Kromatski broj ravnine

Pezelj, Danijel

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Danijel Pezelj

KROMATSKI BROJ RAVNINE

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu razmotrit ćemo otvoreni problem koji najbolje ilustrira što matematika nudi: problem koji je razumljiv svakome, ali nitko ga nije uspio riješiti, i tako već više od 70 godina. Problem glasi:

> *Koji je najmanji broj boja potreban da se oboji ravnina na takav način da nikoje dvije točke iste boje nisu međusobno udaljene točno jednu jediničnu duljinu?*

Tada osamnaestogodišnji Edward Nelson postavio je taj problem 1950. godine, a broj koji tražimo naziva se *kromatski broj ravnine*. Pokazat ćemo nekoliko zanimljivih rezultata koji su do sada otkriveni kao i pokušaje da se trenutno poznate granice pomaknu. Matematičari nisu zaboravili na ovaj otvoreni problem i vidjet ćemo kako je sasvim nedavno, 2018., De Grey neočekivano pomaknuo donju granicu.

Prvo poglavlje ovog rada posvetit ćemo definiciji kromatskog broja ravnine te proučavanju njegovih osnovnih svojstava. Pogledat ćemo kako se bojenje ravnine može matematički formalizirati i koje su njegove osnovne karakteristike. Reći ćemo nešto i načinima popločavanja ravnine. Nadalje, poglavlje će razmotriti granice kromatskog broja ravnine, istražujući njegove donje i gornje granice pomoću grafova i tehnika popločavanja ravnine te ukazujući na važne rezultate i zaključke vezane uz temu.

U drugom poglavlju, fokus će biti usmjeren prema kromatskom broju grafa. Proučavanjem kromatskog broja različitih grafova, analizirat ćemo kako se ovaj koncept može primijeniti na realne probleme. Konkretno, istražit ćemo kromatski broj nekih poznatih grafova te razmotriti različite tehnike koje se koriste za određivanje kromatskog broja grafa. Također, istražit ćemo primjere primjene kromatskog broja u stvarnom svijetu. Analizirat ćemo kako se koncept kromatskog broja može primijeniti u različitim područjima kao što su telekomunikacije, raspoređivanje resursa i druge praktične situacije. Kroz konkretne primjere, ilustrirat ćemo važnost i korisnost kromatskog broja u rješavanju stvarnih problema. Konačno, problem bojenja konačnih grafova povezat ćemo s problemom bojenja ravnine.

Nadam se da će i čitateljima ovog rada problem kromatskog broja ravnine poslužiti kao inspiracija za budući rad i otkrića, kako unutar matematike, tako i u drugim poljima koja traže kreativno rješavanje problema.

Poglavlje 1

Problem kromatskog broja ravnine

Kao što je spomenuto u uvodu, tada mladi matematičar, *Edward Nelson* postavio je 1950. godine problem bojenja ravnine kojim ćemo se baviti u ovom radu. Problem se može izreći na više načina. Jedan od njih je ovaj:

> *Koliko je najmanje boja potrebno za bojenje ravnine tako da nikoje dvije jednako obojene točke ne budu međusobno udaljene točno za 1?*

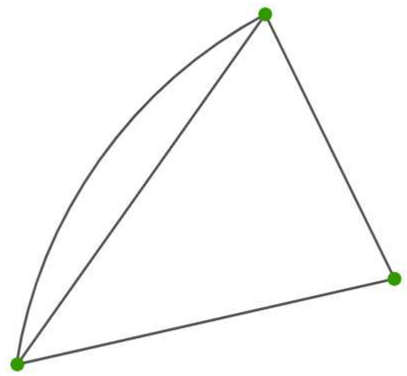
Prije nego formalno iskažemo problem kojim se bavimo i pokažemo nekoliko osnovnih rezultata, definirajmo neke osnovne pojmove koji će nam u tome pomoći.

Definicija 1.0.1. *Za dani pozitivan cijeli broj n, kažemo da je ravnina n-obojena ako je svakoj točki ravnine dodijeljena jedna od zadanih n boja.*

Definicija 1.0.2. *Monokromatski skup je skup čiji su svi elementi obojeni istom bojom.*

Potrebno je definirati i graf. Slika 1.1 opisuje strukturu koja se sastoji od tri objekta, koje nazivamo vrhovi. Oni su povezani sa četiri krivulje, koje nazivamo bridovi. Ipak, graf je isključivo kombinatorna struktura, jer nije važna priroda vrhova ili bridova, već samo njihove incidencije, tj. podaci o tome koji vrhovi spajaju koje bridove.

Definicija 1.0.3. *Neka je V skup vrhova, a E multiskup* $2-$*podskupova od V, koje zovemo bridovi. Graf je uređeni par skupova* (V, E).



Slika 1.1: Graf

U kontekstu problema bojenja kojeg proučavamo, prirodno je promotriti graf čiji skup vrhova su sve točke ravnine, tj. $\mathbb{R}^2$, dok su bridom spojeni upravo oni vrhovi čije pripadne točke su udaljene točno za 1. Sada možemo preformulirati naš problem:

Definicija 1.0.4 (kromatski broj ravnine)**.** *Kromatski broj ravnine je najmanji broj boja dovoljan za bojenje ravnine na način da zabranjuje monokromatske parove točaka udaljenih za* 1 *i označavamo ga s* $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Za svako bojenje ravnine sa svojstvom da ne postoje istobojne točke udaljene za 1 reći ćemo da je *pravilno bojenje*.

1.1 Rezultati za donju ogradu

Prije nego krenemo na prvi nama zanimljiv rezultat, prisjetit ćemo se još i slabe forme Dirichletovog principa.

Teorem 1.1.1 (Dirichletov princip)**.** *Neka je n prirodan broj. Ako $n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, tada barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.*

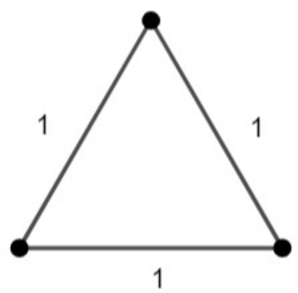
Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju kontradikcijom. Pretpostavimo da ne postoji kutija koja sadrži više od jednog predmeta. To znači da svaka od n kutija sadrži ili jedan ili nijedan predmet. Označimo s m broj praznih kutija. Vrijedi $m \geq 0$. To znači da je broj kutija koje sadrže jedan predmet jednak $n - m$. To bi značilo i da je ukupan broj predmeta smještenih u kutije jednak $n - m$. Kako je $n - m \leq n < n + 1$, to je u kontradikciji s pretpostavkom da želimo smjestiti $n + 1$ predmeta u n kutija. $\square$

Dirichletov princip pomoći će nam da dokažemo sljedeći rezultat. Ne zna se tko ga je prvi primijetio, ali nama je koristan kao početna točka za donju granicu *kromatskog broja*.

Teorem 1.1.2. *Bez obzira kako je ravnina* 2*-obojena, ona sadrži monokromatski par točaka udaljenih za* 1*, odnosno:*

$$\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \geq 3.$$

Dokaz. Nacrtajmo u danoj 2-obojenoj ravnini jednakostranični trokut 1.2 stranica duljine 1. Trokut ima 3 vrha, a na raspolaganju su nam 2 boje. Stoga, prema *Dirichletovom principu* 1.1.1, dva vrha moraju biti obojena istom bojom. □



Slika 1.2: Jednakostranični trokut stranica duljine 1

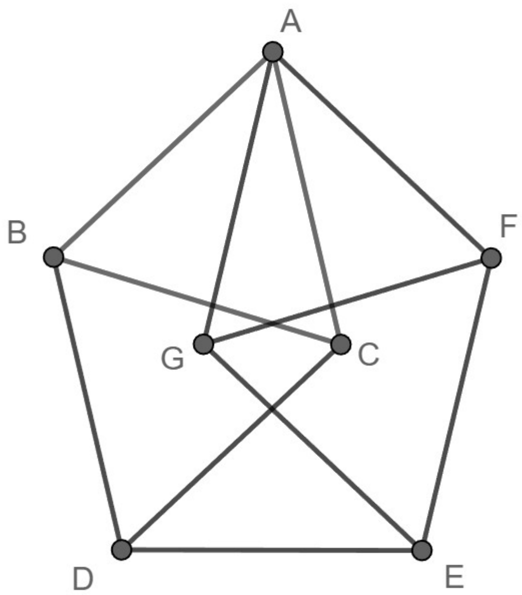
Vrlo brzo dođemo i do sljedećeg zaključka. Za njega su zaslužni kanadski matematičari, braća *Leo i William Moser*, jer se kao dokaz koristi konfiguracija točaka 1.3 čiji su oni autori. Stoga se ta konfiguracija i naziva *Moserovo vreteno* .

Teorem 1.1.3. *Bez obzira kako je ravnina* 3*-obojena, ona sadrži monokromatski par točaka udaljenih za* 1*, odnosno:*

$$\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \geq 4.$$

Dokaz. Kao dokaz koristi se ranije spomenuto *Moserovo vreteno* 1.3. Sve dužine označene na slici imaju duljinu 1.

Dokaz dobivamo kontradikcijom. Pretpostavimo da je $\chi\left(\mathbb{R}^2\right) = 3$, odnosno, da postoji pravilno bojenje u 3 boje. Iz jednakostraničnih trokuta sa slike, zaključujemo da su točke A i D obojene istom bojom, kao i točke A i E, no to nije moguće jer su točke D i E udaljene za 1. Dakle, $\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \geq 4$. □

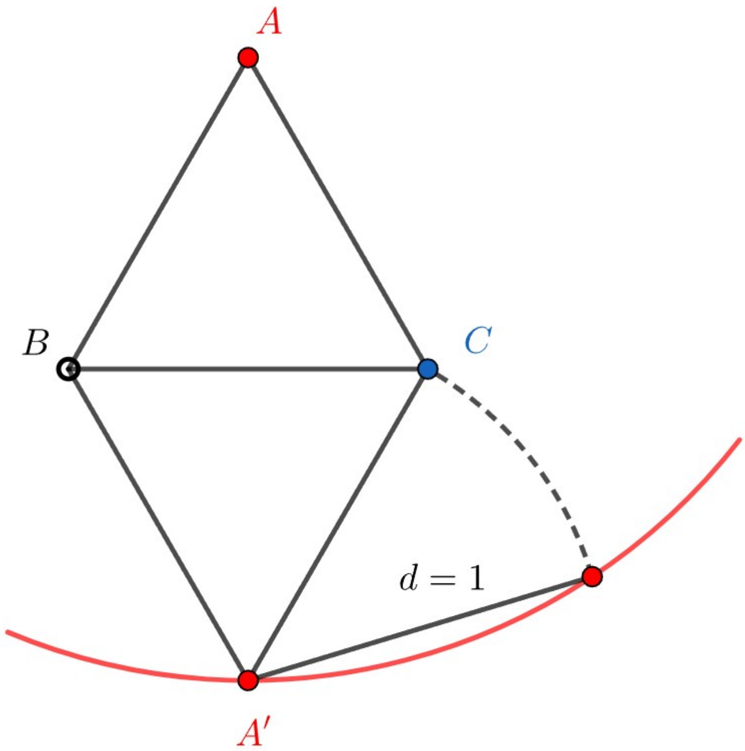


Slika 1.3: Moserovo vreteno

Još jedan zanimljiv rezultat proizlazi iz konstrukcije *Moserovog vretena*. Primijetimo da za bilo koje 3 točke vretena vrijedi da su barem 2 od njih udaljene za 1. To implicira da u *Moserovom vretenu* koje ne dopušta monokromatsku udaljenost 1, drugim riječima, gdje nije dopušteno da su dvije točke udaljene za 1 obojene istom bojom, najviše dvije točke mogu biti obojene istom bojom.

Moserovo vreteno, iako jako elegantno kao dokaz, ipak odaje dojam kao da je "palo s neba". Postavlja se pitanje kako doći do takvog rješenja. Nasreću, postoji dokaz za istu tvrdnju koji je znatno prirodniji. Za njega je zaslužan *Hugo Hadwiger* koji je dokaz dao 1961. godine.

Hadwigerov dokaz. Pretpostavimo da 3-obojena ravnina obojena u crvenu, bijelu, plavu boju ne sadrži monokromatske parove točaka udaljenih za 1. Tada postoji jednakostranični trokut ABC 1.4 kojemu je svaki vrh obojen drugačijom bojom. Neka je A obojen crveno. Tada B i C moraju biti obojeni u bijelu i plavu boju. Neka je točka A' točka osnosimetrična točki A u odnosu na stranicu BC. Zbog uvjeta koji smo zadali, ona također mora biti obojena crveno. Ako rotiramo romb $ABA'C$ oko točke A za bilo koji kut, još uvijek će vrijediti isto pravilo. Nastavimo li rotirati romb, dobit ćemo kružnicu sa središtem u A, radijusa AA' obojenu u crveno. Naravno, toj kružnici možemo konstruirati tetivu koja ima duljinu jedan i čije su krajnje točke obe crvene, što je u kontradikciji s pretpostavkom. $\square$



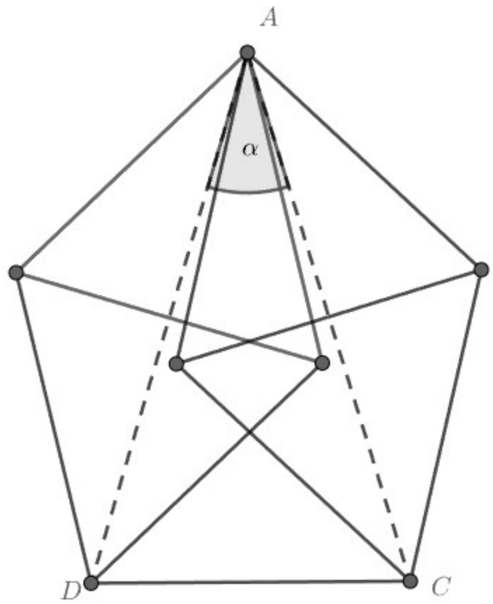
Slika 1.4: Trokut *ABC* u 3-obojenoj ravnini

Dosadašnje rezultate za donju granicu relativno smo jednostavno dokazali, a i sami primjeri bojenja su jednostavni i oku jasni. Sljedeći primjer nije tako jednostavan. To je upravo i najnoviji rezultat pomicanja donje granice *kromatskog broja ravnine*. Za njega je zaslužan *Aubrey de Grey*. On je 2018. godine došao do sljedećeg zaključka.

Teorem 1.1.4. *Bez obzira kako je ravnina* 4*-obojena, ona sadrži monokromatski par točaka udaljenih za* 1*, odnosno:*

$$\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \geq 5.$$

Za ovaj teorem nećemo dati formalni dokaz. De Grey je kao dokaz prvotno konstruirao graf sa 20425 vrhova. Pomoću računala i programa koji je razvio, testirao je postojanje monokromatskih parova točaka udaljenih za 1 u 4-obojenoj ravnini. U potrazi za grafovima koji bi mogli poslužiti u konstrukciji *De Grey* je krenuo od, nama poznatog, *Moserovog vretena*. Kao što smo ranije rekli, sve dužine označene na slici 1.5 su jedinične dužine.



Slika 1.5: Moserovo vreteno

Izdvojimo sa prethodne slike četverokut 1.6 koji se sastoji od dva jednakostranična trokuta.

Koristeći Pitagorin poučak, možemo zaključiti da udaljenost točaka A i D iznosi

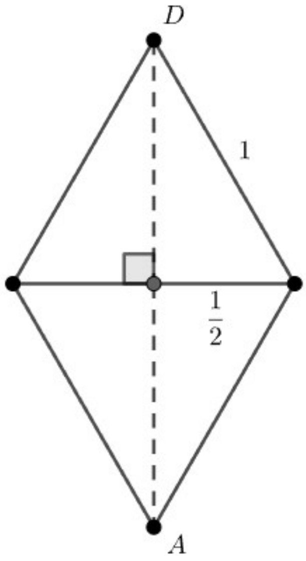
$$2 \cdot \sqrt{1^2 - \frac{1}{2}^2} = \sqrt{3}.$$

Izdvojimo sada sa slike *Moserovog vretena* 1.5 trokut ACD. Koristeći kosinusov poučak za kut α dobivamo

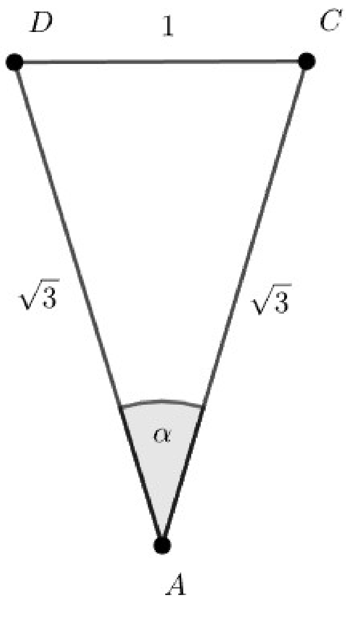
$$\begin{aligned} &1^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\alpha \\ &1 = 3 + 3 - 6\cos\alpha \\ &\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\alpha = \arccos\frac{5}{6} \approx 33,55^\circ.$$

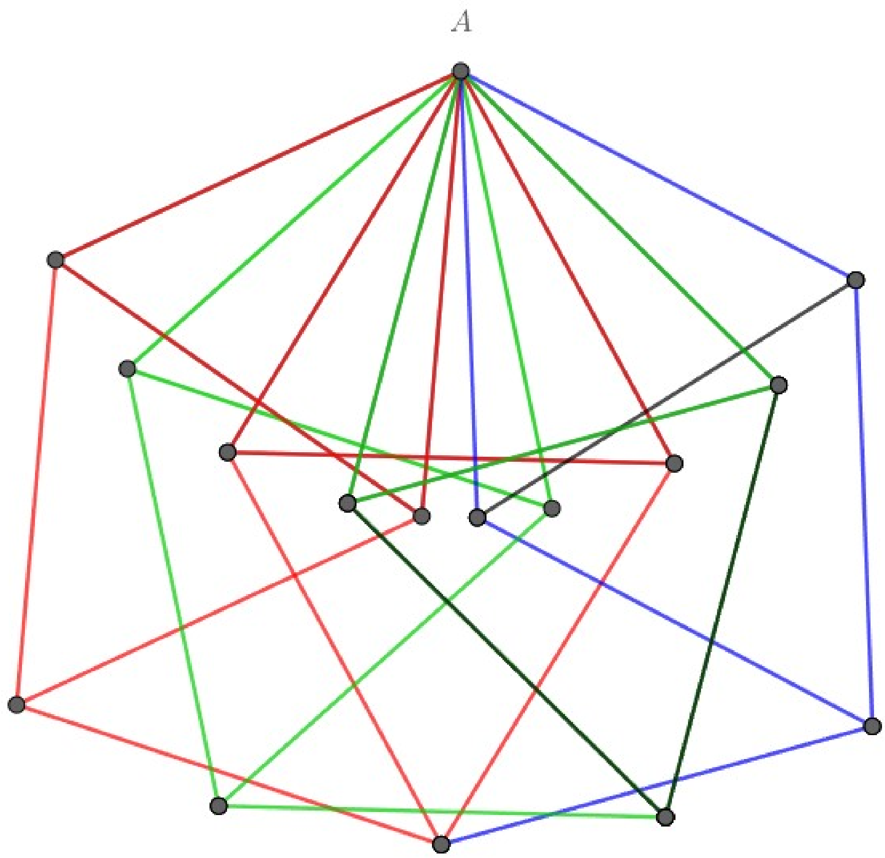


Slika 1.6: Četverokut izdvojen iz Moserovog vretena



Slika 1.7: Trokut ACD s kutom α

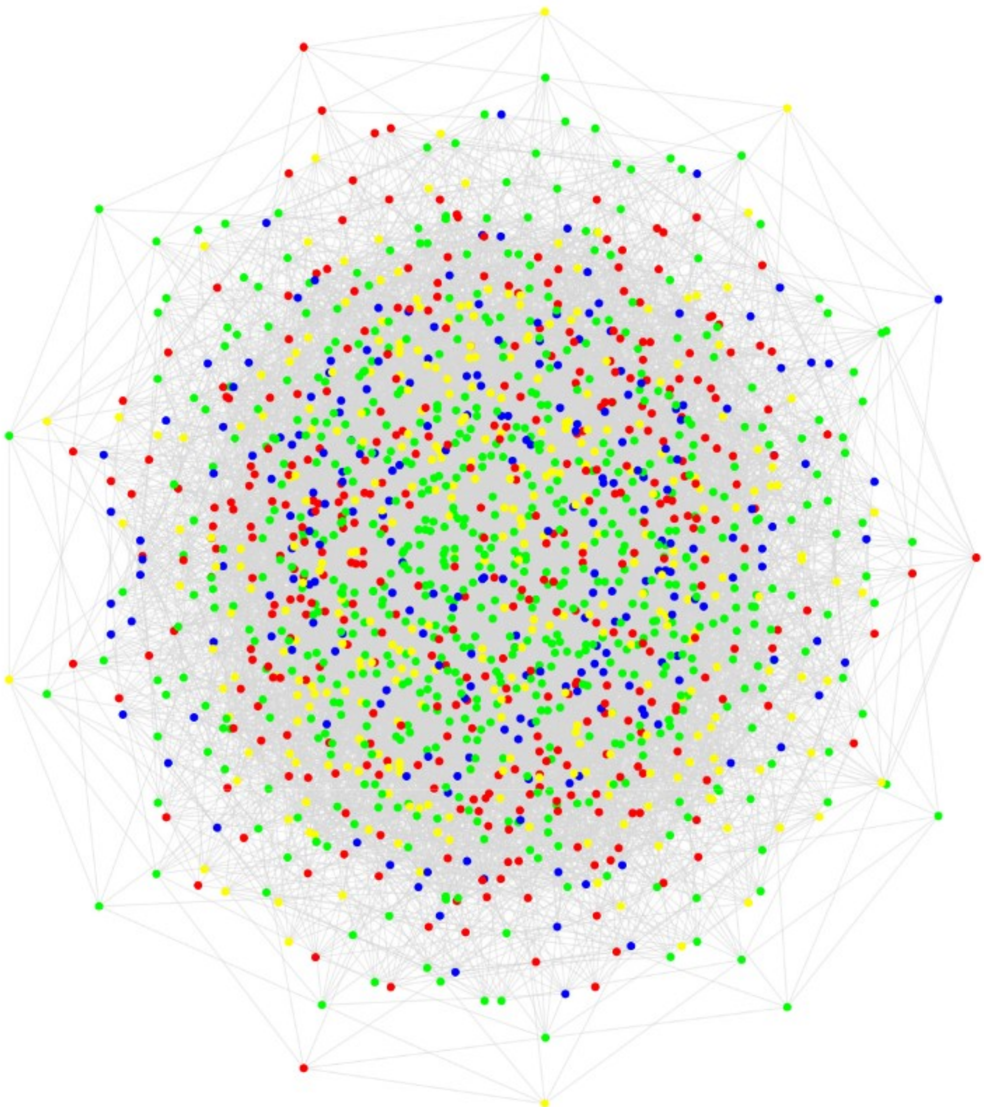
De Greyeva motivacija bila je upravo to što vreteno 1.5 sadrži dva para vrhova, (A, C) i (A, D) koji su međusobno udaljeni $\sqrt{3}$, a u isto vrijeme ne mogu biti monokromatski, što smo ranije pokazali. Nakon toga rotirao je vreteno 1.8 za kutove $\frac{\alpha}{2}$ i α. Ideja mu je bila



Slika 1.8: Moserovo vreteno rotirano za $\frac{\alpha}{2}$ i α

da u grafu koji sadrži visoku gustoću takvih isprepletenih *vretena* monokromatski parovi udaljeni za $\sqrt{3}$ možda budu raspoređeni ravnomjerno u 4-obojenoj ravnini. Budući da, prema *De Greyu*, takvi grafovi u pravilu sadrže pravilne šesterokute sa stranicom duljine 1, nadao se da bi ti grafovi mogli sadržavati šesterokute koji ne uključuju monokromatske trojke u bilo kojem 4-bojenju grafa.

Nakon incijalne konstrukcije s 20425 vrhova, opisao je konstrukciju grafa s 1581 vrhom, koji u 4-obojenoj ravnini sadrži jedan par parova točaka udaljenih za 1. Skicu takvog grafa 1.9 genrirali smo pomoću *Wolfram alphe*.



Slika 1.9: De Greyev graf sa 1581 vrhova

Uključenjem modernih tehnologija u ovu temu, broj potrebnih vrhova za dokaz ove tvrdnje sve se više i više smanjuje. Tako je 2019. godine *Jaan Parts* demonstrirao sliku grafa s 510 vrhova i 2508 bridova, kojemu su vrhovi udaljeni za jediničnu dužinu i kojim je ponovno pokazao da je $\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \geq 5$.

1.2 Rezultati za gornju ogradu

Nakon što smo pokazali primjere za donju ogradu, postavlja se pitanje postoji li uopće gornja ograda. Pokazat ćemo da ona zaista postoji na nekoliko primjera, ali dat ćemo takve primjere bojenja, koji su nisu samo gomila naizgled nasumično obojenih točaka, već primjere iz kojih je jasno da takvo bojenje postoji. Poslužit ćemo se popločavanjem ravnine. Pokušat ćemo razdijeliti ravninu na mnogokute tako da ju u potpunosti prekrivaju, dakle bez praznina i preklapanja. Također, zahtjevat ćemo određene pravilnosti s obzirom na oblik, vrstu i poredak tih mnogokuta. Da bismo to mogli, prvo moramo uvesti neke osnovne pojmove i vidjeti kako uopće možemo popločiti ravninu.

Definicija 1.2.1. *Particija skupa K je familija nepraznih, međusobno disjunktnih podskupova od K kojima je unija čitav skup K.*

Analogno tome možemo definirati particiju ravnine.

Definicija 1.2.2. *Particija ravnine (rastav ravnine)* Π *je familija nepraznih, međusobno disjunktnih mnogokuta kojima je unija čitava ravnina* Π.

Drugim riječima, promatrat ćemo načine na koje se ravnina može podijeliti na mnogokute, pri čemu svakom od mnogokuta ili ne uključujemo rub (tj. vrhove i stranice) ili uključujemo dio ruba, ili uključujemo cijeli rub. Vrlo je važno raščistiti koji dio ruba priključujemo svakom od mnogokuta.

Definicija 1.2.3. *Susjedni mnogokuti su mnogokuti koji dijele zajedničke vrhove ili stranice.*

Definicija 1.2.4. *Čvorište particije je točka u kojoj se sijeku vrhovi susjednih mnogokuta.*

Definicija 1.2.5. *Ako su kutovi svih mnogokuta koji se susreću u jednom čvorištu sukladni, takvo čvorište nazivamo pravilnim čvorištem.*

Definicija 1.2.6. *Dva čvorišta su sukladna ako je isti slijed kutova koji se u njima sastaju.*

Konačno, možemo definirati pravilno popločavanje ravnine.

Definicija 1.2.7. *Pravilno popločavanje ravnine je svako popločavanje ravnine pravilnim mnogokutima, kod kojeg su svi mnogokuti i sva čvorišta sukladni.*

Kako bismo si olakšali pronalazak pravilnih popločavanja ravnine, geometrijski problem ćemo svesti na algebraski. Prvi uvjet koji moramo ispuniti je da u svakom čvorištu, zbroj unutarnjih kutova mora iznositi $360°$. Svaki $n-$terokut možemo, povlačenjem dijagonala iz jednog vrha u ostale, podijeliti na $n-2$ trokuta. Kako je zbroj unutarnjih kutova trokuta jednak 180°, slijedi da u $n-$terokutu zbroj veličina unutarnjih kutova iznosi $(n-2)\cdot 180^\circ$. Kao što smo spomenuli, nas interesiraju prvenstveno pravilni mnogokuti. Kako su u pravilnom $n-$terokutu unutarnji kutovi međusobno sukladni, slijedi da je veličina unutarnjeg kuta pravilnog $n-$terokuta jednaka

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}.$$

Kako se u svakom našem čvorištu sastaje k pravilnih $n-$terokuta, postavljeni uvjet možemo iskazati diofantskom jednadžbom

$$k\cdot\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}=360^\circ,$$

gdje su $k,n\in\mathbb{N}$ i $n\geq 3$ jer je mnogokut s najmanjim brojem stranica trokut. Dakle, dobili smo situaciju gdje smo problem pravilnog popločavanja ravnine uspjeli reducirati na proces rješavanja diofantske jednadžbe.

Teorem 1.2.8. *Jedina pravilna popločavanja ravnine su na jednakostranične trokute, kvadrate i pravilne šesterokute i to ako ih se u jednom čvorištu sastaje po šest, četiri, odnosno po tri.*

Dokaz. Dokaz se svodi na rješavanje prethodno zadane diofantske jednadžbe:

$$k\cdot\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}=360^\circ,\ k,n\in\mathbb{N},n\geq 3.$$

Pomnožimo jednadžbu sa n i podijelimo sa 180°:

$$k\cdot(n-2)=2n.$$

Dijelimo dobivenu jednadžbu sa $(n-2)$:

$$k=\frac{2n}{n-2}.$$

Podijelimo brojnik i nazivnik kao polinome u n:

$$\begin{aligned}k&=\frac{2n}{n-2}\\&=\frac{2n-4+4}{n-2}\\&=\frac{2n-4}{n-2}+\frac{4}{n-2}\\&=\frac{2\cdot(n-2)}{n-2}+\frac{4}{n-2}\\&=2+\frac{4}{n-2}.\end{aligned}$$

Tražimo samo rješenja gdje su $k, n \in \mathbb{N}$ pa zaključujemo da je nužno da $\frac{4}{n-2}$ bude prirodan broj, odnosno $n - 2$ mora biti djelitelj od 4. Slijedi:

$$n - 2 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}.$$

Odnosno za n vrijedi:

$$n \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}.$$

Uz uvjete da je $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$, konačno, dobivamo:

$$n \in \{3, 4, 6\}.$$

To nam daje sljedeće uređene parove:

$$(k, n) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}.$$

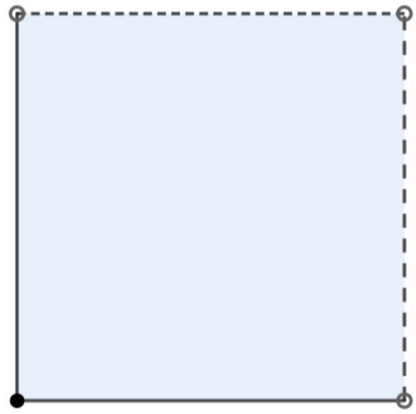
Dakle, ravninu možemo pravilno popločiti tako da se u jednom čvorištu sastaju tri pravilna šesterokuta, četiri kvadrata ili šest trokuta. □

Sad kada znamo s kojim pravilnim mnogokutima raspolažemo ako želimo pravilno popločiti ravninu, pokazat ćemo primjere bojenja koristeći kvadrate i pravilne šesterokute.

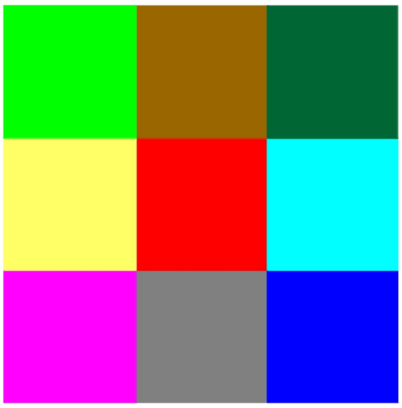
Teorem 1.2.9. *Postoji* $9-$*bojenje ravnine koje ne sadrži monokromatski par točaka udaljenih za* 1*, odnosno:*

$$\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \leq 9.$$

Dokaz. Krećemo od kvadrata stranice duljine $\frac{1}{\sqrt{2}}$ prikazanog na slici 1.10. Posložimo 9 takvih kvadrata u veći kvadrat rasporeda 3×3 i svaki obojimo drugom bojom. Nazovimo uniju tih kvadrata S, vidjeti sliku 1.11. Translacijama od S možemo pravilno popločiti ravninu i uz to dobiti pravilno bojenje koje tražimo, kao na slici 1.12.



Slika 1.10: Kvadrat stranica duljine $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

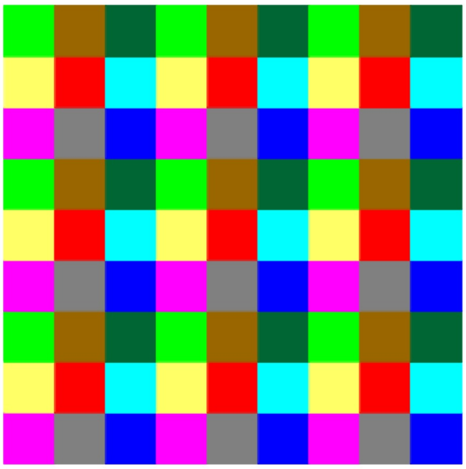


Slika 1.11: Unija kvadrata S

Naime, ako uzmemo kvadrat stranice duljine $\frac{1}{\sqrt{2}}$, duljina njegove dijagonale tada iznosi

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1.$$

Uzmimo sada bilo koje dvije jednako obojene točke u našoj pravilno popločenoj ravnini.



Slika 1.12: Bojenje ravnine kvadratima

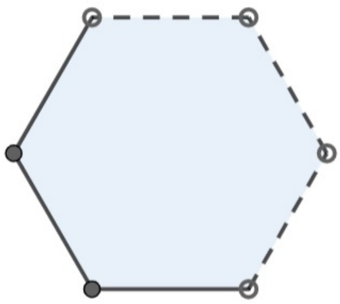
Ako se nalaze unutar istog kvadrata, udaljenost im je manja od duljine dijagonale, odnosno manja od 1, jer u svaki kvadrat uključujemo samo jedan vrh i dvije stranice koje su mu susjedne, a isključujemo ostale točke ruba. Ako se točke nalaze u različitim kvadratima, udaljenost je sigurno veća od $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$. Dakle, nikoje dvije isto obojene točke nisu udaljene za 1. $\square$

Kako smo uspješno pokazali da postoji pravilno bojenje ravnine koje ne sadrži monokromatski par točaka udaljenih za 1, postavlja se pitanje (kao i kod donje ograde) možemo li ogradu dodatno popraviti. Ispostavlja se da možemo. Štoviše, možemo to napraviti još uvijek koristeći pravilno popločavanje ravnine.

Teorem 1.2.10. *Postoji* $7-$*bojenje ravnine koje ne sadrži monokromatski par točaka udaljenih za* 1*, odnosno:*

$$\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \leq 7.$$

Dokaz. Za ovaj dokaz iskoristit ćemo pravilni šesterokut.

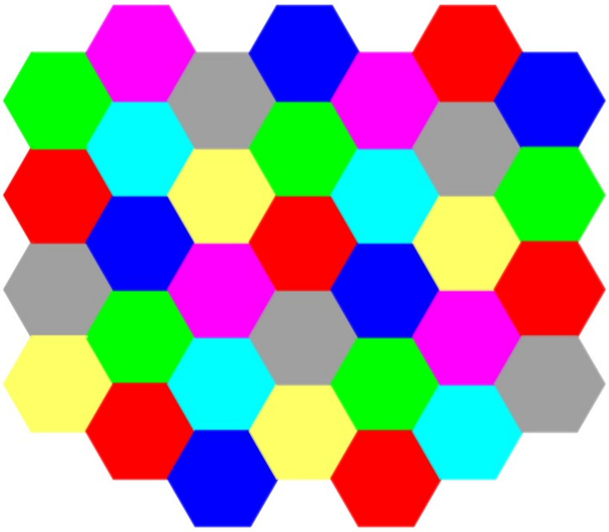


Slika 1.13: Šesterokut stranica duljine $\frac{1}{2}$.

Kao i kod kvadrata, ne uključujemo sve točke ruba, već 2 vrha i 3 stranice kao na slici 1.13. Posložimo šesterokute u "cvjetni uzorak" 1.14 i svaki obojimo drugom bojom. Nazovimo uniju takvih šesterokuta P. Translacijama od P možemo pravilno popločiti ravninu,

Slika 1.14: Unija šesterokuta P

kao na slici 1.15, a ujedno i dobiti pravilno bojenje ravnine sa 7 boja. Promotrimo sada bilo koji monokromatski par točaka naše ravnine. Ako se nalaze unutar istog šesterokuta, udaljenost im je sigurno manja od 1 zato što upravo toliko iznosi duljina najdulje dijagonale šesterokuta. Ako se pak nalaze unutar različitih šesterokuta, onda im je udaljenost sigurno veća od $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Naime, promotrimo dva crvena šesterokuta u prvom i drugom stupcu. Tražimo udaljenost donjeg desnog vrha šesterokuta iz prvog stupca od gornjeg lijevog vrha

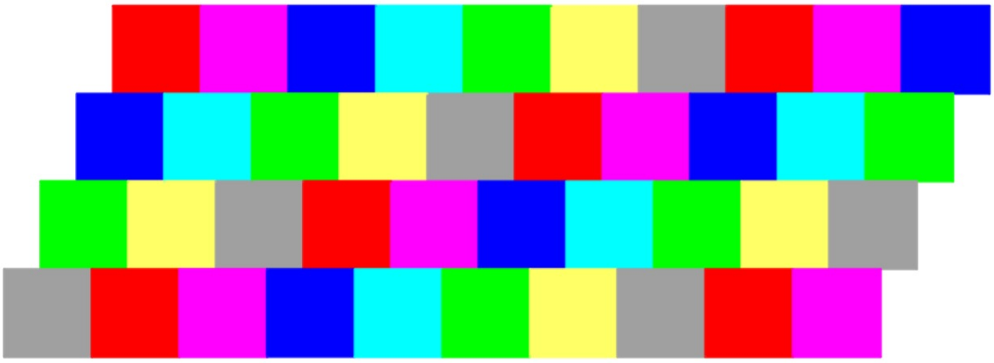


Slika 1.15: Bojenje ravnine pravilnim šesterokutima

šesterokuta iz drugog stupca. Horizontalna udaljenost dva vrha jednaka je polovini duljine stranice unutarnjeg trokuta šesterokuta, dakle $\frac{1}{4}$. Vertikalna udaljenost dva vrha jednaka je 3 visine unutarnjeg trokuta šesterokuta. Iznosi $3 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Konačno, dobivamo da je udaljenost dva vrha jednaka $\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Dakle, nikoji monokromatski par točaka nije udaljen za 1. □

Pokazat ćemo još jedan primjer bojenja ravnine sa 7 boja. Ovaj put popločavanje neće biti pravilno jer nam neće svi susjedni mnogokuti imati zajednička čvorišta. Ponovno ćemo iskoristiti kvadrat stranice duljine $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i dijagonale duljine 1 kojemu nisu uključene sve točke ruba, već je uključen samo jedan vrh i susjedne stranice kao na slici 1.10.

Posložimo 7 različito obojenih kvadrata u redove i ciklički ponavljamo boje, a redove posložimo jedne na druge, tako da je svaki idući red dobijen od gornjeg translacijom za duljinu $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ulijevo. Promotrimo bilo koje monokromatske točke tako obojene ravnine. Ako se nalaze unutar istog kvadrata, udaljenost im je sigurno manja od 1 jer toliko iznosi duljina dijagonale (kojoj nisu obje krajnje točke uključene). Da bismo izračunali najmanju udaljenost monokromatskih točaka u različitim kvadratima, poslužit ćemo slikom 1.16. Tražimo udaljenost između lijevog crvenog kvadrata u prvom redu i jedinog crvenog kvadrata u trećem redu. Promotrimo krajnje desni crveni kvadrat u prvom redu. Udaljenost njega i lijevog crvenog kvadrata u prvom redu iznosi $x = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, što odgovara zbroju du-



Slika 1.16: Popločavanje ravnine kvadratima

ljina stranica 6 kvadrata. Horizontalna udaljenost krajnje desnog crvenog kvadrata u prvom redu i gornjeg lijevog vrha crvenog kvadrata iz trećeg reda iznosi $y = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, što odgovara translataciji u lijevo dva puta. To znači da je horizontalna udaljenost gornjeg lijevog crvenog kvadrata u prvom redu i crvenog kvadrata iz trećeg reda z jednaka:

$$\begin{aligned} z &= x - y \\ &= 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Vertikalna udaljenost ta dva crvena kvadrata iznosi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ što odgovara visini jednog kvadrata. Konačno, koristeći Pitagorin poučak, dobijemo da je tražena udaljenost d dva kvadrata jednaka

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(2\sqrt{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ d^2 &= \frac{25 - 16\sqrt{2}}{2} \\ d &\approx 1.089 \end{aligned}$$

što znači da je najmanja udaljenost monokromatskih točaka u različitim kvadratima veća od 1.089. Dakle, nikoje dvije monokromatske točke nisu udaljene za 1.

Poglavlje 2

Kromatski broj grafa

2.1 Općeniti koncepti i rezultati

Pojam grafa definirali smo već na samom početku u definiciji 1.0.3, a koristili smo ga i u nekim od dokaza u našoj potrazi za kromatskim brojem ravnine. Moserovo vreteno je upravo jedan primjer grafa. Prije nego što definiramo kromatski broj grafa, potrebno je definirati još nekoliko bitnih pojmova koji će nam u tome pomoći.

Definicija 2.1.1. *Neka je $e \in E$ brid i vrijedi $e = \{v_1, v_2\}$, gdje su $v_1, v_2 \in V$ vrhovi. Kažemo da su e i v_1 incidentni. Isto kažemo i za e i v_2.*

Definicija 2.1.2. *Neka je $e \in E$ brid i vrijedi $e = \{v_1, v_2\}$, gdje su $v_1, v_2 \in V$ vrhovi. Kažemo da su v_1 i v_2 susjedni vrhovi.*

Definicija 2.1.3. *Neka je vrh $v \in V$ i brid $e = \{v, v\} \in E$. Za brid e tada kažemo da je petlja, odnosno da spaja vrh sam sa sobom.*

Definicija 2.1.4. *Neka su $v_1, v_2 \in V$ i $e_1, e_2 \in E$. Ako vrijedi $e_1 = \{v_1, v_2\}$ i $e_2 = \{v_1, v_2\}$ tada su e_1 i e_2 višestruki bridovi, odnosno različiti bridovi koji spajaju isti par vrhova.*

Definicija 2.1.5. *Graf koji sadrži višestruke bridove nazivamo multigraf.*

Definicija 2.1.6. *Jednostavni graf je neusmjereni graf koji nema niti višestrukih bridova niti petlji.*

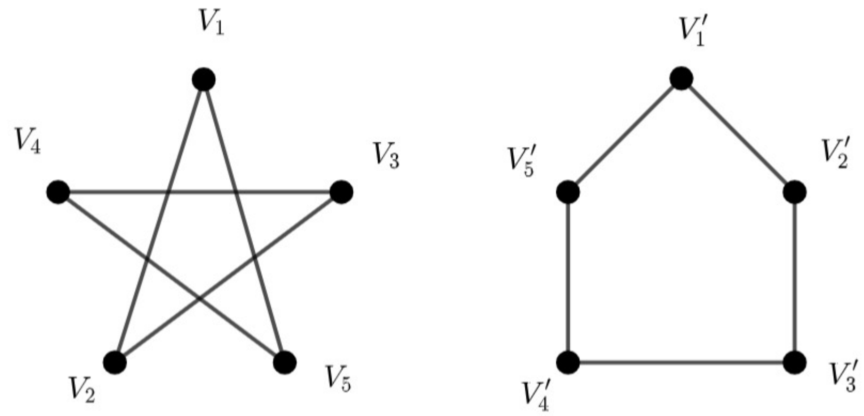
Iz definicije grafa, nameće se zaključak da se on može prikazati na različite načine. Kao što smo spomenuli, za graf je bitno isključivo koji bridovi spajaju koje vrhove. Štoviše, u jednostavnom grafu bridovima obično ne pridajemo oznake (tj. imena) pa je onda važna jedino informacija koji vrhovi su susjedni, a koji nisu. Trebalo bi i rigorozno definirati u kojim slučajevima za dva grafa možemo reći da su isti, odnosno *izomorfni*. Tražimo da za svaki par vrhova v_1, v_2 u grafovima G_1 i G_2 broj bridova koji spajaju v_1 i v_2 u grafu G_1 bude jednak broju bridova koji ih spajaju u G_2. Preciznije:

Definicija 2.1.7. *Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su izomorfni ako postoje bijekcije $\theta : V_1 \to V_2$ i $\phi : E_1 \to E_2$ takve da je v incidentan s bridom e u G_1 ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s $\phi(e)$ u G_2.*

Za jednostavne pak grafove definicija izomorfnosti postaje naprosto sljedeća.

Definicija 2.1.8. *Grafovi G_1 i G_2 su izomorfni ako postoji bijekcija $\theta\colon V_1 \to V_2$ takva da su $u, v \in V_1$ susjedni u G_1 ako i samo ako su $\theta(u), \theta(v) \in V_2$ susjedni u G_2.*

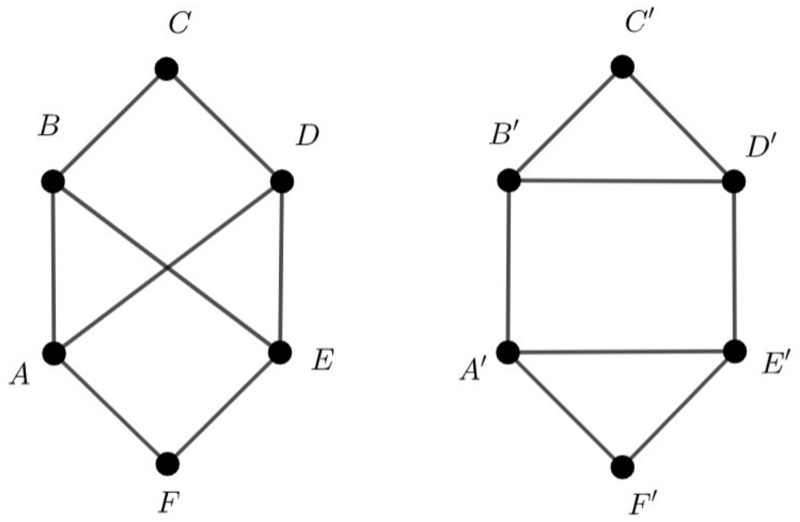
Primjerice dva izomorfna grafa nalaze se na slici 2.1, dok grafovi na slici 2.2 nisu izomorfni.



Slika 2.1: Dva grafa koja su izomorfna

Definicija 2.1.9. *Za graf $G' = (V', E')$ kažemo da je podgraf grafa $G = (V, E)$ ako vrijedi $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.*

Budući da smo utvrdili neke osnovne pojmove o grafu, možemo se pozabaviti bojenjem njegovih vrhova. Bojenje vrhova grafa nije ništa drugo nego particioniranje skupa vrhova u podskupove, gdje svaki podskup predstavlja vrhove obojene u jednu boju. Nadalje, graf je $n-$obojiv ako mu je skup vrhova moguće particionirati u n podskupova i to tako da nisu susjedna nikoja dva vrha iz istog podskupa. Konačno, imamo sve potrebno da definiramo kromatski broj grafa.



Slika 2.2: Dva grafa koja nisu izomorfna

Definicija 2.1.10. *Kromatski broj* $\chi(G)$ *grafa G je najmanji n takav da je graf n−obojiv.*

Prisjetimo se našeg inicijalnog problema. Ako sa $\mathbb{U}^2$ označimo graf jediničnih udaljenosti, onda možemo reći da je $\chi\left(\mathbb{U}^2\right)$ upravo kromatski broj ravnine. Kako bismo pojednostavili notaciju, umjesto $\chi\left(\mathbb{U}^2\right)$ koristimo oznaku $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$. Također, naše Moserovo vreteno očito je podgraf grafa $\mathbb{U}^2$, odnosno $\mathbb{R}^2$.

Vratimo se malo na izomorfne grafove. Što bismo zaključili kad bismo pokušali obojiti vrhove grafova sa slike 2.1? Sasvim je prirodno pomisliti da takvi grafovi imaju jednak kromatski broj.

Teorem 2.1.11. *Izomorfni grafovi imaju jednak kromatski broj.*

Dokaz. Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dva izomorfna grafa zadana izomorfizmom $f : V_1 \to V_2$. Neka je $c : V_1 \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bojenje grafa G_1 s n boja. Tada je $c \circ f^{-1} : V_2 \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bojenje grafa G_2 koristeći n boja. Slično, bojenje u G_2 se također može transformirati u bojenje u G_1. Ako je c' bojenje od G_2, onda će bojenje od G_1 biti $c' \circ f$. Stoga, izomorfizam uvjetuje da će bojenja u G_1 rezultirati bojenjima u G_2 koristeći jednaki broj boja i obrnuto. Drugim riječima, operacije su inverzne i dobivamo bijekciju između bojenja grafova G_1 i G_2 koristeći iste boje. Prema tome, izomorfni grafovi imaju jednak kromatski broj. $\square$

Prije nego odredimo kromatski broj nekih poznatih grafova, potrebno je definirati još nekoliko pojmova.

Definicija 2.1.12. *Šetnja po grafu je niz* $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n)$ *gdje je brid* $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ *za* $i = 1, ..., n$. *Za šetnju kažemo da je zatvorena ako je* $v_n = v_0$.

Postoji nekoliko vrsta šetnji.

Definicija 2.1.13. *Staza je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti.*

Definicija 2.1.14. *Put je šetnja u kojoj su svi vrhovi različiti.*

Put koji ima n različitih vrhova označavamo s P_n, a čitamo $n-$put.

Definicija 2.1.15. *Ciklus je zatvoreni put.*

Ciklus koji ima n različitih vrhova označavamo s C_n, a čitamo $n-$ciklus.

Teorem 2.1.16.

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom, prvo za parni n. Za $n = 2$ ciklus C_2 ima 2 vrha koji se mogu obojiti u dvije različite boje što zadovoljava tvrdnju. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Razmatramo tvrdnju za $k + 1$. Tada je $n = 2(k + 1) = 2k + 2$. Ciklus C_{2k+2} možemo zamisliti kao ciklus C_{2k} s dva dodana vrha. Prema pretpostavci indukcije, graf C_{2k} bojimo s 2 boje. Dodajući 2 vrha jedan pored drugog na bilo koje mjesto u grafu, dovoljno je naizmjenice iskoristiti iste te dvije boje kako bi bojenje bilo zadovoljavajuće.

Analogno dokazujemo za neparan n. Za $n = 3$ ciklus C_3 ima 3 vrha koji se mogu obojiti s tri različite boje što zadovoljava tvrdnju. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Razmatramo tvrdnju za $k + 1$. Tada je $n = 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$. Ciklus C_{2k+3} možemo zamisliti kao ciklus C_{2k+1} s dva dodana vrha. Prema pretpostavci indukcije, graf C_{2k+1} bojimo s 3 boje. Dodajući 2 vrha jedan pored drugoga na bilo koje mjesto u grafu, dovoljno je iskoristiti iste dvije od tri već iskorištene boje kako bi bojenje bilo zadovoljavajuće. □

Teorem 2.1.17. *Za graf G vrijedi* $\chi(G) \leq 2$ *ako i samo ako G ne sadrži* $n-$*cikluse za neki neparni n.*

Dokaz. Dokaz za $\Rightarrow$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\chi(G) \leq 2$ i graf sadrži $n-$ciklus za neparan n. Zbog teorema 2.1.16 znamo da je kromatski broj tog ciklusa jednak 3, pa je kromatski broj cijelog grafa sigurno veći ili jednak 3 te dolazimo do kontradikcije.

Dokaz za $\Leftarrow$. Pretpostavimo suprotno, tj. da graf ne sadrži $n-$ciklus za neparan n i da vrijedi $\chi(G) > 2$. To znači da 2 boje nisu dovoljne za pravilno bojenje grafa. Međutim, kako graf G ne sadrži $n-$cikluse za neki neparan n, možemo pokazati da ga je moguće $2-$obojiti. Obojimo prvi vrh bojom 1, a sve njegove susjedne vrhove obojimo bojom 2. Njihove susjedne vrhove ponovno bojimo bojom 1 i tako dalje. Ako graf sadrži $n-$cikluse, oni mogu biti samo $n-$ciklusi za parni n, a njih je moguće obojiti u 2 boje po teoremu 2.1.16. Takav postupak bojenja rezultirati će bojenjem grafa G u 2 boje što je u kontradikciji s pretpostavkom. □

Grafove G kojima je $\chi(G) = 2$ možemo i drukčije okarakterizirati.

Definicija 2.1.18. *Graf $G = (V, E)$ je bipartitan ako se skup V može particionirati na dva skupa V_1, V_2 tako da svaki brid $e \in E$ spaja vrh iz V_1 sa vrhom iz V_2.*

Ova definicija znači upravo to da se vrhovi takvog grafa mogu obojiti u dvije boje tako da niti jedan brid ne spaja vrhove obojene istom bojom. Zbog toga takve grafove zovemo i bikromatskim.

Definicija 2.1.19. *Potpun bipartitni graf je bipartitni graf $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$ kojemu je svaki vrh iz V_1 spojen sa svakim vrhom u V_2. Ako je $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, takav graf označavamo s $K_{m,n}$ ili $K_{n,m}$.*

Definicija 2.1.20. *Potpun graf K_n je graf s n vrhova kojemu su svaka dva vrha susjedna.*

Ovim posljednjim grafom poslužit ćemo se da dokažemo sljedeću bitnu tvrdnju. Ako malo razmislimo o našoj definiciji grafa, lako je zaključiti da može postojati graf koji ima samo jedan vrh. Logično, kromatski broj takvog grafa je jedan. No, što je s drugom krajnosti?

Teorem 2.1.21. *Ne postoji gornja granica kromatskog broja grafa.*

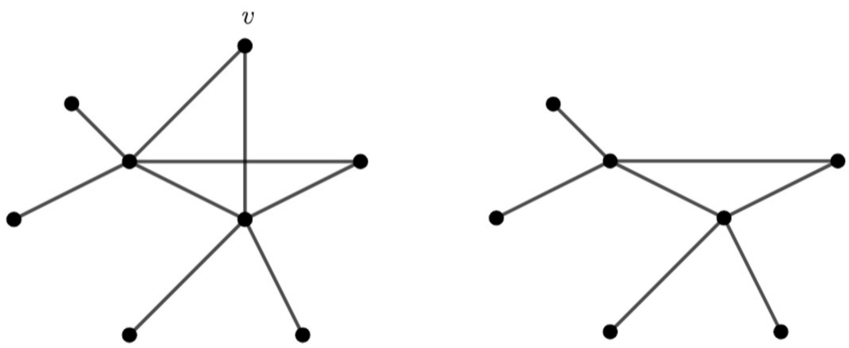
Dokaz. Neka je K_n potpun graf sa n vrhova. Budući da su svi vrhovi ovog grafa susjedni, znači da svi moraju biti obojeni različitim bojama. Stoga je $\chi(K_n) = n$. Budući da n može biti po volji veliki, ne postoji gornja granica kromatskog broja grafa. □

Još jedan zanimljivi rezultat proizlazi iz pojma *stupnja* grafa.

Definicija 2.1.22. *Stupanj (valencija) vrha v grafa G je broj bridova s kojima je v incidentan. Označavamo ga s $\deg_G v$.*

Definicija 2.1.23. *Najveći stupanj vrha grafa G označavamo s $\Delta(G)$.*

Razmislimo još malo o nekom grafu. Neka je v neki vrh grafa G. Ako iz grafa G eliminiramo vrh v i sve njegove incidentne bridove, dobivamo novi graf $G - v$ kao na slici 2.3.



Slika 2.3: Graf G prije i nakon uklanjanja vrha v

Takvo uklanjanje vrhova grafa pomoći će nam da dokažemo sljedeću tvrdnju.

Teorem 2.1.24. *Za graf G s konačnim brojem vrhova vrijedi:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dokaz. Neka za graf $G = (V, E)$ vrijedi da je $\chi(G) = n$. Ako postoji $v \in V$ takav da je $\chi(G - v) = n$, zamijenimo G sa $G - v$. Ponavljamo postupak sve dok ne dobijemo graf G_1 takav da je $\chi(G_1) = n$, ali $\chi(G_1 - v_1) \leq n - 1$ za bilo koji vrh v tog preostalog grafa G_1. Neka je v_1 vrh grafa G_1 najvećeg stupnja. Tada vrijedi

$$\Delta(G) \geq \Delta(G_1) = \deg_{G_1} v_1.$$

Potrebno je još dokazati da je $\deg_{G_1} v_1 \geq n - 1$. Ta nejednakost, zajedno s prethodnom, daje nam $\Delta(G) \geq n - 1$, što želimo i pokazati.

Pretpostavimo suprotno, to jest da je $\deg_{G_1} v_1 \leq n - 2$. Budući da je $\chi(G_1 - v_1) \leq n - 1$, bojimo graf $G_1 - v_1$ u $n - 1$ boja. Da bismo dobili $(n - 1)$–bojenje grafa G_1, moramo samo obojiti vrh v_1. To vrijedi zbog $\deg_{G_1} v_1 \leq n - 2$. Drugim riječima, v_1 je susjedni najviše $n - 2$ vrhova grafa G_1 pa je barem jedna od $n - 1$ boja neiskorištena na vrhovima koji su njemu susjedni. Iskoristimo upravo tu boju na vrhu v_1. Iz toga slijedi da je $\chi(G_1) \leq n - 1$, što je u kontradikciji s $\chi(G_1) = n$. □

2.2 Primjene kromatskog broja u različitim područjima

U ovom odjeljku ćemo na dva primjera pokazati kako nam kromatski broj može biti koristan alat kojeg je lako primijeniti. Po svojoj prirodi, računanje kromatskog broja je optimizacijski problem pa je prirodno da za njega možemo naći primjenu u nekim svakidašnjim situacijama. Iako primjeri nisu jako zahtjevni, njihovim skaliranjem postaje jasno koliko je bojenje moćan alat u rješavanju sličnih situacija.

Primjer zračne luke

Zračna luka ima 5 dostupnih pista. Dnevno postoji niz letova koji polijeću i slijeću. Pogledajmo jutarnji raspored polijetanja:

1. let A polijeće u 08:00,
2. let B polijeće u 08:25,
3. let C polijeće u 09:00,
4. let D polijeće u 09:10,
5. let E polijeće u 09:40.

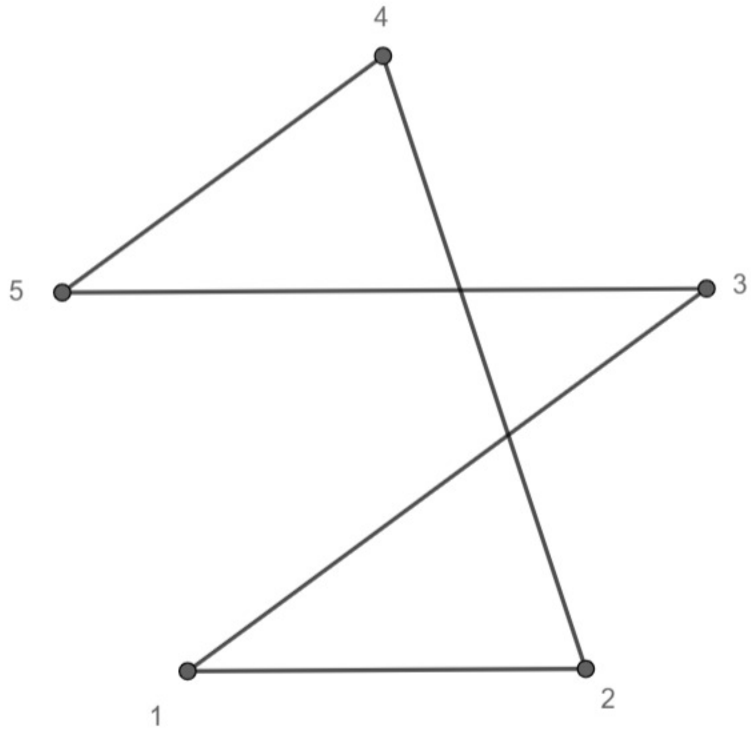
Budući da aerodrom ima ograničene resurse, postoje određene ovisnosti među pistama. Avioni ne mogu koristiti konfliktne piste istovremeno za polijetanje. Piste i njihove povezanosti, odnosno konflikti:

1. pista 1 povezana je s pistom 2 i pistom 3,
2. pista 2 povezana je s pistom 1 i pistom 4,
3. pista 3 povezana je s pistom 1 i pistom 5,
4. pista 4 povezana je s pistom 2 i pistom 5,
5. pista 5 povezana je s pistom 3 i pistom 4.

Želimo naći optimalni raspored letova i pripadnih pista uz dane uvjete, ako znamo da je za polijetanje potrebno maksimalno 30 minuta i da je za to vrijeme staza zauzeta.

Napravimo grafički prikaz problema. Neka vrhovi predstavljaju piste aerodroma, a bridovi veze, tj. konflikte među njima, kao na slici 2.4.

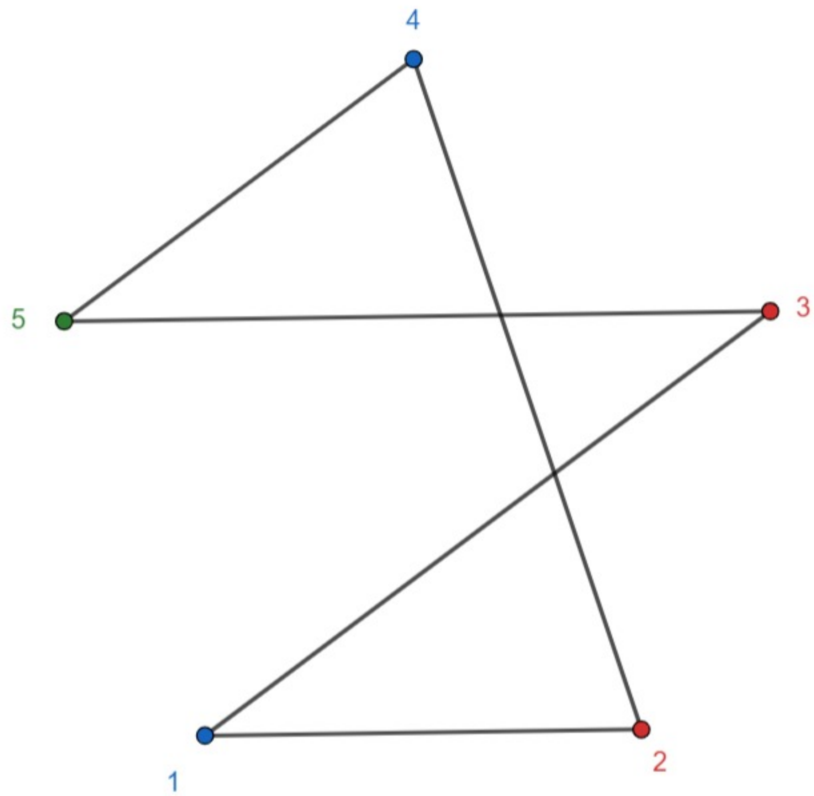
Odmah uočavamo da je $\Delta(G) = 2$, pa zbog teorema 2.1.24 možemo zaključiti da je kromatski broj grafa za ovaj slučaj najviše 3. Obojimo vrh 1 plavom bojom. On je povezan s vrhovima 2 i 3, te stoga za njih uzimamo novu boju. Obojimo ih crvenom bojom. Budući



Slika 2.4: Graf aerodroma

da oni međusobno nisu povezani, mogu biti obojeni istom bojom. Vrh 2 povezan je još s vrhom 4. Obojimo njega plavom bojom, kojom je već obojen vrh 1, jer nije povezan s vrhom 4. Jedini preostali vrh je onaj s brojem 5. Budući da je on povezan s vrhovima crvene i plave boje, uzmimo za njega novu boju. Obojimo vrh 5 zelenom bojom. Vidimo da smo koristili ukupno 3 boje, vidi sliku 2.5. Dakle, kromatski broj ovog grafa je 3.

Krenimo s određivanjem piste za let A. Neka to bude pista broj 1. Let B polijeće 25 minuta nakon leta A. Vrhovi koji su obojeni istom bojom sigurno nisu u konfliktu. Stoga možemo pistu 4 dodijeliti letu B. Let C polijeće nakon što su oba leta sigurno poletjela. Dakle, let C može ponovno poletjeti, na primjer, s piste 1. Let D polijeće 10 minuta nakon leta C te mu na isti način kao i ranije možemo dodijeliti pistu broj 4. Zadnji let E polijeće 30 minuta nakon leta D. Budući da je let C već sigurno poletio, let E može koristiti pistu broj 1 za polijetanje kako bi se spriječio mogući konflikt s letom D. Dakle, u ovom slučaju, koristit ćemo naizmjenično samo piste broj 1 i broj 4 pa je rješenje i ekonomično. Ovo nije jedino rješenje problema. Na sličan način, mogli smo doći do zaključka da možemo



Slika 2.5: Graf aerodroma s obojenim pistama

koristiti samo piste 1 i 5, 4 i 3, 2 i 5. Prednost korištenja i tumačenja bojenja vrhova, jest ta da sa sigurnošću znamo da vrhovi iste boje nisu u konfliktima. Kod primjera s više vrhova i bridova, traženje jednakih boja svakako može biti jednostavniji način za rješavanje problema, nego pretraživanje parova nepovezanih vrhova.

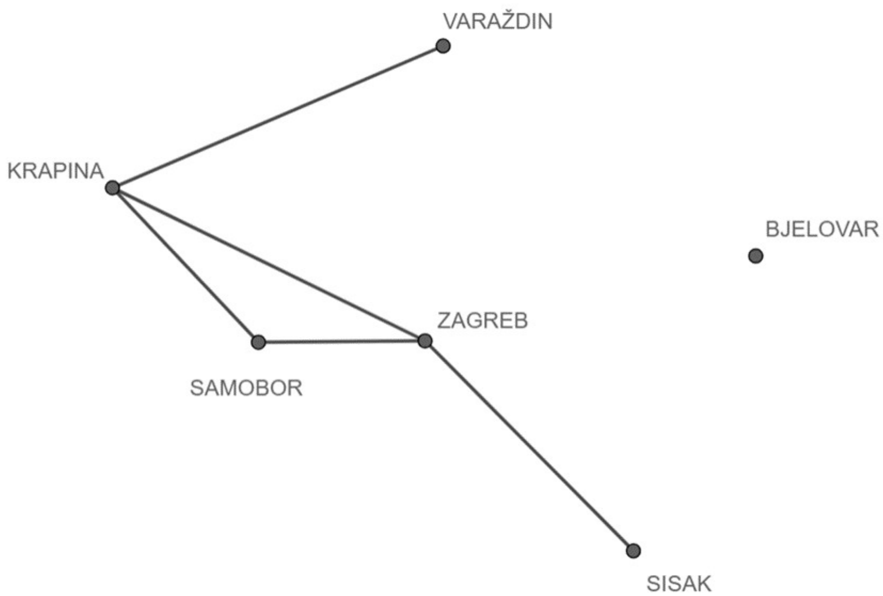
Primjer radijskih frekvencija

Gradovi Zagreb, Bjelovar, Krapina, Samobor, Sisak i Varaždin uvode svoje nove lokalne radijske postaje. Cilj nam je odabrati minimalan broj frekvencija tako da se izbjegnu smetnje između tih radio stanica. Ako je udaljenost radio postaja veća od 50 kilometara, radio stanice mogu biti na istoj frekvenciji bez međusobnih smetnji. Zračne udaljenosti d između gradova nalaze se u tablici 2.1.

d	ZAGREB	BJELOVAR	KRAPINA	SAMOBOR	SISAK	VARAŽDIN
ZAGREB	0	68	40	22	48	62
BJELOVAR	68	0	80	88	56	60
KRAPINA	40	80	0	42	82	40
SAMOBOR	22	88	42	0	60	72
SISAK	48	56	82	60	0	90
VARAŽDIN	62	60	40	72	90	0

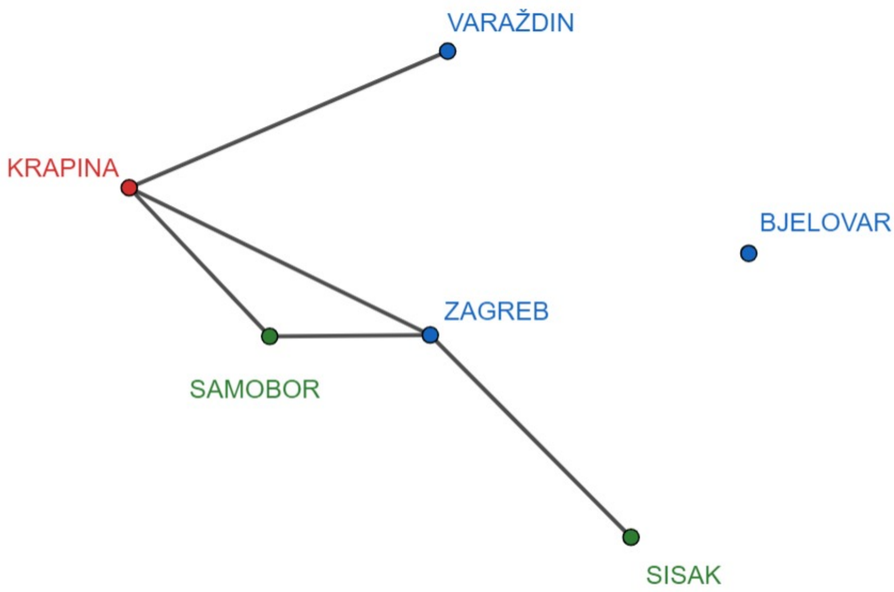
Tablica 2.1: Međusobne udaljenosti gradova

Prikažimo gradove vrhovima, a one međusobne udaljenosti *d* koje su jednake ili manje od 50 kilometara prikažimo bridovima. Tako ćemo dobiti graf 2.6.



Slika 2.6: Graf gradova

Odredimo kromatski broj ovog grafa. Uočavamo da je $\Delta(G) = 3$. Ponovno, zbog teorema 2.1.24 možemo zaključiti da je kromatski broj grafa sigurno manji ili jednak 4. Počnimo s jednim od vrhova koji predstavlja grad s najviše mogućih smetnji, odnosno najvećim stupnjem, npr. Zagrebom. Obojimo njega plavom bojom. Krenimo prema idućem konfliktnijem njegovom susjedu, gradu Krapini. Za njega moramo odabrati novu boju, npr. crvenu. Budući da je Samobor susjed i Zagrebu i Krapini, za njega je potrebno odabrati novu boju. Obojimo ga zelenom bojom. Sisak je susjedan jedino Zagrebu. Za njega možemo uzeti zelenu ili crvenu boju, jer nije spojen s tako obojenim vrhovima. Ponovimo isti postupak za Varaždin. Obojimo njega zelenom ili plavom bojom, budući da s njima nije susjedan. Kako Bjelovar pod ovakvim uvjetima nije ni s kim u konfliktu, odnosno nema brida koji bi ga spojio sa nekim vrhom, za njega izaberemo bilo koju već iskorištenu boju. Kromatski broj ovog grafa iznosi 3, a konačni graf prikazan je na slici 2.7.



Slika 2.7: Graf gradova obojenih prema konfliktima

Dakle, u ovom slučaju potrebne su nam najmanje 3 različite frekvencije kako bismo područje naših šest gradova pokrili bez međusobnih smetnji. Ponovno se bojenje vrhova pokazalo kao jednostavan i efikasan alat u rješavanje problema.

2.3 Matematička logika te veza između bojenja grafova i bojenja ravnine

Već smo ranije u ovom poglavlju spomenuli da o ravnini $\mathbb{R}^2$ možemo razmišljati kao o jednostavnom neusmjerenom, beskonačnom grafu. Vrhovi tog grafa sve su točke ravnine, a bridovi spajaju sve vrhove (točke) udaljene za 1. Dodatno, konačni skup S, $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je podgraf grafa ravnine. I u tom podgrafu vrijedi da su dvije točke spojene bridom ako i samo ako su međusobno udaljene za 1. Naravno, kromatski broj takvog grafa označavamo s $\chi(S)$.

Prije nego se posvetimo rezultatu koji će konačno problem bojenja konačnih grafova povezati s problemom bojenja ravnine, moramo se prisjetiti nekoliko pojmova iz matematičke logike i teorije skupova. Materijal ovog odjeljka preuzet je iz stručnog članka [4].

Definicija 2.3.1. *Alfabet logike sudova je unija skupova A_1, A_2 i A_3, pri čemu je:*

1. $A_1 = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ *prebrojiv skup čije elemente nazivamo propozicionalne varijable;*
2. $A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *skup logičkih veznika;*
3. $A_3 = \{(,)\}$ *skup pomoćnih simbola (zagrade).*

Skup A_1 još ćemo označavati i $\mathcal{P}$. Pomoću njih stvaramo simboličke izraze koje zovemo formule logike sudova $\mathcal{F}$, npr.

$$((A \wedge B) \leftrightarrow C) \vee (B \vee (\neg B \wedge A)).$$

Definicija 2.3.2. *Interpretacija I je svaka funkcija $I : \mathcal{P} \rightarrow \{$ "laž" , "istina" $\}$.*

Definicija 2.3.3. *Za formulu F kažemo da je ispunjiva ako postoji interpretacija I tako da vrijedi $I(F) =$ "istina".*

Definicija 2.3.4. *Za skup formula $\mathcal{F}$ kažemo da je ispunjiv ako postoji interpretacija I takva da za svaku formulu $F \in \mathcal{F}$ vrijedi $I(F) =$ "istina".*

Sljedeći teorem nećemo dokazivati, jer značajno ulazi u problematiku matematičke logike, no poslužit će nam za dokazivanje nama bitnog teorema 2.3.6.

Teorem 2.3.5. *Skup formula $\mathcal{F}$ je ispunjiv ako i samo ako je svaki konačan podskup od $\mathcal{F}$ ispunjiv.*

Teorem 2.3.6 (de Brujin-Erdősov teorem)**.** *Za $k \in \mathbb{N}$ sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne.*

(a) Beskonačna formulacija: $\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \leq k, tj.$ ravnina se može "pravilno" obojiti u k boja.

(b) Konačna formulacija: Za svaki konačni skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ vrijedi $\chi(S) \leq k$, tj. svaki konačni podskup ravnine S se može "pravilno" obojiti u k boja.

Dokaz. Dokazat ćemo $(a) \implies (b)$. Neka je dan $n-$člani skup boja $B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Skup svih parova točaka i boja tada možemo definirati kao: $\mathcal{P} := \mathbb{R}^2 \times B$. To je naš skup propozicionalnih varijabli. Zapisujemo jezikom logike sudova tvrdnju da je bojenje pravilno.

- $(T, 1) \vee (T, 2) \vee \cdots \vee (T, n)$, za svaki $T \in \mathbb{R}^2$, što interpretiramo kao: "točka T je obojena nekom od boja $1, 2, \ldots, n$";
- $\neg((T, i) \wedge (T, j))$, za svaki $T \in \mathbb{R}^2$ te svake $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takve da je $i \neq j$, što interpretiramo kao: "nije tako da točka T istovremeno ima boje i i j";
- $\neg((T_1, i) \wedge (T_2, i))$, za svake $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$ međusobno udaljene za 1 i svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, što interpretiramo kao: "nije tako da su točke T_1 i T_2 na međusobnoj udaljenosti 1 obojene istom bojom i".

Ako nađemo interpetaciju I koja sve prethodno navedene formule vrednuje kao "istina" tada ćemo obojiti točku T bojom i ako i samo ako vrijedi $I((T, i)) =$ "istina". Važno je napomenuti da se svaki konačni podskup prethodno navedenih formula odnosi samo na konačni skup točaka ravnine S, što čini taj podskup ispunjiv po pretpostavci (b). Primjenom teorema kompaknosti logike sudova 2.3.5 slijedi da je ispunjiv i skup svih prethodno navedenih formula, što smo trebali pokazati. Obrat je trivijalan. □

Posljedica teorema 2.3.6 jest sljedeća:

$$\chi\left(\mathbb{R}^2\right) = \max\{\chi(S) : S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ konačan}\}.$$

Primjetimo da su svi naši dosadašnji dokazi za popravljanje donje ograde kromatskog broja ravnine, pa i onaj najnoviji de Greyov, počivali na ovom teoremu. Ekvivalencija $(a) \implies (b)$ nam kaže da, ako je zaista $\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \geq 5$, onda se to može dokazati nalaženjem konačnog $S \subseteq \mathbb{R}^2$ (koliko god on velik bio) za kojeg je $\chi(S) \geq 5$.

Bibliografija

[1] A. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, Geombinatronics 28,5-18, 2018.

[2] V. Jungić, *Introduction to Ramsey Theory: Lecture notes for undergraduate course*, dostupno na
https://www.sfu.ca/ vjungic/RamseyNotes/sec_Chromatic.html

[3] V. Kovač, *Kromatski broj ravnine - neriješeni problem o bojenju*, Hrvatski matematički elektronički časopis, dostupno na
http://e.math.hr/old/bojenje/bojenje_print.html (kolovoz 2023.)

[4] V. Kovač, *Beskonačne i konačne formulacije matematičkih rezultata*, Osječki matematički list, vol. 19. (2019.), br. 1, str.1-14

[5] K. Krulić, *Popločavanja ravnine*, Hrvatski matematički elektronički časopis, no. 7, 2006., dostupno na
http://e.math.hr/old/poplocavanja/index.html (kolovoz 2021.)

[6] I. Nakić, *Diskretna matematika*, preddiplomski kolegij 2011/2012. dostupno na
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja (kolovoz 2023.)

[7] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.

[8] M. Vuković, *Matematička logika 1*, 2007. dostupno na
http://www.mathos.unios.hr/logika/Logika_skripta.pdf (kolovoz 2023.)

[9] ”Hrvatska enciklopedija”, mrežno izdanje, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. dostupno na
http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=32549 (kolovoz 2021.)

Izvori slika

- Slika 1.9, dostupna na `https://mathworld.wolfram.com/deGreyGraph.html`
- Ostale slike nacrtane su u programu GeoGebra.

Sažetak

Koji je najmanji broj boja potreban da se oboji ravnina na takav način da nikoje dvije točke iste boje nisu međusobno udaljene točno jednu jediničnu duljinu? Broj koji tražimo naziva se kromatski broj ravnine, $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$. Iako još nitko nije uspio odgovoriti na pitanje i riješiti problem, postavljene su gornje i donje granice. De Grey je 2018. godine sasvim neočekivano pomaknuo donju granicu na 5, tj. vrijedi $\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \geq 5$. S druge strane, gornja granica postavljena je na $\chi\left(\mathbb{R}^2\right) \leq 7$. Osim kromatskog broja ravnine, definiramo i kromatski broj grafa, $\chi(G)$.

Summary

What is the minimum number of colors required to color the plane in such a way that no two points of the same color are exactly one unit apart? The number we are looking for is called the chromatic number of the plane, denoted as $\chi(\mathbb{R}^2)$. Although no one has been able to answer this question and solve the problem, upper and lower bounds have been established. De Grey unexpectedly set the lower bound to 5 in 2018., meaning $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$. On the other hand, the upper bound is set at $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. In addition to the chromatic number of the plane, we also define the chromatic number of a graph, $\chi(G)$.

Životopis

Rođen sam 20. siječnja 1995. u Zagrebu. Osnovnu školu Ivana Granđe Soblinec pohađao sam do 2009. kada upisujem *XV.* Gimnaziju u Zagrebu. Preddiplomski studij, smjer matematika na Zagrebačkom PMF-u završio sam 2019. godine. Iste godine upisujem diplomski studij matematike, smjer nastavnički. Tijekom studija bio sam član pjevačkog zbora PMF-a “Cantus Naturae”.