SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Žulec

KONVERGENCIJE NIZOVA SKUPOVA U METRIČKIM I TOPOLOŠKIM PROSTORIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Mojoj obitelji

Sadržaj

Uvod

U topologiji se često bavimo pojmom konvergencije niza točaka u danim skupovima, kako u metričkim prostorima, tako i u općenitim topološkim prostorima. Uz to, bavimo se i pojmovima vezanim uz nizove i konvergencije nizova, te dokazima tvrdnji koje nam mogu pomoći pri proučavanju konvergencije nizova točaka.

Sljedeći logičan korak bio bi promatrati nizove skupova koji su podskupovi danog metričkog, odnosno topološkog prostora, te uočiti kako bismo mogli definirati konvergenciju takvog niza skupova.

U prvom dijelu ovoga rada iskazat ćemo najbitnije pojmove vezane uz metričke i topološke prostore, te ćemo navesti najbitnije primjere tih pojmova.

U drugom dijelu, prvo ćemo opisati intuiciju koja će nas navesti na definiciju konvergencije niza skupova, a potom ćemo dati nekoliko takvih definicija, uz primjere za svaku definiciju.

U trećem dijelu, promatrat ćemo funkcije definirane na danim metričkim i topološkim prostorima, te kako se ponašaju u danim nizovima skupova.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Osnovni pojmovi vezani uz metričke prostore

Prvo ćemo navesti osnovne pojmove vezane uz nizove i konvergencije nizova u metričkim i topološkim prostorima. [11] [10] [6]

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup. Funkcija $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ jest* ***metrika*** *ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

(M1) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X,$

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X,$

(M3) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X,$

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X.$

Uređeni par (X, d) nazivamo ***metrički prostor****.*

Primjer 1.1.2. *Neka je $X = \mathbb{R}^n$, za neki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$. Definiramo* ***euklidsku metriku*** *d kao preslikavanje koje uređenom paru uređenih n-torki $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pridružuje*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Može se pokazati da je ovako definirana funkcija d metrika na skupu $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Kažemo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X **konvergira** ili **teži** prema točki $x \in X$ ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon).$$

Oznaka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ili $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Teorem 1.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X konvergira prema $x \in X$ ako i samo ako $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.*

Dokaz. Iz definicije limesa slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon).$$

Iz definicije metrike slijedi $d(x_n, x) = |d(x_n, x)|, \forall n \in \mathbb{N}$, tj. da je tvrdnja $d(x_n, x) < \varepsilon$ ekvivalentna sa $|d(x, x_n)| < \varepsilon$.

Dakle, gornji zapis ekvivalentan je sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |d(x_n, x)| < \varepsilon).$$

Ovaj zapis znači upravo da po definiciji limesa vrijedi $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. □

Teorem 1.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X. Ako postoji limes $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ danog niza, on je jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima dva različita limesa, x_1 i x_2. Vrijedi $d(x_1, x_2) > 0$.

Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_1 \Rightarrow d(x_n, x_1) < \varepsilon),$$

kao i

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_2 \Rightarrow d(x_n, x_2) < \varepsilon).$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, mora vrijediti $d(x_n, x_1) < \varepsilon$ te $d(x_n, x_2) < \varepsilon$, iz čega slijedi

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ovo bi trebalo vrijediti za svaki $\varepsilon > 0$, pa tako i za $\varepsilon = \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$. No tada, za svaki $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, dobivamo

$$d(x_1, x_2) < 2 \cdot \frac{1}{3} d(x_1, x_2) = \frac{2}{3} d(x_1, x_2),$$

što zbog $d(x_1, x_2) > 0$ jest kontradikcija. Dakle, limes niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ako postoji, mora biti jedinstven. □

Definicija 1.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$, te $r > 0$. Skup*

$$B(x_0, r) = \{x \in X\colon\ d(x_0, x) < r\},$$

ili riječima, skup svih točaka u X koje su od x_0 udaljene za manje od r, nazivamo ***otvorena kugla*** *sa središtem u x_0 radijusa r, ili r-okolina točke x_0.*

Skup definiran kao

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X\colon\ d(x_0, x) \leq r\},$$

tj. skup svih točaka u X udaljenih od x_0 za najviše r, nazivamo ***zatvorena kugla*** *sa središtem u x_0 radijusa r.*

Definicija 1.1.7. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $S \subseteq X$ jest* ***ograničen*** *ili omeđen ako vrijedi*

$$(\exists x_0 \in X)(\exists r > 0)(A \subseteq B(x_0, r)).$$

Teorem 1.1.8. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$, te $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}_+$ koji teži prema 0. Ako je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X takav da je $x_n \in B(x, r_n), \forall n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da vrijedi $0 < r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, slijedi

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow 0 < r_n < \varepsilon).$$

Isto tako, za $n > n_0$ vrijedi

$$d(x_n, x) < r_n < \varepsilon.$$

Dakle, dobili smo rezultat

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon).$$

Zaključujemo da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

Definicija 1.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $A \subseteq X$ jest* ***otvoren*** *u (X, d) ako vrijedi*

$$(\forall x_0 \in A)(\exists r > 0)(B(x_0, r) \subseteq A),$$

ili riječima, za svaku točku $x_0 \in A$ postoji neka njena r-okolina koja je sadržana u A.

Svaki skup $O \subseteq X$ koji je otvoren u X i sadrži točku x_0 jest ***otvorena okolina*** *točke x_0.*

Skup $A \subseteq X$ je ***zatvoren*** *u (X, d) ako je $X \setminus A$ otvoren u (X, d).*

Kraće ćemo govoriti da je skup A otvoren (ili zatvoren) u X.

Skup svih otvorenih okolina točke x_0 označavat ćemo sa $O(x_0)$.

Teorem 1.1.10. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $A \subseteq X$. Skup A zatvoren je u X ako i samo ako svaki niz u A koji je konvergentan ima limes u A.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je A zatvoren u X, tj. neka je $X \setminus A$ otvoren u X.

Uzmimo konvergentan niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A, čiji limes jest x, te pretpostavimo da je $x \in X \setminus A$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $B(x, r) \subseteq X \setminus A$. No, skup $B(x, r)$ otvorena je okolina točke x, što znači da

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, r)).$$

Drugim riječima, gotovo svi članovi niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, što je niz u A, nalaze se u skupu $B(x, r)$, što je podskup skupa $X \setminus A$. Dobili smo kontradikciju. Dakle, mora vrijediti $x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da svaki konvergentan niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ zadovoljava $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in A$.

Pretpostavimo da A nije zatvoren u X, tj. da $X \setminus A$ nije otvoren u X. Tada postoji $x \in X \setminus A$ takav da za svaki $r > 0$ vrijedi $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Budući da gornja pretpostavka vrijedi za svaki $r > 0$, tada vrijedi i za $\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Durgim riječima, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$.

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A$ koji se nalazi u $\frac{1}{n}$-okolini točke x.

Dobili smo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X takav da je $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 5, slijedi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Dakle, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niz u A koji konvergira prema x stoga mora biti $x \in A$. Dobili smo kontradikciju. Dakle, skup A zatvoren je u X. $\square$

Definicija 1.1.11. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $A \subseteq X$. Definiramo* ***interior*** *skupa A kao skup*

$$Int\, A = \bigcup_{\substack{S \subseteq A \\ S \text{ je otvoren u } X}} S,$$

ili riječima, unija svih podskupova skupa A koji su otvoreni u X.

Definiramo i ***zatvarač*** *skupa A kao skup*

$$Cl\,A = \overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq S \subseteq X \\ S \text{ je zatvoren u } X}} S,$$

ili riječima, presjek svih nadskupova skupa A koji su zatvoreni u X.

Iz definicija interiora i zatvarača slijedi da za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi $\operatorname{Int} A \subseteq A$ te $A \subseteq \overline{A}$.

Teorem 1.1.12. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $A \subseteq X$. Skup Int A otvoren je u X, a skup $\overline{A}$ zatvoren je u X.*

Dokaz. Da bismo dokazali da je $\operatorname{Int} A$ otvoren u X, uzmimo proizvoljnu točku $x \in \operatorname{Int} A$.

Po definiciji interiora, postoji skup $S \subseteq A$ koji je otvoren u X, takav da je $x \in S$.

Budući da je S otvoren u X, postoji $r > 0$ takav da je $B(x, r) \subseteq S$. Po definiciji interiora, vrijedi $S \subseteq \operatorname{Int} A$, stoga vrijedi $B(x, r) \subseteq \operatorname{Int} A$. Dakle, $\operatorname{Int} A$ je otvoren u X.

Da bismo dokazali da je $\overline{A}$ zatvoren u X, tj. da je $X \setminus \overline{A}$ otvoren u X, uzmimo proizvoljnu točku $x \in X \setminus \overline{A}$.

Po definiciji zatvarača, postoji skup $S \subseteq X$, $A \subseteq S$, koji je zatvoren u X, te za koji vrijedi $x \notin S$. Po definiciji zatvarača, mora vrijediti $x \notin \overline{A}$.

Budući da je S zatvoren u X, slijedi da je $X \setminus S$ otvoren u X. Stoga postoji $r > 0$ takav da je $B(x, r) \subseteq X \setminus S$.

Budući da vrijedi $S \supseteq \overline{A}$, mora vrijediti $X \setminus S \cap \overline{A} = \emptyset$. Slijedi $B(x, r) \subseteq X \setminus \overline{A}$. Dakle, $X \setminus \overline{A}$ je zatvoren u X, odnosno $\overline{A}$ je zatvoren u X. □

Zatvarač otvorene kugle ne mora biti istovjetna zatvorena kugla.

Primjer 1.1.13. *Neka je $X = \mathbb{Z}$, te definirajmo $d\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ na način.*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$

Može se pokazati da je d metrika na $\mathbb{Z}$, te se naziva ***diskretna metrika.***

Promotrimo skup $B(0, 1)$. To je skup svih točaka iz $\mathbb{Z}$ udaljenih od 0 *za manje od* 1. *Iz* *definicije diskretne metrike, slijedi da mora vrijediti* $B(0,1) = \{0\}$.

Jedini niz u skupu $\{0\}$ *jest niz* $x_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Njegov limes jest točka* 0. *Dakle, vrijedi* $\overline{B(0,1)} = \{0\}$.

S druge strane, promotrimo skup $\overline{B}(0,1)$. *To je skup svih točaka iz* $\mathbb{Z}$ *udaljenih od* 0 *za najviše* 1.

Teorem 1.1.14. *Neka je* (X,d) *metrički prostor, te* $A, B \subseteq X$ *skupovi takvi da je* $A \subseteq B$, *te je* B *zatvoren u* X. *Tada je* $\overline{A} \subseteq B$. *Iz definicije diskretne metrike, slijedi da mora vrijediti* $\overline{B}(0,1) = \mathbb{Z}$.

Dakle, vrijedi $\overline{B(0,1)} = \overline{B}(0,1)$.

Dokaz. Slijedi iz definicije zatvarača skupa. □

Teorem 1.1.15. *Neka je* (X,d) *metrički prostor,* $A \subseteq X$, *te* $x \in X$. *Tada je* $x \in \overline{A}$ *ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A)(d(x,y) < \varepsilon).$$

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je $x \in \overline{A}$, te pretpostavimo da vrijedi suprotna tvrdnja, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $y \in A$ vrijedi $d(x,y) \geq \varepsilon$.

Iz ovoga slijedi da je skup $B(x,\varepsilon)$ sadržan u $X \setminus A$, odnosno $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Iz ovoga slijedi

$$A \subseteq X \setminus B(x,\varepsilon).$$

Budući da je skup $B(x,\varepsilon)$ otvoren skup u X, skup $X \setminus B(x,\varepsilon)$ jest zatvoren u X, stoga vrijedi

$$\overline{A} \subseteq X \setminus B(x,\varepsilon).$$

Iz ovoga slijedi da za točku $x \in \overline{A}$ mora vrijediti $x \notin B(x,\varepsilon)$, što je kontradikcija.

Zaključujemo da za svaki $\varepsilon > 0$ mora postojati $y \in A$ takav da je $d(x,y) < \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A)(d(x,y) < \varepsilon).$$

Pretpostavimo da vrijedi $x \notin \overline{A}$, odnosno $x \in X \setminus \overline{A}$.

Skup $\overline{A}$ zatvoren je u X, stoga je skup $X \setminus \overline{A}$ otvoren u X. Dakle, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus \overline{A}$. Iz ovog rezultata dobivamo

$$B(x, \varepsilon) \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Budući da po definiciji zatvarača skupa mora vrijediti $A \subseteq \overline{A}$, slijedi

$$B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset.$$

Dobili smo kontradikciju s početnom pretpostavkom. Dakle, mora vrijediti $x \in \overline{A}$. □

Teorem 1.1.16. *Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subseteq X$, te $x \in X$. Tada vrijedi $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz u A koji konvergira prema x.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x \in \overline{A}$. Po definiciji zatvarača skupa A, za svaki skup $S \subseteq X$, koji je zatvoren u X i koji je nadskup skupa A, vrijedi $x \in S$.

Sada, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $y_n \in A$ takav da je $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$.

Dobili smo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 \leq d(x, y_n) < \frac{1}{n},$$

pa po teoremu o sendviču vrijedi $d(x, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, iz čega slijedi $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

Dakle, našli smo niz u A koji konvergira prema x.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A koji konvergira prema x. Po definiciji limesa vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon).$$

Dakle, za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $y \in A$ takav da je $d(x, y) < \varepsilon$. Slijedi $x \in \overline{A}$. □

Definicija 1.1.17. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$, te $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Definiramo **udaljenost točke** x **do skupa** A na način*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \colon y \in A\}.$$

Iz gornje definicije slijedi da za fiksni $x \in X$, fiksni skup A i svaku točku $y \in A$, slijedi

$$d(x, A) \leq d(x, y).$$

Teorem 1.1.18. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$, te $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $y \in A$ takav da vrijedi*

$$d(x, y) < d(x, A) + \varepsilon.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da za svaki $y \in A$ vrijedi

$$d(x, y) \geq d(x, A) + \varepsilon.$$

Izraz $d(x, A) + \varepsilon$ gornja je međa skupa $\{d(x, y) \colon y \in A)\}$, a izraz $d(x, A)$ najmanja je donja međa tog skupa, stoga vrijedi

$$d(x, A) \geq d(x, A) + \varepsilon.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$, slijedi kontradikcija. Dakle, mora postojati $y \in A$ za koji je $d(x, y) < d(x, A) + \varepsilon$. □

Teorem 1.1.19. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x, y \in X$ te $A \subseteq X$. Tada vrijedi*

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A).$$

Dokaz. Za proizvoljni $a \in A$, iz definicije udaljenosti točke i skupa, slijedi

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Iz ove nejednakosti dobivamo

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Budući da je $a \in A$ bio proizvoljan, iz ove tvrdnje slijedi

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A).$$

Iz ovoga konačno slijedi

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A).$$

□

Nadalje, iz definicije udaljenosti skupa i točke slijedi da za $x \in A$ vrijedi $d(x, A) = 0$.

Teorem 1.1.20. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $A \subseteq X$ zatvoren u X. Neka je $x \in X$. Ako vrijedi $d(x, A) = 0$, tada je $x \in A$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $x \notin A$. Tada vrijedi $x \in X \setminus A$. Budući da je skup A zatvoren u X, skup $X \setminus A$ otvoren je u X, stoga postoji $r > 0$ takav da je $B(x, r) \subseteq X \setminus A$.

Dakle, ako za $y \in X$ vrijedi $d(x, y) < r$, tada vrijedi $y \notin A$. Drugim riječima, za $y \in A$ mora vrijediti $d(x, y) \geq r$. Iz ovoga slijedi $d(x, A) \geq r > 0$, što je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti $x \in A$. □

Definicija 1.1.21. *Neka je X neprazan skup, te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u X. Kažemo da je niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***podniz*** *niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako postoji strogo rastući niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{N}$ takav da je $y_n = x_{p_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 1.1.22. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X. Kažemo da je točka x_0* ***gomilište*** *niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako za svaki ε postoji podniz $(x_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ danog niza čiji se svi članovi nalaze u ε-okolini točke x_0.*

Teorem 1.1.23. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $\mathcal{T}$ klasa svih otvorenih skupova u X. Klasa $\mathcal{T}$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(T2) ako je I skup indeksa, te $\{A_k : k \in I\}$ familija skupova takva da je $A_k \in \mathcal{T}, \forall k \in I$, tad je $\bigcup_{k\in I} A_k \in \mathcal{T}$,

(T3) ako su dani skupovi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, tad je $\bigcap_{k=1}^n A_i \in \mathcal{T}$.

Dokaz. (T1) Promotrimo skup $\emptyset$. Htjeli bismo dokazati da vrijedi

$$\forall x \in \emptyset, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq \emptyset,$$

no tvrdnja $x \in \emptyset$ nikada nije točna, stoga je gornja tvrdnja uvijek točna. Dakle, $\emptyset$ je otvoren skup u X, odnosno $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Sada promotrimo skup X. Za bilo koji $x \in X$, vrijedi $B(x, 1) \subseteq X$, stoga je X otvoren skup u X, odnosno $X \in \mathcal{T}$.

(T2) Uzmimo točku $x \in \cup_{k\in I} A_k$. Tada postoji $k \in I$ takav da je $x \in A_k$. Budući da je A_k otvoren skup u X, postoji $r > 0$ takav da je $B(x, r) \subseteq A_k \subseteq \cup_{k\in I} A_k$. Drugim riječima, $\cup_{k\in I} A_k$ je otvoren skup u X, odnosno $\cup_{k\in I} A_k \in \mathcal{T}$.

(T3) Uzmimo točku $x \in \cap_{k=1}^n A_k$. Mora vrijediti $x \in A_k$, $\forall k \in \{1 \ldots, n\}$. Za svaki indeks $k \in \{1 \ldots, n\}$, skup A_k otvoren je u X, stoga postoji $r_k > 0$ takav da je $B(x, r_k) \subseteq A_k$.

Sada uzmimo $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Za svaki indeks $k \in \{1 \ldots, n\}$ vrijedi $B(x, r) \subseteq B(x, r_k) \subseteq A_k$ stoga vrijedi $B(x, r) \subseteq \cap_{k=1}^n A_k$. Dakle, skup $\cap_{k=1}^n A_k$ otvoren je u X, odnosno $\cap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{T}$. □

U iskazu prethodnog teorema nismo koristili metriku. Stoga na temelju njega možemo definirati novi pojam koji neće uključivati metriku – to je topologija. [5] [4] [2]

1.2 Osnovni pojmovi iz topologije

Definicija 1.2.1. *Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{T}$ podskupova skupa X jest* ***topologija*** *na X ako vrijedi:*

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(T2) ako je I skup indeksa, te $\{A_i : i \in I\}$ familija skupova takva da je $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$, tad je $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$,

(T3) ako su dani skupovi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, tad je $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$.

Elementi topologije $\mathcal{T}$ nazivaju se ***otvoreni skupovi*** *u X. Uređeni par $(X, \mathcal{T})$ naziva se* ***topološki prostor****.*

Iz ove definicije slijedi da je svaki metrički prostor (X, d) ujedno i topološki prostor, gdje topologija $\mathcal{T}$ jest klasa svih skupova koji su otvoreni u X.

U tom smislu, kada god promatramo neki metrički prostor, kao i svojstva istog, odmah ga možemo promatrati i kao topološki prostor.

Primjer 1.2.2. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te $\mathcal{T}$ skup svih podskupova skupa $\mathbb{R}$ čiji je komplement najviše prebrojiv, te uključuje i $\emptyset$. Tada je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbb{R}$.*

Naime, zadali smo $\emptyset \in \mathcal{T}$, a komplement skupa $\mathbb{R}$ jest $\emptyset$. Stoga vrijedi $\emptyset$, $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

Nadalje, uzmimo skupove $(A_k)_{k \in K}$ koji su elementi familije $\mathcal{T}$. Ako su svi skupovi prazni, tad je i njihova unija prazan skup. Ako je bar jedan od skupova neprazan, označimo ga A_{k_0}. Za uniju ovih skupova vrijedi $(\cup_{k \in K} A_k)^c = \cap_{k \in K} A_k^c \subseteq A_{k_0}^c$, tj. komplement unije ovih skupova podskup je komplementa unije jednog od tih skupova, što znači da je najviše prebrojiv. Dakle, $\cup_{k \in K} A_k \in \mathcal{T}$.

Na kraju, da bismo dokazali da je presjek konačno mnogo skupova u $\mathcal{T}$ opet sadržan u $\mathcal{T}$, dovoljno je tu tvrdnju dokazati samo za dva skupa, jer ostatak tvrdnje slijedi matematičkom indukcijom.

Neka su $A, B \in \mathcal{T}$. Ako je jedan od skupova A ili B prazan skup (bez smanjenja općenitosti, neka je $A = \emptyset$), tada je $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$.

U suprotnom, vrijedi $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, što znači $|(A \cap B)^c| = |A^c \cup B^c| \leq |A^c| + |B^c|$.

Budući da vrijedi $A, B \in \mathcal{T}$, slijedi da je $(A \cap B)^c$ najviše prebrojiv. Dakle, $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Dakle, $\mathcal{T}$ je topologija na $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X kažemo da* ***konvergira*** *prema točki $x_0 \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu O točke x_0 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, vrijedi $x_n \in O$.*

Oznaka je $x \xrightarrow{n\to\infty} x_0$.

U gornjoj definiciji, otvorena okolina točke x_0 u topološkom prostoru definira se analogno kao u metričkom prostoru, tj. kao skup otvoren u X koji sadrži točku x_0. Familiju svih otvorenih okolina točke x_0 i ovdje označavamo sa $\mathcal{O}(x_0)$.

Limes niza točaka u općenitom topološkom prostoru ne mora biti jedinstven.

Primjer 1.2.4. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$, te uzmimo topologiju $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X\}$.*

Definirajmo niz $x_n = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da su točke $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ limesi danog niza.

Promotrimo točku $x_1 = 1$. Jedine otvorene okoline ove točke jesu $\{1, 2\}$ i X. Za njih obje, svi članovi niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nalaze se u tim okolinama. Po definiciji, točka $x_1 = 1$ jest limes danog niza.

Sada promotrimo točku $x_2 = 2$. Jedine otvorene okoline ove točke također su $\{1, 2\}$ i X. Svi članovi niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nalaze se u objema okolinama. Po definiciji, točka $x_2 = 2$ također je limes danog niza.

Dakle, limes niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije jedinstven.

Definicija 1.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ naziva se* ***baza topologije*** *$\mathcal{T}$ ako je svaki otvoren skup u X prikaziv kao unija nekih skupova iz $\mathcal{B}$.*

Teorem 1.2.6. *Neka je X neprazan skup, te $\mathcal{B}$ familija podskupova skupa X. Tada je postojanje topologije $\mathcal{T}$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza ekvivalentno s tvrdnjama:*

(B1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$,

(B2) za svaka dva skupa $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te za svaku točku $x \in B_1 \cap B_2$ postoji skup $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da vrijedi $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da postoji topologija $\mathcal{T}$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Mora vrijediti $X \in \mathcal{T}$, postoje skupovi $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$, takvi da je $\cup_{i \in I} B_i = X$, iz čega slijedi (B1).

Ao su $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, tada po definiciji topologije vrijedi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Stoga skup $B_1 \cap B_2$ mora biti unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}$. Stoga, za proizvoljnu točku $x \in B_1 \cap B_2$, postoji skup $B_3 \in \mathcal{B}$, $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, takav da je $x \in B_3$. Slijedi (B2).

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova skupa X koja zadovoljava (B1) i (B2). Definirajmo familiju $\mathcal{T}$ koja se sastoji od svih mogućih unija elemenata iz $\mathcal{B}$.

Iz definicije familije $\mathcal{T}$ slijedi $\emptyset \in \mathcal{T}$ te da je familija $\mathcal{T}$ zatvorena na proizvoljne unije.

Iz svojstva (B1) slijedi da je $X \in \mathcal{T}$.

Da bismo dokazali da je familija $\mathcal{T}$ zatvorena na konačne presjeke, dovoljno je promotriti dva skupa $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Svaki od tih skupova prikaziv je kao unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}$. Stoga za proizvoljnu točku $x \in U_1 \cap U_2$ postoje skupovi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da vrijedi $x \in B_1 \subseteq U_1$ te $x \in B_2 \subseteq U_2$.

Iz svojstva (B2) slijedi da postoji skup $B_3 \in \mathcal{B}$ za koji vrijedi

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2.$$

Dakle, skup $U_1 \cap U_2$ prikaziv je kao unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}$.

Slijedi da je $\mathcal{T}$ topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. □

Može se pokazati da je topologija koju smo definirali u gornjem dokazu jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Definicija 1.2.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$.* ***Relativna topologija*** *na skupu Y (određena topologijom $\mathcal{T}$) jest familija*

$$\mathcal{S} = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}.$$

Teorem 1.2.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Relativna topologija na Y jest topologija na Y.*

Dokaz. (T1) Vrijedi $\emptyset \in \mathcal{T}$, stoga mora vrijediti $Y \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{S}$.

Vrijedi $X \in \mathcal{T}$, a budući da je $Y \subseteq X$, mora vrijediti $Y \cap X = Y \in \mathcal{S}$.

(T2) Neka su $V_i \in \mathcal{S},\ i \in I$. Tada postoje skupovi $U_i \in \mathcal{T},\ i \in I$, takvi da je

$$V_i = Y \cap U_i, \quad \forall i \in I.$$

Vrijedi

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (Y \cap U_i) = Y \cap \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Dakle, $\cup_{i \in I} V_i$ jest presjek skupa Y i elementa iz $\mathcal{T}$, iz čega slijedi $\cup_{i \in I} V_i \in \mathcal{S}$.

(T3) Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Tada postoje skupovi $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, takvi da je

$$V_1 = Y \cap U_1, \quad V_2 = Y \cap U_2.$$

Vrijedi

$$V_1 \cap V_2 = (Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) = Y \cap (U_1 \cap U_2).$$

Dakle, $V_1 \cap V_2$ jest presjek skupa Y i elementa iz $\mathcal{T}$, iz čega slijedi $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. □

Definicija 1.2.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je topološki prostor X **kompaktan** ako za svaku familiju*

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}, \quad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X,$$

postoji konačna familija $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ takva da vrijedi

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X.$$

Riječima, za svaki otvoren pokrivač skupa X postoji konačan potpokrivač.

*Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je **kompaktan** ako je kao potprostor prostora X kompaktan, tj. ako za svaku familiju*

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}, \quad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \supseteq A,$$

postoji konačna familija $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ takva da vrijedi

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq A.$$

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$, skup svih kompaktnih podskupova skupa X označavat ćemo $\mathcal{K}(X)$.

Primjer 1.2.10. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ proizvoljan topološki prostor, te $U_1, \dots, U_n$ proizvoljni otvoreni skupovi u X. Definiramo familiju*

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ U \in \mathcal{K}(X) \colon\, U \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k,\ U \cap U_k \neq \emptyset,\ \forall k \in \{1, \dots, n\} \right\},$$

tj. familiju svih otvorenih skupova u X koji su sadržani u uniji skupova $U_1, \dots, U_n$ te koji sijeku svaki od skupova $U_1, \dots, U_n$.

Tvrdimo da familija

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \colon\, U_1, \dots, U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

jest baza neke topologije na $\mathcal{K}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

(B1) Uzmimo $n = 1$ te $U_1 = X$, te neka je $A \in \mathcal{K}(X)$, $A \notin \langle U_1 \rangle$. Tada mora vrijediti ili $A \nsubseteq \cup_{i=1}^{1} U_i = X$, što je nemoguće, ili $A \cap U_1 = \emptyset \Rightarrow A \cap X = \emptyset$, što je moguće jedino ako je $A = \emptyset$.

Drugim riječima, vrijedi $\langle U_1 \rangle = \mathcal{K}(X) \setminus \{\emptyset\}$, iz čega slijedi da unija svih familija gornjega oblika mora biti $\mathcal{K}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

(B2) Neka su $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}$, te $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Ako je presjek $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ prazan skup, dokaz je gotov. U suprotnom, postoje skupovi $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_m \subseteq X$, otvoreni u X, takvi da vrijedi

$$\mathcal{B}_1 = \langle U_1, \dots, U_n \rangle, \quad \mathcal{B}_2 = \langle V_1, \dots, V_m \rangle.$$

Budući da su skupovi $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_m$ otvoreni u X, svaki skup oblika $U_i \cap V_j$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, također je otvoren u X.

Promotrimo one skupove oblika $U_i \cap V_j$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, za koje vrijedi $A \cap (U_i \cap V_j) \neq \emptyset$, te označimo sve takve skupove redom sa $W_1, \dots, W_l$.

Definirajmo familiju

$$\mathcal{B}_3 = \langle W_1, \dots, W_l \rangle.$$

Dokažimo da vrijedi $A \in \mathcal{B}_3$. Budući da je $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, vrijedi

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j \Rightarrow A \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_j \right).$$

Stoga, ako je $x \in A$, postoje $i \in \{1, \dots, n\}$ te $j \in \{1, \dots, m\}$ takvi da vrijedi $x \in U_i$ te $x \in V_j$, odnosno $x \in U_i \cap V_j$, odnosno postoji $k \in \{1, \dots, l\}$ takav da vrijedi $x \in W_k$.

Budući da je $x \in A$ bio proizvoljan, slijedi $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{l} W_k$.

Dokažimo da vrijedi $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Za proizvoljan skup $B \in \mathcal{B}_3$ vrijedi

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^{l} W_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(U_i \cap V_j) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_j\right) \Rightarrow B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j.$$

Nadalje, za proizvoljan $i \in \{1, \dots, n\}$ znamo da vrijedi $A \cap U_i \neq \emptyset$, iz čega slijedi da $\exists x \in A \cap U_i$. Također, znamo da vrijedi $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} V_j$, što znači da postoji $j \in \{1, \dots, m\}$ takav da je $x \in V_j$.

Iz ovih rezultata zaključujemo da za te vrijednosti i, odnosno j, mora vrijediti $A \cap (U_i \cap V_j) \neq \emptyset$. Ovo znači da postoji $k \in \{1, \dots, l\}$ takav da je $W_k = U_i \cap V_j$. Iz ovog rezultata, te pretpostavki na skup B, konačno slijedi

$$\emptyset \neq B \cap W_k = B \cap (U_i \cap V_j) \Rightarrow B \cap U_i \neq \emptyset.$$

Budući da je $i \in \{1, \dots, n\}$, zaključujemo da vrijedi $B \cap U_i \neq \emptyset,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Analogno, vrijedi $B \cap V_j \neq \emptyset,\ \forall j \in \{1, \dots, m\}$.

Došli smo do rezultata da proizvoljan skup $B \in \mathcal{B}_3$ zadovoljava

$$B \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right), \quad B \cap U_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

te isto tako

$$B \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_j\right), \quad B \cap V_j \neq \emptyset, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Zaključujemo da vrijedi $B \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, odnosno $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$.

Jedinstvenu topologiju na $\mathcal{K}(X) \setminus \{\emptyset\}$ čija baza jest $\mathcal{B}$ nazivamo **Vietorisova topologija** [7], te ćemo je označavati sa $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$.

Poglavlje 2

Konvergencije nizova skupova

2.1 Konvergencija prve vrste

U topologiji često govorimo o nizovima elemenata nekog topološkog prostora, te o konvergencijama tih istih nizova. To sada želimo poopćiti. Preciznije, htjeli bismo promotriti nizove skupova nekog metričkog (a kasnije i topološkog) prostora, te zaključiti kada takav niz, barem intuitivno, konvergira. Da bismo precizno definirali pojam konvergencije niza skupova, trebamo sagledati nekoliko konkretnih primjera.

Primjer 2.1.1. *Uzmimo metrički prostor* $(\mathbb{R}^n, d)$ *gdje je d euklidska metrika tj. n-dimenzionalni euklidski prostor. Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *definirajmo*

$$A_n = \overline{B}\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right),$$

odnosno, n-ti skup u nizu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zatvorena kugla oko ishodišta radijusa* $1 + \frac{1}{n}$. *Budući da vrijedi* $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, *intuitivno možemo shvatiti da će limes niza* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *biti zatvorena kugla oko ishodišta radijusa* 1, *odnosno* $\overline{B}(0, 1)$.

Dakle, općenito, ako je niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan tako da skup A_n možemo izraziti pomoću funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, te postoji limes $L = \lim_{n\to\infty} f(n)$, htjeli bismo da limes niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bude izražen pomoću L.

Prethodni primjer bio je specijalan slučaj nerastućeg niza, tj. takvog niza skupova u kojem je svaki član niza podskup prethodnog člana. Skup koji smo u tom primjeru odredili kao limes danog niza bio je presjek svih tih skupova. Intuitivno naslućujemo da bi to trebalo vrijediti i općenito.

Primjer 2.1.2. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, te neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz podskupova skupa* X *takav da je* $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Limes ovog niza intuitivno možemo definirati kao*

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Ovakvo intuitivno shvaćanje limesa nerastućeg niza odmah nas upućuje i na intuitivno shvaćanje limesa neopadajućeg niza, tj. niza skupova čiji je svaki član nadskup prethodnog člana. Možemo naslutiti da će limes takvog niza biti unija svih tih skupova.

Primjer 2.1.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, te neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz podskupova skupa* X *takav da je* $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Limes ovog niza intuitivno možemo definirati kao*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Zadnji primjer intuitivnog poimanja limesa niza skupova možemo naći kod nizova jednočlanih skupova. Naime, neka je (X, d) metrički prostor te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X koji konvergira prema točki $x \in X$.

Na ovom primjeru, jasno je shvatiti da bi niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je $A_n = \{x_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, "trebao" konvergirati prema skupu $A = \{x\}$. Drugim riječima, skup koji smo u ovom primjeru uzeli kao limes jest skup koji sadrži limes određenog niza. Taj niz ima svojstvo da se, za $\forall n \in \mathbb{N}$, njegov n-ti član nalazi u skupu A_n.

U tom smislu, kad bismo imali općenit niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova skupa X, mogli bismo promatrati sve nizove čiji se n-ti član nalazi u A_n, a koji konvergiraju, te kao limes tog niza skupova uzeti skup koji sadrži točno sve te limese.

Definicija 2.1.4. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, te neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz podskupova skupa* X. *Definiramo* ***limes niza skupova*** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *u oznaci* $\lim_{n\to\infty} A_n$, *kao skup*

$$A = \{x \in X : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n, \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.$$

Oznaka $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n$ znači da za $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in A_n$.

Ovakvu konvergenciju zvat ćemo **konvergencija prve vrste,** a limes dobiven korištenjem ove definicije zvat ćemo **limes prve vrste.**

Promotrimo dva primjera nizova skupova, te nađimo limese prve vrste tih nizova.

Primjer 2.1.5. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Definirajmo*

$$A_n = \left[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da vrijedi $\lim_{n\to\infty} A_n = [2, 3]$.

Neka je $x \in [2, 3]$. Niz $x_n = x + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, konvergira prema x, te za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2 + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} \leq 3 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

odnosno $x_n \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, našli smo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ koji konvergira prema x.

Neka je $x \notin [2, 3]$. Ako je $x < 2$, tad postoji $\varepsilon > 0$ takav da $\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon\rangle \cap [2, 3] = \emptyset$. Stoga, ako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz koji konvergira prema x, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, vrijedi

$$x_n \in \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon\rangle \Rightarrow x_n < 2 \Rightarrow x_n \notin A_n.$$

Ako je, pak, $x > 3$, tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $3 + \frac{1}{m} < x$.

Neka je $\varepsilon = x - \left(3 + \frac{1}{m}\right)$. Tada vrijedi

$$\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon\rangle \cap A_n = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > m.$$

Stoga, ako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz koji konvergira prema x, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, vrijedi

$$x_n \in \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon\rangle \Rightarrow x_n > 3 + \frac{1}{m} \Rightarrow x_n \notin A_n.$$

Dakle, za $x \notin [2, 3]$ ne postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ koji konvergira prema x.

Primjer 2.1.6. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Definirajmo skupove*

$$A_n = \{n\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X koji zadovoljava $x_n \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mora vrijediti $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Drugim riječima, samo je jedan takav moguć niz, i taj niz divergira. Drugim riječima, skup svih točaka iz X prikazivih kao limesi nizova čiji n-ti član jest element skupa A_n jest prazan skup. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset.$$

Teorem 2.1.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova skupa X, čiji limes prve vrste jest skup A. Tada za $x \in X$ vrijedi $x \in A$ ako i samo ako $\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je $x \in A$. Tada postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n$ koji konvergira prema x, odnosno

$$d(x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Iz definicije udaljenosti točke od skupa slijedi

$$0 \leq d(x, A_n) \leq d(x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Pustimo li limes kada $n \to \infty$, po teoremu o sendviču slijedi $d(x, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $x \in X$ takav da vrijedi $d(x, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji $x_n \in A_n$ takav da vrijedi

$$0 \leq d(x, x_n) < d(x, A_n) + \frac{1}{n}.$$

Pustimo li limes kada $n \to \infty$, po teoremu o sendviču slijedi $d(x, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, odnosno $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Drugim riječima, našli smo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n$ koji konvergira prema x, iz čega slijedi $x \in A$.

□

Teorem 2.1.8. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova skupa X, čiji limes prve vrste jest skup A. Skup A zatvoren je u X.*

Dokaz. Pretpostavimo da A nije zatvoren u X, tj. da skup $X \setminus A$ nije otvoren u X. Tada postoji $x \in X \setminus A$ takav da $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Tvrdimo da vrijedi $d(x, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Za taj $a \in A$ vrijedi $d(a, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, stoga za taj $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(a, A_n) < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0$.

Sada, za $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, slijedi

$$0 \leq d(x, A_n) \leq d(x, a) + d(a, A_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zaključujemo $d(x, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, iz čega slijedi $x \in A$. Dobili smo kontradikciju. Dakle, skup A mora biti zatvoren u X. □

Primijetimo da u prethodnoj definiciji nismo koristili metriku. Stoga na taj način možemo definirati limes (prve vrste) niza skupova i u općenitom topološkom prostoru.

Definicija 2.1.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova skupa X. Definiramo* **limes niza skupova** *$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, u oznaci $\lim_{n\to\infty} A_n$, kao skup*

$$A = \{x \in X \colon \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\}.$$

Promotrimo jedan primjer niza skupova u topološkom prostoru, te nađimo njegov limes (prve vrste).

Primjer 2.1.10. *Neka je $X = \{1, 2, 3, 4\}$, te $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{3, 4\}, X\}$. Definirajmo $A_n = \{2, 3\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz je konstantan, pa je intuitivno logično da bude konvergentan. Označimo njegov limes (prve vrste) s A.*

Želimo da za svaki $x \in A$ postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $x_n \in \{2, 3\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, te koji konvergira prema x. No, to znači da za svaku otvorenu okolinu O od x mora postojati $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n > n_0$ vrijedi $x_n \in O$.

Promotrimo $A = \{2, 3, 4\}$. Promotrimo prvo točku $x = 2$. Uzmimo niz $x_n = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $x_n \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a jedina otvorena okolina od 2 jest X, stoga za $n_0 = 1$ vrijedi tvrdnja. Slično vidimo i za $x = 3$. Uzmemo $x_n = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, te budući da jedine otvorene okoline od 3 jesu $\{3, 4\}$ i X, za obje uzmemo $n_0 = 1$. Isto vrijedi i za $x = 4$, unatoč tome što je $4 \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Naime, uzmimo niz $x_n = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $x_n \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a jedine otvorene okoline od 4 jesu $\{3, 4\}$ i X, stoga za njih obje uzmemo $n_0 = 1$, pa opet slijedi tvrdnja.

Točka $x = 1$, pak, ne može biti sadržana u A, jer jedna njena otvorena okolina jest $\{1\}$, stoga svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira prema 1 mora zadovoljavati $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow x_n = 1$, što za nizove sadržane u $\{2, 3\}$ ne može biti slučaj.

Općenito, skup koji je limes (prve vrste) niza skupova u topološkom prostoru nije nužno zatvoren u X. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.1.11. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te $\mathcal{T}$ familija svih podskupova skupa $\mathbb{R}$ čiji je komplement najviše prebrojiv, te uključuje i $\emptyset$. Znamo da je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbb{R}$.*

Promotrimo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}$ koji konvergira prema $a \in \mathbb{R}$ s obzirom na danu topologiju. Skup $U = (\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \setminus \{a\})^c = (\mathbb{R} \setminus \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}) \cup \{a\}$ očigledno je otvorena okolina točke *a, stoga po definiciji konvergencije vrijedi* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^c \cup \{a\}$*. No, jedini način na koji je ovo moguće jest da je* $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$*, tj. da je niz* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *stacionaran.*

Konačno, promotrimo niz $A_n = [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$*. Proizvoljan niz* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *u* $\mathbb{R}$ *koji zadovoljava* $x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$*, zapravo je proizvoljan niz u* $[0,1]$*. Ako je konvergentan u topologiji* $\mathcal{T}$*, to znači da je taj niz stacionaran, odnosno* $\exists a \in \mathbb{R}$ *te* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n_0 \geq n \Rightarrow x_n = a$*. Kad bi vrijedilo* $a \notin [0,1]$*, slijedilo bi da su gotovo svi članovi ovog niza sadržani izvan* $[0,1]$*. Dakle, mora biti* $a \in [0,1]$*. Budući da za bilo koji* $a \in [0,1]$ *niz* $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$*, konvergira prema a u topologiji* $\mathcal{T}$*, slijedi da niz* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira prema* $A = [0,1]$*. No, skup* $[0,1]$ *nije zatvoren u* $\mathbb{R}$ *s obzirom na topologiju* $\mathcal{T}$*, jer njegov komplement,* $A^c = \mathbb{R} \setminus [0,1]$*, nije otvoren u* $\mathbb{R}$ *s obzirom na* $\mathcal{T}$*, budući da njegov komplement nije najviše prebrojiv.*

Na kraju, i ovu definiciju možemo poopćiti – točnije, možemo niz poopćiti na hiperniz. [8] [3]

Definicija 2.1.12. *Uređen par* $(\Lambda, \preceq)$ *nepraznog skupa* Λ *i binarne relacije* $\preceq$ *na* Λ *naziva se* ***usmjeren skup*** *ako vrijedi:*

(L1) $\lambda \preceq \lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$,

(L2) $(\forall \lambda, \mu, \nu \in \Lambda)((\lambda \preceq \mu \wedge \mu \preceq \nu) \Rightarrow \lambda \preceq \nu)$,

(L3) $(\forall \lambda, \mu \in \Lambda)(\exists \nu \in \Lambda)(\lambda \preceq \nu \wedge \mu \preceq \nu)$.

Oznaku $\lambda \preceq \mu$ možemo ekvivalentno zapisati i kao $\mu \succeq \lambda$.

Definicija 2.1.13. *Neka je* $(\Lambda, \preceq)$ *usmjeren skup, te* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Funkcija* $x\colon \Lambda \to X$ *naziva se* ***hiperniz****, u oznaci* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Za hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *u X kažemo da* ***konvergira*** *prema točki* $x_0 \in X$ *ako za svaku otvorenu okolinu O točke* x_0 *postoji* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tako da za sve vrijednosti* $\lambda \in \Lambda,\ \lambda \succeq \lambda_0$*, vrijedi* $x_\lambda \in O$.

Oznaka je $x_\lambda \xrightarrow{\lambda\in\Lambda} x_0$.

Definicija 2.1.14. *Neka je* $(\Lambda, \preceq)$ *usmjeren skup. Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor, te* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *hiperniz nepraznih podskupova skupa X.* ***Limes (prve vrste)*** *niza* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *jest skup*

$$A = \{x_0 \in X : \exists (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \otimes_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,\ x_\lambda \xrightarrow{\lambda\in\Lambda} x_0\}.$$

Promotrimo sada dva specijalna slučaja nizova skupova; prvi je onaj u kojem je dani niz padajuć, a drugi je onaj u kojem je rastuć.

Za prvi slučaj, uzmimo $X = \mathbb{R}$ te euklidsku metriku d. Definirajmo skupove

$$A_n = \left\langle 0, \frac{1}{n} \right\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Primjenom definicije limesa prve vrste, možemo zaključiti da vrijedi $\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\}$. Ipak, vrijedi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Stoga ne možemo tvrditi da limes prve vrste padajućeg niza skupova jest presjek tih skupova. Umjesto toga, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.1.15. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova skupa X takav da je $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada limes prve vrste niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Dokaz. Označimo s A skup za koji tvrdimo da je limes danog niza.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $x \in A$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \in \overline{A_n}$, stoga za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $y_n \in A_n$ takav da je $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$.

Promotrimo niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Taj niz zadovoljava $y_n \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, te

$$d(x, y_n) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dakle, vrijedi $x \in \lim_{n\to\infty} A_n$. Zaključujemo $A \subseteq \lim_{n\to\infty} A_n$.

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $x \in X \setminus A$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \notin \overline{A_k}$, što znači da je $d(x, A_k) > 0$.

Iz pretpostavke teorema dobivamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ vrijedi $A_n \subseteq A_k$, $\forall n > k$, stoga je $d(x, A_n) \geq d(x, A_k)$.

Slijedi da niz $(d(x, A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne može konvergirati prema 0, stoga vrijedi $x \notin \lim_{n\to\infty} A_n$. Obratom po kontrapoziciji slijedi $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. $\square$

Za drugi slučaj, kada je dani niz skupova rastuć, uzmimo $X = \mathbb{R}$ te euklidsku metriku d. Definirajmo skupove

$$A_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Primjenom definicije limesa prve vrste, možemo zaključiti da vrijedi $\lim_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$. Ipak, vrijedi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0, 1\rangle.$$

Stoga ne možemo tvrditi da limes prve vrste rastućeg niza skupova jest unija tih skupova. Umjesto toga, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.1.16. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova skupa X takav da je $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada limes prve vrste niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}.$$

Dokaz. Označimo s A skup za koji tvrdimo da je limes danog niza.

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $x \in \lim_{n\to\infty} A_n$. Tada postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n$ koji konvergira prema x.

Za svaki $k \in \mathbb{N}$, vrijedi $x_k \in A_k \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Dakle, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niz u $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Stoga njegov limes, što je x, mora biti sadržan u $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = A$.

Dakle, $\lim_{n\to\infty} A_n \subseteq A$.

Primijetimo da u dokazu ovog dijela teorema nismo koristili činjenicu da je $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Stoga ova implikacija vrijedi i u općenitom slučaju.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $x \in A$.

Iz pretpostavke da je $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, slijedi $d(x, A_{n+1}) \leq d(x, A_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. niz $(d(x, A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest padajuć niz. Istovremeno, taj niz ograničen je odozdo vrijednošću 0. Stoga je taj niz konvergentan. Označimo njegov limes sa L. Mora vrijediti $L \geq 0$.

Pretpostavimo da vrijedi $L > 0$. Tada postoji $y \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ takav da je $d(x, y) < \frac{L}{2}$.

Za taj y postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $y \in A_k$. Slijedi

$$L \leq d(x, A_k) \leq d(x, y) < \frac{L}{2},$$

što je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti $L = \lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$, iz čega slijedi $x \in \lim_{n\to\infty} A_n$.

Dakle, $A \subseteq \lim_{n\to\infty} A_n$. □

2.2 Konvergencija druge vrste

Ranije smo dokazali da za niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova skupa X, te njegov limes prve vrste $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, vrijedi $x \in A$ ako i samo $d(x, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Budući da iz definicije slijedi da je skup A zatvoren u X, zaključujemo da je $x \in A$ ako i samo ako $d(x, A) = 0$.

Drugim riječima, za $x \in A$ vrijedi $d(x, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} d(x, A)$.

No, za $x \notin A$ to ne mora nužno vrijediti.

Primjer 2.2.1. *Neka je $X = \langle 0, 2\rangle$, te d euklidska metrika na X. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je $A_n = \left\{\frac{1}{n}, 1\right\}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Po definiciji limesa prve vrste niza skupova, vrijedi $\lim_{n\to\infty} A_n = \{1\}$. Označimo taj skup s A.

Uzmimo $x = \frac{1}{4} \notin A$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $d(x, A_n) = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$.

S druge strane, vrijedi $d(x, A) = \left|\frac{1}{4} - 1\right| = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4}$.

Ipak, možemo uvesti novu definiciju konvergencije niza skupova, po kojoj bi tvrdnja $d(x, A_n) \xrightarrow{n\to\infty} d(x, A)$ vrijedila za sve $x \in X$. Definiciju sličnu sljedećoj dao je Wijsman u [12].

Definicija 2.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nepraznih podskupova skupa X kažemo da konvergira prema nepraznom skupu $A \subseteq X$, te označavamo $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, ako vrijedi:*

(A1) $\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = d(x, A), \ \forall x \in X$,

(A2) A je zatvoren u X.

Iz gornje definicije, podrazumijeva se da promatramo nizove za koje je, za svaki $x \in X$, niz $(d(x, A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest konvergentan. Ako postoji $x \in X$ za koji ta tvrdnja ne vrijedi, možemo postaviti po definiciji da je niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentan.

Ovakvu konvergenciju zvat ćemo **konvergencija druge vrste,** a dobiveni limes **limes druge vrste.** Iz definicije slijedi da je limes druge vrste niza skupova, ako postoji, ujedno i limes prve vrste.

Uvjet da je A zatvoren u X bio je nužan za ovu definiciju, jer u suprotnom limes ne mora biti jedinstven. Primjera radi, uzmimo metrički prostor $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Uzmimo niz $A_n = \left\langle \frac{1}{n}, 2\right]$. Tada skup $A = \langle 0, 2]$ zadovoljava svojstvo (A1) iz gornje definicije. No, to svojstvo zadovoljava i npr. $A = [0, 2\rangle$, kao i $A = [0, 2] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, kao i, naravno, $A = [0, 2]$. No, od svih tih skupova, samo je ovaj zadnji zatvoren u $\mathbb{R}$.

No, svim navedenim skupovima zajedničko je to da imaju isti zatvarač. To nas navodi na zaključak da ta tvrdnja vrijedi i općenito.

Da bismo, dakle, opravdali gornju definiciju, moramo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova skupa X. Neka su A i B skupovi koji zadovoljavaju svojstvo (A1) iz gornje definicije. Tada je $\overline{A} = \overline{B}$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in A$. Tada vrijedi $0 = d(x_0, A) = \lim_{n\to\infty} d(x_0, A_n)$. No, iz toga slijedi i $d(x_0, B) = 0$, odnosno $x_0 \in \overline{B}$. Dakle, $A \setminus B \subseteq \overline{B}$. Budući da skup A dobivamo tako da skup $A \setminus B$ uniramo s nečime što već jest podskup skupa B, slijedi $A \subseteq \overline{B}$, a budući da je $\overline{B}$ zatvoren, slijedi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Analogno dobivamo $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Konačno, $\overline{A} = \overline{B}$. □

Promotrimo sada nekoliko primjera nizova skupova, te nađimo njihove limese druge vrste.

Primjer 2.2.4. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Definirajmo*

$$A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Promotrimo skup $A = \{0\}$, te neka je $x \in \mathbb{R}$.

Ako je $x < 0$, tada vrijedi $d(x, A_n) = |x - 0| = -x \xrightarrow{n\to\infty} -x = d(x, A)$.

Ako je $x = 0$, tada vrijedi $d(x, A_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 = d(x, A)$.

Ako je $x > 0$, tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{m} < x$. Za $n \in \mathbb{N},\ n > m$, slijedi

$$d(x, A_n) = x - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} x = d(x, A).$$

Dakle, limes druge vrste niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest skup $A = \{0\}$.

Primjer 2.2.5. *Neka je $X = \mathbb{Z}$, te d diskretna metrika na X.*

Definirajmo $A_n = \{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, te neka je $A \subseteq \mathbb{Z}$ limes druge vrste danog niza.

Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Ako je $k \geq 1$, tad za $n \geq k$ slijedi $k \in A_n \Rightarrow d(k, A_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 = d(k, A)$. Ako je, pak, $k \leq 0$, tad $k \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi $d(k, A_n) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 = d(k, A)$.

Po definiciji, slijedi $A = \mathbb{N}$.

Primjer 2.2.6. *Neka je $X = \mathbb{Z}$ te d diskretna metrika na $\mathbb{Z}$.*

Uzmimo $B_n = \{n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Za proizvoljni $k \in \mathbb{Z}$, ako je $k \leq 0$, tada je $d(k, B_n) = d(k, n) = 1$. Ako je $k > 0$, tad za $n > k$ vrijedi $n \neq k$, pa je $d(k, B_n) = 1$. Dakle, za bilo koji $k \in \mathbb{Z}$, vrijedi $\lim_{n\to\infty} d(k, B_n) = 1$.

No, to znači da mora postojati skup $B \subseteq \mathbb{Z}$, zatvoren u $\mathbb{Z}$ s obzirom na d, takav da za ***svaki*** *$k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $d(k, B) = 1$. No, to bi moralo vrijediti i za svaki $k \in B$, što za $B \neq \emptyset$ nije moguće. Stoga limes druge vrste niza $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne postoji.*

2.3 Konvergencija s obzirom na Hausdorffovu metriku

Osim uobičajene definicije metrike među skupovima, postoji još jedna intuitivna interpretacija udaljenosti dvaju skupova. Ta interpretacija sastoji se od promatranja koliko je rub jednog skupa udaljen od ruba drugog skupa.

U tu svrhu, za metrički prostor (X, d), skup $A \subseteq X$, te $r > 0$, definiramo skup A_r kao

"r-okolinu" skupa A, odnosno

$$A_r = B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r).$$

Dakle, skup A_r jest skup svih točaka $x \in X$ za koje je $d(x, A) < r$.

Sada možemo definirati udaljenost dvaju skupova u skladu s gore spomenutom intuicijom.

Definicija 2.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $A, B \subseteq X$ neprazni i ograničeni skupovi. Definiramo **Hausdorffovu udaljenost** skupova A i B na način*

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \colon A \subseteq B_r,\ B \subseteq A_r\}.$$

Lako se može provjeriti da skup iz prethodne definicije zaista ima infimum. Naime, neka su $A, B \subseteq X$ omeđeni u (X, d). Tada mora vrijediti

$$(\exists x_0 \in X)(\exists r_1 > 0)(A \subseteq B(x_0, r_1)),$$

te isto tako

$$(\exists y_0 \in X)(\exists r_2 > 0)(B \subseteq B(y_0, r_2)).$$

Uzmimo $r = d(x_0, y_0) + r_1 + r_2$. Želimo dokazati da vrijedi $A \subseteq B_r$.

Fiksirajmo $b \in B$. Za proizvoljnu točku $a \in A$ vrijedi

$$d(a, b) \leq d(a, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, b) < r_1 + d(x_0, y_0) + r_2 = r.$$

Iz ovog rezultata slijedi $A \subseteq B(b, r) \subseteq B_r$. Analogno dobivamo $B \subseteq A_r$.

Dakle, skup iz prethodne definicije neprazan je. Budući da je po definiciji taj skup podskup skupa $\langle 0, \infty\rangle$, slijedi da je ograničen odozdo.

Stoga skup iz prethodne definicije zaista ima infimum, tj. prethodna definicija dobra je.

Budući da se ova definicija zasniva na prethodno definiranim metrikama, valja provjeriti je li i ona sama metrika.

Teorem 2.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $\mathcal{B}$ familija svih nepraznih zatvorenih ograničenih podskupova skupa X. Tada Hausdorffova udaljenost $d_H \colon \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, definirana na prethodni način, jest metrika na $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazujemo po definiciji.

(M1) Skup čiji je infimum dan kao definicija Hausdorffove metrike jest podskup skupa $\mathbb{R}_+$, stoga je $d_h(A, B) \geq 0,\ \forall A, B \in \mathcal{B}$.

(M2) Za svaki $r > 0$, skup A_r sadrži A, stoga je $\{r > 0 \colon A \subseteq A_r\} = \mathbb{R}_+$. Stoga vrijedi $d_H(A, A) = 0$.

Ako je, pak $d_H(A, B) = 0$, pretpostavimo da je $A \neq B$. Tad bez smanjena općenitosti vrijedi $\exists x \in A \setminus B$, tj. $d(x, B) > 0$. Označimo $r = d(x, B)$. Pretpostavimo da je $x \in B_r$. Tada vrijedi

$$\exists y \in B,\ x \in B(y, r) \Rightarrow d(x, y) < r \Rightarrow d(x, B) \leq d(x, y) < r \Rightarrow r < r,$$

što je kontradikcija. Dakle, $x \notin B_r$. Slijedi $A \nsubseteq B_r$, stoga i za svaki $r_0 \leq r$ vrijedi $A \nsubseteq B_{r_0}$. Zaključujemo da je

$$d_H(A, B) \geq r = d(x, B),$$

što je opet kontradikcija. Dakle, $A \subseteq B$. Analogno je $B \subseteq A$, dakle $A = B$.

(M3) Vrijedi $d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \colon A \subseteq B_r,\ B \subseteq A_r\} = \inf\{r > 0 \colon B \subseteq A_r,\ A \subseteq B_r\} = d_H(B, A)$.

(M4) Želimo dokazati $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C),\ \forall A, B, C \in \mathcal{B}$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Za proizvoljan $x \in A$ postoji $y \in B$ takav da je $d(x, y) < d_H(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Naime, pretpostavimo li suprotno, dobivamo da postoje $x \in A$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za svaki $y \in B$ vrijedi $d(x, y) \geq d_H(A, B) + \varepsilon$. To znači da, ako je $r > 0$ takav da $A \subseteq B_r$, mora vrijediti $r > d_H(A, B) + \varepsilon$, iz čega slijedi

$$\inf\{r > 0 \colon A \subseteq B_r,\ B \subseteq A_r\} \geq d_H(A, B) + \varepsilon,$$

što je u kontradikciji s definicijom Hausdorffove metrike.

Iz ovoga zaključujemo da za svaki $x \in A$ i $\varepsilon > 0$ postoji $y \in B$ takav da je $d(x, y) < d_H(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}$. Za taj y postoji $z \in C$ takav da je $d(y, z) < d_H(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}$. Slijedi

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d_H(A, B) + d_H(B, C) + \varepsilon.$$

Ako označimo $r = d_H(A, B) + d_H(B, C) + \varepsilon$, slijedi $A \subseteq C_r$. Analogno vrijedi $C \subseteq A_r$. Zaključujemo da je

$$d_H(A, C) \leq r = d_H(A, B) + d_H(B, C) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

iz čega pak slijedi

$$d_H(A, C) - (d_H(A, B) + d_H(B, C)) \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, slijedi $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$. □

Dakle, Hausdorffovu udaljenost možemo zvati **Hausdorffova metrika.** Ponekad se naziva i **Pompeiu-Hausdorffova metrika.** [9]

Ono što bi bio intuitivan zaključak iz ove definicije jest da za svaki $x \in A$ postoji $y \in B$ (i obratno) takav da $d(x, y) \leq d_H(A, B)$. No, općenito to ne vrijedi. To ćemo vidjeti na primjeru koji slijedi.

Jasno je, ako za dva skupa $A, B \subseteq X$ vrijedi $A = B$, tad je $d_H(A, B) = 0$. No, vrijedi li i obrat?

Primjer 2.3.3. *Uzmimo prostor $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d, naravno, euklidska metrika. Neka je $A = [0, 2\rangle$ te $B = \langle 0, 2] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Za bilo koji $r > 0$, skup A_r očigledno sadrži točku $x = 2$. Naime, ako je $r > 1$, tad vrijedi $B(1.9, r) = \langle 1.9 - r, 1.9 + r\rangle \supseteq \langle 0.9, 2.9\rangle$, a potonji skup sadrži 2. Ako je, pak, $r \leq 1$, tad skup A sadrži točku $x_0 = 2 - \frac{r}{2}$, pa je $B(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle = \left\langle 2 - \frac{3}{2}r, 2 + \frac{r}{2}\right\rangle$, a potonji skup sadrži 2.*

Analogno dokazujemo da B_r sadrži točke $x = 0$ te $x = \frac{1}{2}$.

Dakle, za proizvoljni $r > 0$ vrijedi $A \subseteq B_r$ te $B \subseteq A_r$. Slijedi $d_H(A, B) = 0$. No, $A \neq B$.

U prethodnom primjeru, dapače, nijedan od dvaju skupova A i B skupova nije podskup onog drugog. Isto tako, za $x = 0 \in A$ te bilo koji $y \in B$ vrijedi $d(x, y) > 0 = d_H(A, B)$. No, možemo primijetiti da skupovi A i B imaju isti zatvarač.

Teorem 2.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $A, B \subseteq X$ takvi da je $d_H(A, B) = 0$. Tad vrijedi $\overline{A} = \overline{B}$.*

Dokaz. Iz tvrdnje da $d_H(A, B) = 0$ slijedi da za $\forall r > 0$ vrijedi $A \subseteq B_r$ te $B \subseteq A_r$.

Neka je $x \in A$. Za proizvoljni $r > 0$ postoji $y \in B$ takav da $B(y, r) \ni x$. Slijedi $d(x, y) < r$, odnosno $B(x, r)$ siječe B. Iz ovoga slijedi $x \in \overline{B}$.

Dobili smo $A \subseteq \overline{B}$, a budući da je $\overline{B}$ zatvoren u X, slijedi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Analogno dokazujemo $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Dakle, $A = B$. □

Iz prethodnog primjera vidjeli smo da za $x \in A$ ne mora nužno postojati $y \in B$ takav da vrijedi $d(x, y) \leq d_H(A, B)$. No, vrijedi jedan sličan rezultat.

Primjer 2.3.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, $A, B \subseteq X$ neprazni zatvoreni omeđeni skupovi, te neka je $x \in A$ i $\varepsilon > 0$.*

Znamo da postoji $y \in B$ takav da je $d(x, y) < d_H(A, B) + \varepsilon$.

Sada, za te točke $x \in A$ i $y \in B$ te za tu vrijednost $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$d(x, B) \leq d(x, y) \leq d_H(A, B) + \varepsilon,$$

iz čega slijedi

$$d(x, B) \leq d_H(A, B) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi

$$d(x, B) \leq d_H(A, B).$$

Dakle, ako je $x \in A$, tada vrijedi $d(x, B) \leq d_H(A, B)$. No, obrat ne mora vrijediti. Jednostavno, uzmimo $X = \mathbb{R}$ te euklidsku metriku d na $\mathbb{R}$. Neka su $A = \{0\}$ i $B = \{1\}$. Jasno je da vrijedi $d_H(A, B) = 1$. Neka je $x = \frac{1}{2}$. Tada vrijedi $d(x, B) = \frac{1}{2} \leq 1 = d_H(A, B)$, iako vrijedi $x \notin A$.

Sada možemo definirati i konvergenciju niza skupova u metričkom prostoru s obzirom na Hausdorffovu metriku.

Definicija 2.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih ograničenih podskupova skupa X. Kažemo da niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***konvergira*** *prema nepraznom skupu $A \subseteq X$* ***s obzirom na Hausdorffovu metriku*** *ako vrijedi:*

(H1) $\lim_{n\to\infty} d_H(A_n, A) = 0$,

(H2) A je zatvoren u X i ograničen.

Primijetimo da u ovoj definiciji nije dan uvjet da je niz $(d(x, A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan za svaki $x \in X$. Stoga, ako taj limes ni za jedan skup $A \subseteq X$ ne postoji, možemo po definiciji postaviti da je niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentan.

Promotrimo nekoliko primjera konvergencije nizova skupova s obzirom na Hausdorffovu metriku.

Primjer 2.3.7. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Definirajmo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova skupa $\mathbb{R}$ na način*

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da limes danog niza jest skup $A = \{0\}$. Za $n \in \mathbb{N}$ te proizvoljni $r > 0$, vrijedi

$$B(A, r) = B(\{0\}, r) = \langle -r, r\rangle.$$

Dakle, nužan i dovoljan uvjet da vrijedi $B(A, r) \supseteq A_n$ jest da vrijedi $r > \frac{1}{n}$.

S druge strane, vrijedi $A_n \supseteq \{0\}$, stoga vrijedi $B(A_n, r) \supseteq \{0\}$.

Po definiciji Hausdorffove metrike, slijedi

$$d_H(A_n, A) = d_H\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \{0\}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Budući da je skup $A = \{0\}$ zatvoren u $\mathbb{R}$ i ograničen, slijedi $\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\}$.

Primjer 2.3.8. *Neka je $X = \mathbb{R}^2$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Definirajmo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova skupa $\mathbb{R}$ na način*

$$A_n = \begin{cases} \{(1, 2)\}, & 2 \mid n \\ \{(1, 4)\}, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

Neka je $A \subseteq X$ skup koji je limes niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ako je $(1, 2) \notin A$, tada za $n \in \mathbb{N}$, $2 \mid n$, vrijedi $d_H(A_n, A) \geq d((1, 2), A) > 0$. Ako je $(1, 4) \notin A$, tada za $n \in \mathbb{N}$, $2 \nmid n$, vrijedi $d_H(A_n, A) \geq d((1, 4), A) > 0$.

Ako je $(1, 2), (1, 4) \in A$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $d_H(A_n, A) \geq d((1, 2), (1, 4)) > 0$.

Ni u jednom od triju slučajeva, niz $(d(A_n, A))_{n\in\mathbb{N}}$ ne teži prema 0.

Dakle, niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest divergentan.

Sad, naravno, ima smisla promatrati je li ova definicija konvergencije niza skupova u vezi s prethodnim definicijama.

Neka je (X, d) metrički prostor, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih podskupova skupa X, te skup A limes tog niza s obzirom na Hausdorffovu metriku. Po definiciji, vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow d_H(A_n, A) < \varepsilon).$$

Neka je $x \in A$. Tad za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A_n$ takav da $d(x_n, x) \leq d(A_n, A) + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dakle, postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n$ koji konvergira prema x.

Neka je, pak, $x \notin A$. Pretpostavimo da postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \otimes_{n\in\mathbb{N}} A_n$ koji konvergira prema x, dakle $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in A_n$, stoga za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $y_n \in A$ takav da $d(x_n, y_n) \leq d(A_n, A) + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Slijedi $d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0 = 0$. Iz definicije konvergencije po Hausdorffovoj metrici znamo da je A zatvoren u X, stoga je $x \in A$. Dobili smo kontradikciju, stoga niz gornjeg oblika ne postoji.

Dakle, ako niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema A po Hausdorffovoj metrici, tad je A oblika koji smo dali u prvoj definiciji konvergencije niza skupova. Slijedi da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema A u prvoj vrsti.

No, obrnuta implikacija ne mora nužno vrijediti. Primjera radi, uzmimo metrički prostor $(\mathbb{Z}, d)$, gdje je d diskretna metrika, te skupove $A_n = \{-1, n\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Promotrimo skup $A = \{-1\}$.

Za $k = -1$ vrijedi $d(k, A_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 = d(k, A)$. Za $k \neq -1$ te bilo koji $n \in \mathbb{N}, n > k$, vrijedi $d(k, A_n) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 = d(k, A)$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

No, za bilo koji $r \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi $B(-1, r) = \{-1\} \not\supseteq \{-1, n\} = A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, budući da je metrika d diskretna, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $d_H(A_n, \{-1\}) = 1$, što ne može konvergirati prema 0. Dakle, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira prema A po Hausdorffovoj metrici.

2.4 Konvergencija s obzirom na Vietorisovu topologiju

Na kraju ovog poglavlja, navedimo još jednu definiciju konvergencije skupova, u skladu s Vietorisovom topologijom koju smo definirali ranije. Ova definicija bit će analogna definiciji konvergencije niza točaka u topološkom prostoru.

Definicija 2.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te $\mathcal{T}_\mathcal{V}$ pripadna Vietorisova topologija na $\mathcal{K}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Kažemo da niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nepraznih podskupova skupa X* ***konvergira*** *prema nepraznom skupu $A \subseteq X$ ako za svaku familiju $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_\mathcal{V}$, $A \in \mathcal{O}$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, vrijedi $A_n \in \mathcal{O}$.*

Budući da u općenitom topološkom prostoru limes konvergentnog niza nije jedinstven, naslućujemo da analogan rezultat vrijedi i u ovom slučaju.

Primjer 2.4.2. *Neka je* $X = \{1, 2\}$*, te uzmimo topologiju* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ *na* X*. Budući da je klasa* $\mathcal{T}$ *konačna, svaki podskup skupa* X *jest kompaktan, tj. vrijedi* $\mathcal{K}(X)\backslash\{\emptyset\} = \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$*.*

Može se pokazati da pripadna Vietorisova topologija na skupu $\mathcal{K}(X) \setminus \{\emptyset\}$ *jest ona čija baza jest*

$$\mathcal{B} = \{\{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}\}.$$

Promotrimo niz $A_n = \{2\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$*. Tvrdimo da skupovi* $A = \{2\}$ *i* $B = \{1, 2\}$ *jesu limesi danog niza.*

Promotrimo prvo skup $A = \{2\}$*. Jedini elementi iz* $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ *čiji jedan element jest skup* A *jesu* $\{\{2\}\}$*,* $\{\{1\}, \{2\}\}$*, i* $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$*. Za obje klase vrijedi da je, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, skup* A_n *element tih klasa. Stoga, po definiciji, skup* A *jest limes danog niza.*

Promotrimo sada i skup $B = \{1, 2\}$*. Jedini elemnt iz* $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ *čiji jedan element jest skup* B *jest* $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$*. Opet, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, skup* A_n *jest element te klase. Po definiciji, i skup* B *jest limes danog niza.*

Dakle, limes danog niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nije jedinstven.*

Poglavlje 3

Funkcije na nizovima skupovima

3.1 Neprekidne funkcije

Sljedeći logičan korak bio bi promatrati funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$, gdje je (X, d) proizvoljan metrički prostor; točnije, kako se određena funkcija ponaša na članovima niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova skupa X.

Prisjetimo se definicije neprekidne funkcije.

Definicija 3.1.1. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{U})$ dva topološka prostora. Kažemo da funkcija $f\colon X \to Y$ jest **neprekidna** u točki $x_0 \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu $V \subseteq Y$ točke $f(x_0)$ postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$.*

*Funkcija $f\colon X \to Y$ jest **neprekidna** na skupu X ako je neprekidna u svakoj točki skupa X.*

Teorem 3.1.2. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Funkcija $f\colon X \to Y$ neprekidna je u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je f neprekidna u točki x_0, te neka je $\varepsilon > 0$. Skup $V = B(f(x_0), \varepsilon)$ otvorena je okolina točke $f(x_0)$, stoga postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$.

Budući da je U otovorena okolina točke x_0, postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $B(x_0, \delta) \subseteq U$.

Sada za proizvoljnu točku $x \in B(x_0, \delta)$ vrijedi $x \in U$, iz čega slijedi $f(x) \in V = B(f(x_0), \varepsilon)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Neka je V otvorena okolina točke $f(x_0)$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Za taj $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $x \in X$, $d(x, x_0) < \delta$, vrijedi $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Dakle, skup $U = B(x_0, \delta)$ otvorena je okolina točke x_0, te za proizvoljnu točku $x \in U$ vrijedi $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Stoga je f neprekidna u točki x_0. □

Neka je (X, d) metrički prostor, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih podskupova skupa X, te $f \colon X \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna na svakom od skupova A_n, $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je skup $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ neprazan, te neka je $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Točka x sadržana je u svakom od skupova A_n, a budući da je f neprekidna na svakom od tih skupova, zaključujemo da je neprekidna i u točki x. Budući da je točka $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ proizvoljna, zaključujemo da je f neprekidna na skupu $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Neka je $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_n$. Funkcija f neprekidna je na skupu A_n, stoga mora biti neprekidna i u točki x. Budući da je točka $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ proizvoljna, zaključujemo da je f neprekidna na skupu $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Intuitivno bi trebalo vrijediti da, ako je funkcija $f \colon X \to \mathbb{R}$ neprekidna na svakom od skupova A_n, tada je neprekidna i na skupu $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ koji je limes prve vrste. No, to nije slučaj.

Primjer 3.1.3. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Definirajmo skupove*

$$A_n = \left[1, 2 - \frac{1}{n}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Limes prve vrste danog niza skupova jest $A = \lim_{n\to\infty} A_n = [1, 2]$.

Definirajmo funkciju $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathbf{1}_{[0,2]}(x)$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, funkcija f neprekidna je na skupu A_n, no nije neprekidna na skupu A, jer nije neprekidna u točki $x = 2$.

Dakle, ako je funkcija neprekidna na svakom od skupova A_n, $n \in \mathbb{N}$, ne mora nužno biti neprekidna i na rubu skupa A koji je limes tog niza skupova. No, ne mora biti neprekidna ni u interioru skupa A.

Primjer 3.1.4. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d eulidska metrika na $\mathbb{R}$. Promotrimo funkciju*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x),$$

te promotrimo niz skupova

$$A_n = \left\langle -2, -\frac{1}{n} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{n}, 2 \right\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Funkcija f neprekidna je na svakom od skupova A_n, $n \in \mathbb{N}$.

No, po objema definicijama, limes danog niza skupova jest $\lim_{n\to\infty} A_n = A = [-2, 2]$, a funkcija f nije neprekidna na tom skupu niti na interioru tog skupa, jer nije neprekidna u točki $x = 0$.

3.2 Konvergencija po karakterističnim funkcijama

Ako bismo htjeli promatrati konvergenciju niza skupova s obzirom na funkcije, tada, umjesto promatranja svojstava određenih funkcijama na tim skupovima, možemo ići "obrnuto" – možemo promatrati karakteristične funkcije tih skupova. Najjednostavniji način takve definicije konvergencije skupova bio bi u skladu s konvergencijom niza tih funkcija po točkama [1].

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova skupa X **konvergira** prema skupu A ako niz funkcija $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji $\mathbf{1}_A$ po točkama, tj. ako*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_A(x), \quad \forall x \in X.$$

Ovakvu konvergenciju zvat ćemo **konvergencija po karakterističnim funkcijama**.

Promotrimo dva primjera niza skupova, te primijenimo gornju definiciju da zaključimo konvergiraju li.

Primjer 3.2.2. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d euklidska metrika na skupu $\mathbb{R}$. Definirajmo skupove*

$$A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Ako je $x < 0$, tada vrijedi

$$\mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ako je $x = 0$, tada vrijedi

$$\mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Ako je $x > 0$, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n_0} < x$. Za sve brojeve $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, vrijedi $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < x$, stoga za $n > n_0$ vrijedi

$$\mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dakle, niz funkcija $\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ konvergira prema funkciji $\mathbf{1}_{\{0\}}$ po točkama.

Po gornjoj definiciji, slijedi $\lim_{n\to\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right] = \{0\}$.

Primjer 3.2.3. *Neka je $X = \mathbb{R}$, te d euklidska metrika na skupu $\mathbb{R}$.*

Definirajmo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova skupa $\mathbb{R}$ na način

$$A_n = \begin{cases} \langle -\infty, 0\rangle, & 2 \mid n \\ [0, \infty\rangle, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Ako je $x \leq 0$, tada vrijedi

$$\mathbf{1}_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

Ako je $x > 0$, tada vrijedi

$$\mathbf{1}_{A_n}(x) = \begin{cases} 0, & 2 \mid n \\ 1, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

U obama slučajevima, niz $(\mathbf{1}_{A_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergentan je. Stoga je, po gornjoj definiciji, niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ također divergentan.

Jasno je da, ako niz skupova konvergira po karakterističnim funkcijama, taj limes ne mora biti jednak limesu prve vrste.

Primjer 3.2.4. *Neka je $X = \mathbb{R}^2$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Definirajmo skupove*

$$A_n = B\left((0,0), 2 - \frac{1}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Za svaku točku $x \in B((0,0),2)$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $x \in A_m$. Budući da također vrijedi $A_N \subseteq A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$, slijedi $x \in A_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > m$.

Za svaku točku $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B((0,0),2)$ *vrijedi* $x \notin A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

U obama slučajevima, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_{B((0,0),2)}(x).$$

Dakle, limes niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *po karakterističnim funkcijama jest skup* $B((0,0),2)$.

S druge strane, budući da vrijedi $A_n \subseteq A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$, *limes prve vrste niza* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest skup*

$$A = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\left((0,0), 2 - \frac{1}{n}\right)} = \overline{B((0,0),2)}.$$

Dakle, limes po karakterističnim funkcijama i limes prve vrste različiti su.

Bibliografija

[1] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, 2013.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[3] G. Gierz, K. H. Hoffmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove i D. S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*, Cambridge University Press, 2003.

[4] J. G. Hocking i G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, 1961.

[5] Z. Iljazović, *Opća topologija*, Matematički odsjek, 2022.

[6] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, 1955.

[7] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, American Mathematical Society, 1951.

[8] E. H. Moore i H. L. Smith, *A General Theory of Limits*, American Journal of Mathematics, 1922.

[9] R. T. Rockafellar i R. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, 2005.

[10] W. A. Sutherland, *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford Science Publications, 1975.

[11] S. Štimac, *Metrički prostori*, Matematički odsjek, 2022., `https://web.math.pmf.unizg.hr/~sonja/MetrickiProstori.pdf`.

[12] R. A. Wijsman, *Convergence of sequences of convex sets, cones and functions*, 1966., `https://www.ams.org/journals/tran/1966-123-01/S0002-9947-1966-0196599-8/S0002-9947-1966-0196599-8.pdf`.

Sažetak

U ovom radu promatrali smo nizove skupova u metričkim i topološkim prostorima, te smo dali nekoliko definicija konvergencije takvih nizova.

Prvo smo iskazali sve osnovne pojmove vezane uz metričke i topološke prostore koji su nam bili potrebni za daljnje razmatranje.

Na početku smo limes niza podskupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupa X definirali kao skup A svih točaka prikazivih kao limesi nizova čiji n-ti član jest element skupa A_n. Taj limes nazvali smo limes prve vrste. Tu definiciju poopćili smo i na općeniti topološki prostor, a potom smo i niz skupova u toj definiciji poopćili na hiperniz.

Jedno od svojstava limesa prve vrste omogućilo nam je da damo još jednu definiciju, po kojoj za svaku točku $x \in X$ mora vrijediti $d(x, A_n) \to d(x, A)$. Taj limes nazvali smo limes druge vrste.

U sljedećem koraku, promatrali smo Hausdorffovu metriku d_H, te smo definirali limes niza skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s obzirom na tu metriku kao neprazan zatvoren skup A za koji vrijedi $d_H(A_n, A) \to 0$.

Promatrali smo i konvergenciju s obzirom na Vietorisovu topologiju, te smo dali i definiciju analognu definciji konvergencije niza točaka u topološkom prostoru.

Na kraju, promatrali smo funkcije na nizovima skupova. Pokazali smo da, ako je funkcija neprekidna na svakom od skupova u nizu, ne mora nužno biti neprekidna na njegovom limesu prve vrste, pa čak ni na interioru tog skupa.

Ipak, dali smo još jednu definciju konvergencije niza skupova, pomoću konvergencije niza karakterističnih funkcija tih skupova po točkama.

Summary

In this work, we observed sequences of sets in metric and topological spaces, and we gave several defnitions of convergence of such sequences.

First, we stated all the basic terms involving metric and topological spaces which were necessary for further observation.

Initially, we defined the limit of a sequence $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of subsets of X as the set A of all points that are limits of a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ whose n-th term is an element of A_n. We called that limit the limit of the first kind. We generalized this definiton onto topological spaces, and then we generalized the sequences in that definition onto nets.

One of the properties of the limit of the first kind helped us to make another definition, by which each point $x \in X$ must satisfy $d(x, A_n) \to d(x, A)$. We called that limit the limit of the second kind.

In the next step, the observed the Hausdorff metric d_H, and we defined the limit of a sequence $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of sets considering said distance as the non-empty closed set A which satisfies $d_H(A_n, A) \to 0$.

We also observed convergence considering the Vietoris topology, and we gave a definition analogous to the definition of a limit of a sequence in a topological space.

Lastly, we observed functions on sequences of sets. We proved that, if a function is continuous on each set in a sequence, it is not necessarily continuous on its limit of the first kind, or even in the interior of that set.

Still, we gave one more definition of convergence of a sequence of sets, using pointwise convergence of characteristic functions of the given sets.

Životopis

Rođen sam 22. kolovoza 1996. u Zagrebu. Prvih šest godina osnovnoškolskog obrazovanja, od 2003. do 2009., pohađao sam u Osnovnoj školi Fran Krsto Frankopan, a zadnje dvije, od 2009. do 2011., u Osnovnoj školi Lauder Hugo Kon, obje u Zagrebu. Godine 2011. upisujem XV. gimnaziju, koju završavam četiri godine kasnije. Godine 2015. upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomu prvostupnika matematike stječem 2019. godine. Te godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu, ali dvije godine kasnije, 2021. godine, ispisujem se s njega i upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, na istom fakultetu.