

# Obične diferencijalne jednačbe i primjene

---

Janjatović, Irena

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:356238>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Irena Janjatović

**OBIČNE DIFERENCIJALNE**  
**JEDNADŽBE I PRIMJENE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Marko Radulović

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem roditeljima koji su istrpili ovaj dug put  
te mom bratu na motivaciji da položim sve ispite.  
Per aspera ad astra!*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Obične diferencijalne jednačbe i sustavi</b>	<b>2</b>
1.1 Obične diferencijalne jednačbe . . . . .	2
1.2 Sustav diferencijalnih jednačbi . . . . .	6
<b>2 Primjena običnih diferencijalnih jednačbi</b>	<b>12</b>
2.1 Rast ovisan o gustoći populacije . . . . .	12
2.2 Analiza slučaja: Kontrola pasa lotalica . . . . .	17
2.3 Analiza slučaja: Novac pokreće svijet . . . . .	19
2.4 Asimilacija lijeka u krvi . . . . .	23
<b>3 Primjena sustava diferencijalnih jednačbi</b>	<b>31</b>
3.1 Model izbijanja gripe . . . . .	31
3.2 Analiza slučaja: Kolera . . . . .	41
3.3 Analiza slučaja: Kontrola pasa lotalica . . . . .	45
<b>Bibliografija</b>	<b>49</b>

# Uvod

U stvarnom svijetu nas često zanima promjena određenih varijabli, poput veličine populacije, broja zaraženih jedinki nekom bolešću te količine kapitala ili štednje. Pomoću običnih diferencijalnih jednadžbi, kao i sustava diferencijalnih jednadžbi, možemo modelirati promjene tih varijabli. U ovom radu promatramo razne slučajeve u kojima možemo matematičkim modelima opisati promjene te predvidjeti ponašanje varijabli.

U ovom radu proučavamo model za kontrolu pasa lotalica, model o razini lijeka u krvotoku, model izbivanja gripe te model koji opisuje proizvodnju. Prilikom modeliranja bilo kojeg od problema, prvo trebamo definirati varijable i parametre te objasniti njihovo ponašanje i ovisnost o drugim varijablama iz modela. Nakon što je model definiran, njegovo rješenje odredimo analitički ili numerički. Zatim analiziramo rješenja, promatrajući njihovu stabilnost.

Psi lotalice predstavljaju veliki problem u mnogim gradovima pa matematičkim modeliranjem možemo odrediti koja metoda (sterilizacija ili eutanazija) je učinkovitija i isplativija za uklanjanje pasa lotalica s ulica.

Kroz povijest, ali i danas, susretali smo se s mnogim epidemijama koje su izazvale velik broj smrtnih slučajeva. U ovom radu bavimo se modelom za suzbijanje kolere koji predviđa broj zaraženih i osjetljivih (oni koji nisu preboljeli bolest) pojedinaca. Također, promatramo utjecaj cijepljenja u svrhu smanjenja broja zaraženih.

Obrađen je još jedan model biološke prirode, vezan je za koncentraciju lijeka u krvotoku. Promatrane su tvari koje sadrži tableta protiv prehlade te njihovo zadržavanje u probavnom traktu, odnosu u krvotoku u ovisnosti o tome jesmo li uzeli jednu ili više tableta.

Diferencijalnim jednadžbama možemo opisati i financijske modele. Zanima nas kako proizvodnja ovisi o kapitalu i radnoj snazi.

Osim primjera navedenih u ovom radu, diferencijalne jednadžbe i sustavi mogu se primijeniti i na mnoge druge modele, te se također i promatrani modeli mogu proširiti kako bismo imali širu sliku i donijeli preciznije zaključke o određenom problemu.

Ovaj rad je pisan prema B. Barnes, G. R. Fulford, *Mathematical modelling with case studies, Using Maple and MATLAB, Third Edition, 2015.* [1]

# Poglavlje 1

## Obične diferencijalne jednađbe i sustavi

U ovom poglavlju, cilj je uvesti definicije i osnovne rezultate vezane uz diferencijalne jednađbe koje ćemo koristiti u modelima u idućim poglavljima. Prvo ćemo definirati što su obične diferencijalne jednađbe te njihove podtipove koji se javljaju u ovom radu. Pored toga, definirat ćemo njihovo rješenje te teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja.

### 1.1 Obične diferencijalne jednađbe

**Definicija 1.1.1.** *Obična diferencijalna jednađba  $n$ -tog reda je jednađba oblika  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ , gdje je  $y$  funkcija u varijabli  $x$ . Ako je moguće, običnu diferencijalnu jednađbu pišemo eksplicitno kao  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . [4]*

#### Diferencijalne jednađbe prvog reda

**Definicija 1.1.2.** *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren,  $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ . Kažemo da je  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  rješenje jednađbe  $y' = f(x, y)$  (eksplicitni oblik) ako je:*

- a)  $I$  interval u  $\mathbb{R}$
- b)  $y \in C^1(I; \mathbb{R})$
- c)  $\Gamma(y) = \{(x, y(x)) : x \in I\} \subseteq \Omega$
- d)  $y' = f(x, y(x)), x \in I$ .

[4]

**Definicija 1.1.3.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren,  $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ ,  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Kažemo da je  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  rješenje Cauchyjeve zadaće:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y(x)), \\y(x_0) &= y_0,\end{aligned}$$

ako je  $y$  rješenje obične diferencijalne jednadžbe i  $x_0 \in I$  te  $y(x_0) = y_0$ . [4]

**Teorem 1.1.4** (Peano, [4]). Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren,  $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ ,  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Tada inicijalna zadaća

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \\y(x_0) &= y_0,\end{aligned}$$

ima rješenje čija je domena otvoren skup koji sadrži  $x_0$ .

**Teorem 1.1.5** (Picardov teorem, [4]). Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren,  $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$  te  $f$  Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli, tj.

$$(\exists M > 0) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \forall x, y_1, y_2.$$

Tada inicijalna zadaća

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \\y(x_0) &= y_0,\end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje na otvorenom skupu koji sadrži  $x_0$ .

Dokaz Peanovog i Picardovog teorema, kao i definiciju Lipschitz neprekidnosti po drugoj varijabli možemo naći u [4].

**Definicija 1.1.6** (Picardove iteracije, [4]). Neka je dana inicijalna zadaća u diferencijalnom zapisu:

$$\begin{aligned}u' &= f(x, u), \\u(x_0) &= u_0.\end{aligned} \tag{1.1}$$



Definiramo niz funkcija  $u_1, u_2, \dots, u_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  na sljedeći način

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0, \\ u_2(x) &= u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_1(t)) dt, \\ u_3(x) &= u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_2(t)) dt, \\ &\vdots \\ u_k(x) &= u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{k-1}(t)) dt. \end{aligned}$$

Prema Picardovom teoremu slijedi da niz  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uniformno konvergira prema  $u$  na otvorenom intervalu  $I$  koji zadovoljava (1.1) te ima sljedeći integralni oblik:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt.$$

## Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

Rješenje ODJ nije uvijek moguće izraziti u eksplicitnom obliku, ali je možda moguće u implicitnom obliku, kao  $\varphi(t, x, C) = 0$ , gdje je  $C$  proizvoljna konstanta,  $t$  varijabla, a  $x \equiv x(t)$  tražena funkcija. U skladu s time imamo sljedeću definiciju:

**Definicija 1.1.7** (Prvi integral diferencijalne zadaće, [4]). *Neka su  $\Omega, \hat{\Omega}$  otvoreni podskupovi u  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$  i  $F \in C^1(\hat{\Omega}; \mathbb{R})$  takva da je gradijent različit od nul-vektora na cijelom  $\hat{\Omega}$ . Kažemo da je  $F$  prvi integral diferencijalne jednadžbe  $x' = f(t, x)$  ako na skupu  $\Omega_0 = \Omega \cap \hat{\Omega}$  vrijedi:*

$$\partial_t F(t, x) + \partial_x F(t, x) \cdot f(t, x) = 0.$$

Promatramo početnu zadaću koja dopušta separaciju varijabli funkcije  $f$ , odnosno  $f(t, x) = g(t)h(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) = g(t)h(x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

**Teorem 1.1.8** (Separabilne jednadžbe, [4]). *Neka je  $g \in C(\langle t_0 - \alpha_t, t_0 + \beta_t \rangle; \mathbb{R})$  i  $h \in C(\langle x_0 - \alpha_x, x_0 + \beta_x \rangle; \mathbb{R})$ , gdje je  $h$  strogo pozitivna (negativna) na  $\langle x_0 - \alpha_x, x_0 + \beta_x \rangle$ . Tada postoji  $\delta \in \langle 0, \min\{\alpha_t, \beta_t\} \rangle$  takav da Cauchyjeva zadaća (1.2) ima jedinstveno rješenje na intervalu  $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ .*

Dokaz navedenog teorema možemo naći u [4].

Lipschitzovost funkcije  $f$  po drugoj varijabli zamijenjena je pretpostavkom  $f = g \cdot h$  i  $h > 0$  ili  $h < 0$ . Drugim riječima, imamo samo dovoljne uvjete kada je rješenje početne zadaće jedinstveno.

Vrijedi:

$$y' = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad / \int,$$

iz čega slijedi da je

$$\int^y \frac{ds}{h(s)} = \int^x g(s) ds$$

prvi integral diferencijalne jednačbe.

### Homogene i nehomogene jednačbe

**Definicija 1.1.9.** Kažemo da je funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  homogena stupnja  $k$  ako je  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . [4]

**Definicija 1.1.10.** Običnu diferencijalnu jednačbu  $y' = f(x, y)$  nazivamo homogenom ako je  $f$  homogena funkcija (nultog stupnja). Diferencijalnu formu  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  nazivamo homogenom ako su  $M$  i  $N$  homogene funkcije istog stupnja. [4]

### Linearne diferencijalne jednačbe prvog reda

Opći zapis:

$$a_0(x)y'(x) + a_1(x)y(x) = b(x),$$

gdje je  $a_0, a_1, b \in C(I; \mathbb{R})$ , pri čemu je  $I$  interval te  $a_0 \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ . Za  $b = 0$  imamo homogenu diferencijalnu jednačbu, a za  $b \neq 0$  imamo nehomogenu diferencijalnu jednačbu. Iz opće teorije znamo da Cauchyjeva zadaća ima jedinstveno rješenje na cijelom intervalu. Češći zapis LDJ dan je sa:

$$y'(x) + \frac{a_1}{a_0}(x)y(x) = \frac{b(x)}{a_0},$$

što još zapisujemo kao  $y' + py = q$ .

**Teorem 1.1.11.** Neka je zadana linearna diferencijalna jednačba u obliku

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

gdje su  $p(x)$  i  $q(x)$  neprekidne funkcije, tj. koeficijenti jednačbe. Tada su sva njena rješenja  $y = y(x)$  oblika

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[ c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right]. \quad (1.3)$$

[2]

*Dokaz.* Dokaz ilustrira postupak za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi. Ako je  $y = y(x)$  rješenje linearne diferencijalne jednadžbe  $y' + p(x)y = q(x)$ , tada želimo pokazati da to rješenje mora imati oblik zadan u iskazu teorema. Prvo jednadžbu množimo sa multiplikatorom  $e^{\int p(x)dx}$ , zatim sređujemo lijevu stranu i na kraju integriramo obje strane jednadžbe:

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int p(x)dx} y &= q(x)e^{\int p(x)dx} \\ \frac{d}{dx} \left( e^{\int p(x)dx} y \right) &= q(x)e^{\int p(x)dx} \\ e^{\int p(x)dx} y &= \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \\ y &= e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right] \end{aligned}$$

□

## 1.2 Sustav diferencijalnih jednadžbi

U ovom poglavlju, cilj je uvesti definicije i osnovne rezultate vezane uz sustave diferencijalnih jednadžbi koje ćemo koristiti u modelima u idućim poglavljima. Prvo ćemo definirati što je sustav diferencijalnih jednadžbi. Pored toga, definirat ćemo njihovo rješenje te teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja.

### Opći sustav diferencijalnih jednadžbi

Najprije promotrimo općeniti sustav s  $m$  jednadžbi i  $m$  nepoznatih funkcija:

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(v_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(v_2)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(v_m)}) &= 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(v_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(v_2)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(v_m)}) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(v_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(v_2)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(v_m)}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Primijetimo da sustav opisuje vezu između nezavisne varijable  $x$ ,  $m$  funkcija  $y_1 = y_1(x), \dots, y_m = y_m(x)$  i njihovih derivacija. Na vektorsku funkciju  $F = (F_1, \dots, F_m)$

ćemo u konkretnim situacijama zadavati neki uvjet poput neprekidnosti, diferencijabilnosti, Lipschitz-neprekidnosti i sl. U pravilu pretpostavljamo da se radi o barem neprekidnoj funkciji.

Rješenje sustava (1.4) je vektorska funkcija  $y = (y_1, \dots, y_m)$  koja zadovoljava sve jednadžbe sustava, definirana je na nekom otvorenom intervalu  $I$  te je neprekidno diferencijabilna na tom intervalu.

Također, skup  $\{(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_1^{(v_1)}(x), \dots, y_m(x), y_m'(x), \dots, y_m^{(v_m)}(x)) : x \in I\}$  mora pripadati domeni funkcije  $F$ .

**Definicija 1.2.1.** *Sustav diferencijalnih jednadžbi je normalnog tipa, ako se može zapisati u obliku*

$$\begin{aligned} y_1^{(v_1)} &= f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(v_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(v_2-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(v_m-1)}), \\ y_2^{(v_2)} &= f_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(v_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(v_2-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(v_m-1)}), \\ &\vdots \\ y_m^{(v_m)} &= f_m(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(v_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(v_2-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(v_m-1)}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

[3]

Sada uvodimo supstitucije pomoću kojih ćemo se riješiti derivacija na desnoj strani sustava (1.5). Taj niz supstitucija je zadan na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= y_1, \Phi_{12} = y_1', \dots, \Phi_{1v_1} = y_1^{(v_1-1)}, \\ \Phi_{21} &= y_2, \Phi_{22} = y_2', \dots, \Phi_{2v_2} = y_2^{(v_2-1)}, \\ &\vdots \\ \Phi_{m1} &= y_m, \Phi_{m2} = y_m', \dots, \Phi_{mv_m} = y_m^{(v_m-1)}. \end{aligned}$$

Zamjenom funkcija  $y_1, \dots, y_m$  u sustavu (1.5) s funkcijama  $\Phi_{ij}$ , dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{aligned} \Phi'_{11} &= \Phi_{12}, \\ \Phi'_{12} &= \Phi_{13}, \\ &\vdots \\ \Phi'_{1(v_1-1)} &= \Phi_{1v_1}, \\ \Phi'_{1v_1} &= f_1(x, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots, \Phi_{1v_1}, \dots, \Phi_{m1}, \Phi_{m2}, \dots, \Phi_{mv_m}), \\ \Phi'_{21} &= \Phi_{22}, \\ \Phi'_{22} &= \Phi_{23}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\Phi'_{2(v_2-1)} &= \Phi_{2v_2}, \\
\Phi'_{2v_2} &= f_2(x, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots, \Phi_{1v_1}, \dots, \Phi_{m1}, \Phi_{m2}, \dots, \Phi_{mv_m}), \\
\Phi'_{m1} &= \Phi_{m2}, \\
\Phi'_{m2} &= \Phi_{m3}, \\
& \vdots \\
\Phi'_{m(v_m-1)} &= \Phi_{mv_m}, \\
\Phi'_{mv_m} &= f_m(x, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots, \Phi_{1v_1}, \dots, \Phi_{m1}, \Phi_{m2}, \dots, \Phi_{mv_m}). \tag{1.6}
\end{aligned}$$

Ako je dano rješenje  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  sustava (1.5), definirajući funkcije  $\Phi_{ij}$ , kao što je zadano supstitucijama, vidimo da je funkcija  $\Phi = (\Phi_{11}, \dots, \Phi_{1v_1}, \dots, \Phi_{m1}, \dots, \Phi_{mv_m})$  rješenje sustava (1.5). Obratno, ako je  $\Phi = (\Phi_{11}, \dots, \Phi_{1v_1}, \dots, \Phi_{m1}, \dots, \Phi_{mv_m})$  rješenje sustava (1.5), onda definiramo  $y = (\Phi_{11}, \Phi_{21}, \dots, \Phi_{m1})$  i očito je da je funkcija  $y$  rješenje sustava (1.5). Dakle, svakom rješenju sustava (1.5) odgovara jedno rješenje sustava (1.6) i obratno.

**Definicija 1.2.2.** *Sustav diferencijalnih jednadžbi je sustav oblika*

$$y' = f(x, y), \tag{1.7}$$

pri čemu je  $y = (y_1, \dots, y_n)$  vektorska funkcija realnih funkcija  $y_i : I_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dok je  $f$  vektorska funkcija čiji su elementi  $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Na otvorenom skupu  $\Omega$ , uz oznake iz (1.4), je

$$m = \sum_{i=1}^n v_i$$

Također, ako je zadano  $y(x_0) = y_0$ , promatramo pripadne inicijalne probleme. [3]

## Egzistencija, jedinstvenost i proširivost rješenja inicijalnog problema

**Teorem 1.2.3** (Picardov teorem, [3]). *Neka je  $(x_0, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  te neka su  $a, b > 0$ . Zadan je zatvoreni pravokutnik*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, \|y - y^{(0)}\|_\infty \leq b\}$$

*i funkcija  $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$  koja je neprekidna na  $R$  i Lipschitz-neprekidna na  $R$  po svim  $y$  varijablama. Tada postoji  $\delta > 0$  i jedinstvena neprekidno diferencijabilna funkcija  $y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  takva da vrijedi*

$$\begin{aligned}
y'(x) &= f(x, y(x)), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\
y(x_0) &= y^{(0)}.
\end{aligned}$$

Pritom se  $\delta$  može izabrati tako da vrijedi  $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ , gdje je  $M > 0$  takav da je  $\|f\|_{\infty, R} \leq M$ .

Ovaj rezultat još je poznat kao Picard-Lindelöf-ov teorem. Definiciju Lipschitz-neprekidnosti, kao i dokaz Picard-Lindelöf-ovog teorema možemo naći u [3].

Zanima nas što možemo zaključiti o egzistenciji rješenja inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}^{(0)} \end{aligned} \tag{1.8}$$

ako je funkcija  $\mathbf{f}$  samo neprekidna na svojoj domeni, odnosno ako nemamo pretpostavku Lipschitz-neprekidnosti za funkciju  $\mathbf{f}$ .

**Teorem 1.2.4** (Peanov teorem, [3]). *Neka je dan zatvoreni pravokutnik*

$$R = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, |\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(0)}| \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

za neke  $a, b_i > 0, i = 1, \dots, n$  i funkcija  $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$  koja je neprekidna na  $R$ . Tada postoji barem jedna neprekidno diferencijabilna funkcija  $\mathbf{y} : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , za neko  $\delta \leq a$ , takva da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}^{(0)}. \end{aligned}$$

Dokaz Peanovog teorema možemo naći u [3].

U dokazu Picardovog teorema, koristeći zatvoreni pravokutnik  $R$ , konstruirali smo rješenje  $\mathbf{y}$  inicijalnog problema (1.8) na nekom intervalu oko točke  $x_0$ , preciznije na  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Naravno, ne možemo tvrditi da je taj interval najširi mogući interval egzistencije rješenja.

Postoje neke situacije u kojima se može zaključiti da je interval egzistencije maksimalno proširiv, koliko nam dopušta domena funkcije  $f$ . Promotrit ćemo dvije takve situacije.

**Definicija 1.2.5.** *Neka je  $\Omega$  oblika  $I \times \tilde{\Omega}$ , gdje je  $I \subseteq \mathbb{R}$  povezan interval, a  $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ako postoji rješenje inicijalnog problema (1.8) koje je definirano na čitavom  $I$ , tada to rješenje zovemo globalnim rješenjem inicijalnog problema.*

**Teorem 1.2.6.** *Neka je  $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$  za neki  $a > 0$  ( $\Omega$  je cilindar). Nadalje, neka je  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  neprekidna na  $\Omega$  i Lipschitz-neprekidna po svim  $\mathbf{y}$  varijablama na svakom zatvorenom pravokutniku u  $\Omega$  te neka je  $\mathbf{f}$  ograničena na  $\Omega$ . Tada inicijalni problem (1.8) ima globalno rješenje.*

**Teorem 1.2.7.** *Neka je  $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  neprekidna na  $\Omega$  i Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama na čitavom  $\Omega$ . Tada inicijalni problem (1.8) ima globalno rješenje.*

Dokaze gornja dva teorema možemo naći u [3].

## Sustavi linearnih jednadžbi i autonomni sustavi

**Definicija 1.2.8.** *Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Sustav oblika*

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{aligned}$$

*nazivamo sustavom linearnih diferencijalnih jednadžbi, pri čemu su  $a_{ij}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  zadane neprekidne funkcije. Ako još imamo početni uvjet  $y(x_0) = y_0$ , dobivamo Cauchyjevu zadaću za sustav. [3]*

Funkcije  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , su definirane s

$$f_i(x, \mathbf{y}) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + b_i(x).$$

Uzmimo proizvoljne točke  $(x, y_1, \dots, y_{j-1}, \bar{y}_j, y_{j+1}, \dots, y_n)$ ,  $(x, y_1, \dots, y_{j-1}, \tilde{y}_j, y_{j+1}, \dots, y_n) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ , gdje je  $[a, b] \subset I$  proizvoljan interval. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} |f_i(x, y_1, \dots, y_{j-1}, \bar{y}_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - f_i(x, y_1, \dots, y_{j-1}, \tilde{y}_j, y_{j+1}, \dots, y_n)| \\ = |a_{ij}(x)(\bar{y}_j - \tilde{y}_j)| \leq M|\bar{y}_j - \tilde{y}_j|, \end{aligned}$$

gdje je  $M = \max_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty, [a,b]}$ . Dakle, funkcija  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama na čitavoj svojoj domeni. Stoga primjenom Picardovog teorema dobivamo jedinstveno lokalno rješenje promatranog inicijalnog problema na nekom intervalu oko  $x_0$  koje se zatim može proširiti do čitavog intervala  $[a, b]$  (vidi teorem 1.2.7). Zbog proizvoljnosti intervala  $[a, b]$  konačno možemo zaključiti da postoji jedinstveno rješenje zadanog inicijalnog problema na intervalu  $I$ .

**Definicija 1.2.9.** *Podvrsta klase sustava (1.7) oblika*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

*zovemo autonomni sustavi. [3]*

Primijetimo da kod ovih sustava funkcija, desne strane sustava ne ovise o varijabli  $x$ . Pretpostavimo da je funkcija  $\mathbf{f}$  definirana na čitavom skupu  $\mathbb{R}^n$  te da je  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  neprekidno diferencijabilna. Uz tu pretpostavku možemo primijeniti Picardov teorem na inicijalni problem

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}^{(0)},\end{aligned}$$

za proizvoljne  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ . Inicijalni problem ima jedinstveno rješenje na nekom intervalu oko  $x_0$ . Naravno, općenito nije proširivo na čitav skup  $\mathbb{R}$ , odnosno ne dobivamo uvijek globalno rješenje.

**Definicija 1.2.10.** *Kritične točke sustava (1.2.9) su točke  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  za koje vrijedi  $\mathbf{f}(y_0) = 0$ . [3]*



## Poglavlje 2

# Primjena običnih diferencijalnih jednadžbi

### 2.1 Rast ovisan o gustoći populacije

U ovom poglavlju razvijamo model koji opisuje rast/pad populacije koji uključuje učinke ograničenih resursa. Ako se populacija promatra tijekom dužeg razdoblja, često se čini da se rast stabilizira ili da doseže određenu granicu.

Kako populacija raste, pojedinci se natječu za dostupne resurse, što znači da određeno okruženje može podržati samo ograničen broj jedinki. Taj broj se naziva nosivi kapacitet populacije i u biološkoj literaturi se označava simbolom  $K$ . Definiramo ga kao veličinu populacije (ili gustoću) za koju je stopa nataliteta po stanovniku jednaka stopi smrtnosti po stanovniku, isključujući vanjske čimbenike. Također, uključujemo dodatnu stopu smrtnosti zbog ograničenih resursa čime omogućujemo stabilizaciju stanovništva.

#### Definiranje diferencijalne jednadžbe modela

Populaciju opisujemo na sljedeći način:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa promjene} \\ \text{veliĉine populacije} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{nataliteta} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{smrtnosti} \end{array} \right\}. \quad (2.1)$$

Pretpostavimo da je stopa nataliteta po stanovniku konstantna i oznaĉimo ju sa  $\beta$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{nataliteta} \end{array} \right\} = \beta X(t).$$

Umjesto konstante stope smrtnosti po stanovniku, uzimamo da ona moŹe rasti s obzirom na rast populacije. Pretpostavimo da stopa smrtnosti po stanovniku linearno ovisi o

veličini populacije:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{smrtnosti} \\ \text{po stanovniku} \end{array} \right\} = \alpha + \gamma X(t),$$

gdje je  $\alpha$  pozitivna stopa smrtnosti po stanovniku zbog prirodnog odljeva, a  $\gamma$  je pozitivna stopa ovisnosti broja umrlih o veličini stanovništva. Uočimo da kada  $X \rightarrow 0$ , stopa smrtnosti po stanovniku teži prema  $\alpha$ , dok s povećanjem veličine populacije ta stopa raste. Ukupna stopa smrtnosti se dobiva množenjem stope smrtnosti po stanovniku s veličinom stanovništva  $X$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{smrtnosti} \end{array} \right\} = \alpha X(t) + \gamma X^2(t).$$

Sada jednakost (2.1) možemo zapisati diferencijalnom jednađžbom

$$\frac{dX}{dt} = \beta X - \alpha X - \gamma X^2.$$

Označimo  $r = \beta - \alpha$ , što predstavlja stopu reprodukcije. Dobivamo jednađžbu modela rasta u ovisnosti o gustoći populacije

$$\frac{dX}{dt} = rX - \gamma X^2. \quad (2.2)$$

Uvrštavanjem  $K = \frac{r}{\gamma}$ , diferencijalna jednađžba (2.2) postaje

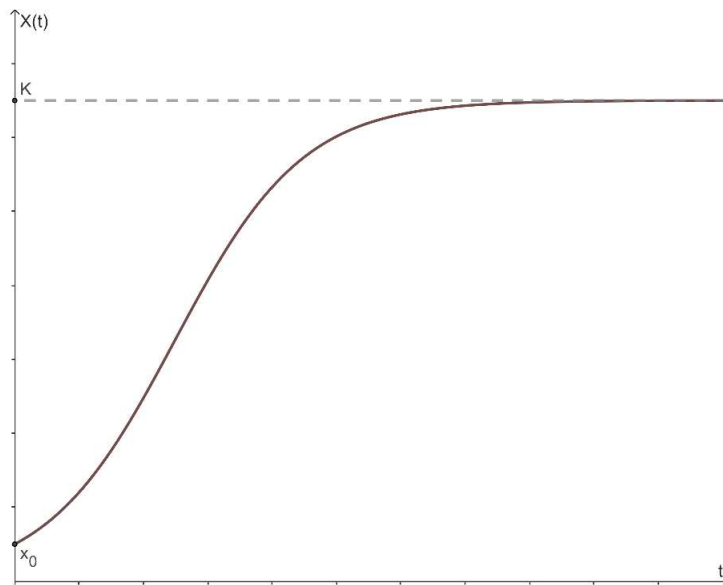
$$\frac{dX}{dt} = rX - \frac{r}{K}X^2,$$

što možemo zapisati sa

$$\frac{dX}{dt} = rX \left( 1 - \frac{X}{K} \right). \quad (2.3)$$

Uzimamo  $r > 0$  i  $K > 0$ , kako bismo osigurali pozitivne vrijednosti veličine populacije.

Bez rješavanja diferencijalne jednađžbe, možemo odrediti ponašanje rješenja. Pretpostavimo da populacija ima početnu vrijednost  $x_0$ . Derivacija  $\frac{dX}{dt}$  je pozitivna za  $X < K$ , pa populacija raste. Stopa rasta se povećava u početku, a zatim usporava kako se populacija približava nosivom kapacitetu  $K$ . Slika 2.1 prikazuje graf rješenja jednađžbe, uz pretpostavku da je  $x_0 < K$ .



Slika 2.1: Graf općeg rješenja diferencijalne jednadžbe (2.3)

### Interpretacija parametara

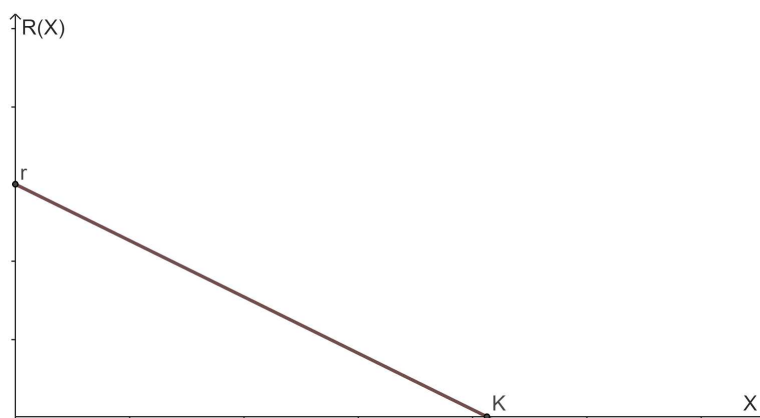
Jednadžbu (2.3) možemo zapisati na sljedeći način

$$\frac{dX}{dt} = R(X)X$$

pri čemu  $R(X)$  predstavlja stopu rasta po stanovniku u ovisnosti o broju stanovnika  $X$ . Iz jednadžbe (2.3) vidimo da je  $R(X)$  dana sa

$$R(X) = r \left( 1 - \frac{X}{K} \right).$$

Grafički prikaz funkcije  $R(X)$  vidimo na slici 2.2. Uočimo da je  $R(X)$  linearna funkcija od  $X$ , koja teži prema 0 kako se veličina populacije približava nosivom kapacitetu  $K$ , dok se  $R(X)$  približava  $r$  kako veličina populacije teži prema 0. Dakle,  $R(X)$  je pravac koji prolazi točkama  $(0, r)$  i  $(K, 0)$ . Ako je  $R < 0$ , tada je  $X > K$  i veličina populacije  $X$  opada prema  $K$ .

Slika 2.2: Graf funkcije  $R(X)$ 

### Ravnotežna rješenja i stabilnost

Ako promatramo izravnavanje populacije tijekom vremena, to povlači da se stopa promjene broja stanovnika približava 0, to jest,  $X' \rightarrow 0$ . Svaka vrijednost  $X$  koja zadovoljava  $X' = 0$  naziva se ravnotežna točka ili ravnotežno rješenje. Za ravnotežna rješenja vrijedi da stopa nataliteta uravnotežuje stopu smrtnosti. Ravnotežna rješenja zadovoljavaju

$$\frac{dX}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) = 0.$$

Gornja jednadžba ima dva rješenja:  $X_e = 0$  i  $X_e = K$ . Zanima nas koje od tih rješenja je stabilno. Neka je  $f(X) = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right)$ . Uvjet za lokalnu stabilnost ravnotežnog rješenja  $X_e$  je  $f'(X_e) < 0$ . Tada je

$$f'(X) = r - \frac{2rX}{K},$$

pa vrijedi  $f'(0) = r > 0$  i  $f'(K) = -r < 0$ , za svaki pozitivan  $r$ . Dakle,  $X_e = K$  je lokalno stabilno rješenje, dok je  $X_e = 0$  nestabilno.

Promatrajući jednadžbu (2.3), vidimo da ako je  $X < K$ , tada je stopa promjene  $X$  uvijek pozitivna. Iz toga slijedi da kako populacija raste, s vremenom se približava  $X = K$ . Slično, ako je  $X > K$ , tada je  $\frac{dX}{dt} < 0$  što povlači da se populacija smanjuje prema  $X = K$ . Kada se populacija uvijek približava ravnotežnoj točki, kažemo da je ravnoteža globalno stabilna. Obrnuto, ako se odmiče od ravnoteže, kažemo da je nestabilna. Zaključujemo da je  $X_e = K$  globalno stabilna ravnoteža. S druge strane, za  $0 < X < K$  vrijedi  $\frac{dX}{dt} > 0$  i stoga je ravnotežna točka  $X_e = 0$  globalno nestabilna.

Zaključujemo da model predviđa da se sve populacije približavaju ravnotežnoj vrijednosti  $K$ , koju smo već ranije definirali kao nosivi kapacitet populacije.

### Rješenje diferencijalne jednačbe

Diferencijalna jednačba (2.3) je nelinearna, ali dopušta separaciju,

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) = \frac{rX(K - X)}{K},$$

što je u obliku  $X' = F(X)G(t)$ , gdje je  $G(t) = r$ . Separacijom varijabli dobivamo

$$\frac{K}{X(K - X)} dX = r dt,$$

uz pretpostavku da je  $X \neq 0$  i  $X \neq K$ . Integriranjem obje strane dobivamo

$$\int \frac{K}{X(K - X)} dX = \int r dt.$$

Za integriranje lijeve strane gornje jednačbe koristimo parcijalne razlomke

$$\frac{K}{X(K - X)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{K - X} = \frac{a(K - X) + bX}{X(K - X)} = \frac{aK + (b - a)X}{X(K - X)}.$$

Da bismo odredili konstante  $a$  i  $b$  moramo riješiti sljedeći sustav

$$\begin{cases} aK = K \\ (b - a)X = 0. \end{cases}$$

Iz prve jednačbe vidimo da je  $a = 1$ , dok nam druga jednačba daje  $b = a = 1$ . Sada imamo

$$\int \frac{K}{X(K - X)} dx = \int \frac{1}{X} dx + \int \frac{1}{K - X} dx = \int r dt,$$

pa integriranjem dobijemo

$$\ln|X| - \ln|K - X| = rt + C_1, \quad C_1 \text{ je konstanta,}$$

$$\left| \frac{X}{K - X} \right| = Ce^{rt},$$

gdje je  $C = e^{C_1}$ . Pretpostavimo da je  $0 < X < K$ , tada je

$$X = C(K - X)e^{rt}. \quad (2.4)$$

Koristeći početni uvjet  $X(0) = x_0$ , zaključujemo da je  $C = \frac{x_0}{K-x_0}$  i rješavanjem jednadžbe (2.4) za  $X$  dobivamo

$$X = \frac{K}{1 + me^{-rt}}, \quad \text{gdje je} \quad m = \frac{K}{x_0} - 1. \quad (2.5)$$

S druge strane, za  $0 < K < X$  imamo

$$X = C(X - K)e^{rt}. \quad (2.6)$$

Uz početni uvjet  $X(0) = x_0$ , imamo da je  $C = \frac{x_0}{x_0 - K}$  i rješenje jednadžbe (2.6) za  $X$  je isto kao u (2.5).

## 2.2 Analiza slučaja: Kontrola pasa lutilica

Psi lutilice su napušteni psi koji sa svojim potomcima žive u gradskim sredinama. Razmatramo kako bi dosada razvijen model za pojedinačne populacije mogao doprinijeti osmišljanju praktičnog programa za kontrolu pasa lutilica. Modeliramo populaciju pasa lutilica, koji su poznati da uzrokuju zdravstvene probleme u gradovima i nanose štetu u ruralnim područjima. U ovom poglavlju promatramo kako ugraditi jednu strategiju kontrole - eutanaziju (koja uključuje ubijanje pasa lutilica) u model rasta populacije ovisan o gustoći. Kasnije (u potpoglavlju 3.3) ćemo proširiti ove rezultate na drugu strategiju kontrole - sterilizaciju.

Psi lutilice mogu izazvati niz problema. U mnogim zemljama diljem svijeta postali su velika opasnost za javno zdravlje. Napušteni su iz brojnih razloga, uključujući financijske i socijalne. Nakon napuštanja, psi se obično grupiraju u čopore i razmnožavaju. Skloništa pasa se često ne mogu nositi s brojnošću pasa koji lutaju ulicama. Drugi problem predstavljaju psi lutilice u ruralnim područjima, gdje čopori napadaju seoske životinje i značajno utječu na produktivnost.

Eutanazija je najčešće korištena strategija usmjerena na pse lutilice. Utječe na stopu rasta populacije, ali nije moguće potpuno iskorjenjivanje obzirom na kontinuirano napuštanje životinja. Ovdje primjenjujemo matematički model kako bismo utvrdili može li eutanazija biti učinkovita u kontroli ovih životinja.

Model rasta u ovisnosti o gustoći populacije dopunjujemo sa stopom smrtnosti populacije zbog eutanazije

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa promjene} \\ \text{veliĉine populacije} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{nataliteta} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{smrtnosti} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{smrtnosti} \\ \text{zbog eutanazije} \end{array} \right\}. \quad (2.7)$$

Uz pretpostavku da je stopa smrtnosti populacije zbog eutanazije konstanta i iznosi  $h$ , jednakost (2.7) možemo zapisati diferencijalnom jednačbom

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) - h, \quad (2.8)$$

pri čemu smo koristili već izvedenu jednačbu (2.3).

Neka je  $N(t)$  gustoća populacije, odnosno broj životinja po  $\text{km}^2$ . Pretpostavimo da je u svakom vremenskom trenutku konstantan udio  $\epsilon$  pasa lualica eutanaziran po  $\text{km}^2$ , odnosno po stopi  $h = \epsilon N(t)$  po  $\text{km}^2$ . Sada jednačba (2.8) postaje

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \epsilon N, \quad (2.9)$$

gdje je  $N = N(t)$  funkcija u ovisnosti u vremenu  $t$ ,  $r$  je stopa reprodukcije te  $K$  nosivi kapacitet populacije. Parametar  $r$  može se izraziti kao razlika između stope nataliteta  $a$  i stope smrtnosti  $b$ , tako da je  $r = a - b$ .

Zapišimo jednačbu (2.9) na sljedeći način

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{Nr}{K}\left[N - K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)\right]. \quad (2.10)$$

## Ravnatežna rješenja i stabilnost

Rješavanjem jednačbe  $\frac{dN}{dt} = 0$  dobivamo ravnatežne točke  $N_e = 0$  i  $N_e = K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)$ . Neka je  $f(N) = -\frac{Nr}{K}\left[N - K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)\right]$ . Tada je

$$f'(N) = r - \epsilon - \frac{2rN}{K},$$

pa vrijedi  $f'(0) = r - \epsilon$  i  $f'\left(K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)\right) = \epsilon - r$ .

Promatrajući jednačbu (2.10), vidimo da ako je  $N < K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)$ , tada je  $\frac{dN}{dt} > 0$ . Iz toga slijedi da populacija raste i da će se vremenom približavati  $N = K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)$ . Slično, ako je  $N > K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)$ , tada je  $\frac{dN}{dt} < 0$  što povlači da se populacija smanjuje prema  $N = K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)$ . Zaključujemo da je  $N = K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)$  globalno stabilna ravnateža. S druge strane, za  $0 < N < K\left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)$  vrijedi  $\frac{dN}{dt} > 0$  i stoga je ravnatežna točka  $N = 0$  globalno nestabilna.

## 2.3 Analiza slučaja: Novac pokreće svijet

Dinamika diferencijalnih jednadžbi i ravnotežna rješenja se mogu primijeniti i u ekonomiji. U analizi slučaja u nastavku predstavljamo jednostavan model gospodarskog rasta i razmatramo neke od osnovnih koncepata na kojima se temelje takvi modeli. Promatramo model proizvodnje temeljen na investicijskom kapitalu i raspoloživoj radnoj snazi.

Trenutno se gospodarski rast u zapadnim kulturama vidi kao proizvodnja većeg ekonomskog viška, koji se može iskoristiti za napredak društva. Još 1377. godine arapski ekonomski mislilac Ibn Khaldun prepoznao je koncept ekonomskog rasta. Primijetio je da se, s porastom stanovništva, raspoloživa radna snaga povećava i proizvodnja napreduje te da se tako stvoreni višak bogatstva može koristiti za luksuz. Pri tome razlikujemo rad za potrebe života od viška rada za potrebe luksuza. Međutim, bruto domaći proizvod (BDP) po stanovniku se nije znatno mijenjao tijekom većeg dijela ljudske povijesti, sve do industrijske revolucije i masovnog obrazovanja.

Neoklasični model ekonomskog rasta, tip modela koji ovdje razmatramo, bavi se ekonomskim rastom koji je nastao povećanjem zaliha kapitalnih dobara (proizvodnje) koji ovise o raspoloživoj radnoj snazi i investicijskom kapitalu. Prvi pokušaj dugoročnog predviđanja gospodarskog rasta predstavili su Solow i Swan 1950-ih. Jedno od posljednjih predviđanja bilo je da će gospodarstva postići ravnotežu, u smislu da daljnja kapitalna ulaganja i/ili rad neće povećati ekonomski rast. S druge strane, tehnologija, obrazovanje i druge promjene u društvenoj strukturi imaju potencijal promijeniti tu ravnotežu. Podaci sugeriraju da je svijet polako nastavio poboljšavati svoju stopu rasta, ne uspostavljajući fiksnu ravnotežu.

Solowljev model je model proizvodnje temeljen na ulaganju ili kapitalu i raspoloživom radu. Zajamčena stopa rasta je termin koji se koristi za profitabilnu stopu ulaganja, odnosno rast kapitala, a prirodna stopa rasta je ona koja se koristi za stopu rasta raspoložive radne snage. Daljnji pojmovi koji se primjenjuju u ekonomiji su konstantni prinosi na razmjer, što implicira da funkcija proizvodnje dviju varijabli  $K$  i  $L$  ima svojstvo homogenosti  $F(aK, aL) = aF(K, L)$ .

### Model

Definiramo proizvodnju  $Y(t)$  kao funkciju dva faktora proizvodnje: zalihe kapitala  $K(t)$  i raspoložive radne snage  $L(t)$ , pri čemu sve tri funkcije ovise o vremenu  $t$ . Pretpostavimo da je stopa uštede proizvodnje dio  $s$  ukupne proizvodnje  $Y$

$$\frac{dK}{dt} = sY,$$

u bilo kojem trenutku, s proizvodnom funkcijom  $Y = F(K, L)$ , gdje je  $F$  funkcija s konstantnim prinosom na razmjer. Pretpostavljamo Harrodovu prirodnu stopu rasta (konstanta



$n$ ), u nedostatku tehnološkog napretka, tako da je

$$L(t) = L_0 e^{nt},$$

što predstavlja krivulju koja opisuje rad. Tada je osnovna jednadžba za akumulaciju kapitala tijekom vremena

$$\frac{dK}{dt} = sF(K, L_0 e^{nt}). \quad (2.11)$$

Imamo puno mogućnosti za izbor funkcije  $F$ , stoga i puno mogućih rješenja jednadžbe (2.11). Međutim, zanima nas kvalitativna priroda rješenja i moguće ekonomske posljedice. Kako bismo istražili te posljedice, pojednostavljujemo analizu kombiniranjem dviju varijabli  $K$  i  $L$ . Neka je  $r = \frac{K}{L}$  omjer kapitala i rada. Tada je  $K = rL_0 e^{nt}$ , pa deriviranjem te jednadžbe po  $t$  imamo

$$\frac{dK}{dt} = L_0 e^{nt} \frac{dr}{dt} + nrL_0 e^{nt}. \quad (2.12)$$

Kombiniranjem jednadžbi (2.11) i (2.12) te korištenjem svojstva homogenosti funkcije  $F$  imamo

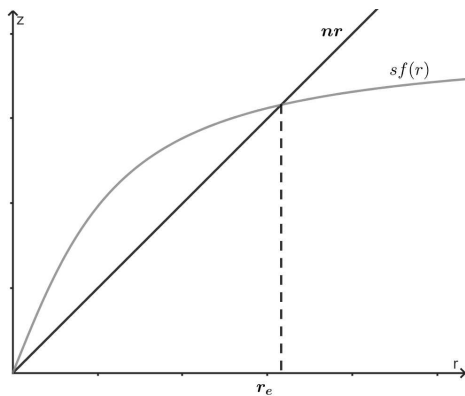
$$\begin{aligned} sF(K, L_0 e^{nt}) &= L_0 e^{nt} \frac{dr}{dt} + nrL_0 e^{nt} \\ \Rightarrow sL_0 e^{nt} F\left(\frac{K}{L_0 e^{nt}}, 1\right) &= L_0 e^{nt} \left(\frac{dr}{dt} + nr\right) \\ \Rightarrow sF\left(\frac{K}{L_0 e^{nt}}, 1\right) &= \frac{dr}{dt} + nr \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= sF\left(\frac{K}{L_0 e^{nt}}, 1\right) - nr. \end{aligned}$$

Definiramo  $f(r) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$  te imamo

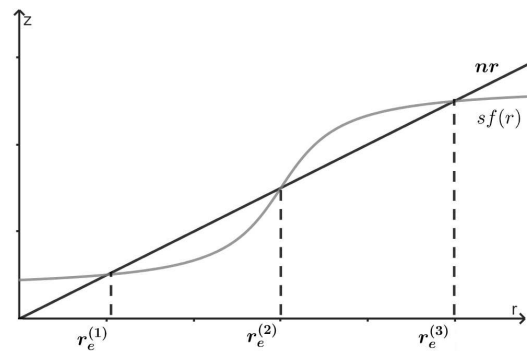
$$\frac{dr}{dt} = sf(r) - nr. \quad (2.13)$$

Funkcija  $f$  predstavlja ukupnu proizvodnju s obzirom na promjenu kapitala po jedinici rada. Ekvivalentno tome,  $f$  je proizvodnja po radniku kao funkcija kapitala po radniku. Prema tome, stopa promjene omjera kapitala i rada  $r$  je razlika između prirasta kapitala i prirasta rada. Ova jednadžba ima ravnotežnu točku  $r_e$ , gdje kapital raste po istoj stopi kao radna snaga, to jest, gdje je  $\frac{dr}{dt} = 0$ .

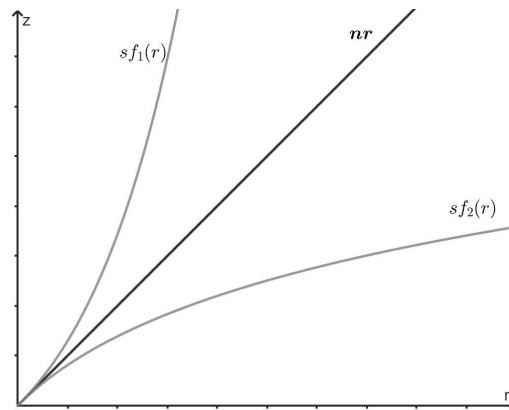
Donji grafovi ilustriraju tri različita slučaja koji se javljaju za različite proizvodne funkcije  $f$ .



Slika 2.3: Grafički prikaz rješenja sa jednom stabilnom ravnotežom



Slika 2.4: Grafički prikaz rješenja sa dvije stabilne ravnoteže



Slika 2.5: Grafički prikaz rješenja bez stabilne ravnoteže

Na slici 2.3,  $r_e$  je stabilna ravnoteža, budući da za  $sf(r) > nr$  vrijedi  $\frac{dr}{dt} > 0$ , to jest  $r$  raste, dok za  $sf(r) < nr$  vrijedi  $\frac{dr}{dt} < 0$ , odnosno  $r$  se smanjuje. Stoga, bez obzira gdje se počne s radom i kapitalom, ovaj model predviđa da se  $r$  približava  $r_e$ .

Iz sličnih razloga, na slici 2.4,  $r_e^{(1)}$  i  $r_e^{(3)}$  su stabilne ravnoteže, dok je  $r_e^{(2)}$  nestabilna. Ovisno o početnim uvjetima na  $r(t)$  sustav teži prema jednoj od navedenih ravnoteža. Uočimo da  $sf(r)$  ne prolazi kroz ishodište, što znači da pretpostavljamo da je proizvodnja moguća bez kapitala.

Slika 2.5 prikazuje situaciju u kojoj ne postoji ravnotežna točka. Za krivulju  $sf_1(r)$  vrijedi  $sf_1(r) > nr$ , što znači da  $r(t)$  nastavlja rasti s punom zaposlenošću te kapital i dohodak rastu brže od ponude rada. Alternativno, za krivulju  $sf_2(r)$  vrijedi  $sf_2(r) < nr$ ,

pa se  $r(t)$  nastavlja smanjivati, približavajući se nuli, što znači da stalna puna zaposlenost dovodi do pada proizvodnje.

Kao primjer ove strukture uvodimo Cobb–Douglasovu funkciju proizvodnje

$$Y = F(L, K) = K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad \alpha < 1. \quad (2.14)$$

Koristeći  $r = \frac{K}{L}$ , imamo  $Y = sf(r) = sr^\alpha$  i jednačba (2.13) postaje

$$\frac{dr}{dt} = sr^\alpha - nr. \quad (2.15)$$

Primijetimo da je  $f$  monotono rastuća funkcija od  $r$ . Za male  $r$  i  $\alpha < 1$ , početni nagib od  $sr^\alpha$  je blizu okomice, i tada je  $sr^\alpha > nr$ . Alternativno, kako  $r$  raste, i budući da je  $\alpha < 1$ , nagib od  $sr^\alpha$  opada sa  $sr^\alpha$ , za velike vrijednosti  $r$ , takve da je  $sr^\alpha < nr$ . Ovo odgovara slici 2.5 bez obzira na vrijednosti parametara  $n$  i  $\alpha$ , i stoga implicira postojanje jedne stabilne ravnotežne točke  $r_e = \left(\frac{n}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ . Ova vrijednost se povećava s povećanjem štednje  $s$ , što je očekivano.

Nadalje, nije jednostavno analitički riješiti jednačbu (2.15). Međutim, možemo izravno uspostaviti odnos između  $K$  i  $L$ . Uvrštavanjem Cobb–Douglasove proizvodne funkcije u (2.11), imamo

$$\frac{dK}{dt} = sK^\alpha (L_0 e^{nt})^{1-\alpha}. \quad (2.16)$$

Separacijom varijabli, gornju jednačbu možemo zapisati na sljedeći način:

$$K^{-\alpha} dK = sL_0^{1-\alpha} e^{nt(1-\alpha)} dt.$$

Integriranjem obje strane dobivamo

$$\frac{1}{1-\alpha} K^{1-\alpha} = \frac{1}{n(1-\alpha)} e^{nt(1-\alpha)} + C,$$

gdje je  $C$  konstanta.

Množenjem sa  $1-\alpha$  te potenciranjem sa  $\frac{1}{1-\alpha}$  dobivamo

$$K = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_0 e^{nt} + C_1,$$

gdje je  $C_1 = (C(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

Neka su  $K_0$  i  $L_0$  početne vrijednosti kapitala i rada. Konstantu  $C_1$  možemo odrediti uvrštavanjem  $t = 0$  u gornju jednačbu, iz čega slijedi

$$C_1 = K_0 - \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_0 e^{nt}.$$

Krajnje rješenje jednadžbe (2.16) dano je sa

$$K(t) = \left[ K_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n} L_0^{1-\alpha} + \frac{s}{n} L_0^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)nt} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Dakle, prema ovom modelu, kapital raste po stopi  $\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_0 e^{nt}$ , odnosno po istoj stopi kao i rad. Iz jednadžbe Cobb-Douglasove proizvodne funkcije, (2.14), dobivamo da je dohodak po jedinici rada jednak

$$Y = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} L \Rightarrow \frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = r^{\alpha}.$$

Jasno je da mnogi čimbenici koji nisu uzeti u obzir u ovom modelu imaju izravan utjecaj na proizvodnju. Na primjer, tehnološki napredak može smanjiti količinu rada i/ili kapitala potreban za isti učinak. Osim utjecaja tehnologije, na predviđanje gospodarskog rasta može utjecati i produktivnost radnika (npr. obrazovanje). Štoviše, nedavna istraživanja pokazuju korelaciju ekonomskog napretka s klimom.

## 2.4 Asimilacija lijeka u krvi

Istražujemo dva jednostavna modela asimilacije tableta protiv prehlade u krvotok. U prvom modelu promatramo jednu tabletu protiv prehlade, a u drugom kontinuiran unos tableta.

Konzumiramo tablete, a da nužno ne znamo kako se ti lijekovi apsorbiraju u krvotok ili koliko dugo djeluju na nas. Upozorenja na pakiranju navode neke od učinaka i imaju za cilj sigurnost korisnika. U sljedećem primjeru vidimo da se različiti lijekovi apsorbiraju u krv i izlučuju iz nje različitim brzinama.

Lijek se otapa u gastrointestinalnom traktu (GI trakt) i svaki sastojak se prenosi putem krvotoka do mjesta na kojima djeluju, a iz krvi ih uklanjaju bubrezi i jetra. Do asimilacije i uklanjanja može doći po različitim stopama za različite sastojke iste tablete.

### Opći model

Promatramo ulazak lijeka u GI trakt, njegov prijenos u krvotok te prelazak u tkiva. Ovaj zakon ravnoteže daje nam dvije jednadžbe:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa promjene} \\ \text{količine lijeka} \\ \text{u GI traktu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{unos lijeka} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{uklanjanja lijeka} \\ \text{iz GI trakta} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa promjene} \\ \text{količine lijeka} \\ \text{u krvi} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{unos lijeka} \\ \text{u krv} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa} \\ \text{uklanjanja lijeka} \\ \text{iz krvi} \end{array} \right\}$$

Neka je  $x(t)$  količina lijeka u probavnom sustavu u trenutku  $t$ , a  $y(t)$  količina u krvotoku u trenutku  $t$ .

Promatramo običnu prehladu, za koju nema neki određeni lijek. Međutim, postoje tablete koje se mogu uzeti za ublažavanje nekih simptoma, kao što su suženje očiju i curenje iz nosa, djelovanjem dekongestiva i antihistaminika. Tablete protiv prehlade koje razmatramo u sljedeća dva modela sastoje se od ova dva lijeka.

### Model 1: Jedna brzo otapajuća tableta protiv prehlade

Od trenutka kada progutamo tabletu, smatramo da više ništa ne ulazi u probavni trakt tijekom duljeg vremena. Tableta se brzo otapa i lijek počinje ulaziti u krvotok.

Pod pretpostavkom da je izlazna brzina proporcionalna koncentraciji lijeka u probavnom sustavu, koja je stoga proporcionalna količini lijeka u krvotoku, imamo

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x, \quad x(0) = x_0, \quad (2.17)$$

gdje je  $x_0$  količina lijeka u piluli, tj. naše početno stanje, a  $k_1$  je pozitivni koeficijent proporcionalnosti. Pretpostavljamo da se tableta otapa u trenutku kada uđe u GI trakt u  $t = 0$ , tako da je  $x(0) = x_0$ .

Početna količina lijeka u krvotoku je nula, pa je  $y(0) = 0$ . Razina lijeka u krvotoku raste kako lijek dolazi iz GI-trakta i opada kako ga bubrezi i jetra uklanjaju. Dakle, imamo

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y, \quad y(0) = 0, \quad (2.18)$$

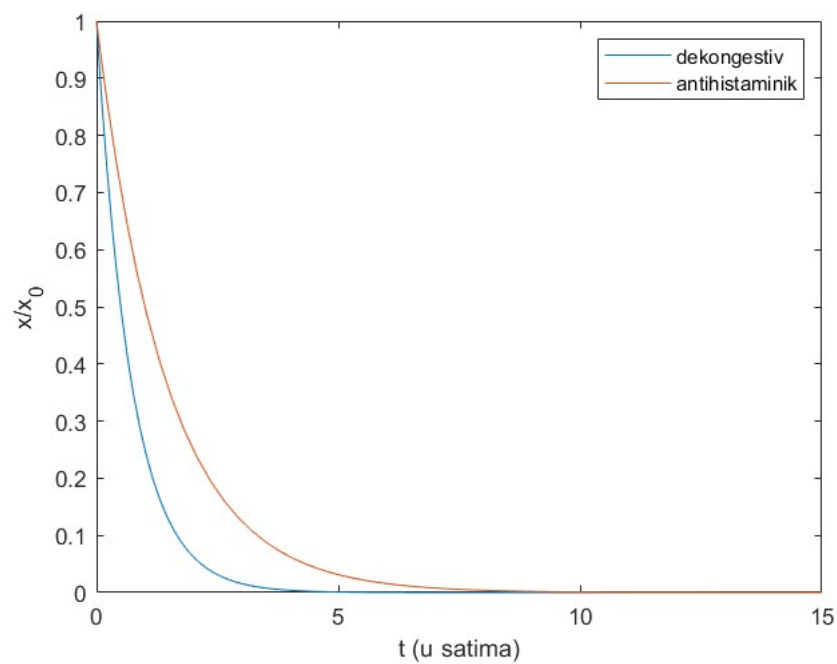
pri čemu je  $k_2$  druga pozitivna konstanta proporcionalnosti. Tableta protiv prehlade sastoji se od dekongestiva i antihistaminika, a koeficijenti proporcionalnosti,  $k_1$  i  $k_2$ , različiti su za različite komponente lijekova u tableti.

Intuitivno, kako  $t$  raste,  $x$  i  $y$  se približavaju nuli, iako brzina kojom se to događa ovisi o koeficijentima  $k_1$  i  $k_2$  povezanim sa svakim lijekom. Neke vrijednosti za dekongestiv i antihistaminik dane su u tablici 2.1:

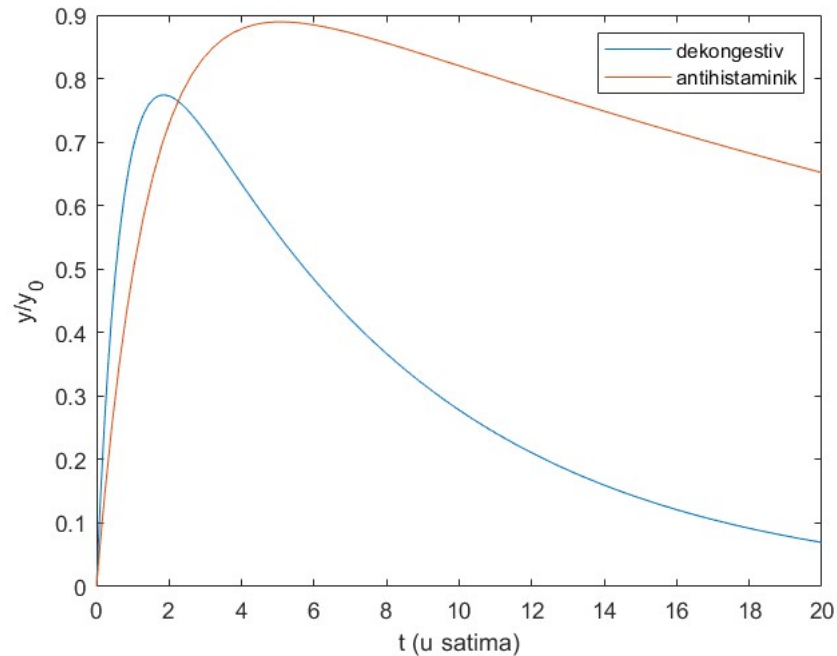
Koeficijenti	Dekongestiv	Antihistaminik
$k_1$	1.386/hr	0.6931/hr
$k_2$	0.1386/hr	0.0231/hr

Tablica 2.1: Tablica koeficijenata  $k_1$  i  $k_2$ 

Korištenjem ovih vrijednosti jednostavno numerički rješavamo diferencijalne jednadžbe pomoću MATLAB-a.



Slika 2.6: Grafički prikaz količine dekonjestiva i antihistaminika u GI traktu



Slika 2.7: Grafički prikaz količine dekonjestiva i antihistaminika u krvotoku

Slike 2.6 i 2.7 prikazuju količine dekonjestiva i antihistaminika tijekom vremena u GI traktu, odnosno krvotoku za vrijednosti parametara  $k_1$  i  $k_2$  dane u tablici 2.1.

Koeficijenti također ovise o dobi i zdravlju uključene osobe, a koncentracija lijeka može ovisiti i o tjelesnoj masi pojedinca.

Diferencijalne jednačbe (2.17) i (2.18) nisu povezane, jer je prva jednačba potpuno neovisna o  $y$ . Dakle, možemo ju riješiti neovisno o drugoj jednačbi. Zapišimo jednačbu (2.17) na sljedeći način

$$-\frac{1}{k_1 x} dx = dt.$$

Integriranjem obje strane dobivamo

$$-\frac{1}{k_1} \ln x = t + C,$$

gdje je  $C$  konstanta. Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo

$$x = e^{-k_1(t+C)}.$$

Uvođenjem nove konstante  $C_1 = e^{-k_1 C}$  imamo

$$x = C_1 e^{-k_1 t}.$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta,  $x(0) = x_0$ , slijedi

$$x_0 = C_1 e^0 = C_1.$$

Dakle, rješenje prve diferencijalne jednadžbe je

$$x(t) = x_0 e^{-k_1 t}. \quad (2.19)$$

Da bismo dobili rješenje diferencijalne jednadžbe, dobiveno rješenje (2.19) uvrstimo u (2.18) te imamo:

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x_0 e^{-k_1 t} - k_2 y.$$

Ova jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda koju rješavamo koristeći teorem 1.1.11.

Uočimo da ovdje vrijedi  $p(t) = k_2$  i  $q(t) = k_1 x_0 e^{-k_1 t}$ . Prvo računamo

$$\int p(t) dt = \int k_2 dt = k_2 t. \quad (2.20)$$

Izračunajmo sada

$$\int q(t) dt = \int k_1 x_0 e^{-k_1 t} dt = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t}. \quad (2.21)$$

Uvrstimo (2.20) i (2.21) u (1.3) i dobivamo

$$y(t) = e^{-k_2 t} \left( C + \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} \right).$$

Korištenjem početnog uvjeta,  $y(0) = 0$ , slijedi

$$0 = e^0 \left( C + \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1} e^0 \right)$$

$$0 = C + \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}$$

$$C = \frac{k_1 x_0}{k_1 - k_2}.$$



Uvrštavanjem konstante  $C$  te sređivanjem dobivenog izraza, slijedi da je rješenje jednadžbe (2.18) dano sa

$$y(t) = \frac{k_1 x_0}{k_1 - k_2} \left( e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t} \right)$$

za  $k_1 \neq k_2$ .

## Model 2: Nekoliko sporo otapajućih tableta protiv prehlade

U stvarnosti, naročito za prehladu, uzimamo više od jedne tablete. Da bismo ovo modelirali, pretpostavimo da se lijek kontinuirano unosi u GI trakt, što je razumno za tablete koje se sporo otapaju. Stoga pretpostavljamo konstantnu brzinu unosa lijeka,  $I$ . Također, budući da se pilula sporo otapa, pretpostavljamo da u početku nema lijeka u GI traktu.

Prilagođavamo naš model iz prethodnog odjeljka te sada imamo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= I - k_1 x, & x(0) &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= k_1 x - k_2 y, & y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdje je  $I$  pozitivna konstanta koja predstavlja brzinu unosa lijeka (u gramima po jedinici vremena). U ovom modelu je  $x(0) = 0$ , dok je u prethodnom bilo  $x(0) = x_0$ .

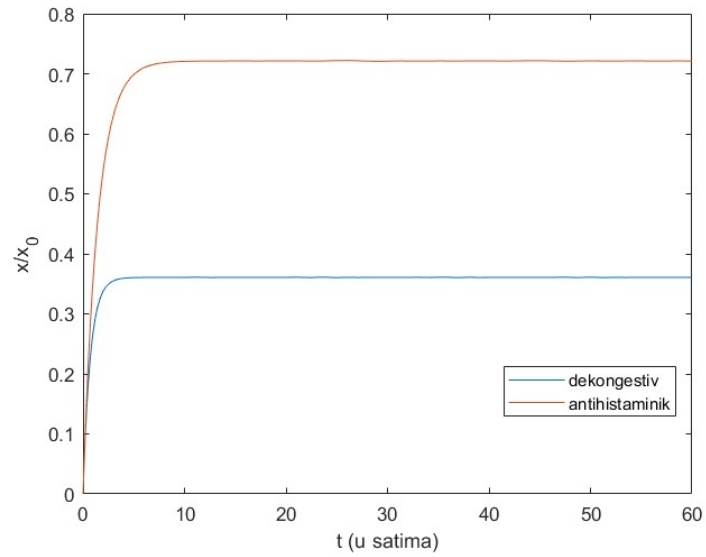
Ponovno imamo dvije nezavisne diferencijalne jednadžbe koje se mogu odvojeno riješiti. Postupak rješavanja je analogan kao u prvom modelu pa navodimo samo rješenja. Rješenje prve diferencijalne jednadžbe iz (2.22) dano je sa

$$x(t) = \frac{I}{k_1} \left( 1 - e^{-k_1 t} \right).$$

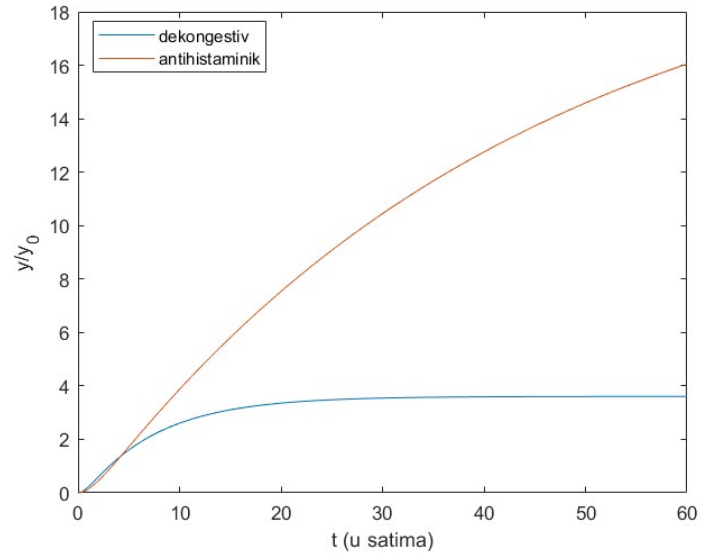
Rješenje druge diferencijalne jednadžbe je dano sa

$$y(t) = \frac{I}{k_2} \left( 1 - \frac{1}{k_1 - k_2} \left( k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t} \right) \right).$$

Kao i obično, zanima nas što se događa tijekom vremena. Kada  $t \rightarrow \infty$ , tada  $x \rightarrow \frac{I}{k_1}$  i  $y \rightarrow \frac{I}{k_2}$ . Sada crtamo grafove ovih funkcija kako bismo utvrdili akumulirane razine dekonjestiva i antihistaminika u GI traktu i krvotoku tijekom vremenskog razdoblja u kojem se tablete uzimaju svakih sat vremena, a vrijednost  $I$  je konstantna.



Slika 2.8: Grafički prikaz količine dekongestiva i antihistaminika u GI traktu



Slika 2.9: Grafički prikaz količine dekongestiva i antihistaminika u krvotoku

Slike 2.8 i 2.9 prikazuju količine dekongestiva i antihistaminika u GI traktu, odnosno krvotoku tijekom vremena za vrijednosti parametara  $k_1$  i  $k_2$  danih u tablici 2.1.

Naša pretpostavka o konstanti  $I$  vrijedi u slučaju kada se lijekovi otapaju konstantnom brzinom, što omogućuje polagano i ravnomjerno oslobađanje lijeka tijekom razdoblja od nekoliko sati. U stvarnosti se neke tablete brzo otapaju i stoga bi  $I(t)$  trebao biti pulsirajuća funkcija, koja predstavlja ponovljene doze. Ovdje ne razmatramo te slučajeve, ali ono što je potrebno u modelu je zamjena konstante  $I$  s odgovarajućom vremenski zavisnom funkcijom.

## Poglavlje 3

# Primjena sustava diferencijalnih jednadžbi

### 3.1 Model izbijanja gripe

U ovom poglavlju razvijamo model za opisivanje širenja bolesti u populaciji i koristimo ga za opisivanje širenja gripe u internatu. Da bi to učinili, stanovništvo podijelimo u tri skupine: oni koji su podložni zarazi, oni koji su zaraženi i mogu širiti bolest te oni koji su se oporavili i imuni su. Modeliranje ovih grupa u interakciji dovodi do sustava dviju povezanih diferencijalnih jednadžbi.

Tijekom stoljeća bilo je dramatičnih primjera kada su epidemije imale značajan učinak na ljudsku populaciju. Jedna od najpoznatijih je crna smrt u Europi u 14. stoljeću. Danas epidemije još uvijek prevladavaju, a među najznačajnijim su AIDS, virus ebole te COVID-19. Ako nam je poznata priroda širenja bolesti kroz populaciju, tada ju lakše možemo obuzdati cijepljenjem ili karantenom. U slučaju biološke kontrole štetočina, ponekad želimo odrediti kako povećati širenje bolesti (na primjer, miksomatoze ili kalicivirusa kod kunića) kako bismo pronašli učinkovit način smanjenja štetne populacije. Nažalost, i sami ljudi bili su podvrgnuti ovom načinu kontrole. U kolonijalnim vremenima širenje europskih bolesti, poput ospice i boginja, imalo je katastrofalan učinak na određene domorodačke populacije koje nisu imale nikakvu zaštitu od njih.

Mnoge bolesti šire zaraženi pojedinci u populaciji koji dolaze u bliski kontakt s osjetljivim pojedincima. To uključuje gripu, ospice, vodene kozice, žljezdanu groznicu i AIDS. S druge strane, bolesti poput malarije se prenose putem domaćina, komarca, koji prenosi bolest s jedinke na jedinku. Određene su bolesti zaraznije od drugih. Primjerice, ospice i gripa su vrlo zarazni, dok je žljezdana groznica mnogo manje zarazna. Mnoge bolesti, kao što su zaušnjaci i ospice, daju doživotni imunitet. Dok primjerice, gripa i tifus imaju kratko razdoblje imuniteta, pa je moguće zaraziti se više puta.

Uvedimo definicije koje su nam potrebne kako bismo nastavili s modeliranjem. Razdoblje inkubacije bolesti je vrijeme između zaraze i pojave vidljivih simptoma. To nije isto kao latentno razdoblje, koje predstavlja vrijeme između zaraze i mogućnosti da se netko drugi zarazi. Latentno razdoblje je kraće od razdoblja inkubacije, tako da pojedinac može širiti bolest, a da ipak nije svjestan da ju ima. Za ospice, razdoblje inkubacije je otprilike 2 tjedna, a latentno razdoblje je otprilike 1 tjedan. U nastavku razmatramo jednostavan matematički model za epidemiju gripe u internatu tijekom razdoblja od oko 15 dana. Za to razdoblje je razumno pretpostaviti da ne dolazi do ponovne zaraze.

### Pretpostavke modela

Kada se razmatra bolest, populacija se može podijeliti u različite skupine: osjetljive osobe  $S(t)$  i zaražene osobe  $I(t)$ , gdje  $t$  označava vrijeme. Osjetljivi su oni koji mogu dobiti bolest, dok su zaraženi oni koju ju mogu prenijeti osjetljivima. Postoji i treća skupina, a to su osobe koje su se oporavile od bolesti i više nisu osjetljive.

Za početak donosimo neke pretpostavke na temelju kojih gradimo model:

- Pretpostavljamo da je populacija osjetljivih i zaraženih osoba dovoljna velika, kako bi se mogle zanemariti slučajne razlike među pojedincima.
- Zanemarujemo rođenje i smrt te pretpostavljamo da se bolest širi kontaktom.
- Zanemarujemo latentno razdoblje za bolest, postavljajući ga na 0.
- Pretpostavljamo da su svi oni koji se oporave od bolesti imuni (barem unutar razmatranog vremenskog razdoblja).
- Pretpostavljamo da je u svakom trenutku stanovništvo homogeno izmiješano, odnosno da su zaraženi i osjetljivi uvijek nasumično raspoređeni na području na kojem živi stanovništvo.

Kao što je gore spomenuto, pretpostavljamo savršen imunitet nakon preboljenja. To općenito ne vrijedi za gripu, jer virus mutira i ljudi se mogu ponovno zaraziti iz godine u godinu. Međutim, vremensko razdoblje koje nas ovdje zanima je oko 15 dana, tako da je savršen imunitet razumna pretpostavka.

### Definiranje sustava diferencijalnih jednadžbi modela

Kako smo pretpostavili da nema rađanja i da nitko od zaraženih ne može ponovo postati osjetljiv, broj osjetljivih se samo može smanjiti, u slučaju zaraze istih. Broj zaraženih se

povećava prilikom zaraze osjetljivih te se smanjuje zbog onih zaraženih koji umru, postanu imuni ili su u karanteni.

Brzinu promjene broja osjetljivih i zaraženih opisujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa promjene} \\ \text{broja osjetljivih} \end{array} \right\} &= - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa osjetljivih koji} \\ \text{su se zarazili} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa promjene} \\ \text{broja zaraženih} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa osjetljivih koji} \\ \text{su se zarazili} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa zaraženih koji} \\ \text{su se oporavili} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa promjene} \\ \text{broja oporavljenih} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa zaraženih koji} \\ \text{su se oporavili} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Moramo uzeti u obzir i one koji su izbačeni iz sustava, u ovom slučaju one koji su se izliječili od bolesti. Općenitije, to mogu biti oni koji su umrli zbog bolesti, oni koji su postali imuni na bolest i oni zaraženi koji su u karanteni. Broj zaraženih koji su u karanteni ne smije ovisiti o broju osjetljivih, već samo o broju zaraženih. Pretpostavljamo da je stopa zaraženih koji su se oporavili proporcionalna broju zaraženih

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa zaraženih koji} \\ \text{su se oporavili} \end{array} \right\} = \gamma I(t),$$

gdje je  $\gamma$  pozitivna konstanta proporcionalnosti, koja se naziva stopa oporavka ili stopa uklanjanja. Stopa  $\gamma$  je stopa po glavi stanovnika. Njegov recipročni iznos,  $\gamma^{-1}$ , može se interpretirati kao srednje vrijeme tijekom kojeg je jedinka zarazna. Za gripu, zarazno razdoblje je obično od jedan do tri dana.

Za modeliranje ukupne stope osjetljivih koji su se zarazili, prvo uzmimo u obzir osjetljive koji su se zarazili zbog kontakta s jednom zaraženom jedinkom. Očito je da što je veći broj osjetljivih, to je veći porast broja zaraženih. Dakle, stopa osjetljivih osoba zaraženih od jedne zaražene jedinke je rastuća funkcija broja osjetljivih. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je ta stopa proporcionalna broju osjetljivih.

Ako broj osjetljivih u trenutku  $t$  označimo sa  $S(t)$ , tada je stopa osjetljivih koji su zaraženi jednaka  $\lambda(t)S(t)$ . Međutim, nije razumno tretirati  $\lambda$  kao konstantu, već kao funkciju, jer što je više zaraženih, to je veći rizik da će se jedna osjetljiva osoba zaraziti. Tada je stopa osjetljivih koji su zaraženi jednaka

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa osjetljivih koji} \\ \text{su se zarazili} \end{array} \right\} = \lambda(t)S(t).$$

Kasnije nalazimo odgovarajuću ovisnost  $\lambda$  o broju zaraženih. Član  $\lambda(t)$  nazivamo snaga zaraze. To je stopa po glavi stanovnika po kojoj osjetljivi pojedinci postaju novozaraženi. Mjerna jedinica je vrijeme<sup>-1</sup>. Također,  $\lambda(t)$  možemo interpretirati kao vjerojatnost po jedinici vremena da se jedna osjetljiva osoba zarazi. To nam sada daje sustav diferencijalnih

jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\lambda(t)S \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda(t)S - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Snaga zaraze,  $\lambda(t)$ , ovisi o trenutnom broju zaraženih  $I(t)$  i raste kako se udio zaraženih u populaciji povećava. Također, ovisi o broju kontakata među pojedincima i vjerojatnosti da se, prilikom kontakta, osjetljiva jedinka zarazi. Neka je  $c$  broj kontakata u jedinici vremena i  $p$  vjerojatnost da kontakt rezultira zarazom. Pretpostavljamo da su  $c$  i  $p$  konstante. Neka je  $N(t)$  ukupna veličina populacije, odnosno  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ . Deriviranjem prethodne jednadžbe i zbrajanjem triju jednadžbi iz (3.1) slijedi da je  $N'(t) = 0$ , odnosno da je ukupna veličina populacije konstantna. Neka je  $\beta_f = cp$ . Konstanta  $\beta_f$  naziva se koeficijent prijenosa i ima istu mjernu jedinicu kao i snaga zaraze. Prikladna funkcija za snagu zaraze dana je sa

$$\lambda(t) = \beta_f \frac{I(t)}{N}.$$

Model za širenje gripe sada postaje

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta_f S \frac{I}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta_f S \frac{I}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I,\end{aligned}\tag{3.2}$$

s početnim uvjetima  $S(0) = s_0$ ,  $I(0) = i_0$  i  $R(0) = 0$ .

Budući da su  $\beta_f$  i  $N$  konstante, možemo definirati  $\beta = \frac{\beta_f}{N}$ . Parametar  $\beta$  također nazivamo koeficijent prijenosa, ali ima različitu mjernu jedinicu od  $\beta_f$ . Pojednostavljeni model je

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{3.3}$$

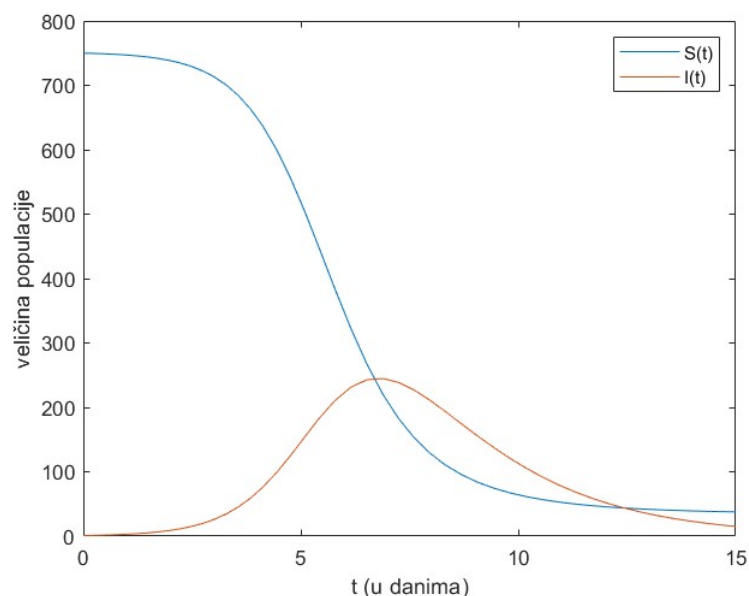
Budući da se varijabla  $R$  ne pojavljuje u prve dvije diferencijale jednadžbe, njih možemo proučavati kao zaseban sustav.

## Numeričko rješenje sustava

Diferencijalne jednačbe (3.3) možemo riješiti numeričkom metodom. Međutim, prvo moramo odrediti početne uvjete i vrijednosti parametara. Procjena vrijednosti parametara često je težak zadatak. Bez točnih procjena parametara, model je manje koristan kao alat za predviđanje.

Jedan pristup za procjenu parametara je izravno mjerenje vrijednosti parametra. Na primjer, za dani model interpretacija parametra  $\gamma$  je da  $\gamma^{-1}$  predstavlja vrijeme u kojem je zaražena osoba zarazna. Na temelju poznavanja gripe znamo da ima infektivno razdoblje 1 – 3 dana, tako da za procjenu možemo uzeti  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Izvedivo je izravno mjeriti prosječno razdoblje zaraze, ako se za sve pojedinačne pacijente vode dovoljno detaljni zapisi o vremenu početka infekcije i vremenu oporavka; međutim, rijetko su dostupni potpuni zapisi ove vrste, a nepotpuni zapisi mogu dati pristranu procjenu.

Procjena parametra  $\beta_f$  je teža. Možemo se poslužiti definicijom osnovnog reprodukcijskog broja  $R_0$ , gdje je  $R_0 = \frac{\beta_f N}{\gamma} = \frac{\beta_f}{\gamma}$  i stoga je  $\beta_f = \gamma R_0$ . Pretpostavimo da su se u prva dva dana dogodile tri nove zaraze, iz čega dobivamo  $\beta_f \approx \frac{3}{2} = 1.5$ . Za veličinu populacije uzimamo  $N = 700$ . Slijedi da je  $\beta = \frac{\beta_f}{N} = \frac{1.5}{700} = 0.00214$ . Za početne uvjete pretpostavljamo da je epidemiju započela jedna zaražena jedinka u trenutku  $t = 0$ , tako da je  $I(0) = 1$  i  $S(0) = 700$ .



Slika 3.1: Graf numeričkog rješenja



Grafički prikaz numeričkog rješenja na slici 3.1 dobiven je korištenjem gornjih podataka pomoću MATLAB-a.

Broj zaraženih se značajno povećava tijekom 6 dana, a zatim postupno opada. Ono što se događa je da se broj osjetljivih "potroši". Stoga, u kasnijim fazama izbijanja bolesti, postoji puno manja šansa da bilo koji zaraženi dođe u kontakt s nekim tko još nije zaražen.

## Ograničenja modela

Postoji niz različitih varijacija osnovnog modela koje treba razmotriti. Na primjer, učinak rađanja, koji stalno uvodi sve više osjetljivih u populaciju, ili bolesti bez imuniteta, gdje zaražene jedinke ponovno postaju osjetljive nakon preboljenja.

Broj rođenih će osigurati dodatan izvor osjetljivih pojedinaca i to može dovesti do oscilacija broja zaraženih. Doista, prije izuma cjepiva za bolesti kao što su ospice, redovite epidemije javljale su se svake 2 godine u nekim zemljama, a u ostalima svake godine.

Dok neke bolesti stvaraju trajni imunitet (npr. ospice, vodene kozice), mnoge druge to ne čine (npr. prehlada, gripa). To možemo modelirati, dopuštajući da zaraženi ponovno postanu osjetljivi. Ovdje uzimamo u obzir još jednu pretpostavku, a to je da je stopa novo-zaraženih proporcionalna umnošku  $S(t)I(t)$ . Ako udio zaraženih u populaciji postane jako velik, onda će stopa zaraženih, vjerojatno, doseći maksimum, budući da postoji ograničen broj kontakata koji se mogu ostvariti u određenom vremenskom intervalu. Da bismo upotrijebili model s novim pretpostavkama, definiramo  $\beta$  kao funkciju u ovisnosti o veličini populacije (ili gustoći naseljenosti),  $\beta(N) = \frac{pc(N)}{N}$ . Ovdje  $c$  više nije konstanta, već funkcija koja predstavlja broj kontakata među pojedincima, u ovisnosti o veličini populacije  $N$ , a  $p$  je vjerojatnost zaraze prilikom kontakta.

## Osnovni reprodukcijski broj

Iz istraživanja numeričkog rješenja uočavamo da dinamika modela ima granično ponašanje. Ako je početni broj osjetljivih,  $s_0$ , ispod određenog iznosa, tada se broj zaraženih,  $I(t)$ , smanjuje. S druge strane, ako je  $s_0$  veći od praga, tada  $I(t)$  raste prije ponovnog opadanja. Čini se da je ovo neovisno o početnom broju zaraženih jedinki,  $i_0$ . Ovu graničnu veličinu možemo odrediti definiranjem osnovnog reprodukcijskog broja, koji označavamo s  $R_0$ .

Osnovni reprodukcijski broj definiran je kao broj novih sekundarnih zaraza koje su rezultat jedne zaražene osobe smještene u potpuno osjetljivu populaciju, za vrijeme kada je ta osoba zarazna.

Ako je  $R_0 < 1$ , očekujemo da će epidemija izumrijeti, odnosno da će se  $I(t)$  smanjiti. S druge strane, ako je  $R_0 > 1$ , tada bi se, u početku, broj zaraženih povećao.

Korištenjem gornje definicije možemo odrediti formulu za  $R_0$ . Trenutna stopa novih zaraza za stanovništvo bila je  $\beta SI$ . Stoga je stopa novih infekcija uzrokovanih jednom

zaraženom jedinkom  $\beta s_0$ , gdje smo stavili  $I = 1$  i  $S = s_0$ . Da bismo dobili broj novih zaraza, ovu stopu množimo s prosječnim vremenom u kojem je pojedinac zarazan,  $\gamma^{-1}$ . Stoga možemo definirati  $R_0$  kao količinu

$$R_0 = \frac{\beta s_0}{\gamma}. \quad (3.4)$$

Osnovni reprodukcijski broj je brzina širenja zarazne bolesti kroz populaciju kada je  $R_0 > 1$ . Neke tipične procjene  $R_0$  za neke uobičajene zarazne bolesti (u razdoblju prije cijepljenja) su:  $R_0 \approx 3 - 4$  za gripu,  $R_0 \approx 16 - 18$  za ospice,  $R_0 \approx 4$  za male boginje i  $R_0 \approx 10 - 12$  za vodene kozice. Iz diferencijalne jednadžbe za  $I$  slijedi

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = \gamma I \left( \frac{\beta S}{\gamma} - 1 \right)$$

te također vidimo da je  $\frac{dI}{dt}$  pozitivan samo ako je  $\frac{\beta S}{\gamma} > 1$ , a negativan samo ako je  $\frac{\beta S}{\gamma} < 1$ . Iz formule (3.4), to govori da je  $\frac{dI}{dt} > 0$  ako je  $R_0 > 1$  i  $\frac{dI}{dt} < 0$  ako je  $R_0 < 1$ . Dakle, broj zaraženih se povećava ako je osnovni reprodukcijski broj veći od 1, a inače se smanjuje.

## Cijepljenje

U stvarnosti, primjenu osnovnog reprodukcijskog broja koristimo za cijepljenje stanovništva. Zanima nas koliki bi bio udio iskorjenjivanja zarazne bolesti, pod pretpostavkom da trenutno možemo cijepiti samo dio populacije.

Na ovo je lako odgovoriti korištenjem osnovnog reprodukcijskog broja  $R_0$ . Iz  $R_0 = \frac{\beta_1 s_0}{\gamma}$ , ako cijepimo udio  $P$  osjetljivih jedinki, tada osnovni reprodukcijski broj postaje

$$R_v = \frac{(1 - P)\beta_1 s_0}{\gamma} = (1 - P)R_0,$$

budući da sada postoji samo  $(1 - P)s_0$  osjetljivih osoba koje bi mogle dobiti bolest. Zaraza se smanjuje kada je osnovni reprodukcijski broj manji od 1, pa je uvjet za iskorjenjivanje bolesti  $R_v < 1$ . Rješavanjem za  $P$ , dobivamo formulu

$$P > 1 - \frac{1}{R_0}.$$

Za velike boginje, na primjer, gdje je  $R_0 \approx 4$ , dobivamo  $P \approx 75\%$  populacije, ali za ospice, u necijepljenim zajednicama, gdje je tipično  $R_0 \approx 15$ , imamo da je  $P \approx 93\%$ . Iz ove računice je jasno zašto su velike boginje odabrane kao meta za iskorjenjivanje diljem svijeta.

## Endemske bolesti

U populaciji i dalje postoje endemske bolesti koje karakterizira izbijanje koje se javlja s vremena na vrijeme. Mnogo je primjera, uključujući dječje bolesti kao što su ospice i vodene kozice. Takvi se modeli obično proučavaju na široj razini, na primjer, za veličinu populacije uzima se veličina grada ili države.

Da bismo modelirali endemsku bolest, u model moramo uključiti učinke prirodnog rađanja i smrti. Sljedeći model je relativno jednostavan za istraživanje endemske bolesti.

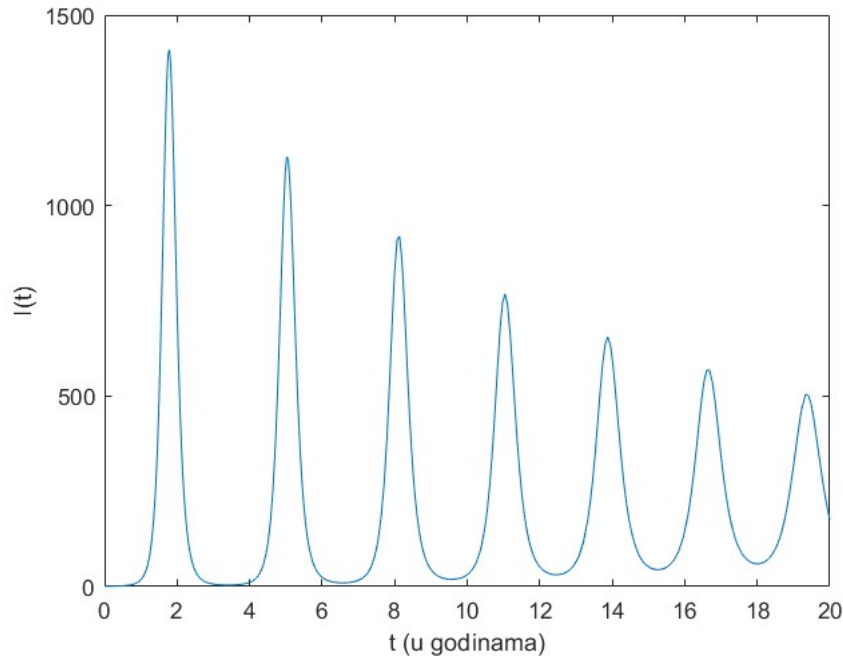
Neka  $a$  i  $b$  označavaju prirodnu stopu smrtnosti po stanovniku i stopu nataliteta stanovništva, gdje su smrti uzrokovane prirodnim uzrocima. Diferencijalne jednadžbe su dane u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bN - \beta SI - aS \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - aI \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - aI,\end{aligned}\tag{3.5}$$

gdje je  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ . Ako zbrojimo tri diferencijalne jednadžbe zajedno, dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu za  $N(t)$ ,

$$\frac{dN}{dt} = (b - a)N.$$

Ako je  $b = a$ , broj stanovnika ostaje konstantan. Konstantna populacija je razumna pretpostavka, pod uvjetom da je vremenski period na koji se model primjenjuje dovoljno kratak. S druge strane, vremenski period treba biti dovoljno dug da rađanja stvore dovoljan izvor novih osjetljivih osoba.



Slika 3.2: Grafički prikaz numeričkog rješenja

Numeričko rješenje jednadžbi (3.5) je dano na slici 3.2. Pretpostavili smo veličinu populacije od 1 milijun ( $N = 10^6$ ), s početnim brojem zaraženih  $i_0 = 10$ , početnim brojem osjetljivih  $s_0 = 10^5$  i početnim brojem ljudi koji su preboljeli bolest i imuni su  $r_0 = N - i_0 - s_0$ . Ovo su tipične vrijednosti za bolest kao što su ospice u gradu srednje veličine i gdje je velik dio stanovništva imun zbog cijepljenja ili preboljenja, dok značajan udio (10%) nije imun. Za vrijednosti parametara upotrijebili smo  $\gamma = 52$  godine ( $\gamma^{-1} = 1$  tjedan =  $\frac{1}{52}$  godine) i očekivani životni vijek,  $a^{-1} = 80$  godina. Da bismo izračunali  $\beta$  pretpostavili smo da je  $R_0 = 10$ , što je tipično za ospice. Ovo dovodi do koeficijenta prijenosa  $\beta = 5.2 \times 10^{-4}$  budući da je ovdje  $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma + a}$ .

Broj zaraženih u početku ima sličnu dinamiku kao na slici 3.1, ali nakon nekog vremena broj zaraženih se opet povećava, umjesto da izumire. Ponovljene epidemije javljaju se svake dvije do tri godine. U početku postoji dovoljno osjetljivih jedinki za širenje zarazne bolesti u populaciji ( $R_0 > 1$ ). Nakon nekog vremena, broj osjetljivih pada, pa nema dovoljno dostupnih osjetljivih za održavanje povećanja zaraze (odnosno, jedna zaražena osoba ne može zaraziti više od jednog osjetljivog) pa i broj zaraženih počinje padati. Međutim, zbog rađanja novih osjetljivih, doći će trenutak kada će broj osjetljivih ponovno dosegnuti kritičnu vrijednost pa će broj zaraženih ponovno početi rasti, što će uzrokovati

novu epidemiju.

U ovom modelu dobivamo prigušene oscilacije, a broj zaraženih teži stabilnom stanju. U praksi, prijenosni koeficijent  $\beta$  može biti sezonski ovisan, što može uzrokovati trajne, a ne prigušene oscilacije.

### Koeficijent prijenosa ovisan o frekvenciji i gustoći

Prisjetimo se da je snaga zaraze umnožak stope kontakata i vjerojatnosti da će kontakt osjetljive osobe sa zaraženom dovesti do zaraze. Stopa kontakata (broj kontakata koje svaki pojedinac ostvari u jedinici vremena) može ovisiti o veličini ili gustoći populacije. Možemo pretpostaviti da je stopa kontakata neovisna o gustoći naseljenosti ili, alternativno, možemo pretpostaviti da je proporcionalna veličini ili gustoći populacije. Dakle, veće populacije imaju češće kontakte.

U promatranom modelu gripe pretpostavljamo da je ukupna populacija  $N$  konstantna. Također, stopa kontakata je konstantna te su sustavi jednadžbi (3.2) i (3.3) ekvivalentni s  $\beta = \frac{\beta_f}{N}$ . Međutim, postoje mnoge okolnosti u kojima stanovništvo nije konstantno. To uključuje endemske modele tijekom dužeg vremenskog razdoblja, gdje je stopa nataliteta po glavi stanovnika veća od stope smrtnosti po glavi stanovnika te bolesti koje uzrokuju velik broj smrtnih slučajeva što dovodi do smanjenje ukupne populacije. Zbog toga je važno uzeti u obzir vrstu prijenosa. Postoje dvije glavne vrste: prijenos ovisan o frekvenciji i prijenos ovisan o gustoći.

Za prijenos ovisan o frekvenciji, pretpostavljamo da je brzina kontakata konstantna,  $c(N) = c_0$ , a snaga zaraze je tada

$$\lambda(t) = pc_0 \frac{I(t)}{N(t)} = \beta_f \frac{I(t)}{N(t)}, \quad \beta_f = pc_0.$$

Terminologija "ovisno o frekvenciji" dolazi od pretpostavke da stopa kontakata ovisi samo o učestalosti kontakata. Za prijenos ovisan o gustoći, pretpostavljamo da je  $c(N)$  proporcionalan s  $N$ , odnosno  $c(N) = \kappa N$ , a snaga zaraze je tada

$$\lambda(t) = p\kappa N(t) \frac{I(t)}{N(t)} = \beta(t), \quad \beta = p\kappa,$$

koju zovemo prijenos ovisan o gustoći jer brzina kontakata ovisi o veličini populacije (ili gustoći).

Prijenos ovisan o frekvenciji i prijenos ovisan o gustoći predstavljaju dvije krajnosti. Obično je prijenos ovisan o frekvenciji prikladniji za ljudsku populaciju (gdje ljudi obično imaju fiksni krug društvenih kontakata, koji je uglavnom neovisan o veličini populacije). Dok prijenos ovisan o gustoći može biti prikladniji za životinjske populacije, gdje je broj kontakata po jedinici vremena veći kod gusto naseljenih populacija zbog vjerojatnijih slučajnih susreta.

U praksi, stope kontakata često pokazuju linearnu ovisnost o veličini populacije, za manje populacije, i konstantnu ovisnost za velike populacije. Modeliranje se može izvoditi pomoću odgovarajuće Michaelis–Menten funkcije, npr.  $c(N) = \frac{\kappa N}{1+\epsilon N}$ .

## 3.2 Analiza slučaja: Kolera

Kolera je zarazna bolest tankog crijeva koju uzrokuje bakterija *Vibrio cholerae*. Prenosi se konzumiranjem zagađene vode ili hrane. U teškim slučajevima, i bez liječenja, žrtve mogu umrijeti zbog dehidracije unutar nekoliko sati od zaraze.

Kolera predstavlja stvaran i ozbiljan javnozdravstveni problem u zajednicama s lošom sanitarnom infrastrukturom. Jedan od razloga zašto se posebna pažnja posvećuje čistoj pitkoj vodi u kampovima za smještaj izbjeglica iz ratom razorenih područja jest minimiziranje rizika od izbijanja kolere. Do izbijanja kolere može doći i nakon prirodnih katastrofa, kada infrastruktura zakaže i zalihe vode postanu zagađene, kao na primjer na Haitiju nakon potresa 2010. godine.

Statističko proučavanje kolere započelo je radom liječnika Johna Snowa u predgrađu Sohoa u Londonu, 1854. godine. Snow je praćenjem mjesta zaraze došao do pumpe za vodu koju je koristila većina stanovnika. Uspio je onesposobiti tu pumpu, ali je to bila vrlo kontroverzna odluka jer se dogodila puno prije otkrića bakterije kao uzročnika bolesti. Istraživanje J. Snowa smatra se početkom znanosti epidemiologije.

Modeliranje može pružiti razumijevanje okolnosti pod kojima može doći do izbijanja zaraze. Ovdje definiramo model koji uključuje interakciju osjetljive i zarazne populacije. Međutim, ono što se razlikuje od uobičajenog pristupa jest to što uključuje prijenos iz okoline.

### Jednadžbe modela

Budući da kolera ima kratko latentno razdoblje, varijable potrebne za opisivanje širenja kolere u populaciji su  $S(t)$  - osjetljivi pojedinci, i  $I(t)$  - zarazni pojedinci, gdje je  $t$  vrijeme. Pojedinci koji su preboljeli koleru imaju imunitet od ponovne zaraze u trajanju od otprilike dvije godine. Sve dok je vremensko razdoblje koje nam je od interesa manje od dvije godine, razumno je pretpostaviti da se zaražene osobe oporave bez da ponovno postanu osjetljive.

Druga važna varijabla je koncentracija bakterija kolere u opskrbi vodom. To utječe na lakoću širenja kolere na osjetljive osobe prilikom dolaska u kontakt s vodom tijekom pripreme hrane ili pijenja. Koristimo varijablu  $B(t)$  koja predstavlja koncentraciju bakterija, a mjeri se kao broj stanica po ml u vodi, stoga ju nazivamo i broj bakterija. Taj broj će se mijenjati s vremenom kako sve više bakterija ulazi u vodoopskrbu te sa sve većim brojem zaraženih koji izlučuju bakterije kolere.

Diferencijalne jednadžbe ovog modela su

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\lambda(t)S \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda(t)S - \gamma I \\ \frac{dB}{dt} &= \epsilon I + (n_b - m_b)B,\end{aligned}\tag{3.6}$$

gdje je  $\lambda(t)$  snaga zaraze,  $\gamma$  stopa oporavka i  $(n_b - m_b)$  neto stopa rasta broja bakterija po glavi stanovnika u opskrbi vodom.

Populacija bakterija će izumrijeti ako ne dođe do uvođenja novih bakterija od strane zaraženih pojedinaca, tako da je  $n_b - m_b < 0$ . Parametar  $\epsilon$  predstavlja brzinu izlučivanja bakterija u vodoopskrbu od jedne zaražene osobe, pa je  $\epsilon I(t)$  ukupna stopa rasta broja bakterija (mjerena kao jedinica volumena vode po jedinici vremena). U ovom modelu ne uključujemo smrtne slučajeve uzrokovane kolerom, no to se lako može uključiti.

Nadalje pretpostavljamo da se kolera prenosi samo kontaktom s okolinom, a ne kontaktom zaražene i osjetljive osobe (općenito nije važno) ili u doticaju s hranom. Snaga zaraze  $\lambda(t)$  je vjerojatnost da će osjetljiva osoba biti zaražena u jedinici vremena. Dakle, to je stopa kontakata ( $c$  kontakata s vodom dnevno) pomnožena s vjerojatnošću zaraze, koja ovisi o koncentraciji bakterija  $B(t)$ . Iako bismo mogli pretpostaviti da je vjerojatnost proporcionalna s  $B(t)$ , realnije je pretpostaviti da je linearna za mali  $B(t)$  te da teži prema 1 kako  $B(t)$  postaje velik. Stoga, za velike koncentracije bakterija kontakt s vodom uvijek rezultira zarazom. Prikladna funkcija za vjerojatnost zaraze, s obzirom na broj kontakata s vodom, je  $p(B) = \frac{B}{k_{50} + B}$ , gdje konstanta  $k_{50}$  predstavlja koncentraciju bakterija koja dovodi do 50% šanse da dođe do zaraze. Snaga zaraze dana je sa

$$\lambda(t) = cp(B) = c \frac{B}{k_{50} + B}.$$

Supstitucijom  $\lambda(t)$  u (3.6) dobivamo jednadžbe modela

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -c \frac{B}{k_{50} + B} S \\ \frac{dI}{dt} &= c \frac{B}{k_{50} + B} S - \gamma I \\ \frac{dB}{dt} &= \epsilon I + (n_b - m_b)B.\end{aligned}\tag{3.7}$$

## Osnovni reprodukcijski broj

Za zarazne bolesti je od posebnog interesa uspostaviti intervenciju koja bi mogla spriječiti izbijanje bolesti. Osnovni reprodukcijski broj,  $R_0$ , predviđa da bi do izbijanja zaraze moglo doći kada je  $R_0 > 1$  te da se zaraza neće dogoditi kada je  $R_0 < 1$ .

$R_0$  definiramo kao broj novih zaraza nastalih izravno od strane jedne zaražene osobe koja se nalazi u potpuno osjetljivoj populaciji. Za ovaj model, vrijeme kada je zaraženi pojedinac zarazan dano je kao recipročna vrijednost stope izlaska iz odjeljka zaraženih  $I$ ,  $\frac{1}{\gamma}$ , a stopa novih zaraza na početku je jednaka  $\frac{cBs_0}{K+B}$ , gdje je  $s_0 = S(0)$  početni broj osjetljivih.

Pretpostavimo da smo uveli  $I = 1$  zaraženu osobu u osjetljivu populaciju veličine  $s_0$ . Ta jedna zaražena osoba će izbaciti određeni broj bakterija u vodoopskrbu. Broj novoizbačenih bakterija se određuje uvrštavanjem  $I = 1$  u jednadžbu ravnoteže za  $B$ . Ta jednadžba se dobije uvrštavanjem  $\frac{dB}{dt} = 0$  u (3.7)

$$0 = \epsilon + (n_b - m_b)B.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi da je broj novih bakterija jednak

$$B = \frac{\epsilon}{m_b - n_b}.$$

Broj bakterija će biti pozitivan samo ako je stopa smrtnosti bakterija  $m_b$  veća od stope nataliteta bakterija  $n_b$ .

Sada računamo stopu novih zaraza iz početnog broja osjetljivih  $s_0$  kao  $\frac{cBs_0}{k_{50}+B}$ . Za male  $B$  to će aproksimativno biti  $\frac{cs_0}{k_{50}}$ . Broj novozaraženih tijekom vremena,  $\frac{1}{\gamma}$ , u kojem je jedna zaražena osoba, koja se nalazi među osjetljivima, zarazna dan je sa

$$R_0 = \frac{cs_0}{k_{50}} \cdot \frac{\epsilon}{m_b - n_b} \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Iz gornje formule vidimo da povećanje kontakata s vodoopskrbom,  $c$ , ili povećanje stope zagađenja vodoopskrbe izlučenim bakterijama,  $\epsilon$ , ili povećanje početne veličine populacije,  $s_0$ , doprinosi povećanju  $R_0$ . Povećanje stope oporavka,  $\gamma$ , (tj. smanjenje vremena trajanja infekcije) ili povećanje neto stope smrtnosti bakterija po glavi stanovnika,  $m_b$ , dovode do smanjenja  $R_0$ . Uz parametre dane u tablici 3.1 i  $s_0 = 10^4$ , izračunata vrijednost za  $R_0$  je približno 1.5. Budući da je  $R_0 > 1$ , dovođenje jedne zaražene jedinice, u populaciju osjetljivih jedinki, prouzrokuje više od jedne nove zaraze.

Budući da  $R_0$  ovisi o početnom broju osjetljivih, možemo uzeti  $R_0 = 1$  kako bismo pronašli graničnu veličinu grada,  $S_c$ , ispod koje neće doći do izbijanja zaraze.

Uvrštavanjem  $R_0 = 1$  u prethodnu jednadžbu dobivamo

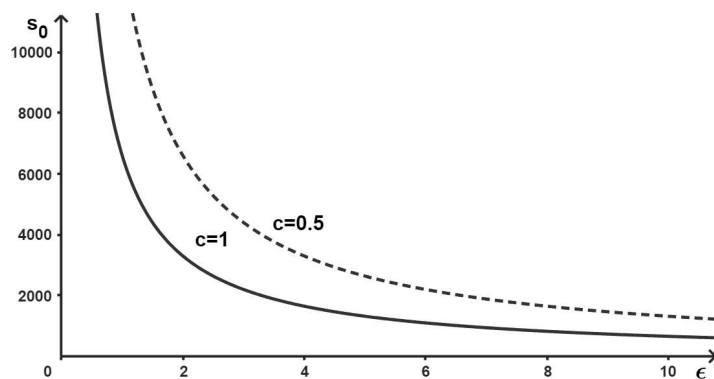
$$S_c = \frac{\gamma k_{50}(m_b - n_b)}{c\epsilon}. \quad (3.8)$$



Parametar	Vrijednost
$c$	1
$k_{50}$	$10^6$
$\gamma$	0.2
$\epsilon$	10
$(n_b - m_b)$	0.33

Tablica 3.1: Tablica vrijednosti parametara modela

Uvrštavanjem vrijednosti parametara danim u tablici 3.1 u jednadžbu (3.8), slijedi da je granična veličina grada  $S_c = 6600$ . Za vrijednosti  $s_0$  iznad granične vrijednosti  $S_c$ , dolazi do izbijanja zaraze.

Slika 3.3: Grafički prikaz početne veličine populacije  $s_0$  u odnosu na stopu zagađenja  $\epsilon$ 

Slika 3.3 predstavlja graf jednadžbe (3.8) za parametre dane u tablici 3.1, ali za dvije različite vrijednosti brzine kontakata  $c \in \{0.5, 1\}$ . Formulu za  $S_c$  možemo upotrijebiti za istraživanje utjecaja mogućih načina sprječavanja izbijanja kolere. Slika 3.3 ilustrira vrijednosti za  $\epsilon$  (jedinčna brzina bakterija koje ulaze u izvor vode) za svaki početni broj osjetljivih,  $s_0$ , tako da je  $R_0 = 1$  ili ekvivalentno  $s_0 = S_c$ . Ovaj graf ilustrira utjecaj poboljšanih sanitarnih uvjeta (modeliran smanjenjem vrijednosti parametra zagađenja vode bakterijama kolere  $\epsilon$ ). Za svaki  $s_0$ , ako je točka  $(\epsilon, s_0)$  iznad krivulje dolazi do izbijanja, dok ako je točka  $(\epsilon, s_0)$  ispod krivulje tada ne dolazi do izbijanja kolere.

Iako je rezultat intuitivan, gornji graf prikazuje nelinearnu prirodu odnosa i može informirati o razumijevanju rizika i dizajnu programa kontrole.

Ova analiza pokazuje da kako se populacija povećava, samo mali raspon  $\epsilon$  (vrlo niske stope bakterija koje ulaze u izvor vode) može spriječiti izbijanje zaraze, što nije slučaj

samo za relativno male populacije.

Gornji model je prilično jednostavan, a očiti nedostatak je što nije uključen broj rođenih i umrlih u populaciji. Mogli bismo ga proširiti uključivanjem dopuštanja slabljenja imuniteta, asimptomatskih slučajeva, cjepiva i prostornih aspekata. Takvi modeli dopuštaju detaljnija istraživanja intervencije i kontrole te pokazuju da kolera može ostati endemična unutar populacije u kojoj zaraza izbija zbog vremenskih nepogoda. Unatoč tome, metodologija razvijena za gornji jednostavni model također je relevantna za ove složenije modele te pruža informacije za kontrolu bolesti.

### 3.3 Analiza slučaja: Kontrola pasa lualica

U odjeljku 2.2 razvili smo model za kontrolu pasa lualica putem eutanazije. Ovdje uvodimo drugu strategiju kontrole, sterilizaciju te pokazujemo kako upotreba sustava diferencijalnih jednadžbi može olakšati usporedbu između utjecaja dviju strategija na kontrolu. U ovom slučaju ljudi djeluju kao "predatori" na pse lualice na dva različita načina. Želimo pronaći način procjene tih dviju strategija upravljanja te utvrditi okolnosti pod kojima je jedna strategija bolja od druge.

Psi lualice mogu uzrokovati brojne probleme u urbanim i ruralnim područjima diljem svijeta. Također, mogu uzrokovati zdravstvene probleme te predstavljaju prijetnju domaćim životinjama. Prilikom napuštanja psi prirodno teže grupiranju u čopore i razmnožavanju. Zbog toga postoji jasna potreba za kontrolom populacije kako bi se šteta svela na najmanju moguću. Zanima nas koja je strategija upravljanja najučinkovitija za kontrolu pasa lualica. Ovdje primjenjujemo matematički model za usporedbu strategija eutanazije i sterilizacije.

Sterilizacija je obično usmjerena na pse u vlasništvu, a eutanazija na pse lualice. Međutim, neki su vlasnici protiv sterilizacije, a programi sterilizacije su osmišljeni tako da ciljaju i na pse lualice. Jedan takav program u Bangkoku (Tajland) nije uspio jer je stopa sterilizacije bila preniska, dok je drugi u Jaipuru (Indija) doveo do stabilnih 70% steriliziranih ženki pasa. Ovo sugerira da postoji granična stopa sterilizacije, iznad koje je vjerojatnije da će program uspjeti. Isto tako, eutanazija će utjecati na stopu rasta populacije, iako potpuno iskorijenjivanje pasa lualica nije vjerojatno s obzirom na učestalo napuštanje pasa.

#### Eutanazija

Prisjetimo se jednadžbe (2.10) iz odjeljka 2.2, to rezultira diferencijalnom jednadžbom s udjelom  $\epsilon$  eutaniziranih pasa po  $\text{km}^2$ :

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{Nr}{K} \left[ N - K \left( 1 - \frac{\epsilon}{r} \right) \right], \quad (3.9)$$

gdje je  $N = N(t)$  funkcija vremena,  $r$  je stopa reprodukcije, a  $K$  nosivost. Parametar  $r$  može se izraziti kao razlika između stope nataliteta  $a$  i stope smrtnosti  $b$ , odnosno  $r = a - b$ . Parametar  $\epsilon$  je udio eutanaziranih pasa po  $\text{km}^2$ , što predstavlja dodatnu stopu smrtnosti.

## Sterilizacija

Prilagođavamo model kako bismo uključili sterilizaciju koja se mijenja s vremenom. Pretpostavljamo da su samo ženke sterilizirane (kao što je uobičajeno za takve programe, ali se može lako promijeniti) i neka je  $Q(t)$  udio steriliziranih ženki pasa. Dakle, ako je  $S(t)$  broj steriliziranih pasa po  $\text{km}^2$ , a  $\nu$  udio ženki u populaciji, tada imamo

$$Q(t) = \frac{S(t)}{\nu N(t)}. \quad (3.10)$$

Diferencijalna jednačina (3.9) postaje

$$\frac{dN}{dt} = N(a(1 - Q) - b - \frac{rN}{K}) = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - aNQ. \quad (3.11)$$

Neka je  $\sigma$  brzina sterilizacije. Tada,

$$\frac{dS}{dt} = \left( -b - r \frac{N}{K} \right) S + \sigma(\nu N - S) \quad (3.12)$$

gdje prvi izraz u zagradama ne uključuje rođenje od steriliziranih životinja, već ovisnost o gustoći koju određuje puna populacija, a drugi izraz je stopa promjene broja steriliziranih pasa sa samo nesteriliziranim ženskim psima dostupnim za sterilizaciju (odnosno  $\nu N - S$ ).

Da bismo dobili diferencijalnu jednačinu za  $Q$ , deriviramo jednačinu (3.10) te u nju uvrstimo jednačine (3.11) i (3.12). Sada dobivamo

$$\frac{dQ}{dt} = (1 - Q)(\sigma - aQ).$$

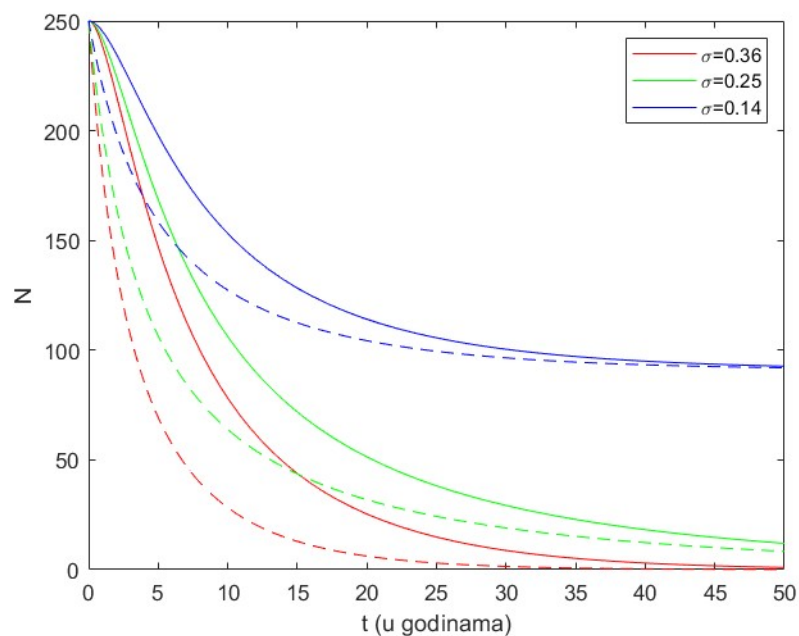
Uvrštavanjem  $\frac{dQ}{dt} = 0$  dobivamo dva ravnotežna rješenja:  $Q_e = 1$  i  $Q_e = \frac{\sigma}{a}$ .

## Usporedba

Svrha ove analize je usporediti učinkovitost dviju strategija kontrole, ali količine  $Q(t)$  (udio svih steriliziranih ženki) i  $N(t)$  (ukupan broj po  $\text{km}^2$ ) su vrlo različite i ne mogu se izravno uspoređivati. Stoga se koristimo povezanim sustavom jednačini koje povezuju  $Q(t)$  sa  $S(t)$

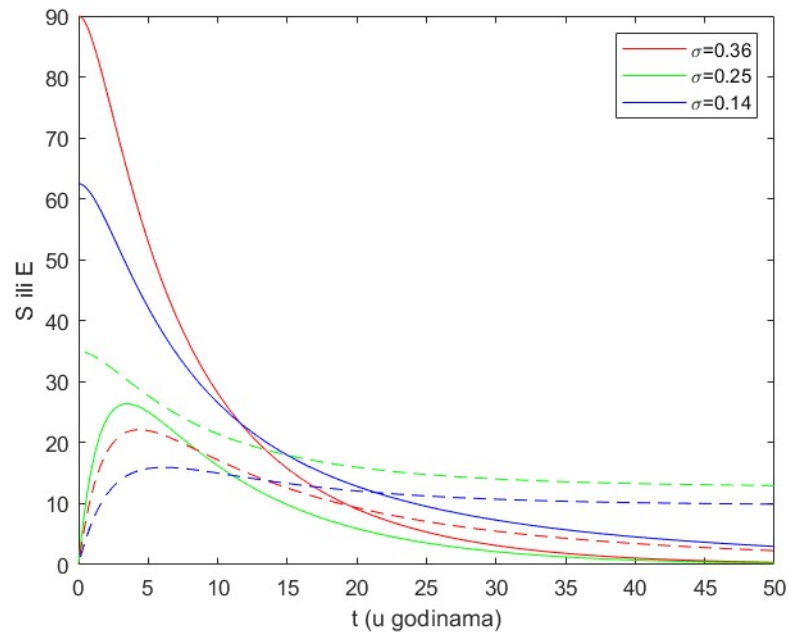
(broj steriliziranih pasa po  $\text{km}^2$ ) i  $N(t)$  (ukupan broj pasa po  $\text{km}^2$ ). Uvrštavanjem  $Q = \frac{S}{vN}$  u jednadžbi (3.11) dolazimo do sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{aS}{v} \\ \frac{dS}{dt} &= \left(-b - r\frac{N}{K}\right)S + \sigma(vN - S).\end{aligned}\quad (3.13)$$



Slika 3.4: Grafički prikaz usporedbe sterilizacije i eutanazije za ukupnu gustoću populacije  $N$  tijekom vremena

Slika 3.4 ilustrira rezultate za ukupnu gustoću populacije tijekom vremena, s punim linijama koje prikazuju rezultate za sterilizaciju (sustav (3.13)) i isprekidanim krivuljama za eutanaziju (jednadžba (3.9)) i 3 različite vrijednosti za udio eutanaziranih pasa  $\epsilon$  i kontrolnog parametra za sterilizaciju  $\sigma$  (označeni sa 3 različite boje na grafovima). Korišteni parametri su  $K = 250$ ,  $a = 0.34$ ,  $b = 0.12$ ,  $v = 0.36$ . Početne vrijednosti su  $N(0) = K = 250$  i  $S(0) = 0$ . Uočavamo da je broj pasa dosta niži s eutanazijom nego sa sterilizacijom. Pod pretpostavkom da su potrebni napori, za iste stope eutanazije i sterilizacije, usporedivi i da novac nije problem, eutanazija bi bila preferirana opcija.



Slika 3.5: Grafički prikaz usporedbe broja steriliziranih  $S$  i eutanaziranih  $E$  pasa tijekom vremena

Međutim, korisnija usporedba za donošenje odluka uključuje broj eutanaziranih životinja ( $E(t) = \epsilon N(t)$  po  $\text{km}^2$ ) i broj steriliziranih ( $S(t)$  po  $\text{km}^2$ ), kao što je prikazano na slici 3.5

Za procjenu najpristupačnije i najučinkovitije strategije, uzimamo u obzir usporedbu troška tih strategija po životinji. Pod istim uvjetima ( $\sigma = \epsilon$  za oba grafa), u početku je broj eutanaziranih životinja znatno veći od onih steriliziranih, iako nakon nekoliko godina broj životinja koje treba sterilizirati premašuje broj životinja koje treba eutanazirati. Ovo sugerira da bi optimalna strategija bila kombinacija eutanazije i sterilizacije. No, za procjenu najpristupačnije i najučinkovitije strategije, morali bismo uzeti u obzir usporedbu troška tih strategija po životinji.

Zaključujemo da ovi jednostavni modeli pružaju sredstva za usporedbu strategija kontrole na smislen način, čak i uz neizvjesnost stope rasta i procjene populacije. Utjecaj drugih čimbenika može se lako uključiti u model. Kao što je ranije spomenuto, jedan koji ovdje nije uključen je da se psi kontinuirano napuštaju i pridružuju populaciji pasa lula. Ovaj pristup modeliranja za usporedbu strategija upravljanja relevantan je za mnoge druge primjene (na primjer, štetočine, bolesti, ribolov), osobito kada imamo malo podataka i može biti vrlo vrijedan alat u dizajnu programa za kontrolu.

# Bibliografija

- [1] B. Barnes i G. R. Fulford, *Mathematical modelling with case studies using Maple and MATLAB*, CRC Press, 2015.
- [2] Mervan Pašić, *Matan1 - dodatak predavanjima za grupe GHI*, [https://www.fer.unizg.hr/\\_download/repository/9Diferencijalne.pdf](https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/9Diferencijalne.pdf), pristupljeno 26. kolovoza 2023.
- [3] Maja Starčević, *Sustavi diferencijalnih jednadžbi*, Matematički odsjek, PMF, 2019.
- [4] Zvonimir Tutek i Marko Vrdoljak, *Obične diferencijalne jednadžbe*, Matematički odsjek, PMF, 2019.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu promatrali smo kako diferencijalnim jednadžama i sustavima možemo modelirati razne probleme. Izveli smo nekoliko modela, pronašli njihova rješenja i analizirali stabilnost rješenja. U prvom poglavlju smo definirali obične diferencijalne jednadžbe i sustave te naveli teoreme o egzistenciji, jedinstvenosti i stabilnosti rješenja. U drugom poglavlju smo modelirali i analizirali nekoliko modela korištenjem običnih diferencijalnih jednadžbi, dok smo u trećem poglavlju isto napravili korištenjem sustava diferencijalnih jednadžbi. Modelirali smo probleme društvene, biološke i financijske prirode. Promatrali smo kako eutanazijom i sterilizacijom kontrolirati pse lualice, kako kapital i radna snaga utječu na proizvodnju, vremensko zadržavanje lijeka u krvotoku te promjenu broja zaraženih i osjetljivih pojedinaca za gripu i koleru. Vidjeli smo kako diferencijalne jednadžbe imaju široku primjenu u stvarnom svijetu i da su jako koristan alat za modeliranje promjena varijabli koje su nam od interesa u određenom problemu.

# Summary

In this thesis, we looked at how we can model various problems with differential equations and systems. We performed several models, found their solutions and analyzed the stability of the solutions. In the first chapter, we defined ordinary differential equations and systems, and stated theorems on the existence, uniqueness and stability of solutions. In the second chapter we modeled and analyzed several models using ordinary differential equations, while in the third chapter we did the same using a system of differential equations. We modeled problems of a social, biological and financial nature. We observed how to control stray dogs by euthanasia and sterilization, how capital and labor affect production, the time retention of the drug in the bloodstream, and the change in the number of infected and susceptible individuals for influenza and cholera. We have seen that differential equations have wide application in the real world and that they are a very useful tool for modeling the changes of variables that are of interest to us in a particular problem.



# Životopis

Rođena sam dana 11.02.1998., u Zagrebu, gdje sam završila osnovnu školu Zaprude i II. opću gimnaziju. Nakon završetka srednje škole 2016. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematike, koji sam završila 2021. godine. Iste godine sam upisala diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika. Tijekom cijelog studija sam stjecala radno iskustvo na raznim poslovima. Najvažnije za izdvojiti jest kreiranje sadržaja te rješavanje i pregledavanje matematičkih problema u Photomathu od ožujka 2021. do rujna 2022., nakon čega sam počela raditi kao konzultant za poslovnu inteligenciju i analitičar podataka u Koiosu.