Topološka svojstva poluizračunljivih skupova

Arvaj, Tea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tea Arvaj

TOPOLOŠKA SVOJSTVA POLUIZRAČUNLJIVIH SKUPOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Izračunljivost kao grana matematike proučava rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Takva funkcija je rekurzivna ako je totalna (definirana u svakoj točki iz $\mathbb{N}^k$) i možemo napisati RAM program za nju, odnosno intuitivno ako postoji "algoritam" koji primi $x \in \mathbb{N}^k$ i uvijek nakon konačno mnogo koraka vrati $f(x)$. Skup je rekurzivan ako mu je karakteristična funkcija rekurzivna. U ovom diplomskom radu se podrazumijeva poznavanje pojmova rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, rekurzivnih skupova i njihovih osnovnih svojstava te poznavanje pojma metričkog prostora. Definiramo rekurzivno prebrojive skupove u $\mathbb{N}^k$, te dokazujemo neka njihova korisna svojstva.

Također proširujemo pojam rekurzivne funkcije na funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$, i funkcije sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. Uvodimo i rekurzivne rekurzivno omeđene funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ čija svojstva koristimo u drugom poglavlju. Pomoću rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ definiramo rekurzivni broj, rekurzivni niz te rekurzivni skup u $\mathbb{R}$. Uvodimo i poopćenje tih pojmova u izračunljivom metričkom prostoru.

Uz izračunljive skupove u izračunljivom metričkom prostoru uvodimo i pojmove izračunljivo prebrojivog, poluizračunljivog te koizračunljivo prebrojivog skupa, s većim fokusom na poluizračunljive skupove. Koristeći racionalne otvorene kugle povezujemo izračunljivost i topologiju na izračunljivom metričkom prostoru. Završavamo teoremom da je luk s izračunljivim krajnjim točkama, koji je poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru nužno izračunljiv skup, i sličnim rezultatom za lančaste kontinuum.

Poglavlje 1

Izračunljivost

Oznake

Neka su $n, m, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i $a_1, \ldots, a_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ funkcije. Uvodimo oznaku $f \circ (a_1, \ldots, a_n)$ za funkciju $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ definiranu sa $x \mapsto f(a_1(x), \ldots, a_n(x))$.

Neka su $i, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Definiramo projekciju na i-tu koordinatu, $I_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_i$.

Neka su $k, m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant k$. Definiramo projekciju na koordinate između m i n, $I_{m:n}^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{n-m+1}$, $I_{m:n}^k(x) = (I_m^k(x), \ldots, I_n^k(x))$.

Uvodimo oznaku $x \dot{-} y$ za $\max\{x - y, 0\}$.

1.1 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 1.1.1. Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Za funkciju $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ kažemo da je rekurzivna ako su funkcije $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.

Primjer 1.1.2. Postoji rekurzivna surjekcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Neka su $p_0, p_1, p_2, \ldots$ svi prosti brojevi u strogo rastućem poretku.
Znamo da je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(i) = p_i$ rekurzivna.
Neka je $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$e(x, i) = \begin{cases} \text{eksponent kojim } p_i \text{ ulazi u rastav od } x \text{ na proste faktore }, & x \geqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Poznato je da je e rekurzivna.

Definiramo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$, $\varphi(x) = (e(x, 1), \ldots, e(x, k))$. φ je tražena rekurzivna surjekcija. $\square$

Primjer 1.1.3. Funkcija max : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(i, j) \mapsto \max\{i, j\}$ je rekurzivna. To ćemo pokazati tako da napišemo RAM-program za nju.

$$\begin{bmatrix} 0. & \text{DEC } \mathcal{R}_1, 4 \\ 1. & \text{DEC } \mathcal{R}_2, 7 \\ 2. & \text{INC } \mathcal{R}_0 \\ 3. & \text{GO TO } 0 \\ 4. & \text{DEC } \mathcal{R}_2, 10 \\ 5. & \text{INC } \mathcal{R}_0 \\ 6. & \text{GO TO } 4 \\ 7. & \text{DEC } \mathcal{R}_1, 10 \\ 8. & \text{INC } \mathcal{R}_0 \\ 9. & \text{GO TO } 7 \end{bmatrix}$$

Definicija 1.1.4. Za $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je rekurzivno prebrojiv ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$.

Propozicija 1.1.5. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi. Tada su rekurzivni i $S \cap T$, $S \cup T$ i S^C.*

Dokaz. Definiramo funkcije $sg, \overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $sg(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, x \geqslant 1 \\ 1, x = 0 \end{cases}$, to su rekurzivne funkcije.
$\chi_{S \cap T}(x) = \chi_S(x) \cdot \chi_T(x)$, $\chi_{S \cup T}(x) = sg(\chi_S(x) + \chi_T(x))$, $\chi_{S^C}(x) = \overline{sg}(\chi_S(x))$ su rekurzivne kao kompozicije rekurzivnih funkcija. $\square$

Lema 1.1.6. *(teorem o grananju)*
Neka su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ rekurzivne funkcije i $S_1, \ldots, S_n$ u parovima disjunktni rekurzivni skupovi takvi da je $\bigcup_{i=1}^n S_i = \mathbb{N}^k$.

Tada je funkcija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$, $F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \\ f_n(x), & x \in S_n \end{cases}$ rekurzivna.

Dokaz. Tvrdnja vrijedi za $m = 1$ (dokazano na kolegiju Izračunljivost). Neka je F^i i-ta komponentna funkcija od F te neka su $f_1^i, \ldots, f_n^i$ i-te komponentne funkcije od $f_1, \ldots, f_n$.

Tada je $F^i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $F^i(x) = \begin{cases} f_1^i(x), & x \in S_1 \\ \vdots \\ f_n^i(x), & x \in S_n \end{cases}$

za $i = 1, \ldots, n$. □

Propozicija 1.1.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan skup. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Promotrimo prvo slučaj kada je $S \subseteq \mathbb{N}$, odnosno $k = 1$. Pretpostavimo $S \neq \emptyset$. Odaberimo $s_0 \in S$.

Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in S \\ s_0, & x \notin S \end{cases} = \begin{cases} x, & x \in S \\ s_0, & x \in S^C \end{cases}$.

Po prethodnoj lemi je f rekurzivna te vrijedi $S = f(\mathbb{N})$.

Promotrimo sada slučaj kada je $k > 1$. Pretpostavimo $S \neq \emptyset$. Odaberimo $s_0 \in S$. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna surjekcija. Definiramo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$,

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \varphi(x) \in S \\ s_0, & \varphi(x) \notin S \end{cases} = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \varphi^{-1}(S) \\ s_0, & x \in (\varphi^{-1}(S))^C \end{cases} .$$

Skup $T = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \varphi^{-1}(S)\}$ je rekurzivan jer je njegova karakteristična funkcija $\chi_T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \chi_T = \chi_S \circ \varphi$. Onda je i T^C rekurzivan, pa je po prethodnoj lemi funkcija f rekurzivna i vrijedi $S = f(\mathbb{N})$.

□

Propozicija 1.1.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv skup. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $f(S)$ rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, onda je i $f(S) = \emptyset$ pa je rekurzivno prebrojiv.
Preostaje slučaj kada je S neprazan. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = g(\mathbb{N})$. Tada je $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija takva da je $(f \circ g)(\mathbb{N}) = f(S)$. □

Teorem 1.1.9. *(o projekciji) Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv skup. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k : \exists y \in \mathbb{N}^n$ t.d. je $(x, y) \in T\}$. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Imamo $S = p(T)$, gdje je $p : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ projekcija na prvih k koordinata. S je rekurzivno prebrojiv po prethodnoj propoziciji. □

Propozicija 1.1.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivan te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $T := f^{-1}(S)$ rekurzivan skup.*

Dokaz. $x \in T \iff f(x) \in S \iff \chi_S(f(x)) = 1$ pa je $\chi_T = \chi_S \circ f$ rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih. □

Lema 1.1.11. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Tada je skup $S := \{x \in \mathbb{N}^k : f(x) = g(x)\}$ rekurzivan.*

Dokaz. Neka su $f_i, g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, komponentne funkcije od f i g redom. Funkcije $f_i, g_i, i = 1, \dots, n$ su rekurzivne. Skup $S_i = \{x \in \mathbb{N}^k : f_i(x) = g_i(x)\}$ je rekurzivan jer je $x \in S_i$ ako i samo ako je $\overline{sg}(|f_i(x) - g_i(x)|) = 1$, gdje je $\overline{sg}$ kao u dokazu propozicije 1.1.5. Dakle vrijedi $\chi_{S_i}(x) = \overline{sg}(|f_i(x) - g_i(x)|)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, što je rekurzivna funkcija. $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ pa je rekurzivan kao presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova. □

Propozicija 1.1.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Tada je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, onda je i $f^{-1}(S) = \emptyset$ pa je rekurzivno prebrojiv.
U suprotnom, neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija takva da je $S = g(\mathbb{N})$.
Tada je

$$x \in f^{-1}(S) \iff f(x) \in S \iff f(x) \in g(\mathbb{N}) \iff (\exists y \in \mathbb{N}) f(x) = g(y).$$

Definiramo $T = \{(x, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \mid f(x) = g(y)\}$, sada je

$$x \in f^{-1}(S) \iff (\exists y \in \mathbb{N})(x, y) \in T.$$

T je rekurzivan jer je jednak skupu $\{(x \in \mathbb{N}^{k+1} \mid F(x) = G(x)\}$, gdje su $F, G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^n$ definirane sa $F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = f(x_1, \dots, x_k)$, $G(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = g(x_{k+1})$, koji je rekurzivan po prethodnoj lemi. Po teoremu o projekciji slijedi da je $f^{-1}(S)$ rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 1.1.13. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su i skupovi $S \cup T$ i $S \cap T$ rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$, tvrdnja trivijalno vrijedi. U nastavku promatramo slučaj kada su S i T oba neprazni.
Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije takve da je $S = f(\mathbb{N})$ i $T = g(\mathbb{N})$.

$$\begin{aligned} x \in S \cap T &\iff x \in S \text{ i } x \in T \iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ t.d. je } x = f(i) \text{ i } \exists j \in \mathbb{N} \text{ t.d. je } x = g(j) \\ &\iff \exists (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ t.d. je } x = f(i) \text{ i } x = g(j) \end{aligned}$$

Definiramo $\Omega = \{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = f(i) \text{ i } x = g(j)\}$. Vrijedi $x \in S \cap T$ ako i samo ako postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x, i, j) \in \Omega$.
Skup Ω je rekurzivan jer je jednak skupu $\{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid F(x) = G(x)\}$, gdje su $F, G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}^{2k}$, $F(x, i, j) = (x, x)$, $G(x, i, j) = (f(i), g(j))$. Sada je skup $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv po teoremu o projekciji.

Definiramo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x//2), \ x \text{ paran} \\ g(x//2), \ x \text{ neparan} \end{cases} .$$

Karakteristična funkcija skupa parnih brojeva je rekurzivna i cjelobrojno dijeljenje s 2, u oznaci $//2$, je rekurzivno pa je h rekurzivna.
Vrijedi $h(\mathbb{N}) = S \cup T$, dakle $S \cup T$ je rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 1.1.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in S$. Tada je funkcija $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $h(x) = \mu i((x, i) \in S)$ rekurzivna.*

Dokaz. Funkcija h je parcijalno rekurzivna jer je dobivena minimizacijom rekurzivne relacije i totalna je zbog uvjeta propozicije. Dakle rekurzivna je. □

Propozicija 1.1.15. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ takav da su S i S^C rekurzivno prebrojivi. Tada je S rekurzivan.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $S^C = \emptyset$, tvrdnja trivijalno vrijedi. U nastavku promatramo slučaj kada su S i S^C oba neprazni.

Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije takve da je $S = f(\mathbb{N})$ i $S^C = g(\mathbb{N})$. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $h(x) = \mu i(x = f(i) \text{ ili } x = g(i))$, i skup
$\Omega = \{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x = f(i) \text{ ili } x = g(i)\}$. Vrijedi

$$\Omega = \{(f(i), i) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{(g(i), i) : i \in \mathbb{N}\}$$

pa je rekurzivan kao unija dva rekurzivna skupa. Imamo $h(x) = \mu i((x, i) \in \Omega)$ pa po prethodnoj propoziciji slijedi da je h rekurzivna. Vrijedi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid x = f(h(x))\}$.
Skup S je rekurzivan po lemi 1.1.11. □

Propozicija 1.1.16. *Postoje rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $\{(\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i))) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nepraznih nizova u $\mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ kao u primjeru 1.1.2. Definiramo $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$\sigma(i, j) = e(i, j) \dot{-} 1, \ \text{te } \eta(i) = \begin{cases} \min\{j \in \mathbb{N} \mid p_{j+1} \nmid i\}, \ i \geqslant 1 \\ 0, \ i = 0 \end{cases}$$

gdje su $p_0, p_1, p_2, \ldots$ svi prosti brojevi redom. Poznato je da su tako zadane σ i η rekurzivne.
Očito je za $i \in \mathbb{N}$ niz $(\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i)))$ neprazan konačan niz u $\mathbb{N}$.
Za proizvoljan $(a_0, \ldots, a_n)$ konačan niz u $\mathbb{N}$ definiramo $i = p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$. Za tako zadani i vrijedi $\eta(i) = n$, te $\sigma(i, j) = a_j$ za $0 \leqslant j \leqslant \eta(i)$. Dakle za svaki a konačan niz u $\mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $a = (\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i)))$. □

Od sada pa nadalje neka su σ i η neke fiksirane funkcije kao u prethodnoj propoziciji. Uvodimo oznake:

$$\begin{aligned}(i)_j &:= \sigma(i,j)\\ \bar{i} &:= \eta(i).\end{aligned}$$

Dakle $\{((i)_0,\dots,(i)_{\bar{i}})\}$ je skup svih konačnih nepraznih nizova u $\mathbb{N}$.
Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo $[i] = \{(i)_0,\dots,(i)_{\bar{i}}\}$.
Uočimo: $\{[i] \mid i \in \mathbb{N}\}$ je familija svih konačnih nepraznih podskupova od $\mathbb{N}$.

1.2 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$

Definicija 1.2.1. Funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) = (-1)^{b(x)}a(x)$.

Lema 1.2.2. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcija. Tada je f rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = u(x) - v(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je f rekurzivna i neka su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)}a(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$.
Definiramo $u(x) = \begin{cases} 0, \ b(x) \text{ neparan} \\ a(x), \text{ inače} \end{cases}$, $v(x) = \begin{cases} a(x), \ b(x) \text{ neparan} \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$.
Skup $S := \{x \in \mathbb{N}^k \mid b(x) \notin 2\mathbb{N}\}$ je rekurzivan jer je $\chi_S = n \circ b$, gdje je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ karakteristična funkcija neparnih brojeva, koja je rekurzivna. Sada su $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne po teoremu o grananju i vrijedi $f = u - v$.

Obratno, neka su $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne takve da je $f = u - v$. Funkcija $abs : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $abs(x,y) = |x-y|$ je rekurzivna pa je i $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $a(x) = abs(u(x), v(x))$ rekurzivna.
Definiramo $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $b(x) = \begin{cases} 0, u(x) > v(x) \\ 1, \text{ inače} \end{cases}$.
Skup $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y\}$ je rekurzivan jer je $\chi_\Delta(x,y) = sg(x \dot{-} y)$. Treba pokazati da je i skup $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) > v(x)\}$ rekurzivan. Vrijedi

$$x \in T \iff (u(x), v(x)) \in \Delta \iff \chi_\Delta(u(x), v(x)) = 1.$$

Dakle $\chi_T(x) = \chi_\Delta(u(x), v(x))$ pa je T rekurzivan, a onda i T^C. Slijedi da je b rekurzivna. I za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) = (-1)^{b(x)}a(x)$. ◻

Propozicija 1.2.3. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne.*

Dokaz. Neka su $a, b, c, d : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{b(x)}a(x)$ i $g(x) = (-1)^{d(x)}c(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $(f \cdot g)(x) = (-1)^{b(x)+d(x)}a(x) \cdot c(x)$ rekurzivna jer su $b + d, a \cdot c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.

Neka su $u, v, u', v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f = u - v$, $g = u' - v'$. Tada je $f + g = u + u' - (v + v')$ rekurzivna po prethodnoj lemi. □

Lako se vidi da vrijedi iduća tvrdnja:

Lema 1.2.4. *Funkcija* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *je rekurzivna ako i samo ako je rekurzivna kao funkcija* $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$*.*

Iduća tvrdnja je poznata iz izračunljivosti:

Propozicija 1.2.5. *Neka je* $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *rekurzivna funkcija i neka su* $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne. Tada su funkcije* $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$*,*

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leqslant \beta(x) \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leqslant \beta(x) \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

rekurzivne.

Propozicija 1.2.6. *Neka je* $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ *rekurzivna funkcija i neka su* $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne. Tada su funkcije* $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$*,*

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leqslant \beta(x) \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i), & \alpha(x) \leqslant \beta(x) \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

rekurzivne.

Dokaz. U nastavku uzimamo da je prazna suma jednaka 0 i da je prazan produkt 1, to jest $\sum_{i=n_1}^{n_2} z_i = 0$ i $\prod_{i=n_1}^{n_2} z_i = 1$ ako je $n_1 > n_2$.
Postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x,i) = u(x,i) - v(x,i)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Definiramo $g_1, g_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $g_1(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} u(x,i)$, $g_2(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} v(x,i)$, one su rekurzivne po prethodnoj propoziciji. Funkcija g je rekurzivna jer je $g = g_1 - g_2$.

Postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x,i) = (-1)^{b(x,i)} a(x,i)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Definiramo $e, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $e(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} b(x,i)$, $c(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} a(x,i)$, one su rekurzivne po prethodnoj propoziciji.
Vrijedi $h(x) = (-1)^{e(x)} c(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, pa je h rekurzivna funkcija. □

1.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$

Definicija 1.3.1. Funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) = (-1)^{c(x)} \dfrac{a(x)}{b(x)}$.

Lema 1.3.2. *Neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ i $g : \mathbb{N}^l \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je i $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \dfrac{a(x)}{b(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^l$. Tada su $a \circ f, b \circ f, c \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $(g \circ f)(x) = (-1)^{(c \circ f)(x)} \dfrac{(a \circ f)(x)}{(b \circ f)(x)}$. □

Lema 1.3.3. *Funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $u : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f = \frac{u}{v}$.*

Propozicija 1.3.4. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne.*

Dokaz. Neka su $u, u' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v, v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f = \frac{u}{v}$ i $g = \frac{u'}{v'}$. Tada su i $u \cdot u', v, v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v \cdot v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne, pa su onda i $u \cdot v', u' \cdot v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $u \cdot v' + u' \cdot v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne. Po prethodnoj lemi su onda rekurzivne i $f \cdot g = \frac{u \cdot u'}{v \cdot v'}$, $f + g = \frac{u \cdot v' + u' \cdot v}{v \cdot v'}$. □

Iz izračunljivosti je poznato da vrijedi iduća tvrdnja:

Propozicija 1.3.5. *Funkcija $q : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $q(x,y) = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, y \geqslant 1 \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$ je rekurzivna.*

Propozicija 1.3.6. *Funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ je rekurzivna ako i samo ako je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.*

Dokaz. Neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$
Ako je f rekurzivna, onda je $g = \frac{f}{C_1}$, gdje je $C_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $C_1(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, rekurzivna funkcija. Dakle, g je rekurzivna.

Ako je g rekurzivna, onda postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = g(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Zbog $g(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{Z}$ je

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \left\lfloor \frac{a(x)}{b(x)} \right\rfloor = (-1)^{c(x)} q(a(x), b(x)), \forall x \in \mathbb{N}^k,$$

gdje je q kao u prethodnoj propoziciji. Kako su $c, q \circ (a, b) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne, slijedi da je f rekurzivna. □

Lema 1.3.7. *Neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivna funkcija. Tada su skupovi* $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$ *i* $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ *rekurzivni.*

Dokaz. Funkcija f je rekurzivna pa postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je za svaki x iz $\mathbb{N}^k$ $f(x) = (-1)^{a(x)} \frac{b(x)}{c(x)}$.
Vrijedi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid b(x) = 0\}$ pa je $\chi_S = \overline{sg} \circ b$ što je rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih.
Definiramo $U = \{x \in \mathbb{N}^k \mid b(x) \neq 0\}$, $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid 2|a(x)\}$. Imamo $T = U \cap V$. Skup U je rekurzivan kao komplement rekurzivnog skupa, V je rekurzivan jer je $\chi_V = g \circ a$, gdje je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ karakteristična funkcija parnih brojeva, koja je rekurzivna. T je sada rekurzivan kao presjek dvaju rekurzivnih skupova. □

Propozicija 1.3.8. *Neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *rekurzivne funkcije. Tada su skupovi* $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$ *i* $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$ *rekurzivni.*

Dokaz. Od prije znamo da je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $h = g - f$ rekurzivna. $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = 0\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) > 0\}$. S i T su rekurzivni po prethodnoj lemi. □

Propozicija 1.3.9. *Neka su* $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ *i* $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i* $g, h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $g(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, i)$, $h(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, i)$.

Dokaz. Postoje rekurzivne funkcije $b : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$, $n : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da je $f = \frac{b}{n}$. Onda su i $c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $d : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $c(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} b(x, i)$, $d(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} n(x, i)$ rekurzivne, $d(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vrijedi $h = \frac{c}{d}$ pa je i h rekurzivna.

$$\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{b(x,i)}{n(x,i)} = \frac{\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} (b(x,i) \prod_{j=\alpha(x), j\neq i}^{\beta(x)} n(x, j))}{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} n(x, j)} = \frac{\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(b(x,i) \left\lfloor \frac{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} n(x,j)}{n(x,i)} \right\rfloor \right)}{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} n(x, j)}$$

Definiramo $\psi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$\psi(x,i) = \left\lfloor \frac{\prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} n(x,j)}{n(x,i)} \right\rfloor$$

ψ je rekurzivna po propoziciji 1.3.5. Funkcija $b \cdot \psi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Z}$ je rekurzivna pa je i $\gamma : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}, \gamma(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} b(x,i)\psi(x,i)$ rekurzivna, a onda i g jer je kvocijent rekurzivnih funkcija γ i $x \mapsto \prod_{j=\alpha(x)}^{\beta(x)} n(x,j)$. □

1.4 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Definicija 1.4.1. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je rekurzivna (rekurzivan niz u $\mathbb{R}$) ako postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ takva da je $|f(x) - g(x,k)| < 2^{-k}$, $\forall x, k \in \mathbb{N}$.
Funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ je rekurzivna ako postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|f(x) - g(x,l)| < 2^{-l}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Funkciju g tada zovemo rekurzivnom aproksimacijom od f.

Lema 1.4.2. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna. Tada je f rekurzivna i kao funkcija u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}, h(x) := f(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}, g(x,l) := f(x)$ rekurzivna aproksimacija od h jer za svaki x iz $\mathbb{N}^k$ i svaki l iz $\mathbb{N}$ vrijedi
$|h(x) - g(x,l)| = |f(x) - f(x)| = 0 < 2^{-l}$, i g je rekurzivna po lemi 1.3.2 kao kompozicija rekurzivnih funkcija. □

Propozicija 1.4.3. *Neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne. Tada je i $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka je h rekurzivna aproksimacija od f, dakle $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$,
$|f(x) - h(x,l)| < 2^{-l}, \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall l \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $\tilde{h} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$,
$\tilde{h}(y,l) = h(g(y),l)$, $\tilde{h}$ je rekurzivna po lemi 1.3.2 kao kompozicija rekurzivnih funkcija i za svaki y iz $\mathbb{N}^n$ i svaki l iz $\mathbb{N}$ vrijedi $|f(g(y)) - \tilde{h}(y,l)| < 2^{-l}$, dakle $\tilde{h}$ je rekurzivna aproksimacija od $f \circ g$. □

Propozicija 1.4.4. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je i $f + g$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $\tilde{f}, \tilde{g}$ rekurzivne aproksimacije od f, g redom. Definiramo funkcije
$h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}, h = f + g$, te $\tilde{h} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}, \tilde{h}(x,l) = \tilde{f}(x,l+1) + \tilde{g}(x,l+1)$, $\tilde{h}$ je rekurzivna kao zbroj rekurzivnih racionalnih funkcija $(x,l) \mapsto \tilde{f}(x,l+1)$ i $(x,l) \mapsto \tilde{g}(x,l+1)$ koje

su rekurzivne kao kompozicija koordinatnih projekcija, funkcije sljedbenik i rekurzivnih funkcija.

$$|h(x) - \tilde{h}(x,l)| = |f(x) + g(x) - \tilde{f}(x,l+1) - \tilde{g}(x,l+1)|$$
$$\leqslant |f(x) - \tilde{f}(x,l+1)| + |g(x) - \tilde{g}(x,l+1)| < 2 \cdot 2^{-l-1} = 2^{-l}$$

□

Iduća tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 1.1.14:

Propozicija 1.4.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x,i) \in S$. Onda postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, f(x)) \in S$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$.*

Lema 1.4.6. *Neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije, i g i H su rekurzivne, neka je $0 < q < 1$ i vrijedi $|f(x) - g(x,l)| < q^l \cdot H(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna.*

Dokaz. Odaberemo $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ takve da je $a < b$ i $q < \frac{a}{b}$. Tada je $|f(x) - g(x,l)| < (\frac{a}{b})^l \cdot H(x)$. Definiramo $S = \{(x,l,l') : (\frac{a}{b})^{l'} \cdot H(x) < 2^{-l}\}$, S je rekurzivan po propoziciji 1.3.8, i za svaki (x,l) postoji l' takav da je $(x,l,l') \in S$.
Dakle po prethodnoj propoziciji postoji rekurzivna funkcija $c : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x,l,c(x,l)) \in S$ za sve x, l. Onda je jedna rekurzivna aproksimacija od f funkcija $\tilde{f}(x,l) = g(x, c(x,l))$, ona je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija i vrijedi

$$|f(x) - \tilde{f}(x,l)| = |f(x) - g(x, c(x,l))| < (\frac{a}{b})^{c(x,l)} \cdot H(x) < 2^{-l}.$$

□

Lema 1.4.7. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $|f(x)| \leqslant H(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $|f(x) - F(x,i)| < 2^i$. Onda je $|f(x)| - |F(x,i)| \leqslant |f(x) - F(x,i)| < 2^i$ pa je $|f(x)| < |F(x,i)| + 2^i$. Posebno vrijedi $|f(x)| < |F(x,0)| + 1$.

Funkcija $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $g(x) = |F(x,0)| + 1$ je rekurzivna pa postoje rekurzivne $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $g(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi $|f(x)| < g(x) \leqslant a(x)$ pa funkcija $H = a$ zadovoljava tvrdnju leme. □

Propozicija 1.4.8. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne. Tada je i $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna.*

Dokaz. Po prethodnoj lemi postoje rekurzivne $H_1, H_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $|f(x)| \leqslant H_1(x)$ i $|g(x)| + 1 \leqslant H_2(x)$. Neka su $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne aproksimacije od f, g redom. $\tilde{f} \cdot \tilde{g} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna.

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - \tilde{f}(x,l) \cdot \tilde{g}(x,l)| &= |f(x) \cdot g(x) - \tilde{f}(x,l) \cdot \tilde{g}(x,l) + f(x)\tilde{g}(x,l) - f(x)\tilde{g}(x,l)| \\ &\leqslant |f(x) \cdot (g(x) - \tilde{g}(x,l))| + |\tilde{g}(x,l) \cdot (f(x) - \tilde{f}(x,l))| \\ &\leqslant |f(x)| \cdot 2^{-l} + |\tilde{g}(x,l)| \cdot 2^{-l} \leqslant (H_1(x) + H_2(x)) \cdot 2^{-l} \end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost vrijedi jer je $|\tilde{g}(x,l)| \leqslant |g(x)| + 1 \leqslant H_2(x)$ (jer $|\tilde{g}(x,l)| - |g(x)| \leqslant |\tilde{g}(x,l) - g(x)| \leqslant 1$).

Sada po lemi 1.4.6 slijedi da je $f \cdot g$ rekurzivna. □

Propozicija 1.4.9. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna. Tada je skup $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f.

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{N}^k$ te da je $f(x) > 0$. Znamo da vrijedi $F(x,i) \to f(x)$. Postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-i} < F(x,i)$ jer bi u suprotnom za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedilo $F(x,i) \leqslant 2^{-i}$ pa bi bilo $f(x) \leqslant 0$.

Ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-i} < F(x,i)$, onda je i $f(x) > 0$ jer bi u suprotnom bilo $2^{-i} \geqslant |F(x,i) - f(x)| = F(x,i) - f(x)$, dakle $2^{-i} - F(x,i) \geqslant -f(x) \geqslant 0$, što je u kontradikciji s $2^{-i} < F(x,i)$.

Dakle $f(x) > 0$ ako i samo ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-i} < F(x,i)$.

Neka je $S := \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$. Imamo $x \in S \iff \exists i \in \mathbb{N}$ t.d. je $2^{-i} < F(x,i)$. Odnosno $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \exists i \in \mathbb{N} \text{ t.d. je } (x,i) \in T\}$ pri čemu je $T := \{(x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid 2^{-i} < F(x,i)\}$. Po teoremu o projekciji i propoziciji 1.3.8 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 1.4.10. *Neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ i $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i)$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Definiramo $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $G(x,l) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,i,l)$. G je rekurzivna po propoziciji 1.2.5. Imamo

$$|g(x) - G(x,l)| = |\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} (f(x,i) - F(x,i,l))| \leqslant \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} |f(x,i) - F(x,i,l)| < (\beta(x) + 1) \cdot 2^{-l}$$

Sada je po lemi 1.4.6 funkcija g rekurzivna. □

Lema 1.4.11. *Ako su $a_1, \dots, a_n,\ A_1, \dots, A_n,\ M,\ \varepsilon \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$\begin{cases} |a_i| < M,\ i = 1, \dots, n \\ |A_i| < M,\ i = 1, \dots, n \\ |a_i - A_i| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{$*$}$$

onda vrijedi $|a_1 \dots a_n - A_1 \dots A_n| < n \cdot M^{n-1} \cdot \varepsilon$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Baza: za $n = 1$ vrijedi $|a_1 - A_1| < \varepsilon$.
Pretpostavka: ako za n i $a_1, \dots, a_n, A_1, \dots, A_n$ vrijedi $(*)$, onda je
$|a_1 \dots a_n - A_1 \dots A_n| < n \cdot M^{n-1} \cdot \varepsilon$.
Korak: uzmemo $a_1, \dots, a_{n+1}$, $A_1, \dots, A_{n+1}$ takve da vrijedi $(*)$, $|a_{n+1}| < M$, $|A_{n+1}| < M$ i $|a_{n+1} - A_{n+1}| < \varepsilon$. Definiramo $s = \prod_{i=1}^{n} a_i$, $S = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Vrijedi

$$\begin{aligned} |a_1 \dots a_{n+1} - A_1 \dots A_{n+1}| &= |sa_{n+1} - SA_{n+1}| \\ &= |sa_{n+1} - sA_{n+1} + sA_{n+1} - SA_{n+1}| \\ &\leqslant |s| \cdot |a_{n+1} - A_{n+1}| + |s - S| \cdot |A_{n+1}| \\ &< M^n \cdot \varepsilon + nM^{n-1}\varepsilon \cdot M \\ &= (n+1)M^n\varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle pretpostavka vrijedi i za $n + 1$. □

Idu´ca propozicija je poznata činjenica iz izračunljivosti:

Propozicija 1.4.12. *Neka su $\beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $f : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je rekurzivna i funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \max\{f(x,i) \mid 0 \leqslant i \leqslant \beta(x)\}$.*

Propozicija 1.4.13. *Neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ i $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $g(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i)$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f.
Po lemi 1.4.7 postoji rekurzivna funkcija $M' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takva da je
$|f(x,i)| \leqslant M'(x,i)$, $\forall x \in \mathbb{N}^{k+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Definiramo $M : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $M(x,i) = M'(x,i) + 1$.

Vrijedi $|f(x,i)| < M(x,i)$ i $|F(x,i,l)| < M(x,i)$. Definiramo $N : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,
$N(x) = \max\{M(x,i) \mid 0 \leqslant i \leqslant \beta(x)\}$, N je rekurzivna.
Imamo:

$$\begin{aligned} |f(x,i)| &< N(x), \forall i \in \{\alpha(x), \dots, \beta(x)\} \\ |F(x,i,l)| &< N(x), \forall i \in \{\alpha(x), \dots, \beta(x)\} \\ |f(x,i) - F(x,i,l)| &< 2^{-l}, \forall i \in \{\alpha(x), \dots, \beta(x)\} \end{aligned}$$

Sada po prethodnoj lemi vrijedi

$$\left|\prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,i) - \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,i,l)\right| < (\beta(x)+1)N(x)^{\beta(x)} \cdot 2^{-l}$$

pa je po lemi 1.4.6 g rekurzivna. □

1.5 Izračunljivi brojevi

Definicija 1.5.1. Broj $\alpha \in \mathbb{R}$ je izračunljiv ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|\alpha - f(k)| < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Korolar 1.5.2. *Svaki racionalan broj je izračunljiv.*

Propozicija 1.5.3. *Skup izračunljivih brojeva je prebrojiv.*

Dokaz. Svaki izračunljiv broj α ima pripadnu rekurzivnu funkciju $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takvu da je $|\alpha - f_\alpha(k)| < 2^{-k}$, i svaka takva funkcija f ima pripadne rekurzivne funkcije $a_f, b_f, c_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $f = (-1)^{c_f}\frac{a_f}{b_f}$.
Pridruživanja $\alpha \mapsto f_\alpha$ i $f \mapsto (a_f, b_f, c_f)$ su injektivna, a kako rekurzivnih funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$ ima prebrojivo mnogo slijedi da i izračunljivih brojeva ima prebrojivo mnogo. □

Lema 1.5.4. *Neka su $a_0 \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$, $\forall i \geqslant 1$. Neka je $\alpha = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ decimalni zapis broja α.*
Ako je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = a_n$ rekurzivna, onda je α izračunljiv broj.

Dokaz. Imamo $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Uzmimo $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} |\alpha - \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{10^n}| &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leqslant 9 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{9}{10^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{k+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^k} \end{aligned}$$

Dakle, $|\alpha - \sum_{n=0}^{k+1} \frac{a_n}{10^n}| \leqslant \frac{1}{10^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$.
Definiramo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(k) = \sum_{n=0}^{k+1} \frac{a_n}{10^n}$. Funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $h(k,n) = \frac{f(n)}{10^n}$ je rekurzivna jer je f rekurzivna. Funkcije $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\alpha(x) = 0, \beta(x) = x+1$, $\forall x \in \mathbb{N}$ su rekurzivne pa je po lemi 1.3.9 rekurzivna i g jer je $g(k) = \sum_{i=\alpha(k)}^{\beta(k)} h(k,i)$. □

Primjer 1.5.5. $\sqrt{2}$ je izračunljiv.
Neka je $a_0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ decimalni zapis od $\sqrt{2}$.
Tada je $a_0, a_1a_2a_3 \dots a_n < \sqrt{2} < a_0, a_1a_2a_3 \dots a_n + 10^{-n} \quad \backslash \cdot 10^n$
$a_0a_1a_2a_3 \dots a_n < \sqrt{2} \cdot 10^n < a_0a_1a_2a_3 \dots a_n + 1 \quad \backslash^2$
$(a_0a_1a_2a_3 \dots a_n)^2 < 2 \cdot 10^{2n} < (a_0a_1a_2a_3 \dots a_n + 1)^2$
$\Longrightarrow a_0a_1a_2a_3 \dots a_n = (\mu y(2 \cdot 10^{2n} < y^2)) \dot{-} 1$
$a_n = ost(a_0a_1a_2a_3 \dots a_n, 10)$, gdje je $ost : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija koja uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ pridruži ostatak koji x daje pri dijeljenju s y ako je $y \neq 0$, a 0 inače. Poznato je da je ta funkcija rekurzivna.
Dakle $a_n = ost((\mu y(2 \cdot 10^{2n} < y^2)) \dot{-} 1, 10)$ pa je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = a_n$ rekurzivna.

Po prethodnoj lemi slijedi da je $\sqrt{2}$ izračunljiv.

Napomena. Slično kao u prethodnom primjeru se može pokazati i da je $\sqrt[p]{n}$ izračunljiv za bilo koje $p, n \in \mathbb{N}_+$.

Primjer 1.5.6. e je izračunljiv broj.
Imamo $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Za $i \geqslant 4$ vrijedi $2^i < i!$.
Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$. Imamo

$$|e - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}$$

$|e - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}| < \frac{1}{2^k}, \forall k \geqslant 3$
$\Longrightarrow |e - \sum_{i=0}^{k+4} \frac{1}{i!}| < \frac{1}{2^{k+4}} < \frac{1}{2^k}, \forall k \in \mathbb{N}$
Definiramo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(k) = \sum_{i=0}^{k+4} \frac{1}{i!}$. Funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $h(k, i) = \frac{1}{i!}$ je rekurzivna i funkcije $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\alpha(x) = 0, \beta(x) = x + 4$, $\forall x \in \mathbb{N}$ su rekurzivne. Sada je po lemi 1.3.9 rekurzivna i funkcija g.

Propozicija 1.5.7.

1. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $f(x)$ izračunljiv broj za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

2. *Neka je α izračunljiv broj. Tada je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, rekurzivna.*

Napomena. Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(x)$ izračunljiv broj za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, f ne mora biti rekurzivna. Svih funkcija $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ ima neprebrojivo mnogo, a rekurzivnih funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ima samo prebrojivo mnogo, dakle postoji funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ koja nije rekurzivna i takva da je $f(\mathbb{N}) \subseteq \{0, 1\}$.

Prisjetimo se da smo fiksirali rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $\{(\sigma(i,0), \dots, \sigma(i,\eta(i)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nepraznih nizova u $\mathbb{N}$.
Uveli smo oznake: $(i)_j = \sigma(i, j)$, $\bar{i} = \eta(i)$.
Dakle, $\{((i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}} \mid i \in \mathbb{N}\}$ je skup svih konačnih nepraznih nizova u $\mathbb{N}$.
Definirali smo $[i] = \{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\}$.

Definiramo funkciju $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $\alpha(x) = (-1)^{\sigma(x,0)} \frac{\sigma(x,1)}{\sigma(x,2)+1} = (-1)^{(x)_0} \frac{(x)_1}{(x)_2+1}$, $\forall x \in \mathbb{N}$.
Lako se vidi da je α rekurzivna surjekcija.
Primijetimo da je $\{(\alpha_{(i)_0}, \dots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{Q}$ te da je $\{\{\alpha_{(i)_0}, \dots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}\} \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{Q}$.
Uvodimo oznaku $\Lambda_i := \{\alpha_{(i)_0}, \dots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}\}$.

Definicija 1.5.8. Neka je S neprazan i kompaktan podskup od $\mathbb{R}$. Kažemo da je S izračunljiv skup ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$S \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.6 Rekurzivne i rekurzivno omeđene funkcije

Definicija 1.6.1. Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. Kažemo da je Φ rekurzivna funkcija ako je funkcija $\tilde{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$, $\tilde{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^n$, rekurzivna.
Uočimo da je to ekvivalentno sljedećem: skup $\{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x)\}$ je rekurzivan.

Za $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neka je

$$\mathbb{N}^k_m := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid 0 \leqslant x_i \leqslant m, \ \forall i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Posebno, $\mathbb{N}_m = \{0, \dots, m\}$.

Definicija 1.6.2. Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je rekurzivno omeđena ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}, \ \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Uočimo: ako je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ rekurzivno omeđena funkcija, onda je $\Phi(x)$ konačan skup za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Definicija 1.6.3. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ koja je rekurzivna i rekurzivno omeđena kažemo da je r.r.o. funkcija.

Propozicija 1.6.4. *Neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su i funkcije $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$,*

$$\Lambda_1(x) = \Phi(x) \cap \Psi(x)$$
$$\Lambda_2(x) = \Phi(x) \cup \Psi(x)$$
$$\Lambda_3(x) = \Phi(x) \backslash \Psi(x)$$

r.r.o.

Dokaz. Neka su $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ i $\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\psi(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je i funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \max\{\varphi(x), \psi(x)\}$ rekurzivna. Funkcije $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ su rekurzivno omeđene jer za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $\Lambda_1(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\max\{\varphi(x),\psi(x)\}}$, $\Lambda_2(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ i $\Lambda_3(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$.

Pokažimo da su skupovi $\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Lambda_i(x)\}$, $i = 1, 2, 3$, rekurzivni. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x) \cup \Psi(x)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Psi(x)\} \\
\Omega_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x) \cap \Psi(x)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x)\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Psi(x)\} \\
\Omega_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x) \backslash \Psi(x)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Phi(x)\} \cap (\mathbb{N}^{k+n} \backslash \{(x, y) \in \mathbb{N}^{k+n} \mid y \in \Psi(x)\})
\end{aligned}$$

pa su Ω_2 i Ω_3 rekurzivni kao presjek dva rekurzivna skupa, a Ω_1 kao unija dva rekurzivna skupa. □

Lema 1.6.5. *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Tada postoje rekurzivne funkcije $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$\mathbb{N}^n_m \subseteq \{g(i) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(m)\}, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Neka je $g(x) = (e(x, 0), \ldots, e(x, n-1))$, gdje je e funkcija iz primjera 1.1.2. Neka su $p_0, p_1, p_2, \ldots$ svi prosti brojevi u rastućem poretku. Definiramo $\tau(m) = (p_0 \cdot \ldots \cdot p_{n-1})^m$. Neka je $x \in \mathbb{N}^n_m$. Tada je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ za neke $0 \leqslant x_i \leqslant m$, $i = 1, \ldots, n$ pa za $i = p_0^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{x_n}$ vrijedi $x = g(i)$ te $0 \leqslant i \leqslant \tau(m)$. □

Lema 1.6.6. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija. Tada je skup $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \varnothing\}$ rekurzivan.*

Dokaz. Neka je $\tilde{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ takva da je $\tilde{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^n$ te neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da za sve $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$.

Definiramo funkciju $\varepsilon : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kao $\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\tau(\varphi(x))} \tilde{\Phi}(x, g(i))$, gdje su g i τ kao iz prethodne leme. Funkcija $\tilde{\Phi}$ je rekurzivna jer je Φ r.r.o. pa je po propoziciji 1.2.5 ε rekurzivna funkcija.
Ako je $x \in S$, onda je $\Phi(x) = \emptyset$ pa za svaki $i \in \mathbb{N}$ (onda posebno i za svaki $i \leqslant \tau(\varphi(x))$) vrijedi $\tilde{\Phi}(x, g(i)) = 0$ pa je $\varepsilon(x) = 0$, odnosno $\overline{sg}(\varepsilon(x)) = 1$.
Ako je $x \in \mathbb{N}^k \backslash S$, onda postoji $y \in \Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(\varphi(x))\}$. U tom slučaju je $\varepsilon(x) \geqslant 1$, odnosno $\overline{sg}(\varepsilon(x)) = 0$.
Dobili smo da je $\chi_S = \overline{sg} \circ \varepsilon$ što je rekurzivna funkcija, dakle S je rekurzivan skup. □

Propozicija 1.6.7. *Neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije. Tada su skupovi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\}$ i $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Funkcija $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Lambda(x) = \Phi(x) \backslash \Psi(x)$ je r.r.o. po propoziciji 1.6.4 i vrijedi $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \backslash \Psi(x) = \emptyset\} = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Lambda(x) = \emptyset\}$ pa je po prethodnoj lemi S rekurzivan.
Imamo $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\} \cap \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Psi(x) \subseteq \Phi(x)\}$, ta dva skupa su rekurzivni po prvom dijelu dokaza, dakle T je rekurzivan kao presjek dva rekurzivna skupa. □

Propozicija 1.6.8. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna. Tada je $\Phi \circ f : \mathbb{N}^l \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Definiramo $\Psi = \Phi \circ f$. Funkcija $\tilde{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$, $\tilde{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y)$ je rekurzivna pa je i funkcija $\tilde{\Psi} : \mathbb{N}^{l+n} \to \mathbb{N}$, $\tilde{\Psi}(x, y) = \tilde{\Phi}(f(x), y)$ rekurzivna jer je f rekurzivna.
Vrijedi $\tilde{\Psi}(x, y) = \chi_{\Phi(f(x))}(y) = \chi_{(\Phi \circ f)(x)}(y)$, dakle $\Phi \circ f$ je rekurzivna.
Neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $\varphi \circ f$ rekurzivna funkcija takva da je $\Psi(x) = \Phi(f(x)) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(f(x))}$, $\forall x \in \mathbb{N}^l$, odnosno $\Phi \circ f$ je rekurzivno omeđena. □

Teorem 1.6.9. *Neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Definiramo $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$,*

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y)$$

Tada je Λ r.r.o.

Dokaz. Neka su $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\psi(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Vrijedi

$$\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y) \subseteq \bigcup_{y \in \Phi(x)} \mathbb{N}^m_{\psi(y)} \subseteq \mathbb{N}^m_{\max\{\psi(y) | y \in \Phi(x)\}}$$

Neka su $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kao u lemi 1.6.5.
Zbog $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(\varphi(x))\}$ imamo

$$\{\psi(y) \mid y \in \Phi(x)\} \subseteq \{\psi(y) \mid y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}\} \subseteq \{\psi(g(i)) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(\varphi(x))\}$$

pa je $\max\{\psi(y) \mid y \in \Phi(x)\} \leqslant \max\{\psi(g(i)) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(\varphi(x))\}$,
dakle $\Lambda(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\max\{\psi(g(i)) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(\varphi(x))\}}$.
Jer su $\tau \circ \varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $\psi \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne, funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \max\{\psi(g(i)) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(\varphi(x))\}$ je rekurzivna po propoziciji 1.4.12. Time je pokazano da je Λ rekurzivno omeđena.

Pokažimo sada da je rekurzivna. Definiramo $\tilde{\Lambda} : \mathbb{N}^{k+m} \to \mathbb{N}$ kao $\tilde{\Lambda}(x, y) = \chi_{\Lambda(x)}(y)$ za sve $(x, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m$. Vrijedi $\tilde{\Lambda}(x, z) = 1$ ako i samo ako je $z \in \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y)$, odnosno ako i samo ako postoji $y \in \Phi(x)$ takav da je $z \in \Psi(y)$.

Tvrdimo da je $\tilde{\Lambda}(x, z) = 1$ ako i samo ako postoji $i \in \{0, \ldots, \tau(\varphi(x))\}$ takav da je $z \in \Psi(g(i))$ i $g(i) \in \Phi(x)$. Ako je $\tilde{\Lambda}(x, z) = 1$, onda postoji

$$y \in \Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{g(i) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tau(\varphi(x))\}$$

takav da je $z \in \Psi(y)$, odnosno postoji $i \in \{0, \ldots, \tau(\varphi(x))\}$ takav da je $g(i) = y \in \Phi(x)$ i $z \in \Psi(y) = \Psi(g(i))$. Obrat očito vrijedi.
Neka su $\tilde{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$, $\tilde{\Psi} : \mathbb{N}^{n+m} \to \mathbb{N}$ takve da je $\tilde{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y)$ i $\tilde{\Psi}(y, z) = \chi_{\Psi(y)}(z)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^n$, $z \in \mathbb{N}^m$. Iz prethodno dokazane tvrdnje slijedi da je

$$\tilde{\Lambda}(x, z) = sg\left(\sum_{i=0}^{\tau(\varphi(x))} \tilde{\Psi}(g(i), z) \cdot \tilde{\Phi}(x, g(i))\right)$$

što je rekurzivna funkcija po propoziciji 1.2.5. □

Korolar 1.6.10. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivna funkcija. Neka je $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ definirana sa $\Lambda(x) = f(\Phi(x))$. Tada je Λ r.r.o.*

Dokaz. Neka je $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ definirana sa $\Psi(x) = \{f(x)\}$, za sve $x \in \mathbb{N}^n$. Tvrdimo da je Ψ r.r.o.
Funkcija Ψ je rekurzivno omeđena jer je $\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}}$, gdje su $f_1, \ldots, f_m$ koordinatne funkcije od f, a funkcija $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ je rekurzivna.
Neka je $\tilde{\Psi} : \mathbb{N}^{n+m} \to \mathbb{N}$ definirana sa $\tilde{\Psi}(x, y) = \chi_{\Psi(x)}(y)$. Ona je karakteristična funkcija skupa $\{(x, y) \in \mathbb{N}^{n+m} \mid f(x) = y\}$ koji je rekurzivan po lemi 1.1.11. Time je pokazano da je Ψ r.r.o. funkcija.
Imamo da je $\Lambda(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y)$ pa je rekurzivna po prethodnom teoremu. □

Primjer 1.6.11. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Definiramo $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Phi(x) = \{f(0), \ldots, f(x)\}$. Tada je Φ r.r.o.
Definiramo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\Psi(i) = \{0, \ldots, i\}$, tvrdimo da je r.r.o. Imamo $\Psi(i) \subseteq \mathbb{N}_i$ pa je rekurzivno omeđena jer je identiteta $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Vrijedi $\tilde{\Psi}(x, y) = 1$ ako i samo ako je $y \leqslant x$, a relacija $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \leqslant x\}$ je rekurzivna. Dakle, Ψ je rekurzivna funkcija.
Sada je po prethodnom korolaru Φ rekurzivna jer je $\Phi(x) = f(\Psi(x))$.

Podsjetimo se da smo fiksirali rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $\{(\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nepraznih nizova u $\mathbb{N}$.
Uveli smo oznake: $(i)_j = \sigma(i, j)$, $\bar{i} = \eta(i)$.
Dakle, $\{((i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}} \mid i \in \mathbb{N}\}$ je skup svih konačnih nepraznih nizova u $\mathbb{N}$.
Definirali smo $[i] = \{(i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}}\}$.

Primjer 1.6.12. Funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $i \mapsto [i]$ je r.r.o.
Imamo
$$[i] = \{\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i))\} = \sigma(\{(i, 0), \ldots, (i, \eta(i))\})$$
pa je po korolaru 1.6.10 dovoljno pokazati da je funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$, $\Phi(i) = \{(i, 0), \ldots, (i, \eta(i))\}$ r.r.o.
Funkcija $i \mapsto \max\{i, \eta(i)\}$ je rekurzivna i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(i) \subseteq \mathbb{N}_{\max\{i, \eta(i)\}}$, dakle Φ je rekurzivno omeđena.
Definiramo $\tilde{\Phi} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $\tilde{\Phi}(i, x, y) = \overline{sg}(|i - x|) \cdot \overline{sg}(y \dot{-} \eta(i))$, to je rekurzivna funkcija.
Vrijedi $\chi_{\Phi(i)}(x, y) = \tilde{\Phi}(i, x, y)$, dakle Φ je rekurzivna.

Lema 1.6.13. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ neprazan rekurzivno prebrojiv skup. Tada postoji r.r.o. funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ takva da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(i) \subseteq \Phi(i + 1)$ te da je $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi(i)$.*

Dokaz. Budući da je S neprazan i rekurzivno prebrojiv, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $S = f(\mathbb{N})$. Definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ sa $\Phi(i) = \{f(0), \ldots, f(i)\}$.Tako definirana funkcija je r.r.o. po primjeru 1.6.11 i očito za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(i) \subseteq \Phi(i + 1)$ te je $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi(i)$. □

Propozicija 1.6.14. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada je skup $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq S\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je S prazan skup, onda je $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \emptyset\}$ pa je T rekurzivan po lemi 1.6.6.
Ako je S neprazan, onda prema prethodnoj lemi postoji r.r.o. funkcija $\Psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ takva da je $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi(i)$ te za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Psi(i) \subseteq \Psi(i + 1)$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $x \in T$ ako i samo ako je $\Phi(x) \subseteq S$, odnosno ako i samo ako postoji

$i \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(x) \subseteq \Psi(i)$.
Definiramo skup $V = \{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid (\Phi \circ I^{k+1}_{1:k})(x, i) \subseteq (\Psi \circ I^{k+1}_{k+1})(x, i)\}$. Kako su funkcije $\Phi \circ I^{k+1}_{1:k}$ i $\Psi \circ I^{k+1}_{k+1}$ r.r.o., po propoziciji 1.6.7 slijedi da je V rekurzivan skup. Dakle imamo da je $x \in T$ ako i samo ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, i) \in V$ pa je T rekurzivno prebrojiv skup kao projekcija rekurzivnog skupa V. □

Lema 1.6.15. *Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcija takva da je za svaki $x \in \mathbb{N}$ skup $\Phi(x)$ neprazan. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(x) = [g(x)]$.*

Dokaz. Skup $\Omega = \{(x, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(x) = [j]\}$ je rekurzivan te za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, j) \in \Omega$. Dakle postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x, g(x)) \in \Omega$, odnosno $\Phi(x) = [g(x)]$. □

Lema 1.6.16. *Neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Tada je i $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^{n+m})$, $\Lambda(x) = \Phi(x) \times \Psi(x)$ r.r.o. funkcija.*

Dokaz. Budući da su Φ i Ψ r.r.o. funkcije, postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ i $\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}$. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $\Lambda(x) \subseteq \mathbb{N}^{n+m}_{\max(\varphi(x),\psi(x))}$. Budući da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(i, j) \mapsto \max(i, j)$ rekurzivna slijedi da je Λ rekurzivno omeđena.
Funkcije $\tilde{\Phi} : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto \chi_{\Phi(x)}(y)$ i $\tilde{\Psi} : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $(x, z) \mapsto \chi_{\Psi(x)}(z)$ su rekurzivne pa su rekurzivne i funkcije $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $(x, y, z) \mapsto \tilde{\Phi}(x, y)$ i
$\overline{\Psi} : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $(x, y, z) \mapsto \tilde{\Psi}(x, z)$ budući da su dobivene kompozicijom rekurzivnih funkcija s koordinatnim projekcijama. Funkcija $\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$,
$(x, y, z) \mapsto \chi_{\Lambda(x)}(y, z)$ jednaka je produktu funkcija $\overline{\Phi}$ i $\overline{\Psi}$, dakle rekurzivna je.
Time je pokazano da je Λ r.r.o. funkcija. □

Poglavlje 2

Izračunljivost na metričkim prostorima

2.1 Hausdorffova metrika

Definicija 2.1.1. Neka je (X, d) metrički prostor. Za $S, T \subseteq X$ i $\varepsilon > 0$ pišemo $S \approx_\varepsilon T$ ako vrijedi

$$(\forall x \in S)(\exists y \in T)\ d(x, y) < \varepsilon \quad \text{i} \quad (\forall y \in T)(\exists x \in S)\ d(x, y) < \varepsilon.$$

Propozicija 2.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$ kompaktan i neprazan skup. Neka je D gust skup u (X, d). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup D' takav da je $D' \subseteq D$ i $K \approx_\varepsilon D'$.*

Dokaz. Skup $M := \{K(x, \varepsilon) \mid x \in D\}$ je pokrivač od X pa onda i od K. Kako je K kompaktan, postoji konačan $M' \subseteq M$ koji je pokrivač od K. Definiramo
$T = \{A \in M' \mid A \cap K \neq \emptyset\}$, po konstrukciji skupa T postoje $x_1, \ldots, x_n \in D$ takvi da je $T = \{K(x_1, \varepsilon), \ldots, K(x_n, \varepsilon)\}$. Tvrdimo da za $D' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ vrijedi $K \approx_\varepsilon D'$. Neka je $x \in K$. T je pokrivač od K pa postoji $y \in D'$ takav da je $x \in K(y, \varepsilon)$, odnosno $d(x, y) < \varepsilon$. Neka je sada $y \in D'$, onda zbog $K(y, \varepsilon) \in T$ vrijedi $K(y, \varepsilon) \cap K \neq \emptyset$. Dakle, postoji $x \in K$ takav da je $x \in K(y, \varepsilon)$, odnosno $d(x, y) < \varepsilon$. □

Definicija 2.1.3. Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $\mathcal{K}$ familija svih nepraznih kompaktnih skupova u (X, d). Definiramo funkciju $d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$,

$$d_H(S, T) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid S \approx_\varepsilon T\}.$$

Tu funkciju nazivamo Hausdorffova metrika.

Napomena. Funkcija d_H je dobro definirana jer je za svaka dva $S, T \in \mathcal{K}$ skup
$D := \{\varepsilon > 0 \mid S \approx_\varepsilon T\}$ neprazan. Naime, jer je $S \cup T$ kompaktan u (X, d), on je i omeđen, što znači da postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \cup T \subseteq K(x, r)$ pa je $2r \in D$.

Lema 2.1.4. *Neka su $S, T \in \mathcal{K}$ te neka je $r > 0$. Tada za svaki $x \in S$ postoji $y \in T$ takav da je $d(x, y) < d_H(S, T) + r$.*

Dokaz. Imamo $d_H(S, T) < d_H(S, T) + r$. Dakle postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon < d_H(S, T) + r$ i $S \approx_\varepsilon T$. Po definiciji od $S \approx_\varepsilon T$ za svaki $x \in S$ postoji $y \in T$ takav da je
$d(x, y) < \varepsilon < d_H(S, T) + r$. □

Propozicija 2.1.5. *Funkcija d_H je metrika na $\mathcal{K}$.*

Dokaz. Očito je $d_H(S, T) \geqslant 0, \forall S, T \in \mathcal{K}$.
Očito je $d_H(S, T) = d_H(T, S), \forall S, T \in \mathcal{K}$.
Neka je $S \in \mathcal{K}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $S \approx_\varepsilon S$. Stoga je $d_H(S, S) = \inf\langle 0, \infty\rangle = 0$. Obratno, neka su $S, T \in \mathcal{K}$ takvi da je $d_H(S, T) = 0$. Pretpostavimo da je $T \neq S$, onda bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji $x \in X$ takav da je $x \in S$ i $x \notin T$. Jer je $x \in T^C$ koji je otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq T^C$ pa je $\{\varepsilon > 0 \mid S \approx_\varepsilon T\} \subseteq \langle r, \infty\rangle$, što je u kontradikciji s $d_H(S, T) = 0$. Zaključak: ako su $S, T \in \mathcal{K}$ takvi da je $d_H(S, T) = 0$, onda je $S = T$.
Neka su $S, T, V \in \mathcal{K}$ te neka je $r > 0$. Neka je $x \in S$, tada po prethodnoj lemi postoji $y \in T$ takav da je $d(x, y) < d_H(S, T) + r$. Također po prethodnoj lemi postoji $z \in V$ takav da je $d(y, z) < d_H(T, V) + r$. Sada imamo

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d_H(S, T) + d_H(T, V) + 2r.$$

Dakle: $(\forall x \in S)(\exists z \in V)\ d(x, z) < d_H(S, T) + d_H(T, V) + 2r$.
Analogno se pokaže da vrijedi: $(\forall z \in V)(\exists x \in S)\ d(x, z) < d_H(S, T) + d_H(T, V) + 2r$.
Dakle, za svaki $r > 0$ vrijedi $S \approx_{d_H(S,T)+d_H(T,V)+2r} V$, odnosno
$\{\varepsilon > 0 \mid S \approx_\varepsilon V\} \supseteq \{d_H(S, T) + d_H(T, V) + 2r \mid r > 0\}$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} d_H(S, V) &= \inf\{\varepsilon > 0 \mid S \approx_\varepsilon V\} \\ &\leqslant \inf\{d_H(S, T) + d_H(T, V) + 2r \mid r > 0\} \\ &= d_H(S, T) + d_H(T, V). \end{aligned}$$

Time je pokazano da je d_H metrika na $\mathcal{K}$. □

Lema 2.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te A neprazan podskup od X. Tada je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, definirana sa $f(x) = d(x, A)$, neprekidna.*

Dokaz. Neka su $x, y \in X$ proizvoljni.
Za svaki $a \in A$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a) \\ d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a) \end{aligned}$$

Onda i za $d(y, A) = \inf\{d(y, a) \mid a \in A\}$ vrijedi

$$d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, A)$$

Odnosno $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$.
Analogno se pokaže da vrijedi $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$.
Time je pokazano da za sve $x, y \in X$ vrijedi $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$, iz čega slijedi da je f neprekidna.

□

Propozicija 2.1.7. *Neka su $S, T \in \mathcal{K}$ te neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $d_H(S, T) < \varepsilon$ ako i samo ako vrijedi $S \approx_\varepsilon T$.*

Dokaz. Neka je $d_H(S, T) < \varepsilon$. Definiramo skup $\Omega = \{\omega > 0 \mid S \approx_\omega T\}$. Lako se vidi da ako je $a \in \Omega$ i $b > a$, da je onda i $b \in \Omega$.
Kako je $d_H(S, T)$ infimum skupa Ω i vrijedi $d_H(S, T) < \varepsilon$, postoji $\varepsilon_0 \in \Omega$ takav da je $\varepsilon_0 < \varepsilon$. Onda je i $\varepsilon \in \Omega$, odnosno vrijedi $S \approx_\varepsilon T$.

Pretpostavimo da vrijedi $S \approx_\varepsilon T$. Tada za svaki $x \in S$ postoji $y \in T$ takav da je $d(x, y) < \varepsilon$, iz čega slijedi da za svaki $x \in S$ vrijedi $d(x, T) < \varepsilon$.
Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, T)$, $\forall x \in X$, je neprekidna. Kako je S kompaktan, $f|_S$ postiže maksimum. Neka je $x_0 \in S$ točka u kojoj $f|_S$ postiže maksimum.
Za svaki $x \in S$ vrijedi $d(x, T) \leqslant d(x_0, T)$. Kako je $d(x_0, T) < \varepsilon$, postoji $\varepsilon' > 0$ takav da je $d(x_0, T) < \varepsilon' < \varepsilon$. Dakle za svaki $x \in S$ vrijedi $d(x, T) < \varepsilon'$.

Isto tako, za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da je $d(y, x) < \varepsilon$, pa za svaki $y \in S$ vrijedi $d(y, S) < \varepsilon$. Istim argumentom kao u prethodnom dijelu dokaza se dobije da postoji $\varepsilon'' > 0$ takav da je $\varepsilon'' < \varepsilon$ i za svaki $y \in T$ vrijedi $d(y, S) < \varepsilon''$.

Neka je $\delta = \max\{\varepsilon', \varepsilon''\}$. Sada imamo da za svaki $x \in S$ postoji $y \in T$ takav da je $d(x, y) < \delta$, i za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da je $d(x, y) < \delta$. Odnosno imamo $S \approx_\delta T$ pa je $d_H(S, T) \leqslant \delta < \varepsilon$. □

2.2 Izračunljivi metrički prostori

Definicija 2.2.1. Neka je (X, d) metrički prostor te $\alpha : \mathbb{N} \to X$ niz koji je gust u (X, d) takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_J)$ rekurzivna. Tada (X, d, α) zovemo izračunljiv metrički prostor, a α efektivan separirajući niz u (X, d).

Definicija 2.2.2. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $x_0 \in X$. Za x_0 kažemo da je izračunljiva točka u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_0, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.2.3. Kažemo da je $x : \mathbb{N} \to X$ izračunljiv niz u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je
$d(x_n, \alpha_{f(n,l)}) < 2^{-l}, \forall n, l \in \mathbb{N}$.
Uočimo, α je izračunljiv niz u (X, d, α).

Primjer 2.2.4. Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija takva da je $\alpha(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$. Tada je niz α gust u $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Vrijedi $d(\alpha_i, \alpha_j) = |\alpha(i) - \alpha(j)|$ pa je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna budući da je α rekurzivna funkcija u $\mathbb{Q}$. Onda je $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ rekurzivna i kao funkcija u $\mathbb{R}$ i time smo pokazali da je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor. Taj prostor još zovemo izračunljiv euklidski prostor.

Propozicija 2.2.5. *Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ fiksirana izračunljiva surjekcija. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada je x_0 izračunljiv broj ako i samo ako je x_0 izračunljiva točka u izračunljivom metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d, \alpha)$, gdje je d euklidska metrika.*

Dokaz. Neka je x_0 izračunljiv broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_0, f(n)) < 2^{-n}$. Definiramo skup $T = \{(n, i) \in \mathbb{N}^2 \mid f(n) = \alpha(i)\}$. Funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(n, i) \mapsto f(n)$ i $(n, i) \mapsto \alpha(i)$ su rekurzivne pa je po propoziciji 1.3.8 skup T rekurzivan. Budući da je α surjekcija, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(n, i) \in T$. Dakle postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(n, g(n)) \in T$, odnosno $f(n) = \alpha(g(n))$. Vrijedi $d(x_0, \alpha(g(n))) = d(x_0, f(n)) < 2^{-n}$ pa je x_0 po definiciji izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.
Obratno, neka je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_0, \alpha(g(n))) < 2^{-n}$. Funkcija $\alpha \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna pa je x_0 izračunljiv broj. □

Propozicija 2.2.6. *Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ fiksirana izračunljiva surjekcija. Neka je $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tada je x rekurzivna funkcija ako i samo ako je x izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.*

Dokaz. Neka je $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ takva da za sve $n, l \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x(n), f(n, l)) < 2^{-l}$. Definiramo $T = \{(n, l, i) \in \mathbb{N}^3 \mid f(n, l) = \alpha(i)\}$. Budući da su f i α rekurzivne funkcije u $\mathbb{Q}$, po propoziciji 1.3.8 skup T je rekurzivan i budući da je α surjekcija, za svaki $(n, l) \in \mathbb{N}^2$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(n, l, i) \in T$. Dakle, postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(n, l, g(n, l)) \in T$ za sve $n, l \in \mathbb{N}$. Sada imamo $d(x(n), \alpha(g(n, l))) = d(x(n), f(n, l)) < 2^{-l}$ za sve $n, l \in \mathbb{N}$, dakle x je izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.
Obratno, ako je $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$, onda postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $n, l \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x(n), \alpha(g(n, l))) < 2^{-l}$. Budući da je $\alpha \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija slijedi da je $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. □

Napomena. Iz prethodnih propozicija slijedi da su pojmovi izračunljive točke i izračunljivog niza u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ neovisan o izboru rekurzivne surjekcije $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

Primjer 2.2.7. Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz prethodne propozicije. Odaberimo $\gamma \in \mathbb{R}$ neizračunljiv broj. Definiramo niz $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa $\beta(i) = \alpha(i) + \gamma$. Sada je i $(\mathbb{R}, d, \beta)$ izračunljiv metrički prostor jer je $\beta(\mathbb{N})$ gust u $\mathbb{R}$ i funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\beta_i, \beta_j)$ je ista funkcija kao $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$, dakle rekurzivna je.
Tvrdimo da je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \beta)$ ako i samo ako je $x_0 - \gamma$ izračunljiv broj.
Ako je x_0 izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \beta)$, onda postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_0, \beta(f(k))) < 2^{-k}$, odnosno

$$d(x_0 - \gamma, \alpha(f(k))) = d(x_0, \alpha(f(k)) + \gamma) = d(x_0, \beta(f(k))) < 2^{-k}.$$

Dakle $x_0 - \gamma$ je izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$, a onda i izračunljiv broj.
Obratno, ako je $x_0 - \gamma$ izračunljiv broj, onda je i izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_0 - \gamma, \alpha(f(k))) < 2^{-k}$, odnosno $d(x_0, \beta(f(k))) = d(x_0, \alpha(f(k)) + \gamma) = d(x_0 - \gamma, \alpha(f(k))) < 2^{-k}$. Dakle x_0 je izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \beta)$.
Zanimljivo je da $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ i $(\mathbb{R}, d, \beta)$ nemaju zajedničku izračunljivu točku. Naime, kad bi $x_0 \in \mathbb{R}$ bila izračunljiva točka i u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ i u $(\mathbb{R}, d, \beta)$, onda bi $x_0 - \gamma$ i x_0 bili izračunljivi brojevi. Tada bi i njihova razlika bila izračunljiv broj, ali $x_0 - (x_0 - \gamma) = \gamma$, a γ je odabran tako da ne bude izračunljiv.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Podsjetimo se da smo ranije fiksirali rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa svojstvom da je
$\{(\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i))) \mid i \in \mathbb{N}\}$ skup svih konačnih nepraznih nizova u $\mathbb{N}$. Također smo uveli oznake $(i)_j = \sigma(i, j)$ te $\bar{i} = \eta(i)$. Nadalje, imamo $[i] = \{(i)_0, \ldots, (i)_{\bar{i}}\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
Znamo da je $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $i \mapsto [i]$ r.r.o. funkcija čija je slika familija svih nepraznih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.
Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\Lambda_i = \{\alpha_j \mid j \in [i]\},$$

tj. $\Lambda_i = \alpha([i])$.
Uočimo da je $\{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija svih konačnih nepraznih podskupova od Im α.
Neka je K kompaktan skup u (X, d) i $K \neq \emptyset$. Tada po propoziciji 2.1.2 za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup A od Im α takav da je $K \approx_\varepsilon A$.
Stoga za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_i$.

Definicija 2.2.8. Za kompaktan skup K u (X, d) kažemo da je izračunljiv u (X, d, α) ako je prazan ili ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da ova definicija ne ovisi o izboru funkcija σ i η. Dovoljno je dokazati sljedeće: ako su $\Phi, \Psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcije čije su slike familija svih konačnih

nepraznih podskupova od $\mathbb{N}$, onda za neprazan kompaktan skup K u (X, d) vrijedi sljedeća ekvivalencija:
Postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in \Phi(f(k))\}$ ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in \Psi(g(k))\}$.
Pretpostavimo da su Φ i Ψ takve funkcije te da je K neprazan kompaktan skup u (X, d) i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in \Phi(f(k))\}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo skup $T = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(f(k)) = \Psi(j)\}$. Budući da su $\Phi \circ f \circ I_1^2 : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ i $\Psi \circ I_2^2 : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcije (po propoziciji 1.6.8), skup T je rekurzivan po propoziciji 1.6.7.
Jasno je da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in T$. Slijedi da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, g(k)) \in T$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Kako je $\Phi(f(k)) = \Psi(g(k))$, vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in \Psi(g(k))\}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Time smo dokazali da definicija izračunljivog skupa ne ovisi o izboru σ i η.

Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna surjekcija. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada za $K \subseteq \mathbb{R}$ očito vrijedi da je K izračunljiv skup u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ ako i samo ako je K izračunljiv skup u $\mathbb{R}$ (u smislu definicije 1.5.8).

Dokažimo još da definicija izračunljivog skupa u $\mathbb{R}$ ne ovisi o izboru α. Pretpostavimo da su $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne surjekcije te da je K kompaktan skup u $\mathbb{R}$ takav da je

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in [f(k)]\}, \forall k \in \mathbb{N}, \text{ za neku rekurzivnu funkciju } f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Želimo dokazati da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \{\beta_i \mid i \in [g(k)]\}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_i = \beta_j\}$ je rekurzivan i za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_i = \beta_j$ pa postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\alpha_i = \beta_{h(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$\{\alpha_i \mid i \in [f(k)]\} = \{\beta_{h(i)} \mid i \in [f(k)]\} = \{\beta_j \mid j \in h([f(k)])\}. \tag{2.3}$$

Funkcija $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $k \mapsto h([f(k)])$ je r.r.o. po korolaru 1.6.10 pa prema lemi 1.6.15 postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $h([f(k)]) = [g(k)]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Iz (2.3) slijedi da je $\{\alpha_i \mid i \in [f(k)]\} = \{\beta_j \mid j \in [g(k)]\}$. Sada je jasno da (2.1) povlači (2.2).

2.3 Izračunljivo prebrojivi skupovi

Neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke fiksirane funkcije sa svojstvom da je

$$\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2.$$

Nadalje, neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ fiksirana rekurzivna funkcija takva da je $q(\mathbb{N}) = \langle 0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}$. Primjer jedne takve funkcije je $q(i) = \frac{(i)_0+1}{(i)_1+1}$.

Definicija 2.3.1. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Ako je $i \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, onda za $K(\alpha_i, r)$ kažemo da je otvorena racionalna kugla u (X, d, α).

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$I_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}).$$

Uočimo da je $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija svih otvorenih racionalnih kugli u (X, d, α).

Definicija 2.3.2. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S zatvoren skup u (X, d). Kažemo da je S izračunljivo prebrojiv (c.e.) skup u (X, d, α) ako je $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Propozicija 2.3.3. *Definicija izračunljivo prebrojivog skupa u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) ne ovisi o izboru funkcija τ i q, odnosno ako je S zatvoren skup u (X, d) te ako su $\tau' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ i $q' : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije takve da je $q'(\mathbb{N}) = \langle 0, \infty\rangle \cap \mathbb{Q}$ i τ' je surjekcija, onda je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}) \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv ako i samo ako je $\{i \in \mathbb{N} \mid K(\alpha_{\tau_1'(i)}, q'_{\tau_2'(i)}) \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Definiramo $I_i' = K(\alpha_{\tau_1'(i)}, q'_{\tau_2'(i)})$.
Pretpostavimo da je $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv. Da bismo dokazali da je $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i' \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv dovoljno je dokazati da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $I_i' = I_{\varphi(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Kada bi takva funkcija postojala, vrijedilo bi

$$\{i \in \mathbb{N} \mid I_i' \cap S \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid I_{\varphi(i)} \cap S \neq \emptyset\} = \varphi^{-1}(\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\})$$

pa bismo po propoziciji 1.1.12 imali da je $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i' \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv.
U tu svrhu definiramo skup $\Omega = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \tau_1'(i) = \tau_1(j) \text{ i } q'_{\tau_2'(i)} = q_{\tau_2(j)}\}$. Taj skup je rekurzivan kao presjek dva rekurzivna skupa. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \Omega$. Dakle postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $(i, \varphi(i)) \in \Omega$. Budući da $(i, j) \in \Omega$ povlači $I_i' = I_j$, dokazali smo postajanje tražene funkcije φ. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo $\lambda_i = \alpha_{\tau_1(i)}$ i $\rho_i = q_{\tau_2(i)}$.
Uočimo da je (λ_i) izračunljiv niz u (X, d, α) te da je (ρ_i) rekurzivan niz u $\mathbb{Q}$. Nadalje, uočimo da je $I_i = K(\lambda_i, \rho_i)$.

Teorem 2.3.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K izračunljiv skup u tom prostoru. Tada je K izračunljivo prebrojiv u (X, d, α).*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_j \mid j \in [f(k)]\}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da I_i siječe K. Tada postoji $x \in K$ takav da je $d(x, \lambda_i) < \rho_i$.
Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(x, \lambda_i) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i$. Po $(*)$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x, \alpha_j) < 2^{-k}$ i $j \in [f(k)]$. Imamo

$$d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} \leqslant d(\lambda_i, x) + d(x, \alpha_j) + 2^{-k} < d(\lambda_i, x) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i,$$

odnosno $d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i$.
Dakle, ako je $I_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $k, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i$ i $j \in [f(k)]$.
Vrijedi i obrat. Pretpostavimo da postoje $k, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i$ i $j \in [f(k)]$. Prema $(*)$ postoji $x \in K$ takav da je $d(x, \alpha_j) < 2^{-k}$. Imamo

$$d(\lambda_i, x) \leqslant d(\lambda_i, \alpha_j) + d(x, \alpha_j) < d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i,$$

to jest $x \in I_i$, odnosno $I_i \cap K \neq \emptyset$.

Definiramo skup $\Omega = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i \text{ i } j \in [f(k)]\}$. Funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(i, j, k) \mapsto \rho_i$ je rekurzivna. Funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(i, j, k) \mapsto d(\lambda_i, \alpha_j) = d(\alpha_{\tau_1(i)}, \alpha_j)$ je rekurzivna jer su funkcije $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(u, v, w) \mapsto d(\alpha_u, \alpha_v)$ i $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^3$, $(i, j, k) \mapsto (\tau_1(i), j, k)$ rekurzivne. Onda je i funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, $(i, j, k) \mapsto d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k}$ rekurzivna pa je skup $\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid d(\lambda_i, \alpha_j) + 2^{-k} < \rho_i\}$ rekurzivno prebrojiv. Skup $\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid j \in [f(k)]\}$ je rekurzivan po definiciji r.r.o. funkcije i propoziciji 1.6.8. Sada možemo zaključiti da je Ω rekurzivno prebrojiv kao presjek dva rekurzivno prebrojiva skupa.
Pokazali smo da je $I_i \cap K \neq \emptyset$ ako i samo ako postoje $k, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, j, k) \in \Omega$.
Sada je po teoremu o projekciji skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv.
Dakle K je izračunljivo prebrojiv u (X, d, α). □

Lako se dokaže da vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 2.3.5. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija te $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $|f(x) - F(x, l)| < 2^{-l}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Propozicija 2.3.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te (x_i), (y_i) izračunljivi nizovi u (X, d, α). Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_i)$ rekurzivna.*

Dokaz. Budući da su nizovi (x_i), (y_i) izračunljivi, postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takve da za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_i, \alpha_{\varphi(i,k)}) < 2^{-k}$ i $d(y_j, \alpha_{\psi(j,k)}) < 2^{-k}$.
Nije teško koristeći nejednakost trokuta dokazati da za sve $a, a', b, b' \in X$ vrijedi $|d(a, b) - d(a', b')| \leqslant d(a, a') + d(b, b')$.
Stoga za sve $i, j, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{\varphi(i,k)}, \alpha_{\psi(j,k)})| \leqslant d(x_i, \alpha_{\varphi(i,k)}) + d(y_j, \alpha_{\psi(j,k)}) < 2 \cdot 2^{-k}.$$

Funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$, dana sa $(i, j, k) \mapsto d(\alpha_{\varphi(i,k)}, \alpha_{\psi(j,k)})$ je rekurzivna budući da su funkcije $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$, $(i, j, k) \mapsto (\varphi(i, k), \psi(j, k))$ i $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto d(\alpha_u, \alpha_v)$ rekurzivne.
Sada je po propoziciji 2.3.5 funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$ rekurzivna. □

Lema 2.3.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te (x_j) izračunljiv niz u (X, d, α). Tada je skup $\{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid x_j \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Vrijedi $x_j \in I_i$ ako i samo ako je $d(x_j, \lambda_i) < \rho_i$, dakle

$$\{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid x_j \in I_i\} = \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid d(x_j, \lambda_i) < \rho_i\}.$$

Nizovi (x_j) i (λ_i) su izračunljivi pa je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(j, i) \mapsto d(x_j, \lambda_i)$ rekurzivna po prethodnoj propoziciji. Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(j, i) \mapsto \rho_i$ je rekurzivna pa je skup $\{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid x_j \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv po propozicijama 1.4.9 i 1.4.4. □

Propozicija 2.3.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, (x_j) izračunljiv niz u (X, d, α) i $S = \overline{\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}}$. Tada je S izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Tvrdimo da vrijedi $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x_j \in I_i$.
Ako je $x_j \in I_i$, onda je očito $I_i \cap S \neq \emptyset$.
Da bismo dokazali obrat, pretpostavimo da je $I_i \cap S \neq \emptyset$, ali $I_i \cap \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Onda je $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subseteq I_i^C$ koji je zatvoren, pa je i $S = \overline{\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}} \subseteq I_i^C$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $I_i \cap S \neq \emptyset$.
Dakle vrijedi $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid x_j \in I_i\}$. Kako je skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid x_j \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv po prethodnoj lemi, skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ je rekurzivno prebrojiv po teoremu o projekciji. Odnosno S je izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α). □

Lema 2.3.9. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka su $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ takvi da je*

$$[a, b] \approx_\varepsilon \{x_0, \ldots, x_n\}. \tag{2.4}$$

Tada vrijedi $|b - \max\{x_0, \ldots, x_n\}| < \varepsilon$.

Dokaz. Definiramo $y = \max\{x_0, \dots, x_n\}$. Imamo dva slučaja

1. slučaj: $b < y$.
   Prema (2.4) postoji $x \in [a, b]$ takav da je $|x - y| < \varepsilon$. Vrijedi $x \leqslant b < y$ pa je $|b - y| \leqslant |x - y| < \varepsilon$, to jest $|b - y| < \varepsilon$.

2. slučaj: $y \leqslant b$.
   Prema (2.4) postoji $i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $|x_i - b| < \varepsilon$. Vrijedi $x_i \leqslant y \leqslant b$ pa je $|y - b| \leqslant |x_i - b| < \varepsilon$, to jest $|b - y| < \varepsilon$.

□

Iduća tvrdnja je poznata činjenica iz izračunljive analize:

Propozicija 2.3.10. *Neka su $\beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $f : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je rekurzivna i funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \max\{f(x, i) \mid 0 \leqslant i \leqslant \beta(x)\}$.*

Primjer 2.3.11. Poznato je da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ koja je rastuća i nenegativna te postoji neizračunljiv broj γ takav da je $\lim_{n\to\infty} f(n) = \gamma$. Možemo pretpostaviti da je $f(0) = 0$, inače uzmemo funkciju $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

koja je rekurzivna po teoremu o grananju.
Definiramo $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $\omega(i) = \frac{(i)_0}{(i)_0 + (i)_1 + 1}$. Lako se vidi da je $\omega(\mathbb{N}) = [0, 1\rangle \cap \mathbb{Q}$.
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $h(i, j) = f(i) + \omega(j) \cdot (f(i+1) - f(i))$. Očito je h rekurzivna funkcija.
Pokažimo da je $h(\mathbb{N}^2) = [0, \gamma] \cap \mathbb{Q}$.
Jasno je da je $h(\mathbb{N}^2) \subseteq \mathbb{Q}$, te je

$$\begin{aligned} 0 \leqslant h(i, j) &= f(i) + \omega(j) \cdot (f(i+1) - f(i)) \\ &\leqslant f(i) + f(i+1) - f(i) = f(i+1) \leqslant \gamma. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi $h(\mathbb{N}^2) \subseteq [0, \gamma] \cap \mathbb{Q}$.
Neka je $r \in [0, \gamma] \cap \mathbb{Q}$. Jer je $\gamma \notin \mathbb{Q}$ vrijedi $0 \leqslant r < \gamma$. Postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $r < f(k)$. Neka je $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid r < f(k)\}$, vrijedi $k_0 \geqslant 1$ i $f(k_0 - 1) \leqslant r < f(k_0)$. Dakle postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $f(i) \leqslant r < f(i+1)$. Tada je $\frac{r - f(i)}{f(i+1) - f(i)} \in [0, 1\rangle \cap \mathbb{Q}$ jer je $0 \leqslant r - f(i) < f(i+1) - f(i)$ pa postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\omega(j) = \frac{r - f(i)}{f(i+1) - f(i)}$.
Imamo $r = f(i) + \omega(j) \cdot (f(i+1) - f(i))$, odnosno $r \in h(\mathbb{N}^2)$.

Odaberimo rekurzivnu surjekciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ i definiramo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ kao $g = h \circ \varphi$. Funkcija g je rekurzivna i vrijedi

$$\overline{g(\mathbb{N})} = [0, \gamma]. \tag{2.5}$$

Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor iz primjera 2.2.4. Po propoziciji 2.2.6, g je izračunljiv niz u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Sada je po propoziciji 2.3.8 skup $[0, \gamma]$ izračunljivo prebrojiv u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Jasno je da je $[0, \gamma]$ kompaktan u $(\mathbb{R}, d)$. Tvrdimo da nije izračunljiv u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $[0, \gamma]$ izračunljiv skup u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $[0, \gamma] \approx_{2^{-k}} \Lambda_{\psi(k)}$.
Dakle za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$[0, \gamma] \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{(\psi(k))_0}, \ldots, \alpha_{(\psi(k))_{\overline{\psi(k)}}}\}.$$

Po prethodnoj lemi za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|\gamma - \max\{\alpha_{(\psi(k))_j} \mid 0 \leqslant j \leqslant \overline{\psi(k)}\}| < 2^{-k}.$$

Funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $k \mapsto \max\{\alpha_{(\psi(k))_j} \mid 0 \leqslant j \leqslant \overline{\psi(k)}\}$ je rekurzivna po propoziciji 2.3.10 pa je γ izračunljiv broj što je u kontradikciji s izborom funkcije f.

2.4 Poluizračunljivi skupovi

Definicija 2.4.1. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $B_0, \ldots, B_n$ racionalne otvorene kugle u (X, d, α). Tada da $B_0 \cup \ldots \cup B_n$ kažemo da je racionalan otvoren skup u (X, d, α).

Definicija 2.4.2. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = I_{(j)_0} \cup \ldots \cup I_{(j)_{\overline{j}}}.$$

Dakle $J_j = \bigcup_{i \in [j]} I_i$.

Uočimo da je $\{J_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ familija svih racionalnih otvorenih skupova u (X, d, α).

Definicija 2.4.3. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te K kompaktan skup u (X, d). Kažemo da je K poluizračunljiv skup u (X, d, α) ako je $\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Dokažimo prvo da ova definicija ne ovisi o izboru funkcija σ i η. Zapravo, dokazat ćemo i više:

Ako su $\Phi, \Psi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ r.r.o. funkcije čije su slike familija svih konačnih nepraznih podskupova od $\mathbb{N}$, onda je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \bigcup_{i\in\Phi(j)} I_i\}$ rekurzivno prebrojiv ako i samo ako je $\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \bigcup_{i\in\Psi(j)} I_i\}$ rekurzivno prebrojiv.

Naime, neka je $\Omega = \{(j, j') \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(j) = \Psi(j')\}$. Tada je Ω rekurzivan skup te za svaki $j \in \mathbb{N}$ postoji $j' \in \mathbb{N}$ takav da je $(j, j') \in \Omega$. Stoga postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(j, \varphi(j)) \in \Omega$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Dakle za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(j) = \Psi(\varphi(j))$.
Označimo $T = \{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \bigcup_{i\in\Phi(j)} I_i\}$ te $T' = \{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \bigcup_{i\in\Psi(j)} I_i\}$.
Imamo

$$j \in T \iff K \subseteq \bigcup_{i\in\Phi(j)} I_i \iff K \subseteq \bigcup_{i\in\Psi(\varphi(j))} I_i \iff \varphi(j) \in T'.$$

Dakle vrijedi $j \in T$ ako i samo ako je $\varphi(j) \in T'$ pa je $T = \varphi^{-1}(T')$. Ovo pokazuje sljedeće: ako je T' rekurzivno prebrojiv, onda je i T rekurzivno prebrojiv. Prema tome, jedan smjer u ekvivalenciji koju dokazujemo vrijedi, a drugi se dokazuje analogno.

Definicija 2.4.4. Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x, y \in X$ i $r, s > 0$. Pišemo $(y, s) \subseteq_F (x, r)$ ako je $d(x, y) + s < r$.

Uočimo: ako je $(y, s) \subseteq_F (x, r)$, onda je $K(y, s) \subseteq K(x, r)$.

Lema 2.4.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Pretpostavimo da su $a_0, \dots, a_n \in X$ i $r_0, \dots, r_n > 0$ takvi da je $K \subseteq K(a_0, r_0) \cup \dots \cup K(a_n, r_n)$. Tada postoji $\lambda > 0$ takav da za svaki $x \in K$ postoji $i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je*

$$(x, \lambda) \subseteq_F (a_i, r_i).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x_k \in K$ takav da je $d(x_k, a_i) + \frac{1}{k} \geqslant r_i$, $i = 0, \dots, n$. Odnosno

$$d(x_k, a_i) \geqslant r_i - \frac{1}{k}, \; i = 0, \dots, n. \tag{2.6}$$

Kako je (x_k) niz u kompaktnom skupu K, postoji strogo rastući niz $(k_j)_j$ u $\mathbb{N}$ takav da niz $(x_{k_j})_j$ teži nekoj točki x iz K.
Iz (2.6) imamo

$$d(x_{k_j}, a_i) \geqslant r_i - \frac{1}{k_j}, \; i = 0, \dots, n$$

iz čega slijedi $d(x, a_i) \geqslant r_i$, $i = 0, \dots, n$, odnosno $x \notin \bigcup_{i=0}^{n} K(a_i, r_i)$ što je u kontradikciji s $x \in K$. $\square$

Teorem 2.4.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te K izračunljiv skup u tom prostoru. Tada je K poluizračunljiv u (X, d, α).*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $K \approx_{2^{-k}} \{\alpha_i \mid i \in [f(k)]\}$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Želimo pokazati da je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.
Neka je $j \in \mathbb{N}$. Tada je $K \subseteq J_j$ ako i samo ako je $K \subseteq I_{(j)_0} \cup \ldots \cup I_{(j)_{\bar{j}}}$, odnosno $K \subseteq K(\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0}) \cup \ldots \cup K(\lambda_{(j)_{\bar{j}}}, \rho_{(j)_{\bar{j}}})$.
Pretpostavimo da je $K \subseteq J_j$. Tada po lemi 2.4.5 postoji $\lambda > 0$ takav da za svaki $x \in K$ postoji $u \in \{0, \ldots, \bar{j}\}$ takav da je $(x, \lambda) \subseteq_F (\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u})$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k} < \frac{\lambda}{4}$. Uzmimo $i \in [f(k)]$. Tada postoji $x \in K$ takav da je $d(x, \alpha_i) < 2^{-k}$. Uzmimo x i $u \in \{0, \ldots, \bar{j}\}$ takve da je $d(x, \alpha_i) < 2^{-k}$ i $(x, \lambda) \subseteq_F (\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u})$. Tada je $d(x, \lambda_{(j)_u}) + \lambda < \rho_{(j)_u}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} d(\alpha_i, \lambda_{(j)_u}) + 2^{-k} &\leqslant d(\alpha_i, x) + d(x, \lambda_{(j)_u}) + 2^{-k} < 2^{-k} + d(x, \lambda_{(j)_u}) + 2^{-k} \\ &< d(x, \lambda_{(j)_u}) + \lambda < \rho_{(j)_u} \end{aligned}$$

odnosno $(\alpha_i, 2^{-k}) \subseteq_F (\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u})$.
Dakle ako je $K \subseteq J_j$ onda postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \in [f(k)]$ postoji $u \in \{0, \ldots, \bar{j}\}$ takav da je $(\alpha_i, 2^{-k}) \subseteq_F (\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u})$.
Tvrdimo da vrijedi i obrat. Pretpostavimo da postoji takav $k \in \mathbb{N}$ i neka je $x \in K$. Tada postoji $i \in [f(k)]$ takav da je $x \in K(\alpha_i, 2^{-k})$. Po pretpostavci postoji $u \in \{0, \ldots, \bar{j}$ takav da je $(\alpha_i, 2^{-k}) \subseteq_F (\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u})$, onda je $x \in K(\alpha_i, 2^{-k}) \subseteq K(\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u}) \subseteq J_j$. Pokazali smo da za proizvoljan $x \in K$ vrijedi $x \in J_j$, dakle $K \subseteq J_j$.
Definiramo skup

$$\begin{aligned} S &= \{(k, i, j, u) \in \mathbb{N}^4 \mid (\alpha_i, 2^{-k}) \subseteq_F (\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u})\} \\ &= \{(k, i, j, u) \in \mathbb{N}^4 \mid d(\alpha_i, \lambda_{(j)_u}) + 2^{-k} < \rho_{(j)_u}\}. \end{aligned}$$

On je rekurzivno prebrojiv jer su funkcije $\mathbb{N}^4 \to \mathbb{R}$, $(k, i, j, u) \mapsto d(\alpha_i, \lambda_{(j)_u}) + 2^{-k}$ i $(k, i, j, u) \mapsto \rho_{(j)_u}$ rekurzivne.
Definiramo skup

$$\begin{aligned} T &= \{(k, i, j) \in \mathbb{N}^3 \mid \exists u \in \{0, \ldots, \bar{j}\} \text{ takav da je } (\alpha_i, 2^{-k}) \subseteq_F (\lambda_{(j)_u}, \rho_{(j)_u})\} \\ &= \{(k, i, j) \in \mathbb{N}^3 \mid \exists u \in \mathbb{N} \text{ takav da je } u \leqslant \bar{j} \text{ i } (k, i, j, u) \in S\}, \end{aligned}$$

taj skup je rekurzivno prebrojiv jer je projekcija rekurzivno prebrojivog skupa
$S \cap \{(k, i, j, u) \in \mathbb{N}^4 \mid u \leqslant \bar{j}\}$.

Definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$, $\Phi(k, j) = \{k\} \times [f(k)] \times \{j\}$. To je r.r.o. funkcija po lemi 1.6.16. Sada imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} K \subseteq J_j &\iff \exists k \in \mathbb{N}\ \forall i \in [f(k)]\ (k, i, j) \in T \iff \exists k \in \mathbb{N}\ \{k\} \times [f(k)] \times \{j\} \subseteq T \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N}\ \Phi(k, j) \subseteq T. \end{aligned}$$

Skup $\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(k, j) \subseteq T\}$ je rekurzivno prebrojiv po propoziciji 1.6.14, a kako je $\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\}$ projekcija tog skupa, slijedi da je $\{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv skup, odnosno K je poluizračunljiv. □

Definicija 2.4.7. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $S \subseteq X$. Kažemo da je S koizračunljivo prebrojiv (co-c.e.) ako je $S = X$ ili postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \backslash S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}$.

Ekvivalentno, S je co-c.e. ako postoji rekurzivno prebrojiv skup $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $X \backslash S = \bigcup_{i \in A} I_i$.

Definicija 2.4.8. Za izračunljiv metrički prostor (X, d, α) kažemo da je lokalno izračunljiv ako je svaki kompaktan skup u (X, d) sadržan u nekom izračunljivom skupu u (X, d, α).

Primjer 2.4.9. Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor. Tada je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ lokalno izračunljiv.
Dovoljno je dokazati da je skup $[a, b]$, $a < b$ izračunljiv ako su $a, b \in \mathbb{R}$ izračunljive točke u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.
Neka su a i b izračunljive točke, tada postoje rekurzivne funkcije $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $d(a, \alpha(F(i))) < 2^{-i}$ i $d(b, \alpha(G(i))) < 2^{-i}$.
Definiramo $M = d(a, b)$. Postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-l} < \frac{M}{2}$.
Sada iz nejednakosti trokuta imamo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(\alpha(F(i + l)), \alpha(G(i + l))) < 2M.$$

Postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{2M}{2^N} < 1$. Za takav N definiramo funkciju $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ sa

$$H(i, k) = \alpha(F(k + l)) + i \cdot \frac{\alpha(G(k + l)) - \alpha(F(k + l))}{2^{k+N}}$$

Funkcija H je rekurzivna i vrijedi

$$A_k := \{H(i, k) \mid 0 \leqslant i \leqslant 2^{k+N}\} \approx_{2^{-k}} [a, b]$$

budući da je A_k skup točaka između $\alpha(F(k + l))$ i $\alpha(G(k + l))$ u kojemu su susjedne točke udaljene za manje od 2^{-k} i vrijdi $d(a, \alpha(F(k + l))) < 2^{-k}$ i $d(b, \alpha(G(k + l))) < 2^{-k}$.
Skup $\{(i, k, j) \in \mathbb{N}^3 \mid H(i, k) = \alpha_j\}$ je rekurzivan i za svaki $(i, k) \in \mathbb{N}^2$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav

da je (i,k,j) element tog skupa pa postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $H(i,k) = \alpha_{\varphi(i,k)}$.
Imamo

$$A_k = \{\alpha_{\varphi(i,k)} \mid 0 \leqslant i \leqslant 2^{k+N}\} = \alpha(\{\varphi(i,k) \mid 0 \leqslant i \leqslant 2^{k+N}\})$$

Želimo pokazati da je funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ definirana s $k \mapsto \{\varphi(i,k) \mid 0 \leqslant i \leqslant 2^{k+N}\}$ r.r.o. funkcija.
Vrijedi $\Phi(k) = \varphi(\Psi(k))$ gdje je $\Psi(k) = \{(i,k) \mid 0 \leqslant i \leqslant 2^{k+N}\}$. Budući da je φ rekurzivna, dovoljno je dokazati da je Ψ r.r.o., a to slijedi iz $\Psi(k) = \{0,\dots,2^{k+N}\} \times \{k\}$.

Dakle pokazali smo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\alpha(\Phi(k)) \approx_{2^{-k}} [a,b]$$

gdje je Φ r.r.o. funkcija i $\Phi(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in \mathbb{N}$, pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Phi(x) = [f(x)]$, $\forall x \in \mathbb{N}$. Time je dokazano da je $[a,b]$ izračunljiv.
Za svaki K kompakt u $(\mathbb{R},d,\alpha)$ postoje $a,b \in \mathbb{Q}$ takve da je $a < b$ i $K \subseteq [a,b]$. Kako su svi racionalni brojevi ujedno i izračunljive točke u $(\mathbb{R},d,\alpha)$, onda postoje i izračunljive točke a,b s tim svojstvom, iz čega slijedi da je $(\mathbb{R},d,\alpha)$ lokalno izračunljiv.

Lema 2.4.10. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor te $S \subseteq X$ co-c.e. i $S \neq X$. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \backslash S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{g(i)}$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_{g(i)} \subseteq J_{g(i+1)}$.*

Dokaz. Budući da je S co-c.e. i $S \neq X$, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \backslash S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{f(i)}$.
Definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ sa $\Phi(i) = f(\{0,\dots,i\})$, ona je r.r.o. po primjeru 1.6.11. Očito za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(x) \neq \emptyset$. Po lemi 1.6.15 postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(x) = [g(x)]$. Budući da je $J_{g(i)} = \bigcup_{j\in[g(i)]} I_j$, imamo

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{g(i)} &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in[g(i)]} I_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\Phi(i)} I_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\{f(0),\dots,f(i)\}} I_j \\ &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=0}^{i} I_{f(j)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{f(j)} = X \backslash S.\end{aligned}$$

Jer je $[g(i)] = \Phi(i) = \{f(0),\dots,f(i)\}$, vrijedi

$$J_{g(i)} = \bigcup_{j\in[g(i)]} I_j = \bigcup_{j\in\Phi(i)} I_j \subseteq \bigcup_{j\in\Phi(i+1)} I_j = \bigcup_{j\in[g(i+1)]} I_j = J_{g(j+1)}.$$

$\square$

Lema 2.4.11. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_a \cup J_b = J_{\varphi(a,b)}$.*

Dokaz. Budući da vrijedi $J_a = \bigcup_{i\in[a]} I_i$, dovoljno je dokazati da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $[\varphi(a, b)] = [a] \cup [b]$. Funkcije $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(a, b) = [a]$, $\Psi(a, b) = [b]$ su r.r.o. po propoziciji 1.6.8 pa je i $\Lambda : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\Lambda(a, b) = \Phi(a, b) \cup \Psi(a, b)$ r.r.o. po propoziciji 1.6.4. Za svaki $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vrijedi $[a] \cup [b] \neq \emptyset$ pa po propoziciji 1.6.15 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $[a] \cup [b] = \Lambda(a, b) = [\varphi(a, b)]$. □

Korolar 2.4.12. *Postoji rekurzivna funkcija $\psi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $u, v, w \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_u \cup J_v \cup J_w = J_{\psi(u,v,w)}$.*

Dokaz. Neka je φ funkcija iz prethodne leme. Vrijedi

$$J_u \cup J_v \cup J_w = J_{\varphi(u,v)} \cup J_w = J_{\varphi(\varphi(u,v),w)}.$$

Definiramo ψ sa $\psi(u, v, w) = \varphi(\varphi(u, v), w)$, $\forall u, v, w \in \mathbb{N}$. Funkcija ψ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. □

Propozicija 2.4.13. *Neka je (X, d, α) lokalno izračunljiv metrički prostor te $S \subseteq X$ kompaktan i co-c.e. skup. Tada je S poluizračunljiv.*

Dokaz. Budući da je (X, d, α) lokalno izračunljiv, postoji izračunljiv skup K u (X, d, α) takav da je $S \subseteq K$. Ako je $S = X$, onda je i $K = X$ pa je S izračunljiv, a onda i poluizračunljiv. U nastavku dokaza promatramo slučaj kada je $S \neq X$. Po lemi 2.4.10 postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \backslash S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{g(i)}$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_{g(i)} \subseteq J_{g(i+1)}$.
Neka je $j \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $S \subseteq J_j$. Tada je $K \backslash J_j \subseteq X \backslash S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{g(i)}$. Skup K je kompaktan jer je izračunljiv, J_j je otvoren pa je $K \backslash J_j$ zatvoren skup u kompaktu K, a onda je i sam kompaktan. Budući da je $K \backslash J_j$ kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$ takvi da je $K \backslash J_j \subseteq \bigcup_{i\in\{i_1,\dots,i_n\}} J_{g(i)}$. Ako uzmemo $i = \max\{i_1, \dots, i_n\}$, onda je $K \backslash J_j \subseteq J_{g(i)}$. Time smo pokazali da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \backslash J_j \subseteq J_{g(i)}$, odnosno $K \subseteq J_j \cup J_{g(i)}$.
Dakle ako je $S \subseteq J_j$, onda postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_j \cup J_{g(i)}$.
Vrijedi i obrat, budući da je $X \backslash S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{g(i)}$, vrijedi $S \cap J_{g(i)} = \emptyset$ pa iz $S \subseteq K \subseteq J_j \cup J_{g(i)}$ slijedi $S \subseteq J_j$.
Dakle vrijedi $S \subseteq J_j$ ako i samo ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_j \cup J_{g(i)}$.
Definiramo skup $\Omega = \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq J_j \cup J_{g(i)}\}$. Budući da je skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ projekcija od Ω, dovoljno je dokazati da je Ω rekurzivno prebrojiv jer bismo onda imali i da je $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.
Neka je φ funkcija iz prethodne leme. Imamo:

$$J_j \cup J_{g(i)} = J_{\varphi(j,g(i))}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

dakle $\Omega = \{(j,i) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq J_{\varphi(j,g(i))}\}$. Budući da je K izračunljiv, a onda i poluizračunljiv, znamo da je $\Gamma := \{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv. Uočimo:

$$\Omega = \{(j,i) \in \mathbb{N}^2 \mid \varphi(j,g(i)) \in \Gamma\}.$$

Definiramo funkciju $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $F(j,i) = \varphi(j,g(i))$. Ta funkcija je rekurzivna pa je skup $\Omega = F^{-1}(\Gamma)$ rekurzivno prebrojiv po propoziciji 1.1.12.
Sada je $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv po teoremu o projekciji. □

Definicija 2.4.14. Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor. Za $U \subseteq X$ kažemo da je izračunljivo prebrojivo otvoren u (X,d,α) ako postoji rekurzivno prebrojiv skup $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $U = \bigcup_{i\in A} I_i$.

Uočimo da je $S \subseteq X$ co-c.e. u (X,d,α) ako i samo ako je $X\backslash S$ izračunljivo prebrojivo otvoren u (X,d,α).

Propozicija 2.4.15. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor te neka su $U,V \subseteq X$ izračunljivo prebrojivo otvoreni. Tada je $U \cup V$ izračunljivo prebrojivo otvoren.*

Dokaz. Neka su $A,B \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivno prebrojivi skupovi takvi da je $U = \bigcup_{i\in A} I_i$ i $V = \bigcup_{i\in B} I_i$. Tada je $U \cup V = \bigcup_{i\in A\cup B} I_i$. Skup $A \cup B$ je izračunljivo prebrojiv kao unija dva izračunljivo prebrojiva skupa, dakle $U \cup V$ je izračunljivo prebrojivo otvoren. □

Korolar 2.4.16. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor te neka su $S,T \subseteq X$ co-c.e. u (X,d,α). Tada je i $S \cap T$ co-c.e.*

Dokaz. Skupovi $X\backslash S$ i $X\backslash T$ su izračunljivo prebrojivo otvoreni i vrijedi $X\backslash(S \cap T) = (X\backslash S) \cup (X\backslash T)$ pa je po prethodnoj propoziciji $X\backslash(S \cap T)$ izračunljivo prebrojivo otvoren, dakle $S \cap T$ je co-c.e. □

Primjer 2.4.17. Neka je $(\mathbb{R},d,\alpha)$ izračunljiv euklidski prostor i neka je $r \in \mathbb{Q}$. Tada su skupovi $\langle r,\infty\rangle$ i $\langle -\infty, r\rangle$ izračunljivo prebrojivo otvoreni.
Vrijedi $\langle r,\infty\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\langle r, r+2(n+1)\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(r+n+1, n+1)$.
Definiramo skup $\Omega = \{(n,i) \in \mathbb{N}^2 \mid r+n+1 = \lambda_i \text{ i } n+1 = \rho_i\}$.
Prisjetimo se da je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija pa je i $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Iz toga slijedi da je Ω rekurzivan skup. Budući da vrijedi $(\lambda,\rho)(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \cap \langle 0,\infty\rangle)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(n,i) \in \Omega$. Dakle, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(n, f(n)) \in \Omega$, odnosno $r+n+1 = \lambda_{f(n)}$ i $n+1 = \rho_{f(n)}$.
Sada imamo $\langle r,\infty\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(\lambda_{f(n)}, \rho_{f(n)}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{f(n)}$, dakle $\langle r,\infty\rangle$ je izračunljivo prebrojivo otvoren.
Vrijedi

$$\langle -\infty, r\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\langle r-2(n+1), r\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(r-(n+1), n+1)$$

pa na isti način kao gore vidimo da je $\langle -\infty, r\rangle$ izračunljivo prebrojivo otvoren.

Primjer 2.4.18. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ kao iz primjera 2.3.11. Funkcija f je rekurzivna i rastuća funkcija takva da je $f(0) = 0$ te $f(n) \to \gamma$ gdje je γ neizračunljiv broj.
Možemo pretpostaviti da je $\gamma < 1$. Inače odaberemo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{\gamma}{N} < 1$ i umjesto f promatramo funkciju $n \mapsto \frac{f(n)}{N}$. Ta funkcija je očito rekurzivna i rastuća, vrijedi $\frac{f(0)}{N} = 0$ i $\frac{\gamma}{N}$ je neizračunljiv, jer bi inače $\gamma = \frac{\gamma}{N} \cdot N$ bio izračunljiv broj kao produkt dva izračunljiva broja.

Neka je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ izračunljiv euklidski prostor. Tvrdimo da je $[\gamma, 1]$ co-c.e. Dovoljno je dokazati da je $\mathbb{R}\backslash[\gamma, 1] = \langle -\infty, \gamma\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$ izračunljivo prebrojivo otvoren. U tu svrhu, prema propoziciji 2.4.15, dovoljno je dokazati da su skupovi $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle -1, \gamma\rangle$ i $\langle 1, \infty\rangle$ izračunljivo prebrojivo otvoreni. Skupovi $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 1, \infty\rangle$ su izračunljivo prebrojivo otvoreni po prethodnom primjeru. Preostaje stoga dokazati da je $\langle -1, \gamma\rangle$ izračunljivo prebrojivo otvoren.
Vrijedi

$$\langle -1, \gamma\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle -1, f(n)\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(\frac{-1 + f(n)}{2}, \frac{1 + f(n)}{2})$$

pa na isti način kao u prethodnom primjeru zaključujemo da je taj skup izračunljivo prebrojivo otvoren.
Time je dokazano da je $[\gamma, 1]$ co-c.e. Znamo da je $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ lokalno izračunljiv pa je po propoziciji 2.4.13 skup $[\gamma, 1]$ poluizračunljiv.
Budući da γ nije izračunljiv broj, na sličan način kao u primjeru 2.3.11 vidimo da $[\gamma, 1]$ nije izračunljiv.

Prethodni primjer pokazuje da poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru ne mora biti izračunljiv.

Teorem 2.4.19. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$ kompaktan. Tada je S izračunljiv ako i samo ako je izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv.*

Dokaz. Ranije smo dokazali da je izračunljiv skup nužno i izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv. Pokažimo sada i obrat.
Neka je S izračunljivo prebrojiv i poluizračunljiv.
Definiramo skup

$$\Omega = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid S \subseteq J_j, I_i \cap S \neq \emptyset \text{ za svaki } i \in [j], \rho_i < 2^{-k} \text{ za svaki } i \in [j]\}.$$

Tvrdimo da je Ω rekurzivno prebrojiv.

Budući da je S poluizračunljiv, skup $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ je rekurzivno prebrojiv. Tada je i $\mathbb{N} \times \{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\} = (I_2^2)^{-1}(\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\})$ rekurzivno prebrojiv po propoziciji 1.1.12.

Definiramo $A = \{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$. Taj skup je rekurzivno prebrojiv jer je S izračunljivo prebrojiv. Funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(j) = [j]$ je r.r.o. pa je po propoziciji 1.6.14 skup

$$\{j \in \mathbb{N} \mid \Phi(j) \subseteq A\} = \{j \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset \text{ za svaki } i \in [j]\}$$

rekurzivno prebrojiv. Onda je i $\mathbb{N} \times \{j \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset$ za svaki $i \in [j]\}$ rekurzivno prebrojiv.

Skup $B := \{(k,i) \in \mathbb{N}^2 \mid \rho_i < 2^{-k}\}$ je rekurzivan jer su funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(k,i) \mapsto \rho_i$ i $(k,i) \mapsto 2^{-k}$ rekurzivne. Funkcija $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$, $\Psi(k, j) = \{k\} \times [j]$ je r.r.o. po lemi 1.6.16 pa je skup $\{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \Psi(k, j) \subseteq B\}$ rekurzivno prebrojiv po propoziciji 1.6.14. Slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv kao presjek tri rekurzivno prebrojiva skupa.

Za fiksni $k \in \mathbb{N}$ familija $\{I_i \mid i \in \mathbb{N}, \rho_i < 2^{-k}\}$ je pokrivač od X, onda posebno i pokrivač od S. Skup S je kompaktan, pa ima konačan potpokrivač, neka je to $\{I_{i_0}, \ldots, I_{i_n}\}$, možemo pretpostaviti da sve te kugle sijeku S, inače izbacimo one koje ne sijeku S.

Sada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $[j] = \{i_0, \ldots, i_n\}$. Za tako odabran j vrijedi $S \subseteq J_j$, $I_i \cap S \neq \emptyset$ za svaki $i \in [j]$ i $\rho_i < 2^{-k}$ za svaki $i \in [j]$, odnosno $(k, j) \in \Omega$. Dakle za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, j) \in \Omega$. Onda postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $(k, \varphi(k)) \in \Omega$.

Tvrdimo da za sve $(k, j) \in \Omega$ vrijedi

$$S \approx_{2^{-k}} \{\alpha_{\tau_1((j)_0)}, \ldots, \alpha_{\tau_1((j)_{\bar{j}})}\}.$$

Neka je $(k, j) \in \Omega$, i neka je $x \in S$. Tada je $x \in J_j$ pa postoji $i \in [j] = \{(j)_0, \ldots, (j)_{\bar{j}}\}$ takav da je $x \in I_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, \rho_i)$, i vrijedi $\rho_i < 2^{-k}$ jer je $(k, j) \in \Omega$. Dakle $d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) < \rho_i < 2^{-k}$.

Neka je $y \in \{\alpha_{\tau_1((j)_0)}, \ldots, \alpha_{\tau_1((j)_{\bar{j}})}\}$, onda postoji $i \in [j]$ takav da je $y = \alpha_{\tau_1(i)}$. Tada je $\rho_i < 2^{-k}$ i $I_i \cap S \neq \emptyset$. Dakle postoji $x \in S$ takav da je

$$d(x,y) = d(x, \alpha_{\tau_1(i)}) < \rho_i < 2^{-k}.$$

Definiramo funkciju $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(k) = \{\tau_1((\varphi(k))_0), \ldots, \tau_1((\varphi(k))_{\overline{\varphi(k)}})\}$. Uočimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \approx_{2^{-k}} \alpha(\Phi(k))$. Budući da je $\Phi(k) = \tau_1([\varphi(k)])$, funkcija Φ je r.r.o. po korolaru 1.6.10. Ni za koji $k \in \mathbb{N}$ skup $\Phi(k)$ nije prazan pa po lemi 1.6.15 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Phi(k) = [f(k)]$. Konačno imamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \approx_{2^{-k}} \alpha([f(k)]) = \Lambda_{f(k)}$, odnosno S je izračunljiv skup. □

2.5 Izračunljivost i topologija

Napomena. Neka je (X,d) metrički prostor te neka su $x, y \in X$, $r, s > 0$.

1. Pretpostavimo da je $d(x, y) > r + s$. Tada se iz nejednakosti trokuta lako vidi da vrijedi $K(x, r) \cap K(y, s) = \emptyset$.

2. Pretpostavimo da je $d(x, y) + s < r$. Tada je $K(y, s) \subseteq K(x, r)$.

Definicija 2.5.1. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Pišemo $I_i \diamond I_j$ ako je $d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j$. Pišemo $I_i \subseteq_F I_j$ ako je $d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j$.

Uočimo da $I_i \diamond I_j$ povlači $I_i \cap I_j = \emptyset$, i $I_i \subseteq_F I_j$ povlači $I_i \subseteq I_j$.

Propozicija 2.5.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada su skupovi $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond I_j\}$ i $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\}$ rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Nizovi $i \mapsto \lambda_i$, $j \mapsto \lambda_j$ su izračunljivi pa je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\lambda_i, \lambda_j)$ rekurzivna. Funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i, j) \mapsto \rho_i + \rho_j$ i $(i, j) \mapsto \rho_j - \rho_i$ su također rekurzivne pa su skupovi $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond I_j\} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j\}$ i $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \lambda_j) < \rho_j - \rho_i\}$ rekurzivno prebrojivi po propoziciji 1.4.9. □

Definicija 2.5.3. Za $u, v \in \mathbb{N}$ pišemo $J_u \diamond J_v$ ako za svaki $i \in [u]$ i $j \in [v]$ vrijedi $I_i \diamond I_j$.

Uočimo da $J_u \diamond J_v$ povlači $J_u \cap J_v = \emptyset$.

Propozicija 2.5.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je skup $T = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \diamond J_v\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \diamond I_j\}$. Znamo da je S rekurzivno prebrojiv. Funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$, $\Phi(u, v) = [u] \times [v]$ je r.r.o. po lemi 1.6.16 i vrijedi $T = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(u, v) \subseteq S\}$ pa je T rekurzivno prebrojiv po propoziciji 1.6.14. □

Propozicija 2.5.5. *Neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $I_i \subseteq_F I_j$ i $I_j \diamond I_k$. Tada je $I_i \diamond I_k$.*

Dokaz. Vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j$ i $d(\lambda_j, \lambda_k) > \rho_j + \rho_k$. Zbrajanjem tih dviju nejednakosti dobivamo $d(\lambda_j, \lambda_k) - d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_k + \rho_i$. Iz nejednakosti trokuta imamo $d(\lambda_i, \lambda_k) \geqslant d(\lambda_j, \lambda_k) - d(\lambda_i, \lambda_j)$. Dakle vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_k) > \rho_i + \rho_k$, odnosno $I_i \diamond I_k$. □

Propozicija 2.5.6. *Neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $I_i \subseteq_F I_j$ i $I_j \subseteq_F I_k$. Tada je $I_i \subseteq_F I_k$.*

Dokaz. Vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j$ i $d(\lambda_j, \lambda_k) + \rho_j < \rho_k$. Zbrajanjem tih dviju nejednakosti dobivamo $d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, \lambda_k) + \rho_i < \rho_k$. Iz nejednakosti trokuta imamo $d(\lambda_i, \lambda_k) \leqslant d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, \lambda_k)$. Dakle vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_k) + \rho_i < \rho_k$, odnosno $I_i \subseteq_F I_k$. □

Propozicija 2.5.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka su $x \in X$, $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i \cap I_j$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$, $I_k \subseteq_F I_i$ i $I_k \subseteq_F I_j$.*

Dokaz. Vrijedi $d(\lambda_i, x) < \rho_i$ i $d(\lambda_j, x) < \rho_j$ pa postoji $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ takav da je $d(\lambda_i, x) + 2s < \rho_i$ i $d(\lambda_j, x) + 2s < \rho_j$.
Budući da je α gust u X, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in K(\alpha_n, s)$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_n = \lambda_k$ i $s = \rho_k$.
Tada je $x \in K(\alpha_n, s) = I_k$ i vrijedi

$$d(\lambda_k, \lambda_i) + \rho_k \leqslant d(\lambda_k, x) + d(x, \lambda_i) + \rho_k < s + d(x, \lambda_i) + s < \rho_i,$$

dakle $d(\lambda_k, \lambda_i) + \rho_k < \rho_i$. Analogno se pokaže da je $d(\lambda_k, \lambda_j) + \rho_k < \rho_j$.
Konačno imamo $x \in I_k$, $I_k \subseteq_F I_i$ i $I_k \subseteq_F I_j$. □

Korolar 2.5.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka su $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in I_{i_0} \cap \ldots \cap I_{i_n}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ te $I_k \subseteq_F I_{i_0}, \ldots, I_k \subseteq_F I_{i_n}$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Baza: za $n = 0$ vrijedi $x \in I_{i_0} \cap I_{i_0}$ pa za $n = 0$ i $n = 1$ tvrdnja vrijedi po prethodnoj propoziciji.
Pretpostavka: ako su $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{i_0} \cap \ldots \cap I_{i_n}$, onda postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $I_k \subseteq_F I_{i_0}, \ldots, I_k \subseteq_F I_{i_n}$.
Korak: neka je $x \in \bigcap_{j=0}^{n+1} I_{i_j}$. Tada po pretpostavci postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ i $I_k \subseteq_F I_{i_0}, \ldots, I_k \subseteq_F I_{i_n}$. Po prethodnoj propoziciji primijenjenoj na I_k i I_{n+1} postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_l$, $I_l \subseteq_F I_k$ i $I_l \subseteq_F I_{n+1}$. Sada po propoziciji 2.5.6 vrijedi $I_l \subseteq_F I_{i_0}, \ldots, I_l \subseteq_F I_{i_n}$. □

Propozicija 2.5.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $x \in I_i$, $y \in I_j$ i $I_i \diamond I_j$.*

Dokaz. Neka je $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ takav da je $s < \frac{d(x,y)}{4}$. Budući da je α gust u X, postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in K(\alpha_m, s)$ i $y \in K(\alpha_n, s)$. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $\alpha_m = \lambda_i$, $\alpha_n = \lambda_j$ i $\rho_i = \rho_j = s$. Imamo

$$4s < d(x, y) \leqslant d(x, \lambda_i) + d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, y) < 2s + d(\lambda_i, \lambda_j),$$

odnosno $d(\lambda_i, \lambda_j) > 2s = \rho_i + \rho_j$, dakle $I_i \diamond I_j$. □

Definicija 2.5.10. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $u \in \mathbb{N}$ i $i \in \mathbb{N}$ pišemo $J_u \diamond I_i$ ako za svaki $j \in [u]$ vrijedi $I_j \diamond I_i$.

Uočimo da je $J_u \diamond J_v$ ako i samo ako za svaki $i \in [v]$ vrijedi $J_u \diamond I_i$.

Lema 2.5.11. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $K \subseteq X$ neprazan i kompaktan te $x \in X$ takav da je $x \notin K$. Tada postoje $u, i \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_u$, $x \in I_i$ i $J_u \diamond I_i$.*

Dokaz. Za svaki $y \in K$ vrijedi $y \neq x$ pa postoje $i_y, j_y \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $y \in I_{i_y}$, $x \in I_{j_y}$ i $I_{i_y} \diamond I_{j_y}$. Familija $\{I_{i_y} \mid y \in K\}$ je otvoren pokrivač od K. Budući da je K kompaktan, postoje $y_0, \ldots, y_n \in K$ takvi da je $K \subseteq \bigcup_{l=0}^{n} I_{i_{y_l}}$. Imamo $x \in \bigcap_{l=0}^{n} I_{j_{y_l}}$ pa po korolaru 2.5.8 postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ te $I_k \subseteq_F I_{j_{y_0}}, \ldots I_k \subseteq_F I_{j_{y_n}}$. Vrijedi $I_{j_{y_0}} \diamond I_{i_{y_0}}, \ldots, I_{j_{y_n}} \diamond I_{i_{y_n}}$, po propoziciji 2.5.5 vrijedi $I_k \diamond I_{i_{y_0}}, \ldots, I_k \diamond I_{i_{y_n}}$. Uzmimo $u \in \mathbb{N}$ takav da je $[u] = \{i_{y_0}, \ldots, i_{y_n}\}$. Konačno imamo $J_u \diamond I_k$, $x \in I_k$ i $K \subseteq J_u$.

□

Definicija 2.5.12. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $u, v \in \mathbb{N}$. Pišemo $J_u \subseteq_F J_v$ ako za svaki $i \in [u]$ postoji $j \in [v]$ takav da je $I_i \subseteq_F I_j$.

Uočimo: ako je $J_u \subseteq_F J_v$, onda je $J_u \subseteq J_v$.

Propozicija 2.5.13. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $K \subseteq X$ neprazan i kompaktan te $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_u \cap J_v$. Tada postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_w$, $J_w \subseteq_F J_u$ i $J_w \subseteq_F J_v$.*

Dokaz. Neka je $x \in K$. Tada postoje $i \in [u]$ takav da je $x \in I_i$ i $j \in [v]$ takav da je $x \in I_j$. Budući da je $x \in I_i \cap I_j$, po propoziciji 2.5.7 postoji $k_x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{k_x}$, $I_{k_x} \subseteq_F I_i$ i $I_{k_x} \subseteq_F I_j$. Familija $\{I_{k_x} \mid x \in K\}$ je otvoren pokrivač od K, pa ima konačan potpokrivač $\{I_{k_0}, \ldots, I_{k_n}\}$. Odaberimo $w \in \mathbb{N}$ takav da je $[w] = \{k_0, \ldots, k_n\}$. Sada za svaki $i \in [w]$ postoji $j \in [u]$ takav da je $I_i \subseteq_F I_j$ te za svaki $i \in [w]$ postoji $j \in [v]$ takav da je $I_i \subseteq_F I_j$. □

Napomena. Neka su $u, v, w, i \in \mathbb{N}$.

1. Ako je $J_u \subseteq J_v$ i $J_v \subseteq_F J_w$, onda je $J_u \subseteq_F J_w$.

2. Ako je $J_u \subseteq J_v$ i $J_v \diamond I_i$, onda je $J_u \diamond I_i$.

Idući korolar navodimo bez dokaza budući da je dokaz sličan dokazu korolara 2.5.8.

Korolar 2.5.14. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $K \subseteq X$ neprazan i kompaktan te $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_{u_0} \cap \ldots \cap J_{u_n}$. Tada postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_w$ te $J_w \subseteq_F J_{u_0}, \ldots, J_w \subseteq_F J_{u_n}$.*

Teorem 2.5.15. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te K, L neprazni, međusobno disjunktni, kompaktni skupovi u (X, d). Tada postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_u$, $L \subseteq J_v$ i $J_u \diamond J_v$.*

Dokaz. Neka je $x \in L$, s obzirom da je $x \notin K$, po lemi 2.5.11 postoje $u_x, i_x \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq J_{u_x}$, $x \in I_{i_x}$ i $J_{u_x} \diamond I_{i_x}$. Familija $\{I_{i_x} \mid x \in L\}$ je otvoreni pokrivač od L, budući da je L kompaktan postoje $x_0, \ldots, x_n \in L$ takvi da je $L \subseteq I_{i_{x_0}} \cup \ldots \cup I_{i_{x_n}}$.

Vrijedi $K \subseteq J_{u_{x_0}} \cap \ldots \cap J_{u_{x_n}}$. Po korolaru 2.5.14 postoji $u \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq J_u$ te $J_u \subseteq_F J_{u_{x_0}}, \ldots, J_u \subseteq_F J_{u_{x_n}}$.
Imamo da je $J_{u_{x_0}} \diamond I_{i_{x_0}}, \ldots, J_{u_{x_n}} \diamond I_{i_{x_n}}$ pa po prethodnoj napomeni vrijedi
$J_u \diamond I_{i_{x_0}}, \ldots, J_u \diamond I_{i_{x_n}}$. Neka je $v \in \mathbb{N}$ takav da je $[v] = \{i_{x_0}, \ldots, i_{x_n}\}$. Imamo $J_u \diamond J_v$, $L \subseteq J_v$ i $K \subseteq J_u$. □

Lema 2.5.16. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, $a \in X$ izračunljiva točka te (x_i) izračunljiv niz u (X, d, α). Tada je funkcija $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto d(a, x_i)$ rekurzivna.*

Dokaz. Definiramo niz (y_j) sa $y_j = a$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Taj niz je izračunljiv jer je a izračunljiva točka. Po propoziciji 2.3.6, funkcija $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $\gamma(i, j) = d(y_j, x_i)$ je rekurzivna. Vrijedi $\beta(i) = \gamma(0, i)$ pa je funkcija β rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. □

Lema 2.5.17. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $a \in X$ izračunljiva točka u (X, d, α). Tada je skup $S = \{i \in \mathbb{N} \mid a \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Vrijedi $i \in S$ ako i samo ako je $a \in I_i$, odnosno $d(a, \lambda_i) < \rho_i$. Dakle $S = \{i \in \mathbb{N} \mid d(a, \lambda_i) < \rho_i\}$, što je rekurzivno prebrojiv skup budući da su funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto d(a, \lambda_i)$ i $i \mapsto \rho_i$ rekurzivne. □

Propozicija 2.5.18. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $a \in X$ izračunljiva točka u (X, d, α). Tada je skup $T = \{j \in \mathbb{N} \mid a \in J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Definiramo skup $\Omega = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in S \text{ i } i \in [j]\}$, gdje je S kao u prethodnoj lemi. Skup Ω je rekurzivno prebrojiv kao presjek dva rekurzivno prebrojiva skupa, $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in S\}$ i $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in [j]\}$.
Skup $\tilde{\Omega} := \{j \in \mathbb{N} \mid \text{ postoji } i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, j) \in \Omega\}$ je rekurzivno prebrojiv po teoremu o projekciji.
Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned} j \in T &\iff \text{postoji } i \in [j] \text{ takav da je } a \in I_i \\ &\iff \text{postoji } i \in [j] \text{ takav da je } i \in S \\ &\iff \text{postoji } i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } i \in S \text{ i } i \in [j] \\ &\iff \text{postoji } i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, j) \in \Omega. \end{aligned}$$

Dakle, $T = \tilde{\Omega}$ je rekurzivno prebrojiv. □

Lema 2.5.19. *Postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $I_i = J_{\varphi(i)}$.*

Dokaz. Funkcije $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(i, j) = \{i\}$, $\Psi(i, j) = [j]$ su r.r.o. Definiramo skup $S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \{i\} = [j]\} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(i, j) = \Psi(i, j)\}$. Taj skup je rekurzivan po propoziciji 1.6.7, i za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\{i\} = [j]$, odnosno $(i, j) \in S$. Slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $(i, \varphi(i)) \in S$, odnosno $\{i\} = [\varphi(i)]$. Onda je $J_{\varphi(i)} = \bigcup_{j \in [\varphi(i)]} I_j = I_i$. □

2.6 Luk

Definicija 2.6.1. Za topološki prostor L kažemo da je luk ako je L homeomorfan sa $[0, 1]$, pri čemu na $[0, 1]$ promatramo euklidsku topologiju.

Definicija 2.6.2. Neka je L luk te $f : [0, 1] \to L$ homeomorfizam. Tada za $f(0)$ i $f(1)$ kažemo da su krajnje točke od L.

Uočimo: 0 i 1 su sve točke $x \in [0, 1]$ sa svojstvom da je $[0, 1] \setminus \{x\}$ povezan prostor. Stoga su $f(0)$ i $f(1)$ sve točke $y \in L$ sa svojstvom da je $L \setminus \{y\}$ povezan. Ovo pokazuje da definicija krajnje točke luka ne ovisi o izboru funkcije f.

Teorem 2.6.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S poluizračunljiv skup u tom prostoru takav da je S, kao potprostor od (X, d), luk s krajnjim točkama a i b. Pretpostavimo da su a i b izračunljive točke u (X, d, α). Tada je S izračunljiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Neka je $f : [0, 1] \to S$ homeomorfizam takav da je $f(0) = a$ i $f(1) = b$ (u suprotnom uzmemo funkciju $x \mapsto f(1 - x)$). Budući da je S poluizračunljiv dovoljno je dokazati da je S izračunljivo prebrojiv.
Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Tada postoji $t \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $f(t) \in I_i$. Kad takav t ne bi postojao, onda bi vrijedilo $I_i \cap S = \{a, b\}$, $I_i \cap S = \{a\}$ ili $I_i \cap S = \{b\}$. Ako je na primjer $I_i \cap S = \{a\}$, onda je $\{a\}$ otvoren u S, ali $\{a\}$ je očito i zatvoren u S, iz čega slijedi da je S nepovezan, što je kontradikcija. Slično se dobije kontradikcija i u preostala dva slučaja.
Jasno je da je f neprekidna i kao funkcija sa $[0, 1]$ u X, dakle skup $f^{-1}(I_i)$ je otvoren i vrijedi $t \in f^{-1}(I_i)$. Zbog toga i činjenice da je $t \in \langle 0, 1 \rangle$ slijedi da postoje $c, d \in [0, 1]$ takvi da je $0 < c < t < d < 1$ i $[c, d] \in f^{-1}(I_i)$, odnosno $f([c, d]) \in I_i$.
Definiramo $F = f([0, c])$ i $G = f([d, 1])$. Skupovi F i G su neprazni, međusobno disjunktni i kompaktni u (X, d). Očito je $a \in F$ i $b \in G$. Po teoremu 2.5.15 postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $F \subseteq J_u$, $G \subseteq J_v$ i $J_u \diamond J_v$. Uočimo:

$$S = f([0, 1]) = f([0, c]) \cup f([c, d]) \cup f([d, 1]) = F \cup f([c, d]) \cup G \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v.$$

Dakle $S \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v$ i vrijedi $a \in J_u$ i $b \in J_v$.
Dakle za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$, postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

1. $J_u \diamond J_v$
2. $S \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v$
3. $a \in J_u$ i $b \in J_v$

Definiramo $\Omega = \{(i,u,v) \in \mathbb{N}^3 \mid J_u \diamond J_v, S \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v, a \in J_u, b \in J_v\}$. Tvrdimo da je Ω rekurzivno prebrojiv. Budući da je skup $\{(u,v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \diamond J_v\}$ rekurzivno prebrojiv po propoziciji 2.5.4, a skupovi $\{u \in \mathbb{N} \mid a \in J_u\}$ i $\{v \in \mathbb{N} \mid b \in J_v\}$ po propoziciji 2.5.18, dovoljno je dokazati da je skup $\Gamma = \{(i,u,v) \in \mathbb{N}^3 \mid S \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v\}$ rekurzivno prebrojiv. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $I_i = J_{\varphi(i)}$. Neka je $\psi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da za sve $u, v, w \in \mathbb{N}$ vrijedi $J_u \cup J_v \cup J_w = J_{\psi(u,v,w)}$. Takve funkcije postoje po lemi 2.5.19 i korolaru 2.4.12.
Definiramo funkciju $\gamma : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $\gamma(i,u,v) = \psi(u, \varphi(i), v)$, ona je rekurzivna. Imamo niz ekvivalencija

$$(i,u,v) \in \Gamma \Longleftrightarrow S \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v \Longleftrightarrow S \subseteq J_u \cup J_{\varphi(i)} \cup J_v \Longleftrightarrow S \subseteq J_{\psi(u,\varphi(i),v)},$$

dakle vrijedi $(i,u,v) \in \Gamma$ ako i samo ako je $\psi(u,\varphi(i),v) \in \{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$. Odnosno $\Gamma = \gamma^{-1}(\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\})$ pa je Γ rekurzivno prebrojiv jer je γ rekurzivna funkcija i $\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv skup.
Sada je Ω rekurzivno prebrojiv kao presjek četiri rekurzivno prebrojiva skupa.
Pokazali smo da ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$, onda postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,u,v) \in \Omega$. Vrijedi i obrat: neka je $(i,u,v) \in \Omega$, pretpostavimo da je $I_i \cap S = \emptyset$. Tada su $S \cap J_u$ i $S \cap J_v$ neprazni i otvoreni u S. Budući da je $J_u \diamond J_v$, vrijedi $J_u \cap J_v = \emptyset$, pa iz $S \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v$ slijedi da je $(S \cap J_u, S \cap J_v)$ separacija od S, što je u kontradikciji s povezanošću od S.
Dokazali smo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi ekvivalencija: $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i,u,v) \in \Omega$. Iz teorema o projekciji slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv. Dakle S je izračunljivo prebrojiv skup i time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.7 Lančasti kontinuumi

Definicija 2.7.1. Neka je X skup. Za konačan niz $C_0, \ldots, C_n$ podskupova od X kažemo da je lanac u X ako za sve $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ vrijedi

$$|i - j| \leqslant 1 \Longleftrightarrow C_i \cap C_j \neq \emptyset.$$

Definicija 2.7.2. Neka je (X,d) metrički prostor. Za lanac $C_0, \ldots, C_n$ u X kažemo da je otvoreni lanac u (X,d) ako su $C_0, \ldots, C_n$ otvoreni skupovi u (X,d).

Za lanac $C_0, \dots, C_n$ kažemo da je kompaktan lanac u (X, d) ako su $C_0, \dots, C_n$ kompaktni u (X, d).

Definicija 2.7.3. Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $C_0, \dots, C_n$ lanac u X te $\varepsilon > 0$. Kažemo da je $C_0, \dots, C_n$ $\varepsilon-$lanac u (X, d) ako za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ vrijedi diam $C_i < \varepsilon$.

Definicija 2.7.4. Za metrički prostor (X, d) koji je povezan i kompaktan kažemo da je kontinuum.

Definicija 2.7.5. Neka je (X, d) kontinuum. Kažemo da je (X, d) lančasti kontinuum ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon-$otvoreni lanac $C_0, \dots, C_n$ takav da je $X = C_0 \cup \ldots \cup C_n$.

Definicija 2.7.6. Neka je (X, d) kontinuum te $a, b \in X$. Kažemo da je (X, d) kontinuum lančast od a do b ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon-$otvoreni lanac $C_0, \dots, C_n$ takav da je $X = C_0 \cup \ldots \cup C_n$ te $a \in C_0$ i $b \in C_n$.

Lema 2.7.7. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje kompaktni skupovi $K_0, \dots, K_n$ takvi da je diam $K_i < \varepsilon$, $i = 0, \dots, n$ i $X = K_0 \cup \ldots \cup K_n$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Familija $\{K(x, \frac{\varepsilon}{3}) \mid x \in X\}$ je otvoren pokrivač od X pa zbog kompaktnosti od X postoje $x_0, \dots, x_n \in X$ takvi da je $X = \bigcup_{i=0}^{n} K(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$. Traženi skupovi su $K_i = \overline{K}(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$. Vrijedi diam $K_i \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, $X = \bigcup_{i=0}^{n} K(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) = \bigcup_{i=0}^{n} K_i$, i K_i su kompaktni u X jer su zatvoreni u X i X je kompaktan. □

Definicija 2.7.8. Neka je (X, d) metrički prostor. Za $S \subseteq X$ i $r > 0$ definiramo $N_r(S) = \bigcup_{x \in S} K(x, r)$.

Lema 2.7.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $K, L \subseteq X$ neprazni, kompaktni i međusobno disjunktni skupovi. Tada postoji $\lambda > 0$ takav da su skupovi $N_\lambda(K)$ i $N_\lambda(L)$ međusobno disjunktni.*

Dokaz. Budući da su K i L neprazni, kompaktni i međusobno disjunktni vrijedi $d := d(K, L) > 0$. Neka je $\lambda > 0$ takav da je $\lambda \leqslant \frac{d}{2}$, tvrdimo da su $N_\lambda(K)$ i $N_\lambda(L)$ međusobno disjunktni. Pretpostavimo suprotno, neka je $x \in N_\lambda(K) \cap N_\lambda(L)$, tada postoje $k \in K$ i $l \in L$ takvi da je $x \in K(k, \lambda)$ i $x \in K(l, \lambda)$. Tada je

$$d = d(K, L) \leqslant d(k, l) \leqslant d(k, x) + d(x, l) < 2\lambda \leqslant d,$$

čime smo dobili kontradikciju. Dakle $N_\lambda(K)$ i $N_\lambda(L)$ su međusobno disjunktni. □

Lema 2.7.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S neprazan ograničen podskup od X. Tada je diam $N_r(S) \leqslant$ diam $S + 2r$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in N_r(S)$. Tada postoje $a, b \in S$ takvi da je $x \in K(a, r)$ i $y \in K(b, r)$. Računamo $d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < 2r+ \operatorname{diam} S$. Dakle vrijedi
$\operatorname{diam} N_r(S) = \sup_{x,y \in N_r(S)} d(x, y) \leqslant 2r+ \operatorname{diam} S$. □

Propozicija 2.7.11. *Neka je (X, d) kontinuum.*

(1) Tada je (X, d) lančast ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon-$kompaktni lanac $K_0, \dots, K_n$ takav da je $X = K_0 \dots, K_n$.

(2) Neka su $a, b \in X$. Tada je (X, d) lančast od a do b ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon-$kompaktni lanac $K_0, \dots, K_n$ takav da je $X = K_0 \dots, K_n$ te $a \in K_0$ i $b \in K_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je (X, d) lančast. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\varepsilon-$otvoren lanac $C_0, \dots, C_n$ takav da je $X = C_0 \cup \dots \cup C_n$. Budući da je X kompaktan i $C_0, \dots, C_n$ otvoren pokrivač od X, taj pokrivač ima Lebesgueov broj λ. Po lemi 2.7.7 postoje kompaktni skupovi $F_0, \dots, F_m$ takvi da je $\operatorname{diam} F_i < \lambda$, $i = 0, \dots, n$ i $X = F_0 \cup \dots \cup F_m$. Definiramo $\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_m\}$. Odaberimo $x_0, \dots, x_{n-1} \in X$ takve da je $x_i \in C_i \cap C_{i+1}$.
Definiramo $K_0 = \{x_0\} \cup \bigcup_{F \in \mathcal{F}, F \subseteq C_0} F$, $K_n = \{x_{n-1}\} \cup \bigcup_{F \in \mathcal{F}, F \subseteq C_n} F$ te
$K_i = \{x_i, x_{i-1}\} \cup \bigcup_{F \in \mathcal{F}, F \subseteq C_i} F$, $i = 1, \dots, n-1$.

Pokažimo da je $K_0, \dots, K_n$ kompaktan $\varepsilon-$lanac na X. Skup K_i je kompaktan za $i = 0, \dots, n$ jer je unija konačno mnogo kompaktnih skupova. Vrijedi $K_i \subseteq C_i$ pa je $\operatorname{diam} K_i \leqslant \operatorname{diam} C_i < \varepsilon$, $i = 0, \dots, n$.
Neka je $x \in X$. Tada postoji $F \in \mathcal{F}$ takav da je $x \in F$, i budući da je $\operatorname{diam} F < \lambda$, postoji $i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $F \subseteq C_i$, a onda je i $x \in F \subseteq K_i$. Dakle vrijedi $X = \bigcup_{i=0}^{n} K_i$.
Vrijedi $|i - j| \leqslant 1 \implies K_i \cap K_j \neq \emptyset$ jer je $x_i \in K_i \cap K_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$. Vrijedi i $K_i \cap K_j \neq \emptyset \implies |i - j| \leqslant 1$. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje i, j, $|i - j| > 1$ takvi da je $K_i \cap K_j \neq \emptyset$. Onda je i $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ jer je $K_i \cap K_j \subseteq C_i \cap C_j$. Time smo dobili kontradikciju s time da je $C_0, \dots, C_n$ lanac.

Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan $\varepsilon-$lanac $K_0, \dots, K_n$ takav da je $X = K_0 \cup \dots \cup K_n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo kompaktan $\frac{\varepsilon}{2}-$lanac $K_0, \dots, K_n$ takav da je $X = K_0 \cup \dots \cup K_n$. Po lemi 2.7.9 za svaka dva $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takva da je $|i - j| > 1$ postoji $\lambda_{i,j}$ takav da je $N_{\lambda_{i,j}}(K_i) \cap N_{\lambda_{i,j}}(K_j) = \emptyset$. Definiramo
$\lambda_0 = \min\{\lambda_{i,j} \mid i, j \in \{0, \dots, n\}, |i - j| > 1\}$ te $\lambda = \min\{\lambda_0, \frac{\varepsilon}{4}\}$.
Definiramo $C_i = N_\lambda(K_i)$, $i = 0, \dots, n$. Tvrdimo da je $C_0, \dots, C_n$ otvoren $\varepsilon-$lanac u (X, d) takav da je $X = C_0 \cup \dots \cup C_n$.
Očito su C_i otvoreni i vrijedi $X = C_0 \cup \dots \cup C_n$ jer je $C_i \supseteq K_i$, za $i = 0, \dots, n$. Po lemi 2.7.10 imamo $\operatorname{diam} C_i \leqslant 2\lambda+ \operatorname{diam} K_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+ \operatorname{diam} K_i < \varepsilon$.
Za $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da je $|i - j| \leqslant 1$ vrijedi $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ jer je $K_i \cap K_j \neq \emptyset$. Za $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da je $|i - j| > 1$ vrijedi $C_i \cap C_j = \emptyset$ jer je $\lambda \leqslant \lambda_{i,j}$.

(2) se dokazuje slično, smjer $\Leftarrow$ uz potpuno isti dokaz, a smjer $\Rightarrow$ uz modifikaciju da se u K_0 doda a i u K_n doda b. □

Lema 2.7.12. *Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori i $f : X \to Y$ uniformno neprekidna funkcija. Tada vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall U \subseteq X)(\textit{diam } U < \delta \Rightarrow \textit{ diam } f(U) < \varepsilon).$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Funkcija f je uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in X$ takve da je $d(x,y) < \delta$ vrijedi $d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $U \subseteq X$ takav da je diam $U < \delta$. Tada za sve $x, y \in U$ vrijedi $d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ pa je
diam $f(U) = \sup_{x,y \in f(U)} d'(x,y) = \sup_{x,y \in U} d'(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

Propozicija 2.7.13. *Neka su (X,d) i (Y,d') homeomorfni metrički prostori.*

(1) Ako je (X,d) lančast kontinuum, onda je i (Y,d') lančast kontinuum.

(2) Ako je (X,d) kontinuum lančast od a do b te $f : X \to Y$ homeomorfizam, onda je Y kontinuum lančast od $f(a)$ do $f(b)$.

Dokaz. (1) Neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam. Tada je Y kontinuum. Funkcija f je uniformno neprekidna jer je X kompaktan. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\delta > 0$ takav da za svaki $U \subseteq X$ vrijedi diam $U < \delta \Rightarrow f(U) < \varepsilon$.
Budući da je X lančast, postoji otvoreni $\delta-$lanac $C_0, \ldots, C_n$ na X takav da je
$X = C_0 \cup \ldots \cup C_n$.
Tvrdimo da je $f(C_0), \ldots, f(C_n)$ otvoreni $\varepsilon-$lanac na Y. Vrijedi $Y = f(C_0) \cup \ldots \cup f(C_n)$ jer je $X = C_0 \cup \ldots \cup C_n$. Skupovi $f(C_i)$ su otvoreni jer je f homeomorfizam te vrijedi diam $f(C_i) < \varepsilon$ zbog izbora δ. Također vrijedi $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ ako i samo ako je $f(C_i) \cap f(C_j) \neq \emptyset$ budući da je f bijekcija. Dakle imamo $|i-j| \leqslant 1 \iff f(C_i) \cap f(C_j) \neq \emptyset$. Time je tvrdnja dokazana.
(2) jednostavno slijedi iz dokaza tvrdnje (1). □

Primjer 2.7.14. Skup $[0,1]$ s euklidskom metrikom je lančast od 0 do 1.
Poznato je da je $[0,1]$ kontinuum. Neka je $\varepsilon > 0$, pokazat ćemo da postoji kompaktan $\varepsilon-$lanac na $[0,1]$ koji pokriva $[0,1]$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Definiramo $K_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Skupovi K_i su kompaktni, diam $K_i = \frac{1}{n} < \varepsilon$, $[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i$, vrijedi $|i-j| \leqslant 1 \iff K_i \cap K_j \neq \emptyset$ te $0 \in K_0$ i $1 \in K_{n-1}$.

Korolar 2.7.15. *Luk s krajnjim točkama a i b je kontinuum lančast od a do b.*

Lema 2.7.16. *Ako je kontinuum (X,d) lančast od a do b i vrijedi $a = b$, onda je $X = \{a\}$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ i $C_0, \dots, C_n$ otvoreni $\varepsilon-$lanac u X takav da je $a \in C_0$, $b \in C_n$ i $X = \mathbb{C}_0 \cup \dots \cup C_n$. Budući da je $a = b$ vrijedi $C_0 \cap C_n \neq \emptyset$ pa mora biti $n \leqslant 1$.
Iz činjenice da je diam $C_i < \varepsilon$, $i = 0, n$ i $C_0 \cap C_n \neq \emptyset$ slijedi
diam $X =$ diam $(C_0 \cup C_n) \leqslant 2\varepsilon$.
Budući da ta ocjena vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, slijedi da je diam $X = 0$, odnosno $X = \{a\}$. □

Teorem 2.7.17. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup u (X, d, α) takav da je S (kao potprostor od (X, d)) kontinuum lančast od a do b. Pretpostavimo da su a i b izračunljive točke u (X, d, α). Tada je S izračunljiv skup u (X, d, α).*

Dokaz. Budući da je S poluizračunljiv, dovoljno je dokazati da je S izračunljivo prebrojiv. Ako je $a = b$, onda je po prethodnoj lemi $S = \{a\}$, pa je $\{i \in \mathbb{N} \mid a \in I_i\}$ rekurzivno prebrojiv skup po lemi 2.5.17 jer je a izračunljiva točka u (X, d, α). Dakle S je izračunljivo prebrojiv. U nastavku promatramo slučaj $a \neq b$.
Pretpostavimo da je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Skup I_i je otvoren u S pa ne može biti $I_i \cap S = \{a\}$ jer bi onda $\{a\}$ bio i otvoren i zatvoren u S pa bi $\{a\}, S \setminus \{a\}$ bila separacija od S. Iz istog razloga ne može biti $I_i \cap S = \{b\}$. Kad bi vrijedilo $I_i \cap S = \{a, b\}$, onda bi $\{a, b\}$ bio i otvoren i zatvoren u S pa bi zbog povezanosti od S moralo biti $S = \{a, b\}$, što je u kontradikciji s povezanošću od S.
Dakle postoji $x \in S$, $x \neq a$, $x \neq b$ takav da je $x \in I_i$. Onda postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq I_i$. Definiramo $\varepsilon = \min\{d(a, x), d(x, b), r\}$.
Postoji kompaktni $\varepsilon-$lanac $K_0, \dots, K_m$ u S koji pokriva S takav da je $a \in K_0$ i $b \in K_m$. Postoji $j \in \{0, \dots, m\}$ takav da je $x \in K_j$ i vrijedi $j \neq 0$, $j \neq m$ jer je
diam $K_j < \varepsilon \leqslant \min\{d(a, x), d(x, b)\}$. Također vrijedi $K_j \subseteq I_i$ jer je $K_j \subseteq K(x, r) \subseteq I_i$.
Definiramo $F = K_0 \cup \dots \cup K_{j-1}$ i $G = K_{j+1} \cup \dots \cup K_m$.
Nastavak dokaza je sličan kao u teoremu 2.6.3. Skupovi F i G su neprazni, međusobno disjunktni i kompaktni, vrijedi $a \in F$ i $b \in G$. Postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $F \subseteq J_u$, $G \subseteq J_v$ i $J_u \diamond J_v$.
Imamo $S = F \cup I_i \cup G \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v$.
Definiramo $\Omega = \{(i, u, v) \in \mathbb{N}^3 \mid J_u \diamond J_v, S \subseteq J_u \cup I_i \cup J_v, a \in J_u, b \in J_v\}$.
Dakle za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap S \neq \emptyset$ postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, u, v) \in \Omega$. Na isti način kao u dokazu teorema 2.6.3 vidimo da je Ω rekurzivno prebrojiv skup i da $(i, u, v) \in \Omega$ povlači da je $I_i \cap S \neq \emptyset$.
Imamo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoje $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $(i, u, v) \in \Omega$. Po teoremu o projekciji slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv čime je teorem dokazan. □

Bibliografija

[1] Vasco Brattka i Gero Presser, *Computability on subsets of metric spaces*, Theoretical Computer Science **305** (2003), br. 1-3, 43–76.

[2] Vedran Čačić, *Komputonomikon*, skripta, 2022.

[3] Eugen Čičković, Zvonko Iljazović i Lucija Validžić, *Chainable and circularly chainable semicomputable sets in computable topological spaces*, Archive for mathematical logic **58** (2019), 885–897.

[4] Zvonko Iljazović i Takayuki Kihara, *Handbook of Computability and Complexity in Analysis*, pogl. Computability of subsets of metric spaces, str. 29–69, Springer, 2021.

[5] Zvonko Iljazović, *Izračunljiva analiza*, skripta.

[6] Zvonko Iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, Disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.

[7] M. B. Pour-El i I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg-New York, 1989.

[8] Klaus Weihrauch, *Computable analysis*, Springer, Berlin, 2000.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo izračunljive metričke prostore, s posebnim naglaskom na poluizračunljive skupove u izračunljivim metričkim prostorima.

Prvo se bavimo teorijom rekurzivnih funkcija sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{N}^m$ i rekurzivno prebrojivim skupovima u $\mathbb{N}^k$ te proširujemo pojam rekurzivnosti na funkcije sa $\mathbb{N}^k$ u $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. Definiramo pojmove izračunljive točke, izračunljivog niza i izračunljivog skupa u $\mathbb{R}$. Obrađujemo i rekurzivne rekurzivno omeđene funkcije, koje koristimo u raznim dokazima u drugom poglavlju.

U drugom poglavlju uvodimo pojam izračunljivog metričkog prostora te proširujemo pojmove izračunljive točke, niza i skupa na apstraktni izračunljiv metrički prostor. Definiramo i izračunljivo prebrojive i poluizračunljive skupove u izračunljivom metričkom prostoru. To su dva različita poopćenja pojma izračunljivog skupa. Dokazujemo neke rezultate o njima koji će kasnije biti potrebni.

Glavni rezultati ovog rada su tvrdnja da je poluizračunljiv luk s izračunljivim krajnjim točkama nužno izračunljiv te slična tvrdnja za lančasti kontinuum.

Summary

In this thesis we study computable metric spaces, with special focus on semicomputable sets in computable metric spaces.

First we study the theory of recursive functions from $\mathbb{N}^k$ to $\mathbb{N}^m$ and recursively enumerable sets in $\mathbb{N}^k$. Also, we extend the notion of recursive functions to functions from $\mathbb{N}^k$ to $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$. We define the concepts of computable points, computable sequences and computable sets in $\mathbb{R}$. We also study recursive recursively bounded functions, which we use in proofs in the second chapter.

In the second chapter we introduce the notion of a computable metric space and extend the notions of computable points, sequences and sets to abstract computable metric spaces. We also define countably enumerable and semicomputable sets in computable metric spaces. Those are two different generalizations of computable sets. We prove some results about those sets that we will need.

At the end, we prove the main result, that a semicomputable arc with computable endpoints is necessarily a computable set, and a similar result for the chainable continua.

Životopis

Rodih se 10. veljače 2000. u Osijeku. Pohađah Osnovnu školu Ivana Filipovića i III. gimnaziju Osijek. Tijekom svog školskog obrazovanja sudjelovah na natjecanjima iz prirodnih znanosti, matematike, informatike i logike, te 2017. godine na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2018. godine upisujem preddiplomski studij matematike, te 2021. diplomski studij primijenjene matematike.

Tijekom preddiplomskog studija kao član udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" sudjelujem u pripremama za matematička natjecanja za darovite učenike. Također od druge godine preddiplomskog do prve godine diplomskog studija držim demonstrature iz raznih kolegija. Imam osvojeno treće mjesto 2022. godine na studentskom matematičkom natjecanju Vojtech Jarnik IMC.