SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Monika Štaba

CATALANOVI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji i prijateljima koji su mi bili podrška tijekom cijelog studija.
Posebna zahvala mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić na svoj pomoći i razumijevanju tijekom pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Tridesetih godina osamnaestog stoljeća, kineski je matematičar Antu Ming (Minggantu) pronašao zapis za $\sin(2x)$ pomoću $\sin x$, odnosnom kao sumu trigonometrijskog reda čiji su koeficijenti skalirani Catalanovi brojevi C_n:

$$\sin(2x) = 2\sin x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{k-1}}{4^{k-1}} \sin^{2k+1} x$$

U njegovom radu, Catalanovim brojevima nije pridata velika važnost. Zapravo je tek u 20. stoljeću otkriveno da se Catalanovi brojevi prvi put spominju u radu Minga, a ne u radovima Eulera i Catalana kao što se do tada mislilo. Naime, 1761. godine Leonhard Euler objavljuje rad "Novi Commentarii Academiae Scientarum Imperalis Petropolitanae" u kojem je opisao rješenje problema triangulacije konveksnog mnogokuta i zapisao ga rekurzivnom formulom

$$T_n = \frac{4n-2}{n+1} T_{n-1},\ n \geq 3.$$

Osim Eulera, mnogi matematičari bavili su se istim problemom. Jedan od njih bio je i mađarski matematičar Johann Andreas von Segner koji je rješenje zapisao u rekurzivnom obliku

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1},\ n \geq 3,$$

koji danas nazivamo Segnerova rekurzija. Godine 1938. belgijski matematičar Eugène Charles Catalan pronalazi rješenje problema postavljanja zagrada:

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Rješenja ova dva, na prvi pogled različita, problema ukazuju na jedan niz (do na preindeksaciju) kojeg J. Riordan naziva niz **Catalanovih brojeva** i čijih je prvih nekoliko članova:

$$C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ C_5 = 42,\ C_6 = 132,\ ...$$

Opišimo kratki sadržaj rada po poglavljima. U prvom poglavlju definiramo n-ti Catalanov broj kao

$$C_n = \frac{1}{1+n}\binom{2n}{n},\ n \geq 0$$

te pokazujemo da ga se može reprezentirati na različite načine, npr.

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!},\ C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \text{ i } C_n = \frac{1}{1+n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Nadalje, pokazujemo da niz (C_n) zadovoljava sljedeće rekurzije:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} \text{ i } C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1},\ n \geq 1,$$

uz početni uvjet $C_0 = 1$.

Catalanovi brojevi javljaju se kao rješenje mnogih kombinatornih problema od kojih smo neke opisali u drugom poglavlju. Uz već spomenuti problem triangulacije konveksnih mnogokuta (koji je doveo do otkrića Catalanovih brojeva), opisujemo i probleme putova u cjelobrojnoj mreži, problem postavljanja zagrada, problem rukovanja, Dyckove putove itd.

U trećem poglavlju određujemo funkciju izvodnicu za niz Catalanovih brojeva,

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x},$$

te pokazujemo da n-ti Catalanov broj ima i integralnu reprezentaciju

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^4 x^{n-\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Catalanove brojeve možemo pronaći i u trokutastim shemama, kao što je npr. Pascalov trokut.

U četvrtom poglavlju ispitujemo djeljivost Catalnovih brojeva. Dokazujemo da je Catalanov broj neparan ako i samo ako mu je indeks Mersenneov broj te da su jedina dva prosta broja $C_2 = 2$ i $C_3 = 5$.

U posljednjem, petom poglavlju iznosimo kratku biografiju Eugènea Charlesa Catalana.

Catalanovi brojevi i u današnje vrijeme pobuđuju zanimanje matematičara te je do danas objavljeno otprilike 400 radova na tu temu.

Poglavlje 1

Definicija i različite karakterizacije Catalanovih brojeva

1.1 Definicija Catalanovog broja

Definicija 1.1.1. *Neka je n nenegativan cijeli broj. Prirodan broj*

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} \tag{1.1}$$

naziva se n-ti ***Catalanov broj****.*

Prva 24 Catalanova broja su prikazana u tablici 1.1.

n	C_n	n	C_n	n	C_n	n	C_n
0	1	6	132	12	208 012	18	477 638 700
1	1	7	429	13	742 900	19	1 767 263 190
2	2	8	1 430	14	2 674 440	20	6 564 120 420
3	5	9	4 862	15	9 694 845	21	24 466 267 020
4	14	10	16 796	16	35 357 670	22	91 482 563 640
5	42	11	58 786	17	129 644 790	23	343 059 613 650

Tablica 1.1: Catalanovi brojevi za $0 \leq n \leq 23$

Iz (1.1), tj. definicije Catalanovog broja, nije odmah vidljivo da se radi o nizu prirodnih brojeva. Stoga ćemo pokazati da je definicija *dobra*, odnosno da $n + 1$ dijeli binomni koeficijent $\binom{2n}{n}$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Binomni koeficijent

Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi i $k \leq n$. **Binomni koeficijent** je broj

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.2}$$

Za $k > n$, definira se $\binom{n}{k} = 0$.

Iskazat ćemo, a ponešto i dokazati, neka važna svojstva binomnih koeficijenata. Najprije, navedimo tzv. *Pascalov identitet*

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}, \tag{1.3}$$

koji vrijedi za sve prirodne brojeve n i k, a lako se dobiva direktno iz definicije binomnog koeficijenta (1.2). Nadalje, navedeni identitet omogućava brzo računanje binomnih koeficijenata za $k \leq n$ za što se koristi tzv. *Pascalov trokut*.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} = 1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} = 1 & & \binom{1}{1} = 1 & & & \\
 & & \binom{2}{0} = 1 & & \binom{2}{1} = 2 & & \binom{2}{2} = 1 & & \\
 & \binom{3}{0} = 1 & & \binom{3}{1} = 3 & & \binom{3}{2} = 3 & & \binom{3}{3} = 1 & \\
\binom{4}{0} = 1 & & \binom{4}{1} = 4 & & \binom{4}{2} = 6 & & \binom{4}{3} = 4 & & \binom{4}{4} = 1
\end{array}$$

Tablica 1.2: Pascalov trokut za $0 \leq n \leq 4$

Teorem 1.1.2. *Binomni koeficijent* $\binom{n}{k}$ *je cijeli broj za svaki* $n \geq 0$ *i* $0 \leq k \leq n$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}_0$.

Baza indukcije: $n = k = 0$ i $\binom{0}{0} = 1$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da je $\binom{n}{k}$ cijeli broj za neki $n \geq 0$ i sve $0 \leq k \leq n$.

Korak indukcije: Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n+1$. Kako je $\binom{n+1}{0} = 1$ i $\binom{n+1}{n+1} = 1$, tvrdnju još treba pokazati za $1 \leq k \leq n$. Iz Pascalovog identiteta slijedi:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Po pretpostavci indukcije, $\binom{n}{k-1}$ i $\binom{n}{k}$ su cijeli brojevi za $0 \leq k-1 \leq k \leq n$ pa je njihov zbroj, $\binom{n+1}{k}$ također cijeli broj.

Dakle, primjenom principa matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 0$. □

Binomni koeficijenti se pojavljuju u kombinatorici jer je $\binom{n}{k}$ broj k-članih podskupova n-članog skupa.

U algebri, binomni koeficijenti pojavljuju se u razvoju n-te potencije binoma $a+b$.

Teorem 1.1.3 (Binomni poučak)**.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Razmotrimo sada neka svojstva djeljivosti binomnih koeficijenata koja je pokazao francuski matematičar Charles Hermite. Označimo s (a, b) najveći zajednički djelitelj cijelih brojeva a i b. Nadalje, oznaka $a \mid b$ znači da a dijeli broj b.

Teorem 1.1.4 (Hermite)**.** *Za prirodne brojeve m i n vrijede relacije:*

$$\frac{m}{(m,n)} \,\Bigg|\, \binom{m}{n}, \tag{1.4}$$

$$\frac{m-n+1}{(m+1,n)} \,\Bigg|\, \binom{m}{n}. \tag{1.5}$$

Dokaz. Neka je $d = (m, n)$. Najveći zajednički djelitelj brojeva m i n može se prikazati kao cjelobrojna linearna kombinacija

$$d = Am + Bn,$$

pri čemu se cjelobrojni koeficijenti A i B određuju Euklidovim algoritmom. Pomnožimo li prethodnu jednakost s $\binom{m}{n}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} d\binom{m}{n} &= Am\binom{m}{n} + Bn\binom{m}{n} \\ &= m\left[A\binom{m}{n} + B\binom{m-1}{n-1}\right] = mC, \end{aligned}$$

gdje je C cijeli broj. Dakle, $\frac{m}{d} \,\Bigg|\, \binom{m}{n}$, čime smo pokazali (1.4).

Neka je sada $d = (m+1, n)$. Stoga postoje cijeli brojevi P i Q takvi da je

$$d = P(m+1) + Qn.$$

Nadalje, iz

$$d = (m-n+1)P + n(P+Q) \;\Big/ \cdot \frac{m!}{n!(m-n+1)!},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} d \cdot \frac{m!}{n!(m-n+1)!} &= \frac{\cancel{(m-n+1)} \cdot m!}{n!(m-n)! \cdot \cancel{(m-n+1)}} P + \frac{\cancel{n} \cdot m!}{(n-1)! \cdot \cancel{n} \cdot (m-n+1)!}(P+Q) \\ &= \binom{m}{n} P + \binom{m}{n-1}(P+Q). \end{aligned}$$

Desna strana prethodne jednakosti očito je cijeli broj. Označimo ju s R. Sada je

$$d\binom{m}{n} = (m-n+1)R$$

Dakle, $\dfrac{m-n+1}{d} \,\Big|\, \dbinom{m}{n}$, odnosno vrijedi (1.5). □

Korolar 1.1.5.

i. *Binomni koeficijent* $\binom{2n}{n}$ *je paran cijeli broj za sve* $n \geq 0$.

ii. *Neka je p prost broj. Tada je* $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod{p}$*, gdje je* $1 \leq r \leq p-1$.

iii. $(n+1) \,\Big|\, \binom{2n}{n}$ *za sve* $n \geq 0$.

Dokaz. i. Primjenom svojstva (1.4) vrijedi $\frac{2n}{(2n,n)} \Big| \binom{2n}{n}$, tj. $\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}} \Big| \binom{2n}{n}$. Dakle, $\binom{2n}{n}$ je parni broj.

ii. Kako je $1 \leq r \leq k-1$ i p prost broj, $(r, p) = 1$. Ponovno koristeći svojstvo (1.4) vrijedi $p \Big| \binom{p}{r}$, odnosno $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod{p}$.

iii. Primjenom svojstva (1.5) dobivamo

$$\frac{2n-n+1}{(2n+1, n)} \,\Big|\, \binom{2n}{n},$$

a kako je $(2n+1, n) = 1$ slijedi $(n+1) \Big| \binom{2n}{n}$.

□

Iz svojstva iii. prethodnog korolara slijedi da je izrazom (1.1) dobro definiran prirodni broj C_n.

1.2 Još neki oblici Catalanovog broja

Prema (1.1) i (1.2) je

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot [n!(n+1)]}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\boxed{C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}}. \tag{1.6}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{n+1-n}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} \\ &= \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\boxed{C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}}. \tag{1.7}$$

Teorem 1.2.1 (Lagrangeov identitet)**.** *Neka je* $0 \leq k \leq n$*. Vrijedi:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dokaz. Primjenom Binomnog poučka 1.1.3 na polinom $(1+x)^{2n}$ dobivamo

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k. \tag{1.8}$$

S druge strane,

$$(1+x)^{2n} = [(1+x)^n]^2 = (1+x)^n \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right),$$

to jest

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^n = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{n}{j} \right) x^k. \tag{1.9}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz x^n iz (1.8) i (1.9) dobivamo:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i}\binom{n}{j}. \tag{1.10}$$

Kako je $i + j = n$,

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-i} = \binom{n}{i},$$

iz (1.10) slijedi

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

□

Primjenom Lagrangeova identiteta dobivamo da je n-ti Catalanov broj jednak

$$\boxed{C_n = \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}. \tag{1.11}$$

1.3 Rekurzije za Catalanove brojeve

Uočimo sljedeće pravilnosti:

$$\begin{aligned}
\frac{C_{\mathbf{1}}}{C_0} &= \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{4\cdot\mathbf{1}-2}{\mathbf{1}+1},\\
\frac{C_{\mathbf{2}}}{C_1} &= \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{4\cdot\mathbf{2}-2}{\mathbf{2}+1},\\
\frac{C_{\mathbf{3}}}{C_2} &= \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{4\cdot\mathbf{3}-2}{\mathbf{3}+1},\\
\frac{C_{\mathbf{4}}}{C_3} &= \frac{14}{5} = \frac{14}{5} = \frac{4\cdot\mathbf{4}-2}{\mathbf{4}+1},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Smisleno je pretpostaviti da vrijedi

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1},$$

odnosno

$$\boxed{C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}}, \tag{1.12}$$

za sve prirodne brojeve n. Zaista, primjenom (1.6) dobivamo

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n-2)! \cdot (2n-1) \cdot 2\cancel{n}}{(n-1)! \cdot \cancel{n} \cdot n! \cdot (n+1)} \\ &= \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!n!} = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}. \end{aligned}$$

Dakle, Catalanovi brojevi mogu se zadati homogenom linearnom rekurzijom prvog reda s varijabilnim koeficijentom (1.12) uz početni uvjet $C_0 = 1$.

Catalanovi brojevi zadovoljavaju i tzv. *Segnerovu rekurzivnu relaciju*

$$\boxed{C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}}, \tag{1.13}$$

za sve $n \geq 1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} C_kC_{n-k-1} &= \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\frac{1}{n-k}\binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{(2(k+1)-n)(2(k+1)-1)}{k+1} - \frac{(2k-n)(2(n-k)-1)}{n-k}\right)\binom{2k}{k}\binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \\ &= \frac{1}{2n(n+1)}\left((2(k+1)-n)\binom{2(k+1)}{k+1}\binom{2(n-(k+1))}{n-(k+1)} - (2k-n)\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\right). \end{aligned}$$

Ako označimo

$$f_n(k) = (2k-n)\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k},$$

tada je

$$f_n(k+1) = (2(k+1)-n)\binom{2(k+1)}{k+1}\binom{2(n-(k+1))}{n-(k+1)}$$

te

$$C_kC_{n-k-1} = \frac{1}{2n(n+1)}(f_n(k+1) - f_n(k)).$$

Stoga je

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1} = \frac{1}{2n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}(f_n(k+1) - f_n(k)).$$

Uočimo da se u prethodnoj sumi reduciraju svi članovi osim $f_n(0)$ i $f_n(n)$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} &= \frac{1}{2n(n+1)}(-f_n(0) + f_n(n)) \\ &= \frac{1}{2n(n+1)}\left(-(-n)\binom{0}{0}\binom{2n}{n} + n\binom{2n}{n}\binom{0}{0}\right) \\ &= \frac{2n}{2n(n+1)}\binom{2n}{n} = C_n.\end{aligned}$$

Dakle, niz Catalanovih brojeva može se zadati rekurzivnom relacijom (1.13) uz početni uvjet $C_0 = 1$.

Poglavlje 2

Problemi vezani uz Catalanove brojeve

2.1 Triangulacija n-terokuta

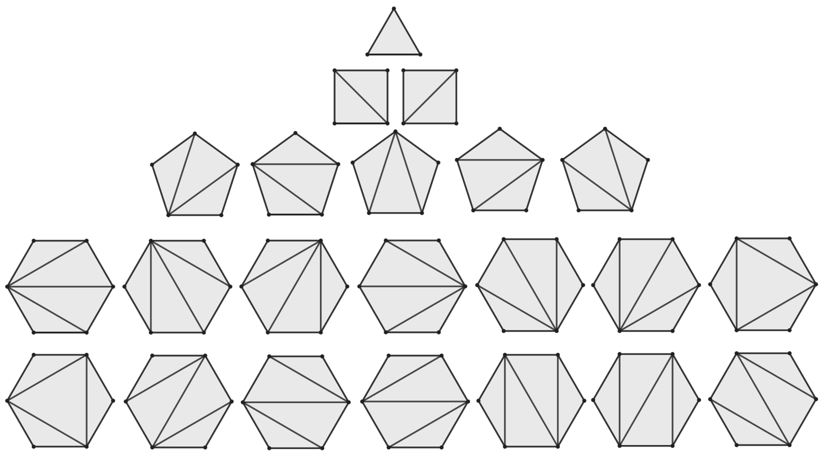
Problemom triangulacije konveksnog n-terokuta bavili su se mnogi poznati matematičari. Neki od njih su F. G. Lamé, J. F. M. Binet, J. Louiville, A. Cayley, ... Najpoznatiji među njima je zasigurno švicarski matematičar Leonhard Euler, koji je u 18. st. proučavao ovaj problem te je pronašao opći izraz za broj triangulacija, dok je njegov suvremenik Johann Andreas von Segner postavio rekurzivnu relaciju. Kao što je već rečeno, ovaj problem se veže uz samo otkriće Catalanovih brojeva.

Konveksni mnogokut je omeđeni skup točaka ravnine kojeg dobivamo presjekom konačno mnogo poluravnina i koji sadrži spojnicu bilo koje svoje dvije točke.

Triangulacija mnogokuta je podjela unutrašnjosti (interiora) mnogokuta na trokute dijagonalama koje se ne sijeku. Iz svakog vrha n-terokuta moguće je povući $n-3$ dijagonale jer je dijagonala dužina koja spaja dva nesusjedna vrha mnogokuta. Povlačenjem dijagonala iz nekog vrha, n-terokut trianguliramo, tj. razdjeljujemo na $n-2$ trokuta.

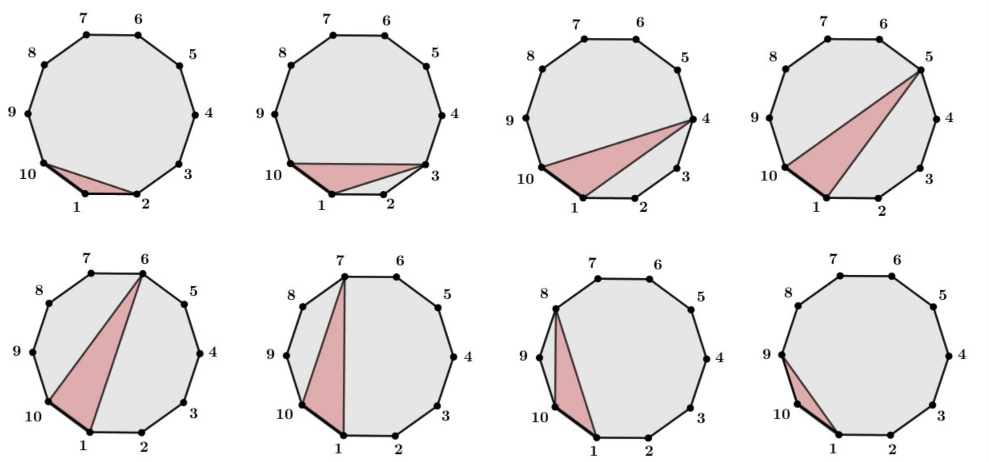
Označimo s T_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, broj načina na koji je moguće triangulirati konveksni n-terokut. Uočimo da je za trokut situacija trivijalna, odnosno on je već trianguliran pa postoji samo jedan način triangulacije. Dakle, $T_3 = 1$. Četverokut je moguće triangulirati na dva različita načina pa je $T_4 = 2$. Za peterokut postoji pet načina triangulacije, $T_5 = 5$, šesterokut 14, ... Na slici 2.1 je prikazana triangulacija trokuta, četverokuta, peterokuta i šesterokuta. Napomenimo da bismo neke triangulacije (kod pravilnih mnogokuta) mogli dobiti rotacijom drugih (npr. razlikujemo dvije triangulacije kvadrata iako bismo drugu triangulaciju mogli dobiti rotacijom prve za 90° oko polovišta dijagonala). No, s obzirom na to da razlikujemo vrhove mnogokuta, razlikujemo i takve triangulacije.

Zanima nas postoji li veza između broja načina na koji je moguće triangulirati konvek-



Slika 2.1: Triangulacija n-terokuta za $n = 3, 4, 5, 6$

sni n-terokut, T_n, te broja triangulacija konveksnih mnogokuta s manjim brojem stranica, tj. k-terokuta za $k < n$. U tu svrhu fiksirajmo proizvoljnu stranicu, npr. $\overline{V_1 V_n}$, mnogokuta te prebrojimo triangulacije u kojima sudjeluje svaki trokut nad tom stranicom. Nad stranicom $\overline{V_1 V_n}$ postoje $n - 2$ trokuta $V_n V_1 V_k$ za $2 \leq k \leq n - 1$. Na slici 2.2 nacrtani su svi trokuti nad fiksiranom stranicom pravilnog deseterokuta.



Slika 2.2: Trokuti nad fiksiranom stranicom deseterokuta

Uočimo da se za $3 \leq k \leq n-3$ n-terokut $V_1 \ldots V_n$ sastoji od tri mnogokuta (vidi sliku 2.3):

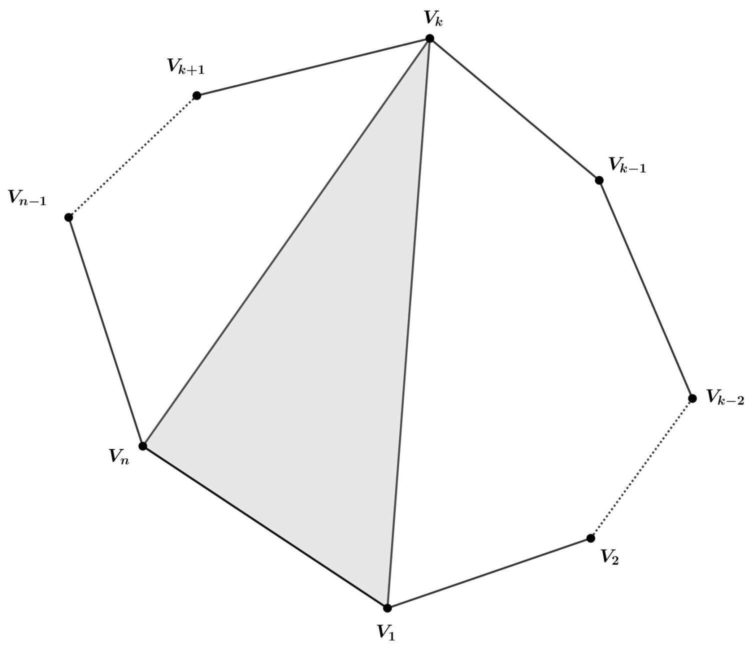
- k-terokuta $V_1 V_2 \ldots V_k$,
- $(n-k+1)$-terokuta $V_k V_{k+1} \ldots V_n$,
- trokuta $V_n V_1 V_k$.

U slučaju $k = 2$ n-terokut $V_1 \ldots V_n$ se sastoji od dva mnogokuta:

- $(n-1)$-terokuta $V_2 V_3 \ldots V_n$,
- trokuta $V_n V_1 V_2$.

Analogno, u slučaju $k = n-1$ n-terokut $V_1 \ldots V_n$ se sastoji od dva mnogokuta:

- $(n-1)$-terokuta $V_1 V_2 \ldots V_{n-1}$,
- trokuta $V_n V_1 V_{n-1}$.



Slika 2.3: Podjela n-terokuta na $n-k+1$-terokut, trokut i k-terokut

Izbori triangulacije u svakom od navedenih "podmnogokuta" su međusobno neovisni. Stoga je prema principu produkta za fiksni $3 \leq k \leq n-2$ (tj. za fiksirani trokut $V_n V_1 V_k$) ukupan broj triangulacija jednak

$$T_k T_{n-k+1}.$$

Za $k = 2$ ili $k = n-1$ je ukupan broj triangulacija jednak T_{n-1}. Budući da za $k = 2, \ldots, n-1$ na opisani način dobivamo sve triangulacije n-terokuta $V_1 \ldots V_n$ i da su triangulacije s različitim fiksiranim trokutima disjunktne, po pricipu sume dobivamo

$$T_n = T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \cdots + T_{n-2}T_3 + T_{n-1}.$$

Ako definiramo $T_2 = 1$, onda prethodnu relaciju zapisujemo kao

$$T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \cdots + T_{n-2}T_3 + T_{n-1}T_2 = \sum_{k=2}^{n-1} T_kT_{n-k+1},$$

za $n \geq 3$. Ako sada stavimo $C_n = T_{n+2}$ za $n \geq 0$ dobivamo niz (C_n) određen početnim uvjetom $C_0 = 1$ te rekurzijom

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ... + C_{n-1}C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, kao rješenje ovog problema dobili smo niz Catalanovih brojeva (1.13). Upravo na ovaj način je, već spomenuti matematičar J. A. von Segner, došao do rekurzivne formule za Catalanove brojeve.

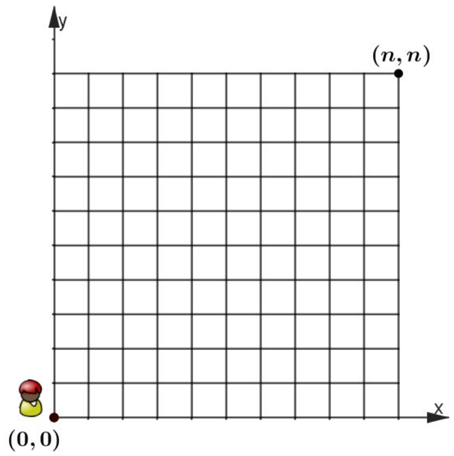
Teorem 2.1.1. *C_n je broj triangulacija konveksnog $(n+2)$-terokuta.*

2.2 Putovi u cjelobrojnoj mreži

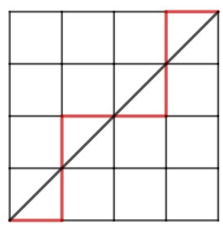
Zamislimo grad u kojem se ulice pružaju samo sa zapada na istok i sa sjevera prema jugu te tako tvore kvadratne blokove, odnosno grad čiji je tlocrt kvadratna mreža. Nalazite se na samom ulazu grada (točka $(0,0)$) i želite doći do destinacije koja se nalazi na suprotnom kraju grada (točka (n,n)) kao na slici 2.4. Na koliko načina možete doći do svog cilja ako se smijete kretati samo u smjeru istoka i sjevera tako da ne prijeđete zamišljenu dijagonalu koja spaja početnu i završnu točku?

Uočimo da promatramo cjelobrojnu mrežu dimenzije $n \times n$ te tražimo najkraće putove koji ne prelaze dijagonalu. Dakle, putove kao na slici 2.5 ne uzimamo u obzir. Napominjemo da *cjelobrojnu mrežu* ili *diskretnu rešetku* tvore pravci paralelni s koordinatnim osima Kartezijevog koordinatnog sustava koji prolaze cjelobrojnim točkama.

Kao što je rečeno, u ovom problemu promatramo mrežu konačnih dimenzija, veličine $n \times n$. Označimo s P_n broj najkraćih putova u ovoj mreži koji nikad ne prelaze dijagonalu. Krećemo od ishodišta, a s obzirom na to da se traže najkraći putovi, promatramo samo



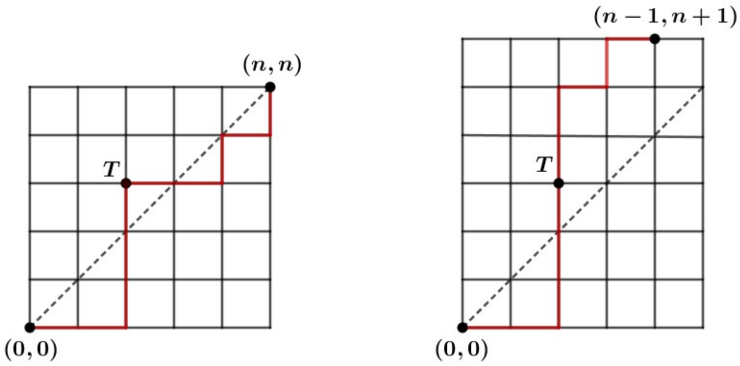
Slika 2.4: Tlocrt zamišljenog grada



Slika 2.5: Primjer puta “kroz” dijagonalu

putove koji se sastoje od pomaka prema gore ili u desno. Problem rješavamo tako da prvo prebrojimo sve putove od točke $(0, 0)$ do točke (n, n), a zatim oduzmemo broj putova kroz dijagonalu.

Svaki cjelobrojni put se sastoji od pomaka udesno i prema gore pa izbor pozicija prema gore jednoznačno određuje put. Ukupni broj pomaka je $2n$. Pomake prema gore možemo odabrati na $\binom{2n}{n}$ načina. Sada promotrimo ”loše” putove. Takvi putovi mogu sijeći dijagonalu u više točaka. Promotrimo prvu točku T koja se na takvom putu nalazi s ”krive” strane dijagonale. Od te točke nadalje, modificiramo put tako da svaki pomak prema gore zamijenimo pomakom udesno i obrnuto kao što je prikazano na slici 2.6. Uočimo da se put do točke T sastoji od k pomaka desno i $k + 1$ prema gore. Do točke (n, n) je ostalo $n - k$ pomaka udesno i $n - k - 1$ pomak prema gore. Nakon modifikacije puta, brojevi pomaka udesno i prema gore se zamjenjuju, stoga se novi put sastoji od ukupno $k+(n-k-1) = n-1$ pomaka udesno i $(k + 1) + (n - k) = n + 1$ pomaka prema gore. Taj put završava u točki $(n - 1, n + 1)$. Na takav način možemo modificirati svaki nedozvoljen put, ali i obrnuto, od svakog najkraćeg puta od $(0, 0)$ do $(n - 1, n + 1)$ možemo dobiti jedan nedozvoljen put od $(0, 0)$ do (n, n) u cjelobrojnoj mreži. Time je uspostavljena bijekcija između skupa naj-

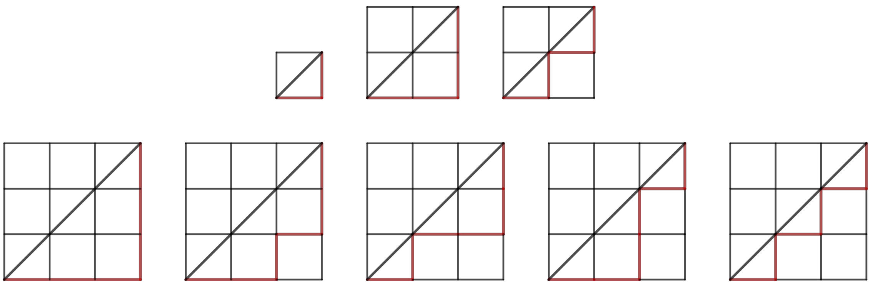


Slika 2.6: Modifikacija "lošeg" puta

kraćih putova u cjelobrojnoj mreži do točke $(n-1, n+1)$ i skupa svih najkraćih putova koji sijeku dijagonalu. Kako je broj najkraćih putova do točke $(n-1, n+1)$ jednak $\binom{2n}{n+1}$ dobivamo da je

$$P_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Uočimo da smo, po njihovoj definiciji 1.1, ponovno kao rješenje dobili Catalanove brojeve.



Slika 2.7: Putovi u cjelobrojnoj mreži 1×1, 2×2 i 3×3

Teorem 2.2.1. *Broj najkraćih putova u $n \times n$ cjelobrojnoj mreži ispod dijagonale jednak je C_n.*

2.3 Dyckovi planinski putovi

Walther Franz Anton von Dyck (1856. - 1934.), njemački matematičar, poznat je po svojim doprinosima u području teorije grupa, teorije funkcija, topologije i teorije algebarskih struktura (prvi je definirao *grupu* u modernom, aksiomatskom smislu). U teoriji formalnih jezika, Dyckov jezik je dobio naziv po njemu.

Definicija 2.3.1. ***Riječ****, koju označavamo s w, iz skupa $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ je niz članova skupa S bez dijakritičkih znakova. (Primjerice, ako je $S = \{A, B\}$, onda je $w = ABBAABA$ riječ iz S.) Skup S naziva se* ***abeceda****.*

U kontekstu Catalanovih brojeva, promatrat ćemo samo *abecede* koje se sastoje od dva slova (ponekad se umjesto slova koriste i znakovi poput "(" i ")"). Da bismo razlikovali slova tog skupa i njihovu ulogu, skup ćemo pisati u obliku uređenog para (A, B). U *abecedi* zapisanoj u obliku uređenog para (A, B) prvo slovo nazivamo **dominantno slovo**.

Definicija 2.3.2. *Skup $\mathcal{W}_{a,b}$ je skup svih riječi iz (A, B) koje sadrže a dominantnih slova i b nedominantnih slova.*

Definicija 2.3.3. ***Prefiks*** *ili* ***inicijalni segment*** *riječi w, duljine k označavamo s $[w]_k$, tj. za riječ $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, inicijalni segment duljine k je $[w]_k = a_1 a_2 \ldots a_k$, $1 \leq k \leq n$.*

Definicija 2.3.4. *Broj slova A u riječi w označujemo s $N_A(w)$, a broj slova B s $N_B(w)$. Oznaku $N_A[w]_k$ koristimo za broj slova A u riječi w do pozicije k. Analogno i za B.*
Razlika *tih brojeva je funkcija koju označavamo s*

$$\Delta_{a,b} = N_A([w]_k) - N_B([w]_k).$$

Uzmimo za primjer riječ $w = ABAABBBAB$. Do pozicije $k = 5$, broj slova A je jednak 3, a broj slova B je 2 pa pišemo $N_A([w]_5) = 3$ i $N_B([w]_5) = 2$. Razlika je tada

$$\Delta_{a,b} = N_A([w]_5) - N_B([w]_5) = 3 - 2 = 1.$$

W. A. von Dyck je, između ostalog, proučavao riječi u skupu $\mathcal{W}_{a,b}$ za $a = b$ sa svojstvom da je $N_A([w]_k)$ veći ili jednak $N_B([w]_k)$, tj.

$$\Delta_{A,B}([w]_k) \geq 0,$$

za sve k. Takve riječi su danas poznate kao *Dyckove riječi*.

Dykove riječi u ravinini mogu biti reprezentirane u obliku putova. Jedan tip takvih putova, putove u cjelobrojnoj mreži, proučavali smo u prethodnoj cjelini te smo pronašli broj putova (P_n) od ishodišta do točke (n, n) ispod dijagonale prebrojavanjem. U kontekstu Dykovih riječi, jedan takav put, koji se sastoji od pomaka prema gore (G) i udesno (D), možemo opisati kao riječ iz (G, D). Npr. treći put u mreži 3×3 sa slike 2.7 je $w = DGDDGG$. U cjelobrojnoj mreži dimenzija $n \times n$, put koji ne prelazi dijagonalu, od ishodišta do točke (n, n) korespondira s tzv. slabom Dyckovom riječi s n D-ova i n G-ova.

Definicija 2.3.5. ***Jaka Dyckova riječ*** *$w \in \mathcal{W}_{a,b}$ je riječ u kojoj je broj slova A veći od broja slova B za svaki k, tj.*

$$\Delta_{A,B}([w]_k) > 0.$$

Slaba Dyckova riječ *$w \in \mathcal{W}_{a,b}$ je riječ u kojoj je broj slova A veći ili jednak od broja slova B za svaki k, tj.*

$$\Delta_{A,B}([w]_k) \geq 0.$$

Teorem 2.3.6. *Broj jakih Dyckovih riječi, gdje je a broj slova A i b broj slova B u riječi, je*

$$D^{st}_{a,b} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}. \tag{2.1}$$

Broj slabih Dyckovih riječi, gdje je a broj slova A i b broj slova B u riječi, je

$$D^{wk}_{a,b} = \frac{a+1-b}{a+1}\binom{a+b}{a}. \tag{2.2}$$

Prema teoremu 2.3.6, broj putova u cjelobrojnoj mreži ispod dijagonale do (n, n) jednak je

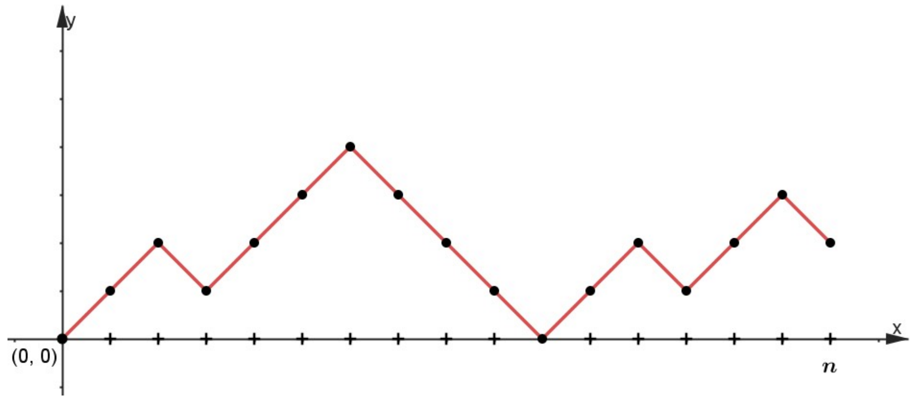
$$P_n = D^{wk}_{n,n} = \frac{n+1-n}{n+1}\binom{n+n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

što odgovara rješenju do kojeg smo došli u prethodnoj cjelini.

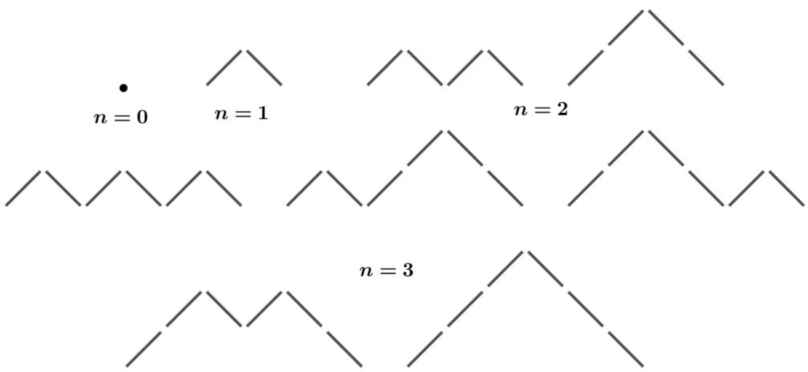
Promotrimo sada drugi tip putova koji reprezentiraju Dykove riječi u ravnini. Jedan od njih je prikazan na slici 2.8.

Ovaj put također počinje u ishodištu te se sastoji od dijagonalnih pomaka prema gore (uspona) i prema dolje (padova) za jednu jediničnu dužinu na x-osi. Promatramo putove čija je visina uvijek nenegativna, tj. broj uspona mora u svakom trenutku biti veći ili jednak broju padova. Između takvih putova (koji ne prelaze x-osi) možemo uspostaviti bijekciju sa slabim Dyckovim riječima. Prema tome, takve putove nazivamo **Dyckovi (planinski) putovi**.

Pronađimo sada odgovor na pitanje koliko planinskih putova možemo nacrtati koristeći n uspona i n padova tako da ostanemo iznad x-osi ili nekog drugog pravca ukoliko se ne



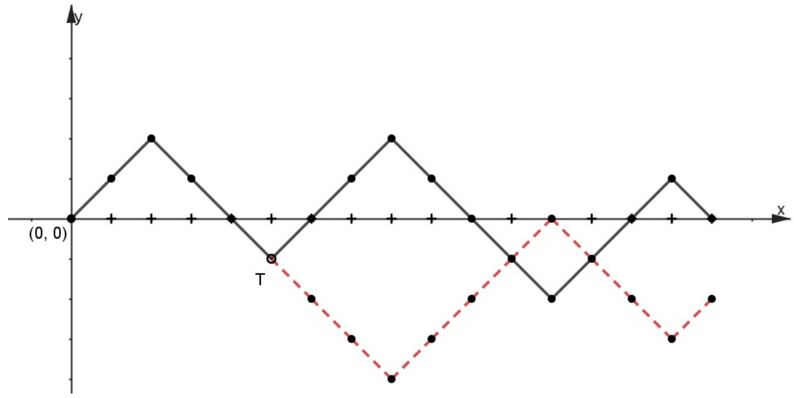
Slika 2.8: Dyckov put



Slika 2.9: Dyckovi planinski putovi za $0 \leq n \leq 3$

nalazimo u koordinatnom sustavu. Na slici 2.9 vidimo mogućnosti konstrukcije putova od $n = 0$ do $n = 3$. Označimo s D_n broj odgovarajućih putova s n uspona i n padova. Kao i kod putova u cjelobrojnoj mreži, prvo ćemo pronaći broj svih putova, a zatim od tog broja oduzeti broj "loših" putova. Dakle, prvo promotrimo samo broj svih putova koji se sastoje od n uspona i n padova. Taj broj je jednak $\binom{2n}{n}$. Svaki "loš" put u nekom trenutku (nakon neke točke) prijeđe *ispod* x-osi ili zadanog pravca. Analogno putovima u cjelobrojnoj mreži (2.2), taj put ćemo modificirati tako da od te točke nadalje, sve uspone zamijenimo padovima i obrnuto kao na slici 2.10.

Uočimo da se "novi" put sastoji od $(n+1)$-og pada i $(n-1)$-og uspona pa završava dvije jedinične duljine ispod x-osi ili zadanog pravca. Obrnuto, svaki put koji završava dvije jedinične duljine ispod osi sastoji se od $(n + 1)$-og pada i $(n - 1)$-og upona pa odgovara jednom "lošem putu". Uspone možemo odabrati na $(n + 1)$ način od ukupno $2n$ pomaka



Slika 2.10: Modifikacija Dyckovog puta

čime je put jednoznačno određen. Stoga je broj "loših" putova jednak $\binom{2n}{n+1}$. Dobili smo da je ukupan broj odgovarajućih putova

$$D_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

što ponovno odgovara broju *slabih Dyckovih riječi* (2.2) gdje je $a = b$, ali i definiciji n-tog Catalanovog broja (1.1).

Štoviše, slabe Dyckove riječi u kojima je $a = b$ ($\mathcal{W}_{n,n}$), duljine $2n$, nazivamo *Catalanove riječi* nad (A, B) i označavamo ih s $\mathcal{C}_n(A, B)$. Prema tome, Catalanove brojeve možemo definirati i kao

$$C_n = |\mathcal{C}_n(A, B)| = \frac{n+1-n}{n+1}\binom{n+n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Teorem 2.3.7. *Broj različitih konfiguracija Dyckovih planinskih putova s n uspona i n padova jednak je C_n.*

2.4 Problem postavljanja zagrada

Sljedeći problem kojim ćemo se pozabaviti vrlo je sličan prethodnom. Pitanje glasi: Na koliko načina možemo postaviti n parova zagrada tako da svaka otvorena zagrada ima odgovarajuću zatvorenu zagradu? Radi se o *valjanom* postavljanju niza zagrada. *Valjano* postavljen niz zagrada je niz zagrada s jednakim brojem otvorenih i zatvorenih zagrada te ako, gledajući slijeva nadesno, za svaku otvorenu zagradu pribrojimo 1, a za svaku zatvorenu zagradu oduzmemo 1, suma je uvijek nenegativna. Npr. "(()())" je valjan niz zagrada, dok "(()))(" nije. Označimo sa Z_n broj načina na koji možemo valjano postaviti niz zagrada. U tablici 2.1 vidimo mogućnosti pravilnog postavljanja zagrada za $0 \leq n \leq 4$.

n	Pravilno postavljen niz zagrada	Z_n
0	*	1
1	()	1
2	()() (())	2
3	()()() (()()) (())() ()(()) ((()))	5
4	()()()() ((()))() (())(()) ()((())) (())()() ()(())() ()()(()) (()())() ()(()()) (()()()) ((()))() (()(())) ((())()) (((())))	14

Tablica 2.1: Pravilno postavljene zagrade za $0 \leq n \leq 4$

Prvo uočimo da smo definirali $Z_0 = 1$ (postoji samo jedan način zapisa 0 zagrada, a to je da ništa ni ne zapišemo) te da je $Z_1 = 1$. Neka je $n \geq 2$ i uzmimo proizvoljan $0 \leq i \leq n-1$. Prvih i parova zagrada možemo valjano grupirati na Z_i načina, a preostala $n-1-i$ para na Z_{n-i-1} način. Po principu produkta, $n-1$ par zagrada tada može valjano biti grupiran na $Z_i Z_{n-1-i}$ način. S obzirom na to da je i proizvoljan, slijedi

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i Z_{n-i-1}.$$

Uočimo da smo ponovno došli do rekurzivne formule za Catalanove brojeve.

Teorem 2.4.1. *Postoji C_n načina na koje možemo valjano postaviti n parova zagrada.*

Zamijenimo li otvorene zagrade sa znakom "$\diagup$" i zatvorene zagrade sa znakom "$\diagdown$" ovaj problem je ekvivalentan prethodnom.

2.5 Redoslijed množenja

Promotrimo sada na koliko načina možemo pomnožiti $n + 1$ broj tako da ne mijenjamo redoslijed brojeva. Kako je množenje binarna operacija, odmah uočimo da se množenje mora odviti n puta kako bismo pomnožili svih $n + 1$ brojeva. Redoslijed množenja brojeva možemo prikazati pomoću zagrada. Naravno, zagrade moraju biti postavljene ispravno. Stoga brojevi ne igraju značajnu ulogu, već je jedino bitan poredak zagrada. Štoviše, izostavimo li sva slova i otvorene zagrade te zamijenimo "$\cdot$" otvorenim zagradama, problem je ekvivalentan prethodnom. Npr. u izrazu $(a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot e))))$ prvo obrišemo sva slova i otvorene zagrade $\cdot\cdot\cdot\cdot))))$, a zatim sve "$\cdot$" zamijenimo otvorenim zagradama (((()))). Učinimo li isto sa svim izrazima iz tablice 2.2, dobivamo tablicu 2.1.

n	Mogućnosti redoslijeda množenja	M_n
0	(a)	1
1	$(a \cdot b)$	1
2	$((a \cdot b) \cdot c)$ $(a \cdot (b \cdot c))$	2
3	$(((a \cdot b) \cdot c) \cdot d)$ $((a \cdot b)(c \cdot d))$ $((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d)$ $(a \cdot (b \cdot (c \cdot d)))$ $(a \cdot ((b \cdot c) \cdot d))$	5
4	$((((a \cdot b) \cdot c) \cdot d) \cdot e)$ $((a \cdot b) \cdot c) \cdot (d \cdot e)$ $(((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)) \cdot e)$ $((a \cdot b) \cdot ((c \cdot d) \cdot e))$ $((a \cdot b) \cdot (c \cdot (d \cdot e)))$ $(((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d) \cdot e)$ $((a \cdot (b \cdot c) \cdot (d \cdot e))$ $((a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)) \cdot e)$ $((a \cdot (b \cdot (c \cdot d))) \cdot e)$ $(a \cdot (((b \cdot c) \cdot d) \cdot e))$ $(a \cdot ((b \cdot c) \cdot (d \cdot e)))$ $(a \cdot ((b \cdot (c \cdot d)) \cdot e))$ $(a \cdot (b \cdot ((c \cdot d) \cdot e)))$ $(a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot e))))$	14

Tablica 2.2: Mogućnosti redoslijeda množenja za $0 \leq n \leq 4$

Analogno prethodnom slučaju, pronađimo rješenje problema. Označimo s M_n broj načina na koje možemo zagraditi $n + 1$ broj. Da bismo dobili krajnji rezultat, moramo pomnožiti zadnja dva zagrađena bloka koji se nalaze jedan pored drugog. Ako se prvi blok sastoji od k brojeva gdje je $0 \leq k \leq n - 1$ proizvoljan, drugi blok mora sadržavati $n - 1 - k$ broj. Prvi blok brojeva tada možemo zagraditi na M_k načina, a drugi na M_{n-k-1} način. Po principu produkta, dobivamo da $n + 1$ broj možemo zagraditi na $M_k M_{n-k-1}$ način. Kako je k bio proizvoljan, konačan izraz je

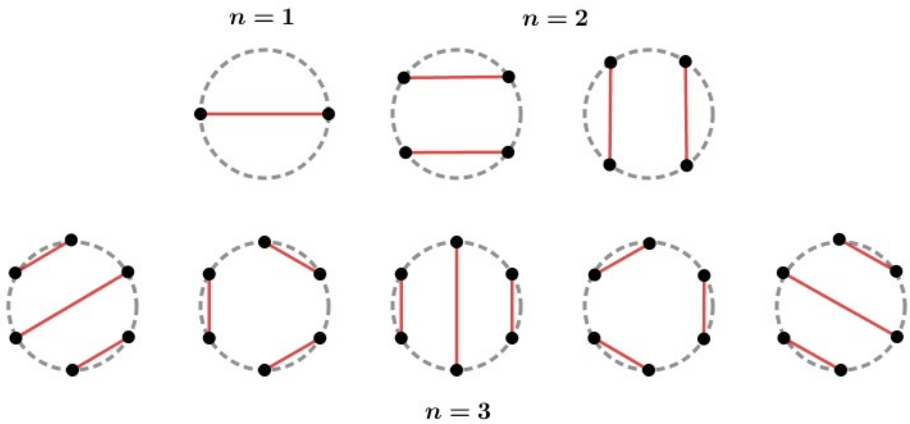
$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{n-k-1}.$$

Naravno, rješenje je ekvivalentno rješenju problema zagrađivanja i daje rekurzivnu formulu Catalanovih brojeva.

Teorem 2.5.1. *Ne mijenjajući poredak brojeva, $n+1$ broj možemo pomnožiti na C_n načina.*

2.6 Problem rukovanja

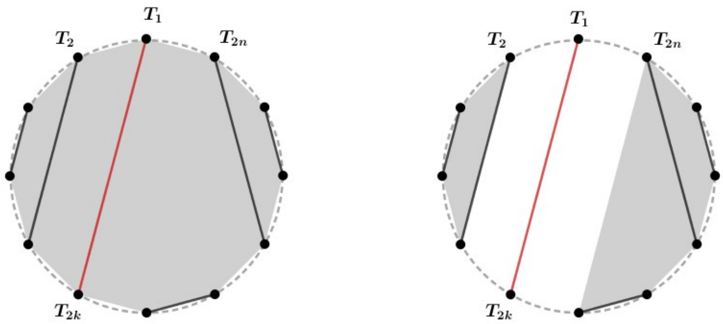
Za okruglim stolom sjedi $2n$ ljudi. Na koliko se načina svi oni mogu rukovati, bez križanja ruku? Na slici 2.11 vidimo rješenje za $1 \leq n \leq 3$. Pitanje možemo postaviti i ovako: Na koliko načina možemo tetivama spojiti $2n$ točke kružnice, tako da se nikoje dvije tetive ne sijeku?



Slika 2.11: Rukovanje $2n$ ljudi za okruglim stolom ($1 \leq n \leq 3$)

Rješenje ovog problema najlakše pronalazimo uspostavom bijekcije s nekim od prethodnih, primjerice s problemom postavljanja zagrada. Prvo numeriramo svaku od $2n$ zagrada te na isti način označimo točke kružnice ($T_1, T_2, ..., T_{2n}$). Bijekciju uspostavljamo na sljedeći način: u nizu zagrada pronađemo par zagrada untar kojih nema drugih zagrada (neka su to k-ta i $(k+1)$.-va zagrada), a zatim dužinom spojimo odgovarajuće točke kružnice (T_k i T_{k+1}). Taj par zagrada "izbacimo" i nastavljamo postupak do zadnjeg para.

Rješenje možemo pronaći i na drugi način. Neka je D_n broj načina na koje možemo spojiti $2n$ točke kružnice, tako da se nikoje dvije tetive ne sijeku. Uočimo da te točke čine vrhove konveksnog $2n$-terokuta upisanog kružnici. Fiksiramo točku T_1 kao *početni vrh* te imenujemo ostale točke kružnice $T_2, T_3, \ldots, T_{2n}$ redom, suprotno smjeru kazaljke na satu. Točka T_1 pripada *početnoj tetivi*. Početna tetiva spaja točku T_1 s točkom T_{2k} tako da je *sa svake strane* početne tetive paran broj točaka kružnice. Neka je $\mathcal{P}_n$ familija svih $2n$-terokuta upisanih kružnici i neka je $\mathcal{P}_{n,k}$ element iz $\mathcal{P}_n$ čija početna tetiva spaja fiksiranu početnu točku s točkom T_{2k} za $0 \leq k \leq n$. Ako je $P \in \mathcal{P}_{n,k}$, onda početna tetiva dijeli $2n$-terokut P na mnogokute P_l i P_r čiji je broj vrhova $2(k-1)$ i $2(n-k)$ kao na slici 2.12. Ako je jedna od krajnjih točaka početne tetive T_2 ili T_{2n}, s jedne od strana početne tetive ne nalazi se poligon. Ako i P_l i P_r postoje, vrh T_2 postaje početni vrh mnogokuta P_l, a točka



Slika 2.12: Dijeljenje $2n$-terokuta početnom tetivom

T_{2n} početni vrh mnogokuta P_r. Za svaki $0 \leq k \leq n$ postoji injektivno preslikavanje:

$$\theta_{n,k} : \mathcal{P}_{n,k} \longrightarrow \mathcal{P}_{k-1} \times \mathcal{P}_{n-k}$$

definirano s $\theta_{n,k}(P) = (P_l, P_r)$. Preslikavanje je također i surjektivno jer svaka dva poligona P_l i P_r, spojena s početnom tetivom tako da je je točka T_1 spojena s T_2 i T_{2n} čine veći $2n$-terokut. Ako je $D_n = |\mathcal{P}_n|$, slijedi

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} D_{k-1} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} D_k D_{n-k-1}.$$

Definiramo li još $D_0 = 1$, vidimo da je $D_n = C_n$ za svaki $n \geq 0$, tj. ponovno smo dobili rekurzivnu formulu za Catalanove brojeve.

Teorem 2.6.1. *Ako za okruglim stolom sjedi $2n$ ljudi, bez križanja ruku, oni se mogu rukovati na C_n načina.*

2.7 Binarna stabla

Započimo cjelinu s osnovim definicijama teorije grafova potrebnim za razumijevanje ovog problema.

Definicija 2.7.1. ***Graf*** *je uređeni par skupova (V, E), gdje je V skup* ***vrhova****, a E skup 2-podskupova od V koje nazivamo* ***bridovi****.*

Graf je zadan, ako su zadani njegovi vrhovi te ako znamo koji su vrhovi međusobno povezani pa graf možemo promatrati i kao binarnu relaciju susjedstva na skupu vrhova, gdje su dva vrha susjedna ako postoji brid koji ih spaja, tj. vrhovi $u, v \in V$ su susjedni ako postoji $e = \{u, v\} \in E$.

Definicija 2.7.2. ***Šetnja*** *u grafu je niz* $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$*, gdje je* e_i *brid* $\{v_{i-1}, v_i\}$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Kažemo da je to šetnja od* v_0 *do* v_n*.*

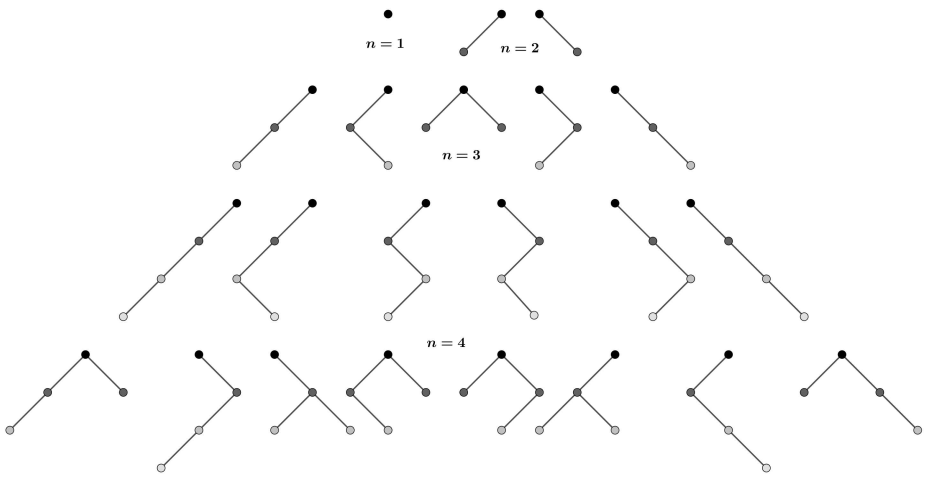
Šetnju u kojoj su svi bridovi različiti nazivamo ***staza****, a šetnju u kojoj su svi vrhovi različiti* ***put****. Zatvoreni put nazivamo* ***ciklus****.*

Definicija 2.7.3. *Na skupu vrhova* V *grafa* G *definiramo relaciju ekvivalencije* $\equiv$*,* $x \equiv y$ *ako postoji put/staza/šetnja od* x *do* y*. Relacija ekvivalencije* $\equiv$ *definira jednu particiju skupa* V*.* ***Komponente povezanosti*** *grafa su podgrafovi inducirani klasama ekvivalencije. Graf je* ***povezan*** *ako postoji samo jedna komponenta povezanosti.*

Definicija 2.7.4. ***Stablo*** *je povezan graf bez ciklusa.*

Definicija 2.7.5. ***Binarno stablo*** *je stablo koje se sastoji od jednog istaknutog vrha koji nazivamo* ***korijenom*** *i uređenog para binarnih stabala koja se nazivaju* ***lijevo*** *i* ***desno podstablo****.*

Pitanje sada glasi: Koliko ima različitih binarnih stabala s n vrhova?
Na slici 2.13 nalazi se prikaz binarnih stabala za $1 \leq n \leq 4$.



Slika 2.13: Binarna stabla s n vrhova za $1 \leq n \leq 4$

Označimo traženi broj različitih binarnih stabala s B_n gdje je $n \geq 0$. Jedino binarno stablo s 0 vrhova je *prazno* stablo pa je $B_0 = 1$. Također, jedino stablo koje se sastoji od jednog vrha je stablo koje čini samo korijen, stoga je $B_1 = 1$. Nadalje, promatramo binarno stablo s n vrhova. Lijevo i desno podstablo imaju ukupno $n - 1$ vrh. Pretpostavimo da se od tih $n - 1$ vrhova, i vrhova nalazi na lijevom podstablu gdje je $0 \leq i \leq n - 1$. Prema tome, na desnom podstablu se nalazi $n - 1 - i$ vrhova. Po definiciji, postoji B_i stabala s i vrhova i

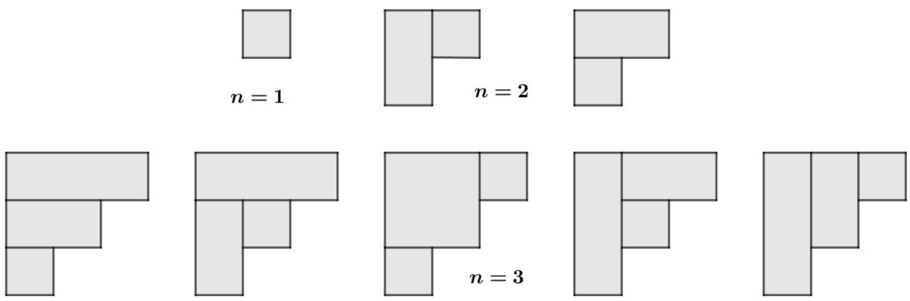
B_{n-1-i} stabala s $n-i-1$ vrha. Tada, po principu produkta, ima B_iB_{n-1-i} binarnih stabala s i vrhova na lijevom podstablu i $n-1-i$ vrhova na desnom podstablu. S obzirom na to da je $0 \le i \le n-1$ proizvoljan, po principu zbroja,

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_iB_{n-i-1},\ B_0 = 1.$$

Teorem 2.7.6. *Broj binarnih stabala s n vrhova jednak je C_n.*

2.8 Popločavanje stepenica

Na kraju ovog poglavlja razmotrimo još jedan geometrijski problem, problem popločavanja. Potrebno je pronaći broj popločavanja stepenica dimenzija $n \times n$ s n pravokutnih pločica. Na slici 2.14 su prikazana moguća popločavanja za $1 \le n \le 3$.



Slika 2.14: Moguća popločavanja za $1 \le n \le 3$

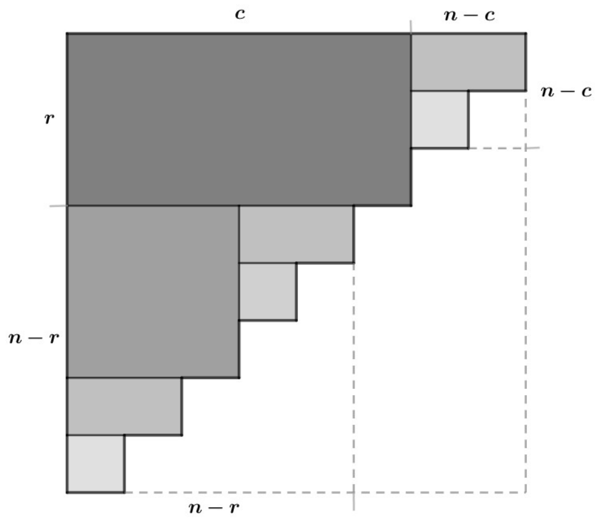
Prvo uočimo da svako popločavanje s n pločica sadži točno jednu kvadratnu pločicu. Promotrimo dekompoziciju popločavanja prikazanu na slici 2.15. S desne strane gornje lijeve pločice dimenzija $r \times c$ nalaze se stepenice $(n-c)\times(n-c)$, a s donje strane stepenice dimenzija $(n-r)\times(n-r)$. Također vidimo da je $c = n+1-r$ gdje je $1 \le r \le n$. Neka je $\mathcal{T}_n$ familija popločavanja $n \times n$ stepenica i $\mathcal{T}_{n,r}$ element iz $\mathcal{T}_n$ za koje je gornja lijeva pločica dimenzija $r \times (n+1-r)$. Ukoliko maknemo gornju lijevu pločicu, od popločavanja $n \times n$ stepeništa, ostaju nam T_1, popločavanje stepenica dimenzija $(r-1)\times(r-1)$ i T_2, popločavanje stepenica $(n-r)\times(n-r)$. Za $r = 1$ ili $r = n$, ostaje naravno samo jedno popločavanje. Vrijedi i obrnuto, tj. dekompozicija je reverzibilna pa je preslikavanje

$$\theta_{n,r} : \mathcal{T}_{n,r} \longrightarrow \mathcal{T}_{r-1} \times \mathcal{T}_{n-r},\ \theta_{n,r}(T) = (T_1, T_2)$$

injektivno. Preslikavanje $\theta_{n,r}$ je očito i surjekcija. Dakle, ako je D_n broj popločavanja stepenica dimenzija $n \times n$ s n pravokutnih pločica i ako definiramo $D_0 = 1$, slijedi

$$D_n = \sum_{r=1}^{n} D_{r-1} D_{n-r} = \sum_{r=0}^{n-1} D_r D_{n-r-1}.$$

Teorem 2.8.1. *Broj popločavanja stepenica dimenzija $n \times n$ s n pravokutnih pločica jednak je C_n.*



Slika 2.15: Dekompozicija popločavanja $n \times n$ stepenica

Poglavlje 3

Reprezentacije Catalanovih brojeva

3.1 Funkcija izvodnica i opća formula

U prethodnom poglavlju, svi proučavani problemi imali su isto rješenje - Catalanove brojeve koji su uglavnom bili zapisani u obliku Segnerove rekurzije:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1},\ C_0 = 1 \tag{3.1}$$

U ovoj cjelini, cilj nam je pronaći tzv. funkciju izvodnicu, tj. funkciju čiji koeficijenti razvoja u red potencija čine niz Catalanovih brojeva. Nadalje, pomoću funkcije izvodnice možemo izvesti formulu za opći član niza koji je zadan rekurzijom. Stoga pretpostavimo da je niz (C_n) zadan rekurzivnom relacijom (3.1).

Definirajmo funkciju f kao *formalni* red potencija

$$f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n.$$

Napomenimo da ćemo nad ovim redom činiti algebarske manipulacije bez da prethodno ispitamo njegovu konvergenciju. Kvadriramo li $f(x)$ dobivamo

$$f^2(x) = C_0C_0 + (C_1C_0 + C_0C_1)x + (C_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2)x^2 + \cdots$$

Vidimo da su koeficijenti uz potencije od x Catalanovi brojevi ($C_1 = C_0C_0$, $C_2 = C_1C_0 + C_0C_1$, $C_3 = C_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2$, ...), odnosno da je

$$f^2(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \cdots$$

Ako prethodni izraz pomnožimo s x te dodamo C_0, dobit ćemo upravo funkciju $f(x)$:

$$C_0 + x \cdot f^2(x) = \underbrace{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \cdots}_{f(x)}.$$

Stoga je

$$C_0 + x \cdot f^2(x) = f(x),$$

odnosno

$$x \cdot f^2(x) - f(x) + 1 = 0.$$

Prethodni izraz možemo shvatiti kao kvadratnu jednadžbu u nepoznanici $f(x)$ čija su rješenja dana s

$$f_{1,2}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Budući da je $f(0) = C_0 = 1$, odabrat ćemo ono rješenje za koje je ispunjen navedeni uvjet. Kako niti jedna od funkcija nije definirana za $x = 0$, izračunajmo $\lim_{x\to 0} f_{1,2}(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2\sqrt{1-4x}} = 1.$$

S obzirom da prva funkcija teži u beskonačnost, uzimamo rješenje:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \tag{3.2}$$

Dakle, (3.2) je funkcija izvodnica niza Calanovih brojeva.

Pokažimo sada kako pomoću funkcije izvodnice možemo dobiti opći oblik n-tog Catalanovog broja. Krenimo od binomnog reda, odnosno Taylorovog reda za funkciju $(1+x)^\alpha$ za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,\end{aligned}$$

pri čemu je $\binom{\alpha}{k}$ generalizirani binomni koeficijent dan s

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Nadalje, supstituiramo x s $-4x$ i uvrštavamo $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot(-4x)^1 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2\cdot 1}\cdot(-4x)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot(-4x)^3 \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot(-4x)^4 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(\frac{1}{2}-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot(-4x)^5 + \cdots \\
&= 1 - \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{1}\cdot\cancel{4}x - \frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{2\cdot 1}\cdot\cancel{4^2}x^2 - \frac{\frac{3\cdot 1}{\cancel{8}}}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\cancel{4^3}x^3 - \frac{\frac{5\cdot 3\cdot 1}{\cancel{16}}}{3\cdot 2\cdot 1}\cancel{4^4}\cdot x^4 - \frac{\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{\cancel{32}}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\cancel{4^5}x^5 - \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{1!}\cdot 2x - \frac{1}{2!}\cdot 4x^2 - \frac{3\cdot 1}{3!}\cdot 8x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}\cdot 16x^4 - \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}\cdot 32x^5 - \cdots
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza za $\sqrt{1-4x}$ u (3.2) dobivamo

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2x}(1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2x}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{1!}\cdot 2x - \frac{1}{2!}\cdot 4x^2 - \frac{3\cdot 1}{3!}\cdot 8x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}\cdot 16x^4 - \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}\cdot 32x^5 - \cdots\right)\right] \\
&= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{1!}\cdot 2x + \frac{1}{2!}\cdot 4x^2 + \frac{3\cdot 1}{3!}\cdot 8x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}\cdot 16x^4 + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}\cdot 32x^5 + \cdots\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2!}\cdot 2x + \frac{3\cdot 1}{3!}\cdot 4x^2 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{4!}\cdot 8x^3 + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{5!}\cdot 16x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

to jest

$$
f(x) = 1 + \frac{1\cdot 2^1}{2!}\cdot x + \frac{3\cdot 1\cdot 2^2}{3!}\cdot x^2 - \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 2^3}{4!}\cdot x^3 + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1\cdot 2^4}{5!}\cdot x^4 + \cdots \tag{3.3}
$$

S obzirom da vrijedi

$$2^2\cdot 2! = 4\cdot 1\cdot 2 = 2\cdot 4,\ \ 2^3\cdot 3! = 8\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 2\cdot 4\cdot 6,\ \ 2^4\cdot 4! = 16\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8,\ldots$$

te

$$1\cdot 2^1\cdot 1! = 2!,\ \ (1\cdot 3)\cdot 2^2\cdot 2! = 4!,\ \ (1\cdot 3\cdot 5)\cdot 2^3\cdot 3! = 6!,\ \ (1\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\cdot 2^4\cdot 4! = 8!,\ldots,$$

koeficijente (razlomke) uz $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ u (3.3) redom proširimo s $1!, 2!, 3!, 4!, \ldots$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \frac{1 \cdot 2^1 \cdot 1!}{2! \cdot 1!} \cdot x + \frac{3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 2!}{3! \cdot 2!} \cdot x^2 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2^3 \cdot 3!}{4! \cdot 3!} \cdot x^3 + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2^4 \cdot 4!}{5! \cdot 4!} \cdot x^4 + \cdots \\
&= 1 + \frac{2!}{2 \cdot 1! \cdot 1!} \cdot x + \frac{4!}{3 \cdot 2! \cdot 2!} \cdot x^2 + \frac{6!}{4 \cdot 3! \cdot 3!} \cdot x^3 + \frac{8!}{5 \cdot 4! \cdot 4!} \cdot x^4 + \cdots \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{0!}{0!0!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{1!1!} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{8!}{4!4!} \cdot x^4 + \cdots \\
&= \frac{1}{0+1} \cdot \binom{0}{0} \cdot x^0 + \frac{1}{1+1} \cdot \binom{2}{1} \cdot x^1 + \frac{1}{2+1} \cdot \binom{4}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3+1} \cdot \binom{6}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{4+1} \cdot \binom{8}{4} \cdot x^4 + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} x^i
\end{aligned}$$

Koeficijent uz potenciju x^n predstavlja n-ti Catalanov broj:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

3.2 Integralna reprezentacija

Catalanovi brojevi imaju i svoju integralnu reprezentaciju. Da bismo došli do nje, za početak ćemo definirati integral

$$I_n = \int_l^k x^{n+\alpha} (a + bx)^\beta \, dx, n \geq 0.$$

Integriramo koristeći metodu parcijalne integracije. (Za $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabilne na intervalu I vrijedi: $\int u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, dx$.) Za dani integral uzimamo:

$$\begin{aligned}
du = (a + bx)^\beta \, dx &\Rightarrow u = \frac{1}{b(\beta+1)} (a + bx)^{\beta+1}, \\
v = x^{n+\alpha} &\Rightarrow dv = (n + \alpha) x^{n-1+\alpha} \, dx.
\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_l^k x^{n+\alpha} (a + bx)^\beta \, dx \\
&= \left[\frac{1}{b(\beta+1)} (a + bx)^{\beta+1} \cdot x^{n+\alpha} \right]_l^k - \frac{n+\alpha}{b(\beta+1)} \int_l^k x^{n-1+\alpha} (a + bx)^{\beta+1} \, dx.
\end{aligned}$$

Sada određujemo granice integracije tako da prvi izraz s desne strane jednakosti bude jednak nuli. Stoga stavljamo $l = 0$ i $k = -\frac{a}{b}$. Dakle,

$$I_n = -\frac{n+\alpha}{b(\beta+1)} \int_0^{-\frac{a}{b}} x^{n-1+\alpha}(a+bx)^{\beta+1}\,dx. \tag{3.4}$$

Uočimo da integral zdesna možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\int x^{n-1+\alpha}(a+bx)^{\beta+1}\,dx = a\int x^{n-1+\alpha}(a+bx)^{\beta}\,dx + b\int x^{n+\alpha}(a+bx)^{\beta}\,dx,$$

što znači da (3.4) možemo zapisati kao

$$I_n = -\frac{n+\alpha}{b(\beta+1)}(aI_{n-1} + bI_n).$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobivamo

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{a(n+\alpha)}{b(\beta+1)} I_{n-1} - \frac{b(n+\alpha)}{b(\beta+1)} I_n \\ \left(1 + \frac{n+\alpha}{\beta+1}\right) I_n &= -\frac{a(n+\alpha)}{b(\beta+1)} I_{n-1} \\ \left(\frac{\beta+1+n+\alpha}{\beta+1}\right) I_n &= -\frac{a(n+\alpha)}{b(\beta+1)} I_{n-1}, \end{aligned}$$

odnosno

$$I_n = -\frac{a(n+\alpha)}{b(\beta+1+n+\alpha)} I_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Kako je i niz Catalanovih brojeva rekurzivno zadan, $C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1},\ C_0 = 1$, pokušajmo odrediti parametre a, b, α, β za koje je

$$-\frac{a(n+\alpha)}{b(\beta+1+n+\alpha)} = \frac{2(2n-1)}{n+1},\ n \geq 1.$$

Uočimo da je za

$$a = 4,\ \alpha = -\frac{1}{2},\ b = -1,\ \beta = \frac{1}{2}$$

zadovoljeno

$$a(n+\alpha) = 2(2n-1),\ -b(\beta+1+n+\alpha) = n+1,$$

pa je

$$I_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} I_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Dakle, nizovi (I_n) i (C_n) zadovoljavaju istu rekurziju. Provjerimo još početne uvjete. S obzirom da je

$$I_0 = \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\pi$$

potrebno je pomnožiti integral I_n odgovarajućom konstantom, konkretno s $\frac{1}{2\pi}$.

Teorem 3.2.1 (Integralna reprezentacija Catalanovih brojeva)**.** *Za* $n \geq 0$ *je*

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^4 x^{n-\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}\,dx. \tag{3.5}$$

3.3 Catalanovi brojevi i Pascalov trokut

Definicija Catalanovih brojeva uključuje binomni koeficijent pa je očito da Catalanove brojeve možemo povezati s Pascalovim trokutom. Štoviše, koristeći različite oblike formula za Catalanove brojeve koje smo izveli u prvom poglavlju, možemo iz Pascalova trokuta "iščitati" Catalanove brojeve. Navedimo nekoliko primjera za to.

$n = 0$:					$\boxed{0}$		1						
$n = 1$:						1		1					
$n = 2$:					$\boxed{1}$		2		1				
$n = 3$:				1		3		3		1			
$n = 4$:			1		$\boxed{4}$		6		4		1		
$n = 5$:		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$:	1		6		$\boxed{15}$		20		15		6		1

Tablica 3.1: Pascalov trokut

- Iz definicije $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ vidimo da C_n možemo dobiti tako da središnji binomni koeficijent iz parnog retka $2n$ (tj. zaokruženi broj Pascalovog trokuta na slici 3.1) dijelimo brojem za jedan većim od polovine broja retka (tj. s $n+1$):
  Npr. za $n = 3$, $C_3 = 20 : (1 + \frac{1}{2}\cdot 6) = 20 : (1+3) = 20 : 4 = 5$
- Prema (1.6) je

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

iz čega zaključujemo da C_n možemo dobiti dijeljenjem neposrednog susjednog koeficijenta slijeva (ili desna) središnjem koeficijentu (broj u kvadratiću na slici 3.1) brojem koji je jednak polovini broja retka.
Npr. za $n = 2$, $C_2 = 4 : (\frac{1}{2} \cdot 4) = 4 : 2 = 2$

- Kako je prema (1.7) $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$, zaključujemo da C_n možemo dobiti kao razliku središnjeg binomnog koeficijenta i njegovog prvog susjeda slijeva (ili zdesna), tj. kao razliku zaokruženog broja i broja u kvadratiću na slici 3.1.
Npr. $C_1 = 2 - 1 = 1, \;\; C_2 = 6 - 4 = 2, ...$

3.4 Catalanov trokut

Catalanov trokut osmislio je i 1976. godine objavio L. W. Shapiro. To je trokutasta shema brojeva koja je sačinjena od članova rekurzivno zadanog niza brojeva $B(n,r)$, $r, n \in \mathbb{N}$:

$$B(n,r) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } r = 1 = n, \\ B(n-1,r-1) + 2B(n-1,r) + B(n-1,r+1), & \text{ako je } 1 \leq r \leq n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Npr. $B(1,1) = 1$, $B(2,1) = 2$, $B(2,2) = 1$, $B(3,2) = 4, \ldots$ Iz same rekurzije lako se vidi da su članovi niza $B(n,r)$ prirodni brojevi za $1 \leq r \leq n$.

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6
1	$\boxed{1}$					
2	$\boxed{2}$	1				
3	$\boxed{5}$	4	$\boxed{1}$			
4	14	14	$\boxed{6}$	1		
5	42	48	$\boxed{27}$	8	1	
6	132	165	110	44	10	1

Tablica 3.2: Catalanov trokut

Ukratko opišimo vezu koju je Shapiro pronašao između članova niza $B(n,r)$ i niza Catalanovih brojeva. Prvi stupac tablice 3.2 sastoji se od Catalanovih brojeva, odnosno vrijedi $B(n,1) = C_n$. Veza između Catalanovih brojeva C_n i brojeva $B(n,2)$ proizlazi iz

$$\begin{aligned} B(n,1) &= B(n-1,0) + 2B(n-1,1) + B(n-1,2) \\ &= 0 + 2B(n-1,1) + B(n-1,2) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $B(n,1) = C_n$ dobivamo

$$C_n = 2C_{n-1} + B(n-1,2),$$

odnosno

$$C_{n+1} = 2C_n + B(n,2).$$

Dakle, za $n \geq 1$ je

$$B(n,2) = C_{n+1} - 2C_n.$$

Iz tablice također možemo iščitati da je $B(n,n) = 1$ za svaki $n \geq 1$ što smo mogli dobiti i iz rekurzivne relacije:

$$\begin{aligned} B(n,n) &= B(n-1,n-1) + 2B(n-1,n) + B(n-1,n+1) \\ &= B(n-1,n-1) + 0 + 0 = B(n-1,n-1). \end{aligned}$$

Jer je $B(1,1) = 1$, indukcijom dolazimo do $B(n,n) = 1$ za svaki $n \geq 1$.

Elemente podniza $B(n,3)$ također možemo izraziti pomoću Catalanovih brojeva:

$$\begin{aligned} B(n-1,3) &= B(n,2) - B(n-1,1) - 2B(n-1,2) \\ &= (C_{n+1} - 2C_n) - C_{n-1} - 2(C_n - 2C_{n-1}) \\ &= C_{n+1} - 4C_n + 3C_{n-1}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$B(n,3) = C_{n+2} - 4C_{n+1} + 3C_n, \ n \geq 1.$$

Analogno se pokazuje da svaki $B(n,r)$, $r \leq n$, možemo izraziti kao linearne kombinacije Catalanovih brojeva:

$$\begin{aligned} B(n,1) &= C_n \\ B(n,2) &= C_{n+1} - 2C_n \\ B(n,3) &= C_{n+2} - 4C_{n+1} + 3C_n \\ B(n,4) &= C_{n+3} - 6C_{n+2} + 10C_{n+1} - 4C_n \\ B(n,5) &= C_{n+4} - 8C_{n+3} + 21C_{n+2} - 20C_{n+1} + 5C_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Uz to vrijedi i sljedeća rekurzivna formula za $B(n,r)$ u kojoj su koeficijenti upravo Catalanovi brojevi (Teorem 14.3 iz [3]):

$$B(n,r) = \sum_{j=1}^{n-r+1} C_j B(n-j, r-1), \tag{3.7}$$

za $1 \leq r \leq n$. Na primjer,

$$44 = B(6,4) = 1 \cdot 27 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 = C_1 \cdot B(5,3) + C_2 \cdot B(4,3) + C_3 \cdot B(3,3).$$

Iz (3.7) i svojstava Catalanovih brojeva dobiva se:

$$\begin{aligned}
B(2,2) &= C_1 \cdot B(1,1) = C_1C_1 \\
B(3,2) &= C_1 \cdot B(2,1) + C_2 \cdot B(1,1) = C_1C_2 + C_2C_1 = \sum_{i+j=3} C_iC_j \\
B(3,3) &= C_1 \cdot B(2,2) = C_1C_1C_1 = \sum_{i+j+k=3} C_iC_jC_k \\
&\vdots \\
B(n,r) &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} C_{i_1}C_{i_2}\cdots C_{i_k}, \quad i_j \geq 1
\end{aligned}$$

Sada naziv Catalanov trokut za shemu 3.2 dobiva pravi smisao jer ga možemo zapisati kao:

n \ r	1	2	3	4
1	C_1			
2	C_2	$\sum_{i+j=2} C_iC_j$		
3	C_3	$\sum_{i+j=3} C_iC_j$	$\sum_{i+j+k=3} C_iC_jC_k$	
4	C_4	$\sum_{i+j=4} C_iC_j$	$\sum_{i+j+k=4} C_iC_jC_k$	$\sum_{i+j+k+l=4} C_iC_jC_kC_l$

Tablica 3.3: Catalanov trokut u terminima C_n

Poglavlje 4

Djeljivost Catalanovih brojeva

U ovome poglavlju bavimo se problemima i svojstvima djeljivosti Catalanovih brojeva.

4.1 Neparni Catalanovi brojevi

Pogledajmo za početak prvih nekoliko Catalanovih brojeva. Zaokruženi brojevi u tablici

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	1	1	**2**	**5**	14	42	132	429
n	8	9	10	11	12	13	14	15
C_n	1430	4862	16796	58786	208012	742900	2674440	9694845

Tablica 4.1: Prvih šesnaest Catalanovih brojeva

4.1 su neparni. Od prvih šesnaest Catalanovih brojeva, neparni su oni za koje je $n = 0, 1, 3, 7$ i 15. Uočimo da indekse n, neparnih C_n brojeva možemo zapisati kao:

$$0 = 2^0 - 1, \ \ 1 = 2^1 - 1, \ \ 3 = 2^2 - 1, \ \ 7 = 2^8 - 1, \ \ 15 = 2^4 - 1$$

Odnosno svi su oblika $2^m - 1$. Takve brojeve nazivamo *Mersenneovi brojevi* po francuskom redovniku i matematičaru Marinu Mersenneu (1588.- 1648.) koji je proučavao spomenute brojeve želeći otkriti opću formulu za proste brojeve.

Vidjeli smo da tvrdnja vrijedi za prvih šesnaest Catalanovih brojeva. Pokažimo da vrijedi općenito.

Teorem 4.1.1 (Koshy, Salamassi)**.** *$C_n, n > 0$ je neparan broj ako i samo ako je n Mersenneov broj.*

Dokaz. Iz Segnerove rekurzije (1.13) slijedi:

$$C_n = \begin{cases} 2(C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{\frac{n}{2}-1}C_{\frac{n}{2}}), & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ 2(C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{\frac{n-3}{2}}C_{\frac{n+1}{2}}) + C_{\frac{n-1}{2}}^2, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Prema tome, za $n > 0$, C_n je neparan ako i samo ako su n i $C_{\frac{n-1}{2}}$ neparni. Jednako tako, C_n je neparan ako su $\frac{n-1}{2}$ i $C_{\frac{n-3}{4}}$ neparni ili ako je $\frac{n-1}{2} = 0$. Nastavimo li postupak, slijedi da je C_n neparan ako i samo ako je

$$C_{\frac{n-(2^m-1)}{2^m}}, \ m \geq 0,$$

neparan. No, kako je $k = 0$ najmanja vrijednost za koju je C_k neparan, postupak završavamo za $\frac{n-(2^m-1)}{2^m} = 0$, tj. kada je $n = 2^m - 1$. □

4.2 Prosti Catalanovi brojevi

U tablici 4.1 vidimo da su C_2 i C_3 prosti brojevi. Postavlja se pitanje ima li još prostih Catalanovih brojeva ili su C_2 i C_3 jedini takvi?
Da bismo pokazali glavnu tvrdnju bit će nam potreban sljedeći teorem.

Teorem 4.2.1 (Koshy, Salamassi)**.** *$C_n \mid (n+2)$ ako i samo ako je $0 \leq n \leq 3$.*

Dokaz. Ako je $n \leq 3$ očito vrijedi $C_n \mid (n+2)$. $(1 \mid 2,\ 1 \mid 3,\ 2 \mid 4,\ 5 \mid 5)$
Neka je $n > 3$. Iz eksplicitne formule za opći član (1.6) slijedi:

$$C_n = \frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n)}{n!},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{C_n} &= \frac{n!}{(n+3)(n+4)\cdots(2n-1)(2n)} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)\cdot n}{(n+3)(n+4)\cdots(2n-1)(2n)} \\ &= \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n-1)n}{(n+3)(n+4)\cdots(2n-1)}. \end{aligned}$$

Kako desna strana jednakosti očito nije cijeli broj, ni $\frac{n+2}{C_n}$ nije cijeli broj, tj. $C_n \nmid (n+2)$.
Dakle, ako je $n > 3$, onda $C_n \nmid (n+2)$ □

Ovaj rezultat povlači sljedeći korolar.

Korolar 4.2.2. *Jedina dva prosta Catalanova broja su C_2 i C_3.*

Dokaz. Prema rekurzivnoj formuli (1.12) slijedi da je

$$(n+2)C_{n+1} = 2(2n+1)C_n, \quad n \geq 0.$$

Pretpostavimo da je C_n prost broj. Tada iz prethodne jednakosti slijedi da $C_n \mid (n+2)$ ili $C_n \mid C_{n+1}$.

1° Pretpostavimo da C_n dijeli $(n+2)$. Tada je prema prethodnom teoremu $0 \leq n \leq 3$. Kako je uz to C_n prost broj, postoje samo dva takva n, a to su $C_2 = 2$ i $C_3 = 5$.

2° Pretpostavimo da C_n dijeli C_{n+1}. Tada je $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ prirodan broj, to jest Neka je $\frac{C_{n+1}}{C_n} = k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Kako je

$$\begin{aligned}\frac{2(2n+1)}{n+2} &= k,\\ 4n+2 &= nk+2k,\\ n(4-k) &= 2k-2 \geq 0,\end{aligned}$$

zaključujemo da je $1 \leq k < 4$. Provjeravamo redom sve mogućnosti:

$$\begin{aligned}k = 1 &\Rightarrow n = 0 : C_0 = 1 \text{ nije prost broj.}\\ k = 2 &\Rightarrow n = 1 : C_1 = 1 \text{ nije prost broj.}\\ k = 3 &\Rightarrow n = 4 : C_4 = 14 \text{ nije prost broj.}\end{aligned}$$

Dakle, $C_2 = 2$ i $C_3 = 5$ su jedina dva prosta Catalanova broja. □

4.3 Svojstva djeljivosti

U zadnjoj cjelini ovog poglavlja nabrojat ćemo svojstva djeljivosti Catalanovih brojeva koja su otkrili i dokazali R. Alter i K. K. Kubota [6]iz sveučilišta u Kentuckyju (Lexington, SAD).

- Za svaki prost broj p i $k \geq 1$, $p \nmid C_{p^k-1}$.
- Neka je $n > 1$ takav da $3 \mid C_{n-2}$ i $3 \nmid C_{n-1}$. Tada:
  - **i.** $n \equiv 0 \pmod 9$
  - **ii.** $3 \nmid \prod_{i=0}^{5} C_{n+i-1}$

iii. $3 \mid C_{n+5}$

- Neka je $p > 3$ prost broj i $n > 1$ takav da $p \mid C_{n-2}$ i $3 \nmid C_{n-1}$. Tada:

  i. $n \equiv 0 \pmod{p}$

  ii. $p \nmid \prod_{i=0}^{\frac{p+1}{2}} C_{n+i-1}$

  iii. $p \mid C_{n+\frac{p+1}{2}}$

- Neka $p \nmid C_{n-1}$ i $p \mid C_n$. Tada je $n \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}$ gdje je p neparan prost broj.

- Neka $3 \nmid C_{n-1}$. Tada $3 \mid C_n$ ako i samo ako je $n \equiv 5 \pmod{9}$ gdje je $n \geq 5$.

- Catalanovi brojevi koji nisu djeljivi neparnim prostim brojem p se pojavljuju u blokovima duljine 6 ako je $p = 3$ i duljine $\frac{p+3}{2}$ ako je $p > 3$.

Poglavlje 5

Eugène Charles Catalan

Slika 5.1: Eugène Charles Catalan

Eugène Charles Catalan [7] rođen je 30. svibnja 1814. godine u gradu Bruges u Belgiji (nekadašnjem Francuskom carstvu). Njegova majka, Jeanne Bardin, rodila je Eugènea sa samo sedamnaest godina. U to vrijeme bila je neudata i živjela s roditeljima pa je prvotno prezime Eugènea Catalana bilo Bardin. Tek sedam godina nakon njegova rođenja, otac parižanin Joseph Victor Étienne Catalan oženio je Jeanne i priznao Eugènea kao svoga sina. Godine 1822. obitelj se preselila u Lille.

Eugène je bio obrazovano dijete te je s deset godina u potpunosti naučio pisati na francuskom. Započeo je svoju karijeru kao pomoćnik draguljar zbog svog oca koji je također bio draguljar, no nije nastavio u tom smjeru zbog manjka potrebnih vještina. Nakon nekog vremena, oko 1825., obitelj se preselila s Pariz, koji je Eugène jako zavolio te se kasnije smatrao parižaninom. U to vrijeme, otac Joseph bavio se arhitekturom pa je i Eugène trebao krenuti tim putem.

Upisao je École Royale Gratuite de Dessin et de Mathématiques en Faveur des Arts Mécaniques, a pohađao je i predavanja na École des Beaux-Arts. Jedan od predavača u École Gratuite de Dessin bio je Louis Lefébure de Fourcy (matematičar poznat po odbijanju Galoisa kod upisa École Polytechnique) koji je uočio Catalanov potencijal i poticao ga na upis u prestižnu École Polytechnique. Catalan je upisao École Polytechnique 1833. te je pohađao matematička predavanja Josepha Liouvillea i Gabriela Laméa. Godine 1829. počinje predavati geometriju na École Gratuite de Dessin gdje ostaje sve do 1833. U tom vrijeme postaje i politički aktivan. Iako je imao čvrsta republikanska uvjerenja, nikada se nije dovodio u neprilike zbog svojih političkih stajališta. Nakon prve godine studiranja, Catalan je, kao i ostatak kolega, bio isključen iz škole na godinu dana zbog političkih razloga. U to vrijeme pronašao je zaručnicu Charlotte Augustine Renée Perin s kojom je proveo ostatak života. Godine 1835. vraća se školovanju i te iste godine, ljeti završava obrazovanje u École Polytechnique.

Godine 1936. Liouville počinje izdavati Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. U tom časopisu, Catalan je objavio sedam svojih radova (Rješenje vjerojatnosnog problema koji se odnosi na igru susreta, Zapis o problemu kombinacija, Zapis o konačnim diferencijalnim jednadžbama, Zapis o teoriji brojeva, Novo rješenje problema: Na koliko načina možemo triangulirati zadani mnogokut pomoću dijagonala?, Dopuna bilješke o konačnim diferencijalnim jednadžbama, Memoar o redukciji klasa višestrukih integrala). U djelu "Zapis o konačnim diferencijalnim jednadžbama" pojavljuju se i Catalanovi brojevi kao rješenje problema disekcije mnogokuta na trokute pomoću dijagonala koje se ne sijeku.Uz pomoć Charlesa-Françoisa Sturma i Josepha Liouvillea, 1838. godine, otvara École Sainte-Barbe čiji je cilj bio priprema učenika za upis na École Polytechnique. Iste godine postao je asistent tutor deskriptivne geometrije, a godinu nakon i zamjenik ispitivača na École Polytechnique. Nakon povratka u Paris nastavlja svoje obrazovanje te završava bakalaureat, a kasnije dobiva i "licencu matematičkih znanosti". Godine 1841. završava i doktorat radom iz područja mehanike "Privlačenje homogenog elipsoida na vanjsku ili unutrašnju točku". Također dobiva i "licencu fizičkih znanosti".

Godine 1840. postaje članom "Filomatskog društva" (Société Philomatique) te počinje objavljivati svoje radove u njihovom časopisu. U časopisu Mémoires Couronnés objavljuje opći teorem o promjeni varijabli za n-dimenzionalne integrale, a u Crelle's Journalu "Catalanovu pretpostavku". Preko ruskog geografa Piotra Tchihatchefa, Catalan stupa u kontakt s ruskim matematičarom Pafnutyem Chebyshevim s kojim nastavlja komunikaciju sljedećih pedeset godina. Unatoč postignućima i obrazovanju, daljnji Catalanov napredak u karijeri je bio usporen zbog njegovih ljevičarskih republikanskih svjetonazora sve do uspostave Druge Francuske republike. Nakon dvanaest godina, odstupa od pozicije tutora u École Polytechnique zbog uvođenja promjena pod vodstvom novih ravnatelja. Nakon pada Druge Francuske Republike, odbija prisegnuti na vjernost novom Carstvu te zbog toga gubi posao. Sljedećih godina živio je u Parizu te je zarađivao podučavajući matematiku. Objavio je mnogo članaka u Liouvilleovom časopisu i u časopisu Akademije znanosti "Izvještaji" (Comptes rendus). Želeći se učlaniti u Akademiju znanosti, Catalan otkriva poliedre koji danas nose naziv Catalanova tijela - tijela s nepravilnim kongruentnim stranama u čijim se vrhovima sastaje različit broj bridova. Godine 1859. dobiva položaj na katedri za matematiku na Sveučilištu u Liègeu. Tu poziciju drži sve do umirovljenja 1884.

Njegove "Mélanges mathématiques" objavljuje Kraljevsko društvo znanosti Liègea, 1868. Djelo se sastojalo od 69 radova, počevši od kombinacija s ponavljanjima pa do demonstracija Poissonove distribucije. Nakon dvadesetak godina objavljeno je novo izdanje u tri dijela od 299 radova. Napisao je mnoge radove i članke koji su bili vrlo popularni. Šezdesetih godina postaje član Kraljevske belgijske akademije znanosti, a bio je i član Akademije znanosti Toulousea, Društva znanosti Liègea, počasni član St. Petersburške akademije znanosti, Matematičkog društva Amsterdama te mnogih znanstvenih društava. Belgijska vlada mu dodjeljuje Križ viteškog reda Leopolda, a 1887. nagrađen je Viteškim križem Legije časti Republike Francuske. Godine 1894. obolijeva od upale pluća te umire 14. veljače te iste godine.

Bibliografija

[1] H. Čavrak, *Catalanovi brojevi*, Hrvatski matematički elektronički časopis math.e, Vol. 7 No. 1 (2006), https://hrcak.srce.hr/file/9464

[2] T. Davis, *Catalan numbers*, Geometer, Vol. 11 No. 2 (1956), 89–93.

[3] R. Koshy, *Catalan numbers with applications*, Oxford University Press, 2009.

[4] S. Roman, *An introduction to Catalan numbers*, Birkhäuser, 2015.

[5] I. Nakić, *Diskretna matematika*, PMF - MO, 2011.

[6] R. Alter, K.K. Kubota, *Prime and prime power divisibility of Catalan numbers*, Journal of combinatorial theory (A), No. 15 (1973), 243–256.

[7] J.J. O'Connor, E.F. Robertson, *Eugène Charles Catalan*, 2012., https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan/"

Sažetak

Prirodni broj oblika $C_n = \dfrac{1}{1+n}\dbinom{2n}{n}$ gdje je $n \geq 0$ nazivamo n-ti Catalanov broj. Niz Catalanovih brojeva: 1, 1, 2, 5, 14, 42, ..., možemo zapisati na više načina, npr.:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{l}^2$$

te rekurzijama

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} \text{ i } C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1},\ n \geq 1, \quad C_0 = 1.$$

Catalanovi brojevi javljaju se kao rješenje niza kombinatornih brojeva, kao što su problem triangulacije konveksnih mnogokuta, putovi ispod dijagonale u cjelobrojnoj mreži, Dyckovi planinski putovi, problem zagrađivanja, broj binarnih stabala s n vrhova, itd.

U radu su obrađena važnija svojstva Catalanovih brojeva te su opisani kombinatorni problemi koji se uz njih vežu.

Summary

The integer $C_n = \frac{1}{1+n}\binom{2n}{n}$, where $n \geq 0$, is called n-th Catalan number. Catalan sequence: 1, 1, 2, 5, 14, 42, ..., can be defined in many ways, e.g.:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{l}^2$$

or recursively as:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} \text{ i } C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1},\ n \geq 1, \quad C_0 = 1.$$

Catalan numbers occur as a solution to a set of combinatorial problems, such as triangulation of convex polygons, diagonal avoiding lattice paths, Dyck mountain ranges, parenthesizing problem, number of binary threes with n vertices, etc.

In this diploma thesis, the most important properties of Catalan numbers are discussed and the combinatorial problems associated with them are described.

Životopis

Rođena sam 10. travnja 1999. godine u Varaždinu. Osnovnoškolsko obrazovanje sam stekla u Osnovnoj školi Podrute u Donjem Makojišću. Opću gimnaziju sam završila u Srednjoj školi Novi Marof. Godine 2018. upisala sam preddiplomski, a 2021. i diplomski sveučilišni studij matematike, nastavničkog smjera na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.