots \cup \overline{C_{m_{i+2}}^{i+2}} \subseteq C_0^{i+1} \cup \dots \cup C_{m_{i+1}}^{i+1}$$

pa postoji $v_{i+1} \in \{0, \dots, m_{i+1}\}$ takav da je

$$x \in C_{v_{i+1}}^{i+1}. \tag{3.14}$$

Očito je

$$C^{i+1}_{v_{i+1}} \cap B \neq \emptyset. \tag{3.15}$$

Slično, koristeći 2., zaključujemo da postoji $u_{i+1} \in \{0,\dots,m_{i+1}\}$ takav da je

$$C^{i+1}_{u_{i+1}} \cap A \neq \emptyset \quad \text{i} \quad C^{i+1}_{u_{i+1}} \cap C^i_{u_i} \neq \emptyset. \tag{3.16}$$

Po (3.15), (3.16) i 4., slijedi

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \nsubseteq C^i_{k_i} \quad \text{i} \quad \overline{C^{i+1}_{u_{i+1}}} \nsubseteq C^i_{k_i}.$$

Pretpostavimo sada da je $u_i < v_i$, to jest $u_i < k_i < v_i$. Tvrdimo da postoji $s \in \{k_i+1,\dots,m_i\}$ takav da je

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \subseteq C^i_s. \tag{3.17}$$

Uistinu, ako bismo pretpostavili suprotno, to jest da postoji $q \in \{0,\dots,k_i-1\}$ takav da je

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \subseteq C^i_q,$$

još koristeći (3.13) i (3.14), zaključili bismo da vrijedi $C^i_{v_i} \cap C^i_q \neq \emptyset$, što je kontradikcija jer je $q < k_i < v_i$, to jest $v_i - q \geq 2$. Analogno, postoji $p \in \{0,\dots,k_i-1\}$ takav da je

$$\overline{C^{i+1}_{u_{i+1}}} \subseteq C^i_p. \tag{3.18}$$

Jasno je da je $p < k_i < s$ i da zbog (3.15) i (3.16) vrijedi $u_{i+1} \neq v_{i+1}$ pa primjenjujući Lemu 3.2.12 na (3.17) i (3.18) zaključujemo da postoji $k_{i+1} \in \{0,\dots,m_{i+1}\}$, $\min\{u_{i+1},v_{i+1}\} < k_{i+1} < \max\{u_{i+1},v_{i+1}\}$ takav da je

$$\overline{C^{i+1}_{k_{i+1}}} \subseteq C^i_{k_i}.$$

Koristeći iste argumente, gornje zaključujemo i kada je $v_i < u_i$, to jest $v_i < k_i < u_i$. Ovime je dovršena rekurzivna kostrukcija brojeva u_{i+1}, v_{i+1} i k_{i+1} takvih da vrijedi a) – e).

Dakle, pokazali smo da za svaki $i \in \mathbb{N}, i \geq i_0$ možemo pronaći $k_i \in \{0,\dots,m_i\}$ takav da je $\overline{C^{i+1}_{k_{i+1}}} \subseteq C^i_{k_i}$. Na taj smo način konstruirali padajući niz $\left(\overline{C^i_{k_i}}\right)_{i\geq i_0}$ zatvorenih podskupova kompakta (X,d) pa zato postoji

$$x \in \bigcap_{i \geq i_0} \overline{C^i_{k_i}}.$$

Posebno, $x \in \overline{C^{i_0+1}_{k_{i_0+1}}} \subseteq C^{i_0}_{k_{i_0}}$ pa po (3.12) vrijedi $x \notin S$. Ali s druge strane,

$$x \in \bigcap_{i \geq i_0} \overline{C^i_{k_i}} \subseteq \bigcap_{i \geq i_0} \left(\overline{C^i_0} \cup \dots \cup \overline{C^i_{m_i}}\right) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(\overline{C^i_0} \cup \dots \cup \overline{C^i_{m_i}}\right) = S.$$

Dakle, S je povezan. ■

Napokon dajemo dokaz Leme 3.2.8.

Dokaz. Ako je $c=a$ ili $c=b$, tvrdnja slijedi iz Leme 3.2.14.

Pretpostavimo sada da je $c\neq a,b$. Prvo ćemo konstruirati niz otvorenih lanaca $(\mathscr{C}^i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathscr{C}^i=(C_0^i,\dots,C_{m_i}^i)$, takvih da za svaki $i\in\mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

1. $\mathscr{C}^i$ pokriva K od a do b i $\operatorname{diam} C_j^i<2^{-i}$ za svaki $j\in\{0,\dots,m_i\}$;
2. $\overline{C_0^i},\dots,\overline{C_{m_i}^i}$ je također lanac;
3. $\overline{C_0^{i+1}},\dots,\overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ profinjuje $C_0^i,\dots,C_{m_i}^i$;
4. $\exists!\ u_i\in\{0,\dots,m_i\}$ takav da je $c\in C_{u_i}^i$;
5. $\operatorname{diam} C_j^0<\frac{\varepsilon}{5}$ za svaki $j\in\{0,\dots,m_0\}$ i $4\leq u_0\leq m_0-4$.

Prvo, stavimo

$$\mu=\min\{1,\frac{\varepsilon}{5},\frac{d(a,c)}{4},\frac{d(c,b)}{4}\}.$$

Po Lemi 3.2.10, postoji otvoreni μ – lanac $C_0^0,\dots,C_{m_0}^0$ u (K,d) koji pokriva K od a do b takav da je $\overline{C_0^0},\dots,\overline{C_{m_0}^0}$ također lanac i takav da postoji jedinstveni $u_0\in\{0,\dots,m_0\}$ za koji je $c\in C_{u_0}^0$. Očito je $\operatorname{diam} C_j^0<1,\frac{\varepsilon}{5}$, za $j\in\{0,\dots,m_0\}$. Da bi $\mathscr{C}^0$ zadovoljavao sve druge uvjete, dovoljno je dokazati da je $4\leq u_0\leq m_0-4$. Budući da je $a\in C_0^0$ i $c\in C_{u_0}^0$, vrijedi

$$d(a,c)\leq \operatorname{diam}(C_0^0\cup\cdots\cup C_{u_0}^0)\leq \operatorname{diam} C_0^0+\cdots+\operatorname{diam} C_{u_0}^0<(u_0+1)\frac{d(a,c)}{4}$$

pa je onda $u_0+1>4$, to jest $u_0\geq 4$. Slično, zato što je $b\in C_{m_0}^0$, vrijedi

$$d(c,b)\leq \operatorname{diam}(C_{u_0}^0\cup\cdots\cup C_{m_0}^0)\leq \operatorname{diam} C_{u_0}^0+\cdots+\operatorname{diam} C_{m_0}^0<(m_0-u_0+1)\frac{d(c,b)}{4}$$

pa je $m_0-u_0+1>4$, to jest $u_0\leq m_0-4$. Primjetimo da iz uvjeta 5. slijedi $m_0\geq 8$.

Pretpostavimo sada da je $\mathscr{C}^i=(C_0^i,\dots,C_{m_i}^i)$ otvoreni lanac u (K,d) koji zadovoljava uvjete 1., 2., 4. i 5. Budući da je $\mathscr{U}=\{C_0^i,\dots,C_{m_i}^i\}$ otvoreni pokrivač od (K,d), postoji Lebesqueov broj $\lambda>0$ od $\mathscr{U}$. S obzirom na to da je (K,d) lančasti kontinuum, po Lemi 3.2.10 postoji otvoreni $\min\{2^{-(i+1)},\lambda\}$ – lanac $\mathscr{C}^{i+1}=(C_0^{i+1},\dots,C_{m_{i+1}}^{i+1})$ u (K,d) koji pokriva K od a do b takav da je $\overline{C_0^{i+1}},\dots,\overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ također lanac i da postoji jedinstveni $u_{i+1}\in\{0,\dots,m_{i+1}\}$ za koji je $c\in C_{u_{i+1}}^{i+1}$. Budući da je $\operatorname{diam}\overline{C_j^{i+1}}=\operatorname{diam} C_j^{i+1}<\lambda$ za svaki $j\in\{0,\dots,m_{i+1}\}$, $\overline{C_0^{i+1}},\dots,\overline{C_{m_{i+1}}^{i+1}}$ profinjuje $C_0^i,\dots,C_{m_i}^i$.

Ovime je zaključena rekurzivna konstrukcija niza $(\mathscr{C}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ takvog da vrijede uvjeti 1. – 5.

Neka je

$$v_0 = u_0 - 2 \quad \text{i} \quad w_0 = u_0 + 2. \tag{3.19}$$

Sada, za svaki $i \in \mathbb{N}$, želimo pronaći $v_i, w_i \in \{0, \ldots, m_i\}$ takve da je

$$v_i \leq u_i \leq w_i \tag{3.20}$$

i da

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}}, \ldots, \overline{C^{i+1}_{w_{i+1}}} \text{ profinjuje } C^i_{v_i}, \ldots, C^i_{w_i}. \tag{3.21}$$

Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ i da za svaki $k \leq i$ za brojeve $v_k, w_k \in \{0, \ldots, m_k\}$ vrijede uvjeti (3.20) i (3.21). Stavimo

$$v_{i+1} = \max\left\{ j < u_{i+1} \mid (\forall r \in \{v_i, \ldots, w_i\}) \ \overline{C^{i+1}_j} \nsubseteq C^i_r \right\} + 1 \tag{3.22}$$

i

$$w_{i+1} = \min\left\{ j > u_{i+1} \mid (\forall r \in \{v_i, \ldots, w_i\}) \ \overline{C^{i+1}_j} \nsubseteq C^i_r \right\} - 1. \tag{3.23}$$

Broj v_{i+1} je dobro definiran zato što je $0 < u_{i+1}$ i $\overline{C^{i+1}_0} \nsubseteq C^i_r$ za svaki $r \in \{v_i, \ldots, w_i\}$. Naime, pretpostavimo li da je $u_{i+1} = 0$, onda je $a \in \overline{C^{i+1}_{u_{i+1}}}$. Zbog svojstava 3. i 4. vrijedi

$$\overline{C^{i+1}_{u_{i+1}}} \subseteq C^i_{u_i} \subseteq \overline{C^i_{u_i}} \subseteq \cdots \subseteq C^0_{u_0}$$

pa je $a \in C^0_{u_0}$, što je nemoguće jer je $u_0 \geq 4$ i $a \in C^0_0$. Nadalje, ako pretpostavimo da postoji $r \in \{v_i, \ldots, w_i\}$ takav da je $\overline{C^{i+1}_0} \subseteq C^i_r$, višestrukom primjenom (3.21) zaključujemo da vrijedi

$$\overline{C^{i+1}_0} \subseteq C^i_{v_i} \cup \cdots \cup C^i_{w_i} \subseteq \overline{C^i_{v_i}} \cup \cdots \cup \overline{C^i_{w_i}} \subseteq C^{i-1}_{v_{i-1}} \cup \cdots \cup C^{i-1}_{w_{i-1}} \subseteq \cdots \subseteq C^0_{v_0} \cup \cdots \cup C^0_{w_0}.$$

Onda postoji $j \in \{v_0, \ldots, w_0\}$ takav da je $a \in C^0_j$. Po (3.19) i 5. je $j \geq 2$ što je u kontradikciji s $a \in C^0_0$. Slično, broj w_{i+1} je također dobro definiran jer je $m_{i+1} > u_{i+1}$ i $\overline{C^{i+1}_{m_{i+1}}} \nsubseteq C^i_r$ za svaki $r \in \{v_i, \ldots, w_i\}$. Očito je $v_{i+1} \leq u_{i+1} \leq w_{i+1}$.

Preostaje pokazati da $\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}}, \ldots, \overline{C^{i+1}_{w_{i+1}}}$ profinjuje $C^i_{v_i}, \ldots, C^i_{w_i}$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $r \in \{v_{i+1}, \ldots, w_{i+1}\}$ takav da za svaki $s \in \{v_i, \ldots, w_i\}$ vrijedi $\overline{C^{i+1}_r} \nsubseteq C^i_s$. Jasno je da je $r \neq u_{i+1}$ zato što je $\overline{C^{i+1}_{u_{i+1}}} \subseteq C^i_{u_i}$. Nadalje, ako je $v_{i+1} \leq r < u_{i+1}$, broj r je veći od maksimuma $v_{i+1} - 1$ definiranog s (3.22), što je očita kontradikcija. Slično, ako je $u_{i+1} < r \leq w_{i+1}$, kontradikcija slijedi iz (3.23). Dakle, zaključujemo da $\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}}, \ldots, \overline{C^{i+1}_{w_{i+1}}}$ profinjuje $C^i_{v_i}, \ldots, C^i_{w_i}$. Međutim, možemo pokazati još i više. Tvrdimo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \subseteq C^i_{v_i} \quad \text{ili} \quad \overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \subseteq C^i_{w_i} \tag{3.24}$$

i

$$\overline{C^{i+1}_{w_{i+1}}} \subseteq C^i_{v_i} \quad \text{ili} \quad \overline{C^{i+1}_{w_{i+1}}} \subseteq C^i_{w_i}. \tag{3.25}$$

Pretpostavimo suprotno od (3.24), to jest neka je

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \nsubseteq C^i_{v_i} \quad \text{i} \quad \overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \nsubseteq C^i_{w_i},$$

iz čega, zajedno s (3.21), zaključujemo da je

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \subseteq C^i_p \tag{3.26}$$

za neki $p \in \{v_i+1, \dots, w_i-1\}$. Zbog (3.22) je $\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}-1}} \nsubseteq C^i_j$ za svaki $j \in \{v_i, \dots, w_i\}$ pa je, zbog 3., ispunjeno

$$\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}-1}} \subseteq C^i_q \tag{3.27}$$

za neki $q \in \{0, \dots, v_i-1\} \cup \{w_i+1, \dots, m_i\}$. Dakle, jer je $|p-q| \geq 2$ vrijedi $C^i_p \cap C^i_q = \emptyset$, a zbog (3.26) i (3.27) i činjenice da je $\overline{C^{i+1}_{v_{i+1}}} \cap \overline{C^{i+1}_{v_{i+1}-1}} \neq \emptyset$ slijedi $C^i_p \cap C^i_q \neq \emptyset$, što je očito nemoguće pa je (3.24) dokazano. Slično se može pokazati i da vrijedi (3.25).

Stavimo

$$L = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(\overline{C^i_{v_i}} \cup \dots \cup \overline{C^i_{w_i}} \right).$$

Iz Leme 3.2.15 slijedi da je L neprazan kontinuum u (K, d).

Sada tvrdimo da je L netrivijalan. Neka je S skup svih konačnih nizova oblika $(a_0, \dots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, takvih da je $a_i \in \{v_i, w_i\}$ i $\overline{C^{i+1}_{a_{i+1}}} \subseteq C^i_{a_i}$ za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Neka je za $(a_0, \dots, a_n) \in S$ definiran

$$S_{(a_0, \dots, a_n)} = \{(b_0, \dots, b_k) \in S \mid k \geq n, a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n\}.$$

Jasno je da je S beskonačan, a s obzirom na to da je $S = S_{v_0} \cup S_{w_0}$, beskonačan je S_{v_0} ili S_{w_0}. Stavimo $f(0) = v_0$, ako je S_{v_0} beskonačan, a $f(0) = w_0$, inače. Očito je onda $S_{f(0)}$ beskonačan. Primjetimo da zbog (3.19) vrijedi $C^0_{f(0)} \cap C^0_{u_0} = \emptyset$. Sada, pretpostavimo da su definirani $f(0), \dots, f(n)$ takvi da je $S_{(f(0), \dots, f(n))}$ beskonačan. Budući da je

$$S_{(f(0), \dots, f(n))} = S_{(f(0), \dots, f(n), v_{n+1})} \cup S_{(f(0), \dots, f(n), w_{n+1})},$$

stavljamo $f(n+1) = v_{n+1}$ ako je $S_{(f(0), \dots, f(n), v_{n+1})}$ beskonačan, a $f(n+1) = w_{n+1}$, inače. Jasno je da je $S_{(f(0), \dots, f(n+1))}$ beskonačan. Dakle, konstruirali smo niz $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ takav da je $\overline{C^{n+1}_{f(n+1)}} \subseteq C^n_{f(n)}$. Sada, možemo zaključiti da postoji $d \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{C^n_{f(n)}}$, a s obzirom na to da je

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{C^n_{f(n)}} \subseteq \overline{C^1_{f(1)}} \subseteq C^0_{f(0)} \quad \text{i} \quad C^0_{f(0)} \cap C^0_{u_0} = \emptyset,$$

zaključujemo da je $d \neq c$, to jest da L nije trivijalan. Također, za svaki $i \in \mathbb{N}$ je $c \in C^i_{u_i}$ pa je

$$c \in \overline{C^i_{v_i}} \cup \cdots \cup \overline{C^i_{w_i}}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Dakle, $c \in L$.

Na kraju, jasno je da je $L \subseteq B(c, \varepsilon)$ zato što je

$$c \in L \subseteq \overline{C^1_{v_1}} \cup \cdots \cup \overline{C^1_{w_1}} \subseteq C^0_{v_0} \cup \cdots \cup C^0_{w_0}$$

i

$$\operatorname{diam}\left(C^0_{v_0} \cup \cdots \cup C^0_{w_0}\right) \leq \operatorname{diam} C^0_{u_0-2} + \cdots + \operatorname{diam} C^0_{u_0+2} < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Ovime je dokaz završen. ∎

Napokon možemo dokazati Propoziciju 3.2.7.

Dokaz. Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$, jer je inače tvrdnja jasna. Neka je d metrika na S koja inducira topologiju na S (relativnu topologiju na S u $(X, \mathscr{T})$). Za svaki $(K, \{a, b\}) \in \mathscr{K}$ kontinuum K je lančast od a do b pa je i kontinuum $(K, d|_{K \times K})$ lančast od a do b. Neka je

$$\mathscr{K}' = \{K \subseteq X \mid (\exists a, b \in V)\, (K, \{a, b\}) \in \mathscr{K}\}.$$

Po definiciji lančastog grafa je

$$S = \bigcup \mathscr{K}' \cup \left(V \setminus \bigcup \mathscr{K}'\right). \tag{3.28}$$

S obzirom na to da su $\bigcup \mathscr{K}'$ i $(V \setminus \bigcup \mathscr{K}')$ disjunktni i kompaktni u $(X, \mathscr{T})$, po Teoremu 1.3.8 postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\bigcup \mathscr{K}' \subseteq J_m \quad \text{i} \quad \left(V \setminus \bigcup \mathscr{K}'\right) \cap J_m = \emptyset.$$

Zajedno s (3.28) imamo da je

$$V \setminus \bigcup \mathscr{K}' = S \setminus J_m,$$

što znači da je $V \setminus \bigcup \mathscr{K}'$ poluizračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Budući da je i konačan, Propozicija 1.3.10 implicira da je $V \setminus \bigcup \mathscr{K}'$ izračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Posebno, izračunljivo je prebrojiv pa je i (trivijalno) izračunljivo prebrojiv do na S.

Da bismo pokazali da je S izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, pokazat ćemo da je K izračunljivo prebrojiv do na S, za svaki $K \in \mathscr{K}'$. Tako će S biti izračunljivo prebrojiv do na samog sebe kao konačna unija (vidjeti (3.28)) takvih skupova pa će onda biti i izračunljivo prebrojiv.

S obzirom na to da je S poluizračunljiv (po pretpostavci), bit će i izračunljiv i dokaz će biti završen.

Dakle, neka je $K \in \mathscr{K}'$ bilo koji. Tada postoje $a, b \in V$ takvi da je $(K, \{a, b\}) \in \mathscr{K}$. Zbog jednostavnosti, označavat ćemo

$$\mathscr{K}'' = \mathscr{K}' \setminus \{K\}.$$

Primjetimo da je, s obzirom na to da je T poluizračunljiv i konačan, po Propoziciji 1.3.10 svaka krajnja točka lančastog grafa izračunljiva točka.

Pretpostavimo prvo da je $\mathscr{K}'' = \emptyset$. Tada je $T = \{a, b\}$ pa su a i b izračunljive točke. Ako je $V \setminus K = \emptyset$, onda je $K = S$ pa je K poluizračunljiv po pretpostavci. Po Teoremu 2.1.1 K je izračunljiv. Posebno, K je izračunljivo prebrojiv do na S. Međutim, ako je $V \setminus K \neq \emptyset$, onda je

$$S = K \cup (V \setminus K).$$

Budući da su K i $V \setminus K$ disjunktni i kompaktni u $(X, \mathscr{T})$, po Teoremu 1.3.8 postoji $m' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$V \setminus K \subseteq J_{m'} \quad \text{i} \quad K \cap J_{m'} = \emptyset.$$

Dakle, $K = S \setminus J_{m'}$ pa je K poluizračunljiv. Kao i ranije, zaključujemo da je K izračunljivo prebrojiv do na S.

Sada, pretpostavimo da je $\mathscr{K}'' \neq \emptyset$ i označimo

$$W_K' = \{w \in K \mid (\exists L \in \mathscr{K}'')\, w \in L\},$$

to jest neka je W_K' skup svih elemenata od K koji su sadržani u nekom $L \in \mathscr{K}'$, $L \neq K$. Očito je W_K' konačan (zbog definicije lančastog grafa).

Prvo uzmimo da je $W_K' = \emptyset$. Tada za svaki $F \in \mathscr{K}''$ vrijedi $F \cap K = \emptyset$, to jest

$$S \setminus K = (V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''.$$

Skup $S \setminus K$ je kompaktan u $(X, \mathscr{T})$ kao konačna unija kompaktnih skupova i očito je disjunktan s K pa postoji $m'' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \setminus K \subseteq J_{m''} \quad \text{i} \quad K \cap J_{m''} = \emptyset.$$

Dakle, $K = S \setminus J_{m''}$ pa zaključujemo da je K poluizračunljiv kontinuum koji je lančast od a do b, gdje su a i b izračunljive točke. Naime, a i b su krajnje točke lančastog grafa zato što je $W_K' = \emptyset$

pa su onda i izračunljive. Dakle, kao i ranije, K je izračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ pa je onda posebno i skup izračunljivo prebrojiv do na S.

Napokon, neka je $W_K' \neq \emptyset$. Enumerirajmo skup W_K', to jest neka je

$$W_K' = \{w_0, \dots, w_n\}$$

i stavimo

$$\varepsilon = \min\left\{d(w_i, w_j) \mid i, j \in \{0, \dots, n\}, i \neq j\right\}.$$

Koristeći definiciju od ε i nejednakost trokuta, jednostavno dobijamo da za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da je $i \neq j$ vrijedi

$$\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \overline{B}\left(w_j, \frac{\varepsilon}{3}\right) = \emptyset. \tag{3.29}$$

Sada želimo pokazati da su skupovi

$$A = S \setminus \left(K \cup \bigcup_{0 \leq i \leq n} B\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \tag{3.30}$$

i

$$B = K \cup \bigcup_{0 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{4}\right) \tag{3.31}$$

disjunktni i kompaktni u $(X, \mathscr{T})$.

Jasno je da je $A \cap B = \emptyset$.

Dalje, B je kompaktan u $(X, \mathscr{T})$ kao konačna unija kompaktnih skupova (zatvorena kugla u kompaktu S je kompaktna u S pa onda i u $(X, \mathscr{T})$). Kompaktnost od A u $(X, \mathscr{T})$ slijedit će iz jednakosti

$$A = \left(S \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq n} B\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''\right) \tag{3.32}$$

jer je skup na desnoj strani kompaktan u $(X, \mathscr{T})$. S obzirom na to da je

$$S \setminus K \subseteq (V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}'', \tag{3.33}$$

da bismo pokazali (3.32) dovoljno je pokazati netrivijalnu inkluziju. Zato, neka je

$$x \in \left(S \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq n} B\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''\right). \tag{3.34}$$

Jasno je da je

$$x \in S \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq n} B\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \tag{3.35}$$

pa da bismo dokazali da je $x \in A$ trebamo dokazati da je

$$x \in S \setminus K.$$

U tu svrhu, pretpostavimo suprotno, to jest neka je $x \in K$. Očito vrijedi da $x \notin V \setminus K$. Također, ne postoji $K' \in \mathscr{K}''$ takav da je $x \in K'$ jer bi inače postojao $j \in \{0,...,n\}$ takav da je $x = w_j$ što bi proturiječilo (3.35). Dakle, $x \notin \bigcup \mathscr{K}''$, to jest $x \notin (V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''$, što je u suprotnosti s (3.34) pa je $x \in S \setminus K$. Odnosno, vrijedi (3.32) pa je A kompaktan u $(X, \mathscr{T})$.

Sada, budući da su A i B disjunktni i kompaktni u $(X, \mathscr{T})$, po Teoremu 1.3.8 postoje $\mu, \mu' \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$A \subseteq J_\mu \quad \text{i} \quad B \subseteq J_{\mu'}$$

i

$$J_\mu \cap J_{\mu'} = \emptyset.$$

Dakle,

$$B \subseteq S \setminus J_\mu \subseteq S \setminus A,$$

što zajedno s (3.30) i (3.31) implicira

$$K \cup \bigcup_{0 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{4}\right) \subseteq S \setminus J_\mu \subseteq K \cup \bigcup_{0 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right). \tag{3.36}$$

Sada razlikujemo četiri slučaja ovisno o tome jesu li a i/ili b elementi skupa W'_K.

Prvo, neka su $a, b \in W'_K$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavit ćemo da je $a = w_0$ i $b = w_n$. S obzirom na to da je $a \in W'_K$ postoji $L_1 \in \mathscr{K}'$, $L_1 \neq K$ takav da je $a \in L_1$. Slično, postoji $N_1 \in \mathscr{K}'$, $N_1 \neq K$ takav da je $b \in N_1$. Po Lemi 3.2.8 postoje netrivijalni kontinuumi $L \subseteq L_1$ i $N \subseteq N_1$ takvi da vrijedi

$$a \in L \quad \text{i} \quad L \subseteq B\left(a, \frac{\varepsilon}{4}\right) \tag{3.37}$$

i

$$b \in N \quad \text{i} \quad N \subseteq B\left(b, \frac{\varepsilon}{4}\right). \tag{3.38}$$

Budući da su L i N povezani i da je $a \in L \cap K$ i $b \in N \cap K$, $L \cup K \cup N$ je također povezan. Nadalje, po (3.36), (3.37) i (3.38) zaključujemo da je

$$L \cup K \cup N \subseteq S \setminus J_\mu. \tag{3.39}$$

Sada odaberimo $c \in L$, $c \neq a$ (koji postoji zato što je L netrivijalan). Zbog (3.29) i (3.37), vrijedi

$$c \notin \bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right). \tag{3.40}$$

Također,

$$c \notin K.$$

Naime, ako je $c \in K$ onda je $c \in W'_K$ (jer je $c \in L_1$ i $L_1 \neq K$) pa zbog (3.40) vrijedi $c = w_0$, to jest $c = a$, što nije moguće. Dakle

$$c \notin K \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

pa po Teoremu 1.3.8 postoji $\alpha \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \subseteq J_\alpha \tag{3.41}$$

i

$$c \notin J_\alpha. \tag{3.42}$$

Slično, postoje $d \in N$, $d \neq b$ i $\beta \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K \cup \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \subseteq J_\beta \tag{3.43}$$

i

$$d \notin J_\beta. \tag{3.44}$$

Neka su $\mathscr{C}, \mathscr{D} \subseteq \mathbb{N}^2$ iz Teorema 1.3.8 i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija takva da je $I_i = J_{f(i)}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$. Vrijedi $I_i \cap (K \setminus W'_K) \neq \emptyset$. Naime, ako pretpostavimo da je $I_i \cap K \subseteq W'_K$ onda je $I_i \cap K$ konačan pa onda i zatvoren u K. S druge strane, $I_i \cap K$ je i otvoren u K, a jer je K povezan, zaključujemo da je $I_i \cap K = K$. No, onda je K konačan, a budući da je i Hausdorffov, diskretan je što je u kontradikciji s činjenicama da je K povezan i da je $\operatorname{card} K \geq 2$ $(a, b \in K)$.

Dakle, neka je $x \in I_i \cap (K \setminus W'_K)$ i neka je $r \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < r < \min\{d(x, w) \mid w \in W'_K\}$$

i

$$B(x, r) \subseteq I_i \cap (K \setminus W'_K) \subseteq I_i = J_{f(i)}. \tag{3.45}$$

S obzirom na to da je kontinuum $(K, d|_{K \times K})$ lančast od a do b, postoji kompaktni r – lanac $K_0, \ldots, K_m$ u $(K, d|_{K \times K})$ koji pokriva K takav da je $a \in K_0$ i $b \in K_m$. Bez smanjenja općenitosti (uzmemo kompaktni $\min\{\frac{r}{2}, \frac{d(a,b)}{3}\}$ – lanac umjesto kompaktnog r – lanca, slično kao u Lemi 3.2.10) pretpostavimo da

$$a \notin K_j \text{ za } j \neq 0 \quad \text{i} \quad b \notin K_j \text{ za } j \neq m. \tag{3.46}$$

Neka je $p \in \{0, \dots, m\}$ takav da je $x \in K_p$. Zbog (3.45) i zato što je $\operatorname{diam} K_p < r$, vrijedi

$$K_p \subseteq J_{f(i)}.$$

Za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ neka je $l_i \in \{0, \dots, m\}$ takav da je

$$w_i \in K_{l_i}.$$

Zbog (3.46) možemo staviti

$$l_0 = 0 \text{ i } l_n = m.$$

Iz definicije od r slijedi da je $K_p \cap W_K' = \emptyset$ pa je onda

$$p \neq l_i \text{ za svaki } i \in \{0, \dots, n\}. \tag{3.47}$$

To, posebno, znači da je

$$p \neq 0, m, \tag{3.48}$$

što možemo dobiti i iz definicije od r.

Definirajmo

$$F = K_0 \cup \dots \cup K_{p-1} \cup \bigcup_{\substack{0 \le i \le n \\ l_i < p}} \left(\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}'' \right) \right)$$

i

$$G = K_{p+1} \cup \dots \cup K_m \cup \bigcup_{\substack{0 \le i \le n \\ l_i > p}} \left(\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}'' \right) \right).$$

Skupovi F, K_p i G su kompaktni u $(X, \mathscr{T})$ jer je $(V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''$ kompaktan u $(X, \mathscr{T})$.

Primjetimo da za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$, po (3.29), vrijedi

$$\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap W_K' = \{w_i\}. \tag{3.49}$$

Neka je $l_i < p$. Jer je

$$w_i \in K_{l_i},$$

za svaki $j > p$ vrijedi

$$w_i \notin K_j \tag{3.50}$$

pa je onda

$$\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''\right) \cap \left(K_{p+1} \cup \cdots \cup K_m\right) =$$

$$= \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left(\bigcup \mathscr{K}'' \cap \left(K_{p+1} \cup \cdots \cup K_m\right)\right) \overset{(3.50)}{\subseteq}$$

$$\overset{(3.50)}{\subseteq} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left(W'_K \setminus \{w_i\}\right) \overset{(3.49)}{=} \emptyset.$$

Slično, zaključujemo da je

$$\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''\right) \cap \left(K_0 \cup \cdots \cup K_{p-1}\right) = \emptyset,$$

za $l_i > p$. Gornje, zajedno s (3.29) i činjenicom da je $K_0, \ldots, K_m$ lanac implicira da su skupovi F i G disjunktni.

Jasno je da je

$$K \cup \bigcup_{0 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) = F \cup K_p \cup G. \tag{3.51}$$

Zbog (3.41), (3.43) i (3.48) je $F \subseteq J_\beta$ i $G \subseteq J_\alpha$ pa onda, po Teoremu 1.3.8, postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je $F \subseteq J_u$, $K_p \subseteq J_v$, $G \subseteq J_w$, $(u, w) \in \mathscr{D}$, $(v, f(i)) \in \mathscr{C}$, $(u, \beta) \in \mathscr{C}$ i $(w, \alpha) \in \mathscr{C}$. Primjetimo da, po (3.36) i (3.51), vrijedi $S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$.

Dakle, ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi sljedeće:

(1) $S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$;

(2) $(u, w) \in \mathscr{D}$;

(3) $(v, f(i)) \in \mathscr{C}$;

(4) $(w, \alpha) \in \mathscr{C}$;

(5) $(u, \beta) \in \mathscr{C}$.

Neka je Ω skup svih $(i, u, v, w) \in \mathbb{N}^4$ za koje vrijede tvrdnje (1) – (5). S obzirom na to da je $S \setminus J_\mu$ poluizračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, skup svih $(i, u, v, w) \in \mathbb{N}^4$ takvih da vrijedi (1) je izračunljivo prebrojiv skup u $\mathbb{N}^4$. Sada jednostavno slijedi da je Ω izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$. Neka je Γ skup svih $i \in \mathbb{N}$ za koje postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, u, v, w) \in \Omega$. Tada je Γ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$ po Teoremu o projekciji.

Pretpostavimo sada da je $i \in \Gamma$. Tada postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (1) – (5). Dokazat ćemo da je $I_i \cap S \neq \emptyset$.

U tu svrhu, pretpostavimo da vrijedi suprotno, to jest $I_i \cap S = \emptyset$. Zbog (3) je $J_v \subseteq I_i$ pa je zbog (1)

$$S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_w,$$

a onda je po (3.39)

$$L \cup K \cup N \subseteq J_u \cup J_w.$$

Jasno je da su J_u i J_w otvoreni u $(X, \mathscr{T})$ i disjunktni. S obzirom na to da je $L \cup K \cup N$ povezan, za postizanje kontradikcije, dovoljno je pokazati da J_u i J_v sijeku $L \cup K \cup N$. Očito su $c, d \in L \cup K \cup N$. Zbog (3.44) i (5) vrijedi $d \notin J_u$ što znači da je $d \in J_w$. Slično, zbog (3.42) i (4) je $c \in J_u$ i tako dolazimo do kontradikcije. Dakle, $I_i \cap S \neq \emptyset$. Pokazali smo sljedeće:

$$\text{ako je } I_i \cap K \neq \emptyset \text{, onda je } i \in \Gamma,$$

$$\text{ako je } i \in \Gamma \text{, onda je } I_i \cap S \neq \emptyset$$

pa je K izračunljivo prebrojiv do na S.

Da bismo dokazali drugi slučaj, neka je $a \in W_K'$, a $b \notin W_K'$. Slično kao i ranije, možemo zaključiti da je b izračunljiva točka u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ i pretpostaviti da je $a = w_0$.

Ponovno, s obzirom na to da je $a \in W_K'$ postoji $L_1 \in \mathscr{K}'$, $L_1 \neq K$ takav da je $a \in L_1$. Po Lemi 3.2.8 postoji netrivijalni kontinuum $L \subseteq L_1$ takav da je

$$a \in L \quad \text{i} \quad L \subseteq B\left(a, \frac{\varepsilon}{4}\right). \tag{3.52}$$

Budući da je L povezan i da je $a \in L \cap K$, $L \cup K$ je također povezan. Nadalje, po (3.36) i (3.52) je

$$L \cup K \subseteq S \setminus J_\mu. \tag{3.53}$$

Sada odaberimo $c \in L$, $c \neq a$. Kao i ranije dobijamo

$$c \notin K \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

pa po Teoremu 1.3.8 postoji $\gamma \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \subseteq J_\gamma \tag{3.54}$$

i

$$c \notin J_\gamma. \tag{3.55}$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$ i neka su $x \in I_i \cap (K \setminus (W'_K \cup \{b\}))$ i $r \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$0 < r < \min\left\{\min\left\{d(x,w) \mid w \in W'_K\right\}, d(x,b)\right\}$$

i

$$B(x,r) \subseteq I_i \cap (K \setminus (W'_K \cup \{b\})) \subseteq I_i = J_{f(i)}. \tag{3.56}$$

Nadalje, budući da je $(K, d|_{K\times K})$ kontinuum koji je lančast od a do b, postoji kompaktan r – lanac $K_0, \ldots, K_t$ u $(K, d|_{K\times K})$ koji pokriva K od a do b. Koristeći iste oznake, pretpostavke i argumente kao ranije, zaključujemo da postoji $p \in \{1, \ldots, t-1\}$, $p \neq l_j$, $j \in \{0, \ldots, n\}$, za koji je

$$K_p \subseteq J_{f(i)}.$$

Definirajmo

$$F = K_0 \cup \cdots \cup K_{p-1} \cup \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq n \\ l_i < p}} \left(\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''\right)\right)$$

i

$$G = K_{p+1} \cup \cdots \cup K_t \cup \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq n \\ l_i > p}} \left(\overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap \left((V \setminus K) \cup \bigcup \mathscr{K}''\right)\right).$$

Kao i prije, zaključujemo da su skupovi F, K_p i G kompaktni u $(X, \mathscr{T})$ i da je

$$K \cup \bigcup_{0 \leq i \leq n} \overline{B}\left(w_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) = F \cup K_p \cup G. \tag{3.57}$$

Skupovi F i G su opet disjunktni i zbog (3.54) je $G \subseteq J_\gamma$ pa onda postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je $F \subseteq J_u$, $K_p \subseteq J_v$, $G \subseteq J_w$, $(u,w) \in \mathscr{D}$, $(v, f(i)) \in \mathscr{C}$, $(w, \gamma) \in \mathscr{C}$ i $b \in J_w$. Primjetimo da po (3.36) i (3.57) vrijedi $S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$.

Dakle, ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi sljedeće:

(1) $S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$;

(2) $(u,w) \in \mathscr{D}$;

(3) $(v, f(i)) \in \mathscr{C}$;

(4) $(w, \gamma) \in \mathscr{C}$;

(5) $b \in J_w$.

Neka je Ω' skup svih $(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4$ za koje vrijede tvrdnje (1) – (5) i neka je Γ' skup svih $i \in \mathbb{N}$ za koje postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,u,v,w) \in \Omega'$. S obzirom na to da je b izračunljiva točka, skup svih $(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4$ takvih da vrijedi (5) je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$. Iz toga jednostavno slijedi da je Ω', a onda i Γ', izračunljivo prebrojiv.

S druge strane, pretpostavimo da je $i \in \Gamma'$. Tada postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijede tvrdnje (1) – (5). Dokazat ćemo da je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $I_i \cap S = \emptyset$. Po (3) je $J_v \subseteq I_i$ pa je

$$S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_w,$$

a zbog (3.53) je

$$L \cup K \subseteq J_u \cup J_w.$$

Jasno je da su J_u i J_w disjunktni i otvoreni u $(X,\mathscr{T})$. Budući da je $L \cup K$ povezan, za kontradikciju je dovoljno dokazati da J_u i J_v sijeku $L \cup K$ što je očito jer su $b,c \in L \cup K$, $b \in J_w$ po (5) i $c \in J_u$ (inače bi $c \in J_w$ po (4) povlačilo da je $c \in J_\gamma$, što je u kontradikciji s (3.55)). Dakle, $I_i \cap S \neq \emptyset$. Da sumiramo, dokazali smo sljedeće:

$$\text{ako je } I_i \cap K \neq \emptyset, \text{ onda je } i \in \Gamma',$$

$$\text{ako je } i \in \Gamma', \text{ onda je } I_i \cap S \neq \emptyset,$$

što znači da je K izračunljivo prebrojiv do na S.

Ostalo nam je još dokazati posljedni slučaj pa uzmimo da $a,b \notin W_K'$. Očito su $a,b \in T$ pa su a i b izračunljive točke.

Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$. Kao i ranije, postoje $x \in I_i \cap (K \setminus (W_K' \cup \{a,b\}))$ i $r \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$0 < r < \min\left\{\min\left\{d(x,w) \mid w \in W_K'\right\}, d(x,b), d(x,a)\right\}$$

i

$$B(x,r) \subseteq I_i \cap (K \setminus (W_K' \cup \{a,b\})) \subseteq I_i = J_{f(i)}.$$

Nadalje, s obzirom na to da je kontinuum $(K, d|_{K\times K})$ lančast od a do b, postoji kompaktan r – lanac $K_0,\dots,K_s$ u $(K, d|_{K\times K})$ koji pokriva K od a do b. Uz oznake kao i ranije, zaključujemo da postoji $p \in \{1,\dots,s-1\}, p \neq l_j,\ j \in \{0,\dots,s\}$, takav da je

$$K_p \subseteq J_{f(i)}.$$

Za skupove F i G definirane kao prije, koristeći iste argumente, zaključujemo da postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi sljedeće:

(1) $S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_v \cup J_w$;

(2) $(u,w) \in \mathscr{D}$;

(3) $(v, f(i)) \in \mathscr{C}$;

(4) $a \in J_u$;

(5) $b \in J_w$.

Neka je Ω'' skup svih $(i,u,v,w) \in \mathbb{N}^4$ za koje vrijede tvrdnje (1) – (5) i neka je Γ'' skup svih $i \in \mathbb{N}$ za koje postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,u,v,w) \in \Omega''$. Kao i ranije, jednostavno slijedi da je Ω'' izračunljivo prebrojiv skup pa je onda i Γ'' takav.

S druge strane, pretpostavimo da je $i \in \Gamma''$. Tada postoje $u,v,w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (1) – (5). Želimo pokazati da je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $I_i \cap S = \emptyset$. S obzirom na to da je po (3) $J_v \subseteq I_i$, onda je

$$S \setminus J_\mu \subseteq J_u \cup J_w.$$

Budući da je $K \subseteq J_u \cup J_w$, $a \in K \cap J_u$ i $b \in K \cap J_w$, zaključujemo da K nije povezan, što je očita kontradikcija. Dakle, $I_i \cap S \neq \emptyset$. Pokazali smo sljedeće:

$$\text{ako je } I_i \cap K \neq \emptyset \text{ onda je } i \in \Gamma'',$$

$$\text{ako je } i \in \Gamma'' \text{ onda je } I_i \cap S \neq \emptyset,$$

to jest da je K izračunljivo prebrojiv do na S.

Dakle, svaki $K \in \mathscr{K}'$ je izračunljivo prebrojiv do na S pa je S izračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. ■

Napomena 3.2.16. Ako je $(A, \mathscr{K}, V)$ lančasti graf, kontinuume K iz $\mathscr{K}'$ možemo smatrati *bridovima* lančastog grafa. Opravdano je pitati se može li se pojam lančastog grafa proširiti do nekog općenitijeg pojma za koji će također vrijediti rezultat iz Teorema 3.2.3. Jedina smislena generalizija bila bi dopuštanje beskonačnih presjeka različitih bridova. Odgovor na ovo pitanje je negativan. Naime, u [28] je konstruiran kontinuum L_1 u $\mathbb{R}^2$ koji je lančast od $(0,1)$ do $(1,1)$ i koji siječe kontinuum L_2, lančast od $(0,-1)$ do $(1,-1)$, u beskonačno (i to prebrojivo) mnogo točaka. Unija $L_1 \cup L_2$ je poluizračunljiv skup koji nije izračunljiv.

Još možemo pokazati da vrijedi rezultat sličan onome iz Teorema 2.3.1.

Korolar 3.2.17. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je $S \subseteq X$ izračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. Neka je $Y \subseteq X$ takav da postoje $\mathscr{K}$ i V za koje je $(Y, \mathscr{K}, V)$ lančasti graf i neka je $\mathscr{K} \neq \emptyset$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

(1) $K \cap S = \{a,b\}$ za svaki $(K,\{a,b\}) \in \mathscr{K}$;

(2) $K \cap M \subseteq S$ za sve $(K,\{a,b\}),(M,\{c,d\}) \in \mathscr{K}$.

Neka je

$$T = S \cup Y.$$

Ako je T poluizračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$, onda je T i izračunljiv.

Dokaz. Kao i ranije, označimo

$$\mathscr{K}' = \{K \subseteq Y \mid (\exists a,b \in V)\,(K,\{a,b\}) \in \mathscr{K}\}.$$

Po definiciji lančastog grafa je

$$T = S \cup V \cup \bigcup \mathscr{K}' = \left(S \cup \bigcup \mathscr{K}'\right) \cup \left(V \setminus \left(S \cup \bigcup \mathscr{K}'\right)\right).$$

Jasno je da je $V \setminus (S \cup \bigcup \mathscr{K}')$ izračunljivo prebrojiv do na T. Također, s obzirom na to da je S izračunljiv u $(X,\mathscr{T},(I_i))$, posebno je izračunljivo prebrojiv pa onda i izračunljivo prebrojiv do na T. Dakle, da bi T bio izračunljivo prebrojiv u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ (a onda i izračunljiv, jer je po pretpostavci poluizračunljiv), dovoljno je da svaki $K \in \mathscr{K}'$ bude izračunljivo prebrojiv do na T. Uistinu, za svaki $K \in \mathscr{K}'$, skup

$$L = \bigcup \left(\mathscr{K}' \setminus \{K\}\right) \cup (V \setminus K)$$

je kompaktan u $(X,\mathscr{T})$ i $L \cap K \subseteq \{a,b\}$. Tada je $T = S \cup L \cup K$ pa je K izračunljivo prebrojiv u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ po Propoziciji 2.1.2, a onda i izračunljivo prebrojiv do na T. ∎

4. IZRAČUNLJIVE APROKSIMACIJE

4.1. RELACIJE NA $\mathbb{N}$

Dokaze sljedeće leme može se pronaći u [26].

Lema 4.1.1. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su S i T disjunktni kompaktni skupovi u $(X, \mathscr{T})$ takvi da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \subseteq J_n$ i $J_n \cap T = \emptyset$.

Također, ako je $T \neq \emptyset$, tvrdnja prethodne leme slijedi i iz Teorema 1.3.8 i već je mnogo puta korištena u prethodnim dokazima, ali ako je $T = \emptyset$, onda zbog kompaktnosti od S i tada postoji neki $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $S \subseteq J_n$.

U [26] je definirano i sljedeće:

Definicija 4.1.2. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su C i D prave karakteristične relacije.

$$J_j \subseteq_\forall I_{i'} \iff (\forall i \in [j])(i, i') \in C$$

$$I_i \subseteq_\exists J_{j'} \iff (\exists i' \in [j'])(i, i') \in C$$

$$J_j \subseteq_\forall J_{j'} \iff (\forall i \in [j]) I_i \subseteq_\exists J_{j'}$$

$$J_j \subseteq_\exists J_{j'} \iff (\exists i' \in [j']) J_j \subseteq_\forall I'_i$$

$$\mathscr{H}_k \subseteq_{\forall\forall} J_{j'} \iff (\forall j \in [k]) J_j \subseteq_\forall J_{j'}$$

$$\mathscr{H}_k \subseteq_\forall J_{j'} \iff (\forall j \in [k]) J_j \subseteq_\exists J_{j'}$$

$$J_j \subseteq_\exists \mathscr{H}_{k'} \iff (\exists j' \in [k']) J_j \subseteq_\forall J_{j'}$$

$$\mathscr{H}_k \subseteq_\forall \mathscr{H}_{k'} \iff (\forall j \in [k]) J_j \subseteq_\exists \mathscr{H}_{k'}$$

$$J_j \diamond J_{j'} \iff (\forall i \in [j])(\forall i' \in [j'])(i, i') \in D$$

Primjetimo da $J_j \subseteq_\forall I_{i'}$ implicira $J_j \subseteq I_{i'}$, da $I_i \subseteq_\exists J_{j'}$ implicira $I_i \subseteq J_{j'}$ i da $J_j \diamond J_{j'}$ implicira $J_j \cap J_{j'} = \emptyset$. Iako su navedene relacije definirane na $\mathbb{N}$, da bismo si ih lakše predočili, često o njima razmišljamo kao o relacijama definiranim na skupu $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{J_j \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathscr{H}_l \mid l \in \mathbb{N}\}$, ali moramo imati u vidu da to ipak nije u potpunosti točno.

Postojanje izračunljivo prebrojivih skupova $\mathscr{C}$, $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{N}^2$ takvih da vrijede svojstva (i) – (iii) iz Teorema 1.3.8 imalo je važnu ulogu u dokazivanju dosadašnjih rezultata. Međutim, sada to više nije dovoljno, već nam trebaju njihove eksplicitne definicije.

Napomena 4.1.3. U [14] je dokazano da su skupovi $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ iz Teorema 1.3.8 definirani sa

$$\mathscr{C} = \{(j,j') \in \mathbb{N}^2 \mid J_j \subseteq_\forall J_{j'}\} \quad \text{i} \quad \mathscr{D} = \{(j,j') \in \mathbb{N}^2 \mid J_j \diamond J_{j'}\}.$$

Nadalje, neformalno govoreći, gornje relacije definiraju izračunljivo prebrojive skupove u $\mathbb{N}^2$, što se vidi u napomenama koje slijede.

Napomena 4.1.4. Skup

$$\{(j,i') \in \mathbb{N}^2 \mid J_j \subseteq_\forall I_{i'}\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ jer je

$$\begin{aligned} J_j \subseteq_\forall I_{i'} &\iff (\forall i \in [j])(i,i') \in C \\ &\iff [j] \times \{i'\} \subseteq C, \end{aligned}$$

a skup

$$\{(j,i') \in \mathbb{N}^2 \mid [j] \times \{i'\} \subseteq C\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ po Propozicijama 1.1.10 i 1.1.11 (zato što su funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}), (j,i') \mapsto [j]$ i $\mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}), (j,i') \mapsto \{i'\}$ izračunljive, a skup C je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$).

Napomena 4.1.5. Skup

$$\{(j,j') \in \mathbb{N}^2 \mid J_j \subseteq_\exists J_{j'}\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$. Naime,

$$\begin{aligned} J_j \subseteq_\exists J_{j'} &\iff (\exists i' \in [j'])J_j \subseteq_\forall I_i' \\ &\iff (\exists i' \in [j'])(\forall i \in [j])(i,i') \in C \\ &\iff (\exists i' \in \mathbb{N})(i' \in [j'] \wedge (\forall i \in [j])(i,i') \in C) \\ &\iff (\exists i' \in \mathbb{N})(\{i'\} \subseteq [j'] \wedge [j] \times \{i'\} \subseteq C) \\ &\iff (\exists i' \in \mathbb{N})(j,j',i') \in W, \end{aligned}$$

gdje je $W = \{(j, j', i') \in \mathbb{N}^3 \mid \{i'\} \subseteq [j'], [j] \times \{i'\} \subseteq C\}$. Po Propozicijama 1.1.7, 1.1.9, 1.1.10 i 1.1.11, W je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$ pa je onda po Teoremu 1.1.1 promatrani skup izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$.

Napomena 4.1.6. Skup

$$\{(k, j') \in \mathbb{N}^2 \mid \mathscr{H}_k \subseteq_{\forall\forall} J_{j'}\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ jer je

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_k \subseteq_{\forall\forall} J_{j'} &\iff (\forall j \in [k]) J_j \subseteq_{\forall} J_{j'} \\ &\iff [k] \times \{j'\} \subseteq \mathscr{C},\end{aligned}$$

a skup

$$\{(k, j') \in \mathbb{N}^2 \mid [k] \times \{j'\} \subseteq \mathscr{C}\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ po Propozicijama 1.1.9, 1.1.10 i 1.1.11.

Napomena 4.1.7. Kao u Napomeni 4.1.6 zaključujemo da je

$$\{(k, j') \in \mathbb{N}^2 \mid \mathscr{H}_k \subseteq_{\forall} J_{j'}\}$$

izračunljivo prebrojiv skup u $\mathbb{N}^2$. Naime,

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_k \subseteq_{\forall} J_{j'} &\iff (\forall j \in [k]) J_j \subseteq_{\exists} J_{j'} \\ &\iff [k] \times \{j'\} \subseteq Z,\end{aligned}$$

gdje je $Z = \{(j, j') \in \mathbb{N}^2 \mid J_j \subseteq_{\exists} J_{j'}\}$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ po Napomeni 4.1.5.

Napomena 4.1.8. Skup

$$\{(k, k') \in \mathbb{N}^2 \mid \mathscr{H}_k \subseteq_{\forall} \mathscr{H}_{k'}\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_k \subseteq_{\forall} \mathscr{H}_{k'} &\iff (\forall j \in [k]) J_j \subseteq_{\exists} \mathscr{H}_{k'} \\ &\iff (\forall j \in [k])(\exists j' \in [k'])(j, j') \in \mathscr{C} \\ &\iff (\forall j \in [k])(\exists j' \in \mathbb{N})\left(j' \in [k'] \wedge (j, j') \in \mathscr{C}\right) \\ &\iff (\forall j \in [k])(\exists j' \in \mathbb{N})\left(\{j'\} \subseteq [k'] \wedge (j, j') \in \mathscr{C}\right).\end{aligned}$$

Definirajmo sada

$$Q = \{(k, k', j, j') \in \mathbb{N}^4 \mid \{j'\} \subseteq [k'], (j, j') \in \mathscr{C}\}.$$

Kao u prethodnim napomenama, lako zaključujemo da je Q izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^4$. Skup

$$R = \{(k,k',j) \in \mathbb{N}^3 \mid (\exists j' \in \mathbb{N})(k,k',j,j') \in Q\}$$

je onda izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$ po Teoremu 1.1.1 pa imamo

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_k \subseteq_\forall \mathscr{H}_{k'} &\iff (\forall j \in [k])(\exists j' \in \mathbb{N})\left(\{j'\} \subseteq \left[k'\right] \wedge (j,j') \in \mathscr{C}\right)\\ &\iff (\forall j \in [k])(k,k',j) \in R\\ &\iff \{(k,k')\} \times [k] \subseteq R.\end{aligned}$$

Sada, kao u napomeni 4.1.7. zaključujemo da je promatrani skup izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$.

Definicija 4.1.9. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $l_0,\ldots,l_n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $(J_{l_0},\ldots,J_{l_n})$ **formalni lanac** ako za sve $i,j \in \{0,\ldots,n\}$ takve da je $|i-j| > 1$ vrijedi $J_{l_i} \diamond J_{l_j}$, to jest $(l_i,l_j) \in \mathscr{D}$.

Uočimo sličnost prethodne definicije s Definicijom 2.2.1.

4.2. APROKSIMACIJA IZRAČUNLJIVIM POTKONTINUUMOM

Sljedeći rezultat dokazan je u [26].

Teorem 4.2.1. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je S poluizračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ koji je, kao potprostor od $(X, \mathscr{T})$, lančasti kontinuum. Neka postoje neprazni potkontinuumi $K_1, K_2 \subseteq S$ takvi da je $S = K_1 \cup K_2$. Neka su $a \in K_1 \setminus K_2$ i $b \in K_2 \setminus K_1$ sa svojstvom da postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ takvi da je $a \in I_\alpha$ i $b \in I_\beta$. Tada postoje izračunljive točke $\hat{a}, \hat{b} \in S$ i izračunljiv skup $\hat{S}$ u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ takvi da je $\hat{S} \subseteq S$, da je $\hat{S}$ kontinuum koji je lančast od $\hat{a}$ do $\hat{b}$ i da je $\hat{a} \in I_\alpha, \hat{b} \in I_\beta$.

Još uvijek nije odgovoreno na pitanje može li se pretpostavka dekompozabilnosti od S u prethodnom teoremu u potpunosti izostaviti, no ovdje pokazujemo da može onda kada je S lančast od a do b, gdje je a izračunljiva točka. Štoviše, pokazujemo da u tom slučaju možemo pronaći $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{S}$ takve da je $\hat{a} = a$.

Teorem 4.2.2. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka je S poluizračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ koji je, kao potprostor od $(X, \mathscr{T})$, kontinuum koji je lančast od a do b, $a, b \in X$. Neka je a izračunljiva točka i neka je $\beta \in \mathbb{N}$ takav da je $b \in I_\beta$. Tada postoje izračunljiva točka $\hat{b} \in I_\beta$ i izračunljiv skup $\hat{S}$ u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ takvi da je $\hat{S} \subseteq S$ i da je $\hat{S}$ kontinuum koji je lančast od a do $\hat{b}$.

Dokaz. Tvrdnja jasno slijedi ako je $a = b$. Pretpostavimo sada da je $a \neq b$.

Kao i ranije, neka je d metrika na S koja inducira topologiju na S (relativnu topologiju na S u $(X, \mathscr{T})$).

S obzirom na to da je $b \in I_\beta \cap S$, a (S, d) je posebno i regularan, neka je V otvoren skup u S takav da je $b \in V \subseteq \overline{V} \subseteq I_\beta \cap S$. Budući da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathscr{T}$, postoji $\beta' \in \mathbb{N}$ takav da je $b \in I_{\beta'} \cap S \subseteq V$, a onda i $\varepsilon > 0$ takav da je

$$B(b, \varepsilon) \subseteq I_{\beta'} \cap S. \tag{4.1}$$

Primjetimo da vrijedi

$$\overline{I_{\beta'} \cap S} \subseteq I_\beta. \tag{4.2}$$

Stavimo

$$r = \frac{1}{4}\min\{\varepsilon, d(a,b)\}.$$

S obzirom na to da je $B(b,2r)$ otvoren skup u S koji sadrži $\overline{B}(b,r)$, po Lemi 4.1.1 postoji $\tilde{a} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \setminus B(b,2r) \subseteq J_{\tilde{a}} \quad \text{i} \quad J_{\tilde{a}} \cap \overline{B}(b,r) = \emptyset,$$

to jest

$$\overline{B}(b,r) \subseteq S \setminus J_{\tilde{a}} \subseteq B(b,2r). \tag{4.3}$$

Primjetimo da je $b \in S \setminus J_{\tilde{a}}$.

Sada definirajmo skupove

$$\Omega_1 = \{(l,q',q) \in \mathbb{N}^3 \mid S \subseteq \bigcup \mathscr{H}_l \cup J_{q'} \cup J_q\};$$
$$\Omega_2 = \{(l,q',q) \in \mathbb{N}^3 \mid \left(J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}}, J_{q'}, J_q\right) \text{ je formalni lanac }, \bar{l} \geq 1\};$$
$$\Omega_3 = \{(l,q',q) \in \mathbb{N}^3 \mid \mathscr{H}_l \subseteq_{\forall\forall} J_{\tilde{a}}, a \in J_{(l)_0}\}.$$

Tehnikama iz Propozicija 2.2.2 i 2.2.3 lako se pokaže da su Ω_1 i Ω_2 izračunljivo prebrojivi u $\mathbb{N}^3$. S obzirom na to da je a izračunljiva točka i da vrijedi

$$a \in J_j \iff (\exists i \in \mathbb{N})\left(\{i\} \subseteq [j], a \in I_i\right),$$

slično kao u Napomeni 4.1.5 zaključujemo da je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid a \in J_j\}$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$ pa je onda jasno da je

$$\Omega_3' = \{(l,q',q) \in \mathbb{N}^3 \mid a \in J_{(l)_0}\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$. Dalje,

$$\Omega_3'' = \{(l,q',q) \in \mathbb{N}^3 \mid \mathscr{H}_l \subseteq_{\forall\forall} J_{\tilde{a}}\}$$

je također izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$ po Napomeni 4.1.6. Jasno je da je onda i $\Omega_3 = \Omega_3' \cap \Omega_3''$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^3$. Napokon, po Teoremu 1.1.1, skup

$$\Omega = \{(l,q') \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists q \in \mathbb{N})(l,q',q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3\}$$

je izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$.

Budući da je S poluizračunljiv skup u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$, postoji izračunljiva funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $h(\mathbb{N}) = \{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$. Posebno, $S \subseteq J_{h(0)}$.

Tvrdimo da postoji $(l, q') \in \Omega$ takav da vrijedi

$$\mathscr{H}_l \subseteq_\forall J_{h(0)}, J_{q'} \subseteq_\exists J_{h(0)} \tag{4.4}$$

i

$$J_{(l)_{\bar{l}}} \subseteq I_{\beta'}. \tag{4.5}$$

Neka je $\lambda_0 > 0$ Lebesgueov broj otvorenog pokrivača $\{I_i \cap S \mid i \in [h(0)]\}$ od (S, d) i neka je $D_0, \dots, D_n$ kompaktan $\min\{r, \frac{\lambda_0}{3}\}$ – lanac u (S, d) koji pokriva S od a do b.

Stavimo

$$w = \min\{i \in \{0, \dots, n\} \mid D_i \cap (S \setminus J_{\tilde{a}}) \neq \emptyset\}.$$

Budući da je $b \in S \setminus J_{\tilde{a}}$ i $b \in D_n$, broj w je dobro definiran. Štoviše, vrijedi $1 < w < n$. Naime, pretpostavimo li da je $w = 0$, onda postoji $x \in D_0 \cap (S \setminus J_{\tilde{a}})$, što zajedno s (4.3) implicira da je $x \in D_0 \cap B(b, 2r)$ pa je onda

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \operatorname{diam} D_0 + 2r < 3r \leq \frac{3}{4} d(a,b) < d(a,b),$$

što je neistina. Dalje, ako je $w = 1$, postoji $y \in D_1 \cap (S \setminus J_{\tilde{a}})$ pa je kao i prije $y \in D_1 \cap B(b, 2r)$. Budući da je $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, postoji $x \in D_0 \cap D_1$ i vrijedi

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,y) + d(y,b) < \operatorname{diam} D_0 + \operatorname{diam} D_1 + 2r < 4r \leq d(a,b),$$

kontradikcija. Također, ako pretpostavimo da je $w = n$, onda je $D_{n-1} \cap (S \setminus J_{\tilde{a}}) = \emptyset$ pa je po (4.3) i $D_{n-1} \cap B(b, r) = \emptyset$. S druge strane, s obzirom na to da je $b \in D_n$ i $\operatorname{diam} D_n < r$, vrijedi $D_n \subseteq B(b, r)$ pa je $D_{n-1} \cap D_n = \emptyset$, što je neistina. Dakle, $1 < w < n$, to jest u gornjem lancu sigurno se nalaze karike D_0, D_1, D_w i D_{w+1}.

Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bilo koja izračunljiva funkcija takva da je $I_i = J_{\varphi(i)}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Vrijedi $D_{w-1} \subseteq I_{\beta'}$, to jest

$$D_{w-1} \subseteq J_{\varphi(\beta')}. \tag{4.6}$$

Naime, zbog (4.1) dovoljno je pokazati da je $D_{w-1} \subseteq B(b, \varepsilon)$. Dakle, neka je $x \in D_{w-1}$ bilo koji. S obzirom na to da je $D_{w-1} \cap D_w \neq \emptyset$, postoji $y \in D_{w-1} \cap D_w$. Dalje, po definiciji od w je $D_w \cap (S \setminus J_{\tilde{a}}) \neq \emptyset$ pa je onda zbog (4.3) i $D_w \cap B(b, 2r) \neq \emptyset$, to jest postoji $z \in D_w \cap B(b, 2r)$. Budući da je

$$d(x,b) \leq d(x,y) + d(y,z) + d(z,b) < \operatorname{diam} D_{w-1} + \operatorname{diam} D_w + 2r < r + r + 2r = 4r \leq \varepsilon,$$

vrijedi $D_{w-1} \subseteq B(b, \varepsilon)$, odnosno $D_{w-1} \subseteq I_{\beta'}$.

Primjenimo li sada Teorem 1.3.8 na

$$\mathscr{F} = \{D_0, \dots, D_{w-1}, D_w, D_{w+1} \cup \dots \cup D_n\}$$

i

$$A = \{\varphi((h(0))_0), \dots, \varphi((h(0))_{\overline{h(0)}}), \tilde{a}, \varphi(\beta')\},$$

dobijamo da postoje $l, q, q' \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$D_0 \subseteq J_{(l)_0}, \dots, D_{w-1} \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}, \tag{4.7}$$

$$D_w \subseteq J_{q'}, \tag{4.8}$$

$$D_{w+1} \cup \dots \cup D_n \subseteq J_q \tag{4.9}$$

i da vrijede zaključci (ii) i (iii) iz Teorema 1.3.8.

Tvrdimo da je $(l, q', q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$. Po definiciji od w slijedi da je

$$D_0 \cup \dots \cup D_{w-1} \subseteq J_{\tilde{a}},$$

što zajedno s (4.7) i činjenicom da je $\tilde{a} \in A$ povlači da je $\mathscr{H}_l \subseteq_{\forall\forall} J_{\tilde{a}}$. Jasno je da je $a \in J_{(l)_0}$ jer je $a \in D_0$ pa je onda $(l, q', q) \in \Omega_3$. Takoder, budući da vrijede (4.7) – (4.9), (ii) iz Teorema 1.3.8 i da je $\bar{l} \geq 1$ (jer je $w - 1 \geq 1$), jednostavno zaključujemo da je $(l, q', q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Dakle, $(l, q', q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, to jest $(l, q') \in \Omega$.

Dalje, (4.5) dobijamo direktno iz (4.6) i činjenice da je $\varphi(\beta') \in A$ koristeći (iii) iz Teorema 1.3.8.

Primjetimo da za svaki $i \in \{0, \dots, w\}$ vrijedi $\operatorname{diam} D_i < \lambda_0$ pa zato postoji $j \in [h(0)]$ takav da je

$$D_i \subseteq I_{(h(0))_j} = J_{\varphi(h(0))_j},$$

iz čega, koristeći (iii) iz Teorema 1.3.8 i definiciju od A, dobijamo (4.4). Dakle, (l, q') ispunjava sva tražena svojstva.

Definirajmo sada skupove

$$\Gamma' = \{(l, q', m, s') \in \mathbb{N}^4 \mid (l, q') \in \Omega, (m, s') \in \Omega, \mathscr{H}_m \subseteq_\forall \mathscr{H}_l, J_{(m)_0} \subseteq_\forall J_{(l)_0},$$

$$J_{(m)_{\overline{m}}} \subseteq_\forall J_{(l)_{\bar{l}}}, J_{s'} \subseteq_\forall J_i \text{ za neki } i \in [l] \cup \{q'\}\}$$

i

$$\Gamma = \{(l, q', k, m, s') \in \mathbb{N}^5 \mid (l, q', m, s') \in \Gamma', \mathscr{H}_m \subseteq_\forall J_{h(k)}, J_{s'} \subseteq_\exists J_{h(k)}\}.$$

Koristeći Napomene 4.1.3, 4.1.5, 4.1.7 i 4.1.8 i činjenicu da je Ω izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$, lako se pokaže da su Γ' i Γ izračunljivo prebrojivi u $\mathbb{N}^4$ i $\mathbb{N}^5$, redom.

Neka su $(l,q') \in \Omega$ i $k \in \mathbb{N}$ bilo koji. Tvrdimo da postoji $(m,s') \in \Omega$ takav da je $(l,q',k,m,s') \in \Gamma$.

Po definiciji od Ω postoji $q \in \mathbb{N}$ takav da je $(l,q',q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$. S obzirom na to da je $(l,q',q) \in \Omega_1$ i da je $S \subseteq J_{h(k)}$, postoje Lebesgueovi brojevi $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$ otvorenih pokrivača

$$\{J_{(l)_0} \cap S, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}} \cap S, J_{q'} \cap S, J_q \cap S\}$$

i

$$\{I_{(h(k))_0} \cap S, \ldots, I_{(h(k))_{\overline{h(k)}}} \cap S\}$$

od (S,d), redom. Također, budući da je $a \in J_{(l)_0} \cap S$, postoji $r' \in \mathbb{R}, r' > 0$ takav da je $B(a,r') \subseteq J_{(l)_0} \cap S$. Stavimo

$$\lambda = \min\{\lambda_1, \frac{\lambda_2}{3}, r, r'\}.$$

Budući da je S lančast od a do b, postoji kompaktan λ – lanac $D_0, \ldots, D_n$ u (S,d) koji pokriva S takav da je $a \in D_0$ i $b \in D_n$. Primjetimo da je

$$D_0 \subseteq J_{(l)_0}, \tag{4.10}$$

zato što je $a \in D_0$ i $\operatorname{diam} D_0 < r'$ pa je i $D_0 \subseteq B(a,r') \subseteq J_{(l)_0} \cap S$.

Kao i ranije, neka je

$$w = \min\{i \in \{0, \ldots, n\} \mid D_i \cap S \setminus J_{\tilde{a}} \neq \emptyset\}$$

i neka je

$$w' = \min\{0 < i < w \mid D_i \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}\}.$$

Broj w' je dobro definiran. Da bismo to pokazali, primjetimo prvo da je

$$J_{(l)_0} \cap S, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}} \cap S, \left(J_{q'} \cup J_q\right) \cap S$$

lanac u S. Naime, jer je $(l,q',q) \in \Omega_2$, karike koje nisu susjedne se ne sijeku, a susjedne karike se sijeku jer je S povezan, $a \in J_{(l)_0} \cap S$ i $b \in \left(J_{q'} \cup J_q\right) \cap S$. Dalje, jer je $\operatorname{diam} D_w < \lambda_1$ onda je

$$D_w \subseteq J_{(l)_0} \cap S \quad \text{ili} \quad \ldots \quad \text{ili} \quad D_w \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}} \cap S \quad \text{ili} \quad D_w \subseteq \left(J_{q'} \cup J_q\right) \cap S,$$

ali budući da se D_w i $S \setminus J_{\tilde{a}}$ sijeku, vrijedi $D_w \nsubseteq J_{\tilde{a}}$, što zbog definicije od Ω_3, znači da mora biti $D_w \subseteq \left(J_{q'} \cup J_q\right) \cap S$. Sada, s obzirom na to da je $D_w \subseteq \left(J_{q'} \cup J_q\right) \cap S$ i $\bar{l} \geq 1$ (jer je $(l,q',q) \in \Omega_2$)

te da vrijedi (4.10), po Lemi 3.2.11 zaključujemo da postoji $0 < i < w$ takav da je $D_i \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}} \cap S$, to jest w' je dobro definiran. Primjetimo da je $w' \geq 1$ i $w' \leq n-2$.

Dalje, za svaki $i \in \{0,\dots,w'\}$ postoji $k \in [l]$ takav da je

$$D_i \subseteq J_k. \tag{4.11}$$

Jasno je da je navedeno istina za $i = 0$ i $i = w'$. Kada bi postojao $0 < i < w'$ za koji ne vrijedi (4.11), to jest za koji je $D_i \subseteq \left(J_q \cup J_{q'}\right) \cap S$, mogli bismo po Lemi 3.2.11 zaključiti da postoji $0 < j < i$ takav da je $D_j \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}} \cap S$, to jest $D_j \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}$ što bi bilo u kontradikciji s minimalnošću od w'.

Napokon, promotrimo skupove

$$\mathscr{F} = \{D_0,\dots,D_{w'},D_{w'+1},D_{w'+2} \cup \dots \cup D_n\}$$

i

$$A = \{(l)_0,\dots,(l)_{\bar{l}},q',\varphi((h(k))_0),\dots,\varphi((h(k))_{\overline{h(k)}}),\tilde{a}\}.$$

Po Teoremu 1.3.8 postoje $m,s',s \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\begin{gathered} D_0 \subseteq J_{(m)_0},\dots,D_{w'} \subseteq J_{(m)_{\bar{m}}}, \\ D_{w'+1} \subseteq J_{s'}, \\ D_{w'+2} \cup \dots \cup D_n \subseteq J_s \end{gathered} \tag{4.12}$$

i da vrijede zaključci (ii) i (iii) iz Teorema 1.3.8.

Tvrdimo da je $(l,q',k,m,s') \in \Gamma$. Koristeći iste argumente kao i ranije, zaključujemo da je $\mathscr{H}_m \subseteq_\forall J_{h(k)}, J_{s'} \subseteq_\exists J_{h(k)}$ i $(m,s') \in \Omega$. Također, iz (4.11) dobijamo da je $\mathscr{H}_m \subseteq_\forall \mathscr{H}_l$. S obzirom na to da je $(l)_0 \in A$ i $D_0 \subseteq J_{(l)_0}$, vrijedi $J_{(m)_0} \subseteq_\forall J_{(l)_0}$. Slično dokazujemo da je $J_{(m)_{\bar{m}}} \subseteq_\forall J_{(l)_{\bar{l}}}$.

Ostalo je samo pokazati da postoji $i \in \{q'\} \cup [l]$ takav da je $J_{s'} \subseteq_\forall J_i$. Zbog (4.12) dovoljno je pokazati da postoji $i \in \{q'\} \cup [l]$ takav da je $D_{w'+1} \subseteq J_i$. Doista, zbog definicije od λ_1 vrijedi $D_{w'+1} \subseteq J_i$, za neki $i \in \{q',q\} \cup [l]$, a jasno je da inkluzija $D_{w'+1} \subseteq J_q$ ne vrijedi. Naime, u suprotnom, s obzirom na to da je $D_{w'} \cap D_{w'+1} \neq \emptyset$ i $D_{w'} \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}$, slijedilo bi da je $J_q \cap J_{(l)_{\bar{l}}} \neq \emptyset$, kontradikcija.

Dakle, za sve $(l,q') \in \Omega$ i $k \in \mathbb{N}$ postoji $(m,s') \in \mathbb{N}^2$ takav da je $(l,q',k,m,s') \in \Gamma$. Po Teoremu 1.1.2 postoji parcijalno izračunljiva funkcija $\psi : \Omega \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ takva da je $(x,k,\psi(x,k)) \in \Gamma$ za sve $x \in \Omega$ i $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $(l, q') \in \Omega$ takav da vrijede (4.4) i (4.5). Definirajmo niz $((l_n, q'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način:

$$(l_0, q'_0) = (l, q'),$$

$$(l_{n+1}, q'_{n+1}) = \psi(l_n, q'_n, n+1).$$

Primjetimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$(l_n, q'_n, n+1, l_{n+1}, q'_{n+1}) \in \Gamma. \tag{4.13}$$

Dalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $m_n = \overline{l_n}$, skupove $C_0^n, \dots, C_{m_n+1}^n$ s

$$C_0^n = J_{(l_n)_0}, \dots,\ C_{m_n}^n = J_{(l_n)_{\overline{l_n}}},\ C_{m_n+1}^n = J_{q'_n}$$

i skupove $S_0^n, \dots, S_{m_n+1}^n$ s

$$S_i^n = C_i^n \cap S \text{ za } i \in \{0, \dots, m_n+1\}.$$

Primjetimo da je $S_0^n, \dots, S_{m_n+1}^n$ lanac. Naime, s obzirom na to da je $(l_n, q'_n) \in \Omega$, postoji $q \in \mathbb{N}$ takav da je $(l_n, q'_n, q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, što implicira da je

$$(J_{(l_n)_0}, \dots, J_{(l_n)_{\overline{l_n}}}, J_{q'_n}, J_q)$$

formalni lanac koji pokriva S pa je, posebno, $S_i^n \cap S_j^n = \emptyset$ za sve $i, j \in \{0, \dots, m_n+1\}$, $|i-j| > 1$. Primjetimo da niz $S_0^n, \dots, S_{m_n+1}^n, J_q \cap S$ također pokriva S. Neka je sada $i \in \{0, \dots, m_n\}$ takav da je $S_i^n \cap S_{i+1}^n = \emptyset$. Stavimo $U' = S_0^n \cup \dots \cup S_i^n$ i $U'' = S_{i+1}^n \cup \dots \cup S_{m_n+1}^n \cup (J_q \cap S)$. Budući da je $(l_n, q'_n, q) \in \Omega_3$, vrijedi $a \in J_{(l_n)_0}$. Također je i $\bigcup \mathscr{H}_{l_n} \subseteq J_{\tilde{a}}$, zbog čega je onda $b \in J_{q'_n} \cup J_q$ zato što je $b \in S \setminus J_{\tilde{a}}$. Dakle, $a \in U'$ i $b \in U''$. Zaključujemo da su skupovi U' i U'' otvoreni u S, disjunktni, unija im sadrži S i svaki od njih siječe S, što je u kontradikciji s činjenicom da je S povezan. Dakle, $(S_0^n, \dots, S_{m_n+1}^n)$ je lanac.

Definirajmo sada

$$\hat{S} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{S_0^n} \cup \dots \cup \overline{S_{m_n}^n}\right).$$

Zbog (4.13), za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathscr{H}_{l_{n+1}} \subseteq_\forall \mathscr{H}_{l_n}$ pa zaključujemo da

$$\{S_0^{n+1}, \dots, S_{m_{n+1}}^{n+1}\} \text{ profinjuje } \{S_0^n, \dots, S_{m_n}^n\}, \tag{4.14}$$

a onda i

$$\{\overline{S_0^{n+1}}, \dots, \overline{S_{m_{n+1}}^{n+1}}\} \text{ profinjuje } \{\overline{S_0^n}, \dots, \overline{S_{m_n}^n}\}$$

iz čega slijedi da je $\{\overline{S_0^n} \cup \cdots \cup \overline{S_{m_n}^n}\}$ centrirana familija u S. Budući da je S kompaktan, onda je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{S_0^n} \cup \cdots \cup \overline{S_{m_n}^n}\right) \neq \emptyset$. Slično, $\overline{S_{m_{n+1}}^{n+1}} \subseteq \overline{S_{m_n}^n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S_{m_n}^n} \neq \emptyset$. Neka je $\hat{b} \in S$ takav da je

$$\hat{b} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S_{m_n}^n}.$$

Dalje, budući da su za sve $k \in \mathbb{N}$ i $i \in \{0,\dots,m_k+1\}$ skupovi S_i^k omeđeni u (S,d), možemo definirati

$$\operatorname{mesh}(k) = \max\{\operatorname{diam} S_i^k \mid 0 \leq i \leq m_k+1\}.$$

Tvrdimo da $\operatorname{mesh}(k) \to 0$ kada $k \to \infty$. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji. Za svaki $x \in S$ postoji $i_x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{i_x} \cap S \subseteq B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Prema tome, $\{I_{i_x} \cap S \mid x \in S\}$ je otvoreni pokrivač od (S,d), a jer je (S,d) kompaktan, postoje $x_0,\dots,x_n \in S$ takvi da je $S \subseteq I_{i_{x_0}} \cup \cdots \cup I_{i_{x_n}}$. Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $[j] = \{i_{x_0},\dots,i_{x_n}\}$. Dakle, $S \subseteq J_j$ i $\operatorname{diam}(I_i \cap S) < \varepsilon$ za svaki $i \in [j]$. Dalje, neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $j = h(k_0)$. Po (4.4) i (4.13) je

$$\mathscr{H}_{l_{k_0}} \subseteq_\forall J_{h(k_0)} \quad \text{i} \quad J_{q'_{k_0}} \subseteq_\exists J_{h(k_0)}$$

pa zaključujemo da

$$\{S_0^{k_0},\dots,S_{m_{k_0}}^{k_0},S_{m_{k_0+1}}^{k_0}\} \text{ profinjuje } \{I_i \cap S \mid i \in [h(k_0)]\}.$$

Ovo povlači da je $\operatorname{mesh}(k_0) < \varepsilon$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $\mathscr{H}_{l_{k+1}} \subseteq_\forall \mathscr{H}_{l_k}$ i $J_{q'_{k+1}} \subseteq_\forall J_i$ za $i \in \{l_k\} \cup \left[q'_k\right]$ pa je onda $\operatorname{mesh}(k+1) \leq \operatorname{mesh}(k)$, to jest $\operatorname{mesh}(k) \to 0$.

U sljedećem koraku trebamo pokazati da je $\hat{S}$ lančast od a do $\hat{b}$. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{mesh}(n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Tvrdimo da je

$$S_0^n \cap \hat{S}, S_1^n \cap \hat{S}, \dots, S_{m_n-2}^n \cap \hat{S}, \left(S_{m_n-1}^n \cup S_{m_n}^n \cup S_{m_n+1}^n\right) \cap \hat{S}$$

otvoreni ε – lanac u $(\hat{S},d)$ koji pokriva $\hat{S}$ od a do $\hat{b}$.

Prvo, jer je $(l_n,q'_n) \in \Omega$, jasno je da postoji $q \in \mathbb{N}$ takav da je $(l_n,q'_n,q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, što posebno znači da je

$$\{J_{(l_n)_0} \cap S,\dots,J_{(l_n)_{\overline{l_n}}} \cap S, J_{q'_n} \cap S, J_q \cap S\}$$

otvoreni pokrivač od (S,d). Neka $\lambda > 0$ Lebesgueov broj tog pokrivača,

Dalje, neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k > n$ i $\operatorname{mesh}(k) < \lambda$. Onda je $\operatorname{diam} S_i^k < \lambda$ za svaki $i \in \{0,\dots,m_k\}$ pa, jer je $\operatorname{diam} S_i^k = \operatorname{diam} \overline{S_i^k}$, zaključujemo da

$$\{\overline{S_0^k},\dots,\overline{S_{m_k}^k}\} \text{ profinjuje } \{J_{(l_n)_0},\dots,J_{(l_n)_{\overline{l_n}}},J_{q'_n},J_q\}.$$

Štoviše,

$$\{\overline{S_0^k},\dots,\overline{S_{m_k}^k}\} \text{ profinjuje } \{J_{(l_n)_0},\dots,J_{(l_n)_{\overline{l_n}}},J_{q_n'}\}. \tag{4.15}$$

Da bismo dokazali spomenuto, pretpostavimo da postoji $i\in\{0,\dots,m_k\}$ takav da je $\overline{S_i^k}\subseteq J_q$. To posebno znači da je $S_i^k\subseteq J_q$. Jer je $k>n$, uzastopnom primjenom (4.14), zaključujemo da

$$\{S_0^k,\dots,S_{m_k}^k\} \text{ profinjuje } \{S_0^n,\dots,S_{m_n}^n\}$$

pa onda postoji $j\in[l_n]$ takav da je $S_i^k\subseteq J_{(l_n)_j}$, što zajedno s $S_i^k\subseteq J_q$ i $S_i^k\neq\emptyset$ implicira da se skupovi $J_{(l_n)_j}$ i J_q sijeku, što je nemoguće s obzirom na to da je $(l_n,q_n',q)\in\Omega_2$.

Iz definicije od $\hat{S}$ i (4.15) dobijamo da je

$$\hat{S}\subseteq\overline{S_0^k}\cup\dots\cup\overline{S_{m_k}^k}\overset{(4.15)}{\subseteq} S_0^n\cup S_1^n\cup\dots\cup S_{m_n-2}^n\cup\left(S_{m_n-1}^n\cup S_{m_n}^n\cup S_{m_n+1}^n\right)\subseteq$$

$$\subseteq(S_0^n\cap\hat{S})\cup(S_1^n\cap\hat{S})\cup\dots\cup(S_{m_n-2}^n\cap\hat{S})\cup\left(\left(S_{m_n-1}^n\cup S_{m_n}^n\cup S_{m_n+1}^n\right)\cap\hat{S}\right).$$

Jasno je da je $a\in S_0^n\cap\hat{S}$, zato što je $a\in J_{(l_n)_0}$. Također, $b\in\left(S_{m_n-1}^n\cup S_{m_n}^n\cup S_{m_n+1}^n\right)\cap\hat{S}$, zato što je $\hat{b}\in\overline{S_{m_k}^k}$ i

$$\overline{S_{m_k}^k}\subseteq S_{m_n-1}^n\cup S_{m_n}^n\cup S_{m_n+1}^n. \tag{4.16}$$

Naime, $S_{m_k}^k\subseteq S_{m_n}^n$, a zbog (4.15)

$$\{\overline{S_0^k},\dots,\overline{S_{m_k}^k}\} \text{ profinjuje } \{S_0^n,\dots,S_{m_n}^n,S_{m_n+1}^n\}$$

pa obzirom na to da je $S_{m_n}^n$ disjunktan sa svakim od skupova S_j^n, $j\in\{0,\dots,m_n-2\}$, mora biti $\overline{S_{m_k}^k}\subseteq S_{m_n-1}^n\cup S_{m_n}^n\cup S_{m_n+1}^n$. Dalje, jasno je da je

$$\operatorname{diam}(S_0^n\cap\hat{S})<\varepsilon,\dots,\operatorname{diam}\left(\left(S_{m_n-1}^n\cup S_{m_n}^n\cup S_{m_n+1}^n\right)\cap\hat{S}\right)<\varepsilon.$$

Također, s obzirom na to da je $(l_n,q_n',q)\in\Omega_2$, očito je da se oni elementi niza

$$S_0^n\cap\hat{S},S_1^n\cap\hat{S},\dots,S_{m_n-2}^n\cap\hat{S},\left(S_{m_n-1}^n\cup S_{m_n}^n\cup S_{m_n+1}^n\right)\cap\hat{S}$$

koji nisu susjedni ne sijeku. Da bismo pokazali da se susjedi sijeku, dovoljno je pokazati da je $\hat{S}$ povezan. Iz toga će dodatno, budući da je $\hat{S}$ zatvoren u kompaktu (S,d), slijediti i da je $\hat{S}$ potkontinuum od S.

Stoga, pretpostavimo suprotno, to jest neka je (L_1,L_2) separacija od $\hat{S}$. Neka je

$$\mu=d(L_1,L_2).$$

Budući da su L_1 i L_2 kompaktni (kao zatvoreni podskupovi kompakta (S,d)), vrijedi $\mu > 0$ pa onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{mesh}(n) < \frac{\mu}{5}$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $a \in L_1$ i definirajmo

$$i_0 = \min\{i \in \{0,\ldots,m_n+1\} \mid S_i^n \cap L_2 \neq \emptyset\}.$$

Primjetimo da skup dijametra strogo manjeg od μ, po definiciji od μ, ne može istovremeno sijeći skupove L_1 i L_2. Prema tome, lako zaključujemo da je

$$5 \leq i_0 \leq m_n + 1 \tag{4.17}$$

jer bi $i_0 \leq 4$ impliciralo da skup $S_0^n \cup \cdots \cup S_{i_0}^n$, $\operatorname{diam}\left(S_0^n \cup \cdots \cup S_{i_0}^n\right) < \mu$ siječe L_1 (jer je $a \in S_0^n$) i L_2 (po definiciji od i_0), kontradikciju. Posebno, $m_n \geq 4$.

Po definiciji od i_0 vrijedi $S_{i_0-3}^n \cap L_2 = \emptyset$. S druge strane, $S_{i_0}^n \cap L_2 \neq \emptyset$ pa je

$$\left(S_{i_0-3}^n \cup S_{i_0-2}^n \cup S_{i_0-1}^n \cup S_{i_0}^n\right) \cap L_2 \neq \emptyset,$$

a jer je $\operatorname{diam}\left(S_{i_0-3}^n \cup S_{i_0-2}^n \cup S_{i_0-1}^n \cup S_{i_0}^n\right) < \mu$ imamo

$$\left(S_{i_0-3}^n \cup S_{i_0-2}^n \cup S_{i_0-1}^n \cup S_{i_0}^n\right) \cap L_1 = \emptyset,$$

što povlači $S_{i_0-3}^n \cap L_1 = \emptyset$. Dakle, $S_{i_0-3}^n \cap \hat{S} = \emptyset$, to jest $C_{i_0-3}^n \cap \hat{S} = \emptyset$.

Kao i ranije (vidjeti (4.15)), postoji $k > n$ takav da

$$\{\overline{S_0^k},\ldots,\overline{S_{m_k}^k}\} \text{ profinjuje } \{J_{(l_n)_0},\ldots,J_{(l_n)_{\overline{l_n}}},J_{q_n'}\}.$$

Tvrdimo da postoji $u_0 \in \{0,\ldots,m_k\}$ takav da je $\overline{S_{u_0}^k} \subseteq C_{i_0-3}^n$. Pretpostavimo suprotno. Budući da je $S_0^k \subseteq C_0^n$ i $S_{m_k}^k \subseteq S_{m_n}^n$, slično kao u (4.16), zaključujemo da je

$$\overline{S_0^k} \subseteq C_0^n \cup C_1^n \overset{(4.17)}{\subseteq} C_0^n \cup \cdots \cup C_{i_0-4}^n,$$

odnosno da je

$$\overline{S_{m_k}^k} \subseteq C_{m_n-1}^n \cup C_{m_n}^n \cup C_{m_n+1}^n \overset{(4.17)}{\subseteq} C_{i_0-2}^n \cup \cdots \cup C_{m_n+1}^n.$$

Budući da je $\overline{S_1^k} \cap \overline{S_0^k} \neq \emptyset$, mora vrijediti $\overline{S_1^k} \subseteq C_0^n \cup \cdots \cup C_{i_0-4}^n$. U konačno mnogo koraka ovakvim razmatranjem zaključujemo da je

$$\overline{S_{m_k}^k} \subseteq C_0^n \cup \cdots \cup C_{i_0-4}^n,$$

što je očita neistina. Dakle, postoji $u_0 \in \{0,\ldots,m_k\}$ takav da je $\overline{S_{u_0}^k} \subseteq C_{i_0-3}^n$.

Zbog Leme 3.2.11 i (4.14) postoji $u_1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_1 \leq m_{k+1}$, takav da je $S_{u_1}^{k+1} \subseteq S_{u_0}^{k}$, to jest $\overline{S_{u_1}^{k+1}} \subseteq \overline{S_{u_0}^{k}}$. Prema tome, za svaki $p \in \mathbb{N}$ dobijamo u_p takav da je

$$C_{i_0-3}^{n} \supseteq \overline{S_{u_0}^{k}} \supseteq \overline{S_{u_1}^{k+1}} \supseteq \cdots \supseteq \overline{S_{u_p}^{k+p}} \supseteq \cdots,$$

iz čega zaključujemo, kao i ranije, da je $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{S_{u_p}^{k+p}} \neq \emptyset$. Taj je skup očito podskup i od $\hat{S}$, što je u kontradikciji s $C_{i_0-3}^{n} \cap \hat{S} = \emptyset$. Dakle, $\hat{S}$ je kontinuum koji je lančast od a to $\hat{b}$.

Potrebno je još dokazati sljedeće:

1. $\hat{b} \in S$ je izračunljiva točka;
2. $\hat{b} \in I_\beta$ i
3. $\hat{S}$ je izračunljiv.

Prvo ćemo pokazati da za sve $m,n \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq m$ vrijedi

$$\mathscr{H}_{l_n} \subseteq_\forall J_{h(m)} \quad \text{i} \quad J_{q_n'} \subseteq_\exists J_{h(m)}. \tag{4.18}$$

Naime, iz (4.4) i (4.13) imamo da je za sve $m \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{H}_{l_m} \subseteq_\forall J_{h(m)} \quad \text{i} \quad J_{q_m'} \subseteq_\exists J_{h(m)}. \tag{4.19}$$

Zbog (4.13) i definicije od Γ znamo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji $u \in [l_m] \cup \{q_m'\}$ takav da je $J_{q_{m+1}'} \subseteq_\forall J_u$. Za takav u po (4.19) vrijedi $J_u \subseteq_\exists J_{h(m)}$ pa onda postoji $k \in [h(m)]$ takav da je $J_u \subseteq_\forall I_k$. Prema tome, $J_{q_{m+1}'} \subseteq_\forall I_k$, to jest $J_{q_{m+1}'} \subseteq_\exists J_{h(m)}$. Nadalje, $\mathscr{H}_{l_{m+1}} \subseteq_\forall \mathscr{H}_{l_m}$, a zbog (4.19) je $\mathscr{H}_{l_{m+1}} \subseteq_\forall J_{h(m)}$. U konačno mnogo koraka dolazimo do (4.18).

Sada, da bismo pokazali tvrdnju 1., trebamo dokazati da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid \hat{b} \in I_i\}$ izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, kao u (4.16), vrijedi

$$\hat{b} \in S_{m_n-1}^{n} \cup S_{m_n}^{n} \cup S_{m_{n+1}}^{n} \subseteq C_{m_n-1}^{n} \cup C_{m_n}^{n} \cup C_{m_n+1}^{n},$$

to jest $\hat{b} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(C_{m_n-1}^{n} \cup C_{m_n}^{n} \cup C_{m_n+1}^{n} \right)$. (Primjetimo da je $m_n = \overline{l_n} \geq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, što slijedi direktno iz definicije od Ω_2.)

Sada, tvrdimo da vrijedi sljedeće:

$$\hat{b} \in I_i \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \left(J_{q_n'} \subseteq_\forall I_i \wedge J_{(l_n)_{\overline{l_n}}} \subseteq_\forall I_i \wedge J_{(l_n)_{\overline{l_n}-1}} \subseteq_\forall I_i \right). \tag{4.20}$$

Da bismo dokazali netrivijalnu implikaciju, pretpostavimo da je $\hat{b} \in I_i$. Onda postoji $r'' \in \mathbb{R}$, $r'' > 0$ takav da je $B(\hat{b}, 2r'') \subseteq I_i$ i $B(\hat{b}, 2r'') \neq S$. Po Lemi 4.1.1 postoji $\tilde{c} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \setminus B(\hat{b}, 2r'') \subseteq J_{\tilde{c}} \quad \text{i} \quad J_{\tilde{c}} \cap \overline{B}(\hat{b}, r'') = \emptyset. \tag{4.21}$$

Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $[j] = [\tilde{c}] \cup \{i\}$. Po (4.21) je jasno da vrijedi $S \subseteq J_j$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $h(m) = j$ i neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ bilo koji za koji je $\mathrm{mesh}(n) < \frac{r''}{3}$. S obzirom na to da je

$$\hat{b} \in S^n_{m_n-1} \cup S^n_{m_n} \cup S^n_{m_n+1} \quad \text{i} \quad \mathrm{diam}(S^n_{m_n-1} \cup S^n_{m_n} \cup S^n_{m_n+1}) < r'',$$

jasno je da je

$$S^n_{m_n-1} \cup S^n_{m_n} \cup S^n_{m_n+1} \subseteq B(\hat{b}, r''),$$

što po (4.21) implicira da su $S^n_{m_n-1} \cup S^n_{m_n} \cup S^n_{m_n+1}$ i $J_{\tilde{c}}$ disjunktni.

Budući da po (4.18) vrijedi $J_{q'_n} \subseteq_{\exists} J_{h(m)}$, postoji $v \in [j]$ takav da je $J_{q'_n} \subseteq_{\forall} I_v$ iz čega onda slijedi $\emptyset \neq S^n_{m_n+1} \subseteq I_v$. Tvrdimo da je $v = i$. Uistinu, pretpostavimo li da vrijedi $v \neq i$, onda je $v \in [\tilde{c}]$ što znači da $S^n_{m_n+1}$ i $J_{\tilde{c}}$ nisu disjunktni, a to je nemoguće pa je time dokazano $J_{q'_n} \subseteq_{\forall} I_i$. Nadalje, $J_{(l_n)_{\overline{l_n}}} \subseteq_{\forall} I_i$ jer je bi $J_{(l_n)_{\overline{l_n}}} \subseteq_{\forall} I_v$ za neki $v \neq i$ vodilo na kontradikciju s $S^n_{m_n} \cap J_{\tilde{c}} = \emptyset$. Slično, $J_{(l_n)_{\overline{l_n}-1}} \subseteq_{\forall} I_i$, to jest vrijedi (4.20). Sada, koristeći Napomenu 4.1.4 i činjenicu da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $n \mapsto (l_n, q'_n)$ izračunljiva, lako zaključujemo da je skup

$$P_1 = \{(i,n) \in \mathbb{N}^2 \mid J_{q'_n} \subseteq_{\forall} I_i \wedge J_{(l_n)_{\overline{l_n}}} \subseteq_{\forall} I_i \wedge J_{(l_n)_{\overline{l_n}-1}} \subseteq_{\forall} I_i\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ pa je po Teoremu 1.1.1 i

$$\{i \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(i,n) \in P_1\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$, to jest $\hat{b}$ je izračunljiva točka.

Sada, pokažimo da je $\hat{b} \in I_\beta$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka $\hat{b} \notin I_\beta$. Budući da vrijedi (4.2), imamo $\hat{b} \notin \overline{I_{\beta'} \cap S}$ pa onda postoji otvoreni skup U u (S,d) takav da je $\hat{b} \in U$ i $U \cap \left(\overline{I_{\beta'} \cap S}\right) = \emptyset$. Posebno,

$$\emptyset = U \cap \left(I_{\beta'} \cap S\right) = (U \cap S) \cap I_{\beta'} = U \cap I_{\beta'}. \tag{4.22}$$

Neka je $s > 0$ takav da je $B(\hat{b}, s) \subseteq U$ i neka je $t \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{mesh}(t) < \frac{s}{3}$. S obzirom na to da je

$$\hat{b} \in S^t_{m_t-1} \cup S^t_{m_t} \cup S^t_{m_t+1} \quad \text{i} \quad \mathrm{diam}\left(S^t_{m_t-1} \cup S^t_{m_t} \cup S^t_{m_t+1}\right) < s,$$

vrijedi

$$S^t_{m_t-1} \cup S^t_{m_t} \cup S^t_{m_t+1} \subseteq B(\hat{b}, s) \subseteq U$$

što je, zbog (4.22), u kontradikciji s $S^t_{m_t} \subseteq I_{\beta'}$ (posljednja je inkluzija istinita zbog (4.5) i (4.13)).

Napokon, ostaje samo pokazati da je skup $\hat{S}$ izračunljiv u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$. S obzirom na to da je $\hat{S}$ lančast od a do $\hat{b}$ i da su a i $\hat{b}$ izračunljive točke, po Teoremu 2.1.1 dovoljno je pokazati da je $\hat{S}$ poluizračunljiv.

U tu svrhu, dovoljno je dokazati sljedeću ekvivalenciju:

$$\hat{S} \subseteq J_j \iff (\exists n \in \mathbb{N}) \left(\mathscr{H}_{l_n} \subseteq_\forall J_j \wedge J_{q'_n} \subseteq_\exists J_j \right).$$

Za dokazivanje netrivijalne implikacije, pretpostavimo da je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\hat{S} \subseteq J_j$. Budući da je (S,d) normalan, postoji otvoreni skup $U \subseteq S$ takav da je

$$\hat{S} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq J_j.$$

Neka je $r''' \in \mathbb{R}, r''' > 0$ takav da je $B(\hat{b}, r''') \subseteq U$. Slično kao ranije, zaključujemo da postoji $\tilde{d} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \subseteq J_{\tilde{d}} \cup J_j \quad \text{i} \quad J_{\tilde{d}} \cap \overline{U} = \emptyset$$

i $p \in \mathbb{N}$ takav da je $[h(p)] = \left[\tilde{d}\right] \cup [j]$. Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ za koji je $\operatorname{mesh}(n) < \frac{r'''}{3}$, po (4.18), vrijedi

$$\mathscr{H}_{l_n} \subseteq_\forall J_{h(p)} \quad \text{i} \quad J_{q'_n} \subseteq_\exists J_{h(p)}. \tag{4.23}$$

Prvo ćemo pokazati da je $J_{q'_n} \subseteq_\exists J_j$. Pretpostavimo suprotno, što zbog (4.23), znači da je $J_{q'_n} \subseteq_\exists J_{\tilde{d}}$, to jest

$$S^n_{m_n+1} \subseteq J_{\tilde{d}}. \tag{4.24}$$

S obzirom na to da je

$$\hat{b} \in S^n_{m_n-1} \cup S^n_{m_n} \cup S^n_{m_n+1} \quad \text{i} \quad \operatorname{diam}(S^n_{m_n-1} \cup S^n_{m_n} \cup S^n_{m_n+1}) < r'''$$

jasno je da je $S^n_{m_n-1} \cup S^n_{m_n} \cup S^n_{m_n+1} \subseteq B(\hat{b}, r''') \subseteq U$ pa zaključujemo da je $S^n_{m_n+1} \subseteq \overline{U}$, što je u kontradikciji s (4.24). Analogno, $J_{(l_n)_{\overline{l_n}-1}} \subseteq_\exists J_j$ i $J_{(l_n)_{\overline{l_n}}} \subseteq_\exists J_j$. Ostaje nam još pokazati da je $\mathscr{H}_{l_n} \subseteq_\forall J_j$, to jest da je $J_{(l_n)_i} \subseteq_\exists J_j$ za svaki $i \in \{0, \dots, \overline{l_n} - 2\}$. Po (4.23), za svaki $i \in \{0, \dots, \overline{l_n} - 2\}$ vrijedi $J_{(l_n)_i} \subseteq_\exists J_{\tilde{d}}$ ili $J_{(l_n)_i} \subseteq_\exists J_j$. Dokazujući da je $\hat{S}$ lančast od a do $\hat{b}$, pokazali smo da svaki od skupova $S^n_0, \dots, S^n_{m_n-2}$ siječe $\hat{S}$ pa onda, posebno, $J_{(l_n)_i}$ siječe $\hat{S}$. Medutim, $J_{\tilde{d}}$ ne siječe $\hat{S}$ (jer ne siječe $\overline{U}$) pa mora biti $J_{(l_n)_i} \subseteq_\exists J_j$. Sada, koristeći Napomenu 4.1.7 i činjenicu da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $n \mapsto (l_n, q'_n)$ izračunljiva, lako zaključujemo da je skup

$$\{(j,n) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathscr{H}_{l_n} \subseteq_\forall J_j \wedge J_{q'_n} \subseteq_\exists J_j\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}^2$ pa je po Teoremu 1.1.1 i skup

$$\{j \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) \left(\mathscr{H}_{l_n} \subseteq_\forall J_j \wedge J_{q'_n} \subseteq_\exists J_j\right)\}$$

izračunljivo prebrojiv u $\mathbb{N}$. ■

Neka je $(X,\mathscr{T})$ topološki prostor, neka je $\mathscr{U}$ otvoreni pokrivač od $(X,\mathscr{T})$ i neka su $x,y \in X$. Kažemo da su x i y $\mathscr{U}$-**blizu** ako postoji $U \in \mathscr{U}$ takav da vrijedi $x,y \in U$. Za $S,T \subseteq X$ kažemo da su $\mathscr{U}$-**blizu**, i pišemo $S \approx_{\mathscr{U}} T$, ako za svaki $x \in S$ postoji $y \in T$ takav da su x i y $\mathscr{U}$-blizu i ako za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da su x i y $\mathscr{U}$-blizu.

Za kontinuum S kažemo da je dekompozabilan ako se može zapisati kao unija svoja dva prava potkontinuuma.

Sljedeće je dokazano u [26]:

Teorem 4.2.3. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Ako je S poluizračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ koji je dekompozabilan lančasti kontinuum, onda za svaki otvoreni pokrivač $\mathscr{U}$ od $(X,\mathscr{T})$ postoje izračunljive točke $\hat{a},\hat{b} \in S$ i kontinuum $\hat{S}$ lančast od $\hat{a}$ do $\hat{b}$ takav da je $\hat{S} \subseteq S$, $\hat{S} \approx_{\mathscr{U}} S$ i da je $\hat{S}$ izračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.

Sada dokazujemo:

Teorem 4.2.4. Neka je $(X,\mathscr{T},(I_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je S poluizračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$ koji je, kao potprostor od $(X,\mathscr{T})$, kontinuum koji je lančast od a do b, gdje je a izračunljiva točka. Tada za svaki otvoreni pokrivač $\mathscr{U}$ od $(X,\mathscr{T})$ postoji izračunljiva točka $\hat{b} \in S$ i kontinuum $\hat{S}$ lančast od a do $\hat{b}$ takav da je $\hat{S} \subseteq S$, $\hat{S} \approx_{\mathscr{U}} S$ i da je $\hat{S}$ izračunljiv skup u $(X,\mathscr{T},(I_i))$.

Dokaz. Neka je $\mathscr{U}$ otvoreni pokrivač od $(X,\mathscr{T})$. Tada je $\{U \cap S \mid U \in \mathscr{U}\}$ otvoreni pokrivač od S, a s obzirom na to da je kontinuum S lančast od a do b, postoji otvoreni lanac $C_0,\dots,C_m$ u S koji pokriva S od a do b i za koji $\{C_0,\dots,C_m\}$ profinjuje $\{U \cap S \mid U \in \mathscr{U}\}$. Iz toga slijedi da $\{C_0,\dots,C_m\}$ profinjuje i $\mathscr{U}$.

Jer je $b \in C_m$, postoji $\beta \in \mathbb{N}$ takav da je

$$b \in I_\beta \cap S \subseteq C_m.$$

Po Teoremu 4.2.2 postoji izračunljiva točka $\hat{b} \in I_\beta$ i izračunljiv skup $\hat{S}$ takav da je $\hat{S}$ kontinuum koji je lančast od a do $\hat{b}$ i da je $\hat{S} \subseteq S$. Očito je $\hat{b} \in I_\beta \cap S$, pa je $\hat{b} \in C_m$.

Pokažimo sada da je $\hat{S} \approx_{\mathscr{U}} S$. S obzirom na to da je $\hat{S} \subseteq S$, trebamo samo pokazati da za svaki $x \in S$ postoji točka iz $\hat{S}$ koja je $\mathscr{U}$-blizu x.

Neka je, dakle, $x \in S$ bilo koji. Tada postoji $i \in \{0,\dots,m\}$ takav da je $x \in C_i$. Tvrdimo da $C_i \cap \hat{S} \neq \emptyset$. Ustinu, kada bi vrijedilo $C_i \cap \hat{S} = \emptyset$, s obzirom na to da je $\hat{S} \subseteq C_0 \cup \cdots \cup C_m$, $a \in \hat{S} \cap C_0$ i $\hat{b} \in \hat{S} \cap C_m$, imali bismo separaciju od $\hat{S}$, što je nemoguće. Dakle, $C_i \cap \hat{S} \neq \emptyset$ pa onda postoji $y \in \hat{S}$ takav da je $x, y \in C_i$. Budući da $\{C_0,\dots,C_m\}$ profinjuje $\mathscr{U}$, postoji $U \in \mathscr{U}$ takav da je $C_i \subseteq U$. Slijedi $x, y \in U$.

Zaključujemo da za svaki $x \in S$ postoji $y \in \hat{S}$ takav da su x i y $\mathscr{U}$-blizu. Dakle, $\hat{S} \approx_{\mathscr{U}} S$. ■

Sljedeći korolar posljedica je Teorema 4.2.2 i 4.2.4.

Korolar 4.2.5. Neka je $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ izračunljiv topološki prostor i neka su $a, b \in X$. Neka je S poluizračunljiv luk u $(X, \mathscr{T}, (I_i))$ i neka su a i b krajnje točke od S.

(i) Ako je a izračunljiva točka, onda za svaki $\beta \in \mathbb{N}$ takav da je $b \in I_\beta$ postoji izračunljiv podluk $\hat{S} \subseteq S$ s krajnjim točkama a i $\hat{b}$, gdje je $\hat{b}$ izračunljiva točka takva da je $\hat{b} \in I_\beta$.

(ii) Ako je a izračunljiva točka, onda za svaki otvoreni pokrivač $\mathscr{U}$ od $(X, \mathscr{T})$ postoji izračunljiv podluk $\hat{S}$ od S s krajnjim točkama a i $\hat{b}$, pri čemu je $\hat{b}$ izračunljiva točka takva da je $\hat{S} \approx_{\mathscr{U}} S$.

Neka je (X, d) metrički prostor, $S \subseteq X$ neprazan kompaktan skup u (X, d) i $\mathscr{A}$ familija nepraznih kompaktnih skupova u (X, d). Za svaki otvoreni pokrivač $\mathscr{U}$ topološkog prostora $(X, \mathscr{T}_d)$ postoji $A \in \mathscr{A}$ takav da je $S \approx_{\mathscr{U}} A$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $A \in \mathscr{A}$ takav da je $S \approx_\varepsilon A$, to jest $d_H(S, A) < \varepsilon$. Dokaz se može pronaći u [26].

Koristeći navedeno, jednostavno dobijamo sljedeće posljedice Teorema 4.2.2 i 4.2.4 i Korolara 4.2.5.

Korolar 4.2.6. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup u (X, d, α).

(i) Ako je S kontinuum koji je lančast od a do b, gdje je a izračunljiva točka u (X, d, α), onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izračunljiva točka $\hat{b} \in S$ i izračunljiv kontinuum $\hat{S}$ lančast od a do $\hat{b}$ takav da je $\hat{S} \subseteq S$ i $d(\hat{b}, b) < \varepsilon$. Nadalje, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izračunljiva točka $\hat{b} \in S$ i izračunljiv kontinuum $\hat{S}$ lančast od a do $\hat{b}$ takav da je $\hat{S} \subseteq S$ i $d_H(\hat{S}, S) < \varepsilon$.

(ii) Ako je S luk s krajnjim točkama a i b, gdje je a izračunljiva točka, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izračunljiva točka $\hat{b} \in S$ i izračunljiv podluk $\hat{S}$ od S čije su krajnje točke a i $\hat{b}$ takve da je $d(\hat{b}, b) < \varepsilon$. Nadalje, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izračunljiva točka $\hat{b} \in S$ i izračunljiv podluk $\hat{S}$ od S s krajnjim točkama a i $\hat{b}$ takvima da je $d_H(\hat{S}, S) < \varepsilon$.

Svaki luk je dekompozabilan lančasti kontinuum pa već po Teoremu 4.2.1 znamo da se poluizračunljiv luk A može aproksimirati svojim izračunljivim podlukom do na zadanu točnost. Međutim, ako A ima izračunljivu krajnju točku a, iz tog rezultat ne možemo zaključiti da će izračunljivi podluk također imati a kao krajnju točku, ali zato možemo iz Korolara 4.2.6.

ZAKLJUČAK

U ovom smo radu proširili klasu (parova) topoloških prostora koji imaju izračunljiv tip što je omogućilo bolje razumijevanje veze topologije i klasične teorije izračunljivosti. Na primjer, pokazali smo da $(A \cup_f (I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_n), A)$ ima izračunljiv tip ako A ima izračunljiv tip, gdje je A topološki prostor, $I_0, \ldots, I_n$ niz topoloških prostora takvih da je $I_i = [0,1]$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ i $f : \partial I_0 \sqcup \cdots \sqcup \partial I_n \to A$ funkcija.

Dalje, dokazali smo da (G, E) ima izračunljiv tip ako je G lančasti graf, a E skup njegovih krajnjih točaka. Time smo potpuno generalizirali rezultate vezane uz grafove i zaključili jedan od smjerova istraživanja. Naime, pokazali smo da se definicija poopćenog grafa ne može proširiti na način da dokazana tvrdnja vrijedi i za novodefinirani pojam. Međutim, Korolar 3.2.17 pružio je mogućnost novih istraživanja. Sada ima smisla ispitivati istinitost njegove tvrdnje uz uklanjanje uvjeta (1) i (2) iz niza pretpostavki.

Na kraju, postigli smo određeni napredak u traženju odgovora na pitanje kakvi se poluizračunljivi skupovi mogu aproksimirati nekim svojim izračunljivim podskupovima. Dokazali smo da se svaki poluizračunljiv kontinuum S lančast od a do b, gdje je a izračunljiva točka, može po volji dobro aproksimirati nekim svojim izračunljivim potkontinuumom S' lančastim od a do c, gdje je c izračunljiva točka. To znači, na primjer, da poluizračunljiv luk S koji ima izračunljivu krajnju točku a možemo aproksimirati izračunljivim podlukom S' koji također za jednu od krajnjih točaka ima upravo točku a.

Bibliografija

[1] Amir, D.E. i M. Hoyrup: *Computability of Finite Simplicial Complexes*. U Bojańczyk, Mikołaj, Emanuela Merelli i David P. Woodruff (urednici): *49th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2022)*, svezak 229 iz *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, stranice 111:1–111:16, Dagstuhl, Germany, 2022. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, ISBN 978-3-95977-235-8. `https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2022/16452`. ↑ 1.

[2] Brattka, V. i G. Presser: *Computability on subsets of metric spaces*. Theoretical Computer Science, (305):43–76, 2003. ↑ 5.

[3] Brattka, V. i K. Weihrauch: *Computability on subsets of Euclidean space I: Closed and compact subsets*. Theoretical Computer Science, (219):65–93, 1999. ↑ 5.

[4] Burgess, C.E.: *Chainable continua and indecomposability*. Pac. J. Math., 9:653–659, 1959. ↑ 17.

[5] Burnik, K. i Z. Iljazović: *Computability of 1-manifolds*. Logical Methods in Computer Science, 10(2:8):1–28, 2014. ↑ 1.

[6] Christenson, C.O. i W.L. Voxman: *Aspects of Topology*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977. ↑ 2, 9.

[7] Hertling, P.: *Effectivity and effective continuity of functions between computable metric spaces*. U al., D.S.Bridges et (urednik): *Combinatorics, Complexity and Logic, Proc. DMTCS96*, stranice 264–275. Springer, Berlin, 1996. ↑ 1.

[8] Iljazović, Z.: *Chainable and Circularly Chainable Co-c.e. Sets in Computable Metric Spaces*. Journal of Universal Computer Science, 15(6):1206–1235, 2009. ↑ 3, 5.

[9] Iljazović, Z.: *Co-c.e. Spheres and Cells in Computable Metric Spaces*. Logical Methods in Computer Science, 7(3:05):1–21, 2011. ↑ 2.

[10] Iljazović, Z.: *Compact manifolds with computable boundaries*. Logical Methods in Computer Science, 9(4:19):1–22, 2013. ↑ 1, 2, 9.

[11] Iljazović, Z.: *Computability of graphs*. Math. Log. Q., 66(1):51–64, 2020. ↑ 1, 3, 13, 39, 42.

[12] Iljazović, Z. i B. Pažek: *Co-c.e. sets with disconnected complements*. Theory of Computing Systems, 62(5):1109–1124, 2018. ↑ 1.

[13] Iljazović, Z. i B. Pažek: *Computable intersection points*. Computability, 7:57–99, 2018. ↑ 3, 16, 45.

[14] Iljazović, Z. i I. Sušić: *Semicomputable manifolds in computable topological spaces*. Journal of Complexity, 45:83–114, 2018. ↑ 1, 2, 12, 13, 14, 68.

[15] Iljazović, Z.: *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova*. Doktorska disertacija. 2009. ↑ 45.

[16] Iljazović, Z. i M. Jelić: *Computable approximations of a chainable continuum with a computable endpoint*. Archive for Mathematical Logic, rujan 2023. ↑ 4.

[17] Kihara, T.: *Incomputability of Simply Connected Planar Continua*. Computability, 1(2):131–152, 2012. ↑ 1.

[18] Miller, J.S.: *Effectiveness for Embedded Spheres and Balls*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 66:127–138, 2002. ↑ 1.

[19] Munkres, J.R.: *Topology*. Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000, ISBN 9780131816299. ↑ 34, 35.

[20] Nadler, S.B.: *Continuum theory*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992. ↑ 2, 3.

[21] Pour-El, M.B. i J.I. Richards: *Computability in Analysis and Physics*. Springer, Berlin, 1989. ↑ 5.

[22] Specker, E.: *Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis*. U Heyting, A. (urednik): *Constructivity in Mathematics*, stranice 254–265. North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1959. ↑ 1.

[23] Tanaka, H.: *On a Π_1^0 set of positive measure*. Nagoya Math. J., 38:139–144, 1970. ↑ 1.

[24] Turing, A.M.: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Proc. London Math. Soc., 42:230–265, 1936. ↑ 5.

[25] Validžić, L.: *Topološki aspekti izračunljivosti*. Diplomski rad. 2016. ↑ 6, 8, 9.

[26] Čačić, V., M. Horvat i Z. Iljazović: *Computable subcontinua of semicomputable chainable Hausdorff continua*. Theoretical Computer Science, 892:155–169, 2021. ↑ 1, 3, 67, 71, 84, 85.

[27] Čelar, M. i Z. Iljazović: *Computability of Products of Chainable Continua*. Theory of Computing Systems, 65:410–427, 2021. ↑ 1.

[28] Čelar, M. i Z. Iljazović: *Computability of glued manifolds*. Journal of Logic and Computation, 32(1):65–97, 2022. ↑ 1, 65.

[29] Čičković, E., Z. Iljazović i L. Validžić: *Chainable and circularly chainable semicomputable sets in computable topological spaces*. Archive for Mathematical Logic, 58:885–897, 2019. ↑ 1, 2, 3, 16, 19, 26.

[30] Weihrauch, K.: *Computability on computable metric spaces*. Theoretical Computer Science, (113):191–210, 1993. ↑ 5.

[31] Weihrauch, K.: *Computable Analysis*. Springer, Berlin, 2000. ↑ 5.

[32] Weihrauch, K.: *Computable Separation in Topology, from T_0 to T_2*. Journal of Universal Computer Science, 16(18):2733–2753, 2010. ↑ 11.

[33] Weihrauch, K. i T. Grubba: *Elementary Computable Topology*. Journal of Universal Computer Science, 15(6):1381–1422, 2009. ↑ 11.

Životopis

Matea Jelić rođena je 23. rujna 1993. u Splitu. Završila je Treću gimnaziju u Splitu 2012. godine i iste je godine upisala Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu koji je završila 2015. godine obranom završnog rada *Mascheov teorem* pod mentorstvom doc. dr. sc. Gordana Radobolje. Diplomski studij matematike, smjer: teorijski završila je 2017. godine, i tako stekla zvanje magistre matematike, obranom diplomskog rada *Matematičke osnovne neuronskih mreža* pod mentorstvom doc. dr. sc. Ive Ugrine. Tijekom studiranja nagrađena je s dvije Rektorove nagrade za izvrsnost i dvije Dekanove nagrade.

U prosincu 2018. godine, nakon zaposlenja na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, upisala je Poslijediplomski doktorski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Članica je Topološkog seminara u Splitu. Bila je članica projekta *Izračunljive strukture, odlučivost i složenost* Hrvatske zaklade za znanost u trajanju od 1. listopada 2018. do 30. rujna 2022. Udana je i majka je jednog djeteta.

Sudjelovala je na sljedećim znanstvenim skupovima i konferencijama:

1. **20th International Conference on Computability and Complexity in Analysis 2023 (CCA 2023)**, 7. – 9. rujna 2023., Dubrovnik, Hrvatska – izlaganje na temu *Computability of generalized graphs*

2. **Sedmi hrvatski matematički kongres**, 15. – 18. lipnja 2022., Split, Hrvatska – poster pod naslovom *Computability of chainable graphs*

3. **16th International Conference on Computability and Complexity in Analysis 2019 (CCA 2019)**, 8. – 11. srpnja 2019., Zagreb, Hrvatska – izlaganje na temu *Computability of spaces with attached arcs*

4. **16th International Conference on Computability and Complexity in Analysis 2019 (CCA 2019)**, 8. – 11. srpnja 2019., Zagreb, Hrvatska - članica organizacijskog odbora

5. **15th International Conference on Computability and Complexity in Analysis 2018 (CCA 2018)**, 5. – 11. kolovoza 2018., Jezero Kochel, Njemačka – sudjelovanje

Koautorica je tri znanstvena članka od kojih su sljedeći objavljeni, to jest prihvaćeni za objavu:

1. Iljazović, Z. i Jelić, M.: *Computable approximations of a chainable continuum with a computable endpoint*. Archive for Mathematical Logic. 10.1007/s00153-023-00891-5.

2. Iljazović, Z. i Jelić, M.: *Computability of sets with attached arcs*. Mathematical Communications.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, Matea Jelić, student/ica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi [redacted], OIB ______________, JMBAG ______________, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj završni/diplomski/doktorski rad pod naslovom: Izračunljivost poopćenih grafova, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, 17. studenog 2023.

Potpis