Algebarske konstrukcije pravilnih mnogokuta

Bogdanović, Sara

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:064484

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sara Bogdanović

ALGEBARSKE KONSTRUKCIJE PRAVILNIH MNOGOKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, svibanj 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Algebarske konstrukcije su konstrukcije kod kojih se veličine potrebne za konstrukciju najprije izraze algebarski, a tek zatim konstruiraju. U ovom diplomskom radu, problem rješivosti konstrukcije pravilnog n-terokuta zasniva se na rješavanju ciklotomske jednadžbe $z^n - 1 = 0$ i povezuje geometriju, algebru i teoriju brojeva.

U prvom poglavlju prikazat ćemo vrhove pravilnog mnogokuta u kompleksnoj ravnini koristeći trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Uz pomoć Moivreove formule, dokazat ćemo da se vrhovi pravilnog n-terokuta mogu identificirati s rješenjima pripadne ciklotomske jednadžbe.

U drugom poglavlju opisat ćemo elementarne konstrukcije pravilnih mnogokuta. Elementarne konstrukcije (konstrukcije izvedive ravnalom i šestarom) zasnivaju se na konstrukcijama pravaca i kružnica, što algebarski odgovara konstrukcijama rješenja linearne i kvadratne jednadžbe. Svođenjem pripadne ciklotomske jednadžbe na nekoliko linearnih i kvadratnih jednadžbi, dokazat ćemo da se elementarno mogu konstruirati pravilni trokut, četverokut, peterokut i sedamnaesterokut. Također ćemo dokazati da se iz konstrukcija pravilnih n-terokuta lako mogu izvesti konstrukcije pravilnih $2n$-terokuta, a posebno ćemo konstruirati šesterokut, osmerokut, deseterokut, dvanaesterokut i šesnaesterokut. Nadalje, dokazat ćemo da se za relativno proste brojeve p i q, uz poznate konstrukcije pravilnih p-terokuta i q-terokuta, može konstruirati i pravilni pq-terokut, što ćemo ilustrirati na primjeru petnaesterokuta.

U trećem poglavlju dokazat ćemo da pravilan sedmerokut, deveterokut i trinaesterokut nije moguće konstruirati samo ravnalom i šestarom jer se njihove ciklotomske jednadžbe svode na kubne jednadžbe čija rješenja nisu elementarno konstruktibilna. Međutim, ta rješenja se mogu konstruirati trisekcijom kuta koja je izvediva uz uvođenje dodatnog alata, na primjer trake papira. Koristeći trisekciju kuta konstruirat ćemo pravilni sedmerokut, deveterokut i trinaesterokut.

Poglavlje 1

Algebarski pristup pravilnim mnogokutima

Konstrukcije pravilnih mnogokuta najjednostavnije se analiziraju u kompleksnoj ravnini. U ovom poglavlju najprije ćemo se prisjetiti osnovnih pojmova vezanih uz kompleksne brojeve. Zatim ćemo prikazati vrhove pravilnog mnogokuta koristeći trigonometrijski oblik kompleksnog broja te ćemo dokazati da su vrhovi pravilnog n-terokuta upravo rješenja jednadžbe $z^n - 1 = 0$.

1.1 Kompleksni brojevi u Gaussovoj ravnini

Svaki kompleksni broj $z \in \mathbb{C}$ može se jednoznačno prikazati u obliku

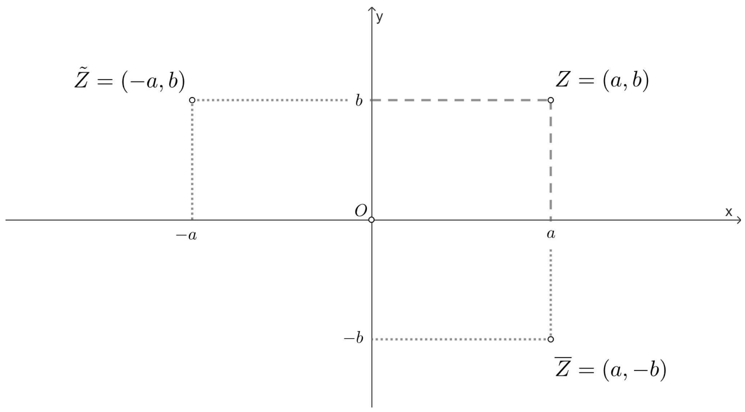
$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

koji se zove **standardni oblik kompleksnog broja**. Pri tom se a zove realni dio kompleksnog broja z i piše se $a = \operatorname{Re} z$, a b imaginarni dio od z i piše se $b = \operatorname{Im} z$. Stoga je $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

Geometrijski se kompleksni brojevi prikazuju u kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini gdje se svakom kompleksnom broju $z = a + bi$ pridružuje točka $Z = (a, b)$. Dakle, realni dio kompleksnog broja prikazujemo na osi x, a imaginarni dio na osi y (slika 1.1).

Broj $\bar{z} = a - bi$ zove se **konjugirano kompleksni broj** broja $z = a + bi$, a realan broj $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ zove se **modul** ili **apsolutna vrijednost** broja z. Konjugirano kompleksnom broju $\bar{z}$ u kompleksnoj ravnini odgovara točka $\overline{Z} = (a, -b)$. Primijetimo da je točka $\overline{Z}$ osnosimetrična točki Z s obzirom na os x (slika 1.1).

Slično, točka koja je osnosimetrična točki Z s obzirom na y-os ima koordinate $\tilde{Z} = (-a, b)$ (slika 1.1).

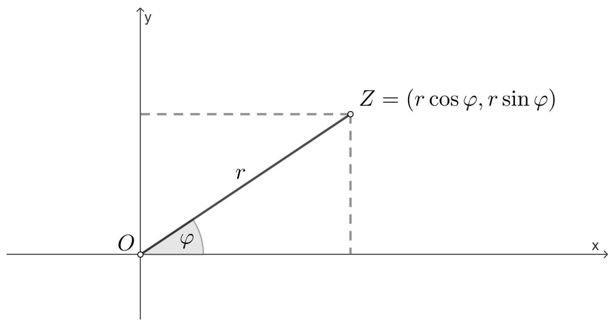


Slika 1.1: Prikaz kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini

Svaki kompleksan broj $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ može se zapisati u **trigonometrijskom obliku**

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

jer je $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, gdje je $r = |z|$ modul od z. Kut φ što ga zatvaraju pozitivni dio x-osi i dužina $\overline{OZ}$ naziva se **argument** broja z (slika 1.2). Zbog periodičnosti, argument je određen do na višekratnik od 2π. Stoga se za argument φ broja z uzima kut φ za koji je $0 \leq \varphi < 2\pi$. Tada je on jednoznačno određen sa z i označava se sa $\arg z$, dok se sa $\operatorname{Arg} z$ označava skup $\{\varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



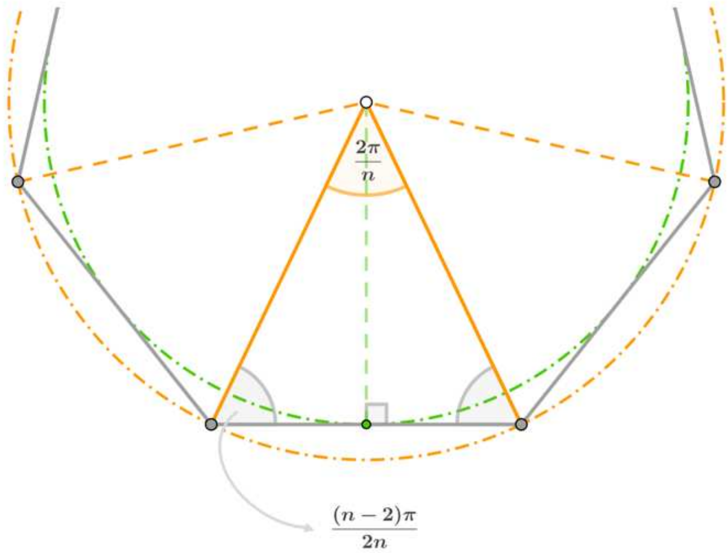
Slika 1.2: Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Za kompleksni broj $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ može se matematičkom indukcijom dokazati poznata **Moivreova formula**

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

1.2 Prikaz pravilnih mnogokuta u kompleksnoj ravnini

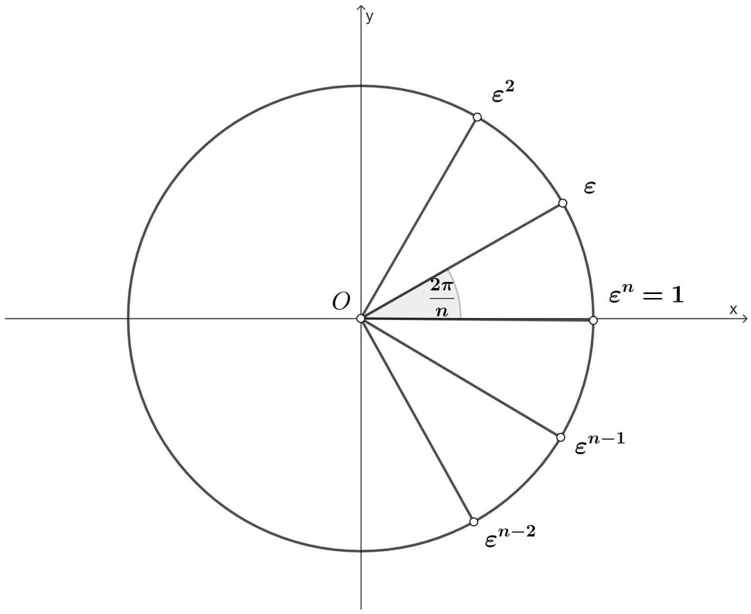
Pravilan mnogokut je mnogokut kojemu su sve stranice međusobno sukladne i svi unutarnji kutovi međusobno sukladni. Promotrimo jednakokračan trokut čija je osnovica jedna stranica pravilnog n-terokuta, a kutovi uz osnovicu su polovine unutarnjih kutova tog n-terokuta (slika 1.3). Taj trokut zovemo **karakteristični trokut** pravilnog n-terokuta. Kutovi uz osnovicu tog trokuta imaju mjeru $\frac{(n-2)\pi}{2n}$, a kut nasuprot osnovici ima mjeru $\frac{2\pi}{n}$ (taj kut se naziva **središnji kut** pravilnog n-terokuta). Svaki pravilni n-terokut sastoji se od n takvih trokuta koji su svi međusobno sukladni prema KSK teoremu o sukladnosti. Uočimo da su i visine tih trokuta međusobno sukladne. Zaključujemo da svakom pravilnom mnogokutu možemo opisati i upisati kružnicu te da se središta tih kružnica podudaraju i nalaze u sjecištu simetrala unutarnjih kutova tog mnogokuta. Krakovi karakterističnog trokuta su polumjeri opisane kružnice, a visina je polumjer upisane kružnice.



Slika 1.3: Karakteristični trokut pravilnog n-terokuta

Promotrimo pravilni n-terokut upisan u jediničnu kružnicu tako da mu je jedan vrh u točki 1 na osi x (slika 1.4). Tada mu je prvi sljedeći vrh očito točka

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$



Slika 1.4: Vrhovi pravilnog n-terokuta

Drugi vrh je

$$\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right),$$

odnosno prema Moivreovoj formuli

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2=\varepsilon^2.$$

Analogno slijedi da su ostali vrhovi $\varepsilon^3,\varepsilon^4,\ldots,\varepsilon^{n-1}$, a n-ti vrh jednak je početnom vrhu na x-osi, odnosno

$$\varepsilon^n=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n=1.$$

Dakle, svi vrhovi imaju oblik

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k,\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

i rješenja su jednadžbe

$$z^n=1.$$

Dokažimo da vrijedi i obratno. Neka je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleksan broj takav da je $z^n = 1$. Tada je prema Moivreovoj formuli

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = 1.$$

Usporedba lijeve i desne strane daje

$$\begin{aligned} r^n \cos n\varphi &= 1, \\ r^n \sin n\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $r = 1$ te $\cos n\varphi = 1$ i $\sin n\varphi = 0$ iz čega slijedi da je

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Uvrstimo li $r = 1$ i $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ natrag u $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dobivamo $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, odnosno $z = \varepsilon^k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, svaki $k \in \mathbb{Z}$ može se jedinstveno prikazati u obliku $k = nq + r$, gdje je $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, pa je

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2nq\pi + 2r\pi}{n} = \frac{2r\pi}{n} + 2q\pi$$

i vrijedi

$$0 \leq \frac{2r\pi}{n} < \frac{2n\pi}{n} = 2\pi,$$

odakle slijedi $\arg \varepsilon^k = \frac{2r\pi}{n}$. Prema tome, $\{\varepsilon^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\varepsilon^r : r = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Dakle, skup svih različitih rješenja jednadžbe $z^n = 1$ je $\{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$. Ta rješenja leže na jediničnoj kružnici, a kako je i

$$\frac{2(r+1)\pi}{n} - \frac{2r\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1,$$

to znači da su $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog u jediničnu kružnicu.

Za $n \geq 1$, jednadžba

$$z^n - 1 = 0$$

zove se **jednadžba diobe kružnice** ili **ciklotomska jednadžba**. Ova jednadžba ima n različitih rješenja $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ koja se nazivaju **n-ti korijeni iz jedinice**. Oni n-ti korijeni iz jedinice koji nisu rješenja jednadžbe

$$z^k - 1 = 0, \quad k < n,$$

nazivaju se primitivni n-ti korijeni iz jedinice.

Poglavlje 2

Konstrukcije pravilnih mnogokuta ravnalom i šestarom

U ovom ćemo poglavlju, polazeći od ciklotomske jednadžbe, dokazati da su pravilni trokut, četverokut, peterokut i sedamnaesterokut elementarno konstruktibilni te ćemo za svaki od njih izvesti po jednu moguću geometrijsku konstrukciju. Također ćemo dokazati izvedivost elementarne konstrukcije pravilnog pq-terokuta uz poznate elementarne konstrukcije pravilnih p-terokuta i q-terokuta pri čemu su p i q relativno prosti. Zatim ćemo ovaj rezultat primijeniti na konstrukciju pravilnog petnaesterokuta iz poznatog pravilnog trokuta i konstrukciju iz poznatog pravilnog peterokuta. Prilikom konstrukcije pravilnog n-terokuta, polumjer njemu opisane kružnice uzimamo za jediničnu duljinu.

2.1 Osnovne konstrukcije

Ravnalom i šestarom moguće je konstruirati:

- pravac koji prolazi kroz dvije različite zadane točke,
- sjecište dvaju pravaca (ako postoji),
- kružnicu sa središtem u zadanoj točki koja prolazi kroz drugu zadanu točku,
- sjecište pravca i kružnice (ako postoji),
- sjecište dviju kružnica (ako postoji).

Ove ćemo konstrukcije zvati osnovnim konstrukcijama.

Definicija 2.1.1. *Svaki slijed od konačno mnogo izvedenih osnovnih konstrukcija zvat ćemo* ***konstrukcijom pomoću ravnala i šestara****, odnosno* ***elementarnom konstrukcijom****.*

Definirat ćemo neke temeljne konstrukcije koje ćemo smatrati poznatim operacijama u složenijim konstruktivnim zadacima:

- prijenos dužina,
- prijenos kutova,
- konstrukcija simetrale i polovišta dužine,
- konstrukcija simetrale kuta i polovišta luka,
- konstrukcija pravca koji prolazi danom točkom i koji je paralelan s danim pravcem,
- konstrukcija okomice iz dane točke na dani pravac,
- dijeljenje dužine na jednake dijelove i u danom omjeru,
- konstrukcija trokuta ako su mu poznate sve tri stranice,
- konstrukcija kružnog luka iz čijih se točaka vidi neka dužina pod danim kutom.

2.2 Algebarska metoda

Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka svodi se na to da traženu duljinu dužine izrazimo pomoću duljina zadanih dužina koristeći osnovne racionalne operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje) i kvadratni korijen, a zatim tu dužinu konstruiramo iz zadanih dužina.

Ako imamo zadane dužine duljina a, b i c, te ako je n bilo koji prirodni broj veći od 1, tada algebarskom metodom možemo konstruirati dužinu duljine x ako je

$$x = a + b, \quad x = a - b, \quad x = n \cdot a,$$

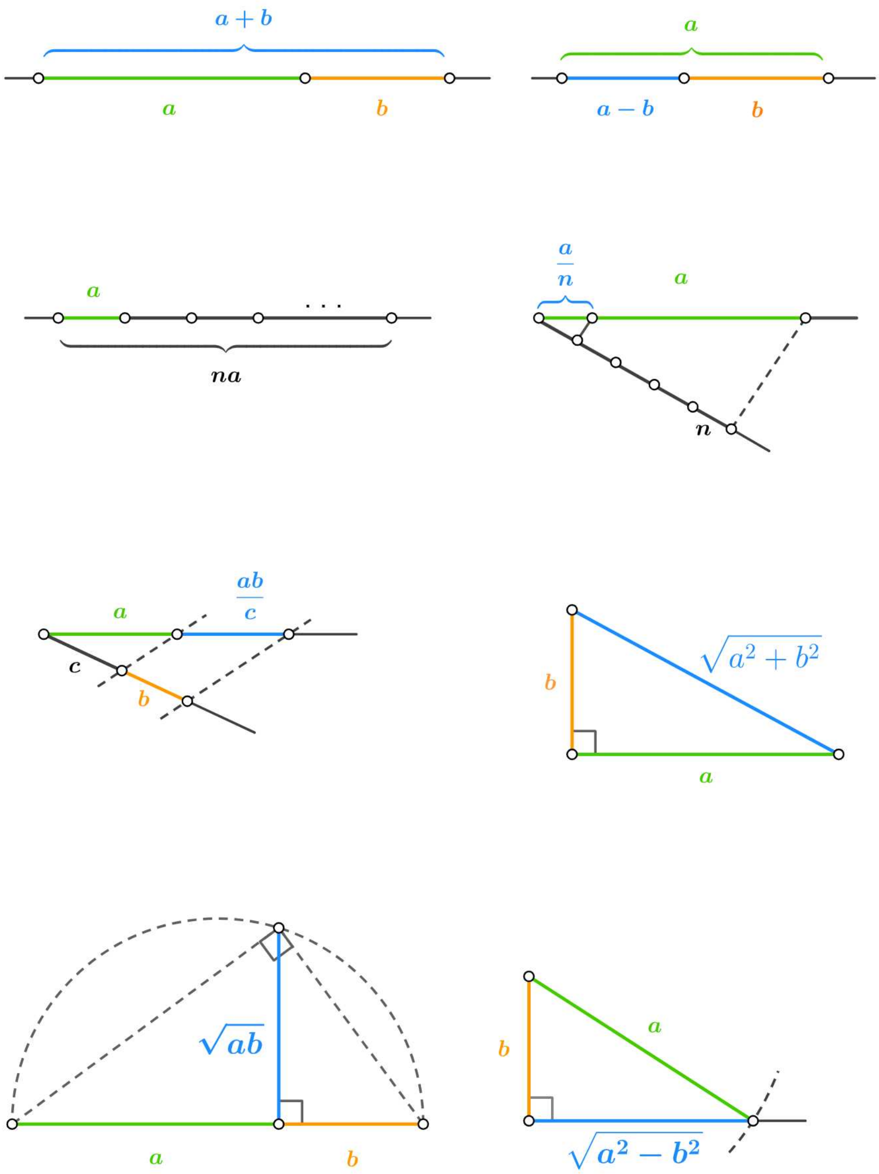
$$x = \frac{a}{n}, \quad x = \frac{ab}{c}, \quad \text{(primjenom Talesovog teorema o proporcionalnosti)}$$

$$x = \sqrt{ab}, \quad \text{(primjenom Euklidovog teorema)}$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{(primjenom Pitagorinog teorema).}$$

Posebno, neka su zadane jedinična dužina te dužine duljina a i b. Tada možemo konstruirati i dužine duljina

$$x = a \cdot b, \quad x = \frac{a}{b}, \quad x = \sqrt{a}.$$



Slika 2.1: Konstrukcije osnovnih algebarskih izraza

2.3 Analitička metoda

Osnovnu ideju za nalaženje općeg postupka za rješavanje geometrijskih problema imao je François Viète[1] krajem XVI. stoljeća, a u prvoj polovici XVII. stoljeća njegove ideje usavršili su i upotpunili René Descartes[2] i Pierre de Fermat[3]. Viète je prvi došao na ideju algebarskog pristupa geometrijskim problemima. Fermat i Descartes poopćili su Vièteovu algebarsku metodu primjenom koordinata tako što su uspostavili vezu između krivulja i jednadžbi. Descartesova ideja za opći postupak rješavanja geometrijskih problema u osnovi je vrlo jednostavna.

Ako u ravninu uvedemo koordinatni sustav, tada svakom pravcu odgovara jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice, a presjeku dvaju pravaca odgovara rješenje sustava dviju jednadžbi koje predstavljaju te pravce i obratno, svakom sustavu od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice odgovara par pravaca koji će se sjeći ili ne, ovisno o tome ima li taj sustav rješenje ili ne. Na sličan način, svaka se konstrukcija može svesti na rješavanje niza jednadžbi određene vrste i obratno, ako je moguće dokazati da se neke točke u ravnini dobiju rješavanjem niza jednadžbi odgovarajuće vrste, to znači da postoji konstrukcija tih točaka pomoću krivulja odgovarajućeg tipa.

Svaka dužina određena je svojim krajnjim točkama, a te točke određene su svojim koordinatama. Dakle, svaka se dužina može prikazati pomoću koordinata svojih krajnjih točaka. Svakom pravcu u ravnini odgovara linearna jednadžba oblika

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

a svakoj kružnici odgovara kvadratna jednadžba oblika

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 > 4c.$$

Znamo da se svaka konstrukcija provodi nizom temeljnih konstrukcija, a one se provode nizom osnovnih konstrukcija, odnosno svode se na određivanje presjeka pravaca i kružnica. Stoga, provedemo li osnovne konstrukcije analitičkom metodom, dokazat ćemo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3.1. *Dužinu duljine x možemo konstruirati pomoću ravnala i šestara ako i samo ako je x neki nenegativni realni broj kojeg možemo dobiti iz duljina konačno mnogo zadanih dužina pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena.*

[1]François Viète (1540. – 1603.), francuski matematičar

[2]René Descartes (1596. – 1650.), francuski matematičar, fizičar i filozof

[3]Pierre de Fermat (1601. – 1665.), francuski matematičar i pravnik

Dokaz. 1. Pravac zadan dvjema točkama
Jednadžba pravca određenog točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) dana je sa

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Zapišemo li tu jednadžbu u obliku

$$ax + by + c = 0,$$

dobit ćemo da je

$$\begin{aligned} a &= y_1 - y_2, \\ b &= x_2 - x_1, \\ c &= x_1 y_2 - y_1 x_2, \end{aligned}$$

a te izraze znamo elementarno konstruirati.

2. Sjecište dvaju neparalelnih pravaca
Neka su jednadžbe dvaju neparalelnih pravaca

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednadžbi, dobivamo koordinate sjecišta danih pravaca

$$x_S = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \quad y_S = \frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

3. Kružnica zadana središtem i jednom točkom
Jednadžba kružnice zadane središtem (x_0, y_0) i jednom točkom (x_1, y_1) dana je sa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2.$$

Zapišemo li tu jednadžbu u obliku

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

dobit ćemo da je

$$\begin{aligned} a &= -2x_0, \\ b &= -2y_0, \\ c &= x_0^2 + y_0^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2. \end{aligned}$$

4. Sjecišta kružnice i pravca
Neka su jednadžbe pravca i kružnice redom

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava u slučaju $b_1 \neq 0$, dobivamo koordinate sjecišta

$$x_S = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}, \quad y_S = -\frac{a_1}{b_1}x_S - \frac{c_1}{b_1},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} A &= a_1^2 + b_1^2, \\ B &= a_2b_1^2 + 2a_1c_1 - a_1b_1b_2, \\ C &= c_1^2 - b_1b_2c_1 + b_1^2c_2. \end{aligned}$$

U slučaju $b_1 = 0$ i $a_1 \neq 0$ dobivamo

$$x_S = -\frac{c_1}{a_1}, \quad y_S = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{B^2 - 4AC},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} A &= a_1^2, \\ B &= a_1^2b_2, \\ C &= c_1^2 - a_1a_2c_1 + a_1^2c_2. \end{aligned}$$

5. Sjecišta dviju kružnica
Neka su jednadžbe dviju kružnica

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Oduzmemo li drugu jednadžbu od prve, dobivamo jednadžbu pravca

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

koji je potencijala dviju zadanih kružnica pa se ova konstrukcija svodi na prethodnu. □

S obzirom na to da ravnalom konstruiramo pravce, a šestarom kružnice, lako zaključujemo da je problem konstrukcije ravnalom i šestarom rješiv ako i samo ako se može svesti na rješavanje niza linearnih i kvadratnih jednadžbi. Dakle, prevedemo li geometrijski problem na algebarski jezik, možemo zaključiti:

Pravilan n-terokut može se konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako se jednadžba $z^n - 1 = 0$ *može riješiti nizom linearnih i kvadratnih jednadžbi.*

Znamo da vrijedi

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1\right).$$

Očito je 1 uvijek jedan n-ti korijen iz jedinice, odnosno rješenje jednadžbe $z^n - 1 = 0$. Preostalih $n-1$ vrhova pravilnih mnogokuta dobivamo rješavanjem jednadžbe

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0. \tag{2.1}$$

Rješavanjem jednadžbe (2.1) za slučajeve $n = 3$ i $n = 4$ dokazat ćemo **rješivost konstrukcija pravilnog trokuta** te **pravilnog četverokuta**.

Konstrukcija pravilnog trokuta

Uvrštavanjem $n = 3$ u jednadžbu (2.1), dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

čija rješenja

$$z_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

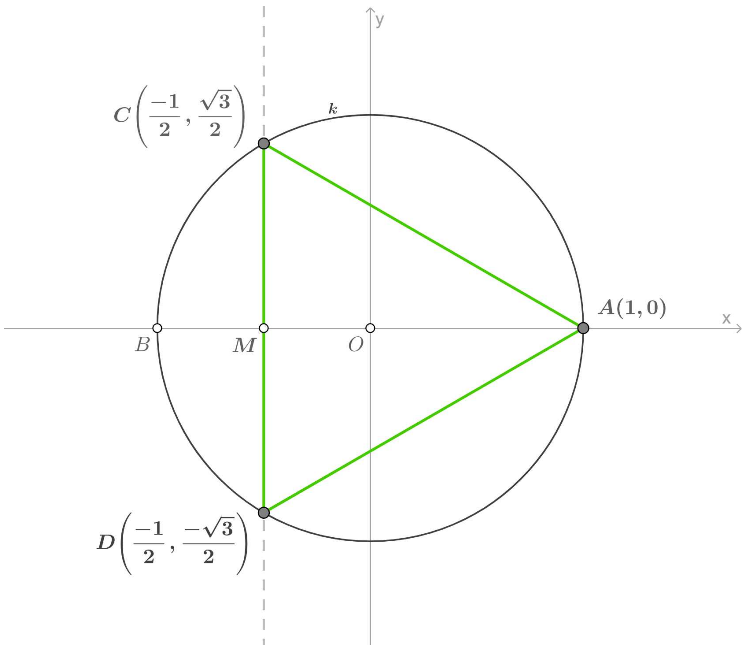
znamo elementarno konstruirati.

Geometrijska konstrukcija pravilnog, tj. jednakostraničnog trokuta vrlo je jednostavna. Neka je $k(O,1)$ jedinična kružnica sa središtem u ishodištu te neka je $\overline{AB}$ promjer te kružnice koji leži na osi x. Očito točka $A(1,0)$ odgovara prvom vrhu pravilnog trokuta (slika 2.2).

Neka je M polovište dužine $\overline{OB}$. Povucimo okomicu na $\overline{AB}$ kroz točku M koja siječe kružnicu k u točkama C i D. Budući da je k jedinična kružnica i M polovište dužine $\overline{OB}$, iz pravokutnog trokuta $\triangle OMC$ slijedi

$$|MC| = \sqrt{|OC|^2 - |OM|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Analogno, $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Uzmemo li u obzir predznake koji predstavljaju položaj točaka u koordinatnom sustavu, imamo da je $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, što su upravo koordinate preostala dva vrha pravilnog trokuta.



Slika 2.2: Konstrukcija pravilnog trokuta

Konstrukcija pravilnog četverokuta

Uvrštavanjem $n = 4$ u jednadžbu (2.1), dobivamo kubnu jednadžbu

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

koju možemo zapisati u obliku umnoška linearne i kvadratne jednadžbe

$$(z + 1)\left(z^2 + 1\right) = 0,$$

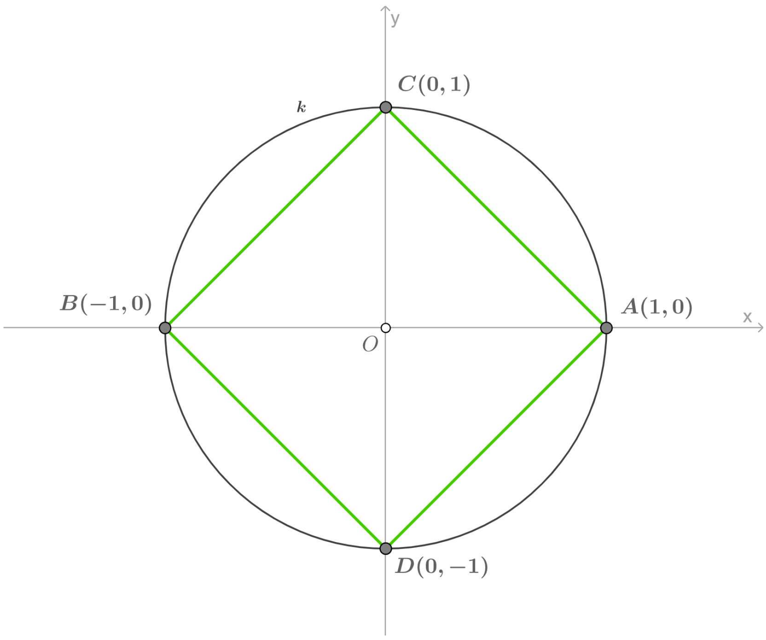
iz čega slijede rješenja

$$z_1 = -1, \quad z_{2,3} = \pm i$$

koja opet znamo elementarno konstruirati.

Zapišemo li rješenja jednadžbe $z^4 - 1 = 0$ u obliku uređenih parova, dobit ćemo točke $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ i $(0, -1)$ čija je geometrijska konstrukcija trivijalna.

Neka je ponovno $k(O, 1)$ jedinična kružnica sa središtem u ishodištu i neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ njena dva promjera koja leže na osima x i y, redom. Tada su očito točke A, B, C i D vrhovi pravilnog četverokuta, tj. kvadrata (slika 2.3).



Slika 2.3: Konstrukcija pravilnog četverokuta

2.4 Konstrukcija pravilnog peterokuta

Vrhovi pravilnog peterokuta rješenja su jednadžbe

$$z^5 - 1 = 0,$$

odnosno

$$(z - 1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0.$$

Kako je $z_0 = 1$ trivijalno rješenje, treba riješiti jednadžbu

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Podijelimo li cijelu jednadžbu sa z^2, dobivamo

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Lijevu stranu možemo grupirati u obliku

$$\left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Uvođenjem supstitucije $x = z + \frac{1}{z}$ gornja jednadžba prelazi u

$$x^2 + x - 1 = 0$$

čija su rješenja

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Iz $x = z + \frac{1}{z}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $z^2 - xz + 1 = 0$ čija su rješenja

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}.$$

Uvrštavanjem x_1 i x_2 dobivamo rješenja

$$z_{1,4} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad z_{2,3} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

koja znamo elementarno konstruirati.

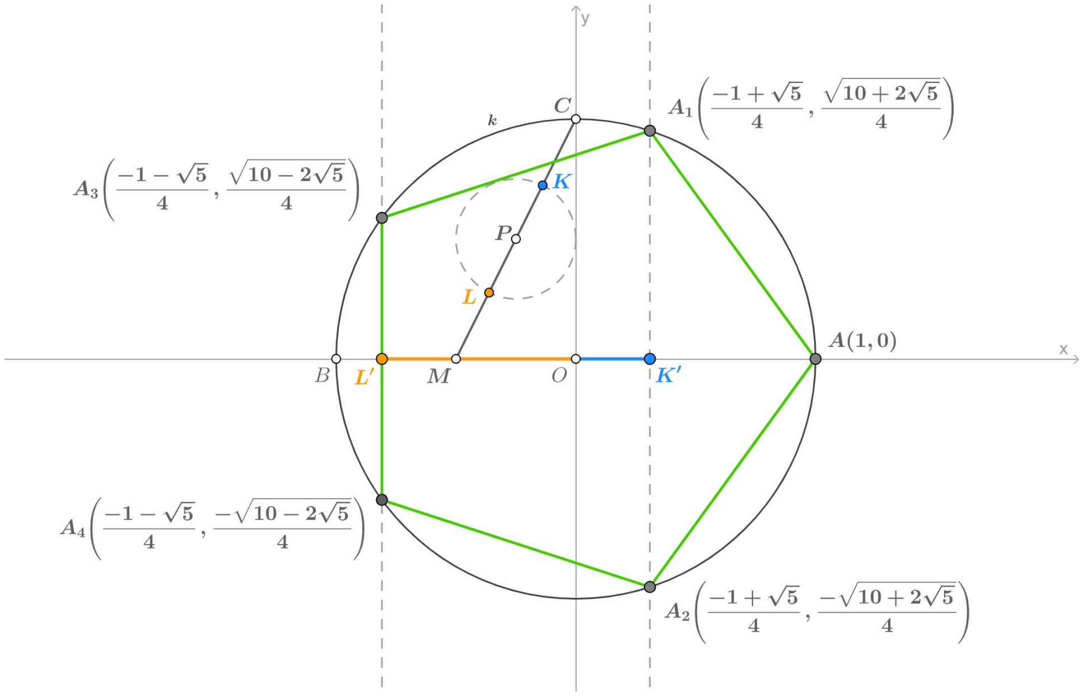
Neka je $k(O, 1)$ jedinična kružnica sa središtem u ishodištu te neka je $\overline{AB}$ promjer te kružnice koji leži na osi x. Očito točka $A(1, 0)$ odgovara prvom vrhu pravilnog peterokuta (slika 2.4).

Neka je točka C takva da je $\overline{OC}$ polumjer kružnice koji leži na pozitivnom dijelu osi y i neka je M polovište dužine $\overline{OB}$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle MOC$ slijedi

$$|CM| = \sqrt{|OC|^2 + |OM|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Neka je P polovište dužine $\overline{CM}$ i $k_2\left(P, \frac{1}{4}\right)$ kružnica sa središtem u P polumjera $\frac{1}{4}$. Neka su K i L sjecišta kružnice k_2 i dužine $\overline{CM}$ takva da je $|CK| < |CL|$. Tada je

$$|CK| = |CP| - |PK| = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4},$$
$$|CL| = |CP| + |PL| = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}.$$



Slika 2.4: Konstrukcija pravilnog peterokuta

Neka su K' i L' točke na osi x takve da je $|OK'| = |CK|$ i $|OL'| = |CL|$ te vrijedi $|K'A| < |L'A|$. Povucimo okomicu kroz K' na $\overline{AB}$ i označimo sjecišta te okomice s kružnicom k sa A_1 i A_2. Slično, povucimo okomicu kroz L' na $\overline{AB}$ i označimo sjecišta te okomice s kružnicom k sa A_3 i A_4. Iz pravokutnih trokuta $\triangle OK'A_1$ i $\triangle OL'A_3$ slijedi

$$|K'A_1| = \sqrt{|OA_1|^2 - |OK'|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$
$$|L'A_3| = \sqrt{|OA_3|^2 - |OL'|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Analogno, $|K'A_2| = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ i $|L'A_4| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Uzmemo li u obzir odgovarajuće predznake za položaj točaka u koordinatnom sustavu, slijedi da su upravo točke A_1, A_2, A_3 i A_4 preostala četiri vrha pravilnog peterokuta.

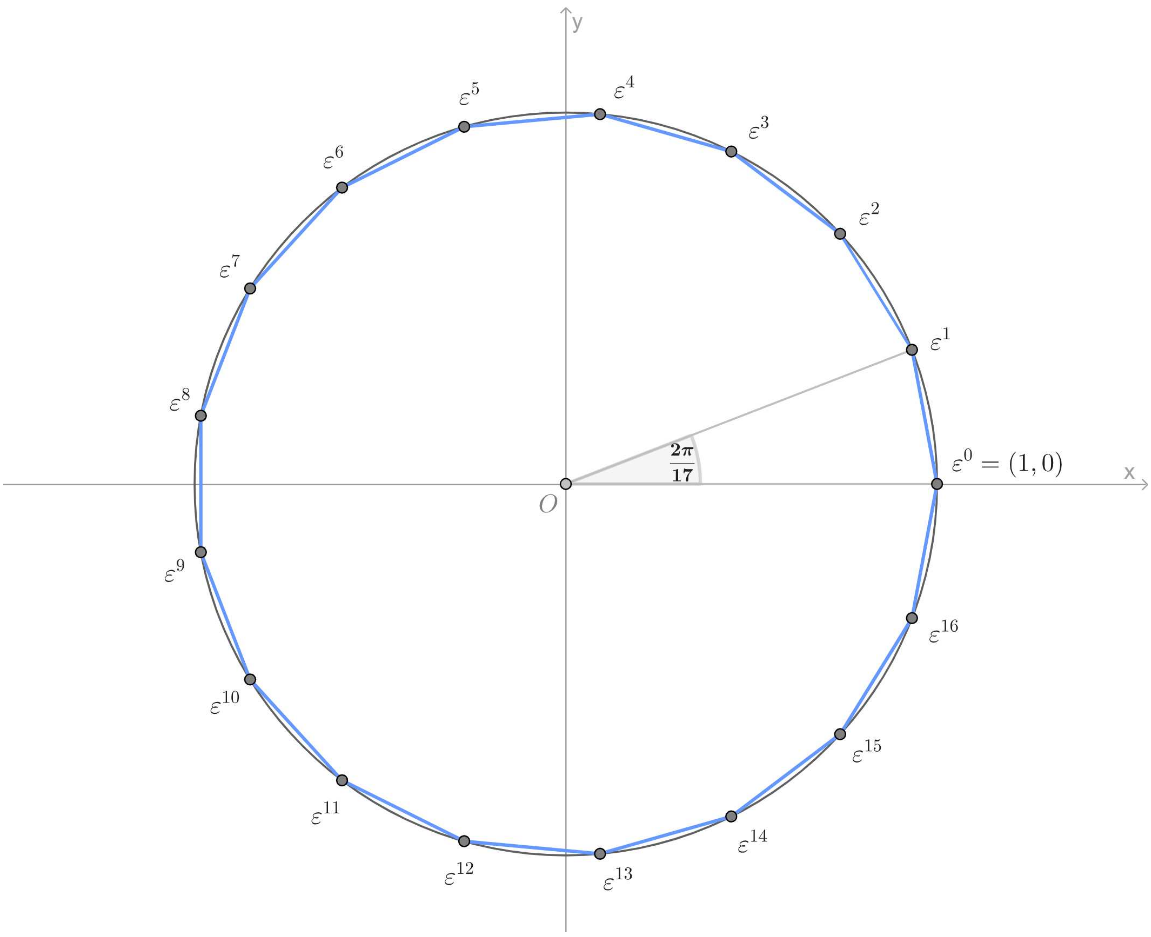
2.5 Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Vrhovi pravilnog sedamnaesterokuta (slika 2.5) rješenja su jednadžbe

$$z^{17} - 1 = 0,$$

odnosno

$$(z-1)\left(z^{16} + z^{15} + z^{14} + z^{13} + z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^{9} + z^{8} + z^{7} + z^{6} + z^{5} + z^{4} + z^{3} + z^{2} + z + 1\right) = 0.$$



Slika 2.5: Vrhovi pravilnog sedamnaesterokuta

Kako je $z_0 = 1$ trivijalno rješenje, treba riješiti jednadžbu

$$z^{16} + z^{15} + z^{14} + z^{13} + z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \quad (2.2)$$

Podijelimo li cijelu jednadžbu sa z^8, dobivamo

$$z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^8} = 0.$$

Uvođenjem supstitucije $z + \frac{1}{z} = x$ imamo

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{1}{z^2} &= x^2 - 2, & z^3 + \frac{1}{z^3} &= x^3 - 3x, \\ z^4 + \frac{1}{z^4} &= x^4 - 4x^2 + 2, & z^5 + \frac{1}{z^5} &= x^5 - 5x^3 + 5x, \\ z^6 + \frac{1}{z^6} &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2, & z^7 + \frac{1}{z^7} &= x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x, \\ z^8 + \frac{1}{z^8} &= x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2, \end{aligned}$$

pa prethodna jednadžba postaje

$$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 = 0. \quad (2.3)$$

Znamo da su $z_k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}$, $k = 1, \ldots, 16$, rješenja jednadžbe (2.2), pa zbog prethodne supstitucije $x = z + \frac{1}{z}$ vrijedi

$$\begin{aligned} x_k = z_k + \frac{1}{z_k} = z_k + \overline{z_k} &= \left(\cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{2k\pi}{17} - i\sin\frac{2k\pi}{17}\right) \\ &= 2\cos\frac{2k\pi}{17}, \quad k = 1, \ldots, 16, \end{aligned} \quad (2.4)$$

odnosno znamo da su rješenja jednadžbe (2.3):

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\cos\frac{2\pi}{17} = 2\cos\frac{32\pi}{17}, & x_2 &= 2\cos\frac{4\pi}{17} = 2\cos\frac{30\pi}{17}, \\ x_3 &= 2\cos\frac{6\pi}{17} = 2\cos\frac{28\pi}{17}, & x_4 &= 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\cos\frac{26\pi}{17}, \\ x_5 &= 2\cos\frac{10\pi}{17} = 2\cos\frac{24\pi}{17}, & x_6 &= 2\cos\frac{12\pi}{17} = 2\cos\frac{22\pi}{17}, \\ x_7 &= 2\cos\frac{14\pi}{17} = 2\cos\frac{20\pi}{17}, & x_8 &= 2\cos\frac{16\pi}{17} = 2\cos\frac{18\pi}{17}. \end{aligned}$$

Promotrimo brojeve

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_4 + x_8, \quad y_2 = x_3 + x_5 + x_6 + x_7.$$

Odredimo kvadratnu jednadžbu čija su rješenja y_1 i y_2. Zapišimo tu jednadžbu u obliku

$$y^2 + a_1 y + a_0 = 0.$$

Kako su $x_1, \dots, x_8$ sva rješenja jednadžbe (2.3), prema Vièteovim formulama vrijedi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = -1,$$

odnosno

$$y_1 + y_2 = -1.$$

Iz (2.4) slijedi

$$\begin{aligned} x_i x_j &= 2\cos\frac{2i\pi}{17} \cdot 2\cos\frac{2j\pi}{17} \\ &= 2\left(\cos\frac{2(i+j)\pi}{17} + \cos\frac{2(i-j)\pi}{17}\right), \end{aligned}$$

što možemo kraće zapisati kao

$$x_i x_j = \begin{cases} 2 + x_{2i}, & \text{za } i = j, \\ x_{i+j} + x_{|i-j|}, & \text{za } i \neq j, \end{cases} \tag{2.5}$$

pri čemu zbroj i i j računamo modulo 17, a apsolutnu vrijednost razlike koristimo jer je kosinus parna funkcija. Također, vrijedi

$$x_k = x_{17-k}. \tag{2.6}$$

Koristeći (2.5) i (2.6), izračunajmo $y_1 y_2$:

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= (x_1 + x_2 + x_4 + x_8)(x_3 + x_5 + x_6 + x_7) \\ &= x_1x_3 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_1x_7 + x_2x_3 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 \\ &\quad + x_3x_4 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_3x_8 + x_5x_8 + x_6x_8 + x_7x_8 \\ &= x_4 + x_2 + x_6 + x_4 + x_7 + x_5 + x_8 + x_6 + x_5 + x_1 + x_7 + x_3 + x_8 + x_4 + x_9 + x_5 \\ &\quad + x_7 + x_1 + x_9 + x_1 + x_{10} + x_2 + x_{11} + x_3 + x_{11} + x_5 + x_{13} + x_3 + x_{14} + x_2 + x_{15} + x_1 \\ &= 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 2x_9 + x_{10} + 2x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \\ &= 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = -4. \end{aligned}$$

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -1, \\ y_1 y_2 &= -4, \end{aligned}$$

to y_1 i y_2 zadovoljavaju jednadžbu

$$t^2 + t - 4 = 0,$$

čija su rješenja

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Odredimo koje je od njih $y_1 = x_1 + x_2 + x_4 + x_8$, a koje $y_2 = x_3 + x_5 + x_6 + x_7$. Iz (2.4) znamo da je

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_4 + x_8 \\ &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right) \\ &= 4\left(\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{12\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\right) \\ &= 4\left(\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\right). \end{aligned}$$

Kako je kosinus padajuća funkcija na $[0, \frac{\pi}{2}]$, vrijedi

$$1 = \cos 0 > \cos\frac{\pi}{17} > \cos\frac{3\pi}{17} > \cos\frac{4\pi}{17} > \cos\frac{5\pi}{17} > \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

pa slijedi da je $y_1 > 0$. Dakle,

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}. \tag{2.7}$$

Nastavljamo postupak sa y_1, tj. zapišimo ga u obliku

$$y_1 = u_1 + u_2,$$

gdje je

$$u_1 = x_1 + x_4, \quad u_2 = x_2 + x_8.$$

Slično kao prije, vrijedi da je

$$\begin{aligned} u_1u_2 &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_8) \\ &= x_1x_2 + x_1x_8 + x_2x_4 + x_4x_8 \\ &= x_3 + x_1 + x_9 + x_7 + x_6 + x_2 + x_{12} + x_4 \\ &= x_1 + x_2 + x_4 + x_8 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \\ &= y_1 + y_2 = -1, \end{aligned}$$

pa su u_1 i u_2 rješenja jednadžbe

$$t^2 - y_1t - 1 = 0.$$

Iz $u_1 = x_1 + x_4$ slijedi

$$u_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17} > 0,$$

pa je

$$u_1 = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4}}{2}, \quad u_2 = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 + 4}}{2}. \tag{2.8}$$

Neka je sada

$$y_2 = u_3 + u_4,$$

gdje je

$$u_3 = x_3 + x_5, \quad u_4 = x_6 + x_7.$$

Analogno,

$$\begin{aligned} u_3u_4 &= (x_3 + x_5)(x_6 + x_7) \\ &= x_3x_6 + x_3x_7 + x_5x_6 + x_5x_7 \\ &= x_9 + x_3 + x_{10} + x_4 + x_{11} + x_1 + x_{12} + x_2 \\ &= x_1 + x_2 + x_4 + x_8 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \\ &= y_1 + y_2 = -1, \end{aligned}$$

pa su u_3 i u_4 rješenja jednadžbe

$$t^2 - y_2t - 1 = 0.$$

Iz $u_3 = x_3 + x_5$ slijedi

$$\begin{aligned} u_3 &= 2\cos\frac{6\pi}{17} + 2\cos\frac{10\pi}{17} \\ &= 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17} > 0, \end{aligned}$$

pa je

$$u_3 = \frac{y_2 + \sqrt{y_2^2 + 4}}{2}, \quad u_4 = \frac{y_2 - \sqrt{y_2^2 + 4}}{2}. \tag{2.9}$$

Konačno, napišimo u_1 u obliku

$$u_1 = x_1 + x_4.$$

Očito je

$$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17} > 2\cos\frac{8\pi}{17} = x_4. \tag{2.10}$$

Nadalje,

$$x_1 x_4 = x_3 + x_5 = u_3,$$

pa su x_1 i x_4 rješenja jednadžbe

$$t^2 - u_1 t + u_3 = 0. \tag{2.11}$$

Odavde zbog $x_1 > x_4$ slijedi

$$x_1 = \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 - 4u_3}}{2}, \quad x_4 = \frac{u_1 - \sqrt{u_1^2 - 4u_3}}{2}. \tag{2.12}$$

Iz (2.4) slijedi da je

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}x_1.$$

Kada u to uvrstimo (2.12), dobivamo

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{4}\left(u_1 + \sqrt{u_1^2 - 4u_3}\right). \tag{2.13}$$

Uzmemo li sada u obzir (2.9) i (2.8), imamo

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{8}\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4} + \sqrt{\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4}\right)^2 - 8\left(y_2 + \sqrt{y_2^2 + 4}\right)}\right). \tag{2.14}$$

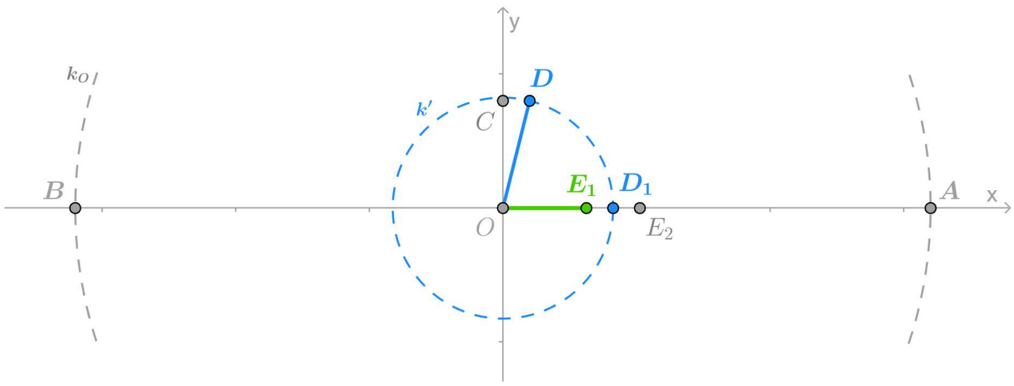
Konačno, uvrštavanjem (2.7) dobivamo

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}\right), \tag{2.15}$$

a taj izraz znamo elementarno konstruirati.

Neka je $k_O(O, 16)$ kružnica sa središtem u ishodištu polumjera 16 te neka je $\overline{AB}$ promjer te kružnice koji leži na osi x (slika 2.6). Točke $O(0,0), C(0,4)$ i $D(1,4)$ vrhovi su pravokutnog trokuta $\triangle OCD$ iz kojeg slijedi

$$|OD| = \sqrt{|OC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$



Slika 2.6: Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Neka je $k'(O, |OD|)$ kružnica sa središtem u ishodištu polumjera $|OD| = \sqrt{17}$. Označimo sa D_1 sjecište kružnice k' s dužinom $\overline{OA}$. Tada je $|OD_1| = \sqrt{17}$. Neka su E_1 i E_2 točke na osi x takve da je $|E_1D_1| = |D_1E_2| = 1$ i $|OE_1| < |OE_2|$. Tada je $|E_1E_2| = 2$ i

$$|OE_1| = \sqrt{17} - 1.$$

Neka je $k_{E_1}(E_1, |OD|)$ kružnica sa središtem E_1 polumjera $|OD| = \sqrt{17}$ (slika 2.7). Označimo sa F sjecište kružnice k_{E_1} s dužinom $\overline{OB}$. Tada je $|FE_1| = \sqrt{17}$. Neka je G polovište dužine $\overline{FE_2}$ i $k_G(G, |GE_2|)$ kružnica sa središtem G polumjera $|GE_2|$. Povucimo okomicu na os x u točki E_1 i označimo sa H sjecište te okomice s kružnicom k_G. Tada je $\triangle FHE_2$ pravokutan trokut nad promjerom $\overline{FE_2}$ kružnice k_G pa vrijedi

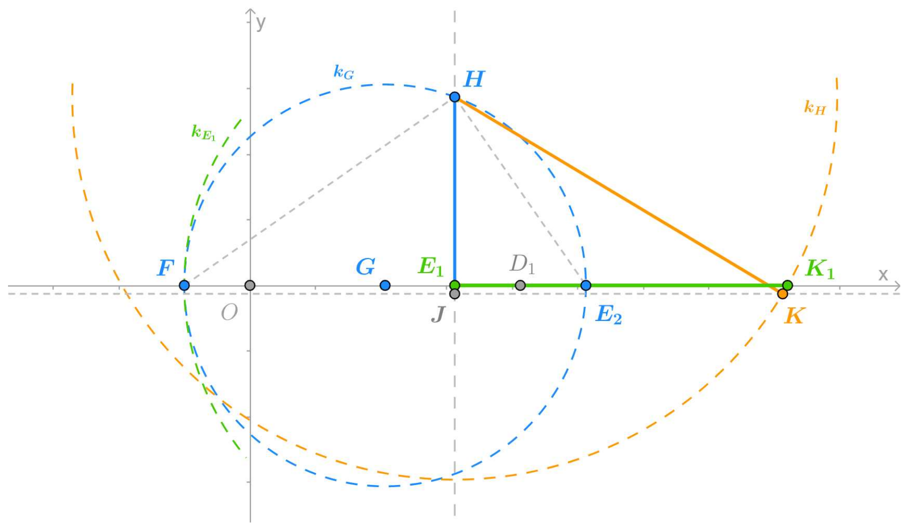
$$|E_1H| = \sqrt{|E_1E_2||E_1F|} = \sqrt{2\sqrt{17}}.$$

Neka je točka J na okomici kroz točku E_1 takva da je $|HJ| = 3$ i $|E_1J| < |E_1H|$. Povucimo paralelu sa osi x kroz točku J i neka je točka K na toj paraleli takva da je $|JK| = 5$ i $|OJ| < |OK|$. Tada je $\triangle HJK$ pravokutan trokut iz kojeg slijedi

$$|HK| = \sqrt{|HJ|^2 + |JK|^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

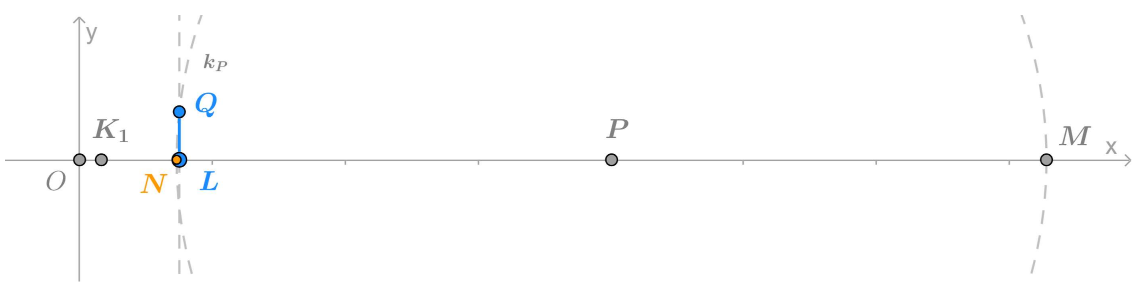
Neka je $k_H(H, |HK|)$ kružnica sa središtem H polumjera $|HK|$. Označimo sa K_1 sjecište kružnice k_H s dužinom $\overline{OA}$. Tada je $|HK| = |HK_1|$ i $\triangle HE_1K_1$ je pravokutan trokut iz kojeg slijedi

$$|E_1K_1| = \sqrt{|HK_1|^2 - |E_1H|^2} = \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.$$



Slika 2.7: Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Neka su točke L, M i N na osi x takve da je $|K_1L| = 17+3\sqrt{17}$ pri čemu je $|OK_1| < |OL|$, $|LM| = 170+38\sqrt{17}$ pri čemu je $|OL| < |OM|$ i $|NL| = 1$ pri čemu je $|ON| < |OL|$ (slika 2.8).



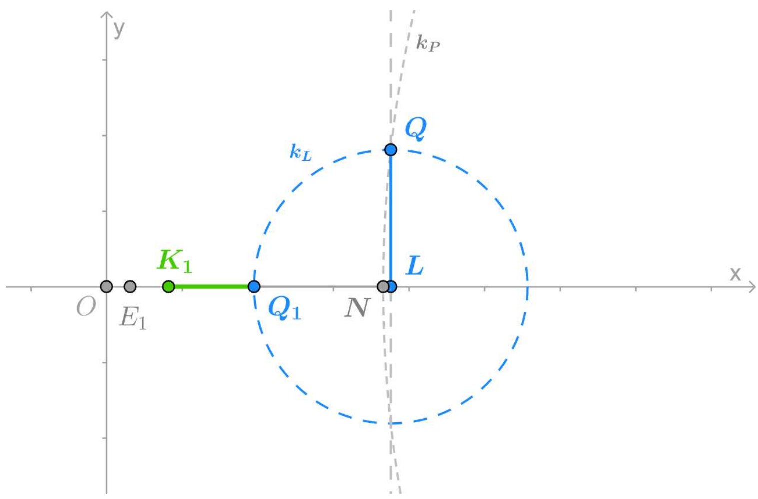
Slika 2.8: Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Neka je P polovište dužine $\overline{NM}$ i $k_P(P, |PM|)$ kružnica sa središtem P polumjera $|PM|$. Povucimo okomicu na os x u točki L i označimo sa Q sjecište te okomice s kružnicom k_P. Tada je $\triangle NQM$ pravokutan trokut nad promjerom $\overline{NM}$ kružnice k_P iz čega slijedi

$$|LQ| = \sqrt{|NL||LM|} = \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}.$$

Neka je $k_L(L, |LQ|)$ kružnica sa središtem L polumjera $|LQ|$ (slika 2.9). Označimo sa Q_1 sjecište kružnice k_L s dužinom $\overline{K_1 L}$. Tada je $|LQ_1| = |LQ|$ i

$$|K_1 Q_1| = |K_1 L| - |LQ_1| = 17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}.$$



Slika 2.9: Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Neka je točka R na osi x takva da je $|RK_1| = 1$, pri čemu je $|OR| < |OK_1|$ (slika 2.10). Neka je S polovište dužine $\overline{RQ_1}$ i $k_S(S, |SQ_1|)$ kružnica sa središtem S polumjera $|SQ_1|$. Povucimo okomicu na os x kroz točku K_1 i označimo sa T sjecište te okomice s kružnicom k_S. Tada je $\triangle RTQ_1$ pravokutan trokut nad promjerom $\overline{RQ_1}$ kružnice k_S iz čega slijedi

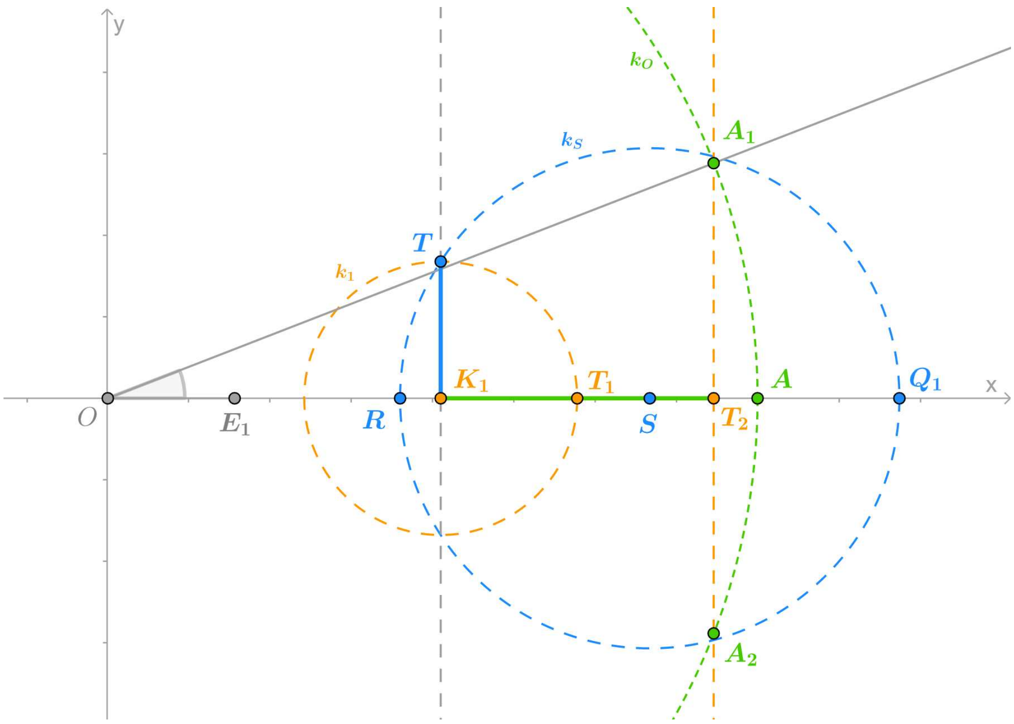
$$|K_1 T| = \sqrt{|RK_1||K_1 Q_1|} = \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}.$$

Neka su točke T_1 i T_2 na osi x takve da je $|K_1 T_1| = |T_1 T_2| = |K_1 T|$, pri čemu je $|OK_1| < |OT_1| < |OT_2|$. Povucimo okomicu na os x kroz točku T_2. Označimo sa A_1 i A_2 sjecišta te okomice s kružnicom $k_O(O, 16)$. Tada je

$$
\begin{aligned}
|OT_2| &= |OE_1| + |E_1K_1| + |K_1T_1| + |T_1T_2| \\
&= \sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}} \\
&= 16\cos\frac{2\pi}{17},
\end{aligned}
$$

tj. $\overline{AA_1}$ je stranica pravilnog sedamnaesterokuta.

Prisjetimo se da smo na početku konstrukcije uzeli kružnicu k_O polumjera 16. Neka je $k(O, 1)$ jedinična kružnica sa središtem u ishodištu. Sjecišta kružnice k s dužinama $\overline{OA}$ i $\overline{OA_1}$ bit će točno rješenja ε^0 i ε^1 jednadžbe $z^{17} - 1 = 0$. Preostale vrhove lako dobijemo prenošenjem odgovarajućeg kuta ili stranice pravilnog sedamnaesterokuta.



Slika 2.10: Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

2.6 Konstrukcije još nekih pravilnih n-terokuta

Do sada smo dokazali da se elementarno mogu konstruirati pravilni trokut, četverokut, peterokut i sedamnaesterokut. Njihovi središnji kutovi jednaki su $\frac{2\pi}{n}$ za $n = 3, 4, 5$ i 17, redom. Uzastopnim raspolavljanjem tih središnjih kutova, dobivamo središnje kutove

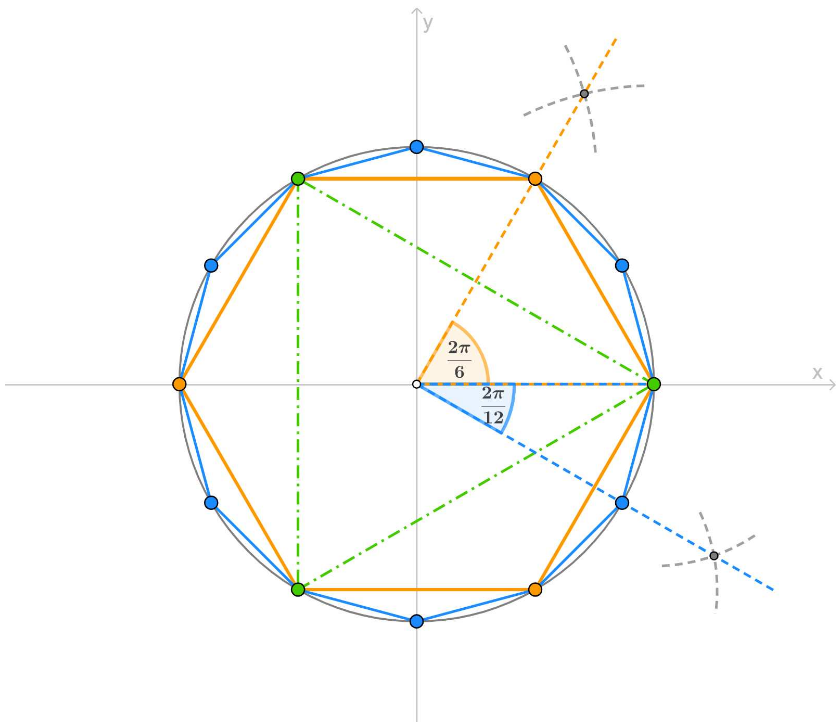
$$\frac{2\pi}{n \cdot 2^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

iz čega slijedi da se elementarno mogu konstruirati i pravilni n-terokuti za

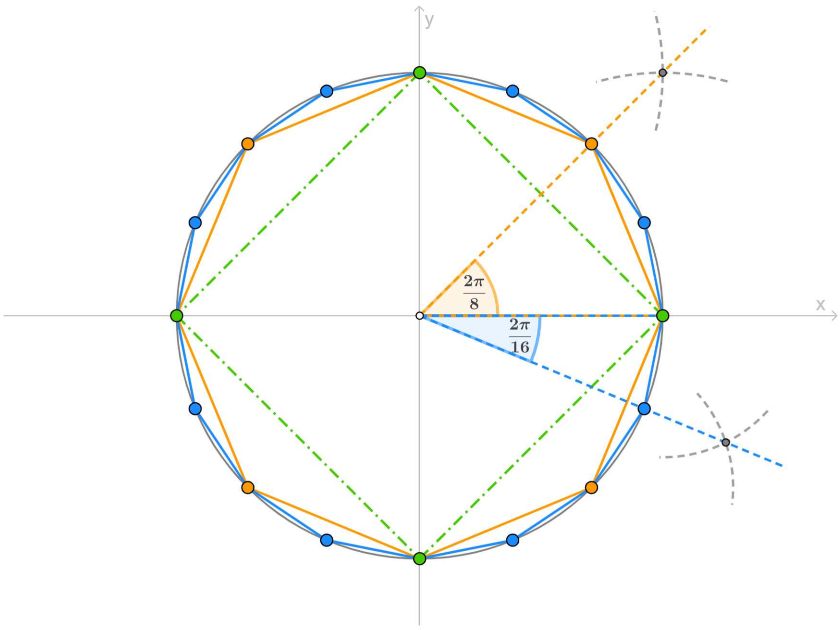
$$n = 3 \cdot 2^k, \quad n = 4 \cdot 2^k, \quad n = 5 \cdot 2^k, \quad n = 17 \cdot 2^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posebno, elementarno se mogu konstruirati pravilni šesterokut i dvanaesterokut (slika 2.11), osmerokut i šesnaesterokut (slika 2.12) te deseterokut (slika 2.13).

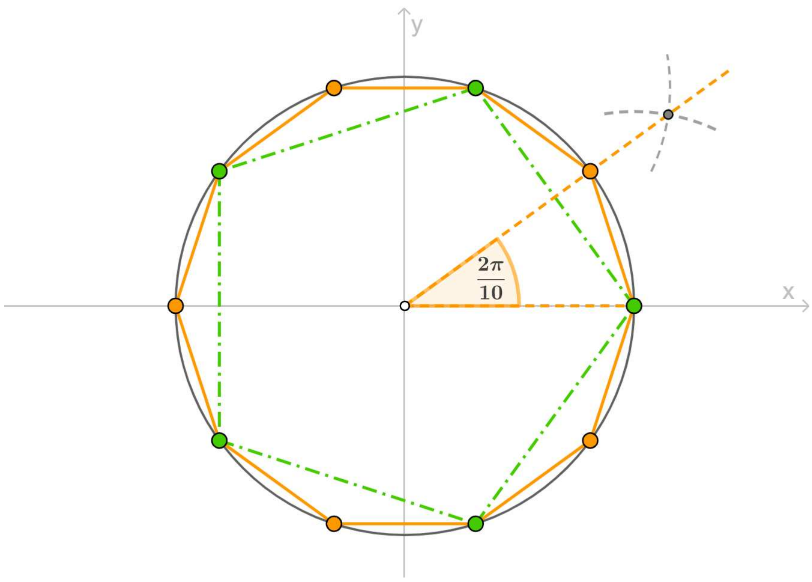
Napomenimo da je pravilni šesterokut moguće puno jednostavnije konstruirati, međutim ovdje pokazujemo kako se pravilni šesterokut može dobiti iz već konstruiranog pravilnog trokuta.



Slika 2.11: Konstrukcija pravilnog šesterokuta i dvanaesterokuta



Slika 2.12: Konstrukcija pravilnog osmerokuta i šesnaesterokuta



Slika 2.13: Konstrukcija pravilnog deseterokuta

Do pred kraj 18. stoljeća bile su poznate samo konstrukcije pravilnog trokuta i peterokuta. Problem konstrukcija pravilnih n-terokuta u potpunosti je riješio Gauss[4] sljedećom tvrdnjom:

Pravilni n-terokut može se konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako je n potencija od 2 ili je $n = 2^r p_1 p_2 \dots p_s$, gdje je $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{N}$, a $p_1, \dots, p_s$ su različiti Fermatovi prosti brojevi.

Fermatovi brojevi su oblika $2^{2^k} + 1,\ k \in \mathbb{N}$, a do danas je poznato samo pet prostih među njima: $3, 5, 17, 257, 65537$ (redom za $k = 0, 1, 2, 3, 4$).

Za dokaz prethodne tvrdnje potrebno je ozbiljnije poznavanje algebre i njime se nećemo baviti u ovome radu (dokaz se može pronaći u [9]).

U ovom poglavlju vidjeli smo kako konstruirati pravilni n-terokut ako je n jedan od prva tri Fermatova prosta broja. Kako se u Gaussovom teoremu pojavljuje produkt različitih Fermatovih prostih brojeva, prirodno je pitati se može li se konstruirati pravilni pq-terokut ako je moguće konstruirati pravilni p-terokut i/ili pravilni q-terokut.

Teorem 2.6.1. *Neka su p i q relativno prosti prirodni brojevi te $n = pq$. Pravilni n-terokut moguće je elementarno konstruirati ako i samo ako je moguće elementarno konstruirati pravilni p-terokut i pravilni q-terokut.*

Dokaz. Ako je pravilni n-terokut konstruktibilan, tada znamo konstruirati središnji kut

$$\varphi = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{pq},$$

odnosno znamo konstruirati

$$p \cdot \varphi = \frac{2\pi}{q} \quad \text{i} \quad q \cdot \varphi = \frac{2\pi}{p}.$$

Dakle, n jednakih dijelova na koje smo podijelili kružnicu možemo grupirati u p grupa od po q dijelova ili u q grupa od po p dijelova.

Obratno, pretpostavimo da znamo konstruirati pravilni p-terokut i pravilni q-terokut. Neka su

$$z_j = \cos\frac{2j\pi}{p} + i\sin\frac{2j\pi}{p}, \quad j = 0, \dots, p-1,$$
$$z_h = \cos\frac{2h\pi}{q} + i\sin\frac{2h\pi}{q}, \quad h = 0, \dots, q-1,$$

[4]Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.), njemački matematičar, fizičar, astronom i geodet

rješenja ciklotomskih jednadžbi

$$z^p - 1 = 0, \quad z^q - 1 = 0,$$

redom. Tada je

$$\begin{aligned} z_j z_h &= \left(\cos\frac{2j\pi}{p} + i\sin\frac{2j\pi}{p}\right)\left(\cos\frac{2h\pi}{q} + i\sin\frac{2h\pi}{q}\right) \\ &= \cos 2\pi\left(\frac{j}{p} + \frac{h}{q}\right) + i\sin 2\pi\left(\frac{j}{p} + \frac{h}{q}\right) \\ &= \cos 2\pi\left(\frac{jq + hp}{pq}\right) + i\sin 2\pi\left(\frac{jq + hp}{pq}\right). \end{aligned}$$

Kako su p i q relativno prosti, postoje $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$aq + bp = 1.$$

Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Definiramo $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ i $h \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ sa

$$j \equiv ak \pmod{p} \quad \text{i} \quad h \equiv bk \pmod{q}.$$

Tada vrijedi

$$p \mid j - ak \quad \text{i} \quad q \mid h - bk,$$

pa

$$pq \mid jq - akq \quad \text{i} \quad pq \mid hp - bkp,$$

odakle slijedi

$$pq \mid (jq + hp) - k(aq + bp),$$

odnosno

$$pq \mid (jq + hp) - k.$$

Konačno,

$$jq + hp \equiv k \pmod{pq}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} z_j z_h &= \cos\frac{2k\pi}{pq} + i\sin\frac{2k\pi}{pq} \\ &= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = z_k. \end{aligned}$$

Različite z_k dobijemo za $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Dakle, ako q puta konstruiramo vrhove z_j pravilnog p-terokuta i to tako da svaki put započnemo konstrukciju od vrha z_h pravilnog q-terokuta za različite $h = 0, \ldots, q-1$, dobit ćemo sve vrhove pravilnog pq-terokuta, tj. n-terokuta.

Također, ako p puta konstruiramo vrhove z_h pravilnog q-terokuta i to tako da svaki put započnemo konstrukciju od vrha z_j pravilnog p-terokuta za različite $j = 0, \ldots, p-1$, dobit ćemo opet sve vrhove pravilnog pq-terokuta, tj. n-terokuta. □

Konstrukcija pravilnog petnaesterokuta

Promotrimo pravilan 15-erokut. Broj $n = 15$ možemo rastaviti na proste faktore $p = 3$ i $q = 5$. Znamo da su vrhovi pravilnog trokuta, peterokuta i petnaesterokuta redom

$$z_j = \cos\frac{2j\pi}{3} + i\sin\frac{2j\pi}{3}, \quad j = 0, 1, 2,$$

$$z_h = \cos\frac{2h\pi}{5} + i\sin\frac{2h\pi}{5}, \quad h = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$z_j z_h = \cos\frac{2(jq+hp)\pi}{15} + i\sin\frac{2(jq+hp)\pi}{15}.$$

Prikažimo tablično brojeve

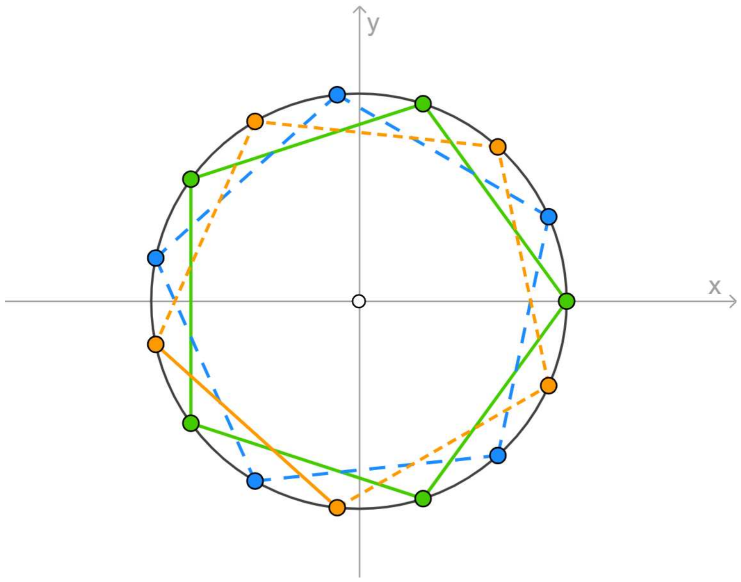
$$jq + hp \pmod{15}, \quad p = 3, \ q = 5.$$

$h\backslash j$	0	1	2
0	$0\cdot5+0\cdot3=0$	$1\cdot5+0\cdot3=5$	$2\cdot5+0\cdot3=10$
1	$0\cdot5+1\cdot3=3$	$1\cdot5+1\cdot3=8$	$2\cdot5+1\cdot3=13$
2	$0\cdot5+2\cdot3=6$	$1\cdot5+2\cdot3=11$	$2\cdot5+2\cdot3=16 \pmod{15}=1$
3	$0\cdot5+3\cdot3=9$	$1\cdot5+3\cdot3=14$	$2\cdot5+3\cdot3=19 \pmod{15}=4$
4	$0\cdot5+4\cdot3=12$	$1\cdot5+4\cdot3=17 \pmod{15}=2$	$2\cdot5+4\cdot3=22 \pmod{15}=7$

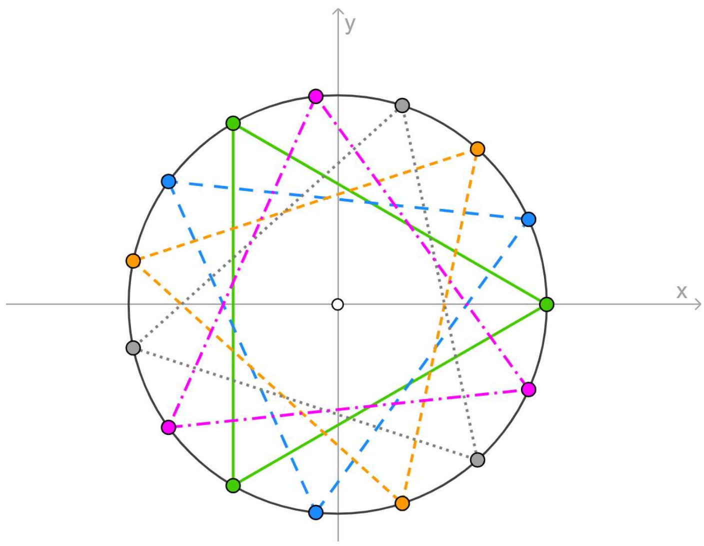
Vidimo da smo dobili upravo sve vrijednosti $k = 0, \ldots, 14$.

Tri stupca predstavljaju tri pravilna peterokuta čiji su početni vrhovi u vrhovima pravilnog trokuta (slika 2.14).

Pet redaka predstavlja pet pravilnih trokuta čiji su početni vrhovi u vrhovima pravilnog peterokuta (slika 2.15).



Slika 2.14: Konstrukcija pravilnog petnaesterokuta iz pravilnog trokuta



Slika 2.15: Konstrukcija pravilnog petnaesterokuta iz pravilnog peterokuta

Poglavlje 3

Konstrukcije pravilnih mnogokuta trisekcijom kuta

Prije izvođenja konstrukcija potrebno je navesti koja sredstva dopuštamo pri konstrukciji. To može biti samo ravnalo, samo šestar, ravnalo i šestar, a moguće je dodatno koristiti i umetanje pravca, konusne presjeke i dr.

U prethodnom poglavlju najprije su izvedene elementarne konstrukcije pravilnih n-terokuta za $n = 3, 4, 5$ i 17, a zatim iz tih konstrukcija i elementarne konstrukcije pravilnih mnogokuta za $n = 6, 8, 10, 12$ i 16.

Iz Gaussovog teorema slijedi da nije svaki pravilni n-terokut elementarno konstruktibilan. Preciznije, Gaussov teorem kaže da se pravilni n-terokut može elementarno konstruirati ako i samo i ako je n potencija broja 2 ili je n produkt potencije broja 2 i konačno mnogo Fermatovih prostih brojeva. Posebno, ako je n neparan, tada je moguće elementarno konstruirati pravilni n-terokut ako i samo ako je n Fermatov prost broj ili produkt Fermatovih prostih brojeva.

Kako $7, 9$ i 13 nisu Fermatovi prosti brojevi ni produkti takvih brojeva, iz Gaussovog teorema slijedi da pravilan sedmerokut, deveterokut i trinaesterokut nije moguće elementarno konstruirati.

U ovom poglavlju dokazat ćemo da je navedene mnogokute moguće konstruirati uz pomoć trisekcije kuta te da za dijeljenje kuta na tri jednaka dijela općenito nisu dovoljni samo ravnalo i šestar.

Trisekciju kuta moguće je izvesti na više načina, ovisno o tome koja su sredstva dopuštena. Ovdje ćemo pokazati Arhimedovu trisekciju kuta uz pomoć umetanja pravca. Umetanje pravca također se može izvesti na više načina, a u ovom radu pokazat ćemo umetanje pravca pomoću trake papira. Koristeći trisekciju kuta, izvest ćemo po jednu moguću geometrijsku konstrukciju pravilnih n-terokuta za slučajeve $n = 7, 9$ i 13.

3.1 Kubna jednadžba i nerješivost trisekcije kuta ravnalom i šestarom

Da bismo dokazali sljedeći teorem, potreban nam je pojam kvadratnog proširenja polja racionalnih brojeva dodavanjem elemenata. Konkretno, ako polje $\mathbb{Q}$ proširimo sa $\rho_1 = \sqrt{A_1}$, $A_1 \in \mathbb{Q}$, $\rho_1 \notin \mathbb{Q}$, dobivamo $\mathbb{Q}(\rho_1) = \{a + b\rho_1 : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Postupak možemo nastaviti tako da $\mathbb{Q}(\rho_1)$ proširimo sa $\rho_2 = \sqrt{A_2}$, $A_2 \in \mathbb{Q}$, $\rho_2 \notin \mathbb{Q}(\rho_1)$, pa dobivamo $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2) = \{a + b\rho_2 : a, b, \in \mathbb{Q}(\rho_1)\}$ itd. Ako je $a + b\rho_1 = 0$ za neke $a, b \in \mathbb{Q}$, zbog $\rho_1 \notin \mathbb{Q}$ slijedi $a = b = 0$. Nadalje, ako je $a + b\rho_k = 0$ za neke $a, b \in \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_{k-1})$, tada je $a = b = 0$.

Prema teoremu 2.3.1, dužina duljine x je elementarno konstruktibilna ako i samo ako x možemo izraziti pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena. S obzirom na to da pri konstruiranju polazimo od jedinične dužine, dužina duljine x je elementarno konstruktibilna ako i samo ako je $x \in \mathbb{Q}$ ili $x \in \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_k)$, gdje je $\rho_j = \sqrt{A_j}$, $A_j \in \mathbb{Q}$, $\rho_j \notin \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_{j-1})$.

Teorem 3.1.1. *Ako kubna jednadžba*

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{3.1}$$

s racionalnim koeficijentima nema racionalnih rješenja, tada niti jedno njeno rješenje nije elementarno konstruktibilno.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Prema osnovnom teoremu algebre, jednadžba trećeg stupnja ima točno tri rješenja, a kako kompleksna rješenja dolaze u paru, znamo da kubna jednadžba ima barem jedno realno rješenje. Neka jednadžba (3.1) ima realno rješenje x_1 koje po pretpostavci nije racionalno. Budući da su rješenja jednadžbe (3.1) po pretpostavci elementarno konstruktibilna, postoje brojevi $\rho_1 = \sqrt{A_1}, \dots, \rho_k = \sqrt{A_k}$, $k \geq 1$, $A_j \in \mathbb{Q}$, $\rho_j \notin \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_{j-1})$, takvi da je $x_1 \in \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_k)$, ali $x_1 \notin \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_{k-1})$.

Kako je $x_1 \in \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_k)$, slijedi da je x_1 oblika

$$x_1 = p + q\rho_k, \quad p, q \in \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_{k-1}), \quad q \neq 0.$$

Uvrstimo li $x_1 = p + q\rho_k$ u (3.1), dobivamo

$$x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = P + Q\rho_k = 0,$$

gdje je

$$\begin{aligned} P &= p^3 + 3pq^2A_k + a_2\left(p^2 + q^2A_k\right) + a_1p + a_0 \in \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_{k-1}), \\ Q &= 3p^2q + q^3A_k + 2a_2pq + a_1q \in \mathbb{Q}(\rho_1, \dots, \rho_{k-1}). \end{aligned}$$

Ako bi vrijedilo da je $Q \neq 0$, onda bi bilo $\rho_k = -P/Q$, tj. $\rho_k \in \mathbb{Q}(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, $Q = 0$, iz čega slijedi da je i $P = 0$.

Ako uvrstimo $x_2 = p - q\rho_k$ u jednadžbu (3.1), dobivamo

$$x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = P - Q\rho_k,$$

pa $P = Q = 0$ povlači da je $P - Q\rho_k = 0$. Dakle, x_2 je drugo rješenje jednadžbe (3.1). Uočimo da je $x_1 + x_2 = 2p \neq 0$ jer bismo iz pretpostavke $p = 0$ dobili kontradikciju sa $x_1 \notin \mathbb{Q}(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$.

Neka je x_3 treće rješenje jednadžbe (3.1). Iz Vièteove formule $x_1 + x_2 + x_3 = -a_2$ slijedi da je $x_3 = -a_2 - 2p$. Kako je $a_2 \in \mathbb{Q}$ te $p \in \mathbb{Q}(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$, slijedi da je $x_3 \in \mathbb{Q}(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$. Ponovimo li gornji postupak za $x_3 \in \mathbb{Q}(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$, doći ćemo do zaključka da je $x_1 \in \mathbb{Q}(\rho_1, \ldots, \rho_{k-2})$, što je kontradikcija. $\square$

Teorem 3.1.2. *Ako neka kubna jednadžba*

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima ima racionalno rješenje x_1, tada je taj x_1 cijeli broj i djelitelj slobodnog člana a_0.

Dokaz. Neka je $x_1 = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, rješenje zadane jednadžbe. Tada vrijedi

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Množenjem cijele jednadžbe sa q^3 dobivamo

$$p^3 + a_2 p^2 q + a_1 p q^2 + a_0 q^3 = 0, \tag{3.2}$$

odnosno

$$p^3 = -q\left(a_2 p^2 + a_1 p q + a_0 q^2\right).$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su p i q relativno prosti brojevi pa slijedi da je $q = 1$. Iz (3.2) također slijedi

$$a_0 q^3 = -p\left(p^2 + a_2 p q + a_1 q^2\right).$$

Kako su p i q relativno prosti, p ne dijeli q, pa onda ni q^3. Dakle, iz prethodne jednakosti možemo zaključiti da je p djelitelj slobodnog člana a_0.

$\square$

Nerješivost trisekcije kuta ravnalom i šestarom

Da bismo dokazali nerješivost trisekcije kuta ravnalom i šestarom, dovoljno je to dokazati za neki poseban kut.

Na temelju Moivreove formule imamo

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)^3,$$

odnosno

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}\right) + i\left(3\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3} - \sin^3\frac{\varphi}{3}\right), \tag{3.3}$$

iz čega slijedi

$$\sin\varphi = 3\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3} - \sin^3\frac{\varphi}{3}$$

odnosno

$$\sin\varphi = 3\sin\frac{\varphi}{3} - 4\sin^3\frac{\varphi}{3}. \tag{3.4}$$

Neka su zadani jedinična dužina i kut φ. Tada $\sin\varphi$ možemo smatrati zadanom veličinom, a $\sin\frac{\varphi}{3}$ traženom veličinom. Uvođenjem supstitucije

$$\sin\varphi = a, \quad \sin\frac{\varphi}{3} = x$$

u jednadžbu (3.4), dobivamo

$$4x^3 - 3x + a = 0.$$

Množenjem cijele jednadžbe s 2 te uvođenjem supstitucije $y = 2x$ dolazimo do

$$y^3 - 3y + 2a = 0. \tag{3.5}$$

Promotrimo slučaj trisekcije kuta $\frac{\pi}{6}$. Znamo da je $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, odnosno $a = \frac{1}{2}$. Uvrstimo li to u jednadžbu (3.5), dobivamo

$$y^3 - 3y + 1 = 0. \tag{3.6}$$

Da bi rješenja jednadžbe (3.6) bila elementarno konstruktibilna, ta bi jednadžba prema teoremu 3.1.1 morala imati racionalno rješenje, a to rješenje bi moralo biti djelitelj od 1. Kako niti 1 niti -1 nisu rješenja ove jednadžbe, jednadžba (3.6) nema niti jedno racionalno rješenje. Dakle, nije moguće provesti trisekciju kuta $\frac{\pi}{6}$ ravnalom i šestarom.

Budući da smo za a mogli uzeti neograničeno mnogo vrijednosti koje također vode do nerješivosti odgovarajuće konstrukcije, zaključujemo da ima neizmjerno mnogo kutova čija trisekcija nije izvediva ravnalom i šestarom.

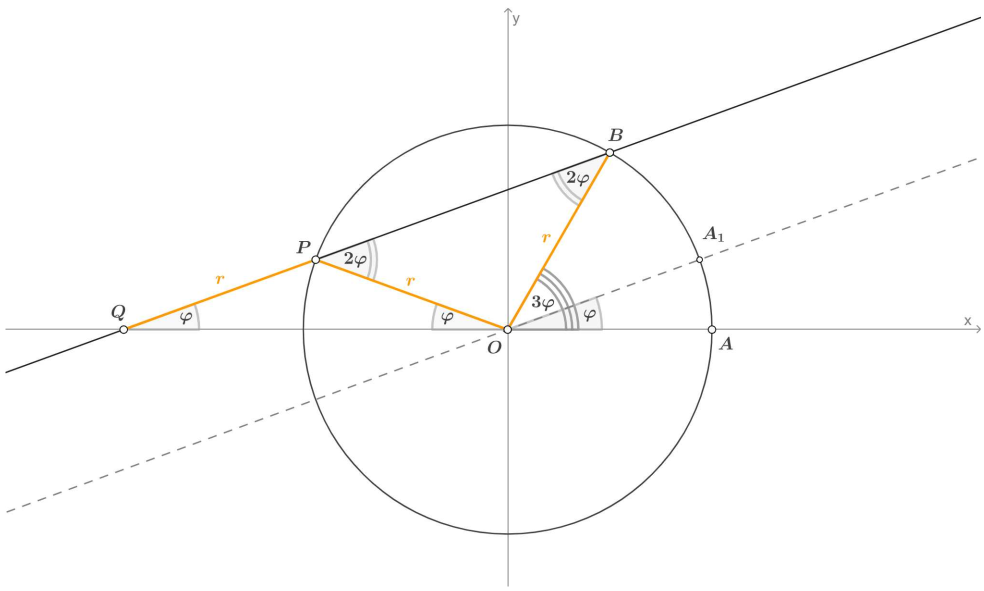
3.2 Arhimedova trisekcija kuta

Vidjeli smo da trisekcija kuta općenito nije rješiva korištenjem samo ravnala i šestara. Međutim, dokazat ćemo da se takva konstrukcija eventualno može riješiti uz pomoć dodatnog pomagala. Arhimed[1] je, pored ravnala i šestara, za trisekciju kuta koristio traku papira. Opišimo detaljnije tu konstrukciju.

Zadan je kut 3φ s vrhom O. Opišimo kružnicu polumjera r oko vrha O i označimo sjecišta kružnice s krakovima zadanog kuta sa A i B (slika 3.1). Umetnimo sada pravac BPQ na sljedeći način. Na rub trake papira nanesimo točke P i Q tako da je $|PQ| = r$. Položimo tu traku papira tako da točka Q ostaje na pravcu OA te joj rub stalno prolazi kroz točku B i to tako dugo dok točka P ne padne u točku na kružnici. Povucimo sada paralelu s pravcem BPQ koja prolazi kroz vrh O. Dokažimo da je ta paralela upravo trisektrisa kuta $\angle AOB$.

Budući da je $|OP| = |PQ| = r$, trokut $\triangle OPQ$ je jednakokračan. Tada je kut $\angle OPB = 2\angle OQP$ kao vanjski kut trokuta $\triangle OPQ$. Također, $|OP| = |OB| = r$ pa je i trokut $\triangle OPB$ jednakokračan, odnosno vrijedi da je $\angle OPB = \angle OBP$. Kako je dani kut $\angle AOB$ vanjski kut trokuta $\triangle OBQ$, vrijedi

$$\angle AOB = \angle OQB + \angle OBQ = 3\varphi.$$



Slika 3.1: Arhimedova trisekcija kuta

[1] Arhimed (oko 287. – 212. pr. Kr.), starogrčki matematičar, fizičar i astronom

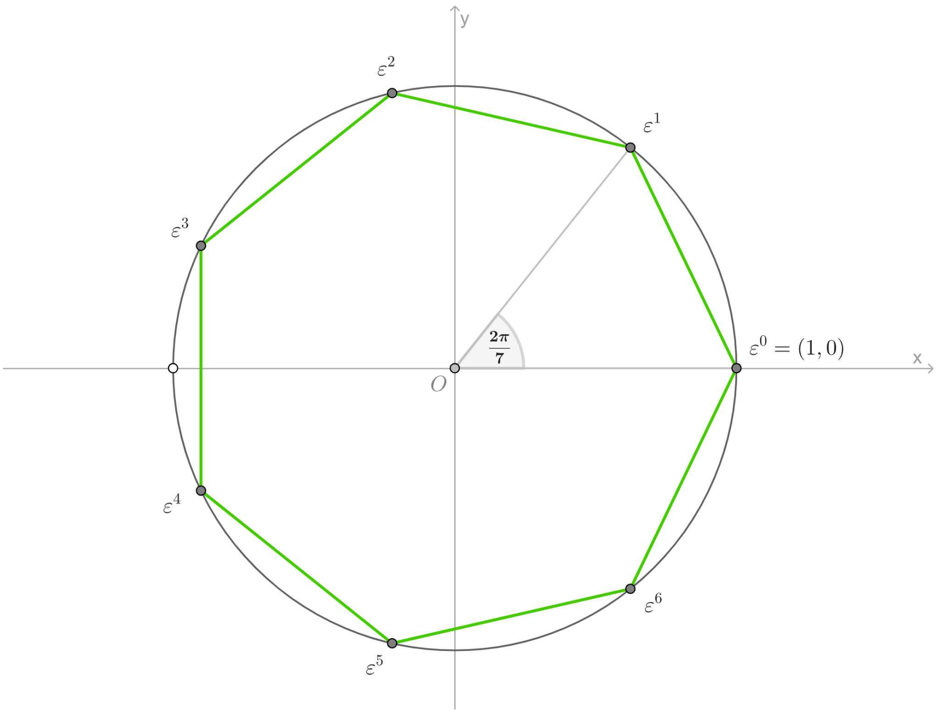
3.3 Konstrukcija pravilnog sedmerokuta

Vrhovi pravilnog sedmerokuta (slika 3.2) rješenja su jednadžbe

$$z^7 - 1 = 0,$$

odnosno

$$(z-1)\left(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0.$$



Slika 3.2: Vrhovi pravilnog sedmerokuta

Kako je $z_0 = 1$ trivijalno rješenje, treba riješiti jednadžbu

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \tag{3.7}$$

Podijelimo li cijelu jednadžbu sa z^3, dobivamo

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0.$$

Grupiranje daje

$$\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0.$$

Uvođenjem supstitucije $z + \frac{1}{z} = x$ dobivamo $z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 2$ i $z^3 + \frac{1}{z^3} = x^3 - 3x$ pa prethodna jednadžba prelazi u kubnu jednadžbu

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{3.8}$$

Analogno kao i kod jednadžbe (3.6), jednadžba (3.8) nema niti jedno racionalno rješenje pa prema teoremu 3.1.1 rješenja te jednadžbe nisu elementarno konstruktibilna, čime je dokazana nerješivost konstrukcije pravilnog sedmerokuta ravnalom i šestarom.

Međutim, pravilni sedmerokut može se konstruirati tako da se kubna jednadžba geometrijski riješi trisekcijom kuta. Iz (3.3) znamo da je

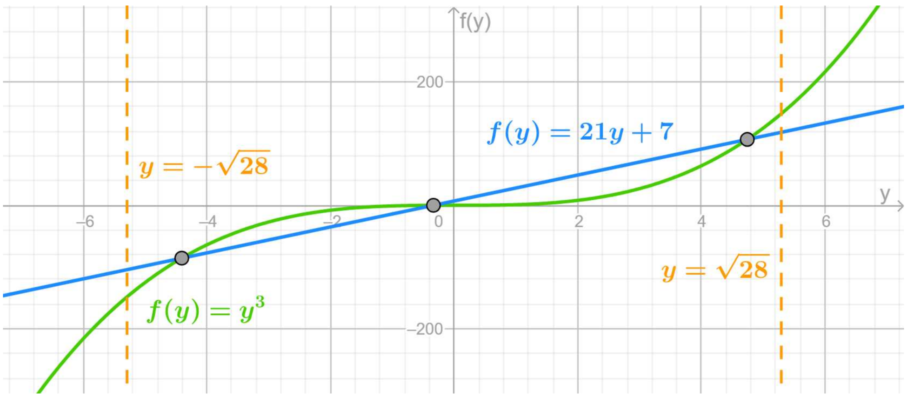
$$\cos\theta = \cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}\sin^2\frac{\theta}{3}$$

odnosno

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \tag{3.9}$$

Supstituirajmo najprije $x = \frac{1}{3}(y-1)$ u jednadžbu (3.8). Sada imamo

$$y^3 - 21y - 7 = 0. \tag{3.10}$$



Slika 3.3: Grafički prikaz rješenja jednadžbe $y^3 - 21y - 7 = 0$.

Stavimo $p(y) = y^3 - 21y - 7$. Kako je $p(-5) < 0$, $p(-1) > 0$, $p(0) < 0$ i $p(5) > 0$, to se po jedno rješenje jednadžbe $p(y) = 0$ nalazi unutar svakog od intervala $\langle -5, -1\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 0, 5\rangle$. Budući da se sva rješenja jednadžbe (3.10) nalaze unutar intervala $[-\sqrt{28}, \sqrt{28}]$, možemo u tu jednadžbu uvesti supstituciju $y = \sqrt{28}\cos\theta$ pa ona prelazi u

$$7\sqrt{28}\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) = 7. \tag{3.11}$$

Izraz u zagradi prepoznajemo kao $\cos 3\theta$ pa imamo

$$\cos 3\theta = \frac{1}{\sqrt{28}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$3\theta = \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2,$$

odnosno

$$\theta_1 = \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}, \quad \theta_2 = \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{2\pi}{3} \quad \text{i} \quad \theta_3 = \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{4\pi}{3}.$$

Neka je

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}, \quad k = 1, \ldots, 6.$$

Slično kao i prije, definiramo

$$x_k = z_k + \frac{1}{z_k} = z_k + \overline{z_k} = 2\cos\frac{2k\pi}{7}, \quad k = 1, \ldots, 6,$$

pa su rješenja jednadžbe (3.8) jednaka

$$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\frac{12\pi}{7}, \quad x_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = 2\cos\frac{10\pi}{7}, \quad x_3 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = 2\cos\frac{8\pi}{7},$$

a jedino pozitivno rješenje je x_1. Uvrstimo li x_1 i $y = \sqrt{28}\cos\theta$ u prethodnu supstituciju $y = 3x + 1$, dobivamo

$$2\sqrt{7}\cos\theta = 6\cos\frac{2\pi}{7} + 1$$

odnosno

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}\cos\theta - \frac{1}{6}. \tag{3.12}$$

Sada preostaje izabrati kut θ tako da se dobije vrijednost kosinusa iz x_1, a ne iz x_2 ili x_3. Budući da je arkus kosinus strogo padajuća funkcija na intervalu $[0, 1]$, vrijedi

$$\frac{\pi}{6} = \arccos\frac{1}{2} < \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} < \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

iz čega slijedi

$$\frac{\pi}{18} < \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} < \frac{\pi}{6}.$$

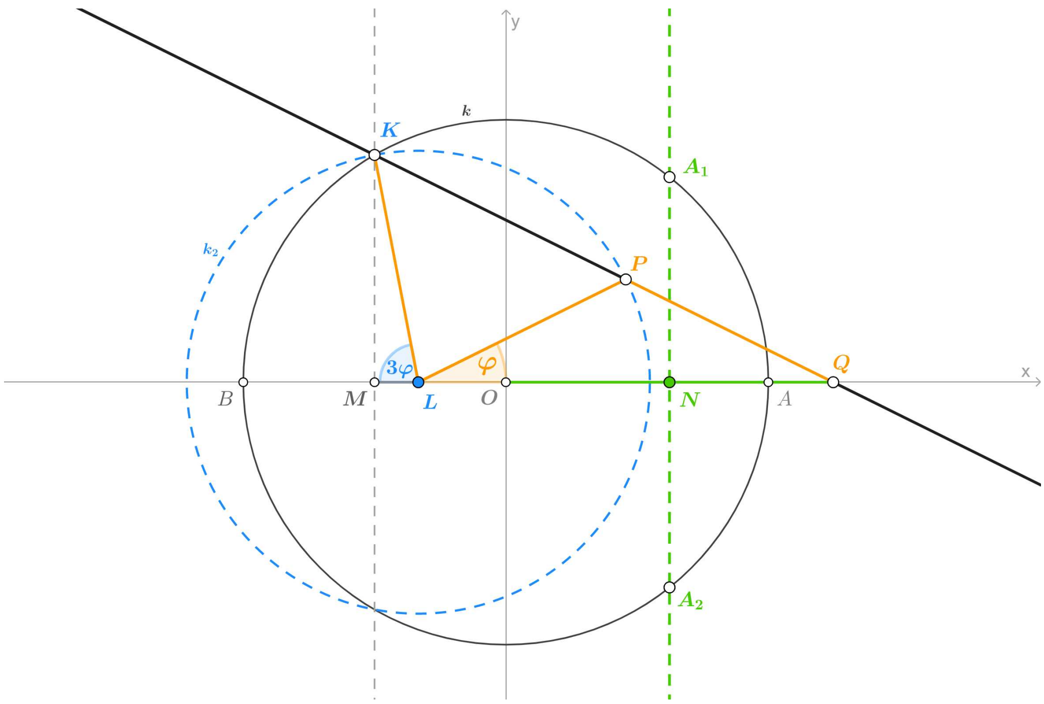
Supstituiramo li $\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}$ u (3.12), konačno dobivamo

$$\cos \frac{2\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{6}. \tag{3.13}$$

Sada se konstrukcija pravilnog sedmerokuta svodi na trisekciju kuta čiji je kosinus $\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

Konstrukciju provodimo na sljedeći način:

Neka je $k(O, 1)$ jedinična kružnica sa središtem u ishodištu te neka je $\overline{AB}$ promjer te kružnice koji leži na osi x. Očito točka $A(1, 0)$ odgovara prvom vrhu pravilnog sedmerokuta (slika 3.4).



Slika 3.4: Konstrukcija pravilnog sedmerokuta

Neka je M polovište dužine $\overline{OB}$ i neka je K jedno sjecište kružnice k i okomice na $\overline{AB}$ kroz točku M. Iz pravokutnog trokuta $\triangle OMK$ slijedi

$$|KM| = \sqrt{|OK|^2 - |OM|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Označimo točku L na polumjeru $\overline{OB}$ tako da vrijedi $|OL| = \frac{1}{3}|OB| = \frac{1}{3}$. Tada je $|ML| = \frac{1}{6}|OB|$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle KML$ slijedi

$$|KL| = \sqrt{|KM|^2 + |ML|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta dobivamo

$$\cos \angle KLM = \frac{|ML|}{|KL|} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Time smo dobili da je kut $\angle KLM = 3\varphi$.

Preostaje provesti Arhimedovu trisekciju tog kuta (slika 3.4). Neka je $k_2(L, |KL|)$ kružnica sa središtem L polumjera $|KL|$. Umetnimo pravac KPQ tako da je P na kružnici k_2, Q na pravcu AB te vrijedi $|PQ| = |KL|$. Kako je trokut $\triangle PQL$ jednakokračan i $\angle PLQ = \angle PQL = \varphi$, vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}|LQ|}{|PQ|} = \frac{|LQ|}{2|KL|},$$

iz čega slijedi

$$|LQ| = 2|KL|\cos\varphi = 2\frac{\sqrt{7}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$$

te

$$|OQ| = |LQ| - |OL| = 2\frac{\sqrt{7}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{3}.$$

Označimo sa N polovište dužine $\overline{OQ}$. Sada imamo

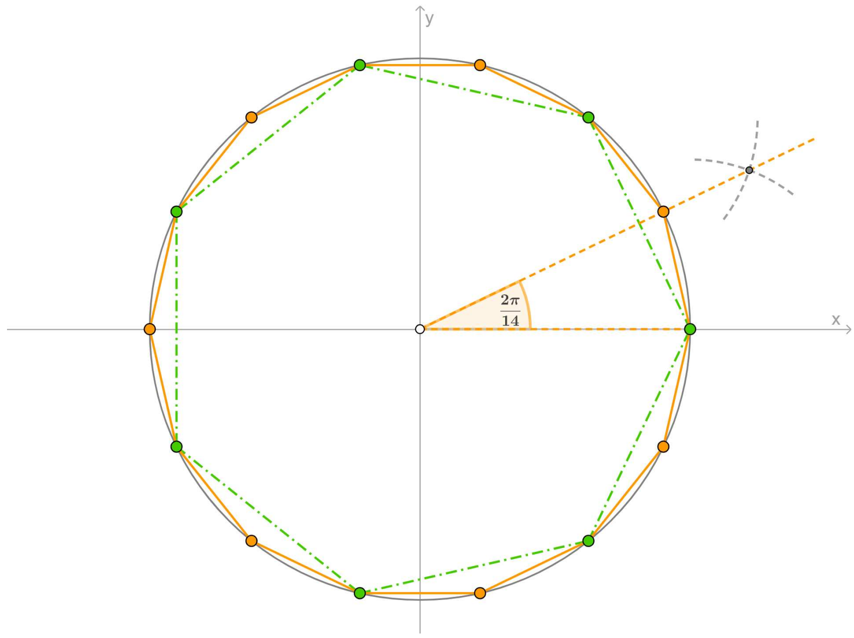
$$|ON| = \frac{\sqrt{7}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{6},$$

a iz (3.13) znamo da je

$$|ON| = \cos\frac{2\pi}{7}.$$

Povucimo okomicu u točki N na $\overline{AB}$. Označimo sa A_1 i A_2 sjecišta te okomice s kružnicom k. Točke A_2, A i A_1 su tri uzastopna vrha pravilnog sedmerokuta. Preostale vrhove lako dobijemo prenošenjem kuta φ ili dužine $\overline{AA_1}$.

Također, primijetimo da bisekcijom središnjeg kuta pravilnog sedmerokuta možemo konstruirati pravilni četrnaesterokut (slika 3.5).



Slika 3.5: Konstrukcija pravilnog četrnaesterokuta

3.4 Konstrukcija pravilnog deveterokuta

Vrhovi pravilnog deveterokuta (slika 3.6) rješenja su jednadžbe

$$z^9 - 1 = 0.$$

Primjenom formule za razliku kubova dobivamo

$$\left(z^3 - 1\right)\left(z^6 + z^3 + 1\right) = 0.$$

Budući da smo već dokazali konstruktibilnost rješenja jednadžbe $z^3 - 1 = 0$, preostaje riješiti jednadžbu

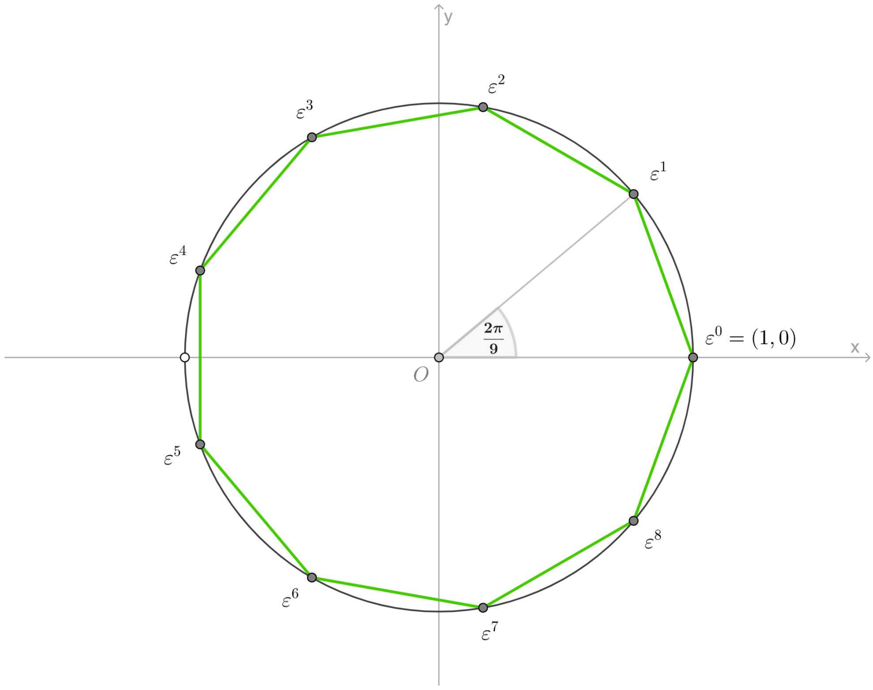
$$z^6 + z^3 + 1 = 0.$$

Podijelimo li cijelu jednadžbu sa z^3, dobivamo

$$z^3 + 1 + \frac{1}{z^3} = 0.$$

Uvođenjem supstitucije $x = z + \frac{1}{z}$ dobivamo kubnu jednadžbu

$$x^3 - 3x + 1 = 0. \tag{3.14}$$



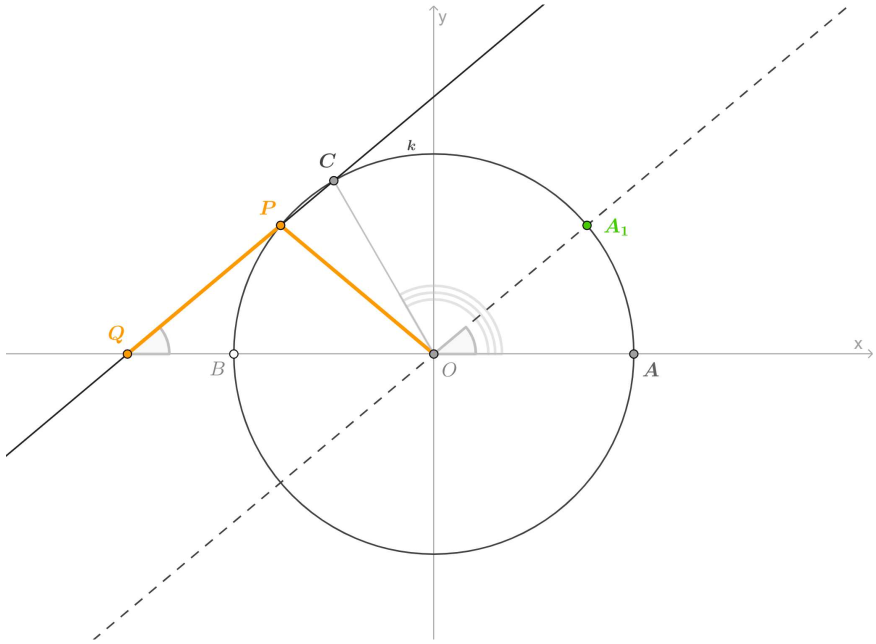
Slika 3.6: Vrhovi pravilnog deveterokuta

Kao i ranije, jednadžba (3.14) nema niti jedno racionalno rješenje pa njena rješenja nisu elementarno konstruktibilna. Dakle, pravilni deveterokut nije moguće konstruirati samo ravnalom i šestarom.

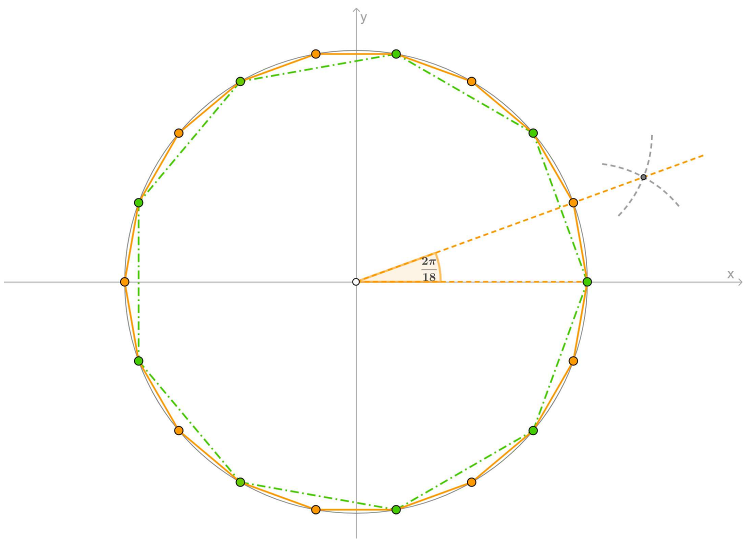
No, pravilni deveterokut također možemo konstruirati koristeći trisekciju kuta. Prisjetimo se da smo ranije konstruirali pravilni trokut čiji je središnji kut jednak $\frac{2\pi}{3}$. Podijelimo li taj kut na tri jednaka dijela, dobit ćemo $\varphi = \frac{2\pi}{9}$, a to je upravo središnji kut pravilnog deveterokuta. U nastavku provodimo trisekciju kuta $\angle AOC$ pravilnog trokuta.

Konstruirajmo pravac CPQ tako da je P na kružnici k, Q na pravcu AB te vrijedi da je $|PQ| = |OC|$. Povucimo paralelu s pravcem CPQ kroz vrh kuta O i označimo sa A_1 jedno sjecište paralele i kružnice k (slika 3.7). Točke A i A_1 su dva vrha pravilnog deveterokuta. Preostale vrhove lako dobijemo prenošenjem kuta φ ili dužine $\overline{AA_1}$.

Slično kao prije, bisekcijom središnjeg kuta pravilnog deveterokuta možemo konstruirati pravilni osamnaesterokut (slika 3.8).



Slika 3.7: Konstrukcija pravilnog deveterokuta



Slika 3.8: Konstrukcija pravilnog osamanesterokuta

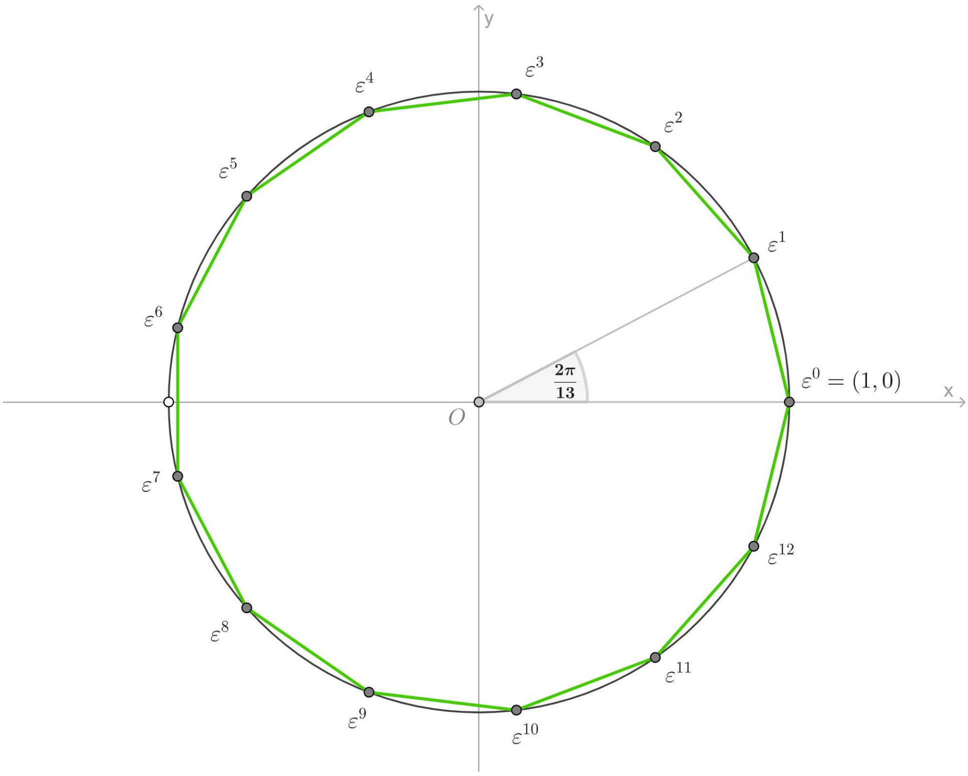
3.5 Konstrukcija pravilnog trinaesterokuta

Vrhovi pravilnog trinaesterokuta (slika 3.9) rješenja su jednadžbe

$$z^{13} - 1 = 0,$$

odnosno

$$(z-1)\left(z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0.$$



Slika 3.9: Vrhovi pravilnog trinaesterokuta

Kako je $z_0 = 1$ trivijalno rješenje, treba riješiti jednadžbu

$$z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Podijelimo li cijelu jednadžbu sa z^6, dobivamo

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6} = 0.$$

Uvođenjem supstitucije $z + \frac{1}{z} = x$ dobivamo

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 2, \quad z^3 + \frac{1}{z^3} = x^3 - 3x, \quad z^4 + \frac{1}{z^4} = x^4 - 4x^2 + 2,$$
$$z^5 + \frac{1}{z^5} = x^5 - 5x^3 + 5x, \quad z^6 + \frac{1}{z^6} = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2,$$

pa prethodna jednadžba postaje

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1 = 0. \tag{3.15}$$

Neka je

$$z = \cos\frac{2\pi}{13} + i\sin\frac{2\pi}{13}.$$

Slično kao kod sedamnaesterokuta, vrijedi

$$x_k = z_k + \frac{1}{z_k} = z_k + \overline{z_k} = 2\cos\frac{2k\pi}{13}, \quad k = 1, \ldots, 12, \tag{3.16}$$

pa su rješenja jednadžbe (3.15) jednaka

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\cos\frac{2\pi}{13} = 2\cos\frac{24\pi}{13}, & x_2 &= 2\cos\frac{4\pi}{13} = 2\cos\frac{22\pi}{13},\\ x_3 &= 2\cos\frac{6\pi}{13} = 2\cos\frac{20\pi}{13}, & x_4 &= 2\cos\frac{8\pi}{13} = 2\cos\frac{18\pi}{13},\\ x_5 &= 2\cos\frac{10\pi}{13} = 2\cos\frac{16\pi}{13}, & x_6 &= 2\cos\frac{12\pi}{13} = 2\cos\frac{14\pi}{13}. \end{aligned}$$

Ova rješenja možemo podijeliti u dvije skupine:

$$x_1, x_3, x_4 \quad \text{i} \quad x_2, x_5, x_6.$$

Pokušajmo naći jednadžbu čija su rješenja x_1, x_3 i x_4. Zapišimo tu jednadžbu kao

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Iz Vièteovih formula slijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= -a_2,\\ x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 &= a_1,\\ x_1x_3x_4 &= -a_0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Slično kao i prije, vrijedi

$$x_i x_j = \begin{cases} 2 + x_{2i}, & \text{za } i = j, \\ x_{i+j} + x_{|i-j|}, & \text{za } i \neq j, \end{cases} \tag{3.18}$$

pri čemu zbroj i i j računamo modulo 13. Primijenimo li (3.18) na (3.17), dobivamo

$$\begin{aligned} x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 &= x_4 + x_2 + x_5 + x_3 + x_7 + x_1, \\ x_1x_3x_4 &= (x_4 + x_2)x_4 = x_4x_4 + x_2x_4 = 2 + x_8 + x_6 + x_2. \end{aligned}$$

Budući da je $x_k = x_{13-k}$, vrijedi da je $x_6 = x_7$ i $x_5 = x_8$, iz čega slijedi

$$\begin{aligned} x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 &= x_4 + x_2 + x_5 + x_3 + x_6 + x_1, \\ x_1x_3x_4 &= 2 + x_5 + x_6 + x_2. \end{aligned}$$

Iz Vièteovih formula znamo da vrijedi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -1, \tag{3.19}$$

pa je

$$x_2 + x_5 + x_6 = -1 - (x_1 + x_3 + x_4). \tag{3.20}$$

Sada zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 &= -1, \\ x_1x_3x_4 &= 1 - (x_1 + x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Dakle, x_1, x_3 i x_4 su rješenja jednadžbe

$$x^3 + (-x_1 - x_3 - x_4)x^2 + (-1)x + (-1 + x_1 + x_3 + x_4) = 0.$$

Preostaje izračunati $x_1 + x_3 + x_4$. Označimo $t_1 = x_1 + x_3 + x_4$ i $t_2 = x_2 + x_5 + x_6$. Tada prethodna jednadžba ima oblik

$$x^3 - t_1x^2 - x - 1 + t_1 = 0 \tag{3.21}$$

i vrijedi $t_1 + t_2 = -1$ te

$$\begin{aligned} t_1t_2 &= (x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_5 + x_6) \\ &= x_1x_2 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_3x_2 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_2 + x_4x_5 + x_4x_6 \\ &= x_3 + x_1 + x_6 + x_4 + x_6 + x_5 + x_5 + x_1 + x_5 + x_2 \\ &\quad + x_4 + x_3 + x_6 + x_2 + x_4 + x_1 + x_3 + x_2 \\ &= 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = -3. \end{aligned}$$

Dobivamo da je $t_1 + t_2 = -1$ i $t_1 t_2 = -3$, pa su t_1 i t_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2 + t - 3 = 0, \quad \text{odakle slijedi} \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Odredimo koje je od njih $x_1 + x_3 + x_4$, a koje $x_2 + x_5 + x_6$. Budući da je kosinus strogo padajuća funkcija na intervalu $[0, \pi]$, za x_1, x_3 i x_4 dobivamo

$$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{13} > 2\cos\frac{2\pi}{12} = \sqrt{3}, \quad x_3 = 2\cos\frac{6\pi}{13} > 2\cos\frac{6\pi}{12} = 0,$$

$$x_4 = 2\cos\frac{8\pi}{13} > 2\cos\frac{8\pi}{12} = -1,$$

iz čega slijedi da je $t_1 = x_1 + x_3 + x_4 > 0$. Dakle,

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Vratimo li sada t_1 u (3.21), dobivamo jednadžbu

$$x^3 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2} x^2 - x - 1 - \frac{1 - \sqrt{13}}{2} = 0,$$

čija su rješenja x_1, x_3 i x_4. Nadalje, kako je $x_2 + x_5 + x_6 = t_2$ i

$$\begin{aligned}
x_2 x_5 + x_2 x_6 + x_5 x_6 &= x_7 + x_3 + x_8 + x_4 + x_{11} + x_1 \\
&= x_6 + x_3 + x_5 + x_4 + x_2 + x_1 = -1, \\
x_2 x_5 x_6 &= (x_7 + x_3) x_6 = (x_6 + x_3) x_6 = x_6 x_6 + x_3 x_6 \\
&= 2 + x_{12} + x_9 + x_3 = 2 + x_1 + x_4 + x_3 = 1 - (x_2 + x_5 + x_6),
\end{aligned}$$

to su x_2, x_5 i x_6 rješenja jednadžbe

$$x^3 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} x^2 - x - 1 - \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 0.$$

Dakle, dobili smo da se jednadžba (3.15) može faktorizirati kao

$$\left(x^3 - x - 1 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\left(x^2 - 1\right)\right)\left(x^3 - x - 1 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\left(x^2 - 1\right)\right) = 0,$$

pri čemu je $x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{13}$ veće pozitivno rješenje jednadžbe dobivene iz prvog faktora, tj.

$$x^3 - x - 1 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\left(x^2 - 1\right) = 0. \tag{3.22}$$

Slično kao kod sedmerokuta, uvedimo supstituciju

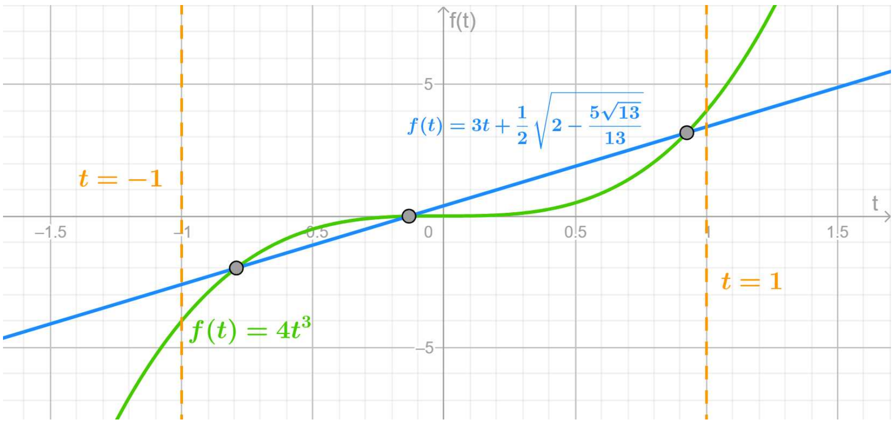
$$x = \frac{1}{3}\left(y - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \tag{3.23}$$

u jednadžbu (3.22). Nakon sređivanja i množenja sa 27 dobiva se jednadžba

$$y^3 - \frac{3\left(\sqrt{13} - 1\right)\sqrt{13}}{2} y - 26 + 5\sqrt{13} = 0.$$

Kada u ovu jednadžbu uvedemo supstituciju $y = t\sqrt{2\left(13 - \sqrt{13}\right)}$, dobivamo

$$4t^3 - 3t = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}}.$$



Slika 3.10: Grafički prikaz rješenja jednadžbe $4t^3 - 3t = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}}$.

Stavimo $p(t) = 4t^3 - 3t - \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}}$. Kako je $p(-1) < 0$, $p(-\frac{1}{2}) > 0$, $p(0) < 0$ i $p(1) > 0$, to se po jedno rješenje jednadžbe $p(t) = 0$ nalazi unutar svakog od intervala $\langle -1, -\frac{1}{2}\rangle$, $\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$. Budući da su sva rješenja prethodne jednadžbe unutar intervala $[-1, 1]$, možemo uvesti supstituciju $t = \cos\theta$ pa imamo

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}},$$

odnosno korištenjem formule (3.9),

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}}, \tag{3.24}$$

iz čega slijedi

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}}.$$

Izrazimo kut θ preko arkus tangensa. Vrijedi

$$\operatorname{tg}^2 3\theta = \frac{1-\cos^2 3\theta}{\cos^2 3\theta} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{5\sqrt{13}}{13}}\right)^2} = \frac{77 + 20\sqrt{13}}{27} = \frac{\left(2\sqrt{13}+5\right)^2}{27},$$

odakle slijedi

$$\operatorname{tg} 3\theta = \sqrt{\frac{\left(2\sqrt{13}+5\right)^2}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\left(2\sqrt{13}+5\right),$$

pa je

$$3\theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{13}+5\right)}{9}$$

odnosno

$$\theta = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{13}+5\right)}{9}.$$

Uvrstimo li x_1 te $y = t\sqrt{2\left(13 - \sqrt{13}\right)}$ i $t = \cos\theta$ natrag u (3.23), slijedi

$$\cos\frac{2\pi}{13} = \frac{\sqrt{13}-1}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{8\left(13-\sqrt{13}\right)}\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{13}+5\right)}{9}\right),$$

pa je

$$12\cos\frac{2\pi}{13} = \sqrt{13} - 1 + \sqrt{8\left(13-\sqrt{13}\right)}\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{13}+5\right)}{9}\right).$$

Sada samo preostaje konstruirati pravilan trinaesterokut koristeći ovaj izraz.

Za početak, transformirajmo $\frac{\sqrt{3}}{9}\left(2\sqrt{13}+5\right)$. Za jednostavnu konstrukciju bilo bi pogodno da se $\frac{\sqrt{3}}{9}\left(2\sqrt{13}+5\right)$ može prikazati kao količnik dvaju brojeva $\left(\text{oblika } a+b\sqrt{13}\right)$ koji predstavljaju duljine kateta nekog pravokutnog trokuta, te da je $\sqrt{8\left(13-\sqrt{13}\right)}$ duljina hipotenuze, jer bi tada kut θ bio trećina jednog šiljastog kuta u tom trokutu. Pokušajmo izračunati duljine kateta metodom neodređenih koeficijenata. Neka su duljine kateta

$$\sqrt{3}\left(a+b\sqrt{13}\right) \quad \text{i} \quad c+d\sqrt{13}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}.$$

Tada dobivamo sustav jednadžbi

$$\frac{\sqrt{3}\left(a+b\sqrt{13}\right)}{c+d\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{13}+5\right)}{9},$$

$$\left(\sqrt{3}\left(a+b\sqrt{13}\right)\right)^2 + \left(c+d\sqrt{13}\right)^2 = 8\left(13-\sqrt{13}\right).$$

Kada iz prve jednadžbe izrazimo $\sqrt{3}\left(a+b\sqrt{13}\right)$ i taj izraz supstituiramo u drugu jednadžbu, dobivamo

$$\left(c+d\sqrt{13}\right)^2 \frac{27+\left(2\sqrt{13}+5\right)^2}{27} = 8\left(13-\sqrt{13}\right),$$

odakle slijedi

$$\left(c+d\sqrt{13}\right)^2 = 62-14\sqrt{13}.$$

Kvadriramo li izraz na lijevoj strani te prebacimo sve članove na istu stranu, dobivamo jednadžbu

$$c^2+13d^2-62+\sqrt{13}(2cd+14)=0.$$

Budući da su c i d cijeli brojevi, slijedi

$$c^2+13d^2=62 \quad \text{i} \quad cd=-7.$$

Iz druge jednadžbe zaključujemo $(c,d) \in \{(7,-1),(-7,1),(1,-7),(-1,7)\}$ i lako provjerimo da samo prva dva para zadovoljavaju prvu jednadžbu. Kako mora biti $c+d\sqrt{13}>0$, to je $c+d\sqrt{13}=7-\sqrt{13}$. Sada je

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{13} &= \left(c+d\sqrt{13}\right)\frac{2\sqrt{13}+5}{9} \\ &= \left(7-\sqrt{13}\right)\frac{2\sqrt{13}+5}{9} = 1+\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Dakle, katete su duljina

$$\sqrt{3}\left(1+\sqrt{13}\right) \quad \text{i} \quad 7-\sqrt{13},$$

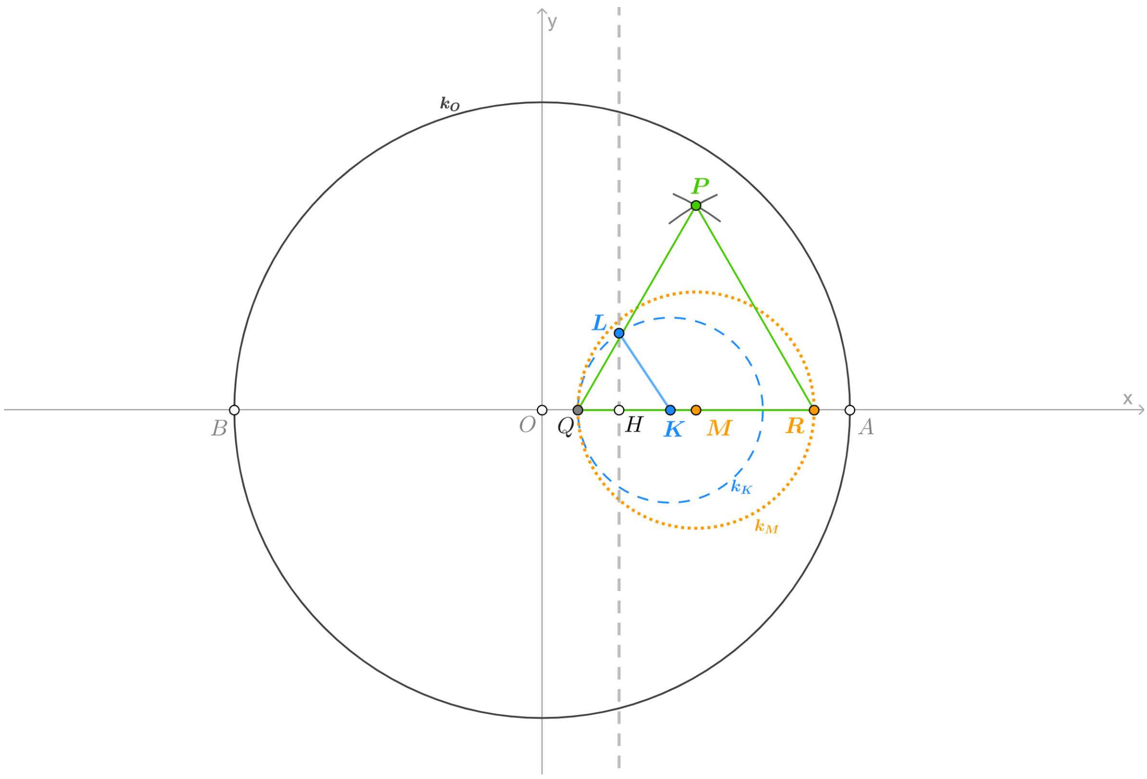
a hipotenuza duljine

$$\sqrt{8\left(13-\sqrt{13}\right)}.$$

Kateta duljine $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{13}\right)$ je visina jednakostraničnog trokuta u kojemu je $1+\sqrt{13}$ duljina polovine stranice, a $\sqrt{13}$ je duljina hipotenuze trokuta čije su katete duljina 2 i 3.

Provedimo sada konstrukciju pravilnog trinaesterokuta.

Neka je $k_O(O, 12)$ kružnica sa središtem u ishodištu polumjera 12 te neka je $\overline{AB}$ promjer te kružnice koji leži na osi x. Na polumjeru $\overline{OA}$ konstruirajmo točke $H(3,0)$ i $K(5,0)$, a na okomici na polumjer $\overline{OA}$ kroz točku H konstruirajmo točku $L(3,3)$ (slika 3.11).



Slika 3.11: Konstrukcija pravilnog trinaesterokuta

Tada iz pravokutnog trokuta $\triangle KHL$ slijedi

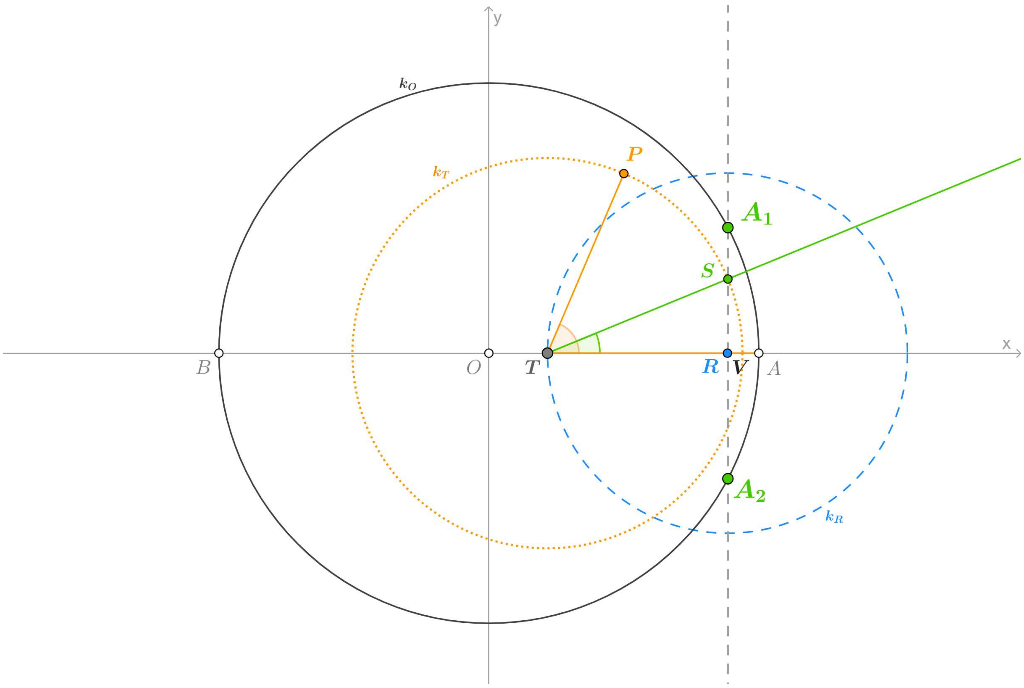
$$|KL| = \sqrt{|LH|^2 + |KH|^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Neka je $k_K(K, |KL|)$ kružnica sa središtem u K polumjera $|KL|$. Ta kružnica siječe dužinu $\overline{OK}$ u točki $Q\left(5 - \sqrt{13}, 0\right)$. Neka je $M(6, 0)$ polovište polumjera $\overline{OA}$ te neka je $k_M(M, |MQ|)$ kružnica sa središtem M polumjera $|MQ| = 1 + \sqrt{13}$. Ta kružnica siječe dužinu $\overline{MA}$ u točki $R\left(7 + \sqrt{13}, 0\right)$. Konstruirajmo jednakostranični trokut $\triangle PQR$. Duljina njegove stranice jednaka je

$$|RQ| = 7 + \sqrt{13} - \left(5 - \sqrt{13}\right) = 2\left(1 + \sqrt{13}\right).$$

Kako je M polovište od $\overline{RQ}$, to je $\overline{PM}$ visina jednakostraničnog trokuta $\triangle PQR$ iz čega slijedi da P ima koordinate $\left(6, \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{13}\right)\right)$.

Neka je $k_R\left(R, \frac{2}{3}|OA|\right)$ kružnica sa središtem R polumjera $\frac{2}{3}|OA|$. Ta kružnica siječe $\overline{OA}$ u točki $T\left(\sqrt{13} - 1, 0\right)$ (slika 3.12).



Slika 3.12: Konstrukcija pravilnog trinaesterokuta

Tada vrijedi

$$\operatorname{tg}\angle ATP = \frac{|MP|}{|MT|}$$

odnosno

$$\angle ATP = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{13}\right)}{7-\sqrt{13}},$$

a vrijedi i

$$\begin{aligned}|TP| &= \sqrt{|TM|^2+|MP|^2}\\ &= \sqrt{\left(7-\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{39}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{104-8\sqrt{13}} = \sqrt{8\left(13-\sqrt{13}\right)}.\end{aligned}$$

Podijelimo kut $\angle ATP$ na tri jednaka dijela. Neka je S točka u kojoj trisektrisa siječe kružnicu $k_T(T,|TP|)$. Konstruirajmo okomicu na polumjer $\overline{OA}$ koja prolazi točkom S i označimo sa V točku u kojoj ona siječe polumjer $\overline{OA}$. Točke u kojoj ta okomica siječe kružnicu k_O označimo sa A_1 i A_2. Tada je

$$\begin{aligned}|OV| &= |OT| + |TP|\cos\left(\frac{1}{3}\angle ATP\right)\\ &= \sqrt{13}-1+\sqrt{8\left(13-\sqrt{13}\right)}\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{13}\right)}{7-\sqrt{13}}\right),\\ &= \sqrt{13}-1+\sqrt{8\left(13-\sqrt{13}\right)}\cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{13}+5\right)}{9}\right),\end{aligned}$$

pa vrijedi da je

$$|OV| = 12\cos\frac{2\pi}{13},$$

tj. $\overline{AA_1}$ je stranica pravilnog trinaesterokuta.

Slično kao kod sedamnaesterokuta, tri uzastopna vrha pravilnog trinaesterokuta bit će sjecišta jedinične kružnice $k(O,1)$ s dužinama $\overline{OA_1}, \overline{OA}$ i $\overline{OA_2}$, redom. Preostale vrhove dobijemo prenošenjem odgovarajućeg kuta ili stranice pravilnog trinaesterokuta.

Također primijetimo na slici 3.12 da se točke V i R gotovo podudaraju. Neka je A_1' sjecište kružnice k_O s okomicom na os x kroz R i neka je A_2' sjecište kružnice k_O s pravcem TP, pri čemu su A_1' i A_2' s iste strane osi x. Ako za konstrukciju pravilnog trinaesterokuta umjesto točke A_1 koristimo točku A_1' ili umjesto točke A_2 točku A_2', tada dobivamo dvije odlične približne konstrukcije.

Bibliografija

[1] *Konstruktivne metode u geometriji*, (prema predavanjima prof. Voleneca), skripta, PMF Zagreb, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/kmg_predavanja.pdf`, travanj 2023.

[2] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[3] M. Fernežir, *Konstrukcije pravilnog peterokuta*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2014.

[4] D. Ilišević i G. Muić, *Uvod u matematiku*, skripta, PMF Zagreb, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/UMskripta.pdf`, travanj 2023.

[5] N. Lepen, *Konstrukcije pravilnog sedmerokuta*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2016.

[6] P. Mijoč, *Konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2017.

[7] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[8] Đ. Paunić, *Pravilni poligoni*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.

[9] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[10] ______, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Sažetak

Algebarske konstrukcije pravilnih n-terokuta svedene su na konstrukcije rješenja ciklotomske jednadžbe $z^n - 1 = 0$. U ovom diplomskom radu razlikuju se dva tipa konstrukcija: elementarne konstrukcije (izvedive samo ravnalom i šestarom) te konstrukcije trisekcijom kuta (uz dodatno korištenje trake papira). Algebarskom metodom elementarno su konstruirani pravilni trokut, četverokut, peterokut i sedamnaesterokut. Općenito, pravilan n-terokut može se konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako je n potencija broja 2 ili je n produkt potencije broja 2 i konačno mnogo različitih Fermatovih prostih brojeva. Posebno, pravilni sedmerokut, deveterokut i trinaesterokut nije moguće elementarno konstruirati. U ovom radu njihove su konstrukcije izvedene trisekcijom kuta.

Summary

Algebraic constructions of regular n-gons are reduced to constructions of solutions to the cyclotomic equation $z^n - 1 = 0$. In this thesis, two types of constructions are distinguished: elementary constructions (straightedge and compass constructions), and constructions by angle trisection (with the additional use of a paper strip). A regular triangle, quadrilateral, pentagon, and heptadecagon are constructed elementarily by using algebraic methods. Generally, a regular n-gon can be constructed with a straightedge and compass if and only if n is a power of 2 or the product of a power of 2 and a finite number of distinct Fermat prime numbers. In particular, a regular heptagon, nonagon, and tridecagon cannot be constructed elementarily. In this thesis, they are constructed by angle trisection.

Životopis

Rođena sam 28.4.1995. u Đakovu. Školovanje sam započela u osnovnoj školi Ivana Gorana Kovačića u Đakovu. Nakon završetka osnovne škole, 2010. upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju Antun Gustav Matoš, također u Đakovu. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2014. godine upisujem studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje najprije studiram na Preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika, a 2018. se prebacujem na Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Godine 2020. stječem titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike te iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer nastavnički.