

# Dinamika grabežljivac-plijen populacijskih modela

---

Vila, Matea

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:144887>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Matea Vila

**DINAMIKA GRABEŽLJIVAC-PLIJEN**  
**POPULACIJSKIH MODELA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj rad posvećujem obitelji i prijateljima koji su bili uz mene tijekom studija. Mama i tata, hvala vam za sve. Želim se također zahvaliti mentorici izv. prof. dr. sc. Maji Resman za pomoć u pisanju diplomskog rada i uloženom trudu.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Modeli rasta populacije</b>	<b>3</b>
1.1 Malthusov model rasta populacije . . . . .	3
1.2 Logistički model rasta populacije . . . . .	5
1.3 Ekvilibrij i stabilnost ekvilibrija . . . . .	8
<b>2 Sustavi diferencijalnih jednadžbi prvog reda</b>	<b>15</b>
2.1 Linearni sustavi u $\mathbb{R}^2$ . . . . .	15
2.2 Nelinearni sustavi u $\mathbb{R}^2$ . . . . .	32
<b>3 Grabežljivac - plijen modeli</b>	<b>37</b>
3.1 Lotka - Volterra model . . . . .	37
<b>Bibliografija</b>	<b>50</b>

# Uvod

U ovome radu proučavamo kvalitativno linearne i nelinearne ravninske sustave diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Kroz rad prikazujemo fazne portrete nekih specifičnih sustava (linearnih, grabežljivac-plijen) te opisujemo ponašanje trajektorija rješenja u budućnosti. Prvo analiziramo rast pojedinačne populacije putem eksponencijalnog i logističkog modela. Zatim proširujemo analizu na slučaj dvije populacije (tzv. grabežljivac-plijen modeli) te promatramo kako se trajektorija rješenja ponaša u budućnosti.

U prvom poglavlju opisujemo ponašanje jedne populacije. Uvodimo Malthusov i logistički model rasta populacija. Analiziramo promjene u populaciji kroz vrijeme, definiramo ekvilibrije (ravnotežne točke) populacije i svojstva ekvilibrija. Također, definiramo lokalnu i globalnu stabilnost ekvilibrija te ispitujemo lokalnu i globalnu stabilnost ekvilibrija Malthusovog i logističkog modela.

U drugom poglavlju proučavamo linearne sustave diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Iskazujemo i dokazujemo fundamentalni teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja linearnog sustava. Budući da se u navedenom teoremu u iskazu rješenja koristi eksponencijalna funkcija matrice, uvodimo matričnu 2-normu jer eksponencijalnu funkciju matrice definiramo pomoću konvergentnog reda matrica. Za linearne sustave uvodimo *tok sustava*  $\{\phi_t\}$ , *trajektorije gibanja*, *fazne krivulje* te razne vrste *faznih portreta*. Svođenjem linearnog sustava na Jordanovu formu (zamjenom varijabli danim generaliziranim svojstvenim vektorima) prikazujemo sve moguće fazne portrete linearnog sustava. Klasificiramo različite vrste ekvilibrija (tj. fazne portrete) linearnih sustava na temelju svojstvenih vrijednosti matrice sustava (sedlo, ponor, izvor, centar). Nakon definirane teorije za linearne sustave diferencijalnih jednadžbi, prelazimo na nelinearne sustave diferencijalnih jednadžbi. Iskazujemo fundamentalni teorem lokalne egzistencije i jedinstvenosti rješenja nelinearnih sustava. Uvodimo Hartman-Grobmanov teorem pomoću kojeg primjenjujemo teoriju faznih portreta (odnosno ekvilibrija) linearnih sustava na nelinearne sustave lokalno oko hiperboličkog ekvilibrija. Pomoću linearizacije sustava i Hartman-Grobmanovog teorema dobivamo fazne portrete za nelinearne sustave, te komentiramo slučaj nehiperboličkog ekvilibrija tipa fokusa na kojeg teorem nije primjenjiv.

U zadnjem poglavlju rada promatramo dinamiku dviju populacija kroz kvalitativnu analizu pripadnog  $2 \times 2$  sustava diferencijalnih jednažbi. Proučavamo grabežljivac-plijen (Lotka-Volterra) model:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = dx(t)y(t) - cy(t), \end{cases} \quad (1)$$

koji opisuje interakciju između grabežljivaca i plijena. Populaciju plijena u trenutku  $t$  označavamo s  $x(t)$ , dok populaciju grabežljivaca u trenutku  $t$  označavamo s  $y(t)$ . Lotka-Volterra model (1) je nelinearan sustav diferencijalnih jednažbi. Koristeći Taylorov razvoj oko točke ekvilibrija, lineariziramo Lotka-Volterra model (1) i analiziramo ekvilibrije. Primjenjujući teoriju iz drugog poglavlja, možemo analizirati ponašanje samo za ekvilibrij  $(0, 0)$ , za drugi ekvilibrij  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  ne možemo primijeniti Hartman-Grobmanov teorem jer nisu zadovoljeni određeni uvjeti hiperboličnosti ekvilibrija. Kako bismo analizirali ponašanje drugog ekvilibrija, promatramo prvi integral sustava, te pokazujemo da su sve trajektorije osim ekvilibrija  $(0, 0)$  zatvorene krivulje u faznoj ravnini. Zaključujemo da je ekvilibrij  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  centar Lotka-Volterra modela. Za dokaz ovog teorema uvodimo nove koncepte: *monotonost duž segmenta*, *monotonost duž krivulja rješenja*, *lokalnu transversalu sustava*, te  $\omega$ - ( $\alpha$ -) *granične točke i skupove*, kao i *granične cikluse*, te Poincaré-Bendixsonov teorem. Rad završavamo jednim konkretnim primjerom Lotka-Volterra sustava koji ilustrira periodičnost funkcija veličina plijena i grabežljivaca u vremenu, te objašnjavamo vezu periodičnosti i zatvorenih krivulja u faznom portretu sustava.

# Poglavlje 1

## Modeli rasta populacije

Problem rasta populacija promatrat ćemo matematičkim modeliranjem dugoročnog ponašanja populacija.

### 1.1 Malthusov model rasta populacije

Populacija je grupa jedinki iste vrste koje žive na određenom prostoru i razmnožavaju se. Rast populacije se događa kad stopa rađanja premašuje stopu umiranja. Engleski demograf Thomas Malthus je već 1798. godine u svom djelu "An Essay on the Principle of Population" modelirao rast populacije bez migracija. Malthusov model rasta populacija koristi se za prikazivanje ponašanja populacije kroz vrijeme u izoliranim uvjetima, pretpostavljajući neograničeni rast koji nije realan za mnoge primjere [3, Poglavlje 1].

Malthusov model se temelji na sljedećim pretpostavkama: kontinuirano preklapanje generacija, odsutnost interakcija s drugim vrstama (ili zanemarivanje takvih interakcija), homogena populacija bez dobne strukture. Također, pretpostavlja se da je populacija geografski izolirana te da nema migracija. Model je deterministički, a resursi za rast i reprodukciju nisu ograničeni. Osim toga, pretpostavljaju se konstantne stope rađanja i umiranja jedinki [5, Poglavlje 1].

U izoliranim uvjetima (nema migracija) promjena u veličini populacije  $N$  je broj rođenih umanjen za broj umrlih. To se može zapisati pomoću diferencijske jednadžbe:

$$N_{t+1} - N_t = B_t - D_t, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

gdje je  $N_t$  veličina populacije u trenutku  $t \geq 0$ , a  $B_t$  i  $D_t$  respektivno broj rođenih i umrlih između trenutaka  $t$  i  $t + 1$ .

Želimo ispitati promjene u populaciji kroz vrijeme  $\Delta t$ , gdje je  $\Delta t$  mali vremenski korak.



Jednadžbu (1.1) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} = \frac{B_t}{\Delta t} - \frac{D_t}{\Delta t} = b_t - d_t, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

gdje su  $b_t$  i  $d_t$  stope (tj. trenutne brzine) rađanja i umiranja populacije u trenutku  $t$ . Kako bismo iz diskretne varijable prešli na neprekidnu, u jednadžbi (1.2) pustimo limes kad  $\Delta t \rightarrow 0$ , te dobivamo diferencijalnu jednadžbu rasta populacije:

$$\frac{dN(t)}{dt} = b(t) - d(t), \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Stope rasta  $b(t)$  i  $d(t)$  ovise o veličini populacije  $N(t)$ . Pretpostavimo da su proporcionalne s veličinom populacije:

$$\begin{aligned} b(t) &= \alpha N(t), \\ d(t) &= \beta N(t), \end{aligned}$$

gdje su  $\alpha > 0$  i  $\beta > 0$  respektivno konstantne prosječne stope rađanja i umiranja po jedinki, te predstavljaju postotak broja rođenih i umrlih jedinki u čitavoj populaciji po jedinici vremena.

Zbog pretpostavke o homogenosti,  $\alpha$  i  $\beta$  su konstante. Iz toga slijedi da se jednadžba (1.3) može zapisati na sljedeći način:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha - \beta)N(t), \quad t \geq 0.$$

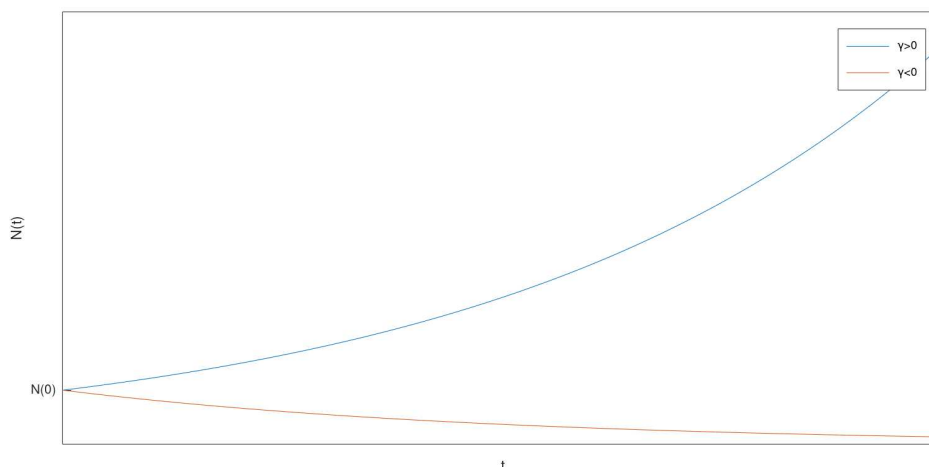
Konstantu  $\alpha - \beta \in \mathbb{R}$  možemo gledati kao stopu rasta po jedinki, te označavamo je s  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Stoga dolazimo do *Malthusove jednadžbe rasta populacije*:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t). \quad (1.5)$$

EksPLICITNIM RJEŠAVANJEM diferencijalne jednadžbe (1.5) dobivamo

$$N(t) = N_0 e^{\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad (1.6)$$

gdje je  $N_0$  početni uvjet, tj. početna veličina populacije u trenutku  $t = 0$ . Iz jednadžbe (1.6) možemo vidjeti dinamiku populacije tijekom vremena; za  $\gamma > 0$  (tj. stopa rasta je veća od stope umiranja) veličina populacije raste eksponencijalno, a za  $\gamma < 0$  (stopa rasta je manja od stope umiranja) populacija eksponencijalno izumire [5, Poglavlje 1].



Slika 1.1: Malthusov model rasta populacije (Izrađeno u programu MATLAB).

## 1.2 Logistički model rasta populacije

Eksponencijalni rast populacije nije realan; u stvarnosti se pojavi period kad je zaliha hrane populacije smanjena. U prvom potpoglavlju smo pretpostavili da je stopa rasta populacije proporcionalna veličini populacije, što ne može biti slučaj u stvarnosti. Zanemarujući mnoge okolnosti koje upravljaju stvarnim rastom populacije, ta naivna pretpostavka ne uzima u obzir ograničenja poput nemogućnosti beskonačnog rasta populacija zbog smanjenja zaliha hrane ili ograničenja životnog prostora. Verhulst je 1838. godine predložio model, nazvan *logistički model*, za rast populacije. Logistički model pretpostavlja ograničene resurse, uključujući maksimalnu veličinu populacije  $K$  koju okolina može poprimiti. Ako populacija naraste iznad  $K$  jedinki, tada će se populacija krenuti smanjivati, a ako padne ispod, tada će se povećavati [9].

Logistički model ima iste pretpostavke kao i Malthusov model, osim pretpostavke o konstantnoj stopi rasta jer su u logističkom modelu resursi ograničeni. Kad je populacija manja od  $K$  ( $N < K$ ), populacija raste prema  $K$ , te se stopa rasta smanjuje kako se približavamo graničnoj vrijednosti  $K$ . Populacija prestaje rasti kada je  $N(t) = K$ , za neki  $t \geq 0$ , zato u tom trenutku treba biti  $N'(t) = 0$ . Kako bismo uvažili prethodno, u ovom modelu pretpostavlja se da je stopa promjene populacije  $\frac{dN(t)}{dt}$  proporcionalna umnošku  $N(t)$  i  $K - N(t)$ . Diferencijalna jednačba koja zadovoljava ove pretpostavke je logistički model rasta populacije poznat i kao *Verhulstov model*:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad t \geq 0, \quad (1.7)$$

gdje je  $K$  maksimalna veličina populacije, a  $\gamma > 0$  neka konstanta [9].

Kada je početni uvjet  $N_0 = 0$  slijedi da je  $\frac{dN(t)}{dt} = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , stoga sustav ostaje u ekvilibriju 0. Analogno vrijedi i za početni uvjet  $N_0 = K$ , sustav ostaje u ekvilibriju jer je  $\frac{dN(t)}{dt} = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Analitičkim rješavanjem diferencijalne jednadžbe (1.7) (integracijom te primjenom metode separacije varijabli uz uvjete na početni uvjet,  $N_0 \neq 0$  i  $N_0 \neq K$ ) dobivamo eksplicitno rješenje logističkog modela:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-\gamma t}}, \quad t \geq 0, \quad (1.8)$$

gdje je  $N_0$  početna veličina populacije u trenutku  $t = 0$  različita od 0 i  $K$  [4, Poglavlje 1.2]. Da bismo ispitali ponašanje Verhulstovog modela populacije u beskonačnosti ( $t \rightarrow +\infty$ ), analiziramo kako se rješenje (1.8) ponaša tijekom vremena ovisno o početnoj veličini populacije  $N_0$ .

Neka je  $0 < N_0 < K$ , tada je  $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) > 0$ . Primijetimo da eksponencijalna funkcija  $e^{-\gamma t}$  teži u 0 kako  $t$  raste prema pozitivnoj beskonačnosti. To znači da će član  $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-\gamma t}$  postati zanemarivo malen. Kada  $t \rightarrow +\infty$  član  $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-\gamma t}$  teži prema nuli, te vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K.$$

Rješenje (1.8) je u ovom slučaju definirano za  $t \in [0, +\infty)$ .

Ako za početni uvjet vrijedi da je  $N_0 < 0$ , tada postoji trenutak  $\hat{t}$  takav da je nazivnik rješenja (1.8) jednak nuli. Kako je  $N_0 < 0$  slijedi da je  $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) < 0$ . Neka je

$$1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-\gamma \hat{t}} = 0. \quad (1.9)$$

Eksplicitnim rješavanjem jednadžbe (1.9) slijedi:

$$\hat{t} = -\frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{N_0}{N_0 - K}\right). \quad (1.10)$$

Jer vrijedi

$$0 < \frac{N_0}{N_0 - K} < 1,$$

slijedi da je  $\hat{t} > 0$ .

Neka je  $\varepsilon > 0$ , uzmimo  $t := \hat{t} - \varepsilon$ . Slijedi da limes  $\lim_{t \rightarrow \hat{t}} N(t)$  možemo napisati na sljedeći način:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-\gamma(\hat{t} - \varepsilon)}}. \quad (1.11)$$

Uvrštavanjem izraza (1.10) za  $\hat{t}$ , tada je limes (1.11) jednak:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{K}{1 - e^{\gamma\varepsilon}} = -\infty.$$

Stoga vrijedi, kada je  $N_0 < 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \hat{t}} N(t) = -\infty.$$

U ovom slučaju rješenje je definirano za  $t \in [0, \hat{t})$ , te nije definirano u desnom rubu jer ima vertikalnu asimptotu u  $\hat{t}$ .

Ako za početni uvjet  $N_0$  vrijedi da je  $N_0 > K$ , tada je  $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) < 0$ . Analizom kao i u prethodnom slučaju dobivamo da je  $\hat{t} < 0$ , što ne može biti slučaj, jer je  $t$  vremenski trenutak. Stoga nazivnik rješenja (1.8) nikada neće biti jednak 0. Kada  $t \rightarrow +\infty$  član  $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-\gamma t}$  teži prema nuli, te i u slučaju kada je  $N_0 > K$  vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K.$$

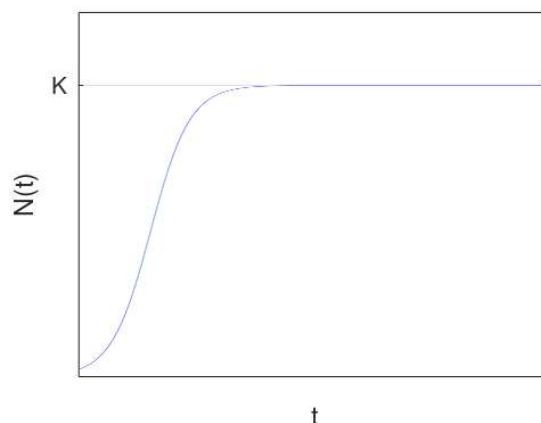
Primjetimo da je rješenje (1.8) u ovom slučaju definirano za  $t \in [0, +\infty)$ . Dakle, kako vrijeme prolazi i ako za početni uvjet  $N_0$  vrijedi da je  $0 < N_0 < K$  ili  $N_0 > K$ , broj jedinki populacije teži vrijednosti  $K$ . To znači da će se populacija stabilizirati u vrijednosti  $K$  i postići ravnotežno stanje. U slučaju kada je početni uvjet  $N_0 < 0$  slijedi da broj jedinki populacije ne teži vrijednosti  $K$  već  $N(t) \rightarrow -\infty$  kako  $t \rightarrow \hat{t}$ , gdje je  $\hat{t}$  definiran sa (1.10) [13].

Iz jednadžbe logističkog modela (1.7) vidimo da u trenutku kad je  $N(t) = K$ , brzina promjene populacije  $\frac{dN(t)}{dt}$  postaje 0, te vidimo da populacija dostiže ekvilibrij (stabilnu točku). Preciznije, iz logističkog modela (1.7), vidimo da je brzina promjene  $\frac{dN(t)}{dt}$  u nekom trenutku  $t_0 \geq 0$  jednaka nuli ako i samo ako je:

$$\gamma N(t_0) \left(1 - \frac{N(t_0)}{K}\right) = 0.$$

Ovo se može postići na dva načina:

1. Kad je vrijednost  $N(t_0)$  u trenutku  $t_0$  jednaka 0, tj. populacija je izumrla;
2. Kad je vrijednost  $N(t_0)$  u trenutku  $t_0$  jednaka  $K$ , tj. populacija je dostigla svoju maksimalnu veličinu i daljnje povećanje više nije moguće [5].



Slika 1.2: Logistički model rasta populacije (Izrađeno u programu MATLAB).

### 1.3 Ekvilibrij i stabilnost ekvilibrija

Jedno od pitanja koje se postavlja u analizi modela rasta populacija jest kojim vrijednostima "konvergiraju" veličine populacija u vremenu, te kako na to utječu početna veličina populacije i ostali parametri modela. U ovom poglavlju definirat ćemo pojam *ekvilibrija* i *stabilnost ekvilibrija*.

**Definicija 1.3.1.** (*Ekvilibrij, [13]*)

Neka je  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Neka je dana diferencijalna jednačina

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t)), \quad t \geq 0. \quad (1.12)$$

*Ekvilibrij (ravnotežno stanje) je vrijednost  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$  za koju je konstantna funkcija  $y(t) = \tilde{y}$ ,  $t \geq 0$ , rješenje diferencijalne jednačine.*

**Teorem 1.3.2.** (*Karakterizacija ekvilibrija, [5]*)

*Funkcija  $y(t) = \tilde{y}$  je ekvilibrij za jednačinu (1.12)  $\Leftrightarrow f(\tilde{y}) = 0$  ( $\tilde{y}$  je nultočka funkcije  $f$  desne strane).*

*Dokaz.*

$\Rightarrow$  Pretpostavimo da je  $y(t) = \tilde{y}$  ekvilibrij. Budući da je  $\tilde{y}$  konstanta znamo da vrijedi

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0, \quad t \geq 0.$$

Po Definiciji 1.3.1 slijedi

$$f(\tilde{y}) = \frac{dy(t)}{dt} = 0, \quad t \geq 0.$$

⇐ Sada prepostavimo da vrijedi  $f(\tilde{y}) = 0$ . Želimo pokazati da je tada funkcija  $y(t) = \tilde{y}$  ekvilibrirana. Očito je  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$  jer je funkcija konstantna. Kako je i  $f(\tilde{y}) = 0$ , slijedi  $\frac{dy(t)}{dt} = f(\tilde{y})$ , tj.  $y(t) = \tilde{y}$  zadovoljava jednadžbu (1.12).

Prema Definiciji 1.3.1  $\tilde{y}$  je ekvilibrirana.

□

## Stabilnost ekvilibrirane

**Definicija 1.3.3.** (Globalna stabilnost ekvilibrirane, [13])

Ekvilibrirana  $\tilde{y}$  je globalno stabilna ako za svaki početni uvjet  $y_0 \in \mathbb{R}$ , rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

zadovoljava

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \tilde{y}.$$

**Definicija 1.3.4.** (Lokalna stabilnost ekvilibrirane, [13])

Ekvilibrirana  $\tilde{y}$  je lokalno stabilna ako postoji otvorena okolina  $I \subseteq \mathbb{R}$  od  $\tilde{y}$  tako da, za svaki  $y_0 \in I$ , rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

zadovoljava

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \tilde{y}.$$

**Teorem 1.3.5.** (Karakterizacija stabilnosti ekvilibrirane, [5])

Neka je dana jednadžba (1.12) te neka je  $\tilde{y}$  lokalni ekvilibrirana. Neka je  $f$  diferencijabilna lokalno oko  $\tilde{y}$ .

Vrijedi sljedeće:

1.  $f'(\tilde{y}) > 0 \Rightarrow \tilde{y}$  nije lokalno stabilna,
2.  $f'(\tilde{y}) < 0 \Rightarrow \tilde{y}$  je lokalno stabilna,

*Dokaz.* Pretpostavimo da je funkcija  $f$  diferencijabilna u ekvilibrirana  $\tilde{y}$ .

1. Pretpostavimo suprotno tj. da je  $f'(\tilde{y}) > 0$  i da je  $\tilde{y}$  lokalno stabilan. Prema Definiciji 1.3.4 to znači da postoji okolina  $I$  oko  $\tilde{y}$  takva da, za svaki  $y_0$  iz  $I$ , rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

zadovoljava  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \tilde{y}$ .

Koristeći definiciju derivacije slijedi:

$$f'(\tilde{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{y} + h) - f(\tilde{y})}{h}.$$

Kako je  $f'(\tilde{y}) > 0$ , postoji  $h_0 > 0$  takav da vrijedi

$$\frac{f(\tilde{y} + h) - f(\tilde{y})}{h} > 0, \quad (1.13)$$

za svaki  $h$  td.  $|h| < h_0$ . Uzmimo dodatno  $h_0$  dovoljno mali takav da je  $\tilde{y} + h \in I$  za svaki  $h$  takav da vrijedi  $|h| < h_0$ , gdje je  $I$  lokalni interval stabilnosti ekvilibrija. Uzmimo proizvoljan  $h$  takav da vrijedi  $|h| < h_0$  i promatramo trajektoriju  $t \mapsto y(t)$  koja u početnom trenutku  $t_0$  prolazi točkom  $\tilde{y} + h$ . Prema pretpostavci slijedi da je  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \tilde{y}$ . Za navedenu trajektoriju stoga postoji  $T > 0$  tako da vrijedi  $|y(t) - \tilde{y}| < h_0$  za svaki  $t > T$ . Uzmemo infimum takvih  $T$ -ova većih od  $t_0$ . Tada, za  $h \neq 0$ , zbog neprekidnosti funkcije  $y$  i jer je  $y(t_0) = \tilde{y} + h$  vrijedi  $y(T) \neq \tilde{y}$ . Ako postoji trenutak  $t_1 > T$  takav da vrijedi  $y(t_1) = \tilde{y}$  slijedi da je  $y(t) = \tilde{y}$ , za svaki  $t > T$  (jer je  $\tilde{y}$  ekvilibrij, pa zauvijek trajektorija ostaje u njemu). U protivnom, zbog neprekidnosti rješenja  $t \mapsto y(t)$ , ili za svaki  $t > T$  vrijedi  $y(t) < \tilde{y}$  ili za svaki  $t > T$  vrijedi  $y(t) > \tilde{y}$ . Ako je  $y(t) > \tilde{y}$  onda postoji  $0 < h < h_0$  takav da vrijedi  $y(t) = \tilde{y} + h$ . Kako je  $\tilde{y}$  ekvilibrij vrijedi  $f(\tilde{y}) = 0$  te je stoga zbog (1.13)  $f(\tilde{y} + h) > 0$ . Stoga je  $f(y(t)) > 0$  za svaki  $t > T$ , pa je derivacija  $y'(t) > 0$  za svaki  $t > T$ . Funkcija  $y(t)$  strogo raste na intervalu  $[T, +\infty)$ . Kako je  $y(t) > \tilde{y}$ , za svaki  $t > T$ , dobivamo kontradikciju s time da  $y(t)$  teži u  $\tilde{y}$ . Stoga  $\tilde{y}$  nije lokalno stabilan ekvilibrij.

U drugom slučaju, ako je  $y(t) < \tilde{y}$ , onda postoji  $-h_0 < h < 0$  takav da vrijedi  $y(t) = \tilde{y} + h$ . Kako je  $\tilde{y}$  ekvilibrij vrijedi  $f(\tilde{y}) = 0$  te je zbog (1.13),  $f(\tilde{y} + h) < 0$ . Stoga je sada  $f(y(t)) < 0$  za svaki  $t > T$ , pa je derivacija  $y'(t) < 0$  za svaki  $t > T$ . Funkcija  $y(t)$  strogo pada na intervalu  $[T, +\infty)$ . Kako je  $y(t) < \tilde{y}$ , za svaki  $t > T$ , dobivamo kontradikciju s time da  $y(t)$  teži u  $\tilde{y}$ . Stoga  $\tilde{y}$  nije lokalno stabilan ekvilibrij. Promotrimo sada slučaj kada postoji trenutak  $t > T$  takav da vrijedi  $y(t) = \tilde{y}$ . Neka je  $t_1 > T$  najmanji takav trenutak. Tada je ili  $y(t) > \tilde{y}$  ili  $y(t) < \tilde{y}$  za sve  $T < t < t_1$ , pa, kao i prije, je ili  $y'(t) > 0$  za sve  $T < t < t_1$ , ili  $y'(t) < 0$  za sve  $T < t < t_1$ .

Kako je  $y'(t) = f(y(t)) = f(\tilde{y}) = 0$ , za sve  $t \geq t_1$ , očito je ili  $y'(t) \leq 0$  za sve  $t > T$  ili je  $y'(t) \geq 0$  za sve  $t > T$ . Jedina razlika s prethodnom diskusijom jest što je  $y$  rastuća/padajuća umjesto strogo rastuća/strogo padajuća, te se zaključak izvodi analogno.

2. Pretpostavimo suprotno tj. da je  $f'(\tilde{y}) < 0$  i da  $\tilde{y}$  nije lokalno stabilan. Kako  $\tilde{y}$  nije lokalno stabilan, slijedi da za svaku otvorenu okolinu  $I \in \mathbb{R}$  od  $\tilde{y}$  postoji  $y_0 \in I$  takav da rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ne zadovoljava  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \tilde{y}$ . Uzmimo  $I = \langle \tilde{y} - h_0, \tilde{y} + h_0 \rangle$  za  $h_0 > 0$ . Uzmimo  $y_0 \in I$  prethodno definiran, te trajektoriju  $y(t)$  koja u početnom trenutku prolazi točkom  $y_0$ . Za tu trajektoriju vrijedi da postoji  $h_1 > 0$  takav da

$$(\forall T > 0)(\exists t > T) \text{ t.d. } |y(t) - \tilde{y}| > h_1. \quad (1.14)$$

Označimo  $h_0 := \min\{h_0, h_1\}$ .

Koristeći definiciju derivacije slijedi:

$$f'(\tilde{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{y} + h) - f(\tilde{y})}{h}.$$

Kako je  $f'(\tilde{y}) < 0$ , postoji  $h_2 > 0$  takav da vrijedi

$$\frac{f(\tilde{y} + h) - f(\tilde{y})}{h} < 0, \quad (1.15)$$

za svaki  $h$  td.  $|h| < h_2$ .

Označimo  $h_0 := \min\{h_0, h_2\}$ , shodno tome relacije (1.14) i (1.15) vrijede za taj  $h_0$ .

Uzmimo gore odabranu otvorenu okolinu  $I$  i promatramo trajektoriju  $t \mapsto y(t)$  koja u početnom trenutku  $t_0$  prolazi točkom  $y_0$ . Prema pretpostavci vrijedi da  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \neq \tilde{y}$ . Za navedenu trajektoriju, za svaki  $T > 0$  postoji  $t > T$  takav da vrijedi

$$|y(t) - \tilde{y}| > h_0. \quad (1.16)$$

No, analizom kao u i prvom dijelu dokaza, vidi se da relacija (1.15) znači: ako smo s početnim uvjetom krenuli u pruzi  $[\tilde{y}, \tilde{y} + h]$  čitava trajektorija ostaje u njemu za svaki  $0 < h < h_0$ . Analogno, ako smo s početnim uvjetom krenuli u pruzi  $\langle \tilde{y} - h, \tilde{y} \rangle$  čitava trajektorija ostaje u njemu za svaki  $0 < h < h_0$ . Time smo dobili kontradikciju sa (1.16). Slijedi da je  $\tilde{y}$  lokalno stabilan ekvilibrij.



□

Globalna stabilnost podrazumijeva da će se sustav težiti u ekvilibrij protokom vremena krenuvši od bilo koje početne vrijednosti populacije. Dok lokalna stabilnost podrazumijeva da će se sustav težiti u ekvilibrij ako je početna vrijednost unutar proizvoljno male okoline  $I$  ekvilibrija  $\tilde{y}$ .

**Primjer 1.3.6.** (Ekvilibriji Malthusovog i logističkog modela, [5])

- *Malthusov model:*

$$f(N) = \gamma N.$$

Prema Teoremu (karakterizaciji ekvilibrija) 1.3.2, ekvilibrij Malthusovog modela (1.5) je  $\tilde{N} = 0$ . Kako je rješenje dano eksplicitno s  $N(t) = N_0 e^{\gamma t}$ ,  $t \geq 0$ , možemo vidjeti da za  $\gamma > 0$  vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty,$$

za svaki početni uvjet  $N(0) = N_0$ .

Za  $\gamma > 0$  ekvilibrij 0 nije globalno stabilan. Naime za  $\gamma > 0$ , vrijedi  $\alpha > \beta$ , tj. stopa rađanja veća je od stope umiranja, što rezultira eksponencijalnim rastom populacije za svaku početnu vrijednost  $N_0$ .

Za  $\gamma < 0$  vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0,$$

za svaki početni uvjet  $N(0) = N_0$ . Stoga će za svaku početnu vrijednost  $N_0$  populacija težiti u 0, što nam govori da  $\tilde{N} = 0$  globalno stabilan ekvilibrij. Kad je  $\gamma < 0$ , vrijedi  $\alpha < \beta$ , tj. stopa umiranja je veća od stope rađanja te populacija izumire.

U Malthusovom modelu ekvilibrij  $\tilde{N} = 0$  je globalno stabilan ako je  $\gamma < 0$ , dok nije globalno stabilan za  $\gamma > 0$ .

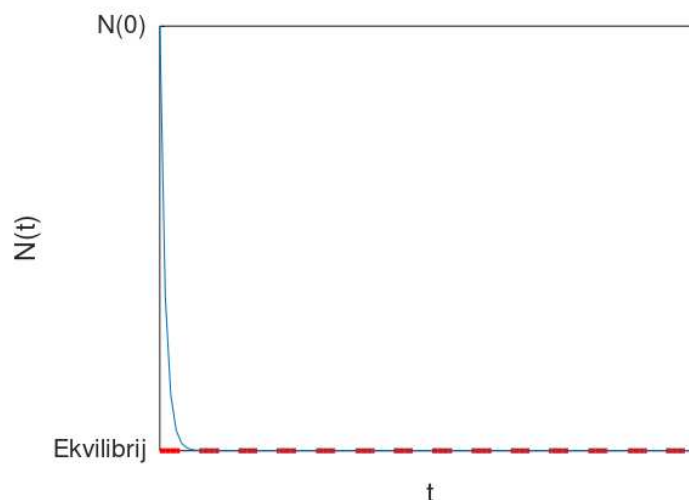
- *Logistički model:*

$$f(N) = \gamma N \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad \gamma > 0.$$

Prema karakterizaciji ekvilibrija 1.3.2 ekvilibriji logističkog modela (1.7) su  $\tilde{N} = 0$  i  $\tilde{N} = K$ . U logističkom modelu (1.7) iz karakterizacije lokalne stabilnosti ekvilibrija 1.3.5 slijedi da je  $\tilde{N} = K$  lokalno stabilan ekvilibrij, dok  $\tilde{N} = 0$  nije lokalno stabilan ekvilibrij.

Na stranici 6 opisano je kako se rješenje logističkog modela ponaša kada  $t$  teži u pozitivnu beskonačnost uz uvjete na početni uvjet  $N_0$ . Iz eksplicitnog rješenja logističkog modela

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-\gamma t}}, \quad t \geq 0,$$



Slika 1.3: Globalno stabilan ekvilibrij Malthusovog modela  $\tilde{N} = 0$  kad je  $\gamma < 0$  (Izrađeno u programu MATLAB).

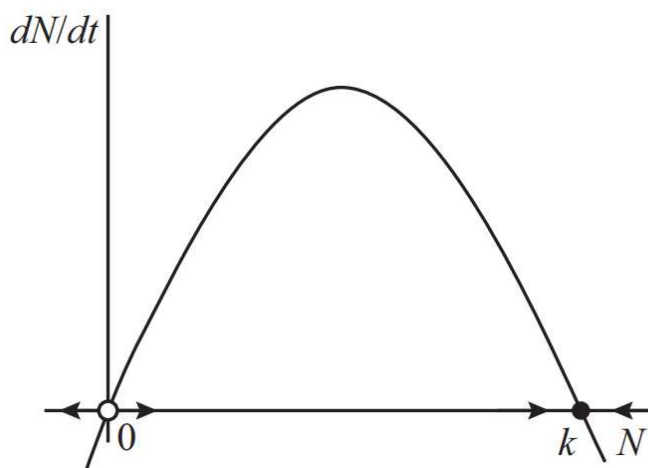
uz  $N_0 > K$  ili  $0 < N_0 < K$ , možemo primjetiti kada  $t \rightarrow +\infty$  da vrijedi sljedeće:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K.$$

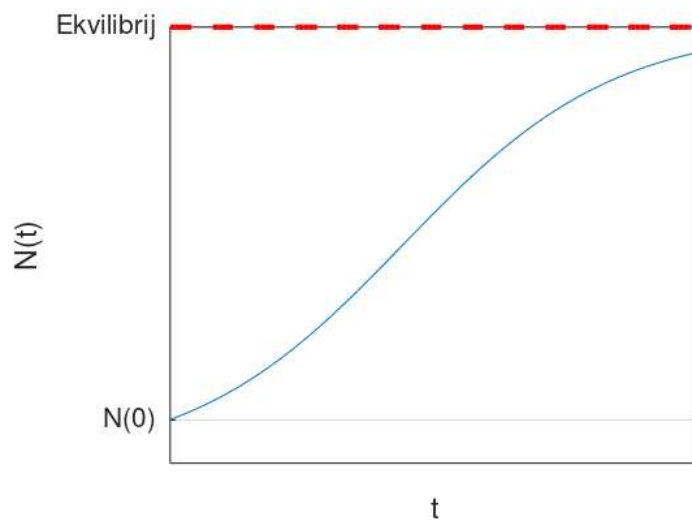
Stoga  $\tilde{N} = 0$  nije lokalno stabilan ekvilibrij jer ako krenemo iz okoline desno od 0 veličina populacije teži u  $K$ , a ne u 0. Na stranicama 6 i 7 pokazali smo da kada za početni uvjet vrijedi  $N_0 < 0$  tada rješenje  $N(t) \rightarrow -\infty$  kako  $t \rightarrow \hat{t}$ , gdje je  $\hat{t}$  definiran sa (1.10). Zbog toga ekvilibrij  $\tilde{N} = K$  nije globalno stabilan ekvilibrij [13].

Važno je upamtiti da je  $\tilde{N} = K$  stabilan samo za  $N > 0$ : ako krenemo s vrijednosti  $N_0 < 0$ , Slika 1.4 pokazuje da će trajektorija biti odbačena prema lijevoj strani i nikada neće doseći  $\tilde{N} = K$ . Slično, ako krenemo s  $N_0 > K$ , trajektorija će se kretati prema lijevoj strani. Stoga,  $\tilde{N} = K$  je lokalno stabilan ekvilibrij, dok  $\tilde{N} = 0$  nije stabilan lokalni ekvilibrij [5]. U primjeru smo promatrali situaciju u kojoj je veličina populacije mogla biti negativna radi karakterizacije lokalne stabilnosti.

Na Slici 1.4 grafički prikazujemo  $\frac{dN}{dt}$  u ovisnosti o  $N$ , čime prikazujemo kako se brzina promjene populacije mijenja s veličinom populacije,  $N$ . U slučaju logističkog modela, desna strana jednadžbe  $\frac{dN}{dt}$  je kvadratni izraz, stoga je graf parabola koja siječe os  $N$  u ekvilibrijima, 0 i  $K$ , gdje je  $\frac{dN}{dt} = 0$  [5].



Slika 1.4: Inverzna parabola logističke jednačbe i ekvilibriji, [5, Figure 1.3].



Slika 1.5: Lokalno stabilan ekvilibrij logističkog modela (Izrađeno u programu MATLAB).

## Poglavlje 2

# Sustavi diferencijalnih jednažbi prvog reda

### 2.1 Linearni sustavi u $\mathbb{R}^2$

Linearni sustav običnih diferencijalnih jednažbi prvog reda u  $\mathbb{R}^2$  zadan je na sljedeći način:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t), \\ y'(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases}$$

gdje su  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  konstante. Sustav možemo napisati i na drugačiji način koristeći matricu koeficijenata  $A$ :

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (2.1)$$

gdje je  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Ishodište je uvijek ekvilibrij linearnog sustava. Da bismo odredili druge ekvilibrije, moramo algebarski riješiti linearni sustav jednažbi [4]:

$$A\mathbf{x} = 0.$$

**Teorem 2.1.1.** (Teorem egzistencije i jedinstvenosti rješenja linearnog sustava, [15, Poglavlje 1])

Neka je  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Tada, za zadani  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ , Cauchyjev problem

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

ima jedinstveno rješenje koje je dano izrazom:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

U iskazu Teorema 2.1.1 pojavljuje se eksponencijalna funkcija matrice, u nastavku objašnjavamo kako se ona definira.

Za  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $e^A$  definiramo kao sumu reda  $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  [17]. Da bismo dokazali da dani red konvergira u prostoru matrica, prvo ćemo definirati matricnu 2-normu.

Definiramo *matricnu 2-normu* matrice  $T$  na prostoru  $M_2(\mathbb{R})$  induciranu vektorskom normom  $\|\cdot\|_2$  kao:

$$\|T\|_2 := \max_{\|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} \|T(\mathbf{x})\|_2,$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , te  $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  euklidska norma vektora. Kažemo da vektorska norma  $\|\cdot\|_2$  *inducira* odgovarajuću matricnu 2-normu [15].

Matrična 2-norma  $\|A\|_2$  se definira kao najveća vrijednost od  $\|A\mathbf{x}\|_2$  na kugli radijusa jedan i sa središtem u  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ . Maksimum iz definicije matricne 2-norme postoji jer je jedinična kugla sa središtem u  $\mathbf{0}$  kompaktan skup, a funkcija  $f := \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definirana s  $f(\mathbf{x}) := \|A\mathbf{x}\|_2$ , neprekidna.

**Definicija 2.1.2.** (Banachov prostor, [2])

Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz unutar tog prostora konvergira. Potpun normirani prostor također se naziva Banachov prostor.

**Propozicija 2.1.3.** ([2]) Svaki konačnodimenzionalni normiran prostor je potpun.

*Dokaz.* Dokaz se može pronaći u [2]. □

Iz Propozicije 2.1.3 slijedi da je  $(M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$  Banachov prostor.

**Teorem 2.1.4.** ([17]) Neka je  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Tada red  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  konvergira u  $(M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ .

U dokazu teorema trebamo sljedeću lemu koju nećemo dokazivati.

**Lema 2.1.5.** (Weierstrassov M-test, [12])

Neka je  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  red u Banachovom prostoru i neka je  $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$  red nenegativnih realnih brojeva  $w_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Neka je ispunjeno sljedeće:

- Red  $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$  majorira red  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ , tj. vrijedi

$$\|x_n\|_2 \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Red  $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$  konvergira u  $\mathbb{R}$ .

Tada je red  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  apsolutno konvergentan i vrijedi sljedeće:

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\|_2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} w_n.$$

**Lema 2.1.6.** ([15])

Neka je  $\|\cdot\|$  euklidska norma na  $\mathbb{R}^2$  i neka je  $\|\cdot\|_2$  matricna 2-norma na  $M_2(\mathbb{R})$  koja je inducirana euklidskom normom. Za matrice  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  te za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vrijede sljedeća svojstva:

1.  $\|A(\mathbf{x})\| \leq \|A\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|$
2.  $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$
3.  $\|A^n\|_2 \leq \|A\|_2^n$ , za  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Dokaz.* ([15])

1. Za  $\mathbf{x} = 0$  lako vidimo da vrijedi Tvrdnja 1. Neka je  $\mathbf{x} \neq 0$ , tada vrijedi  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ . Definiramo jedinični vektor  $\mathbf{y}$  kao  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ . Prema definiciji matricne 2-norme, imamo

$$\|A\|_2 \geq \|A(\mathbf{y})\| = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \|A(\mathbf{x})\|.$$

Dobivamo da vrijedi Tvrdnja 1.

2. Za  $\|\mathbf{x}\| \leq 1$  pomoću Tvrdnje 1. dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \|A(B(\mathbf{x}))\| &\leq \|A\|_2 \cdot \|B(\mathbf{x})\| \\ &\leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\| \\ &\leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2. \end{aligned}$$

Po definiciji matricne 2-norme i svojstva funkcije maksimuma slijedi

$$\|AB\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|AB(\mathbf{x})\| \leq \|A\|_2 \|B\|_2, \text{ stoga slijedi Tvrdnja 2.}$$

3. Matricnu 2-normu  $\|A^n\|_2$  zapišimo na sljedeći način  $\|A \cdot \dots \cdot A\|_2$ , u ovom zapisu se matrica  $A$  pojavljuje  $n$  puta. Sada primjenom Tvrdnje 2., slijedi Tvrdnja 3.

□

*Dokaz Teorema 2.1.4. ([17])*

Neka je  $\|\cdot\|_2$  matična 2-norma na  $M_2(\mathbb{R})$ . Po Lemi 2.1.6 imamo

$$\|A^k\|_2 = \|AA^{k-1}\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^{k-1}\|_2 \leq \dots \leq \|A\|_2^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prema usporednom kriteriju konvergencije redova realnih (nenegativnih) brojeva, zbog činjenice da red  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|_2^k}{k!}$  konvergira slijedi konvergencija reda  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|_2}{k!}$ . U Banachovom prostoru apsolutna konvergencija reda, prema Lemi 2.1.5 (Weierstrassovom M-testu), povlači konvergenciju reda. Po Weierstrassovom M-testu vrijedi da  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  konvergira apsolutno u potpunom prostoru  $(M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ . Tada slijedi da red  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  konvergira u potpunom prostoru  $(M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ .  $\square$

Sada definiramo eksponencijalnu funkciju matrice pomoću konvergentnog reda matrica.

**Definicija 2.1.7.** (Matrična eksponencijalna funkcija, [15])

Neka je  $A \in M_2(\mathbb{R})$  i  $t \in \mathbb{R}$ . Definiramo eksponencijalnu funkciju matrice  $A$  kao konvergentni red

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^m A^m}{m!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (2.4)$$

Ako uvrstimo  $t = 0$  u jednadžbu (2.4), dobivamo:

$$e^0 = I,$$

pri čemu je  $I$  jedinična matrica.

Niz parcijalnih suma  $e^{At}$  majoriziran je sa  $e^A$ , stoga konvergira apsolutno i uniformno za  $|h| < 1$  po Lemi 2.1.5.

U dokazu Teorema 2.1.1 koristit ćemo sljedeću lemu:

**Lema 2.1.8.** (Derivacija eksponencijalne matične funkcije, [15])

Neka je  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Tada vrijedi:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

*Dokaz.* ([15, Poglavlje 1])

Definirajmo funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  s  $f(t) := e^{At}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} = \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) = \\ &= Ae^{At}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zadnja jednakost slijedi iz zamjene limesa, jer niz parcijalnih suma koji definira  $e^{Ah}$  konvergira uniformno za  $|h| < 1$ .  $\square$

*Dokaz Teorema 2.1.1.* ([15])

Stavimo  $\mathbf{x}(t) := e^{At} \mathbf{x}_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Prema prethodnoj Lemi 2.1.8 slijedi:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{At} \mathbf{x}_0) = Ae^{At} \mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Također,  $\mathbf{x}(0) = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ . Stoga je  $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$  rješenje Cauchyjevog problema (2.2). Da bismo vidjeli da je to jedino rješenje, pretpostavimo da je  $\mathbf{x}(t)$  bilo koje rješenje Cauchyjevog problema (2.2) i definirajmo  $\mathbf{y}(t) = e^{-At} \mathbf{x}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Iz prethodne Leme 2.1.8 i činjenice da je  $\mathbf{x}(t)$  rješenje Cauchyjevog problema (2.2) slijedi:

$$\mathbf{y}'(t) = -Ae^{-At} \mathbf{x}(t) + e^{-At} \mathbf{x}'(t) = -Ae^{-At} \mathbf{x}(t) + e^{-At} A\mathbf{x}(t) = 0,$$

za sve  $t \in \mathbb{R}$ , jer  $e^{-At}$  i  $A$  komutiraju. Stoga je  $\mathbf{y}(t)$  konstanta. Ako uzmemo  $t = 0$  tada je  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$ , stoga je

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0.$$

Time je jedinstvenost rješenja dokazana.  $\square$

**Definicija 2.1.9.** (Tok linearnog sustava, [15])

Za sustav (2.1) definiramo tok sustava kao 1-parametarsku (po  $t$ ) familiju  $\{\phi_t : t \in \mathbb{R}^2\}$ , gdje je  $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definirana s  $\phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , gdje je  $t \rightarrow \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  rješenje Cauchyjevog problema za sustav (2.1) s početnom točkom  $\mathbf{x}_0$ .

Vrijednost  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  opisuje položaj čestice u danom sustavu nakon vremena  $t \in \mathbb{R}$  ako u trenutku  $t = 0$  krenemo iz početne točke  $\mathbf{x}_0$ .



**Primjer 2.1.10.** ([4])

Neka je zadan linearni sustav:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.5)$$

sa početnim uvjetom  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ . Jednadžbe u varijablama  $x$  i  $y$  su separirane, pa se primjenom metode separacije varijabli dobije da je rješenje sustava (2.5) funkcija  $t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , gdje je

$$x(t) = x_0 e^{2t}, \quad y(t) = y_0 e^{3t}.$$

Po Definiciji 2.1.9, tok sustava (2.5) definiran je kao:

$$\phi_t(x_0, y_0) = (x_0 e^{2t}, y_0 e^{3t}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Prema [5], *fazna ravnina* je dvodimenzionalna koordinatna ravnina s trajektorijama dinamičkog sustava  $x$  i  $y$  u vremenu  $t$ . Fazna ravnina ima korisnu ulogu u vizualizaciji ponašanja i određivanju stabilnosti sustava. Svako rješenje  $t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , linearnog sustava opravdano je nazvati *gibanjem*. Mijenjanjem varijable  $t$ , točka  $(x(t), y(t))$  opisuje krivulju u  $\mathbb{R}^2$  koja se naziva *trajektorija gibanja*. Dakle, trajektorija rješenja  $t \mapsto (x(t), y(t))$  je krivulja  $C = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  u faznoj  $(x, y)$ -ravnini  $2 \times 2$  sustava

$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y). \end{cases}$$

Tu krivulju nazivamo i *faznom krivuljom*.

*Poljem smjerova* nazivamo dvodimenzionalno vektorsko polje  $(x, y) \mapsto (F(x, y), G(x, y))$ . Po teoremu 2.1.1 znamo da će linearni sustav (2.1) imati jedinstveno rješenje za svaki početni uvjet  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ , tj. da će kroz svaku točku  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  prolaziti jedinstvena fazna krivulja. U svakoj točki  $(x, y)$  fazne krivulje je polje smjerova u  $(x, y)$  tangencijalno na tu krivulju jer je tangenta na krivulju dana brzinom promjene krivulje,  $t \mapsto (x'(t), y'(t))$  [16].

U nastavku promatrat ćemo različite vrste ekvilibrija linearnog sustava (2.1), prema tipu ponašanja trajektorija lokalno oko ekvilibrija, to jest prema tipu faznog portreta. Fazni portreti razlikovat će se obzirom na svojstvene vrijednosti matrice  $A$  [15]. Stoga ćemo se u sljedećem poglavlju prisjetiti *Jordanove forme* matrice.

## Jordanova forma matrice

Jordanova forma predstavlja "najjednostavniji" zapis linearnog operatora. Budući da dijagonalizacija nije uvijek moguća za svaki linearni operator, pokušavamo pronaći bazu

prostora u kojoj je matrica linearnog operatora dijagonalna blok-matrica [15]. Prelazak iz baze u bazu na nivou matričnih zapisa se prevodi u množenje matrice s desna i slijeva regularnom matricom i njezinim inverzom,  $\tilde{A} = R^{-1} \cdot A \cdot R$ . U skladu s tim, govorit ćemo i o Jordanovoj formi matrice, kao najjednostavnijoj formi u koju matrica prijeđe konjugacijom regularnim matricama.

**Teorem 2.1.11.** ([15]) *Ako su svojstvene vrijednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  realne i različite, tada bilo koji skup odgovarajućih svojstvenih vektora  $v_1, v_2, \dots, v_n$  čini bazu za  $\mathbb{R}^n$ . Matrica  $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  je invertibilna i vrijedi  $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ .*

*Dokaz.* Dokaz se može naći u [11]. □

**Definicija 2.1.12.** (Generalizirani svojstveni vektor, [15])

*Neka je  $\lambda$  svojstvena vrijednost matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  algebarske kratnosti  $k$ , gdje je  $1 \leq k \leq n$ . Vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , koji zadovoljava jednadžbu  $(A - \lambda I)^i \mathbf{v} = \mathbf{0}$  za neki  $i = 1, \dots, k$ , naziva se generalizirani svojstveni vektor matrice  $A$  povezan sa svojstvenom vrijednošću  $\lambda$ .*

**Teorem 2.1.13.** ([15])

*Neka je  $A \in M_n(\mathbb{R})$  matrica sa realnim svojstvenim vrijednostima  $\lambda_j, j = 1, \dots, k, k \leq n$ , i kompleksnim svojstvenim vrijednostima (kako kompleksne svojstvene vrijednosti dolaze u parovima, implicitno vrijedi da je  $n+k$  paran)  $\lambda_j = a_j + ib_j$  i  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j, j = k+1, \dots, \frac{n+k}{2}$ . Tada za  $\mathbb{R}^n$  postoji baza  $\{v_1, \dots, v_k, l_{k+1}, u_{k+1}, \dots, l_{\frac{n+k}{2}}, u_{\frac{n+k}{2}}\}$ , gdje su  $v_j, j = 1, \dots, k, w_j = u_j + il_j$  i  $\bar{w}_j = u_j - il_j, j = k+1, \dots, \frac{n+k}{2}$ , generalizirani svojstveni vektori matrice  $A$ . Gdje su  $v_j$  svojstveni vektori realnih svojstvenih vrijednosti  $\lambda_j, j = 1, \dots, k$ , a  $w_j$  i  $\bar{w}_j$  pripadni svojstveni vektori konjugirano kompleksnih svojstvenih vrijednosti  $\lambda_j$  i  $\bar{\lambda}_j, j = k+1, \dots, \frac{n+k}{2}$ . Neka su  $u_j = \text{Re}(w_j)$  i  $l_j = \text{Im}(w_j), j = k+1, \dots, \frac{n+k}{2}$ , tada je matrica*

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & l_{k+1} & u_{k+1} & \cdots & l_{\frac{n+k}{2}} & u_{\frac{n+k}{2}} \end{bmatrix}$$

*invertibilna i vrijedi*

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

*Temeljni Jordanovi blokovi  $B = B_j, j = 1, \dots, r$ , u (2.6) su matrice sljedećeg oblika:*

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

gdje je  $\lambda$  realna svojstvena vrijednost matrice  $A$ , ili sljedećeg oblika:

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D \end{bmatrix},$$

gdje su  $D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  i  $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , gdje je par konjugirano kompleksnih svojstvenih vrijednosti jednak  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ .

*Dokaz.* Dokaz teorema može se pronaći u [6]. □

Posebno, ako se matrica može dijagonalizirati, njezina se Jordanova forma podudara s dijagonalnom formom [7].

U ovom radu radimo s matricama reda 2,  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Postoje tri moguća oblika Jordanove forme za matricu  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , ovisno o tipu svojstvenih vrijednosti:

1. Dvije različite realne svojstvene vrijednosti.

Jordanova forma je oblika:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

gdje su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  dvije različite svojstvene vrijednosti.

2. Jedna dvostruka realna svojstvena vrijednost.

Jordanova forma je oblika:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ili } J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

pri čemu je  $\lambda$  jedna dvostruka svojstvena vrijednost.

3. Par kompleksno konjugiranih svojstvenih vrijednosti.

Jordanova forma je oblika:

$$J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

pri čemu je  $a$  realni, a  $b$  imaginarni dio kompleksne svojstvene vrijednosti [10].

**Napomena 2.1.14.** ([10]) Nećemo promatrati slučaj gdje je svojstvena vrijednost jednaka nuli, jer tada nemamo samo jednu izoliranu singularnu točku u nuli, već tada imamo cijelu os sastavljenu od singularnih točaka. Takve sustave zovemo nedegeneriranim.

## Fazni tok i fazni portret linearnog sustava

U idućim potpoglavljima navest ćemo vrste ekvilibrija i fazne portrete koji su mogući za nedegenerirane linearne sustave. Neka je  $J = P^{-1}AP$  Jordanova matrica matrice  $A$ . Tada vrijedi  $A = PJP^{-1}$ .

Uvedimo promjenu koordinata

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y},$$

gdje je  $P$  matrica generaliziranih svojstvenih vektora matrice  $A$  definirana u Teoremu 2.1.13, da bismo dobili linearni sustav gdje je matrica sustava Jordanova matrica.

Deriviranjem relacije (2.1) dobivamo

$$\mathbf{x}' = P\mathbf{y}'.$$

Linearni sustav (2.1) prelazi u

$$P\mathbf{y}' = A P\mathbf{y},$$

tj.

$$\mathbf{y}' = P^{-1}A P\mathbf{y} = J\mathbf{y}, \quad (2.7)$$

gdje je  $J$  Jordanova forma matrice  $A$  [10]. Rješenje linearnog sustava (2.1) uz početni uvjet  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  dano je s:

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t),$$

gdje je  $\mathbf{y}$  rješenje Cauchjevog problema

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = J\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) = P^{-1}(\mathbf{x}_0). \end{cases}$$

Fazni portret linearnog sustava (2.1) jednostavno se dobiva iz faznog portreta sustava (2.7) linearnom transformacijom  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  [15].

U nastavku promotrit ćemo fazne portrete sustava  $\mathbf{y}' = J\mathbf{y}$ , gdje je  $J$  Jordanova forma matrice  $A$ . Primijetimo da su matrice  $A$  i  $J$  slične matrice, pa imaju iste svojstvene vrijednosti. Time tip faznog portreta (vrste ekvilibrija) ovisi samo o svojstvenim vrijednostima matrice  $A$  [4]. U nastavku prikazujemo vrste faznih portreta u ovisnosti o svojstvenim vrijednostima matrice  $A$ .

### Primjer 2.1.15. ([4], [10], [15])

#### 1. Dvije različite realne svojstvene vrijednosti

Pretpostavimo da matrica  $A$  sustava (2.1) ima dvije različite realne svojstvene vrijednosti,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Jordanova forma matrice  $A$  je

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Konjugirani sustav se u ovom slučaju razdvaja u dvije separirane jednadžbe prvog reda:

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x, \\ y' = \lambda_2 y. \end{cases}$$

Riješimo jednadžbe pojedinačno i dobivamo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) &= \beta e^{\lambda_2 t}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

gdje su  $\alpha = x(0) = x_0$  i  $\beta = y(0) = y_0$  početni uvjeti sustava. Svojeviti vektor koji odgovara  $\lambda_1$  je  $(1, 0)^T$ , a za  $\lambda_2$  je  $(0, 1)^T$ .

Dakle, dobivamo općenito rješenje:

$$\mathbf{x}(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Ovisno o predzancima  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , razlikujemo 3 tipa faznih portreta:

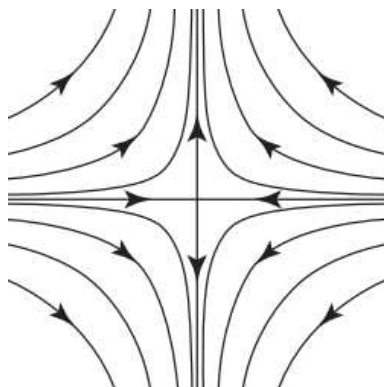
- Sedlo ( $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ )

Budući da je u ovom slučaju  $\lambda_1 < 0$ . Iz oblika rješenja se vidi da, za početni uvjet na osi  $x$  ( $\beta = 0$ ), rješenje je dano s  $\alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Stoga rješenje ostaje na osi  $x$  kad  $t \rightarrow +\infty$  i teži u  $(0, 0)$  kad  $t \rightarrow +\infty$ . Tada se  $x$ -os naziva stabilna linija. Budući da je  $\lambda_2 > 0$ , za početni uvjet na osi  $y$  ( $\alpha = 0$ ), rješenje je dano s  $\beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Stoga rješenje ostaje na osi  $y$  kad  $t \rightarrow +\infty$  i udaljava se od  $(0, 0)$  kad  $t \rightarrow +\infty$ . Tada se  $y$ -os se naziva nestabilna linija. Sva ostala rješenja ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) kad  $t \rightarrow +\infty$  teže vrijednosti  $+\infty$  u smjeru nestabilne linije. Naime, kako  $t$  raste  $\mathbf{x}(t)$  sve više približava  $(0, \beta e^{\lambda_2 t})$ . U ovom slučaju ekvilibrij  $(0, 0)$  nije stabilan.

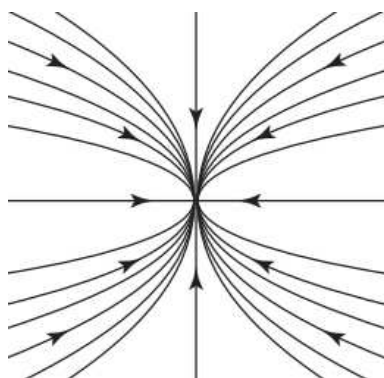
- Ponor - čvor ( $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ )

Kako su obje svojstvene vrijednosti manje od 0 u ovom slučaju rješenja na  $x$ -osi i  $y$ -osi teže prema  $(0, 0)$  kad  $t \rightarrow +\infty$  jer  $e^{\lambda_1 t}$  i  $e^{\lambda_2 t}$  teže u 0 kad  $t \rightarrow +\infty$ . Stoga je ekvilibrij  $(0, 0)$  stabilna točka sustava.

Budući da je  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_1$  je "jača" svojstvena vrijednost, a  $\lambda_2$  "slabija". Stoga se  $x$ -koordinate rješenja brže približavaju 0 od  $y$ -koordinata. Stoga su faze krivulje u  $(0, 0)$  tangencijalne na  $y$ -os. Ako je  $\beta = 0$  trajektorija ostaje na invarijantnoj osi  $x$  i teži prema ishodištu kad  $t \rightarrow +\infty$ . Analogno, ako je  $\alpha = 0$  trajektorija ostaje na invarijantnoj osi  $y$  i teži prema ishodištu kad  $t \rightarrow +\infty$ .



Slika 2.1: Fazni portret - sedlo [4, Figure 3.1].



Slika 2.2: Fazni portret - ponor (čvor) [4, Figure 3.3a].

- Izvor ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ )

U ovom slučaju rješenje i fazni portret je jednak prethodnom jedino što sada sva rješenja "izlaze" iz točke  $(0, 0)$ . Kako su svojstvene vrijednosti veće od 0, rješenja u obliku  $\alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  i rješenja  $\beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  bježe od  $(0, 0)$  kad  $t \rightarrow +\infty$  jer  $e^{\lambda_1 t}$  i  $e^{\lambda_2 t}$  teže u  $+\infty$  kad  $t \rightarrow +\infty$ . Stoga ekvilibrij nije stabilan.

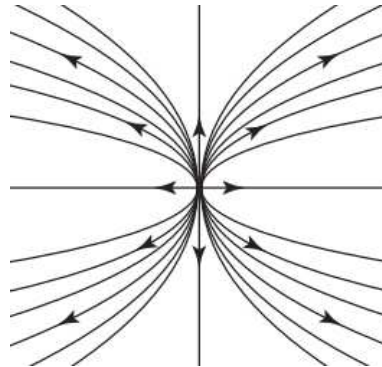
## 2. Jedna dvostruka realna svojstvena vrijednost

U ovom slučaju Jordanova forma matrice  $A$  jednaka je:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ili

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$



Slika 2.3: Fazni portret - izvor, [4, Figure 3.3b].

Svojevredna vrijednost matrice  $A$  u oba slučaja je  $\lambda \neq 0$ , a stabilnost ekvilibrija ovisi o tome je li  $\lambda$  pozitivna ili negativna. U prvom slučaju Jordanove forme svaki ne-nul vektor je svojstveni vektor jer vrijedi  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  za bilo koji vektor  $\mathbf{v}$  iz  $\mathbb{R}^2$ . Sustav je oblika:

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

Rješavajući zasebno homogene diferencijalne jednadžbe za  $x$  i  $y$  dobivamo rješenje oblika:

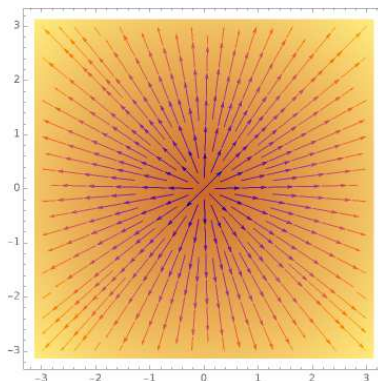
$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

gdje su  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ . Ako je  $\lambda < 0$  onda je ekvilibrij stabilan jer  $e^{\lambda t}$  teži u 0 kad  $t \rightarrow +\infty$ . U suprotnom, za  $\lambda > 0$ , ekvilibrij nije stabilan jer  $e^{\lambda t}$  teži u  $+\infty$  kad  $t \rightarrow +\infty$ .

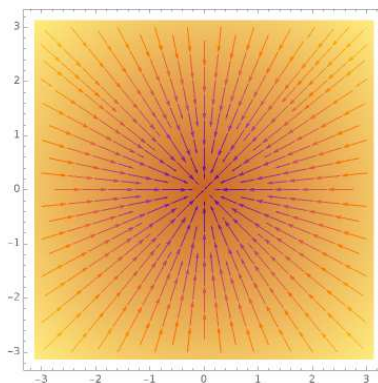
U ovom slučaju vrijedi:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0}{x_0}, \quad \forall t \geq 0.$$

Stoga su trajektorije rješenja polupravci koji se udaljavaju ili približavaju ishodištu. Na Slikama 2.4 i 2.5 možemo vidjeti fazne portrete sustava sa dvostrukom realnom svojstvenom vrijednosti  $\lambda = 2$  i  $\lambda = -2$  respektivno.



Slika 2.4: Fazni portret - jedna dvostruka realna svojstvena vrijednost  $\lambda > 0$  (Izrađeno u programu Wolfram Cloud).



Slika 2.5: Fazni portret - jedna dvostruka realna svojstvena vrijednost  $\lambda < 0$  (Izrađeno u programu Wolfram Cloud).

*U drugom slučaju matrice  $J$  obje svojstvene vrijednosti su također jednake  $\lambda$ , ali sada postoji samo jedan linearno nezavisni svojstveni vektor koji je jednak  $(1, 0)$  (tj. svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$  je dimenzije 1).*

*Sustav se može zapisati kao:*

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y, \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

*Eksplisnim rješavanjem druge diferencijalne jednadžbe u varijabli  $y$ , dobivamo:  $y(t) = \beta e^{\lambda t}$ , gdje je  $\beta = y(0) = y_0$ .*

*Stoga, diferencijalna jednadžba za  $x(t)$  glasi:  $x' = \lambda x + \beta e^{\lambda t}$ .*



Ovo je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda za  $x(t)$ . Računamo rješenje metodom neodređenih koeficijenata i dobivamo:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

gdje su  $\alpha = x_0$  i  $\beta = y_0$ .

Rješenje sustava može se zapisati kao:

$$\mathbf{x}(t) = (\alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\lambda t} t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

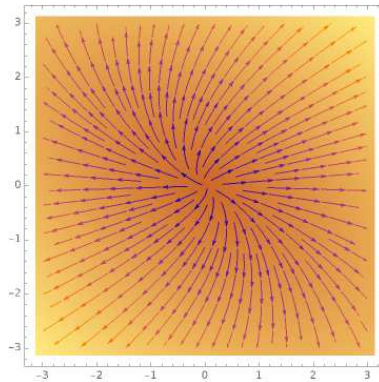
gdje su  $\alpha = x_0$  i  $\beta = y_0$ . Ako je  $\lambda < 0$ , oba člana u rješenju teže prema 0 kad  $t \rightarrow +\infty$ . Za član  $\beta t e^{\lambda t}$  to je neposredna posljedica L'Hôpitalovog pravila. Dakle, sva rješenja teže prema  $(0, 0)$ , kad  $t \rightarrow +\infty$ . Kad je  $\lambda > 0$ , sva rješenja se udaljavaju od  $(0, 0)$ .

U ovom slučaju vrijedi:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\beta}{\alpha + \beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Kad  $t \rightarrow +\infty$  tada  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 0$ .

Ako je  $\lambda > 0$  tada se sve trajektorije približavaju 0 tangencijalnim smjerom koji se u 0 podudara s  $x$ -osi u vremenu  $t \rightarrow +\infty$ . Kad je  $\lambda < 0$  tada se sve trajektorije približavaju 0 tangencijalnim smjerom koji se u 0 podudara s  $x$ -osi u vremenu  $t \rightarrow -\infty$ .



Slika 2.6: Fazni portret - jedna dvostruka realna svojstvena vrijednost  $\lambda > 0$  (Izrađeno u programu Wolfram Cloud).

## 3. Konjugirano kompleksne svojstvene vrijednosti.

## • Centar

Promatramo linearni sustav (2.1) gdje je Jordanova forma matrice  $A$  jednaka :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je  $b \neq 0$ .

Promatramo sustav

$$\begin{cases} x' = -by, \\ y' = bx. \end{cases} \quad (2.9)$$

Uvedimo polarnu zamjenu koordinata:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Gdje je  $\phi \in [0, 2\pi)$ , a  $r \in [0, +\infty)$ .

Deriviramo i dobivamo

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \phi - \phi' r \sin \phi, \\ y' &= r' \sin \phi + \phi' r \cos \phi. \end{aligned}$$

Uvrstimo dobiveno u sustav (2.9) i nakon računanja dobivamo:

$$\begin{cases} r' = 0 \\ \phi' = b. \end{cases} \quad (2.10)$$

Rješenje sustava (2.10) je jednako

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0, \\ \phi(t) &= bt + \phi_0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

gdje su  $r(0) = r_0$  i  $\phi(0) = \phi_0$ .

Iz rješenja vidimo:  $r(t)$  je konstanta  $r_0$  koja se ne mijenja s vremenom  $t$ , stoga se trajektorije rješenja ne udaljavaju i ne približavaju ishodištu. Kut  $\phi$  raste kad  $t \rightarrow +\infty$ , stoga se trajektorije rješenja kreću oko ishodišta.

Rješenje sustava je periodična funkcija sa periodom  $\frac{2\pi}{b}$ . Fazni portret pokazuje da sva rješenja leže na koncentričnim kružnicama s centrom u ishodištu

koordinatnog sustava.

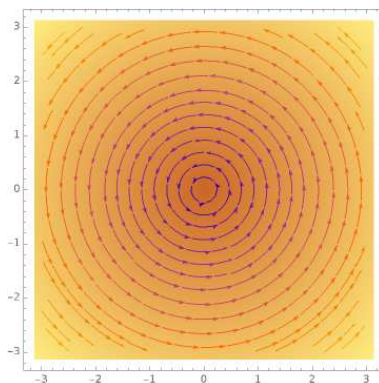
Rješenje u pravokutnim koordinatama glasi:  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \geq 0$ , gdje su

$$x(t) = r_0 \cos(bt + \phi_0),$$

$$y(t) = r_0 \sin(bt + \phi_0).$$

Primjetimo kako je trajektorija rješenja  $(x(t), y(t))$  kružnica sa polumjerom  $r_0$ .

Po Definiciji 1.3.3 ekvilibrij je globalno stabilan ako sustav teži u njega kad  $t \rightarrow +\infty$ . Sustav se u ovom slučaju ne vraća u ekvilibrij, ali se također ni ne udaljava od njega. No ipak, centar smatramo stabilnim ekvilibrijem.



Slika 2.7: Fazni portret - kompleksno konjugirane svojstvene vrijednosti,  $b = 2$  (Izrađeno u programu Wolfram Cloud).

- *Ponor i izvor*

Promatramo linearni sustav (2.1) gdje je Jordanova forma matrice  $A$  jednaka :

$$J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

gdje su  $a, b \neq 0$ .

Promatramo sustav

$$\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = bx + ay. \end{cases} \quad (2.11)$$

Uvedimo polarnu zamjenu koordinata:

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi.$$

Gdje je  $\phi \in [0, 2\pi)$ ,  $a, r \in [0, +\infty)$ .

Deriviramo i dobivamo

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos \phi - \phi' r \sin \phi, \\y' &= r' \sin \phi + \phi' r \cos \phi.\end{aligned}$$

Uvrstimo dobiveno u sustav (2.11), te nakon računanja dobivamo:

$$\begin{cases}r' = ar \\ \phi' = b.\end{cases} \quad (2.12)$$

Rješenje sustava (2.12) je jednako

$$\begin{aligned}r(t) &= r_0 e^{at}, \\ \phi(t) &= bt + \phi_0, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

gdje su  $r(0) = r_0$  i  $\phi(0) = \phi_0$ .

Iz rješenja vidimo: za  $a > 0$ , kad  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{at} \rightarrow +\infty$ , stoga se trajektorije rješenja udaljavaju od ishodišta. Kut  $\phi$  također raste kad  $t \rightarrow +\infty$ , stoga se trajektorije rješenja spiralno odmiču od ishodišta. Za  $a < 0$ , kad  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{at} \rightarrow 0$ , stoga se trajektorije rješenja spiralno namataju prema ishodištu.

Rješenje u pravokutnim koordinatama glasi:  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \geq 0$ , gdje su

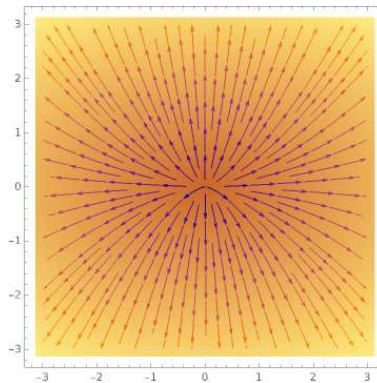
$$\begin{aligned}x(t) &= r_0 e^{at} \cos(bt + \phi_0), \\ y(t) &= r_0 e^{at} \sin(bt + \phi_0).\end{aligned}$$

Kad je  $a < 0$ , ekvilibrij je ponor (stabilan ekvilibrij) jer u tom slučaju član  $e^{at} \rightarrow 0$ , kad  $t \rightarrow +\infty$ . Stoga  $x(t) \rightarrow 0$  i  $y(t) \rightarrow 0$ , kad  $t \rightarrow +\infty$ . Kad je  $a > 0$ , ekvilibrij je izvor (nije stabilan ekvilibrij), u tom slučaju član  $e^{at} \rightarrow +\infty$  kad  $t \rightarrow +\infty$ . Stoga  $x(t) \rightarrow +\infty$  i  $y(t) \rightarrow +\infty$ , kad  $t \rightarrow +\infty$ .

U prethodnom primjeru definirali smo različite fazne portrete ovisno o svojstvenim vrijednostima matrice  $A$ . Kada matrica sustava  $A$  nije u Jordanovoj formi, fazni portret sustava  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  se lako dobiva pomoću faznog portreta sustava  $\mathbf{y}' = J\mathbf{y}$ , pri čemu je  $J = P^{-1}AP$  Jordanova forma matrice  $A$ . Linearnom transformacijom  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  postiže se rotacija koordinatnih vektora u svojstvene vektore matrice  $A$ , te se rotacijom fazni portret sustava kvalitativno ne mijenja [4].

**Primjer 2.1.16.** ([4]) Promatramo sustav iz Primjera 2.1.10,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

Ekvilibrij sustava  $(0, 0)$ . Matrica  $A$  ima dvije realne svojstvene vrijednosti, 2 i 3, veće od 0. Iz prethodnog primjera znamo da je taj ekvilibrij izvor sustava. Fazni portret sustava prikazan je na Slici 2.8.



Slika 2.8: Fazni portret (Izrađeno u programu Wolfram Cloud).

## 2.2 Nelinearni sustavi u $\mathbb{R}^2$

Velik broj nelinearnih sustava diferencijalnih jednadžbi nije moguće riješiti analitički.

U skladu s tim, primjenit ćemo kombinaciju analitičkih i geometrijskih metoda kako bismo dobili uvid u ponašanje rješenja tih diferencijalnih jednadžbi. Jedna od njih je usporedba ponašanja nelinearnog sustava s njegovom linearizacijom. U ovom poglavlju iskazujemo (bez dokaza) Hartman-Grobmanov teorem koji nam daje dovoljne uvjete da bi fazni portret nelinearnog sustava kvalitativno odgovarao faznom portretu njegove linearizacije. To je "dobro" svojstvo, jer smo fazni portret linearnog sustava definirali u prethodnom poglavlju. Zatim u Primjeru 2.2.7 navodimo jedan nelinearni sustav kod kojeg ne dobijemo dobar fazni portret linearizacijom sustava.

U Poglavlju 2.1 možemo vidjeti da svaki linearni sustav

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

ima jedinstveno rješenje kroz svaku točku  $\mathbf{x}_0$  u prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

Rješenje je, po Teoremu 2.1.1, dano izrazom

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0,$$

i definirano je za sve  $t \in \mathbb{R}$ .

U ovom poglavlju započinjemo proučavanje *nelinearnih sustava* diferencijalnih jednadžbi oblika:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.13)$$

gdje je  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pri čemu je  $E$  otvoreni podskup  $\mathbb{R}^2$ . Pretpostavimo da je funkcija  $\mathbf{f}$  klase  $C^1(E)$ . Zanimaju nas teoremi egzistencije i jedinstvenosti rješenja te ponašanje trajektorija u vremenu. U slučaju nelinearnih diferencijalnih jednadžbi (bez dodanih uvjeta

na funkciju  $\mathbf{f}$ ), mogu postojati početni uvjeti za koje ne postoji rješenje koje ih zadovoljava ili nije jedinstveno [4] [15].

**Definicija 2.2.1.** (Diferencijal funkcije, [15])

Neka je  $\|\cdot\|_2$  euklidska norma na  $\mathbb{R}^2$ . Za funkciju  $\mathbf{f} : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $E$  otvoren, kažemo da je diferencijabilna u  $\mathbf{x} \in E$  ako postoji linearni operator  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takav da vrijedi:

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_2 \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{h})\|_2}{\|\mathbf{h}\|_2} = 0.$$

Ako takav linearni operator  $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$  postoji, nazivamo ga diferencijal od  $\mathbf{f}$  u  $\mathbf{x}$ .

**Definicija 2.2.2.** ([15])

Pretpostavimo da je  $\mathbf{f} \in C(E)$ , gdje je  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ . Tada je  $\mathbf{x}(t)$  rješenje diferencijalne jednadžbe (2.13) na intervalu  $I$  ako je  $\mathbf{x}(t)$  diferencijabilna na  $I$  i ako za sve  $t \in I$  vrijedi  $\mathbf{x}(t) \in E$  i  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ .

**Teorem 2.2.3.** (Teorem lokalne egzistencije i jedinstvenosti rješenja, [15, Poglavlje 2])

Neka je  $E$  otvoreni podskup  $\mathbb{R}^2$  koji sadrži  $\mathbf{x}_0$  i pretpostavimo da je  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Tada postoji  $a > 0$  takav da Cauchyjev problem s početnim uvjetom

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

ima jedinstveno diferencijabilno rješenje na intervalu  $[-a, a]$ .

*Dokaz.* Dokaz se može naći u [15, Poglavlje 2]. □

Prema [15] sa  $I(\mathbf{x}_0)$  označavamo maksimalni interval postojanja rješenja  $t \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  Cauchyjevog problema s početnim uvjetom  $\mathbf{x}_0$

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

**Definicija 2.2.4.** (Tok nelinearnog sustava, [15])

Neka je  $E$  otvoreni podskup  $\mathbb{R}^2$  i neka je  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Za  $\mathbf{x}_0 \in E$ , neka je  $t \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  rješenje Cauchyjevog problema (2.2), definirano na maksimalnom intervalu postojanja  $I(\mathbf{x}_0)$ . Tada, za  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ , definiramo:

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) := \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0).$$

1-parametarska familija  $\{\phi_t\}$  definirana na  $E$  naziva se tok diferencijalne jednadžbe (2.13).

Ekvilibrij nelinearnog sustava (2.13) određujemo tako da eksplicitno riješimo [15]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

**Definicija 2.2.5.** (Hiperbolički ekvilibrij, [15])

Točka ekvilibrija  $\tilde{\mathbf{x}}$  naziva se hiperboličkom ako niti jedna od svojstvenih vrijednosti matrice diferencijala  $D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  nema realni dio jednak nuli. Linearni sustav (2.1) s matricom  $A := D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  naziva se linearizacijom nelinearnog sustava (2.13) u točki  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

Sljedeći teorem pokazuje da, pod određenim dovoljnim uvjetima, fazni portret lokalno oko točke ekvilibrija nelinearnog sustava kvalitativno (po vrsti ponašanja - izvor, ponor, sedlo, centar) odgovara faznom portretu njegove linearizacije. Ovi slučajevi se nazivaju "dobri" slučajevi, jer nam omogućavaju da lokalnu analizu nelinearnog sustava oko ekvilibrija svedemo na analizu njegove linearizacije. U idućem teoremu pretpostavit ćemo da je ekvilibrij sustava transliran u ishodište.

**Teorem 2.2.6.** (Hartman - Grobmanov teorem, [15])

Neka je  $E$  otvoreni podskup  $\mathbb{R}^2$  koji sadrži ishodište, funkcija  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , a  $\{\phi_t\}$  tok nelinearnog sustava. Pretpostavimo da je  $\mathbf{0}$  hiperbolički ekvilibrij.

Tada postoji homeomorfizam  $H$  sa otvorenog skupa  $U$  t.d. je  $\mathbf{0} \in U$  u otvoreni skup  $V$  t.d. je  $\mathbf{0} \in V$ , za svaki  $\mathbf{x}_0 \in U$  te  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ , gdje je  $I(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}$  interval koji sadrži  $\mathbf{0}$  takav da vrijedi

$$H \circ \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At} H(\mathbf{x}_0).$$

Hartman-Grobmanov teorem govori nam da homeomorfizam  $H$  preslikava trajektorije nelinearnog sustava blizu ishodišta (tj. ekvilibrija) na trajektorije linearnog sustava blizu ishodišta (tj. ekvilibrija) i pritom čuva parametrizaciju vremena  $t$  [15].

Zaključujemo po Hartman-Grobmanovom teoremu: točka ekvilibrija  $\tilde{\mathbf{x}}$  nelinearnog sustava je ponor ako sve svojstvene vrijednosti matrice  $D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  imaju negativni realni dio; je izvor ako sve svojstvene vrijednosti matrice  $D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  imaju pozitivni realni dio; je sedlo ako je to hiperbolički ekvilibrij i matrica  $D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  ima barem jednu svojstvenu vrijednost s pozitivnim realnim dijelom i barem jednu s negativnim realnim dijelom [15].

Razmotrimo jedan nelinearni sustav koji ne zadovoljava uvjete Hartman-Grobmanovog teorema, odnosno za koji se taj teorem ne može primijeniti. Vidjet ćemo da fazni portret sustava u ishodištu (fokusu) nije jednak faznom portretu linearizacije sustava, gdje je ishodište centar.

**Primjer 2.2.7.** ([4])

Promotrimo sustav:

$$\begin{cases} x' = -y - \varepsilon x(x^2 + y^2), \\ y' = x - \varepsilon y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (2.14)$$

gdje je  $\varepsilon > 0$ .

*Rješenje.* Vidimo da su ovdje svojstvene vrijednosti matrice  $D\mathbf{f}(\mathbf{0})$  jednake  $\pm i$ . Stoga ne možemo koristiti Hartman-Grobmanov teorem, jer svojstvene vrijednosti matrice  $D\mathbf{f}(\mathbf{0})$  imaju realni dio jednak 0. Pokazat ćemo da linearizacijom sustava ne dobijemo kvalitativno isti fazni portret.

Lineariziran sustav jednak je:

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x \end{cases}$$

Linearizirani sustav ima kompleksno konjugirane svojstvene vrijednosti kao i u Primjeru 2.1.15 u slučaju 3, s zadanom vrijednošću  $b = 1$ . Stoga je ekvilibrir (tj. ishodište) centar lineariziranog sustava. Kad izrazimo početni sustav (2.14) u polarnim koordinatama, dobivamo fokus umjesto centra kojeg smo dobili linearizacijom sustava.

Polarni koordinatni sustav početnog sustava (2.14) je:

$$\begin{cases} r' &= -\varepsilon r^3, \\ \theta' &= 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Integriranjem i separacijom varijabli dobivamo rješenje sustava (2.15):

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{2\left(\varepsilon t + \frac{1}{2r_0^2}\right)}},$$

$$\theta(t) = t + \theta_0, \quad t \geq 0,$$

gdje su  $r(0) = r_0$  i  $\theta(0) = \theta_0$ .

Iz druge jednadžbe sustava (2.15) vidimo kako kut  $\theta$  raste linearno s vremenom. Kako je  $\varepsilon > 0$ ,  $r(t)$  teži u 0 kad  $t \rightarrow +\infty$ . Sve točke sustava teže u ekvilibrir kad  $t \rightarrow +\infty$ , tj. spiralno se približavaju ekvilibriru (ishodištu). Također, vidimo da  $\theta(t)$  teži u  $+\infty$  kad  $t \rightarrow +\infty$ . Stoga je ekvilibrir fokus, a ne centar kako smo dobili linearizacijom sustava. ■

**Primjer 2.2.8.** (Primjer ekvilibrirja nelinearnog sustava, [15])

Promatramo sljedeći nelinearni sustav:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Računajući dobijemo  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

Sada možemo analizirati lokalni fazni portret oko svakog ekvilibrirja. Ekvilibrirji zadanog



sustava su  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (1, 0)$  i  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (-1, 0)$ . Oni su rješenja jednadžbe  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ . Uvrštavamo ekvilibrije u matricu diferencijala:

$$D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_1) = D\mathbf{f}(1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_2) = D\mathbf{f}(-1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prema Hartman-Grobmanovom teoremu, možemo reći da se dinamika nelinearnog sustava oko ravnotežnih točaka može aproksimirati linearnim sustavom u blizini tih točaka. Na primjeru ekvilibrija  $(1, 0)$  i  $(-1, 0)$ , možemo izvući sljedeće zaključke:

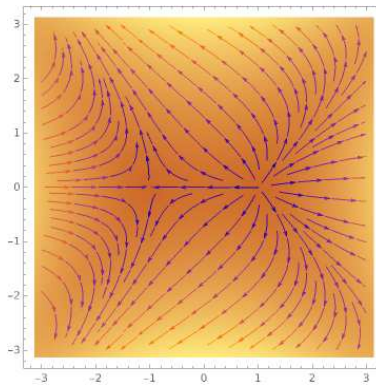
- Ekvilibrij  $(1, 0)$

Imamo jednu dvostruku realnu svojstvenu vrijednost veću od 0. Budući da je svojstvena vrijednost veća od 0, iz Primjera 2.1.15 (1) gdje smo analizirali fazne portrete linearnog sustava, zaključujemo da je  $(1, 0)$  izvor sustava.

- Ekvilibrij  $(-1, 0)$

Imamo jednu svojstvenu vrijednost veću od 0 i jednu manju od 0. Svojstvena vrijednost veća od 0 ukazuje na nestabilnost, dok svojstvena vrijednost manja od 0 ukazuje na stabilnost. Stoga iz Primjera 2.1.15 (1) gdje smo analizirali fazne portrete linearnog sustava, zaključujemo da je ekvilibrij  $(-1, 0)$  sedlo.

Navedeni zaključci proizlaze iz primjene Hartman-Grobmanovog teorema na konkretnim ravnotežnim točkama. Fazni portret sustava možemo vidjeti na Slici 2.9.



Slika 2.9: Fazni portret nelinearnog sustava (Izrađeno u programu Wolfram Cloud).

## Poglavlje 3

# Grabežljivac - plijen modeli

### 3.1 Lotka - Volterra model

#### Povijest modela

Talijanski biolog Umberto D'Ancona proučavao je veličine populacija raznih vrsta riba u Jadranu te je došao do zanimljivog zaključka o povećanju količine grabežljivaca, a ne plijena kao što je očekivao. Talijanski matematičar Vito Volterra 1926. godine podijelio je vrste riba na grabežljivce i plijen, te formulirao *grabežljivac-plijen model* koji ćemo u nastavku detaljnije proučavati. Američki matematičar, fizičar i kemičar Alfred James Lotka je do istog modela došao 1920. godine vezano uz kemijska istraživanja [5] [14].

#### Grabežljivac - plijen modeli

Do sada smo promatrali izolirano ponašanje jedne populacije u vremenu. U nastavku promatramo dinamiku dviju populacija. Prva populacija se sastoji od plijena, veličinu populacije plijena označavat ćemo sa  $t \mapsto x(t)$ ,  $t \geq 0$ . Druga se populacija sastoji od grabežljivaca, veličinu populacije grabežljivaca označavat ćemo sa  $t \mapsto y(t)$ ,  $t \geq 0$ . Pretpostavljamo da se grabežljivci hrane plijenom.

Grabežljivac - plijen modeli baziraju se na ideji da su stope promjene veličine populacija grabežljivaca i plijena funkcije trenutne veličine obaju populacija:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, y)x(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(x, y)y(t), \quad t \geq 0. \quad (3.1b)$$

Vrijeme  $t$  se ne pojavljuje eksplicitno u funkcijama  $f(x, y)$  i  $g(x, y)$ , već se pojavljuje u njima implicitno kroz  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$ . Funkcije  $f(x, y)$  i  $g(x, y)$  označavaju respektivno

stope rasta populacije plijena i grabežljivaca. Pretpostavlja se da su funkcije  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  i  $(x, y) \mapsto g(x, y)$  neprekidno diferencijabilne kao realne funkcije dvije varijable, te vrijedi sljedeće:

$$\frac{df(x, y)}{dy} < 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{dg(x, y)}{dx} > 0, \quad (3.2b)$$

za  $(x, y) \subseteq U \subseteq \mathbf{R}^2$ , gdje je  $U$  otvoren i u njemu leže svi parovi  $(x(t), y(t))$ ,  $t \geq 0$ . Iz jednadžbe (3.2a) možemo vidjeti da rast grabežljivaca izaziva smanjenje funkcije  $f$  te tako negativno utječe na rast plijena, te iz jednadžbe (3.2b) da rast plijena uzrokuje povećanje funkcije  $g$  te time pozitivno utječe na rast grabežljivaca [5].

### Lotka-Volterra populacijski model

*Lotka-Volterra model* je najjednostavniji model grabežljivac-plijen interakcije. Model pretpostavlja linearne stope rasta po jedinki:

$$f(x, y) = a - by, \quad (3.3a)$$

$$g(x, y) = dx - c, \quad (3.3b)$$

gdje su  $a$ ,  $b$ ,  $d$  i  $c$  pozitivne konstante:

- $a$  - stopa rasta plijena, u odsutstvu grabežljivaca,
- $b$  - stopa konzumacije plijena od strane grabežljivaca, pomoću  $b$  mjerimo mortalitet po jedinki plijena uzrokovan lovom grabežljivaca. Stopa konzumacije zapravo predstavlja efikasnost lova grabežljivaca - vjerojatnost kojom se grabežljivac hrani plijenom ukoliko se susretnu,
- $d$  - stopa rasta po jedinki populacije grabežljivaca uzrokovana veličinom populacije plijena; predstavlja efikasnost kojom grabežljivac hranu (plijen) "iskorištava" u svrhu rasta populacije,
- $c$  - stopa izumiranja po jedinki populacije grabežljivaca u izostanku populacije plijena.

Uvrštavanjem funkcija (3.3) u jednadžbe (3.1) dobivamo *Lotka - Volterra populacijski model* interakcije grabežljivca i plijena:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = dx(t)y(t) - cy(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

U jednadžbi (3.4) primjećujemo da plijen, u odsutnosti populacije grabežljivaca ( $y = 0$ ), eksponencijalno raste po konstantnoj stopi  $a$ . Ovaj oblik rasta opisan je Malthusovim modelom, prikazanim na Slici 1.1.

U nedostatku plijena ( $x = 0$ ), veličina populacije grabežljivaca se smanjuje po Malthusovom modelu sa konstantnom stopom  $c$ . Stopa rasta populacije grabežljivaca proporcionalna je veličini populacije plijena.

Naravno, za grabežljivac-plijen model moramo pretpostaviti da svaka jedinka plijena susreće sa svakom jedinkom grabežljivaca. Umnožak veličina populacija  $xy$  zapravo predstavlja broj susreta grabežljivaca i plijena [5].

### Ekvilibriji Lotka-Volterra modela

Primijetimo, zbog prisutnosti dvije populacije, Lotka-Volterra model (3.4) je sustav diferencijalnih jednadžbi reda 2. Također, sustav je nelinearan zbog člana  $bx(t)y(t)$  prve jednadžbe sustava i člana  $dx(t)y(t)$  druge jednadžbe sustava.

Prema [15] nelinearni sustav lineariziramo pomoću Taylorovog teorema. Ako je  $\tilde{\mathbf{x}}$  ekvilibrij sustava vrijedi  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ . Taylorovim razvojem oko točke ekvilibrija  $\tilde{\mathbf{x}}$  slijedi

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}D^2\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) + \dots \quad (3.5)$$

Slijedi da je linearna funkcija  $D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$  prva aproksimacija nelinearne funkcije  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  u okolini ekvilibrija  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

Zapišimo sustav (3.4) u lineariziranom obliku. Neka je sustav (3.4) zapisan općenitije:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f_1(x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = f_2(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (3.6)$$

Neka je  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2$  ekvilibrij sustava (3.4). Neka je  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  diferencijabilna funkcija klase  $C^1$ . U Lotka-Volterra modelu (3.4) je specijalno

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} ax - bxy \\ dxy - cy \end{bmatrix}.$$

Računamo matricu diferencijala

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{bmatrix}.$$

Sustav (3.6) možemo vektorski zapisati kao

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Po Taylorovom razvoju (3.5) slijedi da je linearizacija sustava (3.4) u ekvilibriju  $\tilde{\mathbf{x}}$  linearan sustav:

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u}(t),$$

gdje je  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}$ .

Specijalno, linearizacija Lotka-Volterra modela (3.4) dana je s:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b\tilde{y} & -b\tilde{x} \\ d\tilde{y} & -c + d\tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

gdje su  $u(t) = x(t) - \tilde{x}$ , a  $v(t) = y(t) - \tilde{y}$ .

U radu određujemo dinamiku i ekvilibrije populacija  $x$  i  $y$ .

Ekvilibriji Lotka-Volterra modela su:

1.  $(0, 0)$ ,
2.  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ .

1. Ekvilibrij  $(0, 0)$  je stanje u kojem nema populacije plijena niti populacije grabežljivaca. Za ekvilibrij  $(0, 0)$  dobivamo matricu diferencijala  $D\mathbf{f}(0, 0)$ :

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}.$$

Linearizirani sustav (3.7) u ekvilibriju  $(0, 0)$  je oblika:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

Svojtvene vrijednosti ovog sustava su:  $\lambda_1 = a > 0$  i  $\lambda_2 = -c < 0$ . Iz Primjera 2.1.15 u kojem smo promatrali ekvilibrije linearnog sustava u odnosu na svojtvene vrijednosti sustava, možemo primijetiti kako je ekvilibrij  $(0, 0)$  sedlo, tj. nestabilan ekvilibrij Lotka-Volterra modela.

2. Za ekvilibrij  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  dobivamo matricu diferencijala  $D\mathbf{f}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ :

$$D\mathbf{f}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Linearizirani sustav (3.7) u ekvilibriju  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  je oblika:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

Svojevne vrijednosti ovog sustava su konjugirano kompleksne sa realnim dijelom jednakim 0,  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$ , stoga u ovom slučaju ne možemo koristiti Hartman-Grobmanov teorem. U nastavku radimo kvalitativnu analizu sustava oko tog ekvilibrija [4].

### Stabilnost ekvilibrija $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

U nadolazećoj analizi preko polja smjerova i singularnih krivulja vidjet ćemo da za ekvilibrij  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  imamo lokalno tri mogućnosti: spiralni izvor, spiralni ponor i centar. Također, iz polja smjerova je moguće da u svakoj okolini ekvilibrija imamo tzv. granični ciklus: zatvorenu trajektoriju oko koje se namataju/odmataju spiralne trajektorije.

*Singularne krivulje* su krivulje koje dobijemo kad derivacije  $x'$  i  $y'$  izjednačimo s 0, tj. one krivulje u  $(x, y)$  ravnini duž kojih nema promjene  $x$  koordinate, odnosno  $y$  koordinate rješenja u vremenu.

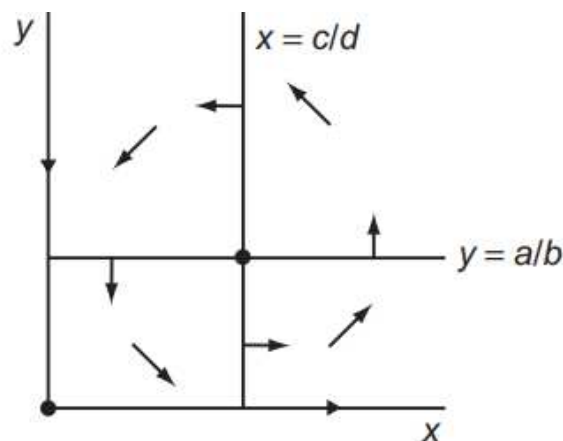
Stoga su singularne krivulje  $x$ -koordinate Lotka-Volterra sustava (3.4) pravci

$$x = 0 \text{ i } y = \frac{a}{b}.$$

Singularne krivulje  $y$ -koordinate Lotka-Volterra sustava (3.4) su pravci

$$x = \frac{c}{d} \text{ i } y = 0.$$

Presjekom singularnih krivulja dobivamo ekvilibrije sustava. Uz pomoć singularnih krivulja crtamo polje smjerova sustava (3.4) koje je prikazano na Slici 3.1 [4].



Slika 3.1: Singularne krivulje Lotka-Volterra sustava i polje smjerova, [4, Figure 11.4].

Kako bismo dokazali da je ekvilibriraj  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  centar sustava, pokušavamo pronaći glatku funkciju  $L(x, y)$  čije su nivo-krivulje zatvorene i takve da krivulje rješenja leže u kompletno jednoj nivo-krivulji. To jest, treba vrijediti:

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) = \frac{dL}{dx}x' + \frac{dL}{dy}y' = 0.$$

Funkciju  $L(x, y)$  koja je konstanta duž krivulja rješenja sustava  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  nazivamo *prvim integralom* tog sustava. Pokušavamo naći takvu funkciju oblika:

$$L(x, y) = F(x) + G(y).$$

Za ovako definiranu funkciju će derivacija biti oblika:

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) = \frac{dF}{dx}x' + \frac{dG}{dy}y' = 0.$$

Iz Lotka-Volterra sustava znamo čemu su jednake derivacije  $x'$  i  $y'$ . Stoga gornja jednakost prelazi u:

$$x \frac{dF}{dx} (a - by) + y \frac{dG}{dy} (-c + dx) = 0.$$

To je ekvivalentno (osim na singularnim krivuljama) s:

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{dx - c} \equiv \frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a}, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (3.8)$$

Kako su  $x$  i  $y$  nezavisne varijable, prethodna relacija (3.8) vrijedi za sve  $x > 0$ ,  $y > 0$  ako i samo ako

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{dx - c} = \frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a} = \text{konst.}$$

Bez smanjenja općenitosti stavimo da je konstanta jednaka 1, te dobivamo sljedeće

$$\frac{dF}{dx} = d - \frac{c}{x},$$

$$\frac{dG}{dy} = b - \frac{a}{y}.$$

Integriranjem dobivamo (do na aditivne konstante)

$$F(x) = dx - c \ln x,$$

$$G(y) = by - a \ln y.$$

Stoga funkcija  $L(x, y)$  koja je konstantna duž krivulja rješenja postoji i jednaka je [4]

$$L(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y. \quad (3.9)$$

Trajektorije rješenja su očito nivo-krivulje funkcije  $L(x, y)$ .

**Teorem 3.1.1.** ([4]) *Svako rješenje Lotka-Volterra sustava s početnim uvjetom u prvom kvadrantu različitim od ekvilibrija je zatvorena krivulja u faznoj  $x - y$  ravnini.*

U dokazu Teorema 3.1.1 koristimo sljedeće propozicije i leme.

**Lema 3.1.2.** *Ekvilibrij  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  je globalni minimum funkcije  $L(x, y)$  definirane sa (3.9).*

*Dokaz.* Računamo parcijalne derivacije funkcije  $L(x, y)$  definirane sa (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} &= d - c \cdot \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} &= b - a \cdot \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Nultočka parcijalnih derivacija je

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right).$$

Još nam preostaje dokazati da je nultočka lokalni minimum. Računamo druge parcijalne derivacije

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x \partial x} &= c \cdot \frac{1}{x^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial y \partial y} &= a \cdot \frac{1}{y^2} > 0. \end{aligned}$$

Hesseova matrica jednaka je

$$H = \begin{bmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Glavne minore matrice  $H$  u točki  $(x^*, y^*)$  su  $\Delta_1 = \frac{d^2}{c} > 0$ ,  $\Delta_2 = \frac{d^2 b^2}{ca} > 0$ , to jest  $H$  je pozitivno definitna. Stoga vidimo da je  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  lokalni minimum funkcije  $L(x, y)$ .

Pokažimo da je i globalni minimum. Po Taylorovom teoremu za svaki  $(x, y)$  iz prvog kvadranta vrijedi:

$$L(x, y) = L(x^*, y^*) + DL(x^*, y^*)(x - x^*, y - y^*) + \frac{1}{2} D^2 L(x_1, y_1)(x - x^*, y - y^*)(x - x^*, y - y^*),$$



gdje je  $(x_1, y_1)$  točka na segmentu između  $(x^*, y^*)$  i  $(x, y)$ . Kako je  $DL(x^*, y^*)(x - x^*, y - y^*) = 0$  jer je  $(x^*, y^*)$  nultočka parcijalnih derivacija, slijedi

$$L(x, y) = L(x^*, y^*) + \frac{1}{2} D^2 L(x_1, y_1)(x - x^*, y - y^*)(x - x^*, y - y^*).$$

Računamo

$$\left\langle D^2 L(x_1, y_1)(x - x^*, y - y^*), (x - x^*, y - y^*) \right\rangle = \frac{c}{x_1^2} (x - x^*)^2 + \frac{a}{y_1^2} (y - y^*)^2 > 0, \quad \forall (x, y). \quad (3.10)$$

Zbog (3.10) za svaki  $(x, y)$  vrijedi da je  $L(x, y) > L(x^*, y^*)$ , jer je član  $D^2 L(x_1, y_1)(x - x^*, y - y^*)(x - x^*, y - y^*) > 0$  za bilo koji  $(x, y) \neq (x^*, y^*)$ . Stoga slijedi da je  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  globalni minimum funkcije  $L(x, y)$ .  $\square$

Neka je  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots \in \mathbb{R}^2$  konačan ili beskonačan niz različitih točaka na krivulji rješenja kroz  $\mathbf{x}_0$ . Kažemo da je niz *monoton duž rješenja* ako za vremenske trenutke  $t_n$ , pri čemu je  $t_n \geq 0$ , takve da vrijedi  $\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_n$ , vrijedi stroga nejednakost  $0 \leq t_n < t_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Neka je  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots \in \mathbb{R}^2$  konačan ili beskonačan niz različitih točaka na segmentu  $I$  u  $\mathbb{R}^2$ . Kažemo da je ovaj niz *monoton duž segmenta  $I$*  ako je  $\mathbf{y}_n$  između  $\mathbf{y}_{n-1}$  i  $\mathbf{y}_{n+1}$  u rastućem/padajućem poretku duž segmenta  $I$ , za sve  $n \geq 1$ .

Ukoliko se niz nalazi u presjeku krivulje rješenja i segmenta, apriori se može dogoditi da je niz monoton duž krivulje rješenja, ali ne i duž segmenta  $I$ , ili obrnuto [4, Poglavljje 10.4]. Propozicija 3.1.4 daje dovoljan uvjet na segment  $I$  pod kojim je niz monoton duž krivulje rješenja ujedno i monoton duž segmenta  $I$ . Taj uvjet je da je  $I$  *transverzala* nelinearnog sustava definirana u Definiciji 3.1.3.

**Definicija 3.1.3.** (*Lokalna transverzala sustava, [4]*)

*Neka je  $\mathbf{f}$  funkcija desne strane sustava  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Pretpostavimo da je  $\mathbf{f}$  klase  $C^1$  na nekom otvorenom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Pretpostavimo da je  $\mathbf{x}_0 \in U$  takva da je  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Neka je  $l(\mathbf{x}_0)$  pravac koji prolazi kroz  $\mathbf{x}_0$  i okomit je na vektor desne strane  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Lokalna transverzala kroz  $\mathbf{x}_0$ , u oznaci  $S \subseteq l(\mathbf{x}_0)$ , je neki otvoreni interval na pravcu  $l(\mathbf{x}_0)$  koji sadrži  $\mathbf{x}_0$ .*

Budući da je  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  neprekidna, te  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  okomit na  $l(\mathbf{x}_0)$ , postoji otvoreni interval  $I \subseteq l(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in I$ , takav da  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  nije tangencijalan na  $l(\mathbf{x}_0)$  za  $\mathbf{x} \in I$ , te  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$  za  $\mathbf{x} \in I$ . Stoga lokalnu transverzalu  $S$  možemo uzeti dovoljno "kratku" ( $S \subseteq I$ ) tako da  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  nije tangencijalan na transverzalu niti za jedan  $\mathbf{x} \in S$  i nije jednak 0. Također, možemo pretpostaviti da u svakoj točki lokalne transverzale  $S$  vektorsko polje "izlazi" iz  $S$  (ili "ulazi" u  $S$ ), stoga rješenja moraju "proći kroz" lokalnu transverzalu, a ne se tangencijalno priljubljavati uz nju. U nastavku  $S$  zovemo lokalnom transverzalom samo ako je uvjet netangencijalnosti ispunjen [4].

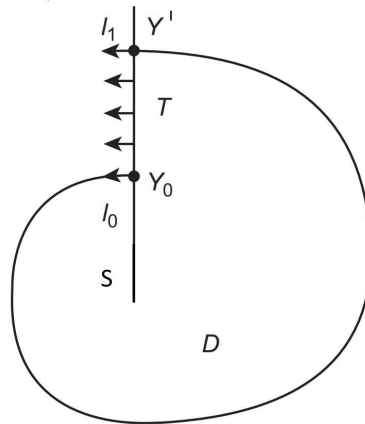
**Propozicija 3.1.4.** ([4])

Neka je  $S$  lokalna transverzala sustava  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , s  $\mathbf{f} \in C^1$ . Neka je  $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , niz različitih točaka na  $S$  koje leže na istoj krivulji rješenja. Neka je  $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  monoton duž rješenja. Tada je također monoton duž  $S$ .

*Dokaz.* Dovoljno je tvrdnju dokazati za tri različite točke  $y_0, y_1$  i  $y_2$  u intervalu  $S$ . Tada tvrdnja induktivno slijedi. Neka  $y_0, y_1, y_2$  leže na krivulji rješenja u rastućem poretku kako raste vrijeme (rastuće duž krivulje rješenja). Neka je  $y'$   $\neq y_2$  vremenski prva točka presjeka transverzale  $S$  i krivulje rješenja nakon  $y_0$  (može biti  $y_1$  ili neka druga). Neka je  $\Sigma$  jednostavna zatvorena krivulja sastavljena od dijela rješenja između  $y_0$  i  $y'$  i segmenta  $T \subset S$  između  $y_0$  i  $y'$ . Neka je  $D$  zatvoreno područje omeđeno sa  $\Sigma$ . Kako je  $S$  lokalna transverzala, polje niti u jednoj točki transverzale ne tangira transverzalu i nije 0, već "prolazi" kroz transverzalu. Kako se  $y'$  u vremenu nalazi iza  $y_0$ , rješenje kroz  $y'$  napušta  $D$  u  $y'$ . Stoga rješenje kroz svaku točku iz  $T$  napušta  $D$  u toj točki, jer je  $T$  lokalna transverzala, te  $\mathbf{f}$  neprekidna (zbog neprekidnosti vektor smjera na  $T$  ne može promijeniti orijentaciju bez da u nekoj točki postane tangencijalan na  $T$ ). Stoga rješenje ne može "ući" u  $D$  iz točke koja se nalazi na  $T$ ; niti može "prijeći" preko rješenja koje povezuje  $y_0$  i  $y'$ , zbog lokalne jedinstvenosti rješenja (Teorem jedinstvenosti rješenja sustava).

Stoga je  $\phi_t(y') \in \mathbb{R}^2 \setminus D$  za sve  $t > 0$ . Kako je  $\phi_t(y') = y_2$  za neki  $t > 0$ , slijedi da  $y_2 \notin D$ . Posebno,  $y_2 \in S \setminus T$ , jer kada bi se nalazio u  $T$ , onda bi se nalazio i u  $D$ . Neka je  $S \setminus T = I_0 \cup I_1$ , gdje su  $I_{0,1}$  dva disjunktna intervala, redom,  $I_0$  s krajnjom točkom  $y_0$ , a  $I_1$  s krajnjom točkom  $y'$ . Pokazujemo da se  $y_2$  ne može nalaziti u  $I_0$ , nego se nalazi u  $I_1$ , što znači da se  $y_0, y', y_2$  nalaze redom u monotonom (rastućem ili padajućem) poretku. Primijetimo da se  $I_1$  ne nalazi u  $D$ , dok  $I_0$  kompletno leži u  $D$ , budući da je  $y'$  prvi presjek rješenja i lokalne transverzale  $S$  (ostali mogući presjeci rješenja i pravca  $l$  na kojem leži transverzala  $S$  vremenski između  $y_0$  i  $y'$  nalaze se na  $l \setminus S$ ). Kako za  $y_2$  vrijedi da  $y_2 \notin D$ , slijedi da je  $y_2 \in I_1$ .

Neka je sad  $y'' \neq y_2$  prva točka presjeka rješenja iz  $y'$  i transverzale  $S$ . Opet  $y''$  može biti  $y_1$ , pa je ovaj korak zadnji, ili nije još  $y_1$ , pa induktivno nastavljamo. Analogno kao u koraku prije dobivamo da se  $y''$  nalazi između  $y'$  i  $y_2$ , pa je poredak monoton  $y', y'', y_2$  (rastući ili padajući). Ako dokaz provedemo induktivno najviše prebrojivo puta (onoliko koliko ima presjeka rješenja i lokalne transverzale  $S$  vremenski između  $y_0$  i  $y_1$ ), dok ne dođemo do  $y_1$ , dolazimo do toga da se čitav konačni ili prebrojivi niz presjeka označen sa  $y', y'', \dots$  nalazi na  $S$  strogo između  $y_0$  i  $y_2$  (u rastućem ili padajućem poretku), pa se i  $y_1$  kao točka akumulacije tog niza nalazi između  $y_0$  i  $y_2$ .  $\square$



Slika 3.2: Lokalna transversala  $S$  i skupovi  $I_0, I_1$ , [4, Figure 10.7].

**Definicija 3.1.5.** ([1]) Dan je sustav  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  na skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  i neka je  $\{\phi_t\}$  tok sustava. Za točku  $\mathbf{x} \in U$ , točku  $\mathbf{y} \in U$  nazivamo njezinom  $\omega$ -graničnom točkom ako postoji niz  $(t_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ , takav da vrijedi sljedeće:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

Za trajektoriju  $\gamma$  sustava  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , kažemo da je  $\mathbf{y}$   $\omega$ -granična točka trajektorije  $\gamma$  ako postoji točka  $\mathbf{x}$  na toj trajektoriji tako da je  $\mathbf{y}$  njezina  $\omega$ -granična točka.

Analogno, za točku  $\mathbf{x} \in U$ , točku  $\mathbf{y} \in U$  nazivamo njezinom  $\alpha$ -graničnom točkom ako postoji niz  $(t_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ , takav da vrijedi sljedeće:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

Za trajektoriju  $\gamma$  sustava  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , kažemo da je  $\mathbf{y}$   $\alpha$ -granična točka trajektorije  $\gamma$ , ako postoji točka  $\mathbf{x}$  na toj trajektoriji tako da je  $\mathbf{y}$  njezina  $\alpha$ -granična točka.

Skup svih  $\omega$ -graničnih točaka ( $\alpha$ -graničnih točaka) za zadanu trajektoriju  $\gamma$  naziva se  $\omega$ -granični skup ( $\alpha$ -granični skup) za trajektoriju  $\gamma$ .

**Definicija 3.1.6.** (Granični ciklus, [4])

Granični ciklus je zatvorena periodička trajektorija  $\gamma$  koja je  $\alpha$ - ili  $\omega$ -granični skup neke trajektorije sustava.

**Teorem 3.1.7.** (Poincaré–Bendixson, [1])

Neka je zadan sustav  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  na  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , gdje je  $\mathbf{f} \in C^1$ . Svaki neprazan, kompaktan,  $\omega$ -granični skup trajektorije sustava, koji sadrži najviše konačno mnogo ekvilibrija, je ili ekvilibrir, ili granični ciklus, ili policiklus koji se sastoji od konačnog broja ekvilibrija i invarijantnih krivulja koje ih spajaju.

**Korolar 3.1.8.** ([4])

Neka je  $L(x, y)$  prvi integral sustava  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  na  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Ako  $L(x, y)$  nije konstantna niti na kojem podskupu od  $U$ , tada u  $U$  nema graničnih ciklusa.

*Dokaz.* Pretpostavimo da postoji granični ciklus  $\gamma$  u  $U$ ; neka je  $c \in \mathbb{R}$  konstantna vrijednost funkcije  $L(x, y)$  na krivulji  $\gamma$ . Po definiciji graničnog ciklusa  $\gamma$ , postoji trajektorija sustava  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  takva da je  $\gamma$  njezin  $\omega$ - ili  $\alpha$ -granični skup (tj. trajektorija  $\mathbf{x}(t)$  se "namata" na  $\gamma$  kad  $t \rightarrow \pm\infty$ ). Tada je  $L(\mathbf{x}(t)) = c$  zbog  $L|_\gamma \equiv c$ , te jer je  $L$  neprekidna funkcija. Uzmimo bilo koju točku  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0)$  te trajektorije. Tada je  $\gamma$   $\omega$ - (ili  $\alpha$ -) granični skup točke  $\mathbf{x}$ . Po Poincaré-Bendixsonovom teoremu može se pokazati (vidjeti Korolar 1. u [4]) da postoji otvorena okolina  $V$  točke  $\mathbf{x}$  takva da za  $\mathbf{y} \in V$  vrijedi  $\omega(\mathbf{y}) = \gamma$ . No tada, istim argumentom, radi namatanja tih trajektorija na  $\gamma$  i neprekidnosti funkcije  $L$ , slijedi da je  $L = c$  na svim tim trajektorijama, za istu konstantu  $c$ . Stoga je  $L = c$  na otvorenom skupu  $V$ , što je kontradikcija.  $\square$

*Dokaz Teorema 3.1.1, [4].* Neka je  $Z = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  ekvilibrir Lotka-Volterra sustava. Razmotrimo rješenje Lotka-Volterra sustava koje prolazi kroz  $W \neq Z$ , gdje se  $W$  nalazi u otvorenom prvom kvadrantu. Iz polja smjerova sustava možemo vidjeti kako se krivulja rješenja s početnim uvjetom  $W$  spiralno vrti oko  $Z$  u vremenu  $t \rightarrow \pm\infty$ , prelazeći beskonačno mnogo puta u vremenu preko svake singularne krivulje. Postoji beskonačan dvostrani niz  $t_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , takav da  $\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots$ , gdje je  $t_0$  je početni trenutak, takav da se  $\phi_{t_n}(W)$  nalazi na  $x = \frac{c}{d}$ . Pritom, točke  $\phi_{t_n}$  ne moraju biti različite. Postoji prebrojiv ili konačni podniz  $t_{p(n)}$  niza  $t_n$  takav da su sve vrijednosti  $\phi_{t_{p(n)}}$  međusobno različite. Ako imamo konačni podniz  $t_{p(n)}$ , tada je putanja oko ekvilibrija zatvorena i dokaz je završen. U suprotnom, pretpostavimo da je podniz  $t_{p(n)}$  prebrojiv. Ako imamo prebrojiv podniz  $t_{p(n)}$ , tj.  $W$  nije na zatvorenoj putanji, točke  $\phi_{t_{p(n)}}(W)$  su monotone duž krivulje rješenja. Iz prethodne Propozicije 3.1.4 znamo da su točke  $\phi_{t_{p(n)}}(W)$  monotone duž pravca  $x = \frac{c}{d}$ . Naime, pokaže se da je pravac  $x = \frac{c}{d}$  lokalna transverzala u smislu Definicije 3.1.3. Lako se provjeri da je duž pravca  $x = \frac{c}{d}$  vektor sustava  $\mathbf{f}\left(\frac{c}{d}, y\right)$  okomit na taj pravac za svaki  $y \in \mathbb{R}$ , te vrijedi uvjet netangencijalnosti.

Skup  $\{\phi_{t_{p(n)}} : n \in \mathbb{N}\}$  leži na  $x = \frac{c}{d}$  i može biti omeđen ili neomeđen skup. Primjetimo da su sve vrijednosti međusobno različite jer smo to prethodno osigurali. Ako je skup omeđen, omeđen i monoton niz konvergira. Sada znamo da imamo namatanje ili odmatanje trajektorija na neki  $\alpha$ - ili  $\omega$ - granični skup. Po Poincaré-Bendixsonovom teoremu 3.1.7 to

može biti granični ciklus ili ekvilibrij  $Z$ . Funkcija  $L$  nije konstanta niti u jednom otvorenom podskupu  $U$  prvog kvadranta jer gradijent nije jednak 0 osim u ekvilibriju  $Z$ . Po Korolaru 3.1.8 nema graničnih ciklusa u prvom kvadrantu, pa vrijedi  $\phi_{t_{p(n)}}(W) \rightarrow Z$  kako  $n \rightarrow +\infty$  ili  $\phi_{t_{p(n)}}(W) \rightarrow Z$  kako  $n \rightarrow -\infty$ . Budući da je  $L$  neprekidna i konstantna duž rješenja koje prolazi kroz  $W$ , to implicira da  $L(W) = L(Z)$ . Ali to je u kontradikciji s globalnom minimalnošću u točki  $Z$ . Ako, s druge strane, skup  $\{\phi_{t_{p(n)}} : n \in \mathbb{N}\}$  nije omeđen, postoji niz  $y_n \rightarrow +\infty$  na  $x = \frac{c}{d}$  na kojem je funkcija  $L$  konstantna, što je u kontradikciji s oblikom funkcije  $L$  iz (3.9). Naime, kad  $y_n \rightarrow +\infty$  i  $x = \frac{c}{d}$ , vrijedi  $L(x, y_n) \rightarrow +\infty$ . Dakle, dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da krivulja kroz  $W$  nije zatvorena. Time je dokaz gotov.  $\square$

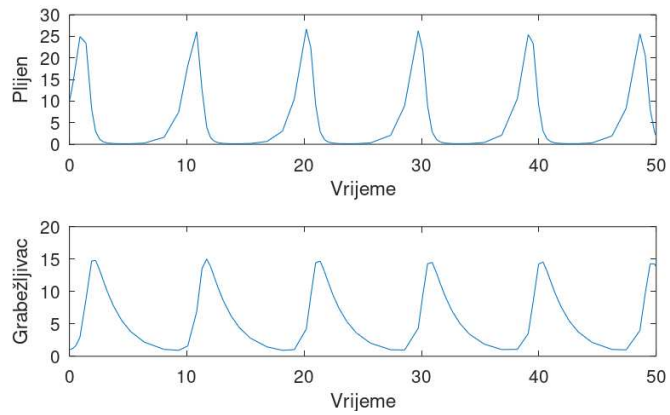
Zbog Teorema 3.1.1 slijedi da su krivulje rješenja sustava (3.4) zatvorene krivulje oko ekvilibrija  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ , te je ekvilibrij  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  centar Lotka-Volterra sustava [4]. Vidjeli smo prije da je ekvilibrij  $(0, 0)$  sedlo. Fazni portret Lotka-Volterra sustava sa zadanim vrijednostima možemo vidjeti na Slici 3.4.

**Primjer 3.1.9.** Promotrimo jedan konkretni nelinearni Lotka-Volterra sustav diferencijalnih jednadžbi

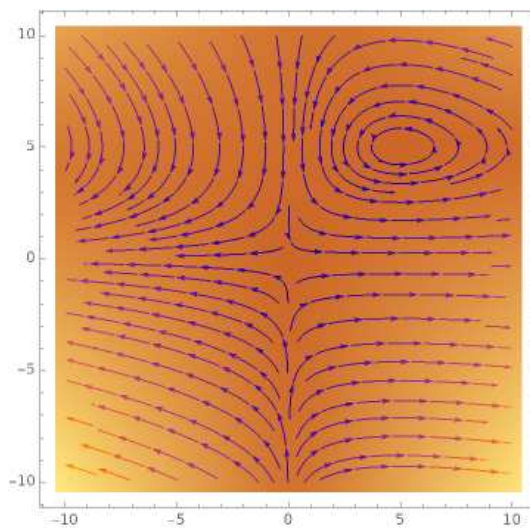
$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 1.5x(t) - 0.3x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = 0.1x(t)y(t) - 0.5y(t), \end{cases} \quad (3.11)$$

sa početnim uvjetima  $x_0 = 10$  i  $y_0 = 1$ .

Ekvilibriji sustava (3.11) su  $(0, 0)$  i  $(5, 5)$ . Zbog prijašnje analize znamo da je  $(0, 0)$  sedlo, a  $(5, 5)$  centar sustava (3.11). Fazni portret prikazan je na Slici 3.4, dok se oscilacije broja jedinki plijena/grabežljivaca kroz vrijeme uočavaju na Slici 3.3. Naime, interakcije između grabežljivca i plijena u Lotka-Volterra modelu rezultiraju oscilacijama u veličini populacija  $t \mapsto x(t)$  plijena odnosno  $t \mapsto y(t)$  grabežljivaca. U faznoj  $x - y$ -ravnini periodičnost tih funkcija se vidi kroz zatvorene trajektorije, tj. periodičke trajektorije po kojima se gibanje ponavlja nakon perioda vremena, pa i su i  $x$  i  $y$  koordinata trajektorije periodične funkcije u vremenu. Na faznom portretu sustava (3.11) možemo primjetiti zatvorene krivulje rješenja oko ekvilibrija  $(5, 5)$ , što je povezano s oscilacijama na Slici 3.3. Kada raste veličina populacije plijena, tada raste veličina populacije grabežljivaca što zatim dovodi do pada veličine populacije plijena. Smanjenje populacije plijena uzrokuje pad u veličini populacije grabežljivaca, što daje mogućnosti populaciji plijena da nastavi rasti, te se ciklus ponavlja [8].



Slika 3.3: Populacije grabežljivca i plijena kroz vrijeme (Izrađeno u programu MATLAB).



Slika 3.4: Fazni portret sustava (3.11) (Izrađeno u programu Wolfram Cloud).

# Bibliografija

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer i J. A. Yorke: *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [2] D. Bakić: *Normirani prostori*. <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-2122.pdf>, pristupljeno 01. kolovoza 2023.
- [3] L. Brčić, D. Pažanin i I. Pažanin: *Stohastički model rasta populacije*. Osječki matematički list 14 , 23-34, 2014.
- [4] R. L. Devaney, M. W. Hirsch i S. Smale: *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press, 2013.
- [5] H. Fort: *Ecological Modelling and Ecophysics, Agricultural and environmental applications*. IOP Publishing, Bristol, 2020.
- [6] M. W. Hirsch i S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [7] K. Horvatić: *Linearna algebra*. Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.
- [8] D. S. Jones, M. J. Plank i B. D. Sleeman: *Differential equations and mathematical biology*. CRC Press, 2009.
- [9] D. Joyce: *The Logistic Population Model*, 2013. <https://www2.clarku.edu/faculty/djoyce/ma121/logistic.pdf>, pristupljeno 01. srpnja 2023.
- [10] L. Korkut i V. Županović: *Diferencijalne jednadžbe i teorija stabilnosti*. Element, 2009.
- [11] F. Lowenthal: *Linear Algebra with Linear Differential Equations*. John Wiley and Sons, 1975.
- [12] S. Mardešić: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*. Školska knjiga, 1974.

- [13] M. Marušić: *Logistički model*. <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mmub/logistic.pdf>, pristupljeno 01. srpnja 2023.
- [14] M. Marušić: *Lotka - Volterrin model*. <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mmub/6-lotka-volterra.pdf>, pristupljeno 01. srpnja 2023.
- [15] L. Perko: *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2001.
- [16] *Predator-prey problemi*. <http://www.mathos.unios.hr/modeli/Lotka.pdf>, pristupljeno 01. kolovoza 2023.
- [17] Zvonimir Tutek i Marko Vrdoljak: *Obične diferencijalne jednadžbe*. Matematički odsjek, PMF, 2019.



# Sažetak

U ovom radu promatramo modele ponašanja populacija u vremenu. Prvo promatramo ponašanje jedne populacije kroz Malthusov i logistički model rasta. Zatim promatramo interakcije dvije populacije pomoću grabežljivac-plijen modela. Radimo kvalitativnu analizu ponašanja trajektorija u vremenu bez eksplicitnog rješavanja jednačbi. Kroz rad proučavamo ekvilibrije linearnih i nelinearnih sustava te pripadajuće fazne portrete. Analizu faznih portreta linearnih sustava radimo s obzirom na svojstvene vrijednosti matrice sustava. Koristimo Hartman-Grobmanov teorem koji povezuje izgled trajektorija nelinearnih sustava i njegove linearizacije u slučaju hiperboličkog ekvilibrija. Objasnili smo da za grabežljivac-plijen (Lotka-Volterra) model postoje dva ekvilibrija, jedan je sedlo, a drugi centar. Na drugi ekvilibrij  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  grabežljivac-plijen modela ne možemo primijeniti Hartman-Grobmanov teorem, nego dokazujemo da su trajektorije rješenja oko ekvilibrija  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  zatvorene. To objašnjava periodično ponašanje populacije grabežljivaca i populacije plijena u vremenu.

# Summary

In this thesis, we consider population behavior models over time. First, we examine the behavior of a single population through the Malthusian and logistic growth models. Next, we consider the interactions of two populations using the predator-prey model. We conduct a qualitative analysis of the system over time without explicitly solving the equations. Throughout the work, we study the equilibria of linear and nonlinear systems, along with their corresponding phase portraits. The analysis of phase portraits of linear systems is based on the eigenvalues of the matrix of the system. We use the Hartman-Grobman theorem, which connects the trajectories of nonlinear systems and their linearizations in the case of hyperbolic equilibrium. We explain that for the predator-prey model, two equilibria exist: one is a saddle, and the other is a center. For the second equilibrium  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  of the predator-prey model, the Hartman-Grobman theorem cannot be applied. We show that around second equilibrium solution trajectories are closed, which explains the periodic behavior of the predator and prey populations over time.

# Životopis

Rođena sam u Osijeku 11.03.2000. Završila sam Matematičku gimnaziju u Osijeku, te zatim 2018. godine upisujem istraživački smjer preddiplomskog sveučilišnog studija Matematike na Prirodoslovnom-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2021. godine. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij na istom fakultetu, smjer Financijska i poslovna matematika. Tijekom diplomskog studija sam krenula raditi studentske poslove u struci.