Geometrijske pločice i njihova primjena u nastavi matematike

Buden, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Buden

GEOMETRIJSKE PLOČICE I NJIHOVA PRIMJENA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditeljica rada:

Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, srpanj 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana __________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1.____, predsjednik/ca
2.____, član
3.____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1.____,
2.____,
3.____,

Zahvaljujem svojoj mentorici prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji, na neizmjernom strpljenju, podršci i savjetima tijekom pisanja diplomskog rada, ali i za vrijeme cijelog diplomskog studija. Profesoričina predavanja su razjasnila i dala odgovore na nebrojena pitanja te su me potaknula i ohrabrila da u pripremi svojim probnih satova budem kreativna te iskoristim sve stečeno znanje u svom radu. Hvala Vam profesorice što ste mi pokazali i uveli me u umjetnost metodike nastave matematike!

Zahvaljujem svim kolegama, profesorima, mentorima i pojedincima, koje sada neću imenovati, ali koji su utjecali da postanem osoba kakva sam danas. Hvala vam svima što ste mi bili potpora te što ste mi pružili priliku da ispunim svoj potencijal.

Posebno zahvaljujem svojoj obitelji, a ponajviše svojim roditeljima. Bez njihove potpore i strpljenja ovaj rad ne bi postojao. Posljednje godine su bile prepune uspona i padova, hvala vam što ste sa mnom slavili svaki moj uspjeh te što ste me hrabrili prilikom svakog mog pada. Niti jedan pad nije ugodan pa vam hvala što ste mi pomogli da se nakon svakog uzdignem i nastavim dalje. Bez vas danas ne bila ovdje gdje jesam.

SADRŽAJ

UVOD

Alberta Einstein (1879. – 1955.) je jednom rekao: „Ja nikad ne podučavam svoje učenike; ja im samo pokušavam pružiti uvjete u kojima oni mogu učiti.“ Suvremena nastava matematike teži nastavi orijentiranoj učeniku gdje nastavnik planira i organizira učeničke aktivnosti, a učenici rade matematiku, odnosno istražuju, ispituju, naslućuju i otkrivaju matematičke zakonitosti. Osim što otkrivaju različite matematičke zakonitosti, radeći suradnički u parovima ili skupinama, primjenjuju matematiku u rješavanju problema iz svakodnevnog života. Učenike se pokušava osposobiti da prepoznaju mogućnosti korištenja matematike u problemima iz stvarnog života te da tim problemima daju matematičku strukturu. Priprema ih se za korištenje i primjenu matematičkih pojmova, činjenica i zakonitosti u rješavanju zadanih problema te donošenju matematičkih zaključaka i interpretiranje dobivenih rješenja matematičkih problema u kontekstu problema, odnosno prevođenje matematičkih rješenja u kontekst problema te provjere smislenosti rješenja.

Krenut ćemo s matematičkim kompetencijama i aktivnom nastavom matematike te potom prijeći na matematičke modele i učila. Ostatak rada posvećen je jednom konkretnom učilu, a to su geometrijske pločice. U radu će se pokazati niz primjera učeničkih aktivnosti za istraživanje, rješavanje problema i matematičku komunikaciju pomoću njih. Putem aktivnosti učenici će upoznati geometrijske pločice, otkriti kako mogu odrediti veličinu kuta nekog složenog lika, uočiti čemu je jednak zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta, otkriti kako mogu odrediti površinu nekog složenog lika, uočiti da više različitih likova ima jednak opseg, uočiti da više različitih likova ima jednaku površinu, otkriti da likovi jednakog opsega ne moraju imati jednaku površinu, otkriti da likovi jednake površine ne moraju imati jednak opseg, otkriti zbroj unutarnjih kutova mnogokuta, otkriti osnu simetriju, usustaviti znanje o omjerima, uočiti pravilnosti u nastavljanju zadanog niza. Slike unutar aktivnosti izrađene su u programu GeoGebra[1].

U prvom poglavlju *Matematička kompetencija i aktivna nastava matematike* istaknut će se važnost matematičke kompetencije i objasniti aktivna nastava, te uloga nastavnika u aktivnoj nastavi. *Matematički modeli i učila* je naziv poglavlja u kojem će se objasnit što su to matematički modeli i učila te koja je njihova uloga u nastavi matematike. U poglavljima koja zatim slijede predstavit će se niz aktivnosti s geometrijskim pločicama u kojima će učenici otkrivati razne zakonitosti vezane za osnovne pojmove u geometriji, razlomke i funkcije. U *Literaturi* su navedeni svi izvori. Za početak nešto o matematičkim kompetencijama i aktivnoj nastavi matematike.

[1] https://www.geogebra.org/classic

1. MATEMATIČKA KOMPENTENCIJA I AKTIVNA NASTAVA MATEMATIKE

U društvu koje se mijenja nevjerojatnom brzinom pojedinac se svakodnevno susreće s kompleksnim i teškim zahtjevima u gotovo svim aspektima svog života. Kako bi spremno odgovorio na zahtjeve koje društvo stavlja pred njega, treba usvojiti kompetencije koje će mu pomoći da uspješno odgovori na te zahtjeve. Matematička kompetencija ističe se kao jedna od ključnih kompetencija kako bi pojedinac posjedovao potrebna znanja, vještine i stavove da bude odgovoran i aktivan građanin. Ona je više od proceduralne spretnosti i konceptualnog razumijevanja. Ona je i strateška kompetencija (rješavanje problema iz svakodnevnog života), i prilagodljivo rasuđivanje (logičko mišljenje, matematičko dokazivanje), ali i pozitivan stav prema matematici, te ju je potrebno razvijati tijekom čitavog obrazovanja svakog pojedinog učenika. U istraživanju PISA 2021 matematička pismenost se definirala kao „sposobnost pojedinca da matematički zaključuje te formulira, primjenjuje i tumači matematiku prilikom rješavanja problema u različitim stvarnim životnim kontekstima“[2]. Ona „pomaže pojedincu da prepozna ulogu koju matematika ima u svijetu i da donosi dobro utemeljene odluke i prosudbe koje su mu potrebne kao konstruktivnom, angažiranom i promišljajućem građaninu 21. stoljeća“[3]. Ključne kompetencije se ne razvijaju samo u školi, nego se

[2] https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2021/04/PISA-2021-konceptualni-okvir_matematika.pdf
[3] https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2021/04/PISA-2021-konceptualni-okvir_matematika.pdf

razvijaju u različitim okruženjima, uključujući obitelj, školu, radno mjesto, susjedstvo putem formalnog, neformalnog i informalnog učenja.

Kako se mijenja društvo, mijenja se i obrazovanje. U prošlosti je obrazovanje u središte poučavanja stavilo činjenice, pojmove i informacije, no danas se u središtu učenja i poučavanja nalazi učenik. Današnja nastava je orijentirana na učenika i stavlja naglasak na učeničku aktivnost pri izgradnji matematičkih koncepata i otkrivanju matematičkih zakonitosti. Učenik je aktivan član koji kroz niz planiranih i organiziranih aktivnosti, radi matematiku, odnosno uočava i istražuje pravilnosti, uspostavlja veze među promatranim objektima, povezuje matematičke koncepte sa svakodnevnim životom, primjenjuje različite matematičke strategije u rješavanju problema. Uloga nastavnika u tom procesu je da pripremi aktivnosti koje će od učenika zahtijevati višu razinu mišljenja, razumijevanje problema, aktivno zaključivanje o matematičkim idejama te ostvarivanje određenog nastavnog ishoda, ali i da stvori pozitivno ozračje u kojem će se učenik osjećati sigurno i ugodno da istražuje i primjenjuje matematičke ideje i koncepte te da surađuje u paru i grupi. Nastavnik je sada postao organizator procesa učenja i poučavanja te bi kao organizator trebao uvažiti ideje svih učenika, iako možda neka ideja neće dovesti do konačnog rješenja, dati im autonomiju izbora metode za rješavanje nekog problema jer više metoda omogućava usporedbu i raspravu u kojoj će učenici vježbati svoju matematičku komunikaciju.

2. MATEMATIČKI MODELI I UČILA

Prema Leshu, Postu i Bohru učila i modeli, slike, pisani simboli, govorni jezik i stvarne situacije različiti su načini predstavljanja matematičkih ideja. Učenicima su matematički koncepti apstraktni i zato za ovladavanje njima im je potrebno mnogo iskustva s modelima i učilima. Prelaskom iz jednog načina prikazivanja matematičkih ideja u drugi pridonosi se razvoju novih koncepata. Njihovo istraživanje je pokazalo korelaciju između nemogućnosti prevođenja iz jednog prikaza u drugi te problema u rješavanju matematičkih problema. Učenike je potrebno osposobiti da uspješno koncepte prevode iz jednog zapisa u drugi jer se pokazalo da jačanjem njihove sposobnosti promjene prikaza utječe na njihovo razumijevanje matematičkih koncepata.

2.1. Modeli i učila – podrška konceptualnom razumijevanju matematike

Američki psiholog Jerome Bruner zalagao se za uvođenje novih koncepata postupnim blijeđenjem konkretnosti u korist apstraktnosti i to na način da se prvo koncepti predstavljaju pomoću konkretnih fizičkih objekata (enaktivna faza), nakon toga da se koriste slikovni i grafički prikazi (ikonička faza) i tek onda apstraktni prikaz, odnosno prikaz matematičkim simbolima (simbolička faza).

Matematički modeli su objekti, odnosno slike ili crteži koji predstavljaju neki matematički koncept. Primjeri nekih modela bi bili: model nadmorske visine te temperature za cijele brojeve, model površine kruga, duljine, volumena za razlomke ili model vage jednakih krakova za jednadžbe.

Matematička su učila fizički objekti koji konkretno predstavljaju neke matematičke ideje. Za razliku od modela, učenici učila mogu uzeti u svoje ruke te ih mogu primijeniti u različitim praktičnim iskustvima učenja. Neka od učila su Cuisenaireovi štapići, geoploča, geometrijske pločice, algebarske pločice, dekadske kockice, vaga jednakih krakova (Slika 2.1.1.).

Slika 2.1.1.*[4] *Geoploča (desno), algebarske pločice (lijevo)

2.2. O geometrijskim pločicama

Geometrijske pločice su osmišljene u drugoj polovici dvadesetog stoljeća, a osmislio ih je Edward Prenowitz 1963. unutar Education Development Center (EDC). Izrađene su od plastike ili drva. Pločice učenici koriste kao model za otkrivanje različitih zakonitosti.

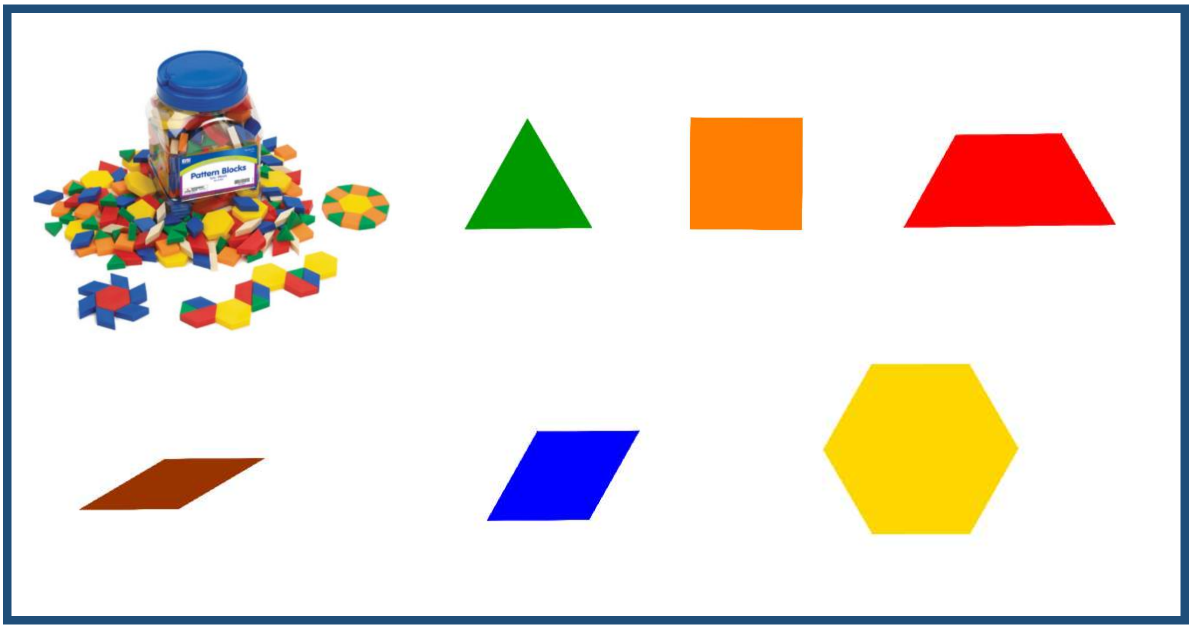
Standardni komplet geometrijskih pločica se sastoji od (Slika 2.2.1.):

- jednakostranični trokut stranice duljine 25 mm (zelena pločica)
- kvadrat stranice duljine 25 mm (narančasta pločica)
- jednakokračni trapez s duljom osnovicom duljine 50 mm (crvena pločica)
- paralelogram s kutom od 30° i stranicom duljine 25 mm (smeđa pločica)

[4] https://www.eaieducation.com/

- romb s kutom od 60° i stranicom duljine 25 mm (plava pločica)
- pravilni šesterokut stranice duljine 25 mm (žuta pločica).

Slika* 2.2.1.[5] *Geometrijske pločice



[5] https://www.eaieducation.com/

3. GEOMETRIJSKE PLOČICE I OSNOVNI GEOMETRIJSKI POJMOVI I ODNOSI

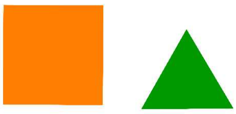
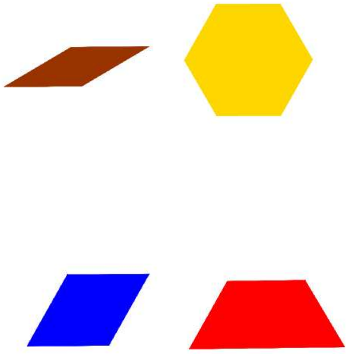
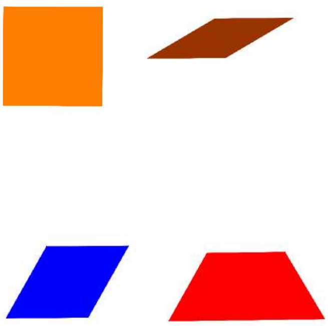
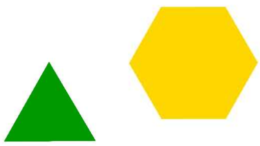
3.1. Upoznavanje geometrijskih pločica

Kao i sa svim učilima, učenicima je potrebno vrijeme da upoznaju geometrijske pločice i na njih se naviknu. Koristit će ih za istraživanje matematičkih zakonitosti, prikazivanje matematičkih objekata, ideja i postupaka. U ovom poglavlju opisat ćemo nekoliko aktivnosti koje će učenicima poslužiti za upoznavanje geometrijskih pločica te izražavanju vlastitih ideja govornim, ali i matematičkim jezikom, suradnjom u skupinama uz razmjenu i sučeljavanje ideja. Svakom paru učenika ili svakom učeniku bit će na raspolaganju osnovni komplet s barem tri primjerka svake pločice (žuti šesterokut, crveni trapez, narančasti kvadrat, plavi paralelogram, smeđi paralelogram, zeleni trokut).

3.1.1. Aktivnost *Sortiraj!*

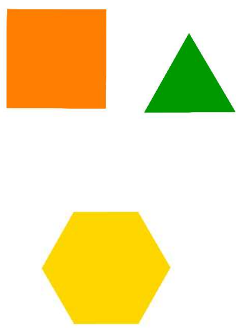
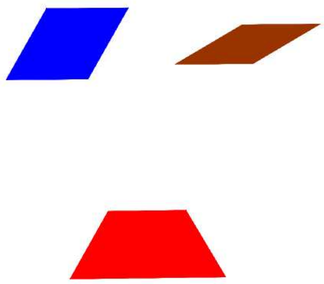
Cilj aktivnosti jest upoznati se s geometrijskim pločicama i povezati ih s geometrijskim likovima koje predstavljaju. Aktivnost je namijenjena učenicima petih razreda osnovne škole. Rade u četveročlanim skupinama. Svakom paru učenika u skupini na raspolaganju je osnovni komplet pločica. Prvo sortiraju geometrijske pločice po nekom individualno odabranom kriteriju, pri čemu je važno da drugom paru u skupini ne otkriju odabrani kriterij sortiranja. Nakon što su parovi sortirali pločice, jedan par u skupini mora odrediti kriterij po kojem ih je sortirao drugi par u skupini. Učenici će pločice sortirati na temelju različitih svojstava (broj kutova, broj stranica, mjera kutova, boja). Jedan primjer mogućeg razvrstavanja nalazi se u Tablici 3.1.1.

Tablica 3.1.1. Primjer mogućeg sortiranja pločica jedne skupine učenika

Kriterij sortiranja: veličina unutarnjih kutova geometrijskih pločica	
Veličine svih unutarnji kutova manje su ili jednake 90°.	Veličina barem jednog unutarnjeg kuta mnogokuta veća je od 90°.
	
Kriterij sortiranja: broj stranica	
Ima četiri stranice.	Nema četiri stranice.
	

Po završetku rada, skupine opisuju koje kriterije su odabrale te kako su sortirale pločice. Prezentiranje i objašnjavanje odabranih kriterija je važno jer na taj način učenici usustavljuju već naučene pojmove. Ovdje veliku važnost imaju i složeni kriteriji za koje su se neki učenici odlučili, a primjer jednog složenog kriterija može se vidjeti u Tablici 3.1.2.

Tablica 3.1.2. Primjer mogućeg sortiranja pločica jednog para učenika prema nekom složenom kriteriju

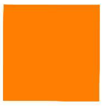
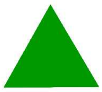
Kriterij sortiranja: pravilni mnogokut	
Pravilni mnogokut.	Nije pravilni mnogokut.
	

3.1.2. Aktivnost: Tko sam ja?

U sljedećoj aktivnosti učenici će na temelju svojstava određivati koji je lik predstavljen geometrijskom pločicom. Aktivnost je primjerena za učenike petih razreda osnovne škole. Rad je organiziran u četveročlanim skupinama gdje je svakoj skupini na raspolaganju komplet s geometrijskim pločicama. Jedan učenik iz skupine nasumično izvlači geometrijsku pločicu tako da ju ne pokaže ostalim učenicima u skupini i zapisuje zagonetku o liku koji predstavlja. Nakon što svi učenici napišu svoje zagonetke, u skupini ih razmijene tako da svaki učenik svoju mozgalicu daje učeniku koji mu sjedi s desne strane, a on treba odrediti o kojem je geometrijskom liku u mozgalici riječ.

Skupine svoje mozgalice predstavljaju cijelom razredu. U Tablici 3.1.3. nalaze se primjeri mozgalica učenika jedne grupe.

Tablica* 4.1.3. *Mozgalice učenika jedne skupine

Pločica: 	**Pločica:** 
Mozgalica: Ja sam geometrijska pločica s četiri stranice. Imam dva para paralelnih stranica. Svi kutovi su mi sukladni. Koji lik predstavljam?	**Mozgalica:** Ja sam geometrijska pločica s četiri stranice. Svi kutovi mi nisu jednaki. Nasuprotni kutovi su mi suplementarni. Koji lik predstavljam?
Pločica: 	**Pločica:** 
Mozgalica: Ja sam geometrijska pločica kojoj su sve stranice iste duljine. Svi kutovi su mi tupi. Koji lik predstavljam?	**Mozgalica:** Ja sam geometrijska pločica kojoj su sve stranice jednake duljine. Svi kutovi su mi šiljasti. Koji lik predstavljam?

3.2. Geometrijske pločice i kutovi

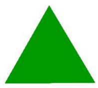
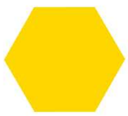
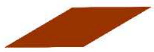
U četvrtom razredu osnovne škole učenici otkrivaju pojam kut te pojmove šiljastog i tupog kuta. Nakon toga, u petom razredu ponovno se susreću s pojmom kuta, gdje sada otkrivaju susjedne i vršne kutove te kutove uz presječnicu paralelnih pravaca, a u šestom razredu konstruiraju kutove različitih veličina. U nastavku slijedi nekoliko aktivnosti u kojima će učenici određivati veličine kutova ili preslagivanjem pločica stvarati složene likove sa zadanim veličinama kutova. Svakom paru učenika ili svakom učeniku bit će na raspolaganju osnovni komplet pločica s barem šest primjeraka svake pojedine pločice (žuti šesterokut, crveni trapez, narančasti kvadrat, plavi paralelogram, smeđi paralelogram, zeleni trokut).

3.2.1. Aktivnost *Detektivi*

Cilj aktivnosti jest odrediti veličine unutarnjih kutova geometrijskih pločica, tj. koristeći se već stečenim znanjima o punom kutu i ispruženom kutu bez upotrebe kutomjera odrediti veličine unutarnjih kutova geometrijskih pločica. Aktivnost je namijenjena učenicima šestog razreda osnovne škole. Organizirani su u četveročlane skupine, a za svaku od njih treba pripremiti komplet geometrijskih pločica, pribor za pisanje i listić za bilježenje zapažanja.

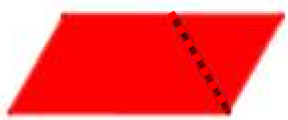
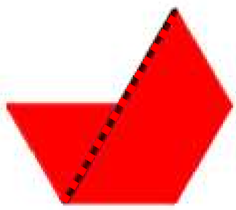
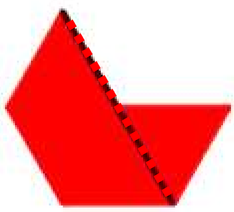
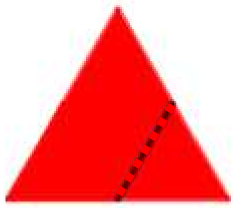
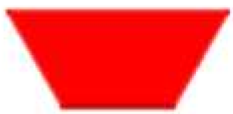
***Nastavni listić* 3.2.1. *Primjer nastavnog listića za bilježenje zapažanja o kutovima u Aktivnosti* 3.2.1.**

Geometrijska pločica	Koliko različitih kutova ima geometrijska pločica?	Koja je veličina unutarnjih kutova geometrijske pločice?
	Pločica ima četiri jednaka kuta.	Veličina svih unutarnjih kutova je 90°.

Geometrijska pločica	Koliko različitih kutova ima geometrijska pločica?	Koja je veličina unutarnjih kutova geometrijske pločice?
	Pločica ima tri jednaka kuta.	Veličina svih unutarnjih kutova je $60°$.
	Pločica ima šest jednakih kutova.	Veličina svih unutarnjih kutova je $120°$.
	Pločica ima dva jednaka šiljasta kuta i dva jednaka tupa kuta.	Veličine unutarnjih kutova su $30°$ i $150°$.
	Pločica ima dva jednaka šiljasta i dva jednaka tupa kuta.	Veličine unutarnjih kutova su $60°$ i $120°$.
	Pločica ima dva jednaka šiljasta i dva jednaka tupa kuta.	Veličine unutarnjih kutova su $60°$ i $120°$.

Učenici, surađujući u skupini, preslaguju pločice tako da kutovi istovrsnih pločica (po jedan kut svake) imaju zajednički vrh i tvore ispruženi ili puni kut i popunjavaju tablicu. Učenici prvo koristeći jednake geometrijske pločice provjeravaju koliko različitih, odnosno jednakih kutova ima svaka pojedina geometrijska pločica. Nakon što su preklapanjem geometrijskih pločica ustanovili koliko različitih kutova ima pločica pojedinog oblika, primjenjujući znanje o punom kutu i ispruženom kutu određuju veličine svih kutova svake pločice.

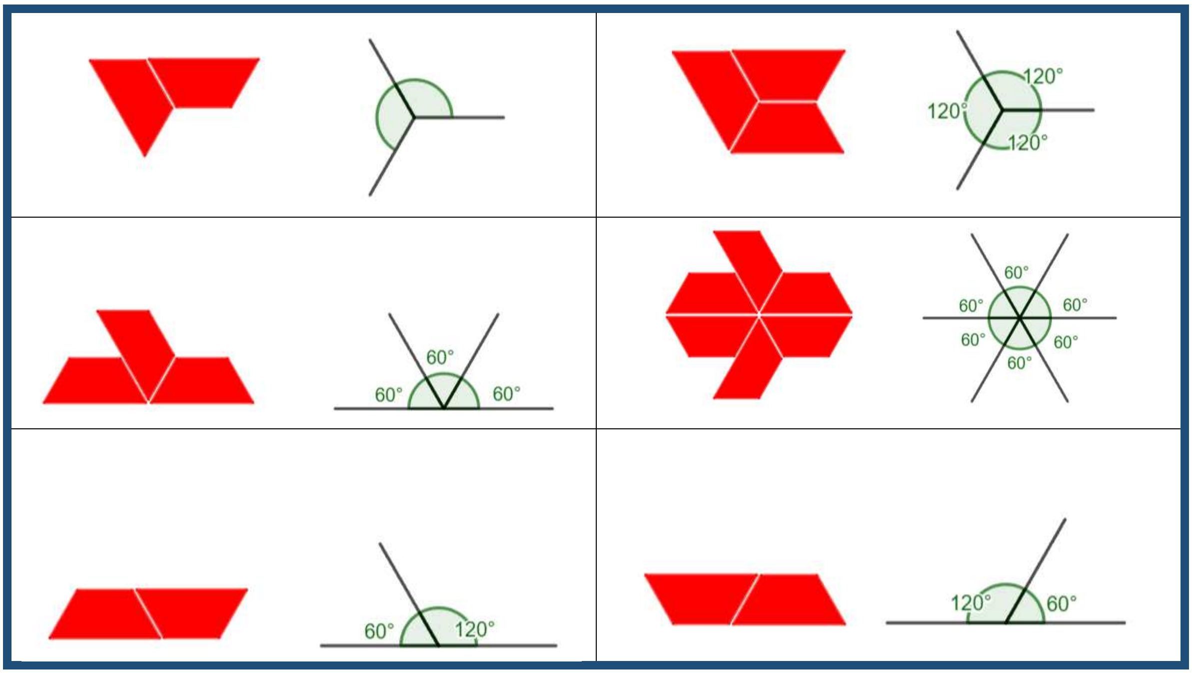
***Slika* 3.2.1. *Istraživanje kutova crvene pločice u aktivnosti* 3.2.1.**

		
Tupi i šiljati kut nisu iste veličine.	Dva tupa kuta su jednake veličine.	Dva tupa kuta su jednake veličine.
		
Dva šiljasta kuta su jednake veličine.	Dva šiljasta kuta su jednake veličine.	Dva šiljasta kuta i dva tupa kuta su jednake veličine.

Na primjer uzimaju dvije crvene pločice te ih uspoređuju tako da kut jedne pločice prislone o kut druge pločice te usporede jesu li ta dva kuta jednake veličine (Slika 3.2.1.). Prvo mogu uočiti da crvena pločica ima dva tupa i dva šiljasta kuta pa mogu istražiti jesu li kutovi iste vrste jednake veličine, odnosno šiljasti kut prisloniti uz tupi kut. Nakon što ustanove da tupi i šiljasti kut nisu jednake veličine, zaključuju da imaju dva tupa i dva šiljasta kuta pa uspoređuju veličine kutova iste vrste. Prislanjaju tupi kut jedne crvene pločice na tupi kut druge crvene pločice tako da im vrh kuta padne u istu točku te uočavaju da su jednake veličine. Analogno dolaze do zaključka za šiljaste kutove crvene pločice. Sada ih zanimaju veličine tih kutova.

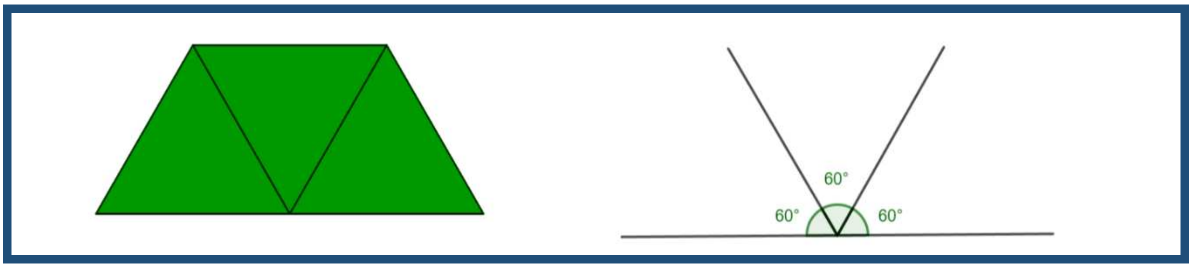
Preslaguju crvene pločice tako da njihovi kutovi tvore ispruženi ili puni kut. Žele li odrediti veličinu tupog ili šiljastog kuta, pločice će presložiti tako da samo od šiljastih kutova ili samo tupih kutova crvenih pločica slože ispruženi ili puni kut. Prvo mogu krenuti s tupim kutovima. Uočavaju da njima ne mogu složiti ispruženi kut pa pokušavaju presložiti pločice da tvore puni kut. Zaključuju da od tri crvene pločice dobivaju puni kut (Slika 3.2.2.), kako veličina punog kuta iznosi $360°$ i svi tupi kutovi crvenih pločica su jednaki, veličina unutarnjeg tupog kuta crvene pločice jednaka je $360° : 3 = 120°$. Analogno mogu uočiti da su im potrebne tri crvene pločica da mogu sastaviti ispruženi kut šiljastim kutovima crvenih pločica, odnosno šest crvenih pločica da mogu sastaviti puni kut šiljastim kutovima crvenih pločica (Slika 3.2.2.) te dolaze do zaključka da je veličina šiljastog kuta crvene pločice jednaka $180° : 3 = 60°$, odnosno $360° : 6 = 60°$. Neki učenici će možda prvo odrediti kolika je veličina tupog kuta te potom do šiljastoga doći tako da pločice preslože tako da jedan tupi kut i jedan šiljasti kut čine ispruženi kut (Slika 3.2.2.). Veličina šiljastog kuta stoga je jednaka $180° - 120° = 60°$.

Slika 3.2.2. Istraživanje veličina kutova crvene pločice u aktivnosti 3.2.1.



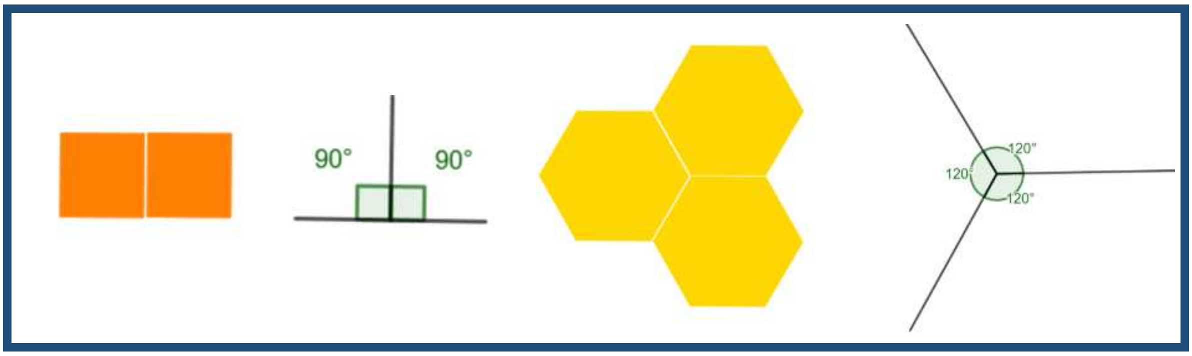
Na Slici 3.2.3. prikazan je jedan način na koji učenici mogu odrediti veličinu kuta zelene pločice, tj. jednakostraničnog trokuta. Prvo su preslagivanjem zelenih pločica uočili da su svi kutovi zelene pločice jednake veličine te nakon toga pokušavaju presložiti pločice tako da tvore ispruženi ili puni kut. Uočit će da su tri zelene pločice potrebne da dobiju ispruženi kut, a kako veličina ispruženog kuta iznosi $180°$ i zelena pločica ima sva tri kuta jednake veličine, onda je veličina unutarnjeg kuta zelene pločice jednaka $180° : 3 = 60°$. Mogu uočiti i da je šest zelenih pločica potrebno da se opiše puni kut, a kako veličina punog kuta iznosi $360°$ i zelena pločica ima sva tri kuta jednake veličine, onda je veličina unutarnjeg kuta jednaka $360° : 6 = 60°$.

Slika 3.2.3. Istraživanje kutova zelene pločice u aktivnosti 3.2.1.



Učenici analogno određuju unutarnje kutove ostalih geometrijskih pločica. Popunjavaju tablicu i dolaze do zaključaka o unutarnjim kutovima svake pojedine pločice (Slika 3.2.4.).

Slika 3.2.4. Istraživanje kutova narančaste i žute pločice u aktivnosti 3.2.1.



3.2.2. Aktivnost *Što vrijedi za četverokute?*

Već u prvom razredu osnovne škole učenici se susreću s kvadratom i pravokutnikom te uočavaju sličnosti i razlike između njih, no u šestom razredu otkrivaju svojstva i odnose pravokutnika i kvadrata. Ovom aktivnošću učenici će, radeći suradnički u četveročlanim skupinama, otkriti čemu je jednak zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta. Za svakog učenika treba pripremiti komplet geometrijskih pločica s barem šest primjerka svake pločice, pribor za pisanje i listić za bilježenje zapažanja.

***Nastavni listić* 3.2.2. *Primjer rješenja nastavnog listića za Aktivnost* 3.2.2.**

Učenik A

1. Složite kvadrat koristeći barem tri pločice!

2. Koliko kutova ima kvadrat?

   Kvadrat ima četiri kuta.

3. Odredite veličine svih kutova u kvadratu!

   Kvadrat ima četiri kuta veličine 90°.

4. Složite konveksni četverokut koristeći barem tri pločice!

5. Koliko kutova ima vaš četverokut?

   Kvadrat ima četiri kuta.

6. Odredite veličine svih kutova u složenom četverokutu!

   Kvadrat ima četiri kuta veličine 90°.

Svaki učenik sastavlja prvo kvadrat, nakon toga jedan konveksni i jedan nekonveksni četverokut, a nakon toga određuje veličinu svih unutarnjih kutova sastavljenih četverokuta. Kada odrede, dobivaju zajedničke tablice.

***Nastavni listić* 3.2.3. *Primjer rješenja nastavnog listića za konveksan četverokut za Aktivnost* 3.2.2.**

1. Odredite veličine svih kutova u četverokutu i popunite tablicu podatcima ostalih učenika iz svoje skupine!

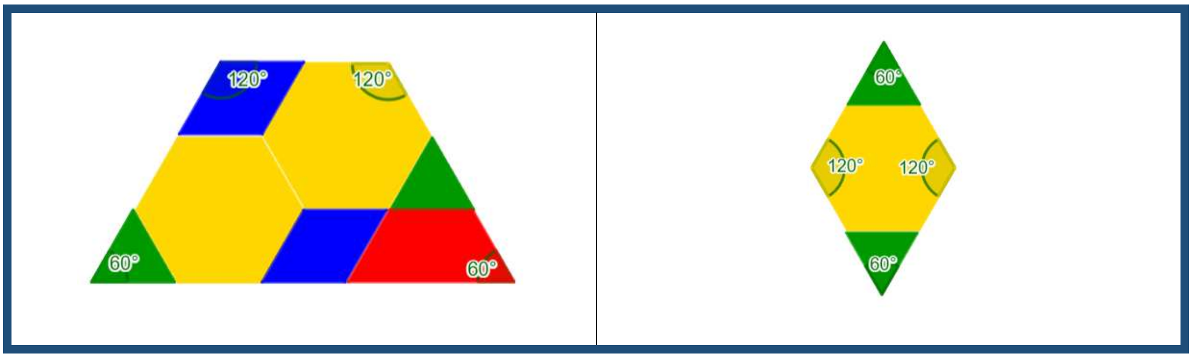
Učenik	Veličine svih kutova u četverokutu			
	Veličina prvog kuta	Veličina drugog kuta	Veličina trećeg kuta	Veličina četvrtog kuta
Učenik A	$90°$	$90°$	$90°$	$90°$
Učenik B	$60°$	$120°$	$60°$	$120°$
Učenik C	$120°$	$120°$	$60°$	$60°$
Učenik D	$60°$	$120°$	$60°$	$120°$

2. Promotrite tablicu. Što vrijedi za sve unutarnje kutove svakog od četverokuta?

   Zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta jednak je $360°$.

Grupa zajedno popunjava tablicu o sastavljenim četverokutima, prvo popunjavaju za kvadrat pa konveksni četverokut. Određuju unutarnje kutove svih sastavljenih četverokuta i uspoređuju ih. Uočavaju da neki četverokuti imaju sve kutove jednake veličine, neki četverokuti imaju dva para kutova jednake veličine, neki četverokuti imaju sve kutove različitih veličina, ali svi četverokuti imaju jednaki zbroj unutarnjih kutova. Svoja zapažanja prezentiraju ostatku razreda te zajedno dolaze do zaključka da je zbroj unutarnjih kutova četverokuta jednak $360°$. Učenici se prisjećaju da su već otkrili da je zbroj unutarnjih kutova u trokutu jednak $180°$, te su sada otkrili da je zbroj unutarnjih kutova u četverokutu $360°$ pa se pitaju mogu li na isti način odrediti zbroj kutova u peterokutu.

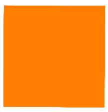
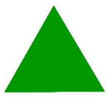
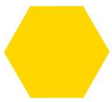
Slika 3.2.5. Primjeri još nekih učeničkih rješenja s nastavnog listića 3.2.2.



3.2.3. Aktivnost *Složi lik i odredi!*

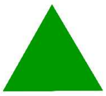
Učenici sedmog razreda će, radeći u parovima, određivati veličine unutarnjih kutova složenog lika sastavljenog od geometrijskih pločica, koristeći se već stečenim znanjima o veličinama unutarnjih kutova. Cilj ove aktivnosti je otkriti čemu je jednak zbroj unutarnjih kutova mnogokuta. Za svakog učenika je potrebno pripremiti komplet geometrijskih pločica s barem šest primjeraka svake pločice, tablicu za bilježenje i igraću kocku. Učenici dobivaju Tablicu 3.2.1., te kockicu. Prvo naizmjenično bacaju igraću kocku te po redu popunjavaju redak s brojem geometrijskih pločica. Na primjer, prvi učenik baca igraću kocku i dobiva broj dva te ga upisuje u prvi prazan stupac, odnosno kao broj narančastih geometrijskih pločica. Potom drugi učenik baca igraću kocku i dobiva broj četiri te ga upisuje u prvi prazan stupac, odnosno kao broj zelenih geometrijskih pločica. Učenici nastavljaju naizmjenično dok ne popune sve stupce u tablici.

Tablica 3.2.1. Primjer tablice koju učenici popunjavaju bacajući igraću kocku

Geometrijska pločica					
Broj geometgrijskih pločica					

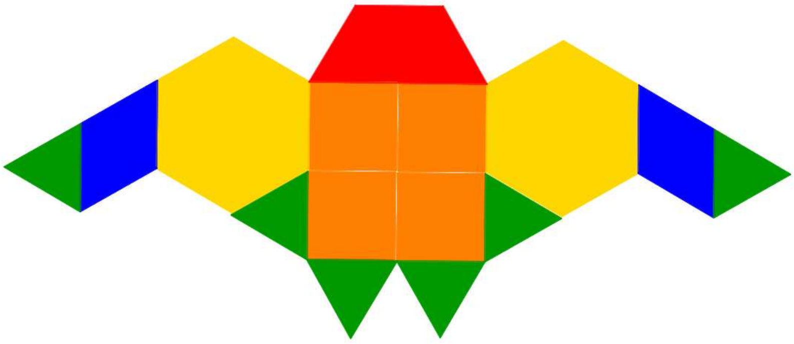
Nakon što su popunili tablicu, svaki učenik uzima svoj komplet geometrijskih pločica te sastavlja složeni lik koristeći onoliko odgovarajućih geometrijskih pločica koliko je zapisano u tablici. Svaki učenik sastavlja svoj lik. Kada završe sa sastavljanjem lika, učenici na dobivenom nastavnom listiću crtaju otisak ruba dobivenog lika te popunjavaju tablicu u kojoj određuju vrste njegovih unutarnjih kutova te određuju veličinu svakog od njih koristeći se znanjem o veličinama kutova geometrijskih likova reprezentiranih geometrijskim pločicama.

Tablica 3.2.2. Primjer popunjene tablice koju učenici popunjavaju bacajući igraću kocku

Geometrijska pločica					
Broj geometrijskih pločica	4	6	2	1	1

Na Slici 3.2.6. može se vidjeti primjer jednog učeničkog rješenja, tj. složenog lika te se u Tablici 3.2.3. može vidjeti kako bi učenik popunio listić za svoj lik.

Slika 3.2.6. Primjer jednog od mogućih učeničkih rješenja

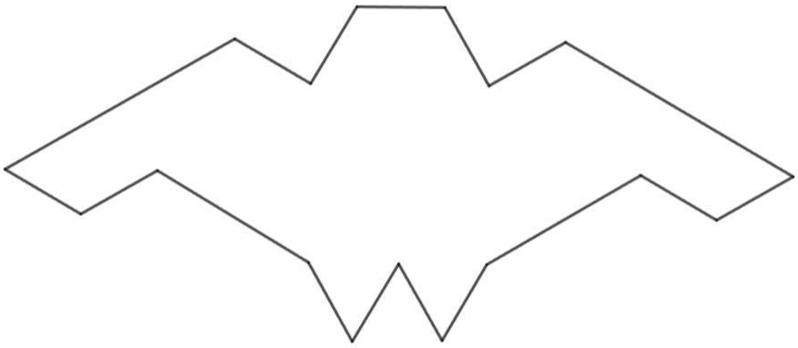


Nakon što učenici popune tablicu, u paru uspoređuju rješenja te uočavaju da su sastavili različite likove iako su na raspolaganju imali istu količinu pojedinih pločica te uočavaju da neki njihovi složeni likovi imaju različiti broj i vrste unutarnjih kutova.

Tablica 3.2.3. Primjer jednog od mogućih učeničkih rješenja

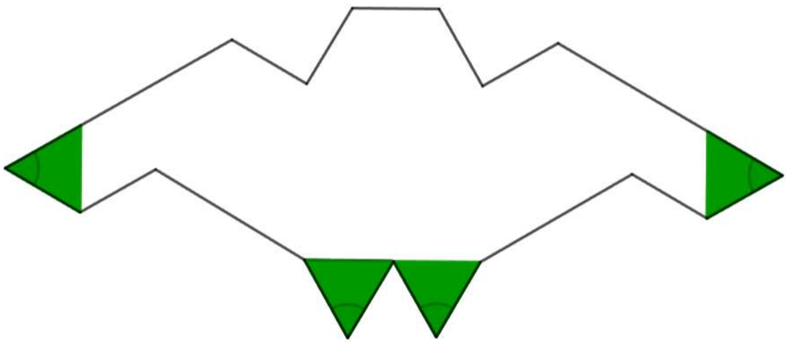
1. Sastavite lik od geometrijskih pločica!

Lik:



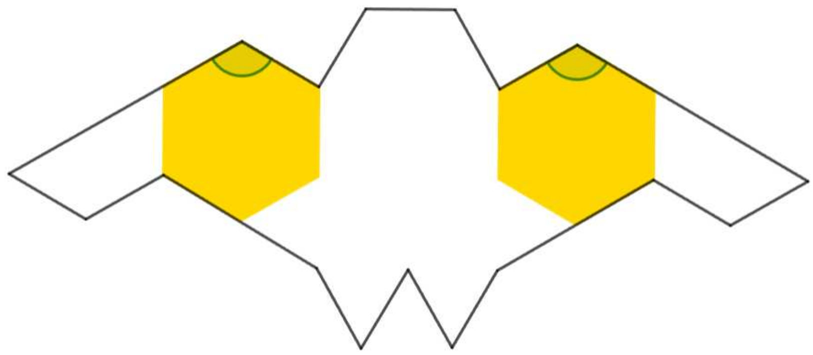
2. Vrste unutarnjih kutova:

- 4 šiljasta kuta
    - jednakostranični trokut, odnosno zelena pločica

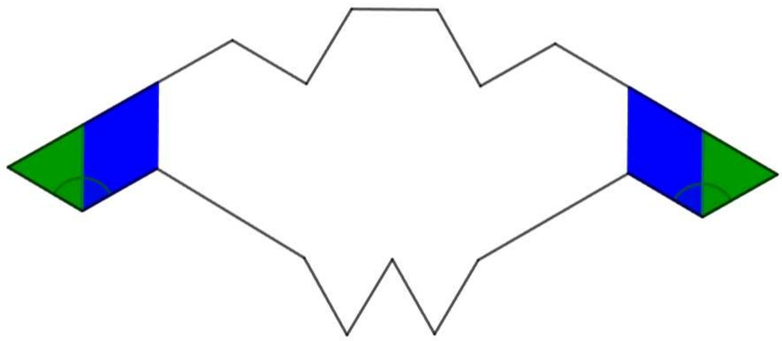


-

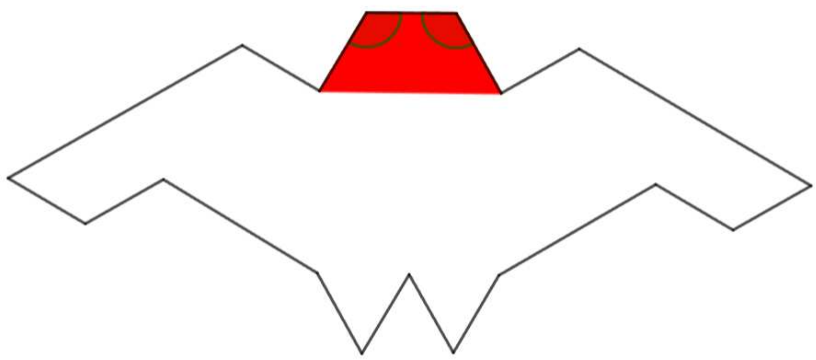
- 6 tupih kutova
  - šesterokut, odnosno žute pločice



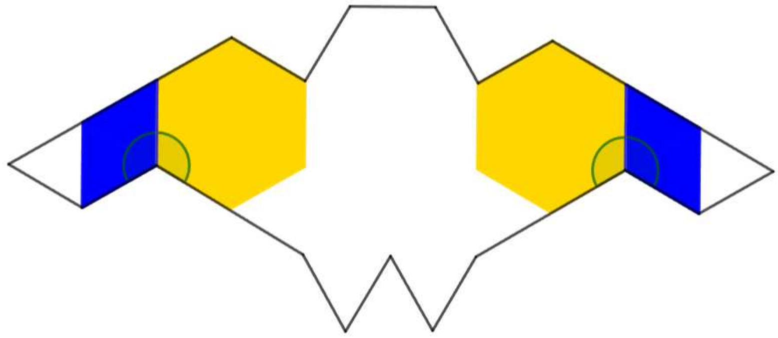
  - jednakostranični trokut i paralelogram, odnosno zelene i plave pločice



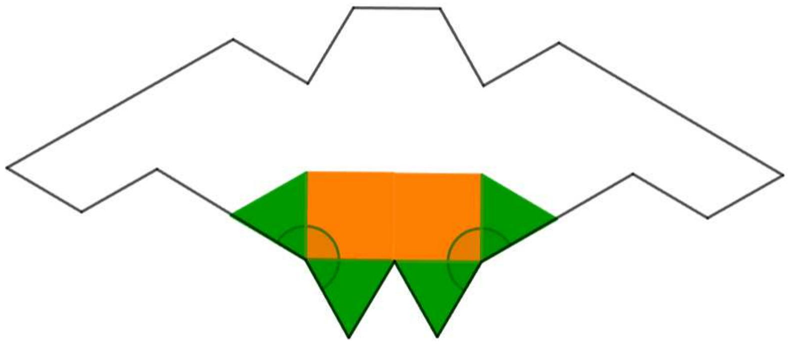
  - trapez, odnosno crvene pločice



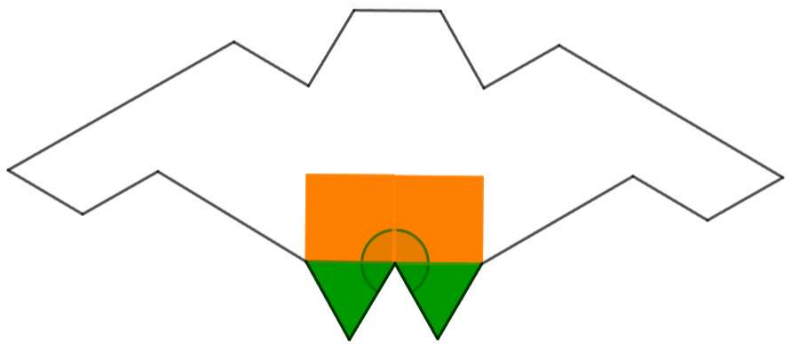
- 7 izbočenih kutova
  - paralelogram i šesterokut



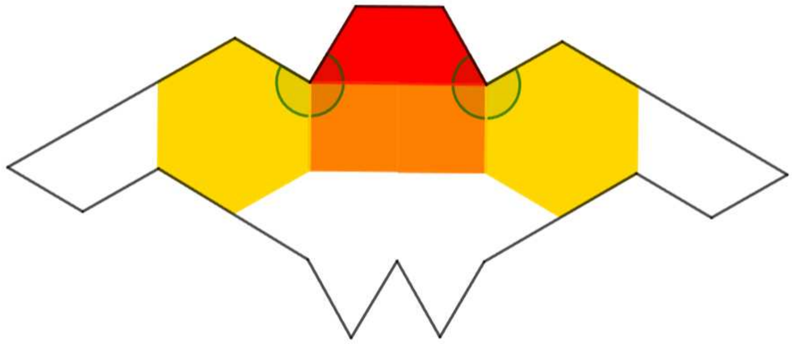
  - dva trokuta i kvadrat



  - dva trokuta i dva kvadrata

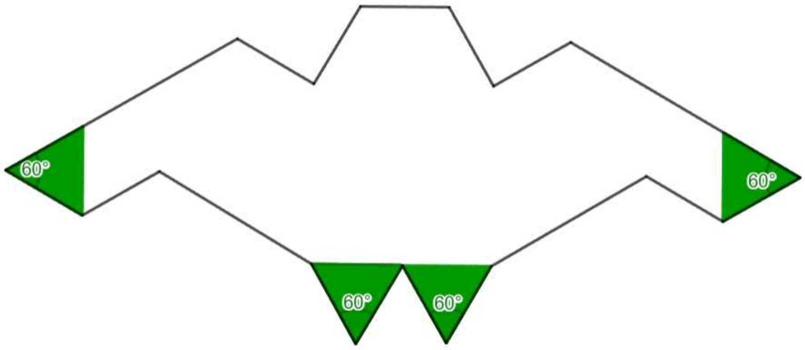


- šesterokut, kvadrat i trapez

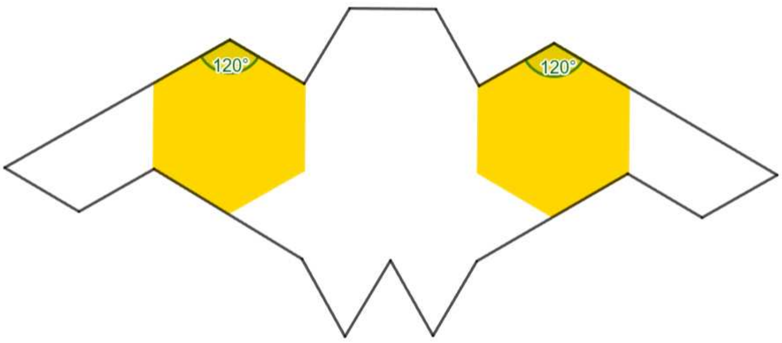


3. Veličine unutarnjih kutova:

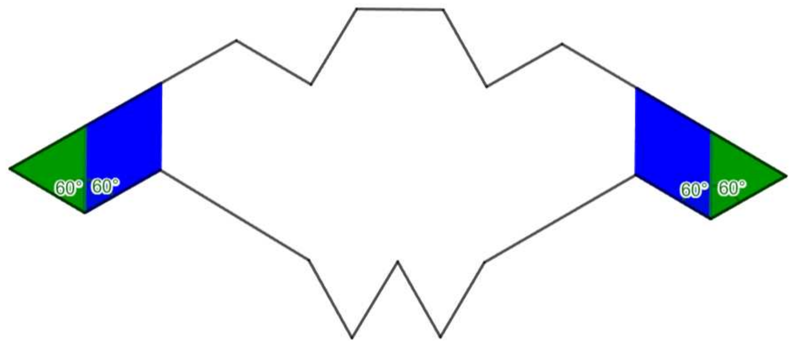
- 4 šiljasta kuta
    - veličine 60°
    - jednakostranični trokut, odnosno zelena pločica



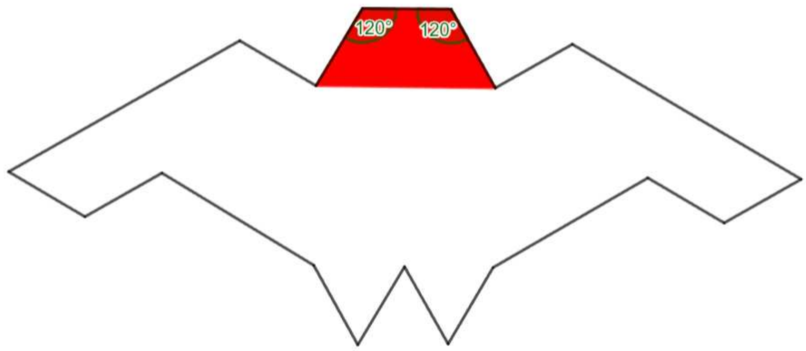
- 6 tupih kutova
    - veličine 120°
        - šesterokut, odnosno žute pločice (120°)



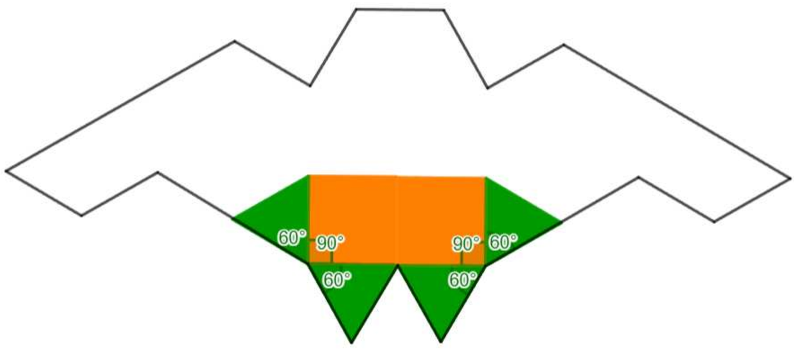
- jednakostranični trokut i paralelogram, odnosno zelene i plave pločice $(60° + 60° = 120°)$



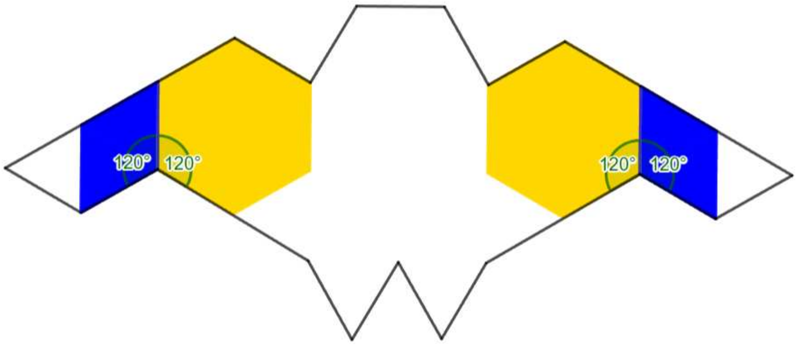
- trapez, odnosno crvene pločice (120°)



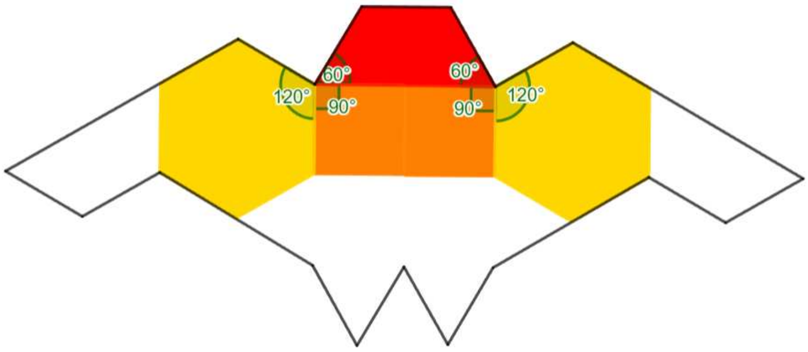
- 7 izbočenih kutova
  - veličine 210°
    - dva trokuta i kvadrat $(60° + 90° + 60° = 210°)$



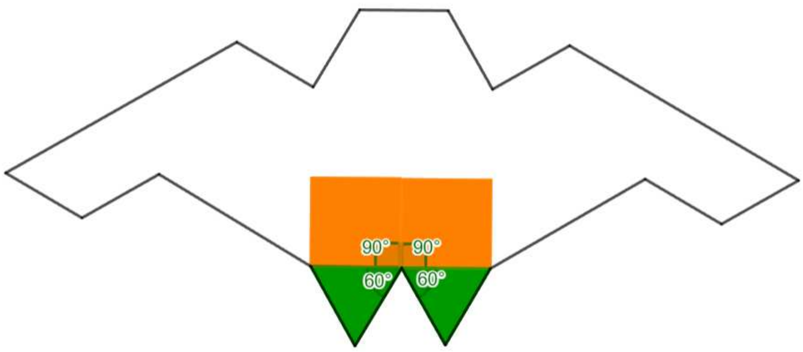
- veličine $240°$
  - paralelogram i šesterokut ($120° + 120° = 240°$)



- veličine $270°$
  - šesterokut, kvadrat i trapez ($60° + 90° + 120° = 270°$)



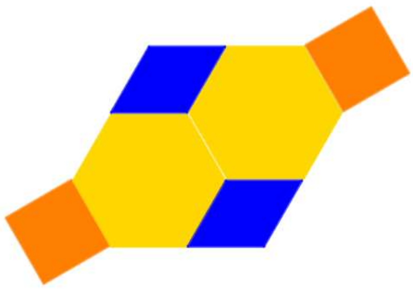
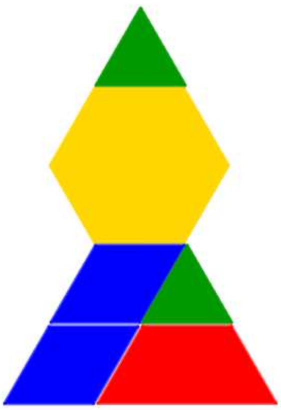
- veličine $300°$
  - dva trokuta i dva kvadrata ($60° + 90° + 90° + 60° = 300°$)

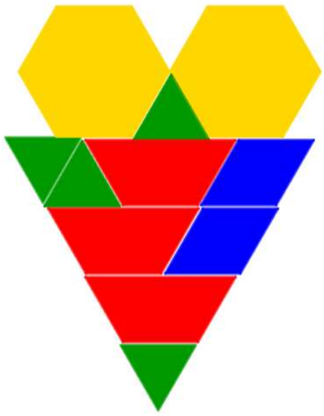
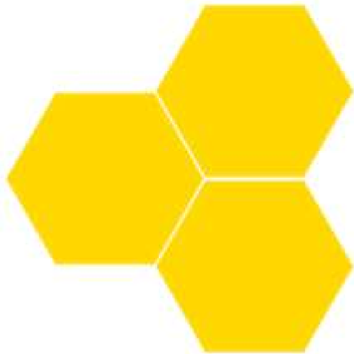


3.2.4. Aktivnost *Sastavi lik sa zadanim zbrojem veličina unutarnjih kutova*

Nakon određivanja veličina kutova zadanog lika, slijedi konstruiranje likova sa zadanim zbrojem veličina unutarnjih kutova. Učenici sedmih razreda podijele se u parove te svaki par dobije komplet geometrijskih pločica i nastavni listić. Zadatak učenika je da samostalno sastave lik sa zadanim zbrojem unutarnjih kutova. U paru imaju iste zadatke pa kada sastave lik sa zadanim zbrojem veličina unutarnjih kutova, onda će usporediti i provjeriti dobivena rješenja. Uočit će da iako su imali isti zbroj veličina unutarnjih kutova, sastavili su različite likove i u sastavljaju likova koristili su drugačije pločice.

***Nastavni listić* 3.2.4. *Primjer rješenja nastavnih listića jednog para iz Aktivnosti* 3.2.4.**

Učenik A	Učenik B
1. Sastavite lik tako da mu je zbroj unutarnjih kutova jednak 1440°!	
	
2. Sastavite lik tako da mu je zbroj unutarnjih kutova jednak 900°!	
	

3. Sastavite lik tako da mu je zbroj unutarnjih kutova jednak 2340°!	
	
4. Sastavite lik tako da mu je zbroj unutarnjih kutova jednak 1800°!	
	

3.3. Geometrijske pločice, površina i opseg

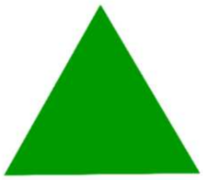
Prema Nacionalnom matematičkom kurikulumu, učenici se s opsegom likova susreću već u trećem razredu osnovne škole kada prvo na neformalan način mjere opseg likova pomoću konca, vune, papirnatih vrpci te na taj način određuju opseg zadanih likova. Potom određuju opseg pravokutnika, kvadrata i trokuta.

U četvrtom razredu se susreću s površinom te prvo uspoređuju likove različitih površina prema veličini dijela ravnine koji zauzimaju, a nakon što otkriju pojam površine, određuju površinu likova ucrtanih u kvadratnoj mreži. U petom razredu se ponovno susreću s opsegom i površinom. Dalje slijedi nekoliko aktivnosti primjerenih za peti razred osnovne škole u kojima će učenici računati opsege i površine složenih likova, surađivati u skupinama i izražavati ideje, rezultate i znanje govornim i matematičkim jezikom.

3.3.1. Aktivnost *Moj opseg je…*

Učenici su se u trećem razredu već susreli s opsegom likova te su računali opseg trokuta, kvadrata i pravokutnika, a ovom će aktivnosti u petom razredu usustaviti znanje o opsegu tako da će određivat opseg geometrijskog lika predstavljenog geometrijskom pločicom. Učenici rade u tročlanim skupinama, a svakoj od njih na raspolaganju je osnovni komplet geometrijskih pločica. Iz njega svaki učenik nasumično izdvaja dvije pločice. Mjeri duljine stranica odabranih geometrijskih pločica te računa opseg geometrijskog lika predstavljenog geometrijskom pločicom. Po završetku ostatku grupe opisuje kako je izračunao opseg pojedinog geometrijskog lika predstavljenog geometrijskom pločicom. U Tablici 3.3.1. nalazi se primjer zapisa jednog učenika iz grupe.

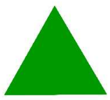
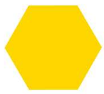
Tablica 3.3.1. Primjer učeničkog odgovora ako je izvukao narančastu i zelenu geometrijsku pločicu

Lik: 	Lik: 
Zaključci:	Zaključci:
$a = 25$ mm	$a = 25$ mm
$o = 4 \cdot 25$ mm	$o = 4 \cdot 25$ mm
$o = 100$ mm	$o = 100$ mm

3.3.2. Aktivnost *Od zadanih pločica složi lik najvećeg i najmanjeg opsega*

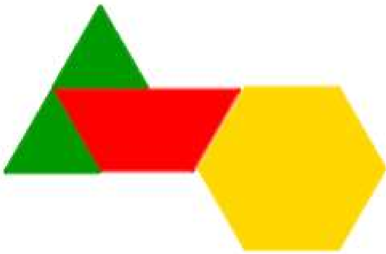
Učenici petih razreda će u ovoj aktivnosti sastavljati likove najvećeg opsega. Svaki par dobiva Tablicu 3.3.2. i kockicu za igru koja ima na svojim stranama brojeve 0, 1 i 2 te set geometrijskih pločica. Na početku popunjavaju Tablicu 3.3.2. tako da naizmjenično bacaju kocku i pod broj geometrijskih pločica zapišu broj koji je pao na kockici. Nakon toga moraju sastaviti lik najvećeg opsega koristeći pločice iz Tablice 3.3.2. Učenici zajedno u paru sastavljaju likove koristeći pločice te računaju opseg za svaki lik koji sastave (Tablica 3.3.3). Analiziraju koji od sastavljenih likova ima najveći opseg, ali i koji ima najmanji opseg.

Tablica 3.3.2. Tablica u koju učenici upisuju koliko kojih pločica će koristiti u sastavljanju likova

Geometrijska pločica					
Broj geometrijskih pločica	0	2	1	0	1

Na papiru crtaju otisak ruba sastavljenog lika s najvećim opsegom te objašnjavaju razredu koje pločice su koristili i koji od svih likova koje su sastavili ima najveći opseg. Uočavaju da ako žele najveći opseg onda pločice žele spojiti na kraćim stranicama, a duže stranice žele da budu rubovi lika.

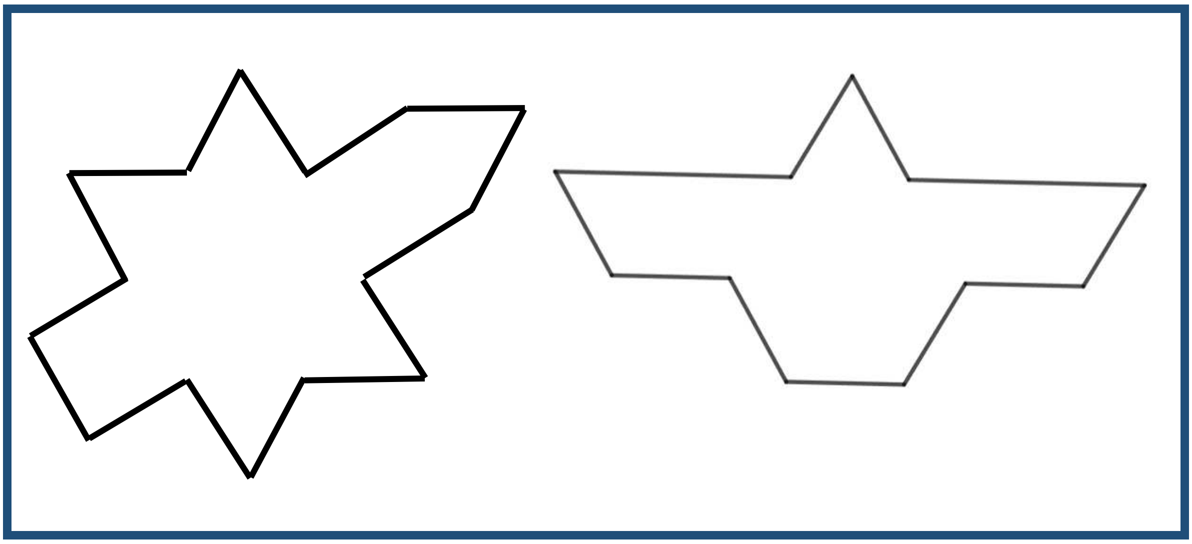
Tablica 3.3.3. Primjeri likova koje su učenici u paru složili koristeći pločice iz Tablice 3.3.2. i njihove površine

		
$o = 9 \cdot 25 + 1 \cdot 50$ $o = 225 + 50$ $o = 275 \text{ mm}$	$o = 11 \cdot 25$ $o = 275 \text{ mm}$	$o = 9 \cdot 25 + 1 \cdot 50$ $o = 225 + 50$ $o = 275 \text{ mm}$
		
$o = 7 \cdot 25 + 1 \cdot 50$ $o = 175 + 50$ $o = 225 \text{ mm}$	$o = 9 \cdot 25 + 1 \cdot 50$ $o = 225 + 50$ $o = 275 \text{ mm}$	$o = 9 \cdot 25$ $o = 225 \text{ mm}$

3.3.3. Aktivnost *Koja je moja površina?*

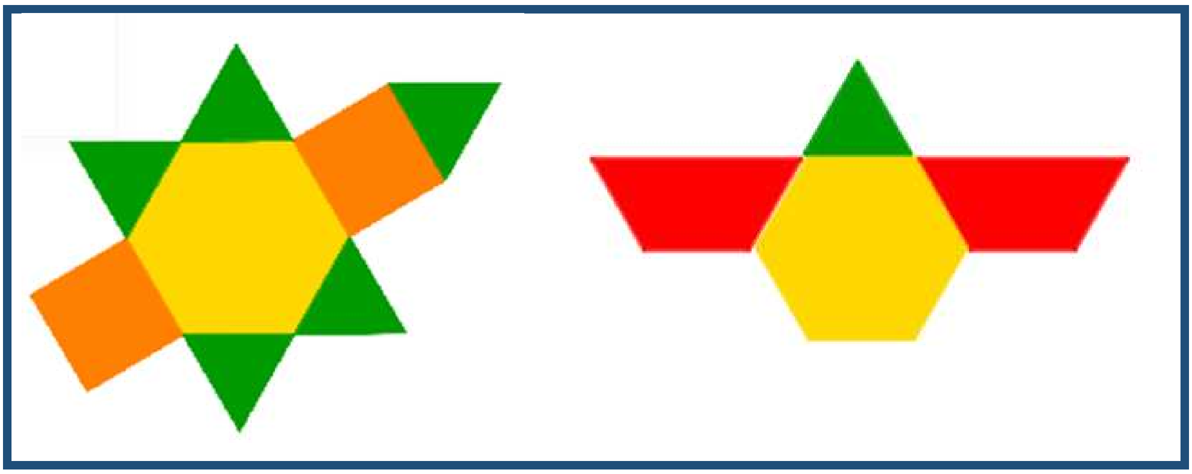
Cilj aktivnosti jest odrediti površinu složenog geometrijskog lika. Aktivnost je namijenjena učenicima osmih razreda osnovne škole. Učenici će biti organizirani u četveročlanim skupinama, te svakom učeniku na raspolaganju je komplet s najmanje šest primjeraka svake geometrijske pločice te nastavni listić s obrisom složenog lika (Slika 3.3.1.) i tablicom (Tablica 3.3.2.).

Slika 3.3.1. Primjeri obrisa složenog lika



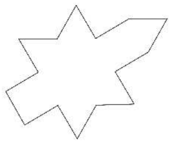
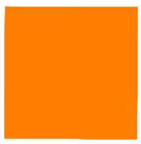
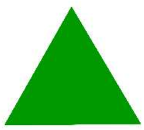
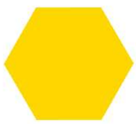
Svaki učenik individualno određuje različite načine na koje može složeni lik popločati pločicama kao na Slici 3.3.2. te računa površinu popločanog lika koristeći se poznatim površinama geometrijskih pločica. Svoja zapažanja zapisuje u tablicu (Tablica 3.3.4.).

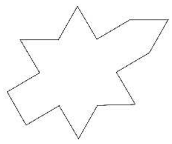
Slika 3.3.2. Primjer popločavanja obrisa geometrijskim pločicama



Potom učenici u skupini uspoređuju svoja rješenja i komentiraju što su otkrili. Uočavaju da su složeni lik popločali na različite načine te na različite načine izračunali površinu, ali i da su svi učenici s istim obrisom početnog lika dobili jednaku površinu. Zaključuju da površinu složenog lika mogu izračunati tako da ga rastave na jednostavnije geometrijske likove kojima znaju izračunati površinu.

***Tablica* 3.3.4. *Primjer tablice za Aktivnost* 3.3.3.**

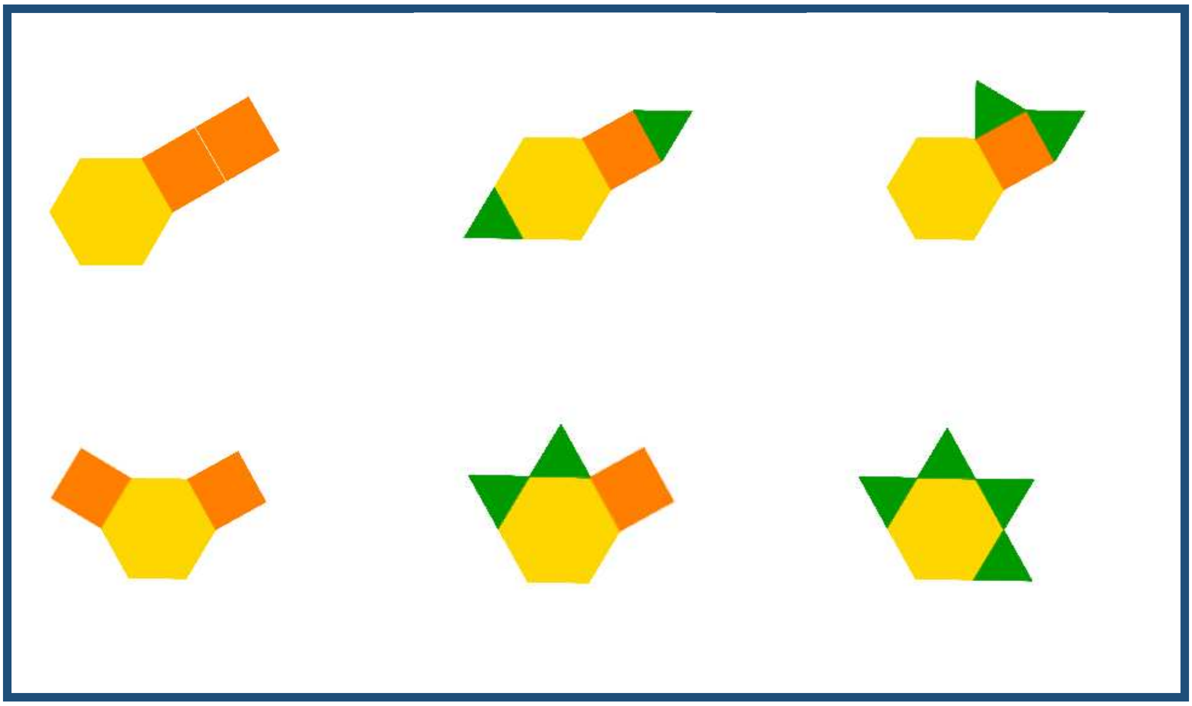
<table>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Geometrijska pločica</td><td>Površina geometrijske pločice</td><td>Broj iskorištenih pločica u popločavanju</td><td>Površina složenog lika</td></tr>
<tr><td></td><td>$a = 25\text{ mm}$
$P = 25\text{mm} \cdot 25\text{ mm}$
$P = 625\text{ mm}^2$</td><td>2</td><td rowspan="3">$P = 2 \cdot 625\text{ mm}^2$
$+5 \cdot \frac{625\sqrt{3}}{4}\text{ mm}^2$
$+\frac{1875\sqrt{3}}{2}\text{ mm}^2$</td></tr>
<tr><td></td><td>$a = 25\text{ mm}$
$P = \frac{25^2\sqrt{3}}{4}$
$P = \frac{625\sqrt{3}}{4}\text{ mm}^2$</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>$a = 25\text{ mm}$
$P = 6 \cdot \frac{25^2\sqrt{3}}{4}$
$P = \frac{1875\sqrt{3}}{2}\text{ mm}^2$</td><td>1</td></tr>
</table>

			
Geometrijska pločica	Površina geometrijske pločice	Broj iskorištenih pločica u popločavanju	Površina složenog lika
	$a = 25$ mm $v = \frac{25}{2}$ mm $P = 25 \cdot \frac{25}{2}$ $P = \frac{625}{2}$ mm^2	0	
	$a = 25$ mm $v = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ mm $P = 25 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2}$ $P = \frac{625\sqrt{3}}{2}$ mm^2	0	
	$a = 25$ mm $v = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ mm $P = \frac{(25+50)\cdot\frac{25\sqrt{3}}{2}}{2}$ $P = \frac{1875\sqrt{3}}{4}$ mm^2	0	

3.3.4. Aktivnost *Složi lik zadanog opsega*

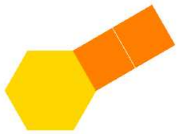
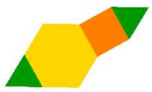
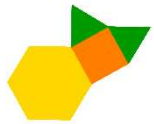
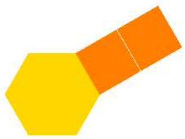
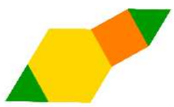
Učenici petih razreda će, suradnički u četveročlanim skupinama u ovoj aktivnosti uočiti da različiti likovi mogu imati isti opseg. Svakom učeniku na raspolaganju je komplet s najmanje šest primjeraka svake geometrijske pločice. Svaki učenik individualno slaže lik zadanog opsega. Opseg se zadaje u milimetrima tako da je višekratnik broja 25 koji je veći od 50. Na primjer, opseg koji bi se mogao zadati jest 250 milimetara. Primjer rješenja, ako je zadani opseg 250 milimetara, nalazi se na Slici 3.3.3.

Slika 3.3.3. Primjeri rješenja za likove s opsegom 250 milimetara



Potom učenici u skupini uspoređuju svoja rješenja i uočavaju da ne izgledaju svi likovi jednako iako svi imaju jednak opseg. Promatraju površine sastavljenih likova te procjenjuju jesu li jednake. Nakon toga dobivaju drugi nastavni listić na kojem ucrtavaju svoje likove te računaju površine tih likova (Nastavni listić 3.3.1.).

Nastavni listić **3.3.1.** *Primjeri rješenja nastavnog listića*

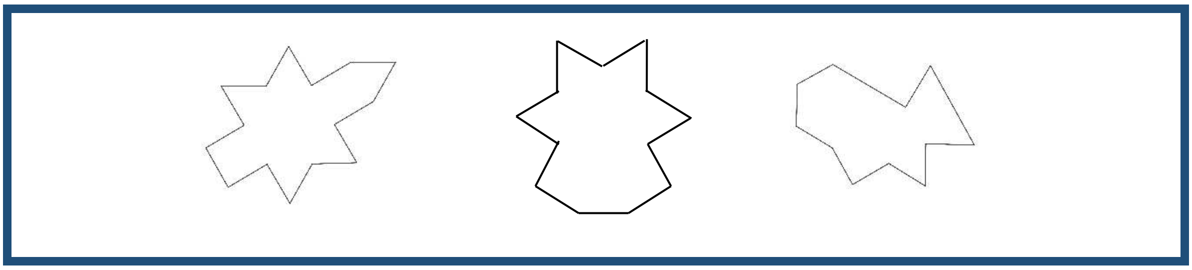
<table>
<tr><td colspan="3">1. Nacrtajte likove koje ste sastavili i izračunajte njihove površine!</td></tr>
<tr>
<td>
$P = 2 \cdot 625\ \text{mm}^2 + 1 \cdot \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$
$P = 1250 + \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$</td>
<td>
$P = 1 \cdot 625\ \text{mm}^2 + 2 \cdot \frac{625\sqrt{3}}{4}\ \text{mm}^2 + 1 \cdot \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$
$P = 625 + 1250\sqrt{3}\ \text{mm}^2$</td>
<td>
$P = 1 \cdot 625\ \text{mm}^2 + 2 \cdot \frac{625\sqrt{3}}{4}\ \text{mm}^2 + 1 \cdot \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$
$P = 625 + 1250\sqrt{3}\text{mm}^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>
$P = 2 \cdot 625\ \text{mm}^2 + 1 \cdot \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$
$P = 1250 + \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$</td>
<td>
$P = 1 \cdot 625\ \text{mm}^2 + 2 \cdot \frac{625\sqrt{3}}{4}\ \text{mm}^2 + 1 \cdot \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$
$P = 625 + 1250\sqrt{3}\ \text{mm}^2$</td>
<td>
$P = 4 \cdot \frac{625\sqrt{3}}{4}\ \text{mm}^2 + 1 \cdot \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$
$P = 625\sqrt{3} + \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">2. Imaju li svi likovi jednaku površinu?
Ne.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Koji lik ima njaveću površinu i koliko ona iznosi?
  $P = 1250 + \frac{1875\sqrt{3}}{2}\ \text{mm}^2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Koji lik ima najmanju površinu i koliko ona iznosi?
   $P = 625 + 1250\sqrt{3}\ \text{mm}^2$</td></tr>
</table>

Uspoređuju dobivene rezultate i uočavaju da mogu biti različite. Utvrđuju koji lik ima najmanju površinu, a koji najveću površinu. Učenici su sada zaključili ako likovi imaju jednaki opseg da to ne mora znači da imaju jednaku površinu, te se postavlja pitanje ako dva lika imaju istu površinu, moraju li imati isti opseg.

3.3.5. Aktivnost *Koji je komad tkanine veće površine?*

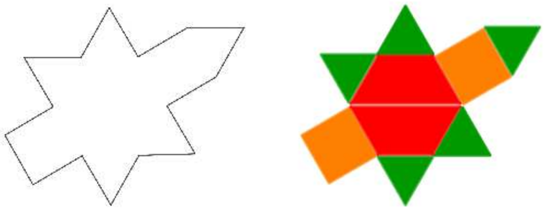
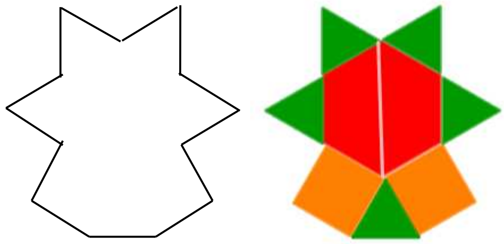
Cilj aktivnosti jest uočiti da geometrijski likovi različitih oblika mogu imati jednaku površinu. Aktivnost je namijenjena učenicima osmih razreda osnovne škole. Učenici će raditi suradnički u četveročlanim skupinama, a na raspolaganju im je komplet s najmanje šest primjeraka svake geometrijske pločice te nastavni listić s obrisom složenog lika (Slika 3.3.4.). Svaki učenik u skupini dobiva obris lika koji treba popločiti dobivenim pločicama. Likovi koje dobivaju učenici su različiti.

***Slika* 3.3.4. *Primjeri iz Aktivnosti* 3.3.5.**



Svaki učenik individualno mjeri površinu popločavanjem geometrijskim pločicama. Učenici ne računaju površinu, nego ju mjere geometrijskim pločicama. Nakon što su svi učenici u skupini popločali svoje obrise, uspoređuju dobivene površine. Jedna od ideja jest da uspoređuju koje su iste pločice koristili, a koje različite i pitaju se kako najbolje usporediti različite pločice. Druga je ideja da pokušaju presložiti svoje pločice u neki lik koji mogu svi članovi u grupi složiti od svojih pločica. Dakle, na različite načine učenici dolaze do istog zaključka, a to je da, iako su na početku imali različit lik (obris), na kraju su svi imali jednaku površinu (preslagivanje geometrijskih pločica, uspoređivanje geometrijskih pločica). Zaključuju da više likova može izgledati drugačije, ali imati istu površinu. Potom promatraju opsege složenih likova. Prvo pokušavaju procijeniti opseg svakog lika, odnosno procijenit imaju li jednake opsege, ako nemaju koji od složenih likova ima najveći, a koji najmanji opseg. Kada procijene, svoje zaključke provjeravaju računski (Tablica 3.3.5.). Na kraju dolaze do zaključka da ne mora vrijediti da ako neka dva lika imaju jednaku površinu da imaju i jednak opseg.

***Slika* 3.3.5. *Neka učenička rješenja iz Aktivnosti* 3.3.5.**

	
$a = 25\text{ mm}$ $o = 15 \cdot a$ $o = 15 \cdot 25$ $o = 375\text{ mm}$	$a = 25\text{ mm}$ $o = 13 \cdot a$ $o = 13 \cdot 25$ $o = 325\text{ mm}$

3.4. Geometrijske pločice i mnogokuti

Iako su učenici okruženi mnogokutima u stvarnom životu i već u prvom razredu izdvajaju i imenuju kvarat, pravokutnik i trokut, tek u sedmom razredu osnovne škole otkrivaju pojam mnogokuta. Dalje slijede aktivnosti kojima će učenici otkriti svojstva konveksnih mnogokuta te su one namijenjene učenicima sedmih razreda. U tim aktivnostima, učenici će surađivati u četveročlanim skupinama i svakom učeniku će na raspolaganju biti komplet pločica s barem šest primjeraka svake pločice.

3.4.1. Aktivnost *Svojstva konveksnog mnogokuta*

Učenici će, slagati razne mnogokute, i na nizu primjera povezati konveksnost s unutarnjim kutovima mnogokuta. Svaka skupina dobiva zajednički nastavni listić za sastavljanje, crtanje i analizu likova. Na listićima se nalaze i uputstva kakve mnogokute moraju sastaviti (Radni listić 3.4.1.).

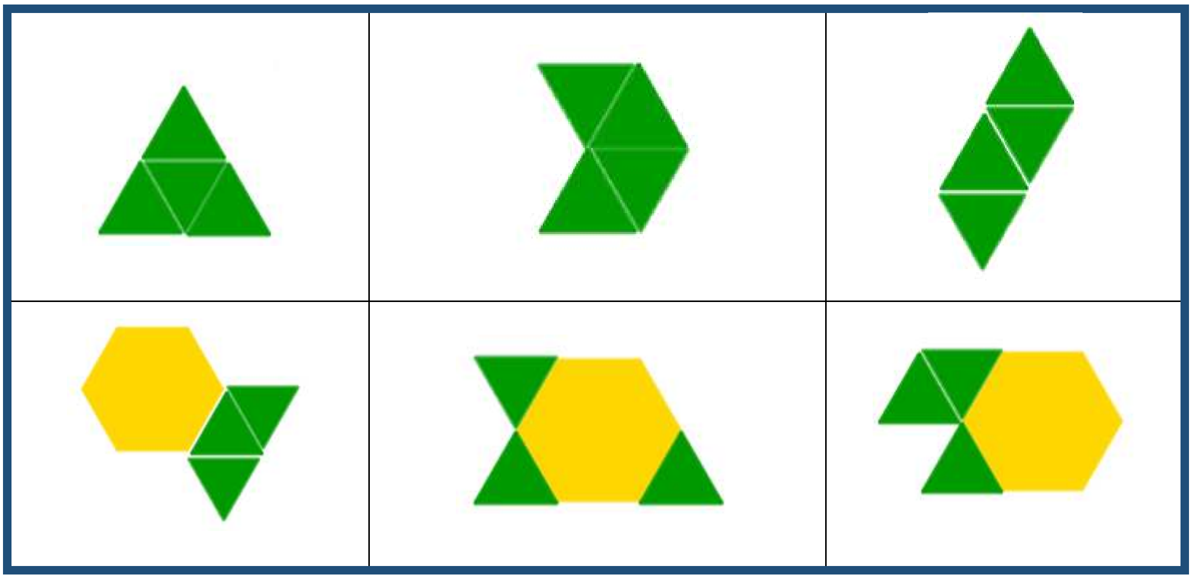
Radni listić 3.4.1. Primjeri uputstva za sastavljanje mnogokuta za jednu skupinu

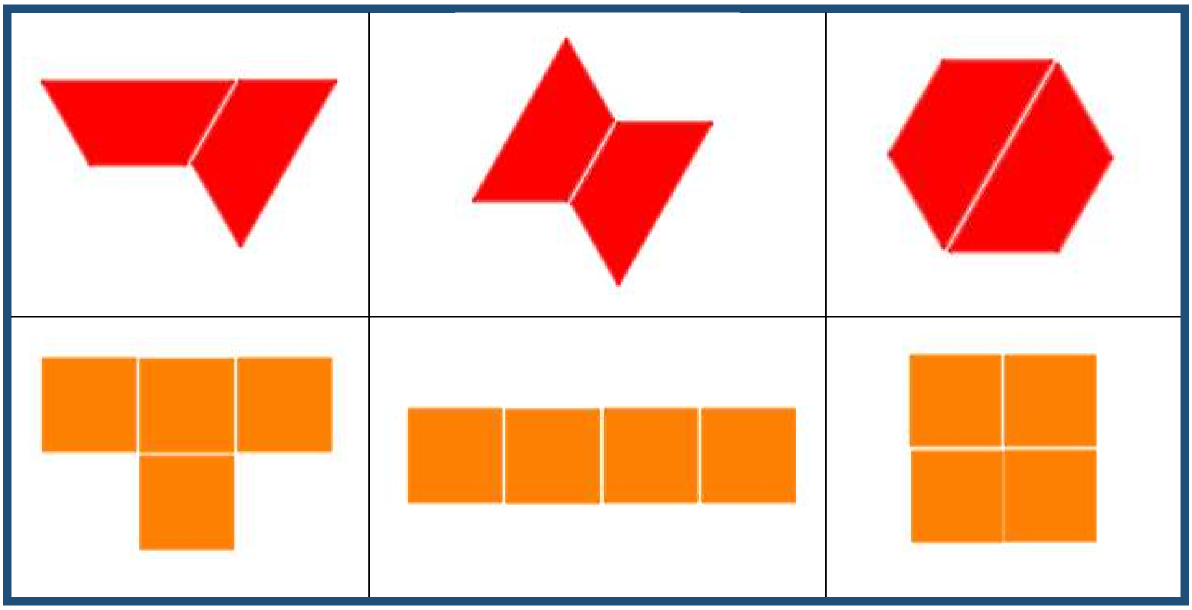
Skupina 1

1. Sastavite mnogokut koristeći točno četiri zelene pločice.
2. Sastavite mnogokut koristeći točno jednu žutu i tri zelene pločice.
3. Sastavite mnogokut koristeći točno dvije crvene pločice.
4. Sastavite mnogokut koristeći točno četiri narančaste pločice.
5. Sastavite mnogokut koristeći tri zelene i jednu crvenu pločicu.
6. Sastavite mnogokut koristeći jednu plavu, dvije crvene i jednu žutu pločicu.
7. Sastavite mnogokut koristeći dvije zelene, jednu plavu, jednu crvenu i dvije žute pločice.
8. Sastavite mnogokut koristeći dvije narančaste pločice.
9. Sastavite mnogokut koristeći jednu zelenu i dvije crvene pločice.
10. Sastavite mnogokut koristeći dvije zelene i jednu narančastu pločicu.

Učenici će za svaki zadatak otkriti više načina na koje mogu sastaviti traženi mnogokut. U skupinama će komentirati razna rješenja koja su dobili te jesu li mogli još na koji način sastaviti mnogokut koristeći zadani broj pločica.

Tablica 3.4.1. Primjeri više mogućih rješenja Radnog listića 3.4.1.

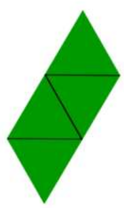
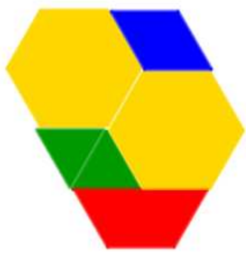


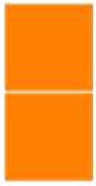
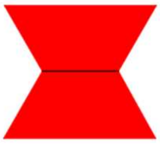
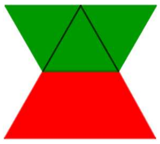
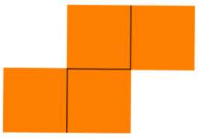
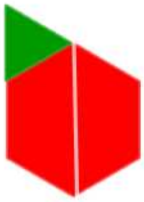


Tablica 3.4.1. Primjeri više mogućih rješenja Radnog listića 3.4.1.

Svaki složeni mnogokut će ucrtati na listić, odnosno nacrtati otisak ruba sastavljenog lika te će popuniti tablicu u kojoj će bilježiti koliko kutova ima njihov mnogokut i veličine unutarnjih kutova. U Tablici 3.4.2. i Tablici 3.4.3. nalaze se primjeri jednog učeničkog rješenja. Učenici će u grupi imati različite mnogokute, a onda i različit broj konveksnih i nekonveksnih mnogokuta.

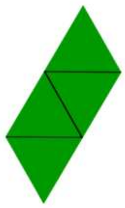
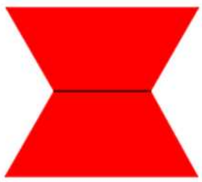
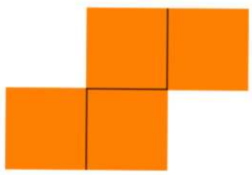
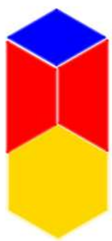
Tablica 3.4.2. Primjer jednog učeničkog rješenja iz Aktivnosti 3.4.1.

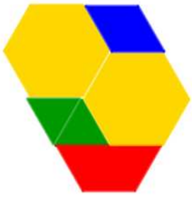
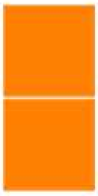
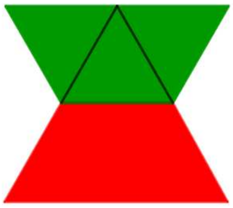
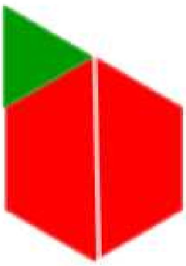
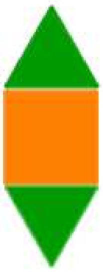
Mnogokut	Je li mnogokut konveksan?	Mnogokut	Je li mnogokut konveksan?
	Mnogokut je konveksan.		Mnogokut je konveksan.
Mnogokut	Je li mnogokut konveksan?	Mnogokut	Je li mnogokut konveksan?

	Mnogokut je nekonveksan.		Mnogokut je konveksan.
	Mnogokut je nekonveksan.		Mnogokut je nekonveksan.
	Mnogokut je nekonveksan.		Mnogokut je konveksan.
	Mnogokut je konveksan.		Mnogokut je konveksan.

Prvo proučavaju radi li se o konveksnom ili nekonveksnom mnogokutu (Tablica 3.4.2.), a zatim promatraju kutove svakog mnogokuta. Određuju veličine unutarnjih kutova zadanih mnogokuta (Tablica 3.4.3.).

Tablica 3.4.3. ***Primjer jednog učeničkog rješenja iz Aktivnosti*** **3.4.1.**

Mnogokut	Koliko kutova ima mnogokut?	Koje su veličine unutarnjih kutova mnogokuta?
	Mnogokut ima 4 kuta.	Mnogokut ima: • 2 tupa kuta veličine 120° • 2 šiljasta kuta veličine 60°
	Mnogokut ima 7 kutova.	Mnogokut ima: • 2 tupa kuta veličine 120° • 3 šiljasta kuta veličine 60° • 2 izbočena kuta veličine 240°
	Mnogokut ima 6 kutova.	Mnogokut ima: • 4 šiljasta kuta veličine 60° • 2 izbočena kuta veličine 240°
	Mnogokut ima 8 kutova.	Mnogokut ima: • 6 pravih kutova veličine 90° • 1 izbočeni kut veličine 270°
	Mnogokut ima 6 kutova.	Mnogokut ima: • 6 tupih kutova veličine 120°

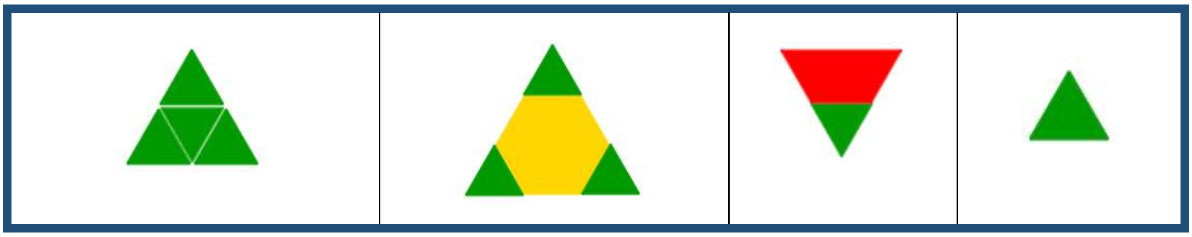
Mnogokut	Koliko kutova ima mnogokut?	Koje su veličine unutarnjih kutova mnogokuta?
	Mnogokut ima 6 kutova.	Mnogokut ima: • 6 tupih kutova veličine 120°
	Mnogokut ima 4 kuta.	Mnogokut ima: • 4 prava kuta veličine 90°
	Mnogokut ima 6 kutova.	Mnogokut ima: • 4 šiljasta kuta veličine 60° • 2 izbočena kuta veličine 240°
	Mnogokut ima 5 kutova.	Mnogokut ima: • 4 tupa kuta veličine 120° • 1 šiljasti kut veličine 60°
	Mnogokut ima 6 kutova.	Mnogokut ima: • 4 tupa kuta veličine 150° • 2 šiljasta kuta veličine 60°

Nakon što su popunili tablicu analizirat će dobivene likove i zaključiti da neki od sastavljenih mnogokuta imaju sve kutove veličine manje od 180°, a neki one veličine veće od 180° te da niti jedan mnogokut nije imao sve kutove izbočene. Uočit će da su imali razne mnogokute (četverokut, peterokut, šesterokut, sedmerokut, osmerokut), te su neki bili konveksni, a drugi nekonveksni. Nakon provedene analize doći će do zaključka da postoji povezanost između Tablice 3.4.2. i Tablice 3.4.3., odnosno da svaki mnogokut koji imaju sve unutarnje kutove veličine manje od 180° je konveksni mnogokut, a mnogokut koji ima barem jedan unutarnji kut veličine veće od 180° je nekonveksni mnogokut.

3.4.2. Aktivnost *Što možemo zaključiti o konveksnim mnogokutima?*

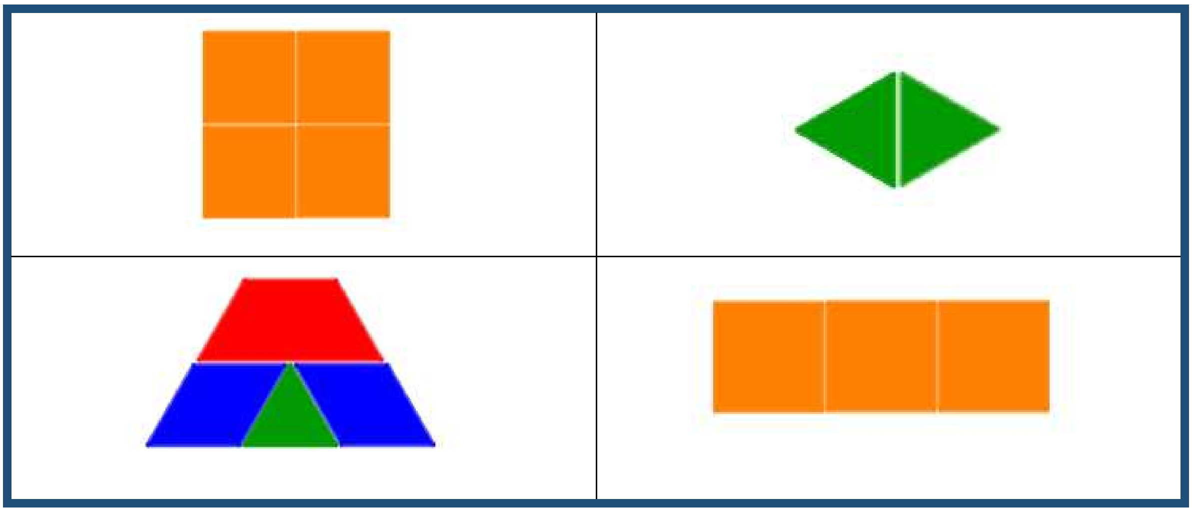
Cilj aktivnosti jest otkriti izraz za zbroj veličina unutarnjih kutova n-terokuta. Učenici su organizirani u peteročlane skupine, a za svaku od njih treba pripremiti komplet geometrijskih pločica s barem šest primjeraka svake pločice, pet primjeraka nastavnog listića (po jednu za svakog učenika, Nastavni listić 3.4.2.) te tablica u koju će zapisati rezultate cijele skupine (Tablica 3.4.4.). Polaze od trokuta odabirući odgovarajuće geometrijske pločice i u tablicu zapisuju koliki su mu unutarnji kutovi i koliki je ukupan zbroj veličina unutarnjih kutova koristeći pritom poznate činjenice o veličinama unutarnjih kutova geometrijskih pločica. Svaki učenik samostalno slaže svoj mnogokut te mu određuje veličine unutarnjih kutova i svoja zapažanja bilježi na nastavni listić (Nastavni listić 3.4.2.).

Slika* 3.4.1. *Nekoliko primjera kako učenici mogu složiti trokut od geometrijskih pločica



Analogno popunjavaju tablicu za četverokut. Nadalje, od dobivenih geometrijskih pločica učenici sastavljaju peterokut te određuju njegove unutarnje kutove i njihov zbroj.

Slika 3.4.2. Nekoliko primjera kako učenici mogu sastaviti četverokut od geometrijskih pločica

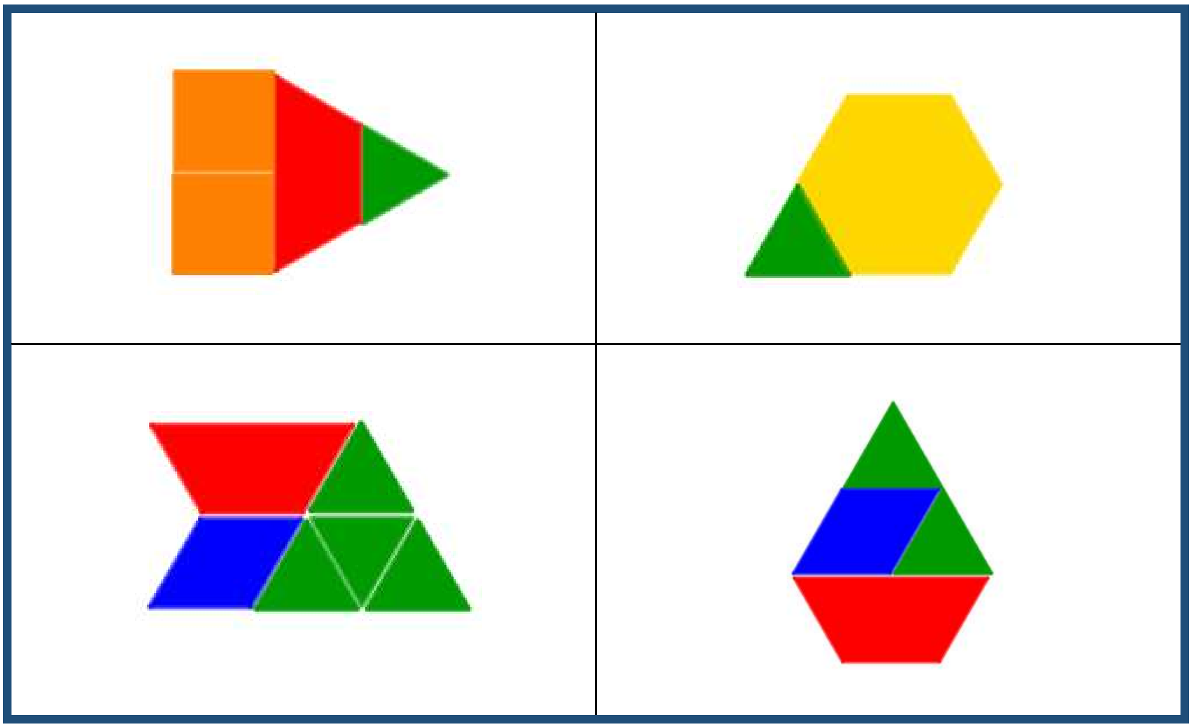


Na primjer učenici peterokut mogu sastaviti od jedne narančaste i jedne zelene pločice, kao što je prikazano na Slici 3.4.4.

Slika 3.4.4. Primjer kako učenici mogu sastaviti peterokut od geometrijskih pločica te odrediti veličine unutarnjih kutova

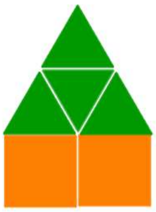
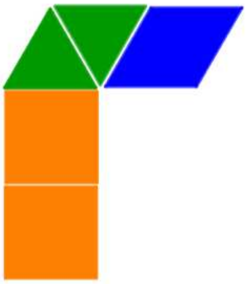
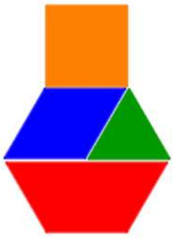
Učenici zapažaju da peterokut ima pet kutova, od čega su dva prava (90°), jedan šiljasti veličine 60° te dva tupa kuta veličine 150°. Računaju zbroj veličina svih unutarnjih kutova u tom peterokutu i zapisuju ga u tablicu. Postoji više načina na koje su učenici u skupini mogli sastaviti peterokut (primjer Slika 3.1.4.).

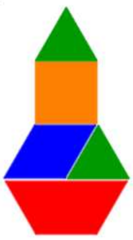
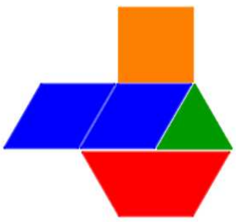
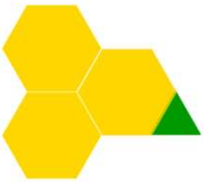
Slika 3.4.4. Nekoliko primjera kako učenici mogu sastaviti peterokut od geometrijskih pločica



Analogan postupak ponavljaju za šesterokut, sedmerokut, osmerokut, deveterokut, deseterokut, jedanaesterkut i dvanaeasterkut te pritom popunjavaju Nastavni listić 3.4.2.

Mnogokut	Broj stranica mnogokuta	Veličine unutarnjih kutova mnogokuta	Zbroj veličina svih unutarnjih kutova mnogokuta
Trokut 	3	60°, 60°, 60°	180°
Četverokut 	4	60°, 60°, 120°, 120°	360°

Mnogokut	Broj stranica mnogokuta	Veličine unutarnjih kutova mnogokuta	Zbroj veličina svih unutarnjih kutova mnogokuta
Peterokut 	5	60°, 150°, 150°, 90°, 90°	540°
Šesterokut 	6	60°, 60°, 210°, 90°, 90°, 210°	720°
Sedmerokut 	7	120°, 120°, 270°, 90°, 90°, 150°, 60°	900°
Osmerokut 	8	120°, 120°, 120°, 120°, 210°, 210° 90°, 90°	1080°

Mnogokut	Broj stranica mnogokuta	Veličine unutarnjih kutova mnogokuta	Zbroj veličina svih unutarnjih kutova mnogokuta
Deveterokut 	9	$120°, 120°, 120°,$ $120°, 210°, 210°$ $150°, 150°, 60°$	$1260°$
Desterokut 	10	$120°, 120°, 120°,$ $60°, 120°, 270°$ $90°, 90°, 210°, 240°$	$1440°$
Jedanaesterokut 	11	$120°, 120°, 120°,$ $240°, 120°, 120°, 120°$ $240°, 120°, 240°, 60°$	$1620°$
Dvanaesterokut 	12	$120°, 120°, 120°, 120°,$ $120°, 120°, 120°, 120°$ $240°, 240°, 240°, 120°$	$1800°$

Nastavni listić 3.4.2. Primjer rješenja jednog učenika iz skupine iz Aktivnosti 3.4.2.

Nakon što su popunili Nastavni listić 3.4.2., učenici zajedno uspoređuju rješenja te ih bilježe u Tablicu 3.4.4.

***Tablica* 3.4.4. *Popunjena zajednička tablica cijele skupine iz Aktivnosti* 3.4.2.**

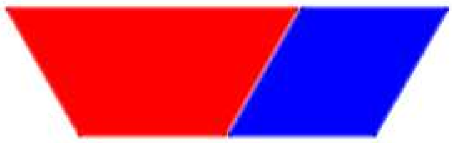
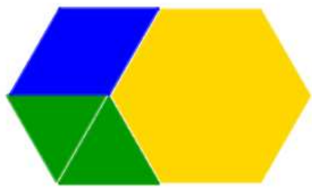
Mnogokut	Zbroj veličina unutarnjih kutova u mnogokutu				
	Učenik A	Učenik B	Učenik C	Učenik D	Učenik E
Trokut	$180°$	$180°$	$180°$	$180°$	$180°$
Četverokut	$360°$	$360°$	$360°$	$360°$	$360°$
Peterokut	$540°$	$540°$	$540°$	$540°$	$540°$
Šesterokut	$720°$	$720°$	$720°$	$720°$	$720°$
Sedmerokut	$900°$	$900°$	$900°$	$900°$	$900°$
Osmerokut	$1080°$	$1080°$	$1080°$	$1080°$	$1080°$
Deveterokut	$1260°$	$1260°$	$1260°$	$1260°$	$1260°$
Desterokut	$1440°$	$1440°$	$1440°$	$1440°$	$1440°$
Jednaesterokut	$1620°$	$1620°$	$1620°$	$1620°$	$1620°$
Dvaneasterokut	$1800°$	$1800°$	$1800°$	$1800°$	$1800°$

Učenici proučavaju popunjenu Tablicu 3.4.4. te uočavaju pravilnost, tj. iako su imali različite mnogokute, istovrsni imaju jednaki zbroj unutarnjih kutova. Također uočavaju da ako se broj stranica mnogokuta poveća za jedan onda se zbroj unutarnjih kutova poveća za 180°. Uočavaju da je zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta višekratnik broja 180, odnosno za trokut je zbroj veličina unutarnjih kutova $180°$, za četverokut $2 \cdot 180°$, za peterokut $3 \cdot 180°$, za šesterokut $4 \cdot 180°, \ldots$ Uočavaju povezanost broja stranica mnogokuta i zbroja unutarnjih kutova mnogokuta te dolaze do zaključka da je zbroj unutarnjih kutova mnogokuta jednak $(n-2) \cdot 180°$, gdje je n broj stranica mnogokuta.

3.4.3. Aktivnost *Stranice jednake duljine ili kutovi jednake veličine*

Učenici će ovom aktivnosti zaključiti da niti jednakost duljina stranica niti jednakost veličina unutarnjih kutova mnogokuta same za sebe nisu dovoljne da mnogokut bude pravilan, tj. da jednakost duljina stranica ne povlači jednakost veličina unutarnjih kutova i obratno, da iz jednakosti veličina unutarnjih kutova ne slijedi jednakost duljina svih stranica mnogokuta. Učenici su organizirani u parove, a za svaki par treba pripremiti komplet geometrijskih pločica s barem šest primjeraka svake pločice te zajednički nastavni listić za sastavljanje, crtanje i analizu likova.

***Nastavni listić* 3.4.3. *Primjer rješenja jednog para iz Aktivnosti* 3.4.3.**

<table>
<tr><td colspan="2">Četverokut</td></tr>
<tr><td>Sve stranice jednake duljine</td><td>Svi kutovi jednake veličine</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Šesterokut</td></tr>
<tr><td>Sve stranice jednake duljine</td><td>Svi kutovi jednake veličine</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Jedan učenik u paru od geometrijskih pločica sastavlja četverokut kojemu su sve stranice jednake duljine, a drugi učenik u paru sastavlja četverokut kojemu su svi kutovi jednake veličine te u sastavljanju koriste barem dvije geometrijske pločice. Rubove dobivenih likova precrtavaju na nastavni listić, potom označe njegove stranice i unutarnje kutove te pomoću geometrijskih pločica određuju duljine stranica i veličine kutova. Učenici provode postupak analogno za šesterokut i dvanaesterokut te uočavaju da i ako mnogokut ima sve stranice jednake duljine ne mora imati sve kutove jednake veličine, i obratno i ako ima sve kutove jednake veličine, ne mora imati sve stranice jednake duljine.

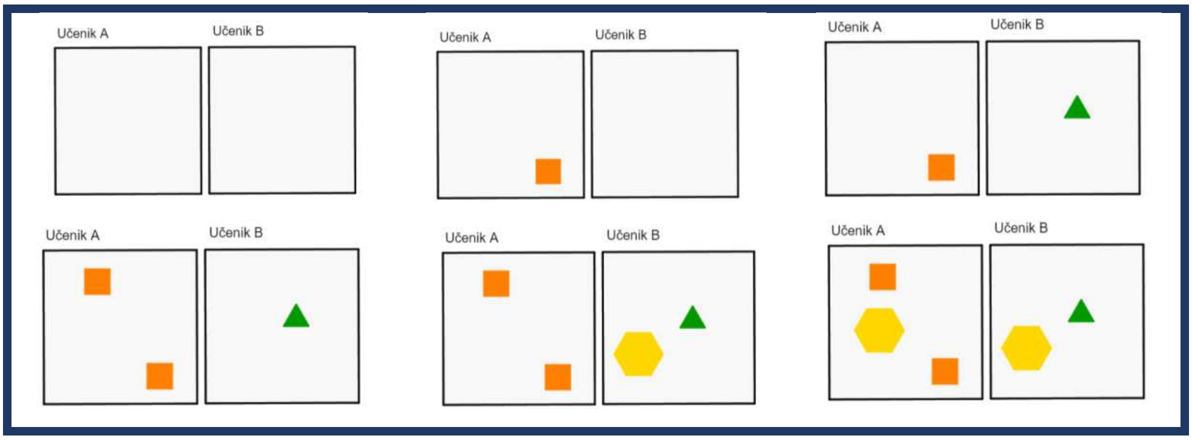
3.5. Geometrijske pločice i simetrije

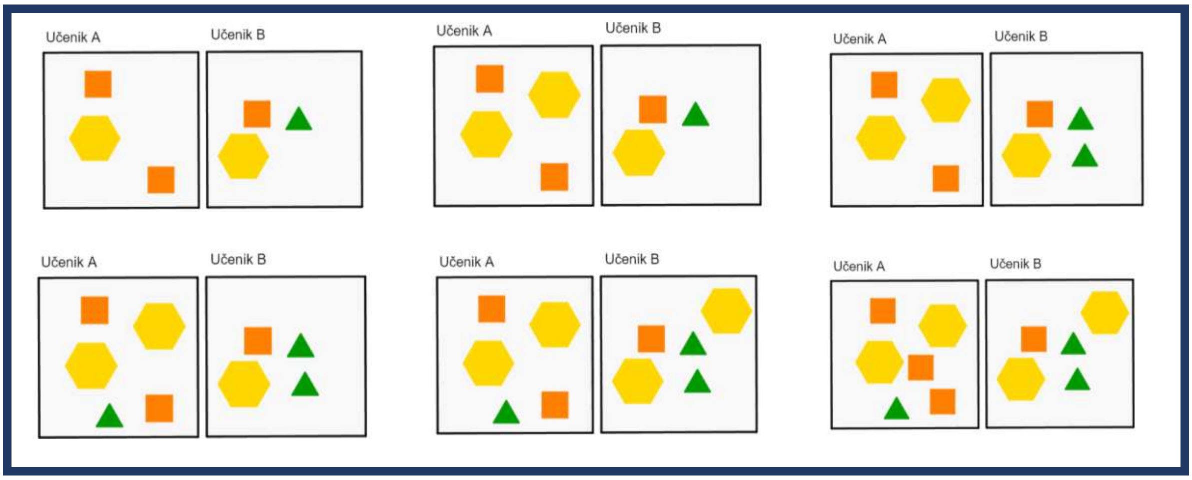
Prema Nacionalnom matematičkom kurikulumu, učenici se u petom razredu osnovne škole susreću prvi put sa simetrijama te otkrivaju osnu i centralnu simetriju. U sedmom razredu se susreće s translacijom, a rotaciju otkrivaju u srednjoj školi. U sljedećim aktivnostima učenici će otkriti osnu simetriju te usustaviti znanje o centralnoj simetriji. Svakom učeniku će biti potreban komplet geometrijskih pločica sa barem šest primjeraka svake pločice.

3.5.1. Aktivnost *Geometrijske pločice i osna simetrija*

Učenici će, kroz igru u paru i s nastavnikom, otkriti osnu simetriju. Dijele se u parove te svaki par dobiva listić s pravilima igre i predložak za igru. Učenici naizmjenično popunjavaju predložak tako da stavljaju pločicu na slobodno mjesto na svom predlošku s ciljem da mogu staviti na papir više pločica nego njihov par. Sami biraju koju će pločicu staviti i gdje će ju pozicionirati na predlošku. Igra završava kada učenik više nema mjesta na svom predlošku za novu pločicu.

Nastavni listić* 3.5.1. *Primjer predloška za Aktivnost* 3.5.1. *te primjer jednog učeničkog rješenja

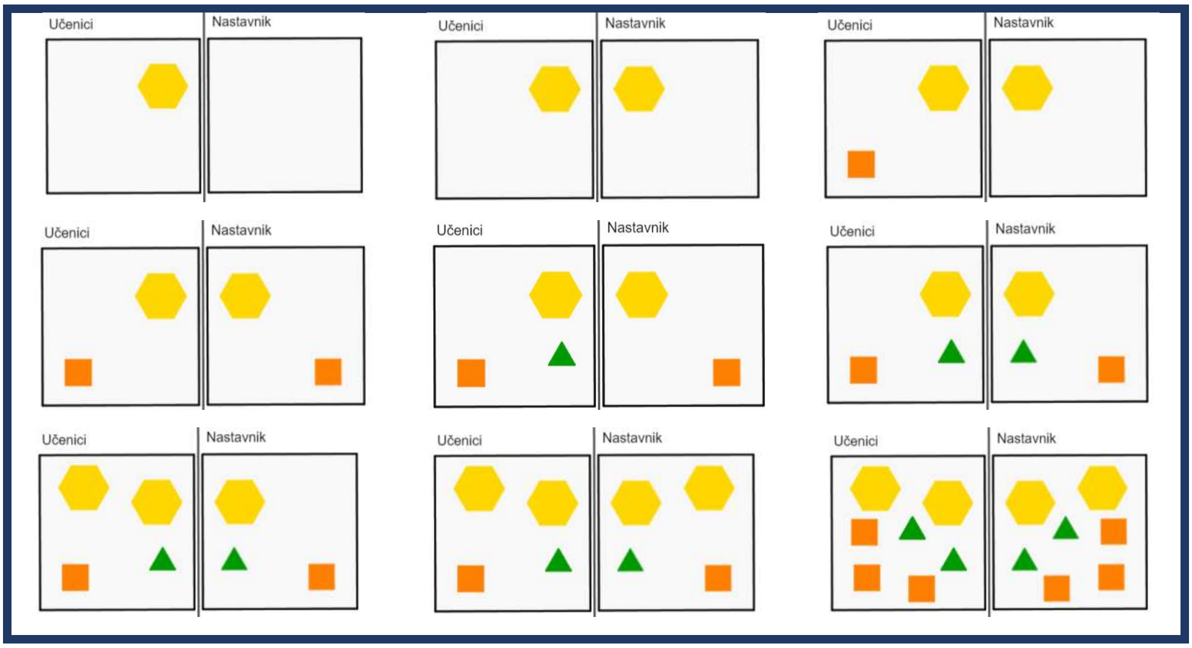




Učenici imaju istu površinu predloška na koju smještaju pločice i jednake komplete pločica pa tokom igre razvijaju razne strategije. Mogli bi sistematično slagati pločice jednu pokraj druge, ili prvo krenuti s postavljanjem manjih pločica (zelene i narančaste), a veće pločice (plave, crvene i žute) ostaviti za kraj , ili obratno. Važno je da učenici u razrednoj diskusiji prezentiraju svoje strategije i objasne zašto su se odlučili za tu strategiju jer će nakon toga igrati igru s nastavnikom pa će se morati odlučiti za određenu zajedničku strategiju.

Sada učenici igraju igru s nastavnikom, razred ima magnete u obliku geometrijskih pločica, te iste take magnete ima i nastavnik. Ploča je podijeljena na dva sukladna kvadrata koji predstavljaju igraća polja. Učenici igraju prvi, odnosno smještaju određeni magnet na igraću ploču. Nakon toga, nastavnik isti magnet smješta analogno, odnosno smješta ga na svoj dio igraće ploče na mjesto koje odgovara učeničkoj poziciji magneta. Učenici će razgovarati o strategiji koju primjenjuju i možda promijeniti ju, ali nastavnik cijelu igru reproducira korake učenika. Na kraju učenici više neće imat prostora za smjestiti pločicu što znači da je nastavnik pobijedio. Nakon igre u razrednoj diskusiji opet komentiraju koje strategije su primjenjivali oni, a koju strategiju je primjenjivao nastavnik. Zaključuju da je nastavnik u svakom koraku ponovio njihov korak na svojoj polovici, odnosno napravio je zrcalni potez.

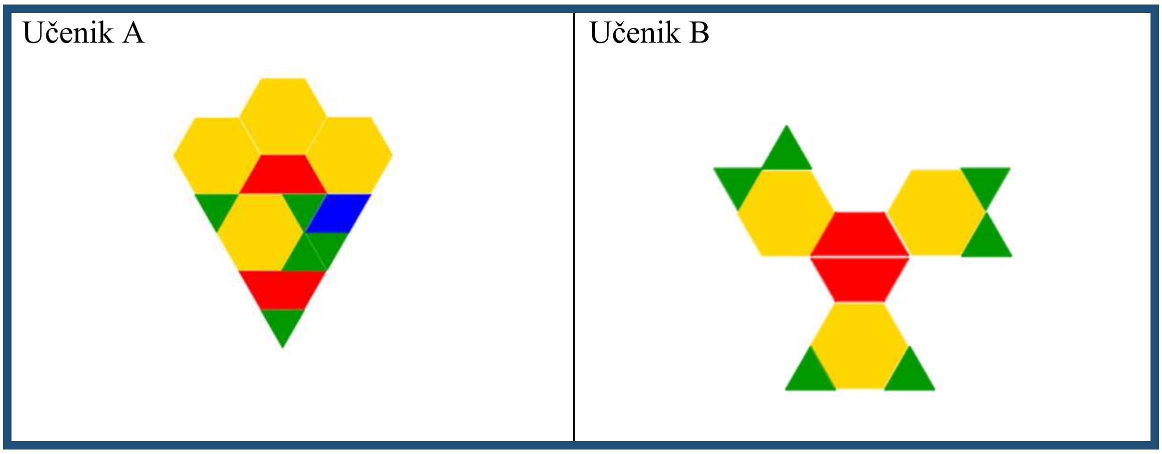
Slika **3.5.1.** ***Primjer tijeka jedne igre na ploči iz Aktivnosti*** **3.5.1.**



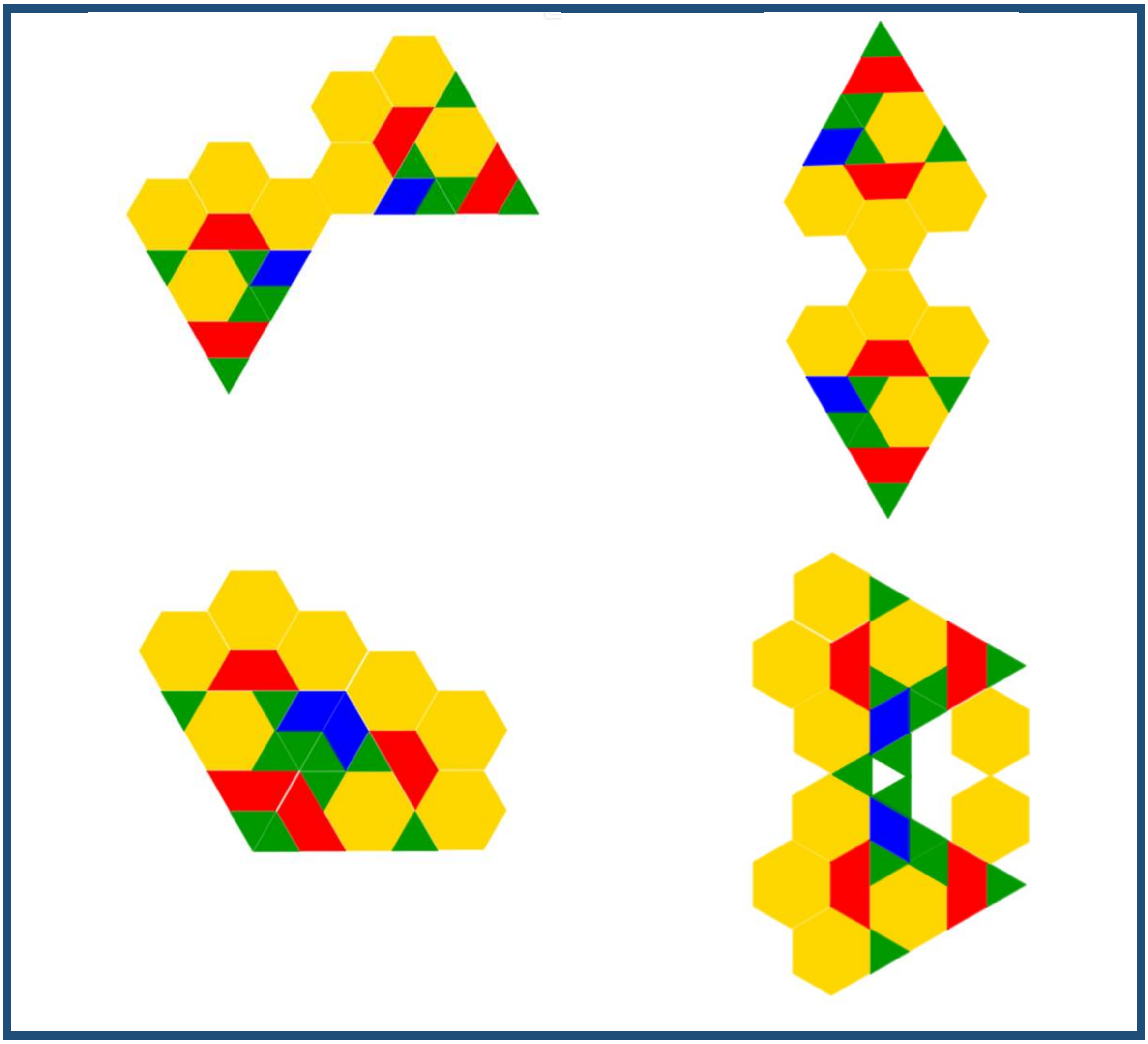
3.5.2. Aktivnost *Želim biti osnosimetričan*

U ovoj aktivnosti učenici će sastavljati proizvoljne likove te ih nadopunjavati pločicama i sastavljati nove likove tako da budu osnosimetrični. Organizirani su u parove te je svakome potrebno barem deset primjeraka svake pločice. Jedan u paru slaže proizvoljan lik na praznom papiru, a drugi učenik nakon toga dobiveni lik mora nadopuniti tako da bude osnosimetričan.

Slika **3.5.2.** ***Primjeri početnih likova***

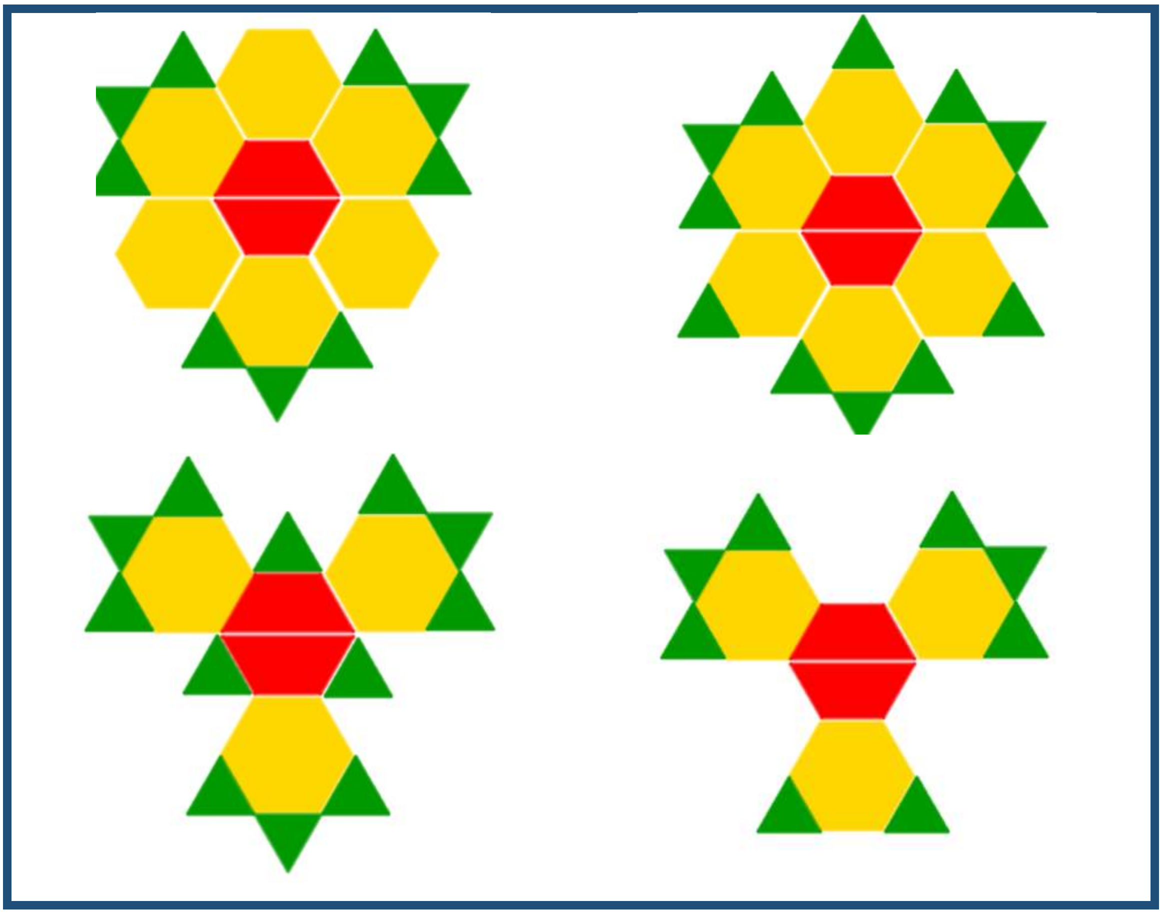


Slika 3.5.3. Primjer učeničkih rješenja



Nakon toga prvi učenik u paru mora odrediti os simetrije složenog lika. U parovima komentiraju jesu li mogli nekako drugačije nadopuniti likove da budu osnosimetrični i dolaze do zaključka da jesu. Zaključuju da sve ovisi koliko pločica mogu iskoristiti, ako im nije definiran broj pločica onda mogu složiti mnogo likova, a ako moraju iskoristiti najmanji broj pločica tako da lik bude osnosimetričan onda imaju samo jedno rješenje.

Slika 3.5.4. Primjer učeničkih rješenja

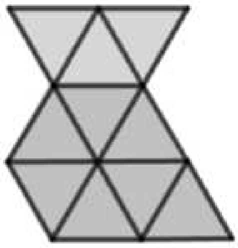


3.5.3. Aktivnost *Najmanji broj pločica da budem osnosimetričan*

Cilj ove aktivnosti je primijeniti osnu simetriju. Učenici će u četveročlanim skupinama dobiti nastavne listiće sa zadanim obrisom likova koje će sastaviti koristeći geometrijske pločice. Sami biraju koje pločice će iskoristiti. Proučit će složeni lik, odnosno odrediti je li zadani lik osnosimetričan te ako je odrediti koliko osi simetrija ima, a ako nije trebat će odrediti koliko im je najmanje pločica potrebno da lik bude osnosimetričan.

Nastavni listić 3.5.2. Primjer radnog listića iz Aktivnosti 3.5.2.

1. Složi zadane likove i odgovori na pitanja!
    a. Složi lik!



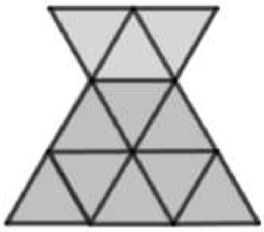
    b. Je li složeni lik osnosimetričan? Ako je osnosimetričan, odredi koliko osi simetrije ima!

    ____

    c. Ako nije osnosimetričan nadopuni ga s minimalnim brojem pločica da bude osnosimetričan! Koliko ti je pločica bilo potrebno?

    ____

2. Složi lik!



    a. Je li složeni lik osnosimetričan? Ako je osnosimetričan, odredi koliko osi simetrije ima!

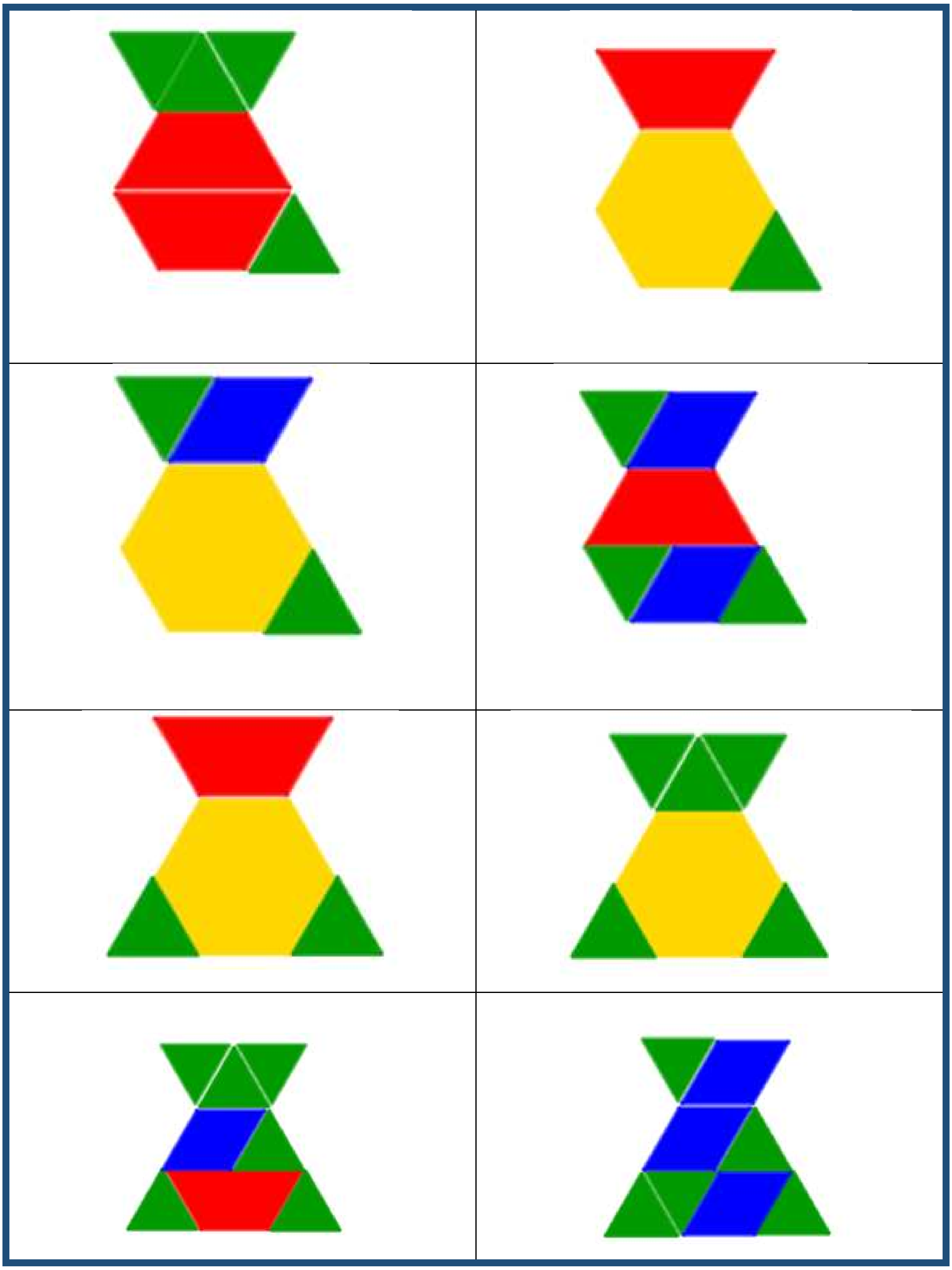
    ____

    b. Ako nije osnosimetričan nadopuni ga s minimalnim brojem pločica da bude osnosimetričan! Koliko ti je pločica bilo potrebno?

    ____

Iako si učenici u skupini dobili isti nastavni listić s istim obrisima uočavaju da su ga mogli na različite načine popločati, odnosno sastaviti od različitih pločica i to je u nekim slučajevima značilo da su neki učenici odmah složili osnosimetričan lik, dok drugi učenici nisu. U drugim primjerima uočavaju da im je ovisno o liku koji su složili bio potreban različit broj geometrijskih pločica za dopunjavanje lika da bude osnosimetričan.

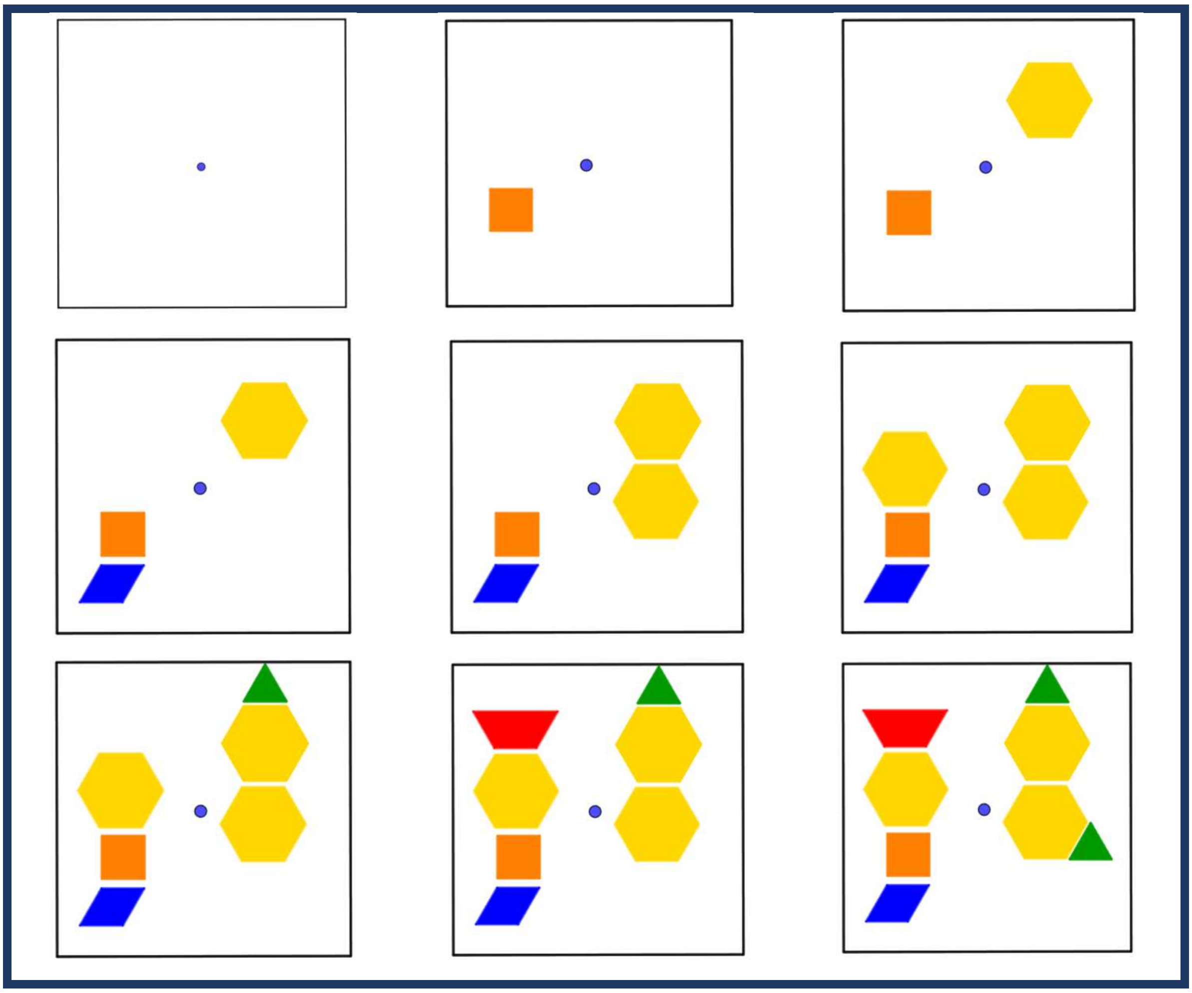
Slika 3.5.5. Primjer složenih likova jedne grupe

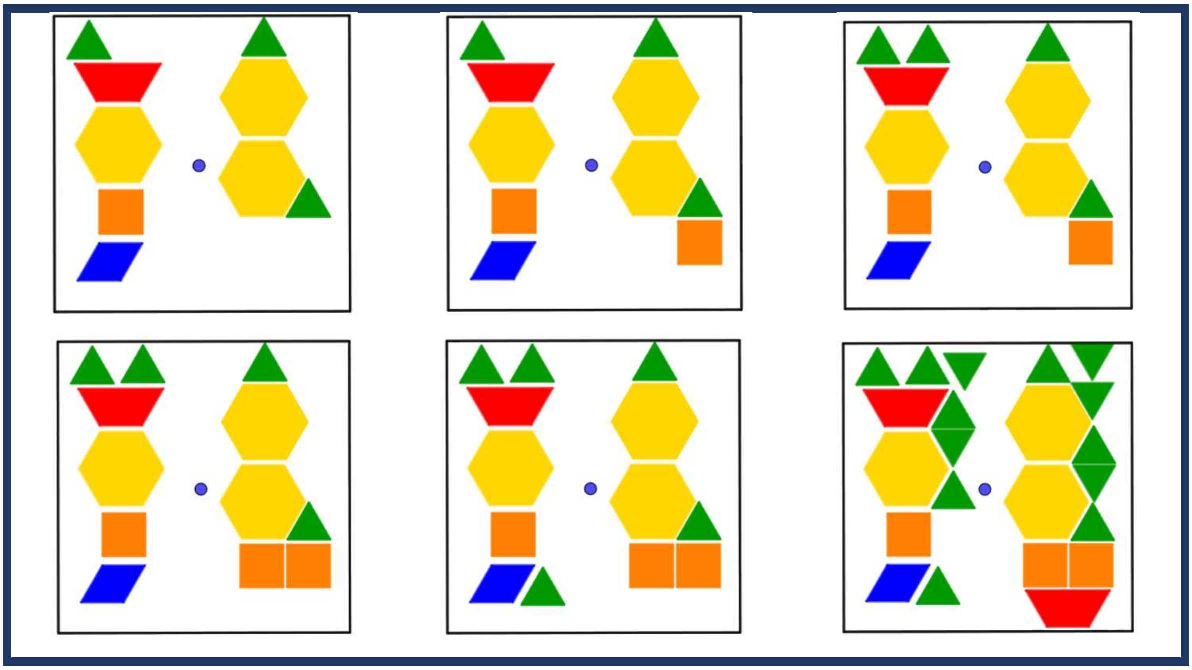


3.5.4. Aktivnost *Geometrijske pločice i centralna simetrija*

Učenici će organizirani u parove igrati igru popunjavanja četverokuta te otkriti centralnu simetriju. Potreban im je set geometrijskih pločica s barem šest primjeraka svake pločice, listić s pravilima igre i predložak četverokuta s točkom u sredini za popunjavanje. Učenik s desne strane u klupi popunjava desni dio predloška sa svojim pločicama, a učenik s lijeve strane lijevi dio predloška. Prvi igrač stavlja neku svoju pločicu na svoju stranu predloška. Nakon toga isto radi sljedeći igrač na svojoj strani. Pobjednik je onaj igrač koji zadnji uspije staviti neku pločicu na svoju stranu predloška. Jednom kada se pločica postavi ne smije se pomicati niti se smiju stavljati jedna preko druge. Nakon svake igre uspoređuju tko je pobijedio te kako su rasporedili pločice.

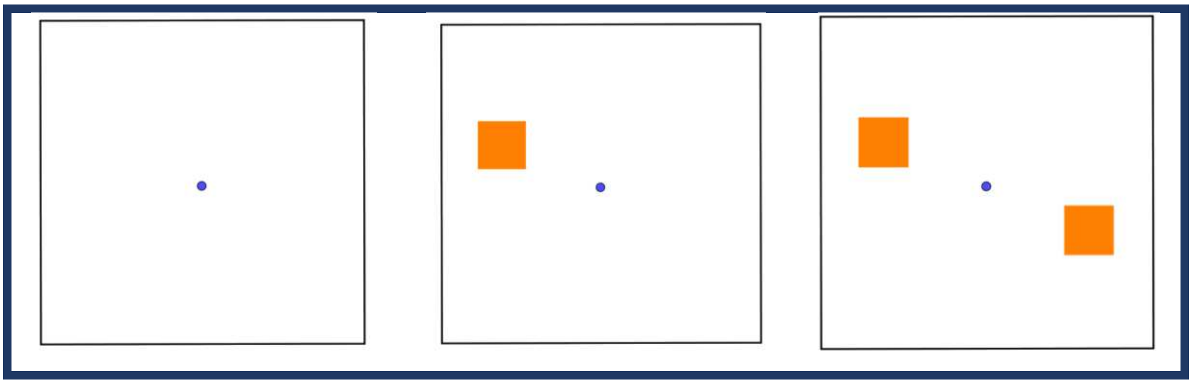
***Slika* 3.5.6. *Primjer tijeka jedne igre iz Aktivnosti* 3.5.4.**

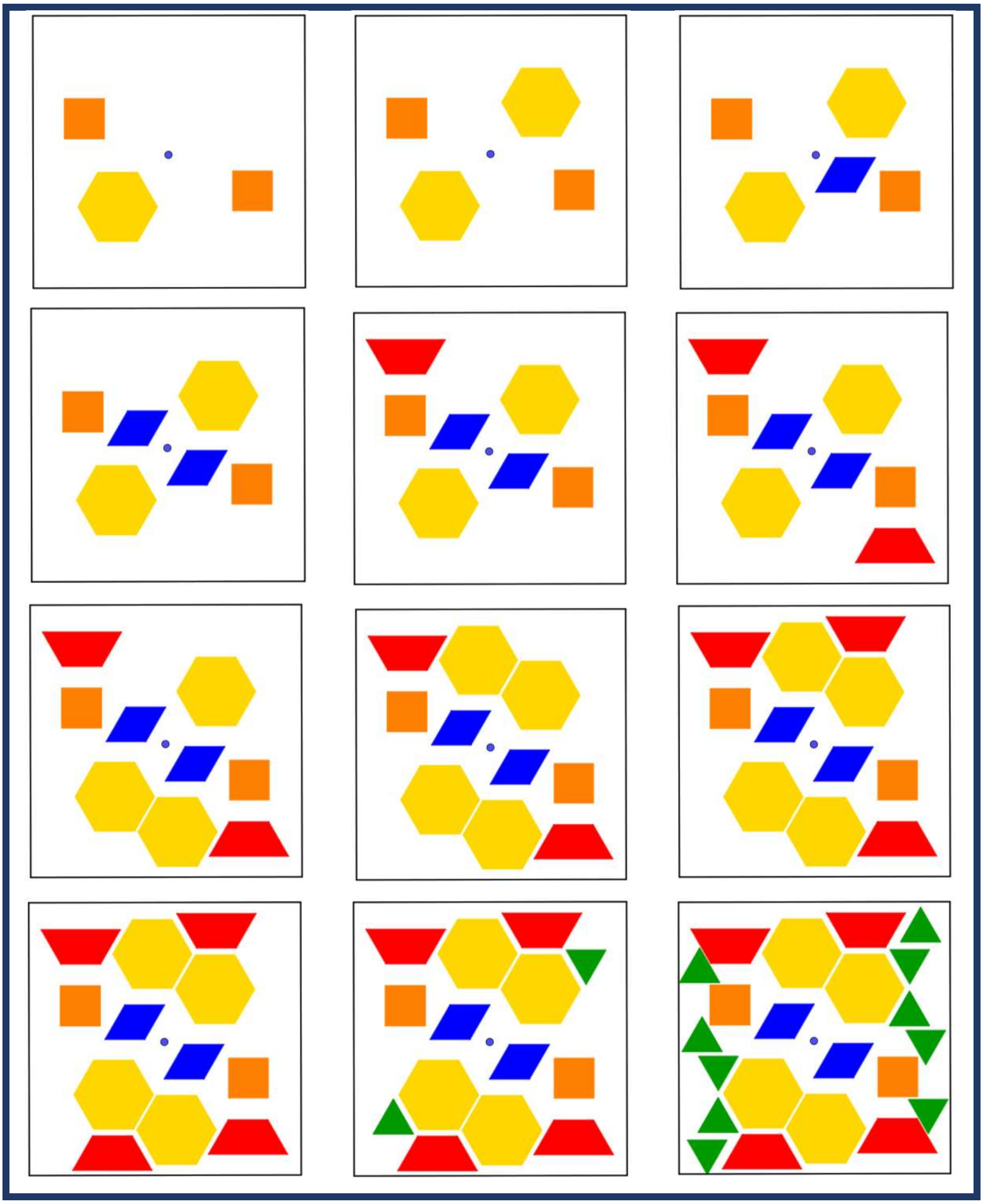




Nakon toga razred igra jednu igru s nastavnikom na ploči. Na ploči je postavljen četverokut s točkom u sredini, učenici i nastavnik imaju magnete u obliku geometrijskih pločica koje postavljaju u četverokut. Nastavnik prepušta učenicima prvi potez. Nakon nekoliko odigranih igara, učenici primjećuju da nastavnik uvijek pobjeđuje. Analiziraju kako postavlja pločice te uočavaju da nastavnik uvijek stavi pločicu suprotno u odnosu na pločicu koju su oni postavili u odnosu na točku u sredini.

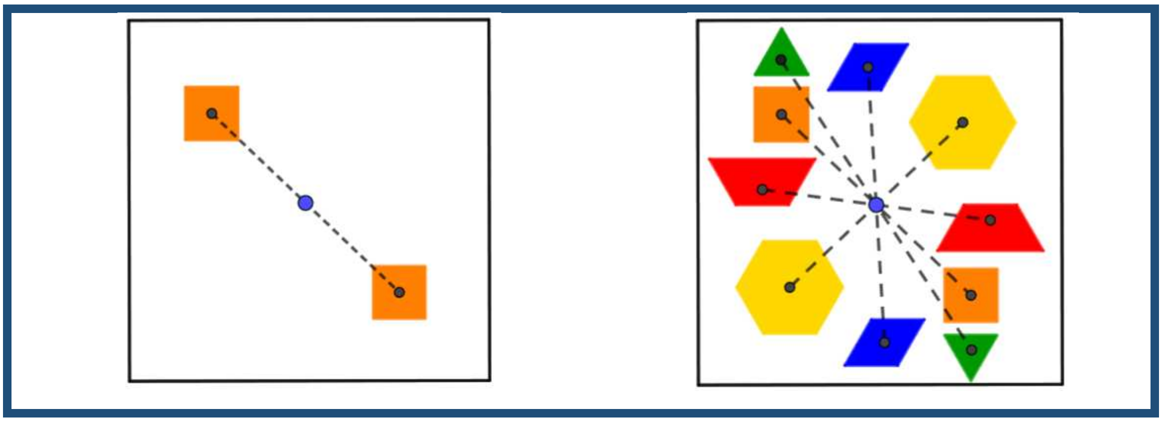
***Slika* 3.5.7. *Primjer tijeka jedne igre na ploči iz Aktivnosti* 3.5.4.**





Nastavnik na ploči označava središte jedne narančaste pločice i njoj središte „suprotne“ pločice te spaja središta. Učenici uočavaju da dužina koja spaja središta pločica prolazi središnjom točkom na papiru te da su udaljenosti središta pločica jednako udaljene od središnje točke četverokuta.

Slika 4.4.3. Primjer analize strategije na ploči



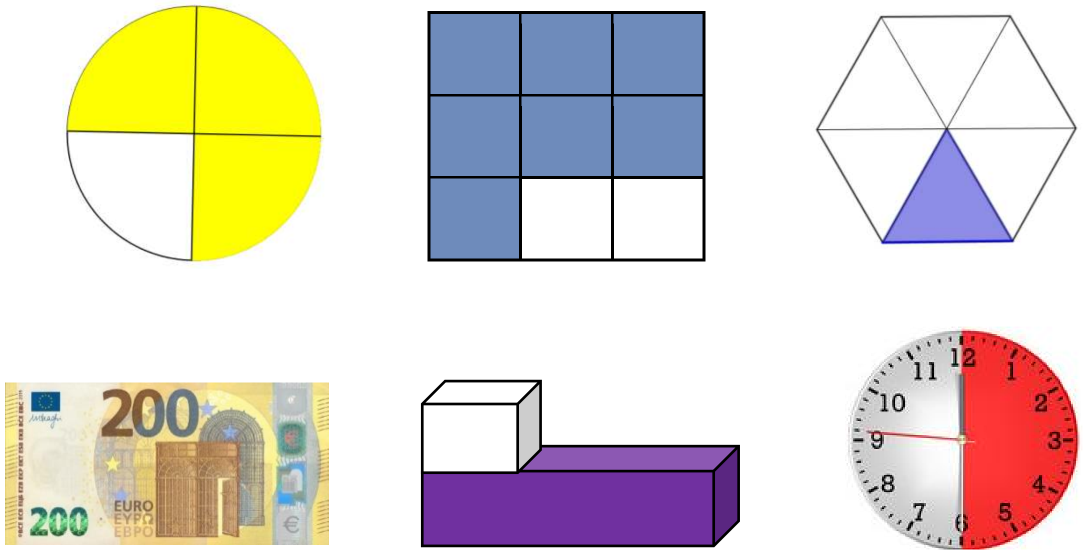
Nakon uočavanja pravilnosti, sami će ju pokušati primijeniti, odnosno postavit će jednu geometrijsku pločicu s jedne strane točke te će ju pokušati preslikati. Zaključit će da bi mogli provući pravac kroz središte postavljene pločice i točku na sredini, a središte druge pločice pripadat će tom pravcu i od točke u sredini bit će jednako udaljeno kao i središte postavljene pločice, samo će se nalaziti na suprotnoj strani pravca. Uočit će da su pločicu preslikavali preko te središnje točke te da bi tu točku koja se nalazi na sredini papira mogli nazvati centrom. Ta točka se naziva centrom simetrije, a takvo preslikavanje centralna simetrija.

3.6. Geometrijske pločice i razlomci

U petom razredu osnovne škole učenici se prvi put susreću s konceptom razlomka. Razlomke otkrivaju na raznim modelima (Slika 3.6.1). Neki od modela su:

- model duljine,
- model površine (model površine kruga, pravokutnika, kvadrata, pravilnih mnogokuta, modeli složenih površina),
- skupovni model,
- model mjernih jedinica (model mase, model zapremnine, model vremena, model novca).

Slika 3.6.1. Modeli pomoću kojih učenici otkrivaju razlomke



Učila kojima se učenici u tim otkrivanjima mogu poslužiti su u Cuisenaireovi štapići za model duljine te geometrijskim pločicama za model površine mnogokuta (Slika 3.6.2.). Učenici na kraju petog razreda prikazuju razlomke pomoću konkretnih modela (stvarnih objekata prikladnih oblika), grafički (slikovno), riječima i simbolički te s lakoćom prelaze iz jednog prikaza razlomka u drugi.

Slika 3.6.2.[6] Cuisenaireovi štapići (lijevo) i geometrijske pločice (desno)

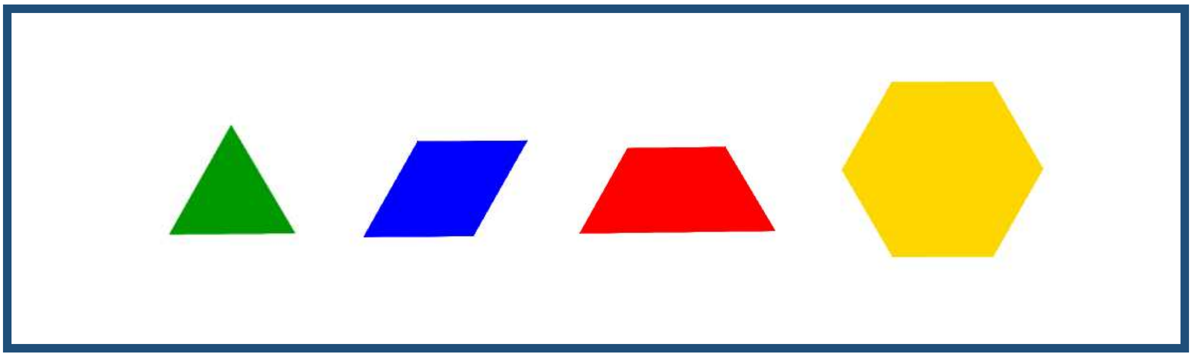
[6] https://www.eaieducation.com/

Nakon toga u šestom razredu, učenici otkrivaju ekvivalente razlomke, proširuju i skraćuju razlomke, svode razlomke na zajedničke nazivnike i najmanji zajednički nazivnik, zbrajaju i oduzimaju te množe i dijele razlomke.

Četiri najvažnije geometrijske pločice za koncept razlomka su (Slika 3.6.3):

- pravilni šesterokut (žuta pločica)
- jednakokračni trapez (crvena pločica)
- romb s kutom od 60° (plava pločica)
- jednakostranični trokut (zelena pločica)

Slika* 3.6.3. *Četiri najvažnije geometrijske pločice za koncept razlomka



3.6.1. Aktivnost *Geometrijske pločice i uvođenje pojma razlomak*

Učenici se dijele se u parove i svaki par dobiva komplet geometrijskih pločica i nastavni listić. Kroz ovu aktivnost učenici će istraživati veze među pločicama, odnosno određivati koliki dio pločice predstavlja neka druga pločica. Neki parovi će istraživati koje pločice mogu i kako popločati zelenom (Nastavni listić 3.6.1.), neki plavom i neki crvenom pločicom.

Nastavni listić 3.6.1. Primjer riješenog nastavnog listića za aktivnost 3.6.1.

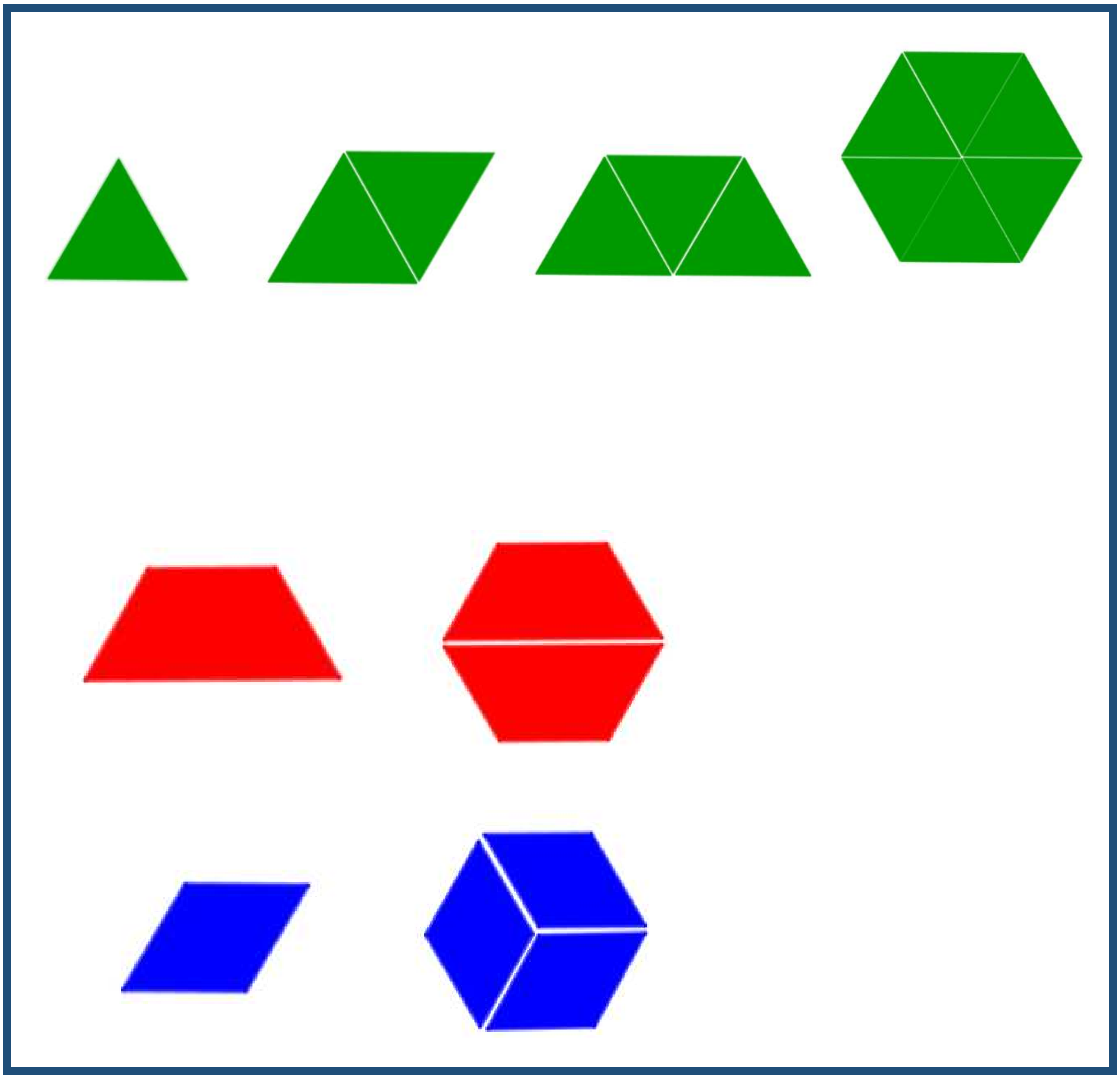
1. Od koliko se jednakih trokuta (zelenih pločica) sastoji:
    a. trokut (zelena pločica)?
    Od jedne zelene pločice.
    b. romb (plava pločica)?
    Od dvije zelene pločice.
    c. trapez (crvena pločica)?
    Od tri zelene pločice.
    d. šesterokut (žuta pločica)?
    Od šest zelenih pločica.

2. Odgovorite na pitanja!
    a. Koji dio plave pločice je zelena pločica?
    Polovica plave pločice.
    b. Koji dio crvene pločice je zelena pločica?
    Trećina crvene pločice.
    c. Koji dio žute pločice je zelena pločica?
    Šestina žute pločice.

Na primjer, parovi s Nastavnim listićem 3.6.1. će provjeravati koje pločice mogu popločati zelenom pločicom te koliko im je zelenih pločica potrebno da popločaju svaku od pločica. Uočit će da plavu mogu popločati s dvije zelene, crvenu mogu popločati s tri zelene, a žutu sa šest zelenih pločica (Slika 3.6.1.). Kako su im potrebne dvije jednake zelene pločice za popločavanje jedne plave pločice, zaključit će da će zelena pločica pokriti polovinu plave pločice. Analogno će zaključiti da će zelena pločica pokriti trećinu crvene i šestinu žute pločice.

Do analognih zaključaka dolaze i drugi parovi koji su pločice pokušavali popločati s plavim i crvenim pločicama (Slika 3.6.1.). Parovi svoje zaključke prezentiraju ostalim učenicima u razredu. U razrednoj diskusiji komentiraju jesu li neke pločice mogli popločati kombinacijom dvije vrste pločica.

Slika 3.6.1. Primjer rješenja kako su učenici popločali plavu, crvenu i žutu pločicu.

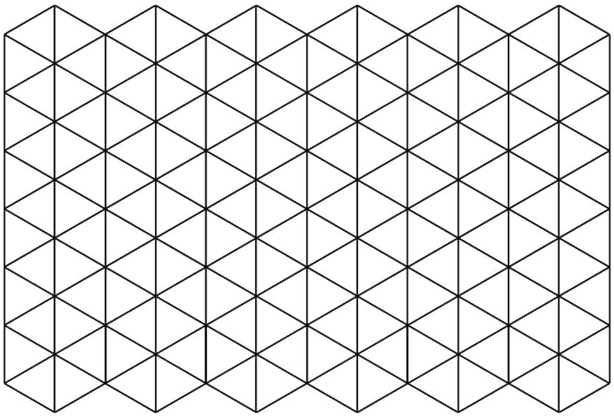


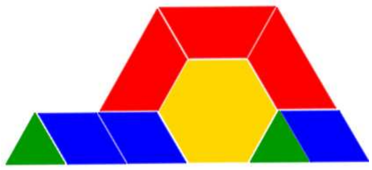
3.6.2. Aktivnost *Koji sam dio?*

Cilj ove aktivnosti jest povezivanje slikovnog prikaz razlomka sa svim vrstama brojevnih zapisa. Aktivnost je primjerena učenicima petog razreda, te su oni organizirani u parove. Svaki par dobiva komplet geometrijskih pločica i nastavni listić (Nastavni listić 3.6.2.).

Nastavni listić 3.6.2. Primjer nastavnog listića iz Aktivnosti 3.6.2.

1. Promotri sliku i pomoću pločica složi isti oblik te ga preslikaj na trokutastu mrežu:





2. Odgovori na pitanja!
   a. Na koliko jednakih dijelova je podijeljen puž? Što predstavlja jednaki dio?

   ____

   b. Koji dio puža predstavlja njegova kućica?

   ____

   c. Koji dio puža je zelene boje?

   ____

   d. Koji dio puža je plave boje?

   ____

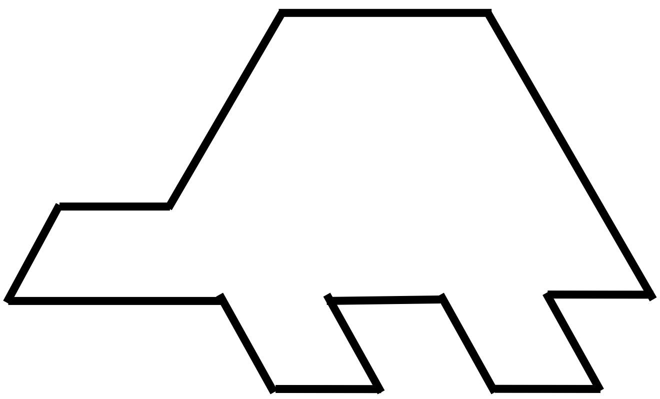
   e. Koji dio puža je crvene boje?

   ____

   f. Koji dio puža je žute boje?

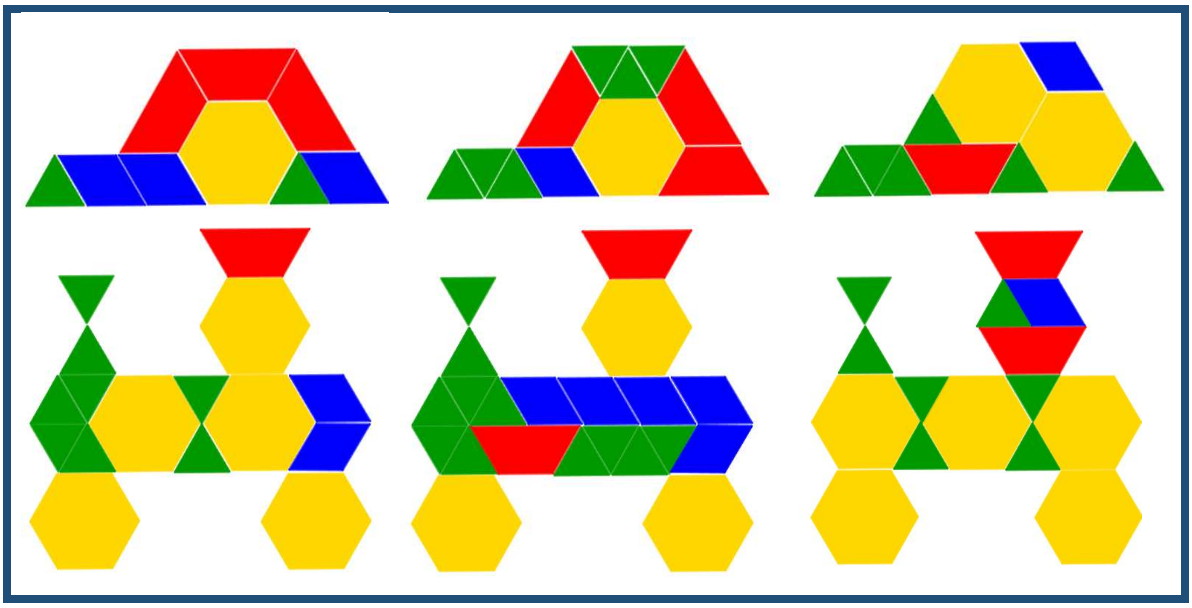
   ____

3. Popločajte lik sa slike pločicama tako da $\frac{1}{3}$ budu crvene boje!



Učenici na početku koriste pločice da slože isti lik te ga ucrtaju u trokutastu mrežu tako da im je lakše odrediti na koliko jednakih dijelova je podijeljen. Kada odrede na koliko jednakih dijelova je podijeljen učenici određuju koliki dio puža čini njegova kućica, koliki dio je zelene, plave, crvene ili žute boje. Učenici u paru imaju iste likove, ali sastavljene s drugačijim brojem pojedinih pločica, a na razni razreda ima više različitih likova (Slika 3.6.2.).

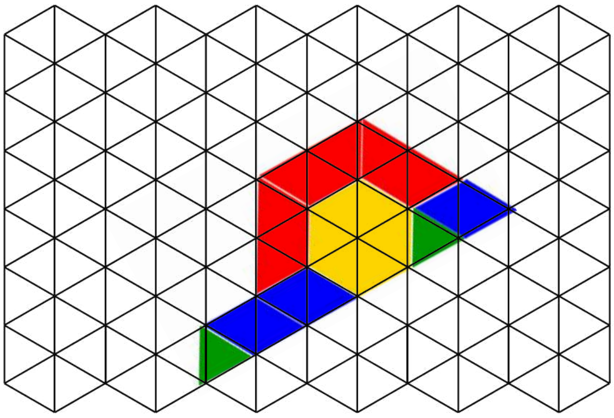
***Slika* 3.6.2. *Primjeri likova na razini razreda za prvi zadatak u Nastavnom listiću* 3.6.3.**



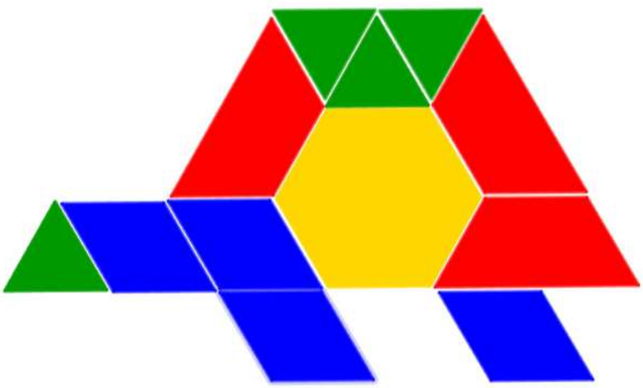
Učenici u paru uspoređuju rješenja i uočavaju da iako su imali jednaki lik, nije isti dio puža zelene, plave, crvene ili žute boje. Nakon toga svaki učenik u paru popločava lik tako da mu $\frac{1}{3}$ budu crvene boje. Popločavaju isti lik te dolaze do zaključka da su iskoristili isti broj crvenih pločica, ali raspored tih pločica i broj ostalih pločica im je drugačiji.

Nastavni listić 3.6.3. Primjer rješenja nastavnog listića iz Aktivnosti 3.6.2.

1. Promotri sliku i pomoću pločica složi isti oblik te ga preslikaj na trokutastu mrežu:



2. Odgovori na pitanja!
   a. Na koliko jednakih dijelova je podijeljen puž? Što predstavlja jednaki dio?
   Puž je podijeljen na 23 jednaka dijela, a jedan dio predstavlja jedan trokutić.
   b. Koji dio puža predstavlja njegova kućica?
   $\frac{20}{23}$ puža predstavlja njegova kućica.
   c. Koji dio puža je zelene boje?
   $\frac{2}{23}$ puža je zelene boje.
   d. Koji dio puža je plave boje?
   $\frac{6}{23}$ puža je plave boje.
   e. Koji dio puža je crvene boje?
   $\frac{9}{23}$ puža je crvene boje.
   f. Koji dio puža je žute boje?
   $\frac{6}{23}$ puža je žute boje.
3. Popločajte lik sa slike pločicama tako da $\frac{1}{3}$ budu crvene boje!

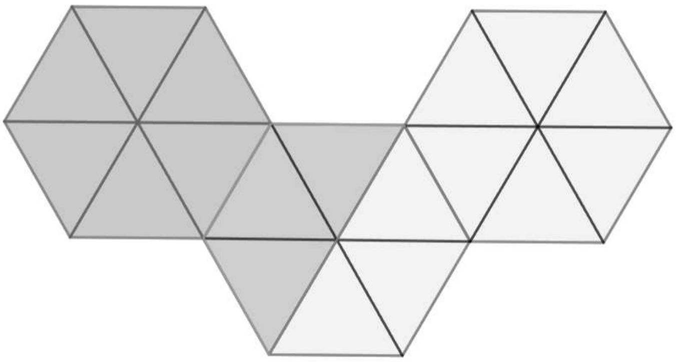


3.6.3.Aktivnost *Geometrijske pločice i ekvivalentni razlomci*

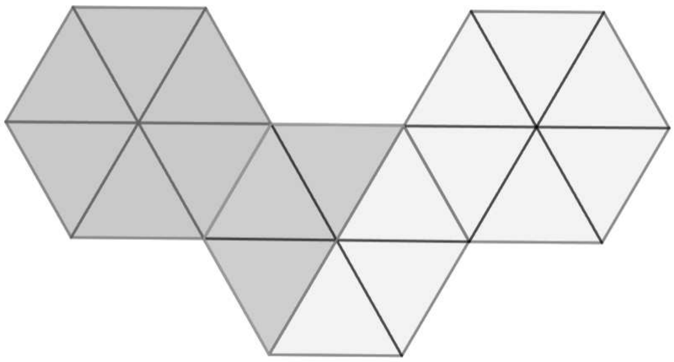
U ovoj aktivnosti, učenici petog razreda će otkriti koncept i primjere ekvivalentnih razlomaka. Suradnički u paru popunjavaju nastavni listić (Nastavni listić 4.6.4.) koji su dobili zajedno s kompletom geometrijskih pločica. Svaki od njih samostalno popločava osjenčani dio zadanog lika određenom pločicom. Učenici u paru imaju isti lik i jednaki dio lika osjenčan, ali različitu pločicu kojom popločavaju osjenčani dio. Nakon toga u parovima uspoređuju kako su popločali osjenčani dio lika. Zaključuju da su popločavali isti lik, ali da su ga popločali drugačijim brojem pločica.

Nastavni listić 3.6.4. Primjer nastavnog listića iz Aktivnosti 3.6.3.

1. Pločicama naznačene vrste popločajte osjenčani dio lika na slici pa odgovorite na postavljena pitanja.
   a. Popločajte osjenčani dio lika na slici koristeći zelenu pločicu.



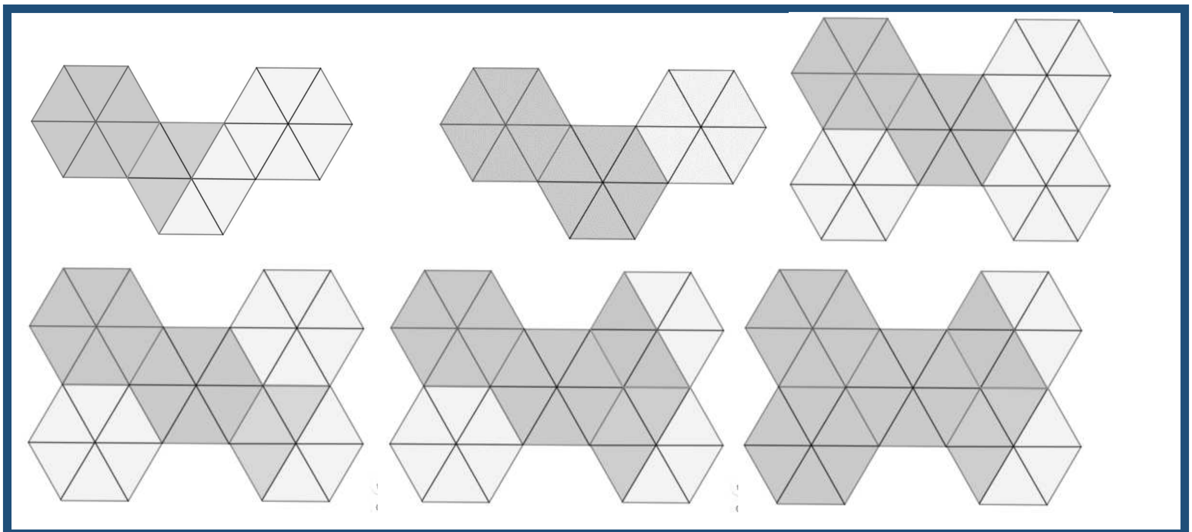
   b. Popločajte osjenčani dio lika na slici koristeći crvenu pločicu.

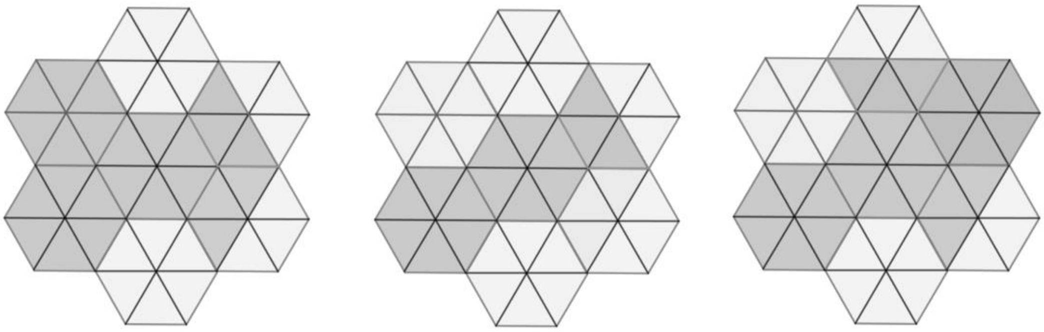


2. Odgovorite na pitanja!
    a. Koliki dio lika na slici predstavlja zelena pločica?
    b. Koliko vam zelenih pločica treba za popločavanje osjenčanog dijela?
    c. Izrazite razlomkom koliki dio lika ste popločali zelenim pločicama tako da prebrojite koliko vam je zelenih pločica bilo potrebno za popločavanje osjenčanog dijela!
    d. Koliki dio lika na slici predstavlja crvena pločica?
    e. Koliko vam crvenih pločica treba za popločavanje osjenčanog dijela?
    f. Izrazite razlomkom koliki dio lika ste popločali crvenim pločicama tako da prebrojite koliko vam je zelenih pločica bilo potrebno za popločavanje osjenčanog dijela!
3. Usporedite osjenčane dijelove koje ste popločavali, što uočavate?
4. Usporedite razlomke koje ste dobili u 2. c i 2. f, kakvi su oni?

Na razini razreda postoji više varijanti nastavnih listića te se oni razlikuju u liku koji popločavaju i osjenčanom dijelu lika (Slika 3.6.5.).

Nastavni listić 3.6.5. Primjer likova za popločavanje iz 1. i 2. zadatka aktivnosti 3.6.3.

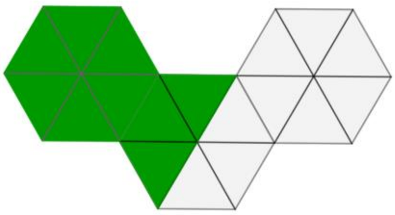




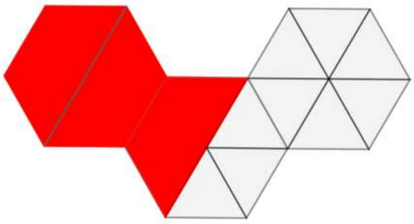
Nakon rješavanja listića slijedi prezentacija dobivenih rezultata, gdje učenici prezentiraju zadatke i zapisuju razlomke koje su dobili kao rješenja. Razrednom diskusijom dolaze do zaključka da razlomci imaju različite zapise, ali popločavaju isti osjenčani dio lika, tj. imaju istu veličinu. Motivacijskim pitanjima (Kako su ljudi u prošlosti trgovali? Jesu li uvijek imali novac kojim su plaćali? Ako mijenjate robu s nekim, što bi vam bilo važno za njezinu vrijednost?) dolaze do pojma jednake vrijednosti, odnosno ekvivalentne vrijednost, tj. dolaze do zaključka da bi razlomke koji imaju istu veličinu, odnosno vrijednost mogli nazvati ekvivalentnim razlomcima.

Nastavni listić 3.6.5. Primjer rješenja nastavnog listića iz Aktivnosti 3.6.3.

1. Pločicama naznačene vrste popločajte osjenčani dio lika na slici pa odgovorite na postavljena pitanja.
   a. Popločajte osjenčani dio lika na slici koristeći zelenu pločicu.



   b. Popločajte osjenčani dio lika na slici koristeći crvenu pločicu.



2. Odgovorite na pitanja!
    a. Koliki dio lika na slici predstavlja zelena pločica?

       $\frac{1}{18}$

    b. Koliko vam zelenih pločica treba za popločavanje osjenčanog dijela?

       9

    c. Izrazite razlomkom koliki dio lika ste popločali zelenim pločicama tako da prebrojite koliko vam je zelenih pločica bilo potrebno za popločavanje osjenčanog dijela!

       $\frac{9}{18}$

    d. Koliki dio lika na slici predstavlja crvena pločica?

       $\frac{1}{6}$

    e. Koliko vam crvenih pločica treba za popločavanje osjenčanog dijela?

       3

    f. Izrazite razlomkom koliki dio lika ste popločali crvenim pločicama tako da prebrojite koliko vam je zelenih pločica bilo potrebno za popločavanje osjenčanog dijela!

       $\frac{3}{18}$

3. Usporedite osjenčane dijelove koje ste popločavali, što uočavate?

   Osjenčani dijelovi su jednaki.

4. Usporedite razlomke koje ste dobili u 2. c i 2. f, kakvi su oni?

   Jednaki, $\frac{9}{18} = \frac{3}{6}$.

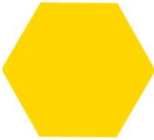
3.6.4. Aktivnost: Geometrijske pločice i zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika

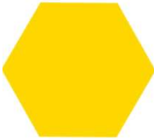
Nakon što u petom razredu otkrili pojam razlomaka i ekvivalentnih razlomaka, u šestom razredu osnovne škole učenici će otkriti kako se zbrajaju, oduzimaju, množe i dijele razlomci. Prvi korak bit će otkrivanje zbrajanja razlomaka jednakih nazivnika.

Učenici su podijeljeni u parove te svakom paru je na raspolaganju komplet geometrijskih pločica te nastavni listići (Nastavni listić 3.6.5.).

Nastavni listić 3.6.5. Primjer nastavnog listića iz Aktivnosti 3.6.4.

1. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke:

   a. $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ ako je jedno cijelo 

   b. $\frac{1}{6}$ i $\frac{4}{6}$ ako je jedno cijelo 

   c. $\frac{5}{12}$ i $\frac{2}{12}$ ako je jedno cijelo 

   d. $\frac{7}{18}$ i $\frac{4}{18}$ ako je jedno cijelo 

2. Pokušajte zbrojiti prikazane razlomke!

   a. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=$

   b. $\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=$

   c. $\frac{5}{12}+\frac{2}{12}=$

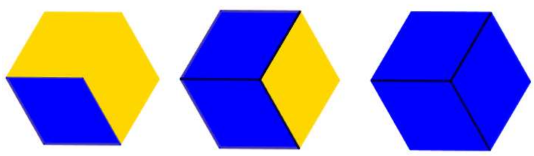
   d. $\frac{7}{18}+\frac{4}{18}=$

Učenici prvo prikazuju jedno cijelo koristeći žute pločice kako im je naznačeno u zadatku, baza odnosno jedno cijelo im može biti jedna, dvije ili tri žute pločice. Nakon što znaju koliko im iznosi jedno cijelo, prikazuju i zadane razlomke tako svaki učenik u paru prikazuje jedan od zadanih razlomaka. Prikazane razlomke žele zbrojiti pa u paru komentiraju kako bi ih mogli zbrojiti. Uočavaju da mogu presložiti dva razlomka na jednu bazu te izbrojati koliko imaju trećina, šestina ili dvanaestina.

Parovi prezentiraju svoja rješenja i zaključke. Svaki par je na svojim primjerima uočio da su zbrajali razlomke s jednakim nazivnikom te da su takve razlomke zbrajali tako su im zbrojili brojnike, a nazivnik su prepisali. Zbroj svih razlomka na nastavnim listićima je bio manji od 1 pa na kraju uočenu pravilnost pokušavaju primijeniti i na neki zbroj koji će biti veći od 1. Generalizacijom nepotpunom indukcijom dolaze do općenitog zaključka da se razlomci jednakih nazivnika zbrajaju tako da se nazivnik prepiše, a brojnici da se zbroje.

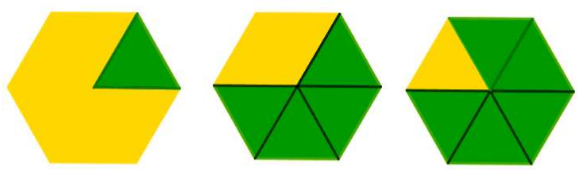
Nastavni listić 3.6.5. Primjer nastavnog listića iz Aktivnosti 3.6.4.

a. $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$



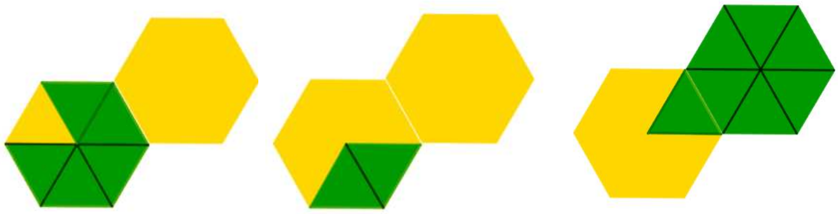
$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}$

b. $\frac{1}{6}$ i $\frac{4}{6}$



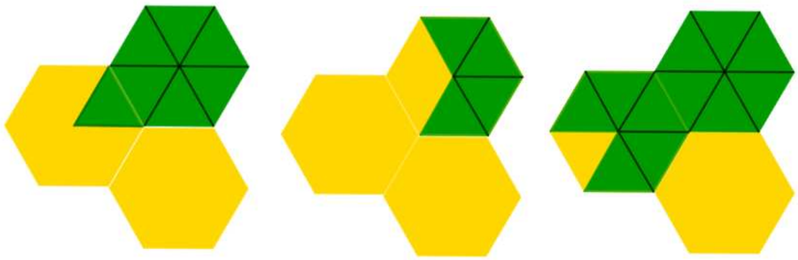
$\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$

c. $\frac{5}{12}$ i $\frac{2}{12}$



$\frac{5}{12} + \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$

d. $\frac{7}{18}$ i $\frac{4}{18}$



$\frac{7}{18} + \frac{4}{18} = \frac{11}{18}$

3.6.5. Aktivnost *Geometrijske pločice i zbrajanje razlomaka različitih nazivnika*

Nakon što učenici otkriju kako se zbrajaju razlomci jednakih nazivnika, slijedi korak u kojem će otkriti kako se zbrajaju razlomci različitih nazivnika. Analogno kao i u aktivnosti 3.6.4., dijele se u parove te svaki par dobiva komplet pločica i nastavni listić (Nastavni listić 3.6.6.). Na početku je potrebno dogovoriti što znači baza, odnosno u ovom slučaju baza je jedno cijelo, tj. jedna, dvije ili tri žute pločice. Svaki učenik u paru prikazuje po jedan razlomak geometrijskim pločicama ako znaju koliko iznosi jedno cijelo te zatim zajedno odgovaraju na postavljana pitanja. Uočavaju da ne znaju zbrojiti zadane razlomke jer razlomci nemaju jednaki nazivnik, međutim uočavaju da oba razlomka mogu prikazati na jednoj bazi. Kada pločice preslože na jednoj bazi, zaključuju da znaju odrediti koliki dio površine su popločali sa zadanim veličinama te da su na taj način zbrojili polazne razlomke.

Nastani listić 3.6.6. Primjer listića za aktivnost 3.6.5.

1. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ ako je jedno cijelo

   a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto?
   b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan?
   c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi?
   d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$?
2. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$ ako je jedno cijelo

   a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto?
   b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan?
   c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi?
   d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$?
3. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{12}$ ako je jedno cijelo

   a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto?
   b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan?
   c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi?
   d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{12}$?
4. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{18}$ ako je jedno cijelo

   a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto?
   b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan?
   c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi?
   d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{18}$?
2. Zapišite čemu je jednak zbroj iz prvog zadatka i odgovorite na pitanja!

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=$ $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=$ $\frac{4}{6}+\frac{5}{18}=$

   a. Kakve ste razlomke zbrajali?
   b. Na koji način ste prikazivali razlomke?
   c. Uočavate li neki poseban odnos između nazivnika razlomaka?
   d. Koji odnos uočavate između nazivnika pribrojnika i nazivnika zbroja?
   e. Na što se svelo zbrajanje razlomaka različitih nazivnika nakon odgovarajuće podjele?

Nastani listić 3.6.7. Primjer rješenja listića za aktivnost 3.6.5.

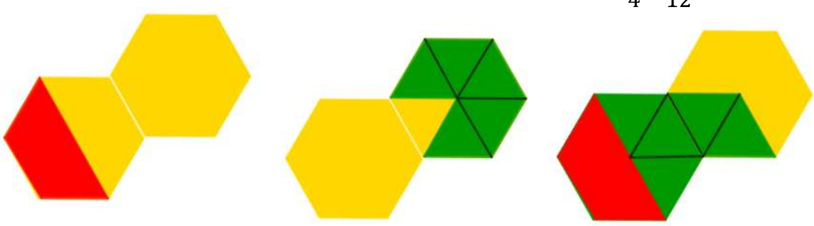
1. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ ako je jedno cijelo

   a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto? Ne
   b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan? $\frac{4}{6}$
   c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi? Zbrajanje.
   d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$? Sveli smo na zajednički nazivnik i zbrojili ih.

2. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$ ako je jedno cijelo

   a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto? Ne
   b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan? $\frac{3}{6}$
   c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi? Zbrajanje.
   d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$? Sveli smo na zajednički nazivnik i zbrojili ih.

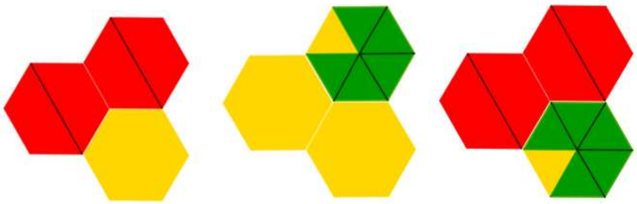
3. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{12}$ ako je jedno cijelo



   a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto?
   b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan? $\frac{8}{12}$

c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi? Zbrajanje.
d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{12}$? Sveli smo na zajednički nazivnik i zbrojili ih.

4. Pomoću geometrijskih pločica prikažite razlomke $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{18}$ ako je jedno cijelo



a. Znate li zbrojiti prikazane razlomke? Zašto?
b. Presložite prikazane razlomke na jednoj bazi. Koliki dio baze je popločan? $\frac{17}{18}$
c. Koja računska operacija simbolizira preslagivanje geometrijskih pločica na jednoj bazi? Zbrajanje.
d. Što ste napravili s razlomcima $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{18}$? Sveli smo na zajednički nazivnik i zbrojili ih.

3. Zapišite čemu je jednak zbroj iz prvog zadatka i odgovorite na pitanja!

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$ $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{8}{12}$ $\frac{4}{6}+\frac{5}{18}=\frac{17}{18}$

a. Kakve ste razlomke zbrajali? Razlomke različitih nazivnika.
b. Na koji način ste prikazivali razlomke?
c. Uočavate li neki poseban odnos između nazivnika razlomaka? Jedan je višekratnik drugog.
d. Koji odnos uočavate između nazivnika pribrojnika i nazivnika zbroja? Jednak je nazivniku većeg pribrojnika.
e. Na što se svelo zbrajanje razlomaka različitih nazivnika nakon odgovarajuće podjele? Na zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika.

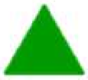
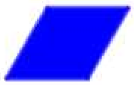
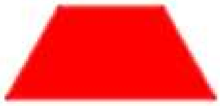
3.6.6. Aktivnost *Geometrijske pločice i dijeljenje pozitivnih razlomaka*

Cilj ove aktivnosti je otkriti pravila za dijeljenje prirodnog broja i razlomka razlomkom. Učenici su organizirani u četveročlane skupine. Dobit će set od barem šest primjeraka svake geometrijske pločice i radni listić.

Radni listić 3.6.8. Primjer radnog listića učenika A iz Aktivnosti 3.6.6.

Učenik A

1. Popunite tablicu tako da upišete brojeve koje predstavlja svaka od geometrijskih pločica ako dvije žute pločice predstavljaju jedno cijelo.

			
1			

2. Pomoću geometrijskih pločica odredite količnike.
   a. $1 : \frac{1}{12} =$
   b. $\frac{13}{12} : \frac{1}{6} =$
   c. $\frac{1}{2} : \frac{5}{12} =$
3. Popunite zajedničku tablicu, komentirajte i zapišite zapažanja!

A	$1 : \frac{1}{12} =$	$\frac{13}{12} : \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{6} : \frac{8}{12} =$
B	$1 : \frac{1}{3} =$	$\frac{15}{12} : \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{2} : \frac{8}{6} =$
C	$2 : \frac{1}{4} =$	$\frac{27}{12} : \frac{1}{4} =$	$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$
D	$2 : \frac{1}{6} =$	$\frac{13}{12} : \frac{1}{4} =$	$\frac{1}{4} : \frac{3}{4} =$
Uočena pravilnost:			

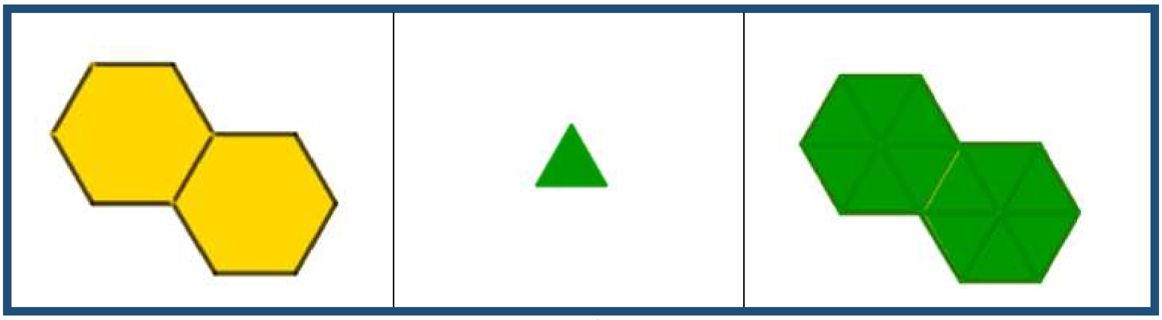
4. Primijenite uočena pravila:
   a. $3 : \frac{1}{4} =$
   b. $\frac{15}{12} : \frac{1}{4} =$
   c. $\frac{1}{4} : \frac{7}{2} =$
5. Pokušajte zapisati pravilo za dijeljenje razlomaka.

$a, b, c, d \in \mathbb{N}$

$a : \frac{b}{c} =$ $\qquad$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} =$

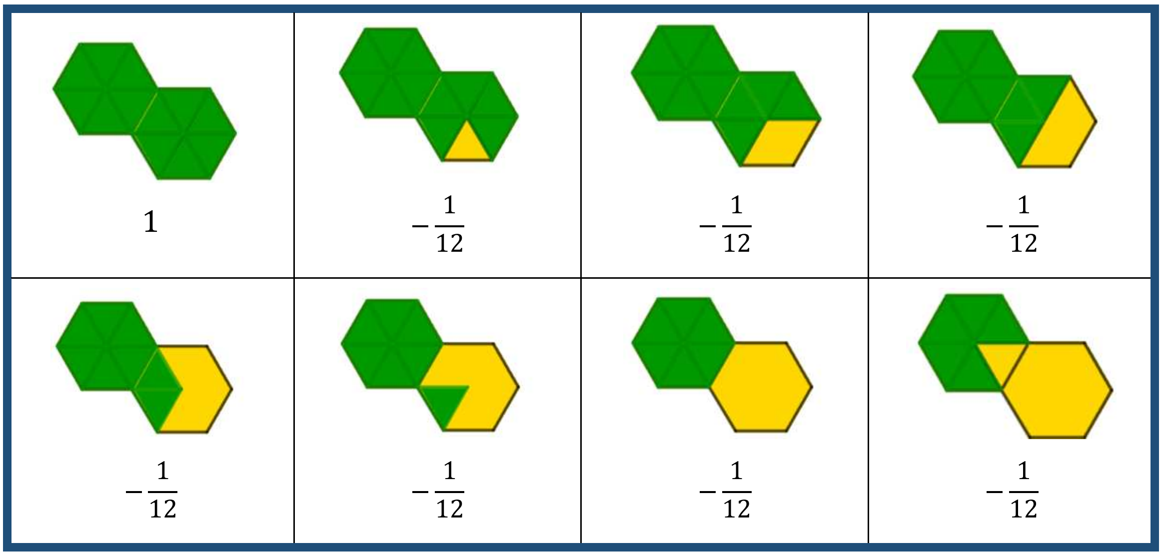
Na početku određuju koji je dio dviju žutih pločica svaka pojedina pločica. Nakon toga koristeći geometrijske pločice pokušavaju odrediti zadane količnike. Na primjer zadatak $1 : \frac{1}{12}$ će riješiti tako da odrede jedno cijelo, što su zapravo dvije žute pločice, i $\frac{1}{12}$ tog jednog cijelog, što je zapravo jedna zelena pločica.

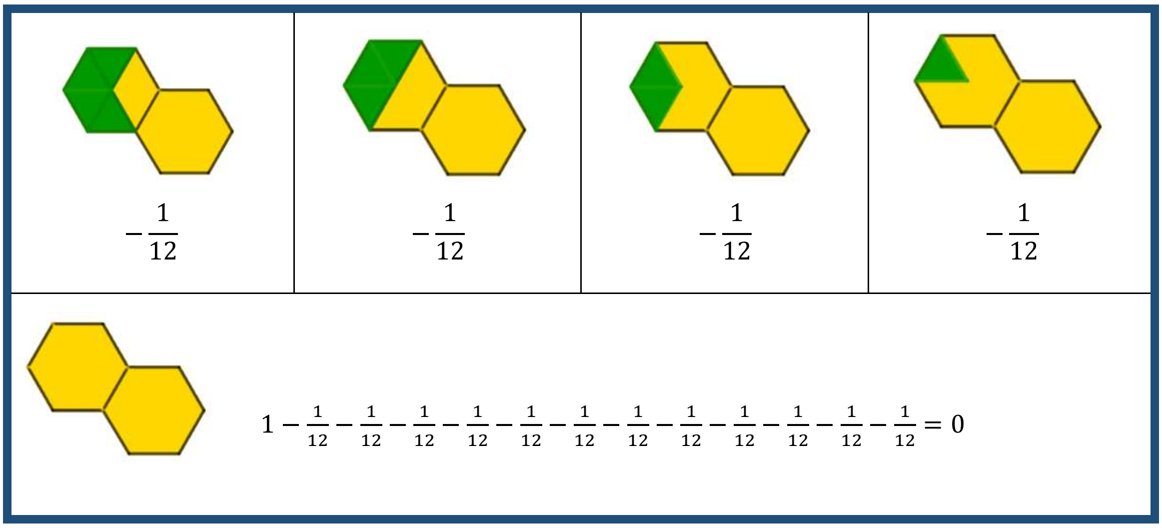
***Slika 3.6.3.* Primjer jednog cijelog, jedne dvanaestine i popločavanja jednog cijelog zelenim pločicama**



Pitaju se s koliko zelenih pločica ($\frac{1}{12}$ dviju žutih pločica) mogu popločiti dvije žute pločice (jedno cijelo). Uočavaju da im je potrebno 12 takvih pločica. Odnosno s dvanaest zelenih pločica su popločili jedno cijelo pa zapravo $1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$, tj. kako je dijeljenje uzastopno oduzimanje, moraju s jednog cijelog maknuti dvanaest zelenih pločica tako da im više ne ostane niti jedna. Odatle zaključuju $1 : \frac{1}{12} = 12$.

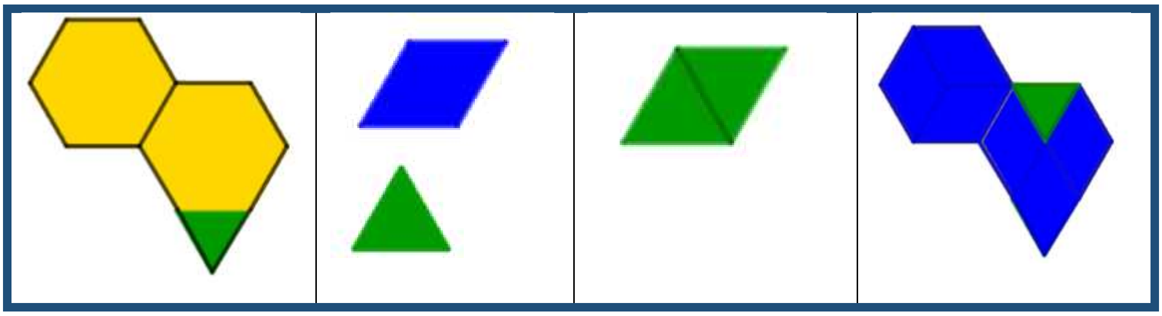
***Slika 3.6.4.* Prebrojavanje koliko zelenih pločica je bilo potrebno za popločavanje jednog cijelog**





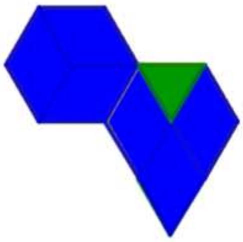
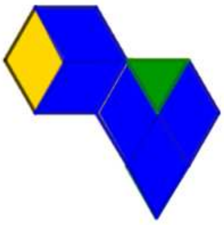
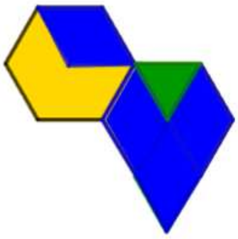
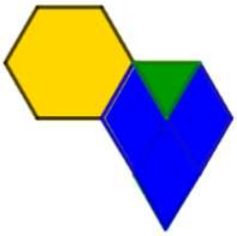
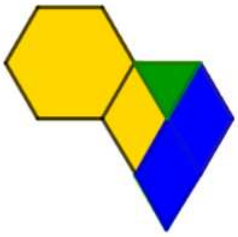
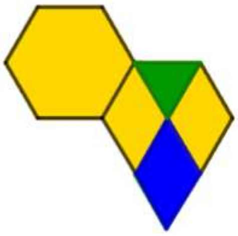
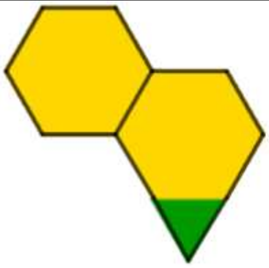
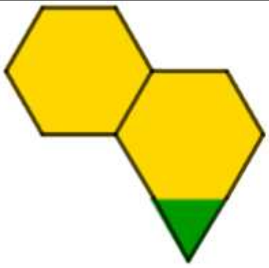
Analogno kao u primjeru prije, učenici prikazuju trinaest dvanaestina ako znaju da su dvije žute pločice jedno cijelo te određuju da je jedna šestina plava pločica. Pokušavaju popločiti složeni lik plavim pločicama, ali uočavaju da ne mogu lik popločiti samo s plavim pločicama. Uočavaju da im je potrebno šest plavih pločica te da im onda ostane jedan dio lika koji je površinom manji od površine plave pločice. Pitaju se koji je to dio plave pločice.

Slika 3.6.5. ***Primjer trinaest dvanaestina, jedne šestine i dvanaestine, polovine jedne šestine i popločavanja trinaest dvanaestina plavim i zelenim pločicama***



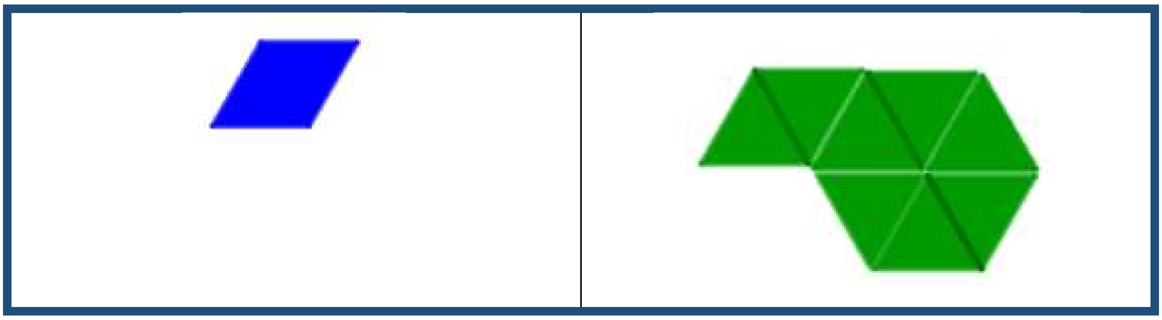
Prisjećaju se da plavu pločicu mogu popločiti s dvije zelene pa zapravo onda imaju polovinu jedne šestine. Dakle za popločavanje lika potrebno im je pet trećina (plavih pločica) i jedna zelena pločica koja je zapravo polovina plave pločice, odnosno potrebno im je šest cijelih plavih pločica i još polovina sedme pa zaključuju $\frac{13}{12}:\frac{1}{6}=6\frac{1}{2}$.

Slika 3.6.6. Prebrojavanje koliko je plavih, a potom zelenih pločica bilo potrebno za popločavanje jednog cijelog

 $\frac{13}{12}$	 $-\frac{1}{6}$	 $-\frac{1}{6}$	 $-\frac{1}{6}$
 $-\frac{1}{6}$	 $-\frac{1}{6}$	 $-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$	 0
	$\frac{13}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)=0$		

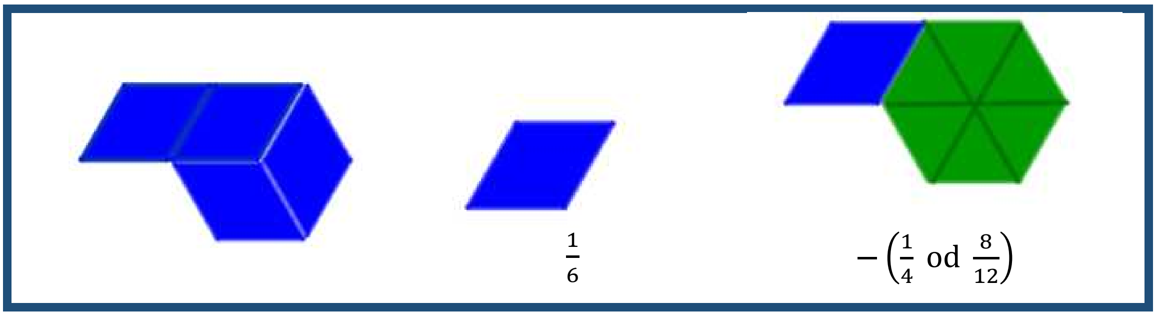
Primjenom analogije rješavaju i treći primjer. Moraju odrediti koliko je $\frac{1}{6}:\frac{8}{12}$. Prikazuju $\frac{1}{6}$ i $\frac{8}{12}$ koristeći se geometrijskim pločicama te uočavaju da ne mogu pločicu koja označava $\frac{1}{2}$ popločiti pločicama koje označavaju $\frac{8}{12}$. Zaključuju da je $\frac{1}{6}$ zapravo dio od $\frac{8}{12}$ te se pitaju koliki dio.

Slika 3.6.7. Primjer jedne polovine, sedam dvanaestina



Preslaguju pločice i uočavaju da je plava pločica zapravo četvrtina složenog zelenog lika, odnosno plava pločica predstavlja $\frac{1}{4}$ od zelenog složenog lika koji predstavlja $\frac{8}{12}$. Dakle $\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{4} \text{ od } \frac{8}{12}\right)=0$, odnosno $\frac{1}{6}:\frac{8}{12}=\frac{1}{4}$.

Slika 3.6.8. Potrebne su četiri pločice da se poploča lik, primjer jednog rješenja



Kada su riješili zadatke uspoređuju dobivena rješenja i pokušavaju uočiti pravilnosti na nizu primjera. Uočavaju da vrijedi $a:\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{b}$ i $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ za svaki $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

3.7. Geometrijske pločice i omjeri

Jedan od najvažnijih ciljeva nastave matematike u osnovnoj školi jest proporcionalno rasuđivanje. Učenici s razvijenim proporcionalnim rasuđivanjem:

- razumiju vezu u kojoj se dvije veličine mijenjaju u ovisnosti jedna o drugoj,
- uočavaju kako promjena vrijednosti jedne veličine utječe na promjenu vrijednosti druge veličine,
- uočavaju proporcionalne i neproporcionalne veze u raznim problemima,
- razlikuju veličine koje su uspoređuju i omjer kao vezu tih veličina.

Kod učenika je potrebno, kroz niz zadataka s omjerima i proporcionalnošću u raznovrsnim kontekstima, poticati razvoj proporcionalnog rasuđivanja. U nastavku slijedi nekoliko aktivnosti primjerenih za učenike sedmih razreda koje potiču učenike na diskusiju i eksperimentiranje pri predviđanju omjera i uspoređivanju omjera, odnosno koje potiču razvoj proporcionalnog rasuđivanja kod učenika.

3.7.1. Aktivnost *Lik u omjeru*

Učenici će, u četveročlanim skupinama, usustaviti znanje o omjerima. Svakoj skupini potreban je zajednički nastavni listić za sastavljanje, crtanje i analizu likova. U nastavku je dan primjer jednog takvog nastavnog listića.

Radni listić 3.7.1. Primjer radnog listića s uputama za slaganje likova u određenom omjeru iz aktivnosti 3.7.1.

1. Sastavite lik služeći se zelenim i žutim pločicama tako da se broj zelenih i žutih pločica odnosi u omjeru $6:10$.

   Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

2. Sastavite lik služeći se zelenim, narančastim i žutim pločicama tako da se broj zelenih, narančastih i žutih pločica odnosi u omjeru $1:2:2$.

   Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

3. Sastavite lik služeći se zelenim pločicama, narančastim pločicama i žutim pločicama tako da se broj zelenih, narančastih i žutih pločica odnosi u omjeru $2:3:5$.

   Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

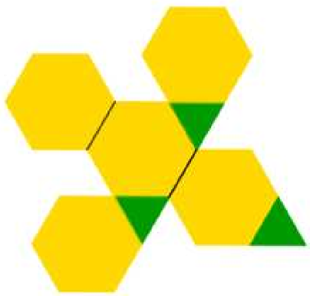
4. Sastavite lik služeći se zelenim, narančastim i žutim pločicama tako da se broj zelenih, narančastih i žutih pločica odnosi u omjeru $2:3:5$. Ukupno morate iskoristiti točno 20 pločica.

   Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

Za odabrane brojeve u zadatcima potrebno je pripremiti komplet geometrijskih pločica s barem deset primjeraka zelene, narančaste i žute pločice. Zadatci su poredani na način da svaki sljedeći zadatak učenike potiče na korištenje sve većeg broja pločica. Učenici odabiru potreban broj pločica te slažu lik koristeći odabrane pločice. Dobiveni lik ucrtavaju u trokutastu mrežu kako bi mogli ostalim učenicima pokazati koji su lik složili. U skupinama će komentirati kakve su likove sastavili, koliko su pločica iskoristili i jesu li mogli sastaviti lik na drugačiji način. Nakon toga svaka skupina prezentira svoja rješenja i pokazuje likove koje su sastavili. Komentiraju broj pločica koji su iskoristili u sastavljanju pojedinog lika te kako su ga sastavili. Neke skupine će iskoristiti točno onoliko pločica koliko označava broj u omjeru, međutim neke će iskoristiti i više pločica. Na primjer ako su morali sastaviti lik tako da se zelene, narančaste i žute pločice odnose u omjeru $1:2:2$, neke skupine će sastaviti lik koristeći 1 zelenu, 2 narančaste i 2 žute pločice, a druge koristeći 2 zelenu, 4 narančaste i 4 žute pločice. Važno je da učenici u svakom slučaju znaju argumentirati zašto je njihovo rješenje dobro.

Radni listić 3.7.2. Primjer riješenog radnog listića iz Aktivnosti 3.7.1.

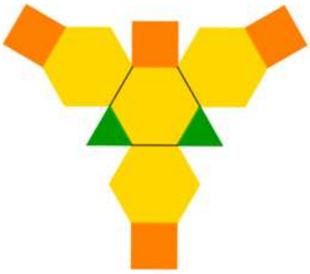
1. Sastavite lik služeći se zelenim i žutim pločicama tako da se broj zelenih i žutih pločica odnosi u omjeru $6:10$.



Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

Tri zelene pločice i šest žutih pločica. Ukupno smo iskoristili osam pločica.

2. Sastavite lik služeći se zelenim, narančastim i žutim pločicama tako da se broj zelenih, narančastih i žutih pločica odnosi u omjeru $1:2:2$.



Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

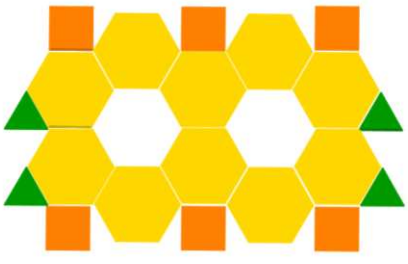
Dvije zelene, četiri narančaste i četiri žute pločice. Ukupno smo iskoristili deset pločica.

3. Sastavite lik služeći se zelenim pločicama, narančastim pločicama i žutim pločicama tako da se broj zelenih, narančastih i žutih pločica odnosi u omjeru $2:3:5$.

Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

Dvije zelene, tri narančaste i pet žutih pločica. Ukupno smo iskoristili deset pločica.

4. Sastavite lik služeći se zelenim, narančastim i žutim pločicama tako da se broj zelenih, narančastih i žutih pločica odnosi u omjeru $2:3:5$. Ukupno morate iskoristiti točno 20 pločica.



Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

Četiri zelene, šest narančastih i deset žutih pločica. Ukupno smo iskoristili dvadeset pločica.

Na ovaj način u razredu se na efikasan način može provjeriti razumijevanje omjera jer učenici sastavljaju likove na klupi te nastavnik odmah može vidjeti što su složili i koliko su pločica iskoristili.

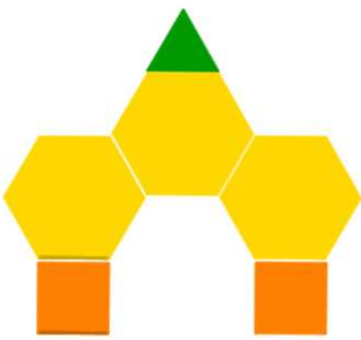
3.7.2. Aktivnost *U kojem sam omjeru?*

Učenici rade u parovima te usustavljuju znanje o omjerima. Za svaki par treba pripremiti komplet geometrijskih pločica s barem deset primjeraka svake pločice te zajednički nastavni listić za sastavljanje, crtanje i analizu likova. Jedan učenik u paru sastavlja proizvoljan lik na klupi te ga pokazuje drugom učeniku u paru. Drugi učenik mora odrediti u kojem se omjeru nalaze brojevi geometrijskih pločica iste vrste upotrijebljenih u liku te sastaviti novi lik s brojevima odgovarajućih pločica u istom omjeru, ali s različitim ukupnim brojem pločica.

Radni listić 3.7.3. Primjer riješenog radnog listića iz Aktivnosti 3.7.2.

Učenik A

1. Sastavite lik!



2. Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

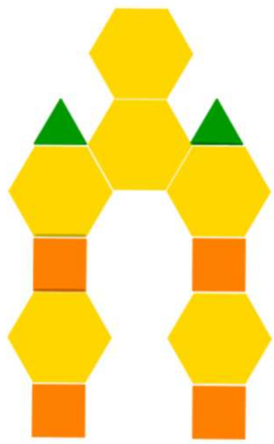
   Jednu zelenu, dvije narančaste i tri žute pločice. Ukupno sam iskoristio šest pločica.

Kada drugi učenik završi, učenici se mijenjaju za zadatke, tj. sada drugi učenik sastavlja proizvoljan lik, a prvi učenik određuje u kojem se omjeru nalaze pločice iste vrste i sastavlja odgovarajući lik. Učenici zaključuju ako ne smiju iskoristiti jednak broj pločica i brojevi odgovarajućih pločica moraju biti u istom omjeru onda broj svih vrsta pločica iskorištenih u liku moraju ili povećati za određeni broj puta, ili smanjiti. Pri smanjivanju broja pločica moraju paziti da koliko puta su povećali broj jedne vrste pločica za toliko puta moraju povećati i broj pločica drugih vrsta. Većina učenika će primijeniti strategiju da poveća dva puta broj pločica iste vrste upotrijebljenih u liku. U razrednoj diskusiji treba se postaviti pitanje o mogućnosti smanjenja broja pločica u odnosu na sastavljeni lik te kada je to moguće

Radni listić 3.7.4. Primjer riješenog radnog listića iz aktivnosti 3.7.2.

Učenik B

1. Odredite u kojem se omjeru nalaze brojevi geometrijskih pločica iste vrste upotrijebljenih u liku kod vašeg para te sastavite novi lik s brojevima odgovarajućih pločica u istom omjeru, ali s različitim ukupnim brojem pločica



2. Koliko ste iskoristili pločica pojedine boje?

Dvije zelene, četiri narančaste i šest žutih pločica. Ukupno sam iskoristio dvanaest pločica.

3.8. Geometrijske pločice i linearna funkcija

Prema Nacionalnom matematičkom kurikulumu, učenici se prvi put s linearnom ovisnosti susreću u sedmom razredu. Po završetku procesa učenja linearne ovisnosti, učenici će:

- prepoznavati linearnu ovisnost u različitim zapisima (zapis riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, grafom ili pravilima pridruživanja),
- crtati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini točku zadanu koordinatama te očitavati koordinate točke,
- analizirati promjenu u linearnoj ovisnosti,
- rješavati probleme iz matematike i svakodnevnog života koristeći linearnu ovisnost u različitim zapisima.

Povezivanje linearne ovisnosti s linearnom funkcijom spada pod prošireni sadržaj pa se većina učenika s linearnom funkcijom susretne tek u prvom razredu srednje škole gdje onda prepoznaju linearnu funkciju u različitim zapisima (zapis riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, grafom ili pravilima pridruživanja), prelaze iz jednog zapisa linearne funkcije u drugi, određuju vrijednost linearne funkcije u zadanoj točki, određuju točku u kojoj linearna funkcija poprima zadanu vrijednost, interpretira značenje koeficijenata linearne funkcije te rješavaju probleme iz matematike i svakodnevnog života koristeći linearnu funkciju.

U sljedećim aktivnostima učenici će uočavati pravilnosti u brojevnim nizovima zadanima grafičkim nizom geometrijskih oblika, nastaviti zadane brojevne nizove te ih povezati s linearnom funkcijom. Prvo će istraživati pravilnosti u nizu tako da će prikazivati niz grafički pomoću geometrijskih pločica i uočavati pravilnosti, odnosno prebrojavat će za koliko se promijenio broj pojedinih pločica. Nakon toga će uočene pravilnosti povezivati s linearnom ovisnosti i linearnom funkcijom.

3.8.1. Aktivnost *Nastavi niz 1*

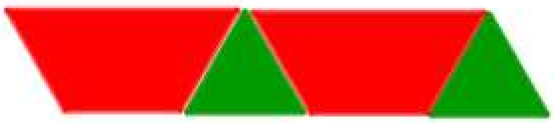
Učenici će istražiti pravilnosti u nizu prikazanom grafički pomoću geometrijskih pločica te pomoću uočene pravilnosti nastaviti niz. Ovo je uvodna aktivnost za učenike sedmih razreda osnovne škole, u kojoj će raditi u četveročlanim skupinama. Svakom učeniku na raspolaganju je komplet s najmanje šest primjeraka svake geometrijske pločice te nastavni listić. Učenici samostalno istražuju niz dobiven na listiću uočavaju pravilnosti i nastavljaju ga služeći se geometrijskim pločicama. Za svaki korak bilježe broj geometrijskih pločica na pojedinoj slici niza upotrijebljenih za sastavljanje uzorka na pojedinoj slici.

Uočavaju da se i broj zelenih i broj crvenih pločica na svakoj slici povećava za jedan. Pokušavaju na temelju uočene pravilnosti analogno zaključiti koliko je pločica na 12. i 30. slici. Kako u ovom primjeru je broj pojedinih pločica jednak rednom broju slike učenici jednostavno dolaze do zaključka da je na 12. slici dvanaest zelenih pločica, a na 30. trideset zelenih pločica. Analogno zaključuju da na n. slici ima n zelenih pločica. Učenici u skupinama analiziraju popunjenu tablicu i prezentiraju svoja zapažanja.

Radni listić 3.8.1. Primjer riješenog radnog listića iz aktivnosti 3.8.1.

1. Dan je niz slika koji se sastoji od zelenih i crvenih pločica, pri čemu se niz nastavlja prema istom pravilu. Promotrite dani niz te popunite tablicu i odgovorite na pitanja.

Slika 1



Slika 2

Slika 3

Broj slike	1	2	3	4	5	10	50	500
Broj zelenih pločica	1	2	3	4	5	10	50	500
Broj crvenih pločica	1	2	3	4	5	10	50	500
Ukupan broj pločica	2	4	6	8	10	20	100	1000

1. Kako računamo broj zelenih pločica za svaku sliku?

   Broj trokuta računamo tako da prethodni broj zelenih pločica uvećamo za 1.

2. Koliko će zelenih pločica biti na 12. i 30. slici?

   Tablicu je potrebno produljiti zbog dugog računa.

3. Je li to efikasan postupak?

   Nije efikasan, dakle trebamo neki efikasniji postupak.

4. Kako možemo zapisati broj zelenih pločica za pojedini broj slike?

   $1 = 1 \cdot 1 \quad 2 = 2 \cdot 1 \quad 3 = 3 \cdot 1 \quad 4 = 4 \cdot 1$

5. Čemu bi bio jednak broj trokuta na 12. slici? $12 \cdot 1 = 12$
6. Čemu bi bio jednak broj trokuta na 30. slici? $30 \cdot 1 = 30$
7. Znamo li izračunati broj trokuta na *n*-toj slici?

   Ne znamo, za to nam treba formula.

8. Čemu bi bio jednak broj trokuta na *n*-toj slici gdje je *n* prirodan broj?

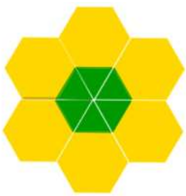
   $n \cdot 1 = n, n \in \mathbb{N}$

3.8.2. Aktivnost *Nastavi niz 2*

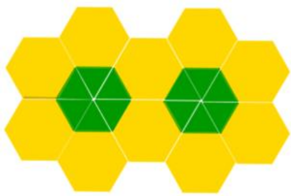
Cilj aktivnost jest istražiti pravilnosti u nizu prikazanom grafički pomoću geometrijskih pločica te pomoću uočene pravilnosti nastaviti niz. Aktivnost je namijenjena učenicima sedmih razreda osnovne škole, a može biti primjerena i za učenike srednje škole prilikom otkrivanja linearne funkcije. Učenici rade u četveročlanim skupinama. Svakom učeniku na raspolaganju je komplet s najmanje dvadeset primjeraka svake geometrijske pločice te nastavni listić. Učenici samostalno istražuju niz dobiven na listiću uočavaju pravilnosti i nastavljaju ga služeći se geometrijskim pločicama. Za svaki korak bilježe broj geometrijskih pločica na pojedinoj slici niza upotrijebljenih za sastavljanje uzorka na pojedinoj slici. Uočavaju da se broj zelenih pločica na svakoj slici povećava za 6, broj žutih pločica za 4, a ukupan broj pločica za 10. Ako je potrebno izračunati koliko je pločica na nekoj daljoj slici ovaj postupak nije efikasan. Pokušavaju na temelju uočene pravilnosti analogno zaključiti koliko je pločica na 12. i 30. slici. Učenici potom generalizacijom nepotpunom indukcijom pokušavaju otkriti koliko ima pojedinih pločica na n. slici. Dolaze do zaključka da na n. slici ima $6n$ zelenih pločica, $2 + 4n$ žutih pločica, odnosno $2 + 10n$ ukupno pločica. Učenici u skupinama analiziraju popunjenu tablicu i prezentiraju svoja zapažanja.

Radni listić 3.8.2. Primjer riješenog radnog listića iz aktivnosti 3.8.2.

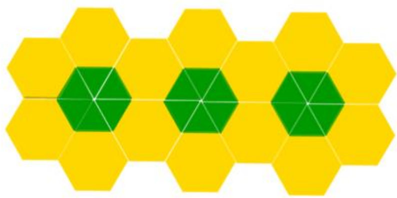
1. Dan je niz slika koji se sastoji od zelenih i žutih pločica, pri čemu se niz nastavlja prema istom pravilu. Promotrite dani niz te popunite tablicu i odgovorite na pitanja.



Slika 1



Slika 2



Slika 3

Broj slike	1	2	3	4	5	10	50	500
Broj zelenih pločica	6	12	18	24	30	60	300	3000
Broj žutih pločica	6	10	14	18	22	42	202	2002
Ukupan broj pločica	12	22	32	42	52	102	502	5002

2. Kako računamo broj zelenih pločica za svaku sliku?

   Broj trokuta računamo tako da prethodni broj zelenih pločica uvećamo za 6.

3. Koliko će zelenih pločica biti na 12. i 30. slici?

   Tablicu je potrebno produljiti zbog dugog računa.

4. Je li to efikasan postupak?

   Nije efikasan, dakle trebamo neki efikasniji postupak.

5. Kako možemo zapisati broj zelenih pločica za pojedini broj slike?

   $6 = 1 \cdot 6 \quad 12 = 2 \cdot 6 \quad 18 = 3 \cdot 6 \quad 24 = 4 \cdot 6$

6. Čemu bi bio jednak broj trokuta na 12. slici? $12 \cdot 6 = 72$
7. Čemu bi bio jednak broj trokuta na 30. slici? $30 \cdot 6 = 180$
8. Znamo li izračunati broj trokuta na n-toj slici? Ne znamo, za to nam treba formula.
9. Čemu bi bio jednak broj trokuta na n-toj slici gdje je n prirodan broj?

   $n \cdot 6 = 6n, n \in \mathbb{N}$

3.8.3. Aktivnost *Nastavi niz 3*

Učenici u prvom razredu srednje škole će ovom aktivnosti uočiti pravilnost u brojevnim nizovima zadanima grafički nizom geometrijskih oblika te ih povezati s linearnom funkcijom. Organizirani su u četveročlane skupine te je svakom učeniku na raspolaganju komplet s najmanje deset primjeraka svake geometrijske pločice te nastavni listić. Učenici samostalno istražuju niz dobiven na listiću te uočavaju pravilnost i nastavljaju niz slika služeći se geometrijskim pločicama. Na početku nastavljaju niz i uočavaju da se broj zelenih pločica na svakoj slici povećava za 2, broj narančastih isto za 2, a ukupan broj pločica za 4. Označavaju stranicu zelene, odnosno narančaste pločice s a i računaju opseg lika na svakoj slici te zaključuju da se na svakoj slici opseg poveća za $6a$.

Radni listić 3.8.3. Primjer riješenog radnog listića iz aktivnosti 3.8.3.

1. Dan je niz slika koji se sastoji od zelenih i narančastih pločica, pri čemu se niz nastavlja prema istom pravilu. Promotrite dani niz te popunite tablicu i odgovorite na pitanja.

Slika 1 Slika 2 Slika 3

Broj slike	1	2	3	4	5	10	50	500
Broj zelenih pločica	2	4	6	8	10	20	100	1000
Broj narančastih pločica	2	4	6	8	10	20	100	1000
Ukupan broj pločica	4	8	12	16	20	40	200	2000
Opseg lika na slici	$8a$	$14a$	$20a$	$26a$	$32a$	$62a$	$302a$	$3002a$

2. Kako računamo opseg lika na svakoj slici?

   Opseg lika računamo tako da prethodni opseg lika uvećamo za $6a$.

3. Koliko će biti opseg lika na 12. i 30. slici?

   Tablicu je potrebno produljiti zbog dugog računa.

4. Je li to efikasan postupak?

   Nije efikasan, dakle trebamo neki efikasniji postupak.

5. Kako možemo zapisati opseg lika na pojedinoj slici?

   $8a = 2a + 1 \cdot 6a \quad 14a = 2a + 2 \cdot 6a \quad 20 = 2a + 3 \cdot 6a$

6. Čemu bi bio jednak opseg lika na 12. slici?

   $2a + 12 \cdot 6a = 74a$

7. Čemu bi bio jednak opseg lika na 30. slici?

   $2a + 30 \cdot 6a = 182a$

8. Znamo li izračunati opseg lika na n-toj slici?

   Ne znamo, za to nam treba formula.

9. Čemu bi bio jednak opseg lika na n-toj slici gdje je n prirodan broj?

   $2a + n \cdot 6a = 2a + 6an, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$

Učenici zajedno u skupini pokušavaju odrediti opseg i broj stranica na 50. slici. U skupini komentiraju efikasan način određivanja opsega i broja stranica na 50. slici. Nakon što su odredili efikasan način određivanja broja stranica i opsega lika na 50. slici, učenici pokušavaju odrediti broj stranica i opseg lika na n-toj slici.

LITERATURA

1. Brenson, S., Carter, T., Richardson, K.(2010) Connected Tasks: The Building Blocks of Reasoning and Proof. Australian Primary Mathematics Classroom, Vol. 15, No. 4, pages 17-23 https://libres.uncg.edu/ir/uncg/f/K_Richardson_Connected_2010.pdf
2. Caglayan, G. (2020) Pattern Blocks Art. Journal of Humanistic Mathematics, Volume 10 Issue 2, pages 511-526 https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol10/iss2/23/
3. Čižmešija, A., Stilinović, S. (2021) Šest veličanstvenih. Geometrijske pločice – jednostavno učilo s bezbroj mogućnosti. Miš, Vol. 111, No. 2, pages 4-19
4. Čižmešija, A., Stilinović, S., i dr. Prezentacije i seminari iz kolegija Metodika nastave matematike 1, Metodika nastave matematike 2, Metodika nastave matematike 3, Metodika nastave matematike 4 (neobjavljeni materijali)
5. Champion, J., Wheeler, A. (2014) Revisit Pattern Blocks to Develop Rational Number Sense. Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 19, No. 6, pages 336-343 https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacmiddscho.19.6.0336
6. Eberle, R. S. (2015) "I Don't Really Know How I Did That!". Teaching Children Mathematics, Vol. 21, No. 7, pages 402-411 https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.21.7.0402

7. Furner, J. M. i Worrell, N. L. (2017). The Importance of Using Manipulatives in Teaching Math Today. Transformations, 3(1), Article 2. https://nsuworks.nova.edu/transformations/vol3/iss1/2/
8. Hsu Chan, H. (2015) How Do They Grow?. Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 20, No. 9, pages 548-555 https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacmiddscho.20.9.0548
9. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje, Konceptualni okvir matematike https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2021/04/PISA-2021-konceptualni-okvir_matematika.pdf
10. Nacionalni matematički kurikulum (2019) Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (nn.hr)
11. Sherman, L. (2017) Angle detectives. Teaching Children Mathematics, Vol. 24, No. 3, pages 154-157 https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.24.3.0154
12. Yeh, C. (2014) Pattern-Block Puzzlers. Teaching Children Mathematics, Vol. 20, No. 8, page 528 https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.20.8.0528

IZVORI ZA SLIKE:

1. Geometrijske pločice https://www.eaieducation.com/
2. Novčanice https://revijahak.hr/2019/05/02/dolaze-nam-nove-europske-novcanice-mijenja-se-dizajn-novcanica-od-100-i-200-eura/

SAŽETAK

U ovom diplomskom radu opisujemo primjenu geometrijskih pločica u nastavi matematike. U uvodnom dijelu radu ukratko smo se osvrnuli na matematičke kompetencije, koje i Europski referentni okvir ubraja među osam ključnih kompetencija za cjeloživotno učenje, i aktivnu nastavu matematike, u kojoj je učenik onaj koji radi i otkriva matematičke zakonitosti. Napravili smo kratki pregled matematičkih modela i učila te smo se detaljno osvrnuli na geometrijske pločice. U daljnjem dijelu razradili smo niz aktivnosti primjerenih učenicima viših razreda osnovne škole kroz koje učenici otkrivaju odnose površina i opsega, računaju površine i opsege složenih likova, računaju unutarnje kutove složenih likova, otkrivaju zbroj kutova u četverokutu, svojstva konveksnih mnogokuta, osnu simetriju, pojam razlomka, ekvivalentne razlomke, zbrajaju i oduzimaju razlomke te otkrivaju linearnu funkciju. Za svaku aktivnost je razrađen oblik rada, razrađen tijek aktivnosti, dani primjeri nastavnih listića i rješenja tih listića, zaključi do kojih učenici trebaju doći.

SUMMARY

Pattern blocks are one of the didactic models that students use to create, identify, and extend patterns. They are used to explore fractions, angles, transformations, symmetry and measurement. In this thesis, we describe mathematical competence, active learning and the use of pattern blocks in different activities with which students at the lower secondary school level develop a range of mathematical concepts such as geometry, symmetry, angles, fractions, perimeter, and area.

ŽIVOTOPIS

Rođena sam 4.7.1997. u Zagrebu. Osnovnu školu sam pohađala u Klinča Selima, a nakon toga sam upisala XI. gimnaziju u Zagrebu. 2019. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2021. završavam preddiplomski studij te upisujem diplomski sveučilišni studij matematika i informatika, smjer nastavnički na istom fakultetu. Jedna sam od dobitnika nagrade najboljim studentima Matematičkog odsjeka za akademsku godinu 2021./22. Za vrijeme preddiplomskog i diplomskog studija, dodatno iskustvo u poučavanju sam stekla u sklopu edukacijskog programa „Pomoć u učenju“ Centra lokalnog razvoja EDUKA, gdje sam sam od prosinca 2019. do rujna 2022. godine radila s učenicima raznih uzrasta i usmjerenja pomažući im u učenju matematike. U sklopu istog projekta, treću godinu za redom držim pripreme za državnu maturu iz matematike za obje razine (2020./21., 2021./22., 2022./23.). Od kolovoza 2022. kao student radim u Ericssonu Nikola Tesla na poziciji Softver Developera.