Metode skalarizacije u višekriterijskoj optimizaciji

Ferenčak, Valentina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Valentina Ferenčak

METODE SKALARIZACIJE U VIŠEKRITERIJSKOJ OPTIMIZACIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, srpanj, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru na savjetima, usmjerenju i podršci.
Zahvaljujem se svojoj obitelji i prijateljima koji su me podržavali tijekom studiranja.

Sadržaj

Uvod

Ljudi svakodnevno donose odluke. Proces odlučivanja zahtijeva razumijevanje koja je opcija bolja, a koja gora. Mnogi problemi modelirani su kao optimizacijski problemi pri čemu funkcije cilja uključuju razumne kriterije. Ovdje govorimo o problemima višekriterijske optimizacije. Oni imaju široku primjenu u raznim područjima kao što su ekonomija, inženjerstvo, teorija upravljanja, teorija igara, radioterapija, internet i mnoga druga područja. Optimizacijske probleme shvaćamo kao matematičke probleme odlučivanja.

Možemo razlikovati tipove problema odlučivanja. To su problemi s konačnim brojem alternativa koje su eksplicitno poznate te je cilj odabrati najpoželjniju. Oni pripadaju diskretnim problemima kod kojih je dopustivi skup konačan. Postoje i neprekidni problemi kod kojih je skup rješenja općenito dan kroz ograničenja u vidu jednakosti ili nejenakosti.

Ključan pojam je efikasnost. Efikasne točke ne dozvoljavaju poboljšanje jedne funkcije cilja, a da se ne pogorša vrijednost barem jedne od preostalih funkcija cilja. Zovemo ih još Pareto optimalna rješenja. Važnost efikasnosti je bazirana na opažanju da bilo koji x koji nije efikasna točka minimuma ne može biti najpoželjnija alternativa za donositelja odluke jer postoji barem jedna dopustiva točka $\hat{x} \in X$ takva da je $f_k(\hat{x}) \leq f_k(x)$ za sve $k = 1, \ldots, p$ sa strogom nejednakosti za barem jedan k. U tom slučaju $\hat{x}$ je sigurno poželjniji od x. Idealne i nadir točke su donja i gornja granica na efikasnu granicu. Ove točke daju naznaku raspona vrijednosti koje efikasne točke mogu postići. Često se koriste kao referentne točke u kompromisnom programiranju. Uvode se i slabo i strogo efikasne točke ovisno o uređaju na $\mathbb{R}^p$. Važan podskup skupa efikasnih točaka je skup pravilnih efikasnih točaka. Omjer kompromisa izmedu kriterija može biti mjeren računanjem povećanja u jednoj komponenti po jedinici smanjenja u drugoj komponenti. Pravilne efikasne točke su efikasne točke koje imaju ograničen omjer kompromisa.

Vrlo često korištena metoda skalarizacije za rješavanje problema višekriterijske optimizacije je metoda težinske sume. Pri tome moramo definirati težinski vektor, odnosno težine. Ovisno o tome jesu li težine strogo pozitivne ili nenegativne optimalna rješenja problema bit će efikasna ili slabo efikasna, redom. Međutim, ova metoda nije primjenjiva za nekonveksne probleme. Postoje i mnoge druge tehnike skalarizacije za rješavanje problema višekriterijske optimizacije. Metoda ε-uvjeta je uz metodu težinske sume jedna od najšire poznatih metoda za rješavanje problema višekriterijske optimizacije. Radi se o minimizaciji samo jedne od kriterijskih funkcija, dok su ostale samo ograničenja. Optimalna rješenja ovog problema su barem slabo efikasna. Nužan i dovoljan uvjet za efikasnost pokazuje da ova metoda funkcionira za općenite probleme te nije potrebna pretpostavka o konveksnosti. Hibridna metoda dobivena je kao kombinacija metode težinske sume i metode ε-uvjeta. Ako malo oslabimo ograničenja kod metode ε-uvjeta možemo dobiti metodu elastičnog ograničenja. Također još jedna poznata metoda je Bensonova metoda. Ideja ove metode je izabrati neku početnu dopustivu točku te ukoliko ona nije efikasna, izvedemo dominirajuću točku koje jest efikasna. Prednost metode jest da kad god problem ima konačnu optimalnu vrijednost rješenja, optimalno rješenje je efikasno. Najbolje moguće rješenje koje možemo dobiti u problemu višekriterijske optimizacije je upravo idealna točka. Najčešće idealna točka ne postoji. Zato nam idealna točka može poslužiti kao referentna točka, odnosno tražimo točku koja će biti što bliže idealnoj točki. Ovdje se radi o kompromisnom programiranju. Sve dok minimiziramo udaljenost između dopustive i idealne točke, pronaći ćemo jednu (slabo) efikasnu točku za svaki izbor norme. Rezultat možemo ojačati ako uvedemo težine u normu. Tada govorimo o težinskom kompromisnom programiranju.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Cilj ovog poglavlja je definirati neke osnovne matematičke definicije i pojmove koje ćemo dalje koristiti u radu. Radi se o definiciji skupova i vrstama skupova, pojmovima otvorenosti i zatvorenosti te otvorenom pokrivaču i njegovom potpokrivaču. Zatim ćemo spomenuti neke osnovne pojmove uređaja i konusa u $\mathbb{R}^p$, neke osnovne definicije udaljenosti i normi, te na kraju općenite pojmove optimizacije (vidi [2]).

1.1 Skupovi

Skup $\mathbb{R}^p$ je realan vektorski prostor budući da imamo koordinatno definirano zbrajanje i množenje skalarom (iz $\mathbb{R}$):

1. $(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$
2. $\alpha(x_1, \ldots, x_p) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dimenzija prostora je p jer vektori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ čine bazu tog prostora (kanonska baza).

Sada možemo definirati pojmove otvorene kugle i otvorenog skupa.

Definicija 1.1.1. *Neka je $x \in \mathbb{R}^p$ i $r > 0$. Skup*

$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : d(x, y) < r\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^p : \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2} < r \right\}$$

nazivamo otvorena kugla oko x radijusa r.
Skup $A \subseteq \mathbb{R}^p$ je otvoren ako vrijedi:

$$(\forall x \in A)\, (\exists r > 0) \quad K(x, r) \subseteq A.$$

Definicija 1.1.2. *Skup $B \subseteq \mathbb{R}^p$ je zatvoren ako mu je komplement $\mathbb{R}^p \backslash B$ otvoren.*

Definirajmo i kompaktan skup i navedimo kratke primjere.

Definicija 1.1.3. *Skup $A \subset \mathbb{R}^p$ je kompaktan ako je ograničen i zatvoren.*

Primjer 1.1.4.

- *$K(0,1) \subset \mathbb{R}^p$ nije kompaktan jer nije zatvoren.*
- *$\bar{K}(0,1) \subset \mathbb{R}^p$ je kompaktan.*
- *$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ nije kompaktan jer nije ograničen.*

Definicija 1.1.5. *Pokrivač skupa $A \subset \mathbb{R}^p$ je bilo koja familija skupova u $\mathbb{R}^p$ čija unija sadrži A. To jest, to je skup*

$$\mathcal{U} = \{U_i : U_i \subset \mathbb{R}^p, i \in \mathcal{I}\},$$

($\mathcal{I}$ je neki skup) takav da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$. Pokrivač je konačan ako sadrži konačan broj skupova. Ako su svi elementi U_i pokrivača $\mathcal{U}$ otvoreni skupovi, tada govorimo o otvorenom pokrivaču. Potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$ skupa A je podfamilija od $\mathcal{U}$ koja je i sama pokrivač od A.

Primjer 1.1.6. *Familija $\mathcal{U} = \{K((x,0),1) : x \in \mathbb{R}\}$ je otvoren pokrivač realne osi x u $\mathbb{R}^2$. Ona sadži prebrojiv potpokrivač $\{K((n,0),1) : n \in \mathbb{Z}\}$, no nema konačan potpokrivač. Prema Heine-Borelovoj karakterizaciji kompaktnosti "Skup je kompaktan ako i samo ako svaki njegov otvoren pokrivač posjeduje konačan potpokrivač." slijedi da realna os x u $\mathbb{R}^2$ nije kompaktan skup.*

Ponovimo sad pojam konveksnog skupa i uvedimo definicije $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksnog skupa i $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-kompaktnog skupa.

Definicija 1.1.7. *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^p$ kažemo da je konveksan ako je za sve $x, y \in A$ njihova spojnica, to jest konveksna ljuska, $[x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$ sadržana u skupu A.*

Definicija 1.1.8. *Skup $Y \in \mathbb{R}^p$ zove se $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksan ako je $Y + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ konveksan.*

Očito, svaki konveksan skup Y je i $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksan. Međutim, postoje skupovi koji nisu konveksni, ali jesu $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksni. Primjerice na Slici 2.1 imamo jedan takav primjer.

Definicija 1.1.9. *Skup $Y \subset \mathbb{R}^p$ je $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-kompaktan, ako za sve $y \in Y$ presjek $(y - \mathbb{R}^p_{\geqq}) \cap Y$ je kompaktan.*

U ovom odjeljku možemo se još prisjetiti definicije povezanosti.

Definicija 1.1.10. *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^p$ kažemo da je povezan ako se ne može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna podskupa koji su otvoreni u A. U protivnom za A kažemo da je nepovezan. Pri tome, podskup B skupa A zovemo otvorenim u A ako postoji otvoreni skup U u $\mathbb{R}^p$ takav da je $B = A \cap U$.*

Napomena 1.1.11. *Drugim riječima, A je povezan ako i samo ako su jedini podskupovi od A koji su ujedno otvoreni i zatvoreni u A sam A i $\emptyset$.*
Dakle, skup $A \subset \mathbb{R}^p$ nije povezan ako može biti zapisan kao $A = A_1 \cup A_2$, tako da $A_1, A_2 \neq \emptyset$, $cl(A_1) \cap A_2 = A_1 \cap cl(A_2) = \emptyset$. Odnosno ekvivalentno, A nije povezan ako postoje otvoreni skupovi O_1, O_2 takvi da $A \subset O_1 \cup O_2$, $A \cap O_1 \neq \emptyset$, $A \cap O_2 \neq \emptyset$, $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

1.2 Uređaji i konusi

Za početak, uvedimo oznake i značenje nekih uređaja, odnosno relacija na $\mathbb{R}^p$. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^p$, $p > 1$.

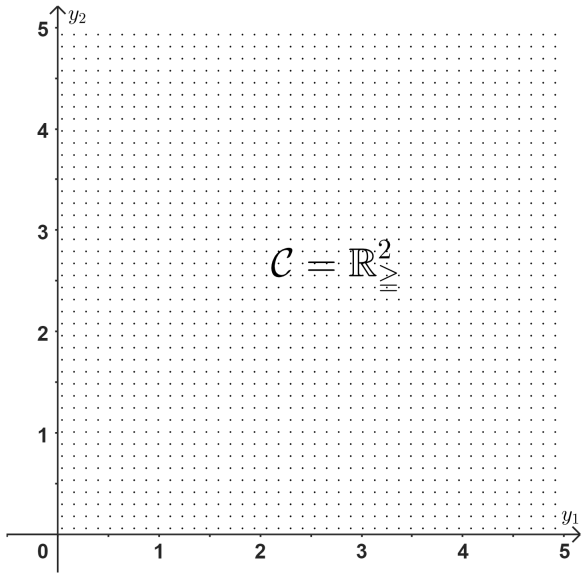
OZNAKA	DEFINICIJA	NAZIV
$x \leq y$	$x_k \leq y_k, k = 1, \ldots, p$	standardni uređaj
$x < y$	$x_k < y_k, k = 1, \ldots, p$	stroga relacija po komponentama
$x \leq_{lex} y$	$x_{k^*} < y_{k^*}, k^* = \min\{k : x_k \neq y_k\}$ ili $x = y$	leksikografski uređaj
$x \leq_{MO} y$	$\max_{k=1,\ldots,p} x_k \leq \max_{k=1,\ldots,p} y_k$	max-relacija

Definiramo podskupove od $\mathbb{R}^p$ koje ćemo dalje koristiti u radu.

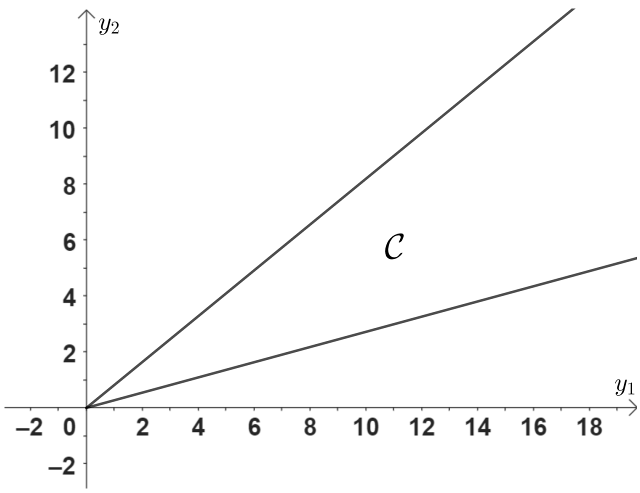
1. $\mathbb{R}^p_{\geqq} := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\}$
2. $\mathbb{R}^p_{\geq} := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0, y \neq 0\} = \mathbb{R}^p_{\geqq} \backslash \{0\}$
3. $\mathbb{R}^p_{>} := \{y \in \mathbb{R}^p : y > 0\} = \text{int}\mathbb{R}^p_{\geqq}$.

Definicija 1.2.1. *Podskup $C \subseteq \mathbb{R}^p$ naziva se konus, ako je $\alpha d \in C$ za sve $d \in C$ i za sve $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.*

Na slikama 1.1 i 1.2 možemo vidjeti primjere dva konusa u $\mathbb{R}^2$.



Slika 1.1: Primjer konusa $\mathbb{R}^2_{\geqq}$.



Slika 1.2: Konus $C \subset \mathbb{R}^2_{\geqq}$.

Korisno je spomenuti što smatramo pod operacijama sume dva skupa i množenja skupa sa skalarom. Neka su $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^p$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $-\mathcal{S} = \{-s : s \in \mathcal{S}\}$
- $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 := \{s^1 + s^2 : s^1 \in \mathcal{S}_1, s^2 \in \mathcal{S}_2\}$

- $\alpha\mathcal{S} := \{\alpha s : s \in \mathcal{S}\}$

Primjetimo da općenito vrijedi $2\mathcal{S} \neq \mathcal{S} + \mathcal{S}$.

Definicija 1.2.2. *Relativni interior konveksnog skupa $\mathcal{S}$, u oznaci ri($\mathcal{S}$), definiramo kao interior skupa $\mathcal{S}$ u odnosu na najmanji afini potprostor generiran s $\mathcal{S}$ (vidi [5]).*

Uvedimo iduće oznake koje ćemo spominjati u daljnjem radu. Neka je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^p$.

- $\mathrm{int}(\mathcal{S})$ je interior od $\mathcal{S}$
- $\mathrm{ri}(\mathcal{S})$ je relativni interior od $\mathcal{S}$
- $\mathrm{bd}(\mathcal{S})$ je rub skupa $\mathcal{S}$
- $\mathrm{cl}(\mathcal{S}) = \mathrm{int}(\mathcal{S}) \cup \mathrm{bd}(\mathcal{S})$ je zatvarač od $\mathcal{S}$
- $\mathrm{conv}(\mathcal{S})$ je konveksna ljuska od $\mathcal{S}$

Definicija 1.2.3. *Konus C u $\mathbb{R}^p$ naziva se :*

- *pravilan ako je $C \neq \emptyset$ i $C \neq \mathbb{R}^p$,*
- *šiljasti ako za svaki netrivijalan $d \in C$ vrijedi $-d \notin C$, to jest $C \cap (-C) \subseteq \{0\}$.*

Napomena 1.2.4. *Prema definiciji konusa imamo da je C konveksan ako za sve $d^1, d^2 \in C$ vrijedi $d^1 + d^2 \in C$. To vrijedi jer su $\alpha d^1, (1-\alpha)d^2 \in C$ jer je C konus. Dakle, zatvorenost od C na zbrajanje je dovoljna da bi konus C bio konveksan. Vrijedi i obrat, dakle C je konveksni konus ako i samo ako je $\alpha C \subseteq C$ za sve $\alpha > 0$ i $C + C \subseteq C$.*

1.3 Skalarni produkt, norma, metrika

Definicija 1.3.1. *Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^p$ definiramo skalarni produkt*

$$\langle x\ ,\ y\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i, \qquad x, y \in \mathbb{R}^p,$$

normu

$$\|x\| = \sqrt{\langle x\ ,\ x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^p,$$

i metriku

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2} \qquad x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Definicija 1.3.2. *Skalarnim produktom na* $\mathbb{R}^p$ *zovemo realnu funkciju na* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ *koja zadovoljava iduća svojstva*

- $\langle x \ , \ x\rangle \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^p;$
- $\langle x \ , \ x\rangle = 0$ *ako i samo ako* $x = 0;$
- $\langle x \ , \ y + w\rangle = \langle x \ , \ y\rangle + \langle x \ , \ w\rangle, \quad x, y, w \in \mathbb{R}^p;$
- $\langle \alpha x \ , \ y\rangle = \alpha\langle x \ , \ y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^p, \alpha \in \mathbb{R};$
- $\langle x \ , \ y\rangle = \langle y \ , \ x\rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^p.$

Definicija 1.3.3. *Normom na* $\mathbb{R}^p$ *zovemo realnu funkciju na* $\mathbb{R}^p$ *sa svojstvima*

- $\|x\| \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^p;$
- $\|x\| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0;$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^p, \alpha \in \mathbb{R};$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^p$ *(nejednakost trokuta za normu).*

Definicija 1.3.4. *Metrikom na* $\mathbb{R}^p$ *zovemo realnu funkciju na* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ *tako da zadovoljava iduća svojstva*

- $d(x, y) \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^p;$
- $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y;$
- $d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^p;$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^p$ *(nejednakost trokuta za metriku).*

Napomena 1.3.5. *Ako je na vektorskom prostoru* V *definirana funkcija* $\langle \cdot \ , \ \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava svojstva skalarnog produkta iz Definicije (1.3.2), tada* $(V, \langle \cdot \ , \ \cdot\rangle)$ *nazivamo unitarni prostor.*
Slično, ako je na vektorskom prostoru V *definirana funkcija* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava svojstva norme iz Definicije (1.3.3), tada* $(V, \|\cdot\|)$ *nazivamo normirani prostor.*
Ukoliko je na vektorskom prostoru V *definirana funkcija* $d : V \times V \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava svojstva metrike iz Definicije (1.3.4), tada* (V, d) *nazivamo metrički prostor.*

Propozicija 1.3.6. *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *normiran prostor i neka je funkcija* $d : V \times V \to \mathbb{R}$ *dana s*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Tada je d metrika na V (to jest, (V, d) *je metrički prostor) za koju kažemo da je inducirana iz norme.*

Dokaz. Dokažimo da vrijede svojstva metrike :

- $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$;
- $0 = d(x, y) = \|x - y\|$ ako i samo ako $x = y$;
- $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$
- $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

□

Možemo se prisjetiti često korištenih normi na $\mathbb{R}^p$. To su:

$$l_1 - norma : \|y^1 - y^2\|_1 := \sum_{k=1}^{p} |y_k^1 - y_k^2| \tag{1.1}$$

$$l_2 - norma\ (euklidska) : \|y^1 - y^2\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |y_k^1 - y_k^2|^2} \tag{1.2}$$

$$l_\infty - norma : \|y^1 - y^2\|_\infty := \max_{k=1,\dots,p} |y_k^1 - y_k^2| \tag{1.3}$$

Napomena 1.3.7. *Na* $\mathbb{R}^p$ *možemo uvesti čitavu familiju normi,* l_q *- norme* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_q$*:*

$$\|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^{p} |y_k|^q \right)^{1/q} \tag{1.4}$$

za $1 \leq q < \infty$.

1.4 Višekriterijska optimizacija

Definicija 1.4.1. *Binarna relacija* $\geq$ *je parcijalni uređaj na skupu E ako je:*

1. *refleksivna :* $(\forall x \in E) \quad x \geq x$

2. *antisimetrična :* $(\forall x, y \in E) \quad x \geq y \ i \ y \geq x \Rightarrow x = y$
3. *tranzitivna :* $(\forall x, y, z \in E) \quad x \geq y \ i \ y \geq z \Rightarrow x \geq z.$

Ako je $E = \mathbb{R}^p$ možemo uskladiti uređaj sa strukturom vektorskog prostora pa dodatno pretpostavljamo:

- $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^p) \quad x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$
- $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^p)(\forall t > 0) \quad x \geq y \Rightarrow tx \geq ty.$

Dan nam je problem višekriterijske, odnosno vektorske optimizacije :

$$\begin{aligned} f_1(x) &\to min \\ f_2(x) &\to min \\ &\vdots \\ f_p(x) &\to min \\ x &\in X \\ X &\subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

pri čemu je $f = (f_1, \ldots, f_p) : X \to \mathbb{R}^p$ vektorska funkcija. Zapišemo problem (1.5) skraćeno kao :

$$\begin{aligned} f(x) &\to min \\ x &\in X. \end{aligned} \tag{1.6}$$

X je dopustivi skup, f je funkcija cilja, dok sa

$$Y := \{f(x) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^p$$

označavamo skup funkcijskih vrijednosti.
Funkcije $f_i : X \to \mathbb{R}$, za $i = 1, \ldots, p$ su kriterijske funkcije odnosno funkcije cilja.

Rješenje zadaće (1.6) je ona točka $x \in X$ u kojoj $f(x)$ predstavlja minimum skupa Y uz standardni uređaj na $\mathbb{R}^p$. Zovemo ga još idealnim minimumom i označavamo s $y^I = (y_1^I, \ldots, y_p^I)$ pri čemu je $y_k^I = \min_{x \in X} f_k(x)$, $k \in \{1, \ldots, p\}$.
Idealni minimum skupa Y najčešće ne postoji, pa se koncentriramo na traženje efikasnih minimuma.

Ako su sve kriterijske funkcije linearne i dopustivi skup dan je linearnim jednakostima, odnosno nejednakostima, onda (1.5) zovemo problemom linearne višekriterijske optimizacije. Ako barem jedna od kriterijskih funkcija nije linearna ili ako dopustivi skup nije dan linearnim jednakostima / nejednakostima, radi se o problemu nelinearne višekriterijske optimizacije. Ukoliko su sve funkcije konveksne i dopustivi skup je konveksan tada problem (1.5) nazivamo problem konveksne višekriterijske optimizacije. Ako barem jedna od funkcija nije konveksna ili dopustivi skup nije konveksan, tada se problem naziva nekonveksna višekriterijska optimizacija.

Poglavlje 2

Efikasnost i nedominiranost

U ovom poglavlju bavit ćemo se temeljnim sadržajem efikasnosti i nedominiranosti. Objasnit ćemo što su to nedominirane točke te efikasna rješenja, predstavit ćemo idealne i nadir točke koje predstavljaju granice na skup nedominiranih rješenja. Zatim ćemo objasniti što su to slabo i strogo efikasne točke i izvesti neka zanimljiva svojstva. Spomenut ćemo i pojam pravilnih efikasnih točaka te istražiti njihov međusobni odnos. Detalji se mogu naći u [1].

2.1 Efikasne i nedominirane točke

U ovom odjeljku razmatramo probleme višekriterijske optimizacije:

$$\begin{aligned} \min(f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ x \in X. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Slika dopustivog skupa X po funkciji cilja f označava se sa $Y := f(X)$.

Definicija 2.1.1. *Dopustiva točka $\hat{x} \in X$ naziva se efikasna točka minimuma funkcije f ili točka minimuma u Paretovom smislu ako ne postoji $x \in X$ takav da je $f(x) \leq f(\hat{x})$ i $f(x) \neq f(\hat{x})$. Ako je $\hat{x}$ efikasna točka minimuma, $f(\hat{x})$ se zove nedominirana točka skupa Y. Ako su $x^1, x^2 \in X$ i $f(x^1) \leq f(x^2)$, $f(x^1) \neq f(x^2)$ kažemo da x^1 dominira x^2 i $f(x^1)$ dominira $f(x^2)$. Skup svih efikasnih točaka minimuma (efikasnih rješenja) $\hat{x} \in X$ označava se sa X_E i zove se efikasna granica (efikasni skup). Skup svih nedominiranih točaka skupa Y označen je sa Y_N i zove se nedominirani skup.*

Možemo spomenuti neke ekvivalentne definicije efikasnosti koje se često koriste i uklapaju u određeni kontekst. Dakle, $\hat{x}$ je efikasna točka minimuma ako:

1. ne postoji $x \in X$ takav da je $f_k(x) \leq f_k(\hat{x})$ za $k = 1, \ldots, p$ i $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ za barem jedan $i \in \{1, ..., p\}$

2. $f(x) \leq f(\hat{x})$ za neki $x \in X$ implicira $f(x) = f(\hat{x})$

3. $f(X) \cap (f(\hat{x}) - \mathbb{R}^p_{\geqq}) = \{f(\hat{x})\}$

Također, vrijedi $\hat{y} \in Y$ je nedominirana, ako ne postoji $y \in Y$ takav da je $y \leq \hat{y}$, $y \neq \hat{y}$. Ovo nam predstavlja definiciju nedominirane točke proizvoljnog skupa Y, ne nužno slike neke funkcije. Skup efikasnih rješenja X_E i nedominirani skup Y_N mogu biti prazni ili se sastojati od izoliranih točaka, pa čak i ako su X i Y konveksni skupovi. Zanimljivo svojstvo je da ukoliko skupu Y dodamo $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ neće se promijeniti nedominirani skup.

Propozicija 2.1.2. $Y_N = (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})_N$

Dokaz. Rezultat trivijalno slijedi ako je $Y = \emptyset$, zato što je tada i $Y + \mathbb{R}^p_{\geqq} = \emptyset$ i tada je nedominirani podskup oba skupa prazan.

Neka je stoga $Y \neq \emptyset$. Pretpostavimo prvo da je $y \in Y_N$, ali $y \notin (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})_N$. Onda postoji neki $y' \in (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})$ takav da je $y - y' = d' \in \mathbb{R}^p_{\geqq} \setminus \{0\}$, uz $y' = y'' + d''$ takvi da $y'' \in Y$ i $d'' \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$ te stoga $y = y' + d' = y'' + (d' + d'') = y'' + d$ sa $d = d' + d'' \in \mathbb{R}^p_{\geqq} \setminus \{0\}$, što je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom.

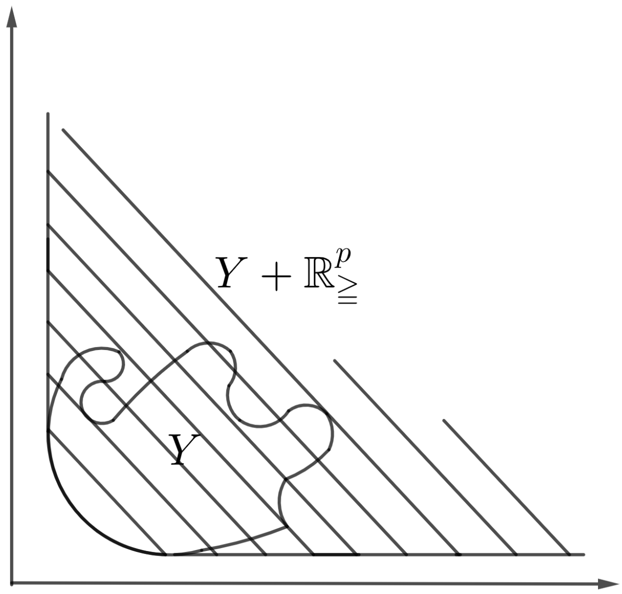
S druge strane, pretpostavimo $y \in (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})_N$, ali $y \notin Y_N$. Ovdje imamo dvije mogućnosti. Ako $y \notin Y$ postoji $y' \in Y$ i $d \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$, $d \neq 0$ takvi da je $y = y' + d$. Kako je $y' = y' + 0 \in (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})$ dobivamo da $y \notin (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})_N$, što je kontradikcija. Ako je $y \in Y$ postoji $y' \in Y$ takav da $y' \leq y$, $y' \neq y$. Neka je $d = y - y'$ koji je u $\mathbb{R}^p_{\geqq} \setminus \{0\}$. Zato je $y = y' + d$ i $y \notin (Y + \mathbb{R}^p_{\geqq})_N$ te ponovno dobivamo kontradikciju. □

Na Slici 2.1 možemo vidjeti skicu skupova iz Propozicije 2.1.2 na jednom primjeru.

Idući rezultat koji ćemo dokazati intuitivno je jasan, a to je da skup nedominiranih točaka pripada rubu skupa Y.

Propozicija 2.1.3. $Y_N \subset bd(Y)$

Dokaz. Neka je $y \in Y_N$ i pretpostavimo da $y \notin bd(Y)$. Stoga, $y \in \text{int}(Y)$ i postoji otvorena kugla $K(y, \varepsilon)$ sadržana u skupu Y. Neka je $d \neq 0, d \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$. Onda možemo izabrati neki $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < \varepsilon$ takav da $\beta d \in B(0, \varepsilon)$. Sad imamo $y - \beta d \in Y$ sa $\beta d \in \mathbb{R}^p_{\geqq} \setminus \{0\}$, to jest $y \notin Y_N$. □



Slika 2.1: Nedominirane točke od Y i $Y + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ su jednake.

2.2 Granice na nedominirani skup

U ovom odjeljku ćemo definirati idealne i nadir točke koje će zapravo predstavljati donju i gornju granicu nedominiranih točaka. Često se koriste kao referentne točke u kompromisnom programiranju. Više o tome spomenut ćemo u Poglavlju 4.

Definicija 2.2.1. *Točka* $y^I = (y^I_1, \ldots, y^I_p)$ *dana sa*

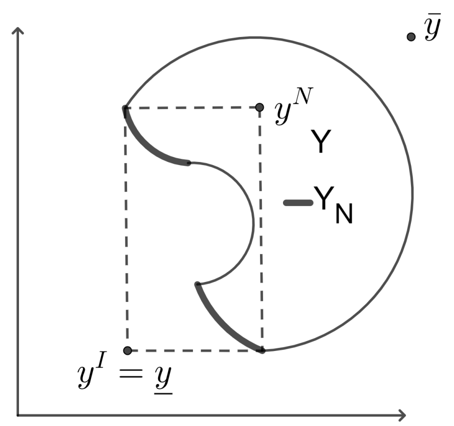
$$y^I_k := \min_{x \in X} f_k(x) = \min_{y \in Y} y_k$$

naziva se idealna točka problema višekriterijske optimizacije $\min_{x \in X}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$.

Definicija 2.2.2. *Točka* $y^N = (y^N_1, \ldots, y^N_p)$ *dana sa*

$$y^N_k := \max_{x \in X_E} f_k(x) = \max_{y \in Y_N} y_k$$

naziva se nadir točka problema višekriterijske optimizacije $\min_{x \in X}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$.



Slika 2.2: Idealna i nadir točka.

Nadir točka definirana je kao maksimum uzimajući u obzir samo nedominirane točke. Inače, kao na Slici 2.2, da se maksimum uzima po cijelom skupu Y (točka $\overline{y}$ na slici), nalazila bi se dosta daleko od nedominiranih točaka.

Naravno, možemo primjetiti da uvijek vrijedi

$$y_k^I \leq y_k$$

te

$$y_k \leq y_k^N$$

za bilo koji $y \in Y_N$, $k = 1, \ldots, p$.

Idealnu točku nije teško izračunati jer se radi o rješenju p pojedinačnih problema optimizacije. S druge strane, izračunati nadir točku poprilično je teško jer je uključena optimizacija na efikasnom skupu, kojeg u praksi nije lako odrediti.
Možemo navesti pristup kojim određujemo procjenu nadir točaka. Najprije rješavamo p pojedinačnih problema cilja $\min_{x\in X} f_k(x)$. Optimalna rješenja označimo sa x^k, $k = 1, \ldots, p$. Idealne točke su zapravo $y^I_k = f_k(x^k)$, za $k = 1, \ldots, p$. Procjenu nadir točke definiramo sa :

$$\hat{y}^N_i := \max_{k=1,\ldots,p} f_i(x^k).$$

Ovo lako možemo iščitati iz takozvane tablice isplate :

$$\begin{array}{ccccc} y^I_1 & f_1(x^2) & \cdots & f_1(x^{p-1}) & f_1(x^p) \\ f_2(x^1) & \ddots & \cdots & \cdots & f_2(x^p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_p(x^1) & f_p(x^2) & \cdots & f_p(x^{p-1}) & y^I_p \end{array} \tag{2.2}$$

Problem kod tablica isplate je što procjena $\hat{y}^N$ može biti iznad ili ispod y^N. To se događa kad imamo više optimalnih rješenja pojedinačnih problema $\min_{x\in X} f_k(x)$.

2.3 Stroga, slaba i pravilna efikasnost

Definirajmo najprije što su to strogo efikasna rješenja (strogo Pareto optimalna) i slabo efikasna rješenja (slabo Pareto optimalna).

Definicija 2.3.1. *Kažemo da je dopustiva točka $\hat{x} \in X$ strogo efikasna točka minimuma funkcije f ako ne postoji $x \in X$, $x \neq \hat{x}$ takav da je $f(x) \leq f(\hat{x})$.*

Kažemo da je dopustiva točka $\hat{x} \in X$ slabo efikasna točka minimuma funkcije f ako ne postoji $x \in X$ takav da $f(x) < f(\hat{x})$, to jest $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ za sve $k = 1, \ldots, p$. Točku $\hat{y} = f(\hat{x})$ tada nazivamo slabo nedominirana.
Strogo efikasni skup označavamo sa X_{sE}, dok slabo efikasni skup označavamo sa X_{wE}, a slabo nedominirani skup sa Y_{wN}.

Možemo navesti dvije ekvivalentne definicije slabo efikasnih točaka minimuma.
Dopustiva točka $\hat{x} \in X$ je slabo efikasna ako i samo ako

1. ne postoji $x \in X$ takav da $f(\hat{x}) - f(x) \in \text{int}\mathbb{R}^p_{\geqq} = \mathbb{R}^p_{>}$
2. $(f(\hat{x}) - \mathbb{R}^p_{>}) \cap Y = \emptyset$.

Iz definicije odmah slijedi :

$$Y_N \subset Y_{wN} \tag{2.3}$$

i

$$X_{sE} \subset X_E \subset X_{wE}. \tag{2.4}$$

U idućem teoremu pokazat ćemo koji su to nužni uvjeti da bi Y_{wN} bio neprazan.

Teorem 2.3.2. *Neka je $Y \subset \mathbb{R}^p$ neprazan i kompaktan. Tada je $Y_{wN} \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $Y_{wN} = \emptyset$. Tada za svaki $y \in Y$ postoji neki $\hat{y} \in Y$ takav da je $y \in \hat{y} + \mathbb{R}^p_>$. Uzimanjem unije po svim $y \in Y$ dobivamo

$$Y \subset \bigcup_{\hat{y}} (\hat{y} + \mathbb{R}^p_>). \tag{2.5}$$

Budući da je $\mathbb{R}^p_>$ otvoren, (2.5) definira otvoreni pokrivač skupa Y. Po pretpostavci Y je kompaktan, pa postoji konačan potpokrivač, to jest

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^{k} (y^i + \mathbb{R}^p_>). \tag{2.6}$$

Sad iz ovoga slijedi da za svaki $i = 1, \ldots, k$ postoji neki j takav da je $y^j < y^i$. Zbog konačnosti, postoji i' i niz $i_1, \ldots, i_m$ takvi da je $y^{i'} < y^{i_1} < \ldots < y^{i_m} < y^{i'}$, čime smo dobili kontradikciju. Dakle, $Y_{wN} \neq \emptyset$. □

Budući da vrijedi (2.3), dakle radi se o pravom podskupu, Y_N može biti prazan, a Y_{wN} može tada biti neprazan čak i ako Y nije kompaktan. To možemo ilustrirati idućim primjerom.

Primjer 2.3.3. *Neka je dan skup*

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y_1 < 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}. \tag{2.7}$$

Tada je očito $Y_N = \emptyset$, a $Y_{wN} = \{y \in Y : 0 < y_1 < 1, y_2 = 0\}$.

Sad možemo još definirati pravilne efikasne točke. Prije toga možemo još komentirati da efikasna rješenja ne dopuštaju poboljšanje jedne funkcije cilja, a da se pri tome ne pogorša vrijednost barem jedne od preostalih funkcija cilja. Dakle, da bismo poboljšali neki kriterij to možemo napraviti samo uz trošak pogoršanja barem jednog drugog kriterija. Omjer kompromisa između kriterija može biti mjeren računanjem povećanja u komponenti f_i, po jedinici smanjenja u komponenti f_j. U nekim situacijima omjer kompromisa može biti neograničen. Pravilna efikasna rješenja su zapravo efikasna rješenja koja imaju ograničen omjer kompromisa.

Definicija 2.3.4. ***(Geoffrion (1968))*** *Dopustiva točka $\hat{x} \in X$ naziva se pravilna efikasna točka minimuma funkcije f, ako je efikasna i ako postoji realni broj $M > 0$ takav da za sve i te $x \in X$ koji zadovoljavaju $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ postoji indeks j takav da je $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ i vrijedi*

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M. \tag{2.8}$$

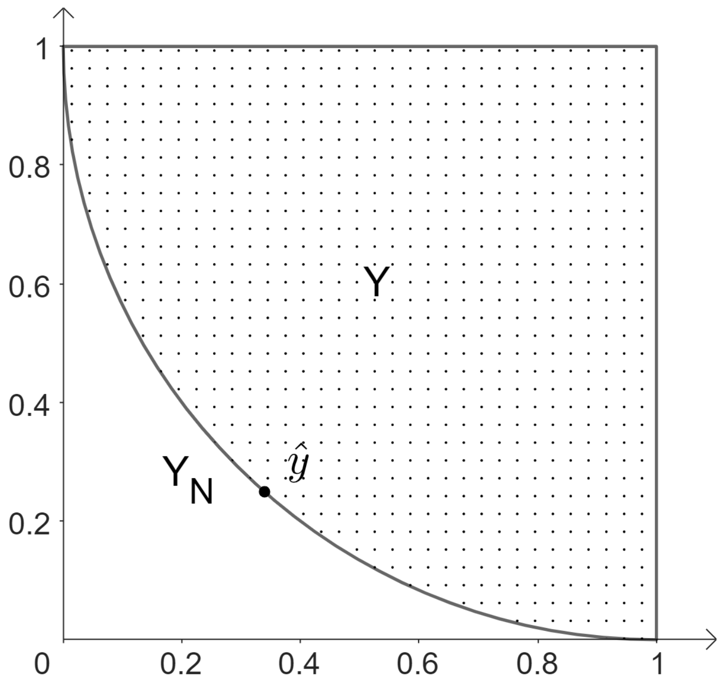
Pripadna točka $\hat{y} = f(\hat{x})$ naziva se pravilna nedominirana.

Idući primjer nam daje intuiciju da se kod pravilnih efikasnih točaka izbacuju rubne efikasne točke.

Primjer 2.3.5. *Neka je dopustivi skup u prostoru odlučivanja i kriterija dan sa*

$$Y = X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}.$$

Iz Slike 2.3 vidimo da je



Slika 2.3: Efikasne točke Y_N

$$Y_N = \{(y_1, y_2) \in Y : (y_1 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 1\}.$$

Možemo opaziti da što se više $\hat{y}$ *pomiče prema* $(1, 0)$*, potrebno nam je sve veće povećanje od* y_1 *da bismo postigli smanjenje po jedinici u* y_2*. Sada možemo dokazati da točka* $(1, 0)$ *nije pravilna efikasna. Označimo* $\hat{x} = (1, 0)$*. Moramo pokazati da za svaki* $M > 0$ *postoje neki indeks* $i \in \{1, 2\}$ *i neki* $x \in X$ *takvi da je* $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ *te vrijedi*

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} > M$$

za sve $j \in \{1, 2\}$ *takve da* $f_j(x) > f_j(\hat{x})$*.*

Neka je $i = 1$ *i izaberimo* x^ε *takav da je* $x_1^\varepsilon = 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ *i* $x_2^\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$*. Vidimo da je* x^ε *efikasan jer je* $(x_1^\varepsilon - 1)^2 + (x_2^\varepsilon - 1)^2 = 1$*. Naravno,* $x^\varepsilon \in X$ *te po definiciji uzimamo* $i = 1, j = 2$ *jer je* $x_1^\varepsilon < \hat{x}_1$ *i* $x_2^\varepsilon > \hat{x}_2$*. Sad dobivamo :*

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x^\varepsilon)}{f_j(x^\varepsilon) - f_j(\hat{x})} = \frac{1 - (1 - \varepsilon)}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty. \tag{2.9}$$

Time smo dokazali da $\hat{x} = (1, 0)$ *nije pravilna efikasna točka.*

Ukoliko postoje nedominirane točke, odnosno efikasna rješenja tada znamo da postoje i slabo nedominirane točke, odnosno slabo efikasna rješenja. Međutim to nam ne garantira postojanje pravilnih nedominiranih točaka. Ilustrirajmo to idućim primjerom.

Primjer 2.3.6. *Neka je* $Y = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 < 0, y_2 = 1/y_1\}$*. Tada je* $Y_N = Y$*, ali* $Y_{pN} = \emptyset$*. To vrijedi jer za bilo koji* $\hat{y} \in Y_N$ *u Definiciji 2.3.4 možemo uzeti niz točaka* y^k *sa* $y_2^k > \hat{y}_2$ *i* $y_1^k \to -\infty$ *ili* $y_1^k > \hat{y}_1$ *i* $y_2^k \to -\infty$*.*

Poglavlje 3

Metoda težinske sume

U ovom poglavlju istražit ćemo na koji način problem

$$\min_{x \in X}(f_1(x), \dots, f_p(x)) \tag{3.1}$$

može biti riješen tako da rješavamo zadaću sljedećeg oblika

$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x). \tag{3.2}$$

Problem optimizacije (3.2) zovemo skalarizacija težinskom sumom problema višekriterijske optimizacije.

Neka je $Y \subset \mathbb{R}^p$. Za fiksni $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$ označimo skup optimalnih točaka od Y s obzirom na λ sa

$$\mathcal{S}(\lambda, Y) := \left\{ \hat{y} \in Y : \langle \lambda, \hat{y} \rangle = \min_{y \in Y} \langle \lambda, y \rangle \right\}. \tag{3.3}$$

Primjetimo da smo uzeli u obzir samo nenegativne težinske vektore $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$. Vidjet ćemo da je razlika između nenegativnih i pozitivnih težina (pondera) bitna. Stoga možemo definirati

$$\mathcal{S}(Y) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}} \mathcal{S}(\lambda, Y) = \bigcup_{\left\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\right\}} \mathcal{S}(\lambda, Y) \tag{3.4}$$

i

$$\mathcal{S}_0(Y) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geqq}} \mathcal{S}(\lambda, Y) = \bigcup_{\left\{\lambda \geq 0 : \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\right\}} \mathcal{S}(\lambda, Y). \tag{3.5}$$

Napomena 3.0.1. *Naravno, pretpostavku da je $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ uvijek možemo dodati, čim je λ nenegativan i različit od nule. Time samo normiramo težine, ali ne mijenjamo $\mathcal{S}(\lambda, Y)$. Također, jasno je da $\lambda = 0$ nema smisla jer je $\mathcal{S}(0, Y) = Y$. Direktno slijedi da je*

$$\mathcal{S}(Y) \subset \mathcal{S}_0(Y). \tag{3.6}$$

3.1 Skalarizacija težinskom sumom i efikasnost

U ovom odjeljku pokazat ćemo da su optimalna rješenja problema težinskom sumom (3.2) s pozitivnim težinama uvijek efikasna, dok će za nenegativne težine biti slabo efikasna. Uz pretpostavku konveksnosti, obrat će vrijediti za slabo efikasne točke minimuma. Sadržaj ovog odjeljka prati literaturu [1].

Teorem 3.1.1. *Za bilo koji skup $Y \subset \mathbb{R}^p$ vrijedi $\mathcal{S}_0(Y) \subset Y_{wN}$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ i $\hat{y} \in \mathcal{S}(\lambda, Y)$. Tada vrijedi

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k$$

za sve $y \in Y$.

Pretpostavimo sada da $\hat{y} \notin Y_{wN}$. Onda postoji neki $\bar{y} \in Y$ takav da $\bar{y}_k < \hat{y}_k, k = 1, \ldots, p$. Zato imamo

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \bar{y}_k < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k,$$

jer je bar jedna od težina λ_k pozitivna. Dobili smo kontradikciju, pa slijedi tvrdnja $\mathcal{S}_0(Y) \subset Y_{wN}$. □

Za $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksne skupove vrijedi i obratna inkluzija.

Teorem 3.1.2. *Ako je Y $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksan, tada je $Y_{wN} = \mathcal{S}_0(Y)$.*

Dokaz. Ako uzmemo u obzir Teorem 3.1.1 jedino još treba dokazati inkluziju $Y_{wN} \subset \mathcal{S}_0(Y)$. Zahvaljujući Propoziciji 2.1.2 dobivamo da je $Y_{wN} \subset (Y + \mathbb{R}^p_{>})_{wN}$ (dokaz ove tvrdnje je analogan kao i u Propoziciji 2.1.2 samo zamijenimo $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ s $\mathbb{R}^p_{>}$). Stoga je

$$(Y + \mathbb{R}^p_{>} - \hat{y}) \cap (-\mathbb{R}^p_{>}) = \emptyset$$

za neki $\hat{y} \in Y_{wN}$. Nadalje, $Y + \mathbb{R}^p_{>} - \hat{y}$ i $-\mathbb{R}^p_{>}$ su neprazni i konveksni skupovi. Zato možemo primjeniti teorem o separaciji (vidi [4]) i uzeti neki $\lambda \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ takav da je

$$\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle \geq 0 \geq \langle \lambda, -\bar{d} \rangle$$

za sve $y \in Y$, $d, \bar{d} \in \mathbb{R}^p_{>}$.

Kako je $\langle \lambda, -\bar{d} \rangle \leq 0$ za sve $\bar{d} \in \mathbb{R}^p_{>}$, možemo izabrati $\bar{d} = e_k + \varepsilon e$, pri čemu je e_k k-ti jedinični vektor, $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$ vektor sadržan samo od jedinica, te $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali. Tako je $\lambda_k \geq 0, k = 1, \ldots, p$.

Također, izaberemo $d = \varepsilon e$ i dobivamo iz $\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle \geq 0$

$$\langle \lambda, y \rangle + \varepsilon \langle \lambda, e \rangle \geq \langle \lambda, \hat{y} \rangle$$

za sve $y \in Y$ i zato

$$\langle \lambda, y \rangle > \langle \lambda, \hat{y} \rangle.$$

Stoga je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ i $\hat{y} \in \mathcal{S}(\lambda, Y) \subset \mathcal{S}_0(Y)$. □

Sada možemo prikazati poveznicu između $\mathcal{S}(Y)$ i Y_N.

Teorem 3.1.3. *Neka je $Y \subset \mathbb{R}^p$. Tada je $\mathcal{S}(Y) \subset Y_N$.*

Dokaz. Neka je $\hat{y} \in \mathcal{S}(Y)$. Stoga postoji neki $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ koji zadovoljava

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k$$

za sve $y \in Y$.

Pretpostavimo da $\hat{y} \notin Y_N$. Zato mora postojati neki $\bar{y} \in Y$ takav da je $\bar{y} \leq \hat{y}$, $\bar{y} \neq \hat{y}$. Ako pomnožimo komponente s težinama dobivamo

$$\lambda_k \bar{y}_k \leq \lambda_k \hat{y}_k$$

za sve $k = 1, \ldots, p$ i strogu nejednakost za barem jedan k. Budući da su svi λ_k pozitivni i da imamo barem jednu strogu nejednakost sumiranjem gornjih nejednakosti dobivamo

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \bar{y}_k < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k,$$

što je kontradikcija s $\hat{y} \in \mathcal{S}(Y)$. □

Propozicija 3.1.4. *Ako je $\hat{y}$ jedinstveni element od $\mathcal{S}(\lambda, Y)$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$, onda je $\hat{y} \in Y_N$.*

Dokaz. Budući da je $\hat{y}$ jedinstveni element od $\mathcal{S}(\lambda, Y)$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k \tag{3.7}$$

za sve $y \in Y$ različite od $\hat{y}$. Pretpostavimo da $\hat{y} \notin Y_N$. Zato mora postojati neki $\bar{y} \in Y$ takav da je $\bar{y} \leq \hat{y}$, $\bar{y} \neq \hat{y}$. Ako pomnožimo komponente s težinama dobivamo

$$\lambda_k \bar{y}_k \leq \lambda_k \hat{y}_k$$

za sve $k = 1, \ldots, p$. Sada slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \bar{y}_k \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k,$$

što je kontradikcija s (3.7). □

Sada možemo primijeniti ove rezultate na prostor odlučivanja, odnosno na (slabo) efikasna rješenja problema višekriterijske optimizacije.

Propozicija 3.1.5. *Neka je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema optimizacije težinske sume*

$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \tag{3.8}$$

sa $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje :

1. *Ako je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$, onda je $\hat{x} \in X_{wE}$.*
2. *Ako je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$, onda je $\hat{x} \in X_E$.*
3. *Ako je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ i $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje od (3.8), onda je $\hat{x} \in X_{sE}$.*

Dokaz. Tvrdnje direktno slijede iz Teorema 3.1.1, Teorema 3.1.3 i Propozicije 3.1.4 s jedinstvenošću od $\hat{x}$, redom. □

3.2 Odnos s pravilnom efikasnosti

U ovom odjeljku prikazat ćemo odnos između pravilnih nedominiranih točaka u smislu Geoffriona i optimalnih točaka skalarizacije težinskom sumom s pozitivnim težinama. Točke će se poklapati za konveksne skupove. Razlika između nedominiranih i pravilnih nedominiranih točaka je mala. Skup pravilnih nedominiranih točaka u smislu Geoffriona označavat ćemo s Y_{pE}, dok ćemo skup pravilnih efikasnih točaka problema višekriterijske optimizacije u smislu Geoffriona označavati s X_{pE}. Sadržaj prati [1].

Teorem 3.2.1. *Neka su $\lambda_k > 0, k = 1, \ldots, p$ pozitivne težine te neka je $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$. Ako je $\hat{x}$ optimalno rješenje od (3.2), onda je $\hat{x}$ pravilno efikasno rješenje od (3.1).*

Dokaz. Neka je $\hat{x}$ optimalno rješenje od (3.2). Najprije dokažimo da je $\hat{x}$ efikasno rješenje. Pretpostavimo da postoji neki $\bar{x} \in X$ takav da je $f(\bar{x}) \leq f(\hat{x})$ i $f(\bar{x}) \neq f(\hat{x})$. Zbog toga što su sve težine $\lambda_k, k = 1, \ldots, p$ pozitivne i $f_i(\bar{x}) < f_i(\hat{x})$ za neki $i \in \{1, \ldots, p\}$ slijedi kontradikcija

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\bar{x}) < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\hat{x}).$$

Sada trebamo još dokazati pravilnu efikasnost. Izaberimo dovoljno velik broj M i neka je

$$M := (p-1) \max_{i,j} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}.$$

Pretpostavimo da $\hat{x}$ nije pravilno efikasno rješenje. Tada postoji neki $i \in \{1, \ldots, p\}$ i $x \in X$ takvi da je $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ i $(f_i(\hat{x}) - f_i(x)) > M(f_j(x) - f_j(\hat{x}))$ za sve $j \in \{1, \ldots, p\}$ takve da je $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$. Stoga imamo :

$$f_i(\hat{x}) - f_i(x) > (p-1) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} (f_j(x) - f_j(\hat{x}))$$

za sve $j \neq i$ s obzirom na izabrani M. Pomnožimo svaku od ovih nejednokosti s $\lambda_i/(p-1)$ i sumiramo ih po svim $j \neq i$. Dobivamo :

$$\lambda_i (f_i(\hat{x}) - f_i(x)) > \sum_{j \neq i} \lambda_j (f_j(x) - f_j(\hat{x}))$$

$$\Rightarrow \lambda_i f_i(\hat{x}) - \lambda_i f_i(x) > \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(x) - \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(\hat{x})$$

$$\Rightarrow \lambda_i f_i(\hat{x}) + \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(\hat{x}) > \lambda_i f_i(x) + \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(\hat{x}) > \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x),$$

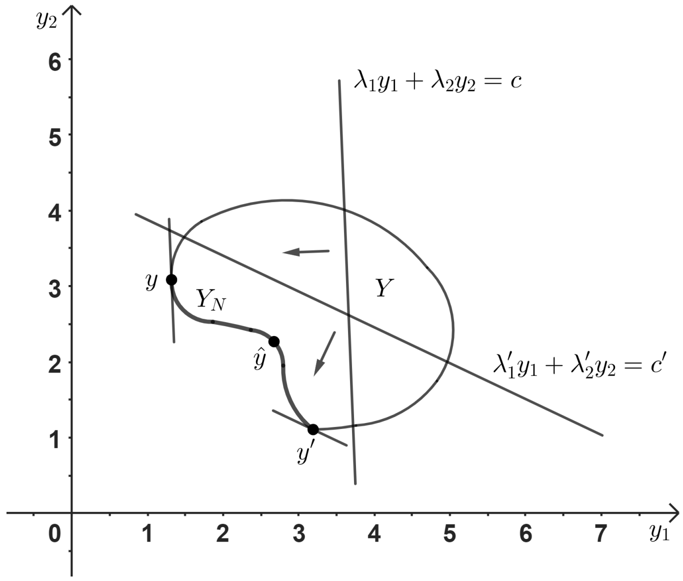
što je kontradikcija s optimalnosti od $\hat{x}$ za (3.2). Zato je $\hat{x}$ pravilno efikasno rješenje. □

Korolar 3.2.2. *Neka je $Y \subset \mathbb{R}^p$. Tada je $\mathcal{S}(Y) \subset Y_{pN}$.*

Dokaz. Tvrdnja direktno slijedi iz Teorema 3.2.1. □

Obratna inkluzija Korolara 3.2.2 generalno neće vrijediti. Možemo pogledati Sliku 3.1 da bismo dobili intuiciju zašto to ne mora vrijediti. Odmah možemo uočiti da skup Y nije $\mathbb{R}_{\geqq}$-konveksan. Svi vektori $y = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ koji postižu istu vrijednost $c = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x)$ u odnosu na težinsku sumu, smješteni su na pravcu. Minimizacijski problem $\mathcal{S}(\lambda, Y)$ gura, odnosno translatira ovaj pravac ulijevo, što bliže idealnoj točki, a da pri tome presijeca Y samo na rubu. Na slici vidimo primjer za dva težinska vektora (λ_1, λ_2) te (λ'_1, λ'_2)

koji vode prema nedominiranim točkama y i y'. Točka $\hat{y} \in Y_N$ je pravilna nedominirana, međutim niti jedna njegova praslika x pod funkcijom f ne može biti optimalno rješenje problema (3.2) za bilo koji izbor $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p_>$. Može se pokazati da obrat Teorema 3.2.1 i Korolara 3.2.2 vrijedi za $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksne skupove.



Slika 3.1: Točka $\hat{y}$ je pravilna nedominirana.

Pokažimo primjerom kako dobivamo efikasna i pravilna efikasna rješenja korištenjem skalarizacije težinskom sumom.

Primjer 3.2.3. *Neka je dan skup* $Y = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$. *Zato imamo :*

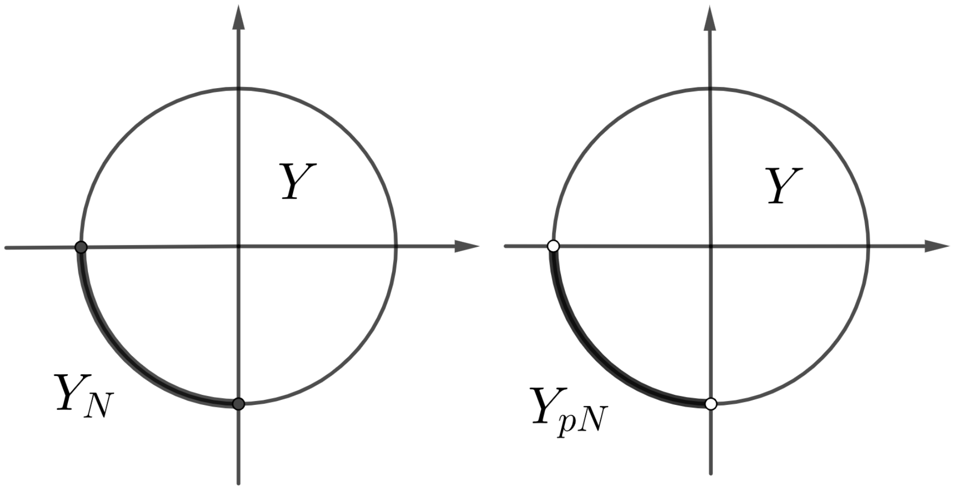
$$Y_N = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = 1, y_1 \leq 0, y_2 \leq 0\},$$

$$Y_{pN} = Y_N \backslash \{(-1, 0), (0, -1)\}.$$

To možemo vidjeti na Slici 3.2. Sve točke $\hat{y}$ *koje su pravilno efikasne su optimalne točke skalarizacije težinskom sumom. Dvije granične točke* $(-1, 0)$ *i* $(0, -1)$ *koje su nedominirane točke i pripadaju* Y_N *nisu pravilne nedominirane točke. Međutim,* $(-1, 0)$ *i* $(0, -1)$ *su jedinstvena optimalna rješenja od*

$$\min_{y \in Y} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

za $\lambda = (1, 0)$ *i* $\lambda = (0, 1)$*, redom. Pozivajući se na Propoziciju 3.1.4 slijedi da ove točke pripadaju nedominiranom skupu* Y_N.



Slika 3.2: Skupovi Y_N i Y_{pN}.

U konveksnom slučaju vrijedit će i obrat Teorema 3.2.1.

Teorem 3.2.4. *(Geoffrion (1968)). Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$ konveksan i pretpostavimo da su funkcije $f_k : X \to \mathbb{R}$ konveksne za $k = 1, \ldots, p$. Tada je $\hat{x} \in X$ pravilno efikasno rješenje ako i samo ako je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (3.2), sa strogo pozitivnim težinama $\lambda_k, k = 1, \ldots, p$.*

Dokaz. Trebamo samo dokazati nužnost jer smo dovoljnost dokazali u Teoremu 3.2.1. Stoga, neka je $\hat{x} \in X$ pravilno efikasno rješenje. Prema definiciji znamo da onda postoji $M > 0$ takav da za sve $i = 1, \ldots, p$ sustav

$$\begin{aligned} f_i(x) &< f_i(\hat{x}) \\ f_i(x) + M f_j(x) &< f_i(\hat{x}) + M f_j(\hat{x}), \quad \forall j \neq i \end{aligned} \tag{3.9}$$

nema rješenja.

Svojstvo konveksnih funkcija nam daje da za svaki takav i-ti sustav postoji $\lambda_k^i \geq 0, k = 1, \ldots, p$, pri čemu je $\sum_{k=1}^p \lambda_k^i = 1$, tako da za sve $x \in X$ vrijede sljedeće nejednakosti.

$$\lambda_i^i f_i(x) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i (f_i(x) + M f_k(x)) \geq \lambda_i^i f_i(\hat{x}) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i (f_i(\hat{x}) + M f_k(\hat{x}))$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i^i f_i(x) + \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_i(x) + M \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(x) \geq \lambda_i^i f_i(\hat{x}) + \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_i(\hat{x}) + M \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(\hat{x})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^i f_i(x) + M \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(x) \geq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^i f_i(\hat{x}) + M \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(\hat{x})$$

$$\Leftrightarrow f_i(x) + M \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(x) \geq f_i(\hat{x}) + M \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(\hat{x})$$

Ove nejednakosti vrijede za svaki $i = 1, \dots, p$. Ako sumiramo po svim i dobivamo :

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(x) + M \sum_{i=1}^{p} \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(x) \geq \sum_{i=1}^{p} f_i(\hat{x}) + M \sum_{i=1}^{p} \sum_{k\neq i} \lambda_k^i f_k(\hat{x})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \left(1 + M \sum_{i\neq k} \lambda_k^i\right) f_k(x) \geq \sum_{k=1}^{p} \left(1 + M \sum_{i\neq k} \lambda_k^i\right) f_k(\hat{x})$$

za sve $x \in X$. Možemo normirati težine tako da $(1 + M \sum_{i\neq k} \lambda_k^i)$ poprimi vrijednost 1. Tako dobivamo pozitivne težine $\lambda_i, i = 1, \dots, p$ za koje je $\hat{x}$ optimalno za (3.2). □

Poglavlje 4

Skalarizacija

Postoje mnoge tehnike skalarizacije za rješavanje problema višekriterijske optimizacije. Radi se o optimizaciji jednog cilja koja je povezana s problemom višekriterijske optimizacije

$$\min_{x \in X}(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \tag{4.1}$$

preko realne skalarizirajuće funkcije. Najčešće se radi o funkciji kriterijskih funkcija, odnosno funkcija cilja problema višekriterijske optimizacije (4.1).

U Poglavlju 3 upoznali smo se s metodom težinske sume za rješavanje problema višekriterijske optimizacije. Radi se o problemu

$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \tag{4.2}$$

kod kojeg smo koristili vektor nenegativnih (pozitivnih) težina $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ kao parametar.

Zaključak koji možemo donijeti iz Poglavlja 3, koji se naslanja na Propoziciju 3.1.5 je sljedeći.
Ako je $\hat{x} \in X$ optimalno rješenje problema (4.2) vrijede iduće tvrdnje:

1. ako je $\lambda > 0$, onda je $\hat{x} \in X_{pE}$
2. ako je $\lambda \geq 0$ i $\lambda \neq 0$, onda je $\hat{x} \in X_{wE}$
3. ako je $\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$ i $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje problema (4.2) onda je $\hat{x} \in X_{sE}$.

S druge strane, ukoliko je X konveksan skup i $f_k, k = 1, \ldots, p$ konveksne funkcije vrijede iduće tvrdnje :

1. ako je $\hat{x} \in X_{pE}$, onda postoji neki $\lambda > 0$ takav da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.2)

2. ako je $\hat{x} \in X_{wE}$, onda postoji neki $\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$ takav da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.2).

Za nekonveksne probleme ne možemo primijeniti metodu težinske sume. Zato ćemo u ovom poglavlju predstaviti neke druge metode skalarizacije koje su primjenjive i u slučaju kad Y nije $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-konveksan.

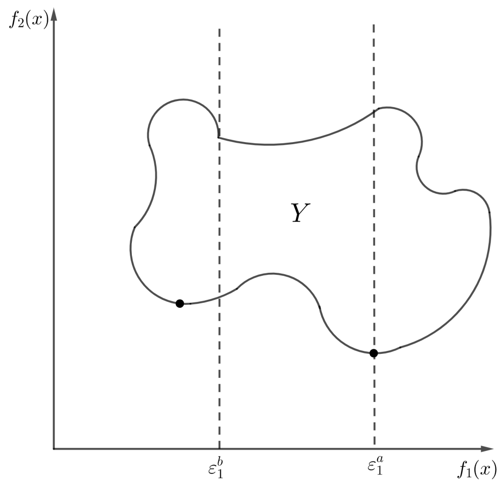
4.1 Metoda ε-uvjeta

Uz metodu težinske sume, metoda ε-uvjeta jedna je od najpoznatijih metoda za rješavanje problema višekriterijske optimizacije. Radi se o minimizaciji samo jedne od kriterijskih funkcija, dok su ostale iskorištene za formiranje dodatnih ograničenja. Problem (4.1) transformira se u problem ε-uvjeta:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} f_j(x) \\ &f_k(x) \leq \varepsilon_k, \ k = 1, \dots, p \quad k \neq j, \end{aligned} \tag{4.3}$$

pri čemu je $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$. Vidmo da nam komponenta ε_j sada nije bitna, ali kasnije će biti korisna.

Na Slici 4.1 možemo vidjeti bikriterijski problem kod kojeg je gornja granica ograničenja stavljena na $f_1(x)$.



Slika 4.1: Optimalna rješenja problema ε-uvjeta.

U idućoj Propoziciji dokazat ćemo da su optimalna rješenja problema (4.3) barem slabo efikasna. Kasnije ćemo još pokazati nužne i dovoljne uvjete za efikasnost pri kojima je ova metoda primjenjiva i za probleme koji nemaju pretpostavku konveksnosti.

Propozicija 4.1.1. *Neka je $\hat{x}$ optimalno rješenje od (4.3) za neki $j \in \{1, \ldots, p\}$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$. Tada je $\hat{x}$ slabo efikasno rješenje.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\hat{x} \notin X_{wE}$. Tada postoji neki $x \in X$ takav da je $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ za sve $k = 1, \ldots, p$. Iz toga imamo da je $f_j(x) < f_j(\hat{x})$. Budući da je $f_k(x) < f_k(\hat{x}) \leq \varepsilon_k$ za sve $k \neq j$, slijedi da je rješenje x dopustivo za (4.3). Dobivamo kontradikciju s činjenicom da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.3). □

Propozicija 4.1.2. *Neka je $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje problema (4.3) za neki $j \in \{1, \ldots, p\}$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$. Tada je $\hat{x} \in X_{sE}$ i stoga $\hat{x} \in X_E$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji neki $x \in X$ takav da je $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}) \leq \varepsilon_k$ za sve $k \neq j$. Ako uz to vrijedi $f_j(x) \leq f_j(\hat{x})$ moramo imati da je $f_j(x) = f_j(\hat{x})$ zato što je $\hat{x}$ optimalno rješenje od (4.3). Tako je i x je optimalno rješenje od (4.3). Zbog jedinstvenosti optimalnog rješenja slijedi da je $x = \hat{x}$ i $\hat{x} \in X_{sE}$. □

Teorem 4.1.3. *Dopustiva točka $\hat{x} \in X$ je efikasna ako i samo ako postoji neki $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$ takav da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.3) za sve $j = 1, \ldots, p$.*

Dokaz. Najprije dokažimo nužnost teorema. Neka je $\hat{\varepsilon} = f(\hat{x})$. Pretpostavimo da $\hat{x}$ nije optimalno rješenje problema (4.3) za neki $j \in \{1, \ldots, p\}$. Onda mora postojati neki $x \in X$ takav da je $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ i $f_k(x) \leq \hat{\varepsilon}_k = f_k(\hat{x})$ za sve $k \neq j$. To je kontradikcija s pretpostavkom da je $\hat{x} \in X_E$.

Dokažimo sada i dovoljnost. Pretpostavimo da $\hat{x} \notin X_E$. Tada postoji neki indeks $j \in \{1, \ldots, p\}$ i dopustivo rješenje $x \in X$ tako da je $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ i $f_k(x) \leq f_k(\hat{x})$ za $k \neq j$. Iz toga slijedi da $\hat{x}$ ne može biti optimalno rješenje problema (4.3) za bilo koji ε za koji je dopustiv, to jest za koji vrijedi $f_k(\hat{x}) \leq \varepsilon_k$ za $k \neq j$. □

Dakle, da bi $\hat{x}$ bio efikasan, mora biti optimalno rješenje problema (4.3) za sve $j = 1, \ldots, p$ s istom vrijednosti ε koji se koristi u svim ovim problemima. Iz Teorema 4.1.3 zaključujemo da sva efikasna rješenja možemo dobiti ako prikladno izaberemo ε. Kao i u dokazu Teorema 4.1.3 često se uzima $\varepsilon = f(\hat{x})$ ukoliko želimo dokazati da je $\hat{x}$ efikasno rješenje.

Sad još možemo pokazati rezultat povezivanja problema ε-uvjeta (4.3) s problemom metode težinske sume (4.2).

Teorem 4.1.4. *(Chankong and Haimes (1983))*

1. *Pretpostavimo da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema* $\min_{x\in X}\sum_{k=1}^{p}\lambda_k f_k(x)$. *Ako je* $\lambda_j > 0$ *tada postoji* $\hat{\varepsilon}$ *takav da je* $\hat{x}$ *optimalno rješenje problema (4.3).*

2. *Pretpostavimo da je* X *konveksan skup i da su funkcije* $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, p$ *konveksne. Ako je* $\hat{x}$ *optimalno rješenje problema (4.3) za neki* $j \in \{1, \ldots, p\}$, *onda postoji* $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ *takav da je* $\hat{x}$ *optimalno rješenje za* $\min_{x\in X}\sum_{k=1}^{p}\hat{\lambda}_k f_k(x)$.

Dokaz. 1. Pokazat ćemo da možemo izabrati $\hat{\varepsilon} = f(\hat{x})$. Iz optimalnosti od $\hat{x}$ za problem težinske sume slijedi
$$\sum_{k=1}^{p}\lambda_k(f_k(x) - f_k(\hat{x})) \geq 0$$
za sve $x \in X$. Pretpostavimo da $\hat{x}$ nije optimalno rješenje problema (4.3) uz izabrani $\hat{\varepsilon}$. Za svaki $x' \in X$ za koji vrijedi $f_j(x') < f_j(\hat{x})$ i $f_k(x') \leq f_k(\hat{x})$ za $k \neq j$ dobivamo
$$\lambda_j(f_j(x') - f_j(\hat{x})) + \sum_{k\neq j}\lambda_k(f_k(x') - f_k(\hat{x})) < 0$$
jer je $\lambda_j > 0$. To je kontradikcija.

2. Pretpostavimo da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.3) za neki j. Zato ne postoji $x \in X$ takav da je $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ i $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}) \leq \varepsilon_k$ za $k \neq j$. Ako uzmemo u obzir konveksnost funkcija f_k, možemo zaključiti da mora postojati neki $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ takav da je
$$\sum_{k=1}^{p}\hat{\lambda}_k(f_k(x) - f_k(\hat{x})) \geq 0$$
za sve $x \in X$. Budući da je $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ dobivamo
$$\sum_{k=1}^{p}\hat{\lambda}_k f_k(x) \geq \sum_{k=1}^{p}\hat{\lambda}_k f_k(\hat{x})$$
za sve $x \in X$. Dakle, za težinski vektor $\hat{\lambda}$ slijedi tvrdnja.

□

4.2 Hibridna metoda

Hibridna metoda zapravo je kombinacija metode težinske sume i metode ε-uvjeta. Neka je x^0 proizvoljna dopustiva točka problema višekriterijske optimizacije. Problem je sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \\ &f_k(x) \leq f_k(x^0) \quad k = 1, \ldots, p \\ &x \in X \end{aligned} \tag{4.4}$$

pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$.

Teorem 4.2.1. *Neka je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$. Dopustiva točka $x^0 \in X$ je optimalno rješenje problema (4.4) ako i samo ako je $x^0 \in X_E$.*

Dokaz. Neka je x^0 optimalno rješenje problema (4.4). Kad bi postojao neki $x \in X$ takav da je $f(x) \leq f(x^0)$, $f(x) \neq f(x^0)$ zbog toga što je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ slijedilo bi da je

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x^0).$$

To je kontradikcija s pretpostavkom da je x^0 optimalno rješenje problema (4.4). Zato je x^0 efikasno rješenje.

Neka je $x^0 \in X$ efikasno rješenje. Onda ne postoji $x \in X$ takav da je $f(x) \leq f(x^0)$ i $f(x) \neq f(x^0)$. Zato bilo koja dopustiva točka problema (4.4) zadovoljava $f(x) = f(x^0)$ i optimalno je. □

4.3 Metoda elastičnog ograničenja

Još jedna skalarizirajuća metoda za rješavanje problema (4.1) naziva se metoda elastičnog ograničenja (vidi [1]). Budući da problem ε-uvjeta (4.3) nije uvijek lako riješiti zbog ograničenja $f_k(x) \leq \varepsilon_k$, možemo malo relaksirati dana ograničenja. Skalarizacija elastičnog ograničenja glasi:

$$\begin{aligned} &\min f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k \\ &f_k(x) - s_k \leq \varepsilon_k \qquad k \neq j \\ &s_k \geq 0 \qquad k \neq j \\ &x \in X, \end{aligned} \tag{4.5}$$

pri čemu je $\mu_k \geq 0, k \neq j$.
Dopustivi skup problema (4.5) jednak je dopustivom skupu originalnog problema višekriterijske optimizacije (4.1).

Propozicija 4.3.1. *Neka je $(\hat{x}, \hat{s})$ optimalno rješenje problema (4.5) pri čemu je $\mu \geq 0$. Tada je $\hat{x} \in X_{wE}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\hat{x} \notin X_{wE}$. Onda postoji neki $x \in X$ takav da je $f_k(x) < f_k(\hat{x}), k = 1, \ldots, p$. Tada je $(x, \hat{s})$ dopustivo rješenje za (4.5) s vrijednosti funkcije cilja koja je manja nego za $(\hat{x}, \hat{s})$. To je kontradikcija s pretpostavkom da je $(\hat{x}, \hat{s})$ optimalno rješenje. □

U idućoj Propoziciji dobivamo jači rezultat.

Propozicija 4.3.2. *Ako je $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje problema (4.5), tada je $\hat{x} \in X_{sE}$, to jest strogo efikasno rješenje problema višekriterijske optimizacije.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in X$ takav da je $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}), k = 1, \ldots, p$. Tada je $(x, \hat{s})$ dopustivo rješenje za (4.5). Kako vrijednost funkcije cilja od $(x, \hat{s})$ nije gora nego vrijednost funkcije cilja od $(\hat{x}, \hat{s})$, jedinstvenost od $\hat{x}$ povlači da je $x = \hat{x}$. □

U idućem primjeru ćemo vidjeti da i u slučaju kad je $\mu > 0$, optimalno rješenje problema (4.5) može biti samo slabo efikasno.

Primjer 4.3.3. *Neka je*

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\geqq} : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\right\} + \mathbb{R}^2_{\geqq}$$

i $f(x) = x$. Uzmimo $\varepsilon_1 > 1$. Tada je $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{s}_1) = (\hat{x}_1, 0, 0)$ optimalno rješenje problema (4.5) sa $j = 2$ za sve $1 \leq \hat{x}_1 \leq \varepsilon_1$. Očito da za $\hat{x}_1 > 1$ ovo rješenje je slabo efikasno, no nije efikasno. Ovaj rezultat ne ovisi o izboru μ.

Možemo vidjeti da uz prikladan izbor ε, μ i $\hat{s}$, $(\hat{x}, \hat{s})$ je optimalno rješenje problema (4.5), pri čemu je $\hat{x}$ efikasno rješenje problema višekriterijske optimizacije.

Korolar 4.3.4. *Neka je $\hat{x} \in X_E$. Tada postoje $\varepsilon, \mu \geq 0$ i $\hat{s}$ takvi da je $(\hat{x}, \hat{s})$ optimalno rješenje od (4.5) za sve $j \in \{1, \ldots, p\}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 4.1.3, ukoliko uzmemo $\varepsilon = f(\hat{x})$, $\hat{s} = 0$ i $\mu_k = \infty$ za sve $k = 1, \ldots, p$. □

Iduća Definicija bit će nam važna za daljnje rezultate.

Definicija 4.3.5. *Kažemo da je nedominirani skup Y_N stabilan izvana, ako za svaki $y \in Y \backslash Y_N$ postoji $\hat{y} \in Y_N$ takav da je $y \in \hat{y} + \mathbb{R}^p_{\geqq}$.*

Teorem 4.3.6. *Neka je Y_N stabilan izvana te neka je $\hat{x} \in X_{pE}$ pravilno efikasno rješenje. Tada, za svaki $j \in \{1, \ldots, p\}$ postoje $\varepsilon, \hat{s}, \mu^j$ sa $\mu^j_k < \infty$ za sve $k \neq j$ takvi da je $(\hat{x}, \hat{s})$ optimalno rješenje problema (4.5) za sve $\mu \in \mathbb{R}^{p-1}, \mu \geq \mu^j$.*

Dokaz. Uzmimo da je $\varepsilon_k := f_k(\hat{x}), k = 1, \dots, p$. Stoga možemo izabrati $\hat{s} = 0$. Neka je $j \in \{1, \dots, p\}$. Budući da je $\hat{x}$ pravilno efikasno rješenje, postoji $M > 0$ takav da za sve $x \in X$ sa $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ postoji $k \neq j$ takav da je $f_k(\hat{x}) < f_k(x)$ i $\dfrac{f_j(\hat{x}) - f_j(x)}{f_k(x) - f_k(\hat{x})} < M$.

Možemo definirati μ^j sa $\mu^j_k := \max(M, 0)$ za sve $k \neq j$.

Neka je sada $x \in X$ i $s \in \mathbb{R}^{p-1}$ takav da je $s_k = \max\{0, f_k(x) - \varepsilon_k\} = \max\{0, f_k(x) - f_k(\hat{x})\}$ za sve $k \neq j$. Vidimo da s_k za $k \neq j$ poprima najmanju moguću vrijednost koju može imati. Želimo dokazati da je

$$f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k \geq f_j(\hat{x}) + \sum_{k \neq j} \mu_k \hat{s}_k = f_j(\hat{x}). \tag{4.6}$$

Dokažimo najprije da možemo pretpostaviti da je $x \in X_E$ u (4.6). Inače, postoji neki $x' \in X_E$ takav da je $f(x') \leq f(x)$, $f(x') \neq f(x)$ jer je Y_N stabilan izvana, te s' takav da $s'_k = \max\{0, f_k(x') - \varepsilon_k\}$. Budući da je $s' \leq s$ dobivamo da je $f_j(x') + \sum_{k \neq j} \mu_k s'_k \leq f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k$ za bilo koji $\mu \geq 0$.

Neka je onda $x \in X_E$. Promotrimo iduće mogućnosti.

U slučaju da je $f_j(x) \geq f_j(\hat{x})$ vrijedi

$$f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k > f_j(\hat{x}) + 0 = f_j(\hat{x}) + \sum_{k \neq j} \mu^j_k \hat{s}_k$$

za bilo koji $\mu \geq 0$.

U slučaju da je $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ uzmimo da je $\mathcal{I}(x) := \{k \neq j : f_k(x) > f_k(\hat{x})\}$. Slijedi da je $\mathcal{I}(x) \neq \emptyset$ jer su $\hat{x}$ i x efikasni. Možemo pretpostaviti da je $s_k = 0$ za sve $k \notin \mathcal{I}(x), k \neq j$. Neka je $\bar{k} \in \mathcal{I}(x)$. Tada imamo :

$$\begin{aligned}
f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k &\geq f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu^j_k s_k \\
&\geq f_j(x) + \sum_{k \in \mathcal{I}(x)} \frac{f_j(\hat{x}) - f_j(x)}{f_k(x) - f_k(\hat{x})} s_k \\
&\geq f_j(x) + \frac{f_j(\hat{x}) - f_j(x)}{f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\hat{x})} s_{\bar{k}} \\
&= f_j(x) + \frac{f_j(\hat{x}) - f_j(x)}{f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\hat{x})} (f_{\bar{k}}(x) - f_{\bar{k}}(\hat{x})) \\
&= f_j(\hat{x}) = f_j(\hat{x}) + \sum_{k \neq j} \mu_k \hat{s}_k.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Nejednakosti i jednakosti u (4.7) slijede jer je $\mu_k \geq \mu^j_k$, iz definicije od μ^j_k, nenegativnosti svih izraza, $s_k = f_k(x) - f_k(\hat{x})$ za $k \in \mathcal{I}(x)$ i $\hat{s} = 0$. □

Dakle, metoda elastičnog ograničenja (4.5) nam omogućava da relaksiramo ε-ograničenja u problemu (4.3) i pomaže nam u rješavanju problema skalarizacije.

4.4 Metoda ciljnih uvjeta

Ovu metodu još nazivamo k-ti ciljno-ograničeni pristup. Detalji se mogu naći u [3]. Neka je $\hat{x} \in X$ i definirajmo težine

$$\lambda_i := \frac{1/f_i(\hat{x})}{\sum_{k=1}^{p} 1/f_k(\hat{x})}. \tag{4.8}$$

Tada je $\lambda > 0$, odnosno λ pripada skupu pozitivnih težina, te vrijedi

$$\lambda_1 f_1(\hat{x}) = \cdots = \lambda_p f_p(\hat{x}). \tag{4.9}$$

Skalarni problem za neki $k \in \{1, \ldots, p\}$ glasi

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \lambda_k f_k(x) \\ &\lambda_i f_i(x) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}), \quad i = 1, \ldots, p, \quad i \neq k. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Teorem 4.4.1. *Neka je $\hat{x} \in X_E$ te neka je λ kao u (4.8). Tada je $\hat{x}$ rješenje problema (4.10) za svaki k.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $\hat{x}$ i λ kao u (4.9). Pretpostavimo da $\hat{x}$ ne rješava problem (4.10) za neki k. Tada postoji $x \in X$ takav da je

$$\lambda_k f_k(x) < \lambda_k f_k(\hat{x})$$

i

$$\lambda_i f_i(x) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}) = \lambda_i f_i(\hat{x}), \quad \forall i \neq k.$$

Kako je $\lambda > 0$ slijedi

$$f_k(x) < f_k(\hat{x})$$

i

$$f_i(x) \leq f_i(\hat{x}), \quad \forall i \neq k,$$

što je kontradikcija s definicijom efikasnosti. Stoga je $\hat{x}$ rješenje problema (4.10) za svaki k. □

Pokažimo primjerom da tvrdnja Teorema 4.4.1 ne vrijedi ako polaznu pretpostavku zamijenimo s $\hat{x} \in X_{wE}$.

Primjer 4.4.2. *Neka je problem višekriterijske optimizacije dan sa $f_1 := (x+1)^2 + 1$, $f_2 := (x+2)^2 + 1$ i $f_3 := 3$ uz uvjet $x \in \mathbb{R}$. Tada je $\hat{x} = 0$ slabo efikasno rješenje. Neka su težine* *dane s* $\lambda_1 = 1/5, \lambda_2 = 2/25, \lambda_3 = 2/15$*, tako je* $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 2/5$*, za* $i = 1, 2, 3$*. Za* $k = 1$ *problem (4.10) možemo zapisati kao*

$$\begin{aligned} \min\ (1/5)((x+1)^2+1) \\ (2/25)((x+2)^2+1) \leq 2/5 \\ (2/15)3 \leq 2/5 \end{aligned} \tag{4.11}$$

To jest kao

$$\begin{aligned} \min\ ((x+1)^2+1) \\ (x+2)^2 \leq 4 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Tada se rješenje nalazi unutar skupa $\{x : -4 \leqq x \leqq 0\}$*. Vidimo da* $\hat{x} = 0$ *nije optimalna točka.*

Vrijedi i obrat Teorema 4.4.1.

Teorem 4.4.3. *Neka je* $\hat{x} \in X$ *i* λ *kao u (4.9) te pretpostavimo da* $\bar{x} \in X$ *rješava problem (4.10) za svaki k. Tada je* $\bar{x} \in X_E$*.*

Dokaz. Neka su $\hat{x} \in X$ i λ kao u (4.9) i pretpostavimo da $\bar{x}$ rješava problem (4.10) za svaki k. To znači da je $\bar{x}$ dopustiv za problem (4.10) za svaki k. Zato za svaki k možemo zapisati

$$\lambda_i f_i(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}) \ \ i = 1, \dots, p, \ \ i \neq k.$$

Pretpostavimo da $\bar{x} \notin X_E$. Tada postoji $\tilde{x} \in X$ takav da je $f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\bar{x})$ za svaki $i \in \{1, \dots, p\}$, te postoji $k \in \{1, \dots, p\}$ takav da vrijedi $f_k(\tilde{x}) < f_k(\bar{x})$. Stoga imamo

$$\lambda_i f_i(\tilde{x}) \leq \lambda_i f_i(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}), \ \forall i \neq k,$$

i

$$\lambda_k f_k(\tilde{x}) < \lambda_k f_k(\bar{x}).$$

To je kontradikcija s pretpostavkom da je $\bar{x}$ rješenje problema (4.10). Stoga $\bar{x} \in X_E$. □

Teorem 4.4.4. *Neka su* $\hat{x} \in X$ *i* λ *kao u (4.9). Ako je za neki k,* $\bar{x}$ *jedinstveno rješenje problema (4.10), onda je* $\bar{x} \in X_E$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\bar{x} \notin X_E$. Tada postoji $x \in X$ takav da je

$$f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \ \forall i, \tag{4.13}$$

i postoji neki indeks r takav da vrijedi

$$f_r(x) < f_r(\bar{x}). \tag{4.14}$$

Imamo dva slučaja.
Slučaj I : Neka je $r = k$. Iz (4.14) dobivamo

$$\lambda_r f_r(x) < \lambda_r f_r(\bar{x}). \tag{4.15}$$

Iz (4.13) i činjenice da je $\bar{x}$ dopustiv za problem (4.10), imamo

$$\lambda_i f_i(x) \leq \lambda_i f_i(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}), \ \forall i \neq k. \tag{4.16}$$

Zbog (4.15) i (4.16) dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je $\bar{x}$ rješenje problema (4.10).
Slučaj II : Neka je $r \neq k$. Iz (4.13), (4.14) i pretpostavke da je $\bar{x}$ dopustivo rješenje za problem (4.10) dobivamo

$$\lambda_i f_i(x) \leq \lambda_i f_i(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}), \ i = 1, \dots, p, \ i \neq r, k,$$

i

$$\lambda_r f_r(x) < \lambda_r f_r(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}).$$

Tako je x dopustiv za problem (4.10). Iz (4.13) imamo

$$\lambda_k f_k(x) \leq \lambda_k f_k(\bar{x}).$$

S obzirom na to da je $x \neq \bar{x}$ i (4.10) ima jedinstveno rješenje $\bar{x}$, dobili smo kontradikciju.
□

Da bi rješenje problema (4.10) bilo efikasno, moramo ili riješiti p različitih problema ili dobiti jedinstveno rješenje problema (4.10) za neki $k \in \{1, \dots, p\}$. Jedinstvenost nije lako dokazati. Ukoliko je problem konveksan i ciljne funkcije su strogo konveksne, tada znamo da je rješenje jedinstveno.

Korolar 4.4.5. *Neka su $\hat{x} \in X$ i λ kao u (4.9). Ako za neki k, f_k je strogo konveksna i dopustivi skup X je konveksan te problem (4.10) ima rješenje $\bar{x}$, tada je $\bar{x} \in X_E$.*

Dokaz. Kako $\bar{x}$ rješava problem (4.10) i f_k je strogo konveksna, skup rješenja problema (4.10) je jednočlan. Zato prema Teoremu 4.4.4, $\bar{x} \in X_E$. □

Bez pretpostavke konveksnosti, rješenje problema (4.10) za bilo koji $k \in \{1, \dots, p\}$, bit će slabo efikasno. To možemo vidjeti u idućem teoremu.

Teorem 4.4.6. *Neka su $\hat{x} \in X$ i λ kao u (4.9). Neka je $\bar{x} \in X$ rješenje problema (4.10) za neki k. Tada je $\bar{x} \in X_{wE}$.*

Dokaz. Neka $\bar{x} \in X$ rješava problem (4.10) za neki $k \in \{1, \ldots, p\}$. Tada je

$$\lambda_k f_k(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(x),$$

za svaki takav x da je

$$\lambda_i f_i(x) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}) = \lambda_i f_i(\hat{x}), \ i = 1, \ldots, p, \ i \neq k. \tag{4.17}$$

Budući da je $\bar{x}$ dopustiv za (4.10) vrijedi

$$\lambda_i f_i(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}) = \lambda_i f_i(\hat{x}), \ i = 1, \ldots, p, \ i \neq k. \tag{4.18}$$

Sad pretpostavimo da $\bar{x} \in X$ nije slabo efikasno rješenje. Tada postoji $\tilde{x} \in X$ takav da je

$$f_j(\tilde{x}) < f_j(\bar{x}), \ j = 1, \ldots, p. \tag{4.19}$$

Možemo razmatrati dva slučaja.
Slučaj I : Pretpostavimo da je $\tilde{x} \in X$ dopustiv za problem (4.10). Tada imamo

$$\lambda_i f_i(\tilde{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}), \ i = 1, \ldots, p, \ i \neq k. \tag{4.20}$$

Kako je $\lambda > 0$ iz (4.19) imamo

$$\lambda_k f_k(\tilde{x}) < \lambda_k f_k(\bar{x}). \tag{4.21}$$

Sada iz (4.20) i (4.21) dobivamo kontradikciju s činjenicom da je $\bar{x} \in X$ rješenje problema (4.10).
Slučaj II : Pretpostavimo da $\tilde{x} \in X$ nije dopustiv za (4.10). Stoga, postoji neki $i \neq k$ takav da je

$$\lambda_i f_i(\tilde{x}) > \lambda_k f_k(\hat{x}) = \lambda_i f_i(\hat{x}).$$

Također, zbog (4.18) imamo

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) \geq \lambda_i f_i(\bar{x}).$$

Ova dva izraza povlače da je

$$\lambda_i f_i(\tilde{x}) > \lambda_i f_i(\bar{x}),$$

stoga za indeks i imamo

$$f_i(\tilde{x}) > f_i(\bar{x}).$$

To je kontradikcija s (4.19) za $j = i$.
Zato $\bar{x}$ mora biti slabo efikasno rješenje. □

Možemo prikazati odnos između metode ciljnih uvjeta (4.10) i metode ε-uvjeta (4.3). Radi lakšeg snalaženja, promijenimo malo odabir indeksa u definicijama.
Metoda ciljnih uvjeta:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \lambda_k f_k(x) \\ &\lambda_i f_i(x) \le \lambda_k f_k(\hat{x}),\ i = 1,\dots,p,\ i \neq k, \end{aligned} \tag{4.22}$$

pri čemu je λ kao u (4.8). Označimo sa $S^k_{\hat{x}}$ skup rješenja ovog problema.
Metoda ε-uvjeta:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} f_k(x) \\ &f_i(x) \le \varepsilon_i,\ i = 1,\dots,p,\ i \neq k, \end{aligned} \tag{4.23}$$

pri čemu je $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$. Označimo sa $S_k(\varepsilon)$ skup rješenja ovog problema.

Teorem 4.4.7. *Neka je $\hat{x} \in X$ i $k \in \{1,\dots,p\}$. Neka je $\bar{x} \in X$ i stavimo $\varepsilon := f(\hat{x})$. Tada je $S^k_{\hat{x}} = S_k(\varepsilon)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je λ definiran kao u (4.9). Dokažimo najprije da je $S_k(\varepsilon) \subseteq S^k_{\hat{x}}$. Neka je $\bar{x} \in S_k(\varepsilon)$. Tada vrijedi

$$f_k(\bar{x}) \le f_k(x), \tag{4.24}$$

za svaki $x \in X$ i kako je $\varepsilon := f(\hat{x})$ imamo da je

$$f_i(\bar{x}) \le f_i(\hat{x}),\ i = 1,\dots,p,\ i \neq k.$$

Pretpostavimo da $\bar{x} \notin S^k_{\hat{x}}$. Tada postoji $x \in X$ takav da je

$$\lambda_k f_k(x) < \lambda_k f_k(\bar{x}),$$

i

$$\lambda_i f_i(x) \le \lambda_k f_k(\hat{x}) = \lambda_i f_i(\hat{x}),\ i = 1,\dots,p,\ i \neq k.$$

Budući da je $\lambda_i > 0$ za sve $i = 1,\dots,p$,

$$f_k(x) < f_k(\bar{x}), \tag{4.25}$$

i

$$f_i(x) \le f_i(\hat{x}),\ i = 1,\dots,p,\ i \neq k.$$

Stoga je (4.25) u kontradikciji s (4.24). Zato je $\bar{x} \in S^k_{\hat{x}}$.

Dokažimo sada da je $S^k_{\hat{x}} \subseteq S_k(\varepsilon)$. Neka je $\bar{x} \in S^k_{\hat{x}}$. Po pretpostavci je za svaki $x \in X$

$$\lambda_k f_k(\bar{x}) \le \lambda_k f_k(x),$$

i

$$\lambda_i f_i(\bar{x}) \leq \lambda_k f_k(\hat{x}) = \lambda_i f_i(\hat{x}),\ i = 1, \ldots, p,\ i \neq k.$$

Kako je $\lambda > 0$ slijedi

$$f_k(\bar{x}) \leq f_k(x),$$

i

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\hat{x}),\ i = 1, \ldots, p,\ i \neq k.$$

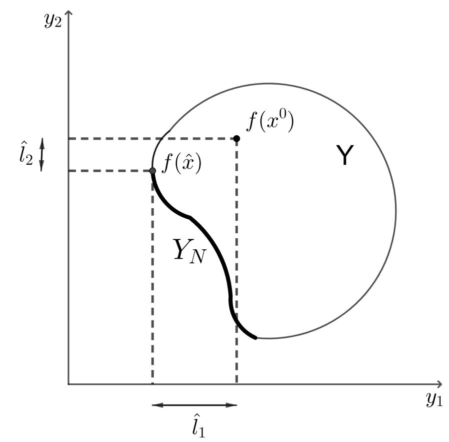
Iz toga zaključujemo da je $\bar{x} \in S_k(\varepsilon)$.
Zato je $S^k_{\hat{x}} = S_k(\varepsilon)$. □

4.5 Bensonova metoda

Izaberemo neku početnu dopustivu točku $x^0 \in X$, te ukoliko ona nije efikasna, izvedemo dominirajuće rješenje koje je efikasno. Uvedemo varijable $l_k = f_k(x^0) - f_k(x), k = 1, \ldots, p$. Želimo maksimizirati njihovu sumu. Dakle, želimo da je x što dalje od x^0.

Problem je dan s:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{k=1}^{p} l_k \\ f_k(x^0) - l_k - f_k(x) &= 0, \quad k = 1, \ldots, p \\ l &\geq 0 \\ x &\in X. \end{aligned} \tag{4.26}$$



Slika 4.2: Bensonov problem

Na Slici 4.2 vidimo motivaciju za izučavanje problema (4.26). Maksimiziranjem ukupnog odstupanja $\hat{l}_1 + \hat{l}_2$ namjera nam je pronaći točku koja dominira $f(x^0)$ i uz to je efikasna točka minimuma. $f(x^0)$ ima veće vrijednosti nego efikasna točka $f(\hat{x})$.

Najprije provjeravamo je li početna dopustiva točka x^0 efikasna.

Teorem 4.5.1. *Dopustiva točka $x^0 \in X$ je efikasna točka minimuma ako i samo ako je optimalna vrijednost problema (4.26) jednaka 0.*

Dokaz. Neka je $x^0 \in X$ efikasna točka minimuma. Tada se dopustivi skup problema (4.26) sastoji od onih (x, l) za koje je $x \in X$ i $f(x) = f(x^0)$. Stoga je $l = 0$.

Obrnuto, neka je (x, l) dopustivo rješenje problema (4.26). Zbog definicije $l_k = f_k(x^0) - f_k(x)$ i nenegativnosti ograničenja $l_k \geq 0$ za $k = 1, \ldots, p$ dobivamo da je

$$\sum_{k=1}^{p} l_k = 0 \Longleftrightarrow l_k = 0 \quad k = 1, \ldots, p$$

$$\Longleftrightarrow f_k(x^0) = f_k(x) \quad k = 1, \ldots, p.$$

Dakle, ako je optimalna vrijednost 0 i $x \in X$ takav da je $f(x) \leq f(x^0)$ mora vrijediti da je $f(x) = f(x^0)$, to jest x^0 je efikasan. □

Generalno ne možemo očekivati da će početna dopustiva točka x^0 biti efikasna. Dokazat ćemo da kad god problem (4.26) ima konačnu vrijednost optimalnog rješenja, optimalno rješenje je efikasno.

Propozicija 4.5.2. *Ako problem (4.26) ima optimalno rješenje $(\hat{x}, \hat{l})$, tada je $\hat{x} \in X_E$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\hat{x} \notin X_E$. Tada postoji neki $\bar{x} \in X$ takav da je $f_k(\bar{x}) \leq f_k(\hat{x})$ za sve $k = 1, \ldots, p$ te za barem jedan $j \in \{1, \ldots, p\}$ vrijedi $f_j(\bar{x}) < f_j(\hat{x})$. Definiramo $\bar{l} := f(x^0) - f(\bar{x})$. Tada je $(\bar{x}, \bar{l})$ dopustivo za (4.26) jer je

$$\bar{l}_k = f_k(x^0) - f_k(\bar{x}) \geq f_k(x^0) - f_k(\hat{x}) = \hat{l}_k \geq 0.$$

Budući da je $\bar{l}_j > \hat{l}_j$ slijedi da je $\sum_{k=1}^{p} \bar{l}_k > \sum_{k=1}^{p} \hat{l}_k$. Dobivamo kontradikciju jer je $(\hat{x}, \hat{l})$ optimalno rješenje problema (4.26). □

Pod pretpostavkom konveksnosti dobivamo zanimljiv rezultat u slučaju da je funkcija cilja problema (4.26) neograničena.

Teorem 4.5.3. *(Benson (1978)). Pretpostavimo da je $X \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup i da su funkcije $f_k, k = 1, \ldots, p$ konveksne. Ako problem (4.26) nema konačnu optimalnu vrijednost funkcije cilja tada je $X_{pE} = \emptyset$.*

Dokaz. Budući da je (4.26) neograničen, za svaki realni broj $M \geq 0$ možemo pronaći neki $x^M \in X$ takav da je $l = f(x^0) - f(x^M) \geq 0$ i

$$\sum_{k=1}^{p} l_k = \sum_{k=1}^{p} (f_k(x^0) - f_k(x^M)) > M. \tag{4.27}$$

Pretpostavimo da je $\hat{x}$ pravilno efikasno rješenje u smislu Geoffriona. Iz Teorema 3.2.4 slijedi da postoje težine $\lambda_k > 0$ za $k = 1, \dots, p$ takve da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema

$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x).$$

Zato je

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x) - f_k(\hat{x})) \geq 0$$

za sve $x \in X$. Specijalno vrijedi :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x^0) - f_k(\hat{x})) \geq 0. \tag{4.28}$$

Definiramo $\hat{\lambda} := \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} > 0$ i za neki proizvoljan, ali fiksan $\hat{M} \geq 0$ neka je $M := \hat{M}/\hat{\lambda}$. Sad iz (4.27) znamo da za ovaj M postoji neki $x^M \in X$ koji zadovoljava $l_k = f_k(x^0) - f_k(x^M) \geq 0$ za sve $k = 1, \dots, p$ i

$$\hat{\lambda} \sum_{k=1}^{p} (f_k(x^0) - f_k(x^M)) > \hat{\lambda} M = \hat{\lambda} \frac{\hat{M}}{\hat{\lambda}} = \hat{M}. \tag{4.29}$$

Dakle, imamo

$$\hat{M} < \sum_{k=1}^{p} \hat{\lambda} (f_k(x^0) - f_k(x^M)) \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x^0) - f_k(x^M)) \tag{4.30}$$

za sve $\hat{M} \geq 0$ zbog definicije od $\hat{\lambda}$ i zato što je $\hat{M}$ bio proizvoljno izabran. Iz tog razloga, možemo uzeti

$$\hat{M} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x^0) - f_k(\hat{x})).$$

Tako dobivamo

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x^0) - f_k(\hat{x})) < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x^0) - f_k(x^M)), \tag{4.31}$$

to jest

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x^M) < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\hat{x}) \tag{4.32}$$

što je kontradikcija s optimalnosti od $\hat{x}$ za problem težinske sume. □

4.6 Kompromisna rješenja i aproksimacija idealne točke

Najbolje moguće rješenje koje možemo dobiti u problemu višekriterijske optimizacije je upravo idealna točka, ali u praksi ona ne pripada skupu Y funkcijskih vrijednosti. U kompromisnom programiranju idealna točka služi kao referentna točka, odnosno tražimo točku skupa Y koja će biti što bliže idealnoj točki.

Uz mjeru udaljenosti, odnosno metriku

$$d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_{\geqq},$$

problem kompromisnog programiranja dan je sa

$$\min_{x \in X} d(f(x), y^I). \tag{4.33}$$

Pri tome je y^I idealna točka za koju vrijedi

$$y^I_k = \min_{x \in X} f_k(x) = \min_{y \in Y} y_k$$

za svaki $k \in \{1, \ldots, p\}$.
Mi ćemo uzeti u obzir samo metrike koje su inducirane iz normi, kao u Propoziciji 1.3.6.

Ideja problema kompromisnog programiranja (4.33) je uzeti neki $c \geq 0$ i skup $C = \{y \in \mathbb{R}^p : \|y - y^I\| \leq c\}$. Skup C sastoji se od točaka čija je udaljenost od idealne točke y^I manja ili jednaka c. Želimo naći što manju vrijednost c tako da vrijedi $C \cap Y \neq \emptyset$.

Rezultati efikasnosti problema (4.33) ovise o svojstvu metrike, odnosno norme iz koje je metrika inducirana.

Definicija 4.6.1.
- *Kažemo da je norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_{\geqq}$ monotona, ako $\|x\| \leq \|y\|$ vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}^p$ tako da je $|x_k| \leq |y_k|, k = 1, \ldots, p$ i štoviše $\|x\| < \|y\|$ ako $|x_k| < |y_k|, k = 1, \ldots, p$.*
- *Kažemo da je norma $\|\cdot\|$ strogo monotona, ako $\|x\| < \|y\|$ vrijedi kad god je $|x_k| \leq |y_k|, k = 1, \ldots, p$ i $|x_j| \neq |y_j|$ za neki j.*

Teorem 4.6.2. *Ako je $\|\cdot\|$ monotona norma i $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.33) tada je $\hat{x}$ slabo efikasno rješenje. Ako je $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje problema (4.33) tada je $\hat{x}$ efikasno rješenje.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.33) i $\hat{x} \notin X_{wE}$. Tada postoji neki $\bar{x} \in X$ takav da je $f(\bar{x}) < f(\hat{x})$. Zato vrijedi $0 \leq f_k(\bar{x}) - y_k^I < f_k(\hat{x}) - y_k^I$ za $k = 1, \ldots, p$ i

$$\|f(\bar{x}) - y^I\| < \|f(\hat{x}) - y^I\|. \tag{4.34}$$

To je kontradikcija s optimalnosti $\hat{x}$ problema (4.33).

Neka je sada $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje problema (4.33). Pretpostavimo da $\hat{x} \notin X_E$. Tada postoji neki $\bar{x} \in X$ takav da je $f(\bar{x}) \leq f(\hat{x})$ te $f(\bar{x}) \neq f(\hat{x})$. Stoga vrijedi $0 \leq f_k(\bar{x}) - y_k^I \leq f_k(\hat{x}) - y_k^I$ za $k = 1, \ldots, p$ pri čemu vrijedi barem jedna stroga nejednakost. Tada imamo

$$\|f(\bar{x}) - y^I\| \leq \|f(\hat{x}) - y^I\|. \tag{4.35}$$

Zbog optimalnosti od $\hat{x}$ mora vrijediti jednakost. Tako dobivamo kontradikciju s jedinstvenosti od $\hat{x}$. □

Teorem 4.6.3. *Ako je $\|\cdot\|$ strogo monotona norma i $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.33) tada je $\hat{x}$ efikasno rješenje.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.33) i $\hat{x} \notin X_E$. Tada postoje neki $\bar{x} \in X$ i $j \in \{1, \ldots, p\}$ takvi da je $f_k(\bar{x}) \leq f_k(\hat{x})$ za $k = 1, \ldots, p$ i $f_j(\bar{x}) < f_j(\hat{x})$. Stoga vrijedi $0 \leq f_k(\bar{x}) - y_k^I \leq f_k(\hat{x}) - y_k^I$ za sve $k = 1, \ldots, p$ i $0 \leq f_j(\bar{x}) - y_j^I < f_j(\hat{x}) - y_j^I$. Tada zbog stroge monotonosti norme imamo

$$\|f(\bar{x}) - y^I\| < \|f(\hat{x}) - y^I\|. \tag{4.36}$$

To je kontradikcija pretpostavkom da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.33). □

Važna klasa normi je klasa l_q-normi, to jest

$$\|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^{p} |y_k|^q \right)^{1/q} \tag{4.37}$$

za $1 \leq q < \infty$.

Od veće važnosti bit će nam l_1-norma sa $\|y\| = \sum_{k=1}^{p} |y_k|$ i l_∞-norma sa $\|y\| = \max_{k=1,\ldots,p} |y_k|$. Za $1 \leq q < \infty$ l_q-norma je strogo monotona, dok za $q = \infty$ je monotona. Također, za sve $1 \leq q < \infty$ i sve $y \in \mathbb{R}^p$ vrijedi $\|y\|_\infty \leq \|y\|_q$. Još jedno svojstvo l_q-normi je $\|y\|_q \to \|y\|_\infty$ kad $q \to \infty$ za bilo koji $y \in \mathbb{R}^p$. Dodatno, možemo uvesti težine u definiciji l_q norme te definirati problem težinskog kompromisnog programiranja kao:

$$\min_{x \in X} \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x) - y_k^I)^q \right)^{1/q} \tag{4.38}$$

za $q \in [1, \infty\rangle$.

Za $q = \infty$ problem glasi :

$$\min_{x \in X} \max_{k=1,\dots,p} \lambda_k (f_k(x) - y_k^I). \tag{4.39}$$

Pri tome pretpostavljamo da je vektor težina $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ nenegativan i nije jednak 0.

Za $q = 1$ problem (4.38) možemo zapisati kao :

$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x) - y_k^I) = \min_{x \in X} \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \right) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k^I.$$

Iz tog razloga vidimo da je skalarizacija težinskom sumom (3.2) specijalni slučaj problema težinskog kompromisnog programiranja (4.38).
Sada možemo dokazati neke osnovne tvrdnje analogne Teoremima 4.6.2 i 4.6.3.

Teorem 4.6.4. *Optimalno rješenje $\hat{x}$ problema (4.38) za $q < \infty$ je efikasno ako je zadovoljen jedan od idućih uvjeta.*

1. *$\hat{x}$ je jedinstveno optimalno rješenje od (4.38).*
2. *$\lambda_k > 0$ za sve $k = 1, \dots, p$.*

Dokaz. Neka je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.38), ali $\hat{x} \notin X_E$. Tada postoji neki $\bar{x} \in X$ koji dominira $\hat{x}$.

1. U ovom slučaju, $\bar{x}$ također mora biti optimalno rješenje problema (4.38). Dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje od (4.38) za $\bar{x} \neq \hat{x}$.
2. U ovom slučaju zbog $\lambda > 0$ dobivamo $0 < \lambda_k (f_k(\bar{x}) - y_k^I) \leq \lambda_k (f_k(\hat{x}) - y_k^I)$ za sve $k = 1, \dots, p$ sa strogom nejednakosti za neki $j \in \{1, \dots, p\}$. Uzimanjem potencije q i sumiranjem po svim $k = 1, \dots, p$ čuva se stroga nejednakost. Tako dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.38).

□

Sada pokažimo rezultate koje dobivamo za $q = \infty$.

Teorem 4.6.5. *Neka je $\lambda > 0$ težinski vektor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

1. *Ako je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.39) tada je $\hat{x} \in X_{wE}$.*
2. *Ako je Y_N stabilan izvana i (4.39) ima optimalno rješenje tada je barem jedno od njegovih optimalnih rješenja efikasno.*

3. *Ako je $\hat{x}$ jedinstveno optimalno rješenje problema (4.39) tada je $\hat{x} \in X_E$.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.39) i $\hat{x} \notin X_{wE}$. Tada postoji neki $\bar{x} \in X$ takav da je $f(\bar{x}) < f(\hat{x})$. Zbog toga što je vektor težina $\lambda > 0$ strogo pozitivan vrijedi

$$0 < \lambda_k(f_k(\bar{x}) - y_k^I) < \lambda_k(f_k(\hat{x}) - y_k^I)$$

za sve $k = 1, \ldots, p$. Iz toga slijedi da je i

$$\max_{k=1,\ldots,p} \lambda_k(f_k(\bar{x}) - y_k^I) < \max_{k=1,\ldots,p} \lambda_k(f_k(\hat{x}) - y_k^I).$$

To je kontradikcija.

2. Pretpostavimo da (4.39) ima optimalna rješenja, ali niti jedno od njih nije efikasno.

   Neka je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.39). Budući da je Y_N stabilan izvana mora postojati neki $x \in X_E$ takav da je $f(x) \leq f(\hat{x})$, $f(x) \neq f(\hat{x})$. Tada je $\lambda_k(f_k(x) - y_k^I) \leq \lambda_k(f_k(\hat{x}) - y_k^I)$ za $k = 1, \ldots, p$. Iz toga slijedi da je x također optimalan za (4.39).

3. Ovaj dio može biti dokazan kao i obično. Ukoliko je Y_N stabilan izvana tvrdnja slijedi direktno iz druge tvrdnje.

$\square$

Ukoliko idealnu točku y^I zamijenimo s nekom drugom referentnom točkom y^R pri čemu vrijedi $y^R \leq y^I$, svi rezultati koje smo dokazali će također vrijediti.

Definicija 4.6.6. *Točka $y^U := y^I - \varepsilon$, pri čemu $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_>$ ima male pozitivne komponente, naziva se točka utopije.*

Napomena 4.6.7. *Primjetimo da uvijek vrijedi $f_k(x) > y_k^U$ za sva dopustiva rješenja $x \in X$ i $k = 1, \ldots, p$. Ukoliko y^I zamijenimo s y^U problem (4.39) glasi*

$$\min_{x \in X} \max_{k=1,\ldots,p} \lambda_k(f_k(x) - y_k^U). \tag{4.40}$$

Teorem 4.6.8. *Dopustiva točka $\hat{x} \in X$ je slaba efikasna točka minimuma ako i samo ako postoji težinski vektor $\lambda > 0$ takav da je $\hat{x}$ optimalno rješenje problema (4.40).*

Dokaz. Dovoljnost je dokazana u Teoremu 4.6.5.
Za dokaz nužnosti, neka je $\hat{x} \in X$ slaba efikasna točka minimuma. Definiramo težine sa $\lambda_k := \dfrac{1}{f_k(\hat{x}) - y_k^U}$ za $k = 1, \ldots, p$. Ovako definirane težine su pozitivne i konačne.

Pretpostavimo da $\hat{x}$ nije optimalno rješenje za (4.40). Tada postoji dopustivo rješenje $x \in X$ takvo da je

$$\max_{k=1,\dots,p} \lambda_k(f_k(x) - y_k^U) < \max_{k=1,\dots,p} \lambda_k(f_k(\hat{x}) - y_k^U) = \max_{k=1,\dots,p} \frac{1}{f_k(\hat{x}) - y_k^U}(f_k(\hat{x}) - y_k^U) = 1.$$

Stoga je za sve $k = 1, \dots, p$

$$\lambda_k(f_k(x) - y_k^U) < 1.$$

Ako svaku nejednakost podijelimo s λ_k dobivamo $f_k(x)-y_k^U < f_k(\hat{x})-y_k^U$ za sve $k = 1, \dots, p$. Tako dobivamo da je $f(x) < f(\hat{x})$, čime dobivamo kontradikciju s $\hat{x} \in X_{wE}$. □

S ovim Teoremom 4.6.8 dobili smo potpunu karakterizaciju slabo efikasnih rješenja za općenite probleme koji možda nisu konveksni. Kao i za metodu ε-uvjeta u praksi će rezultat biti koristan samo za provjeru slabe efikasnosti.

Osim funkcija udaljenosti koje smo u ovom odjeljku spomenuli, postoje i druge realne funkcije $s : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ koje nazivamo funkcijama postignuća i mogu se koristiti za rješavanje skalarizacijskih problema višekriterijske optimizacije. Skalarizacijski problem je tada

$$\begin{aligned} \min\ & s(f(x)) \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Analogno gornjim rezultatima, svojstvo funkcija postignuća je da rješavanjem problema (4.41) dobivamo slabo efikasna rješenja.

Definicija 4.6.9. *Funkcija postignuća $s : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ je:*

- *rastuća ako za $x, y \in \mathbb{R}^p$, $x \leq y$ vrijedi $s(x) \leq s(y)$,*
- *strogo rastuća ako za $x, y \in \mathbb{R}^p$, $x < y$ vrijedi $s(x) < s(y)$,*
- *jako rastuća ako za $x, y \in \mathbb{R}^p$, $x \leq y, x \neq y$ vrijedi $s(x) < s(y)$.*

Primjer 4.6.10. *Primjer strogo rastuće funkcije postignuća je*

$$s_R(y) = \max_{k=1,\dots,p} \{\lambda_k(y_k - y_k^R)\}.$$

Primjer jako rastuće funkcije postignuća je

$$s_R(y) = \max_{k=1,\dots,p} \{\lambda_k(y_k - y_k^R)\} + \rho \sum_{k=1}^{p} \lambda_k(y_k - y_k^R).$$

Pri tome je $y^R \in \mathbb{R}^p$ referentna točka, $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ je pozitivan težinski vektor te $\rho > 0$ dovoljno mali.

4.7 Metoda udaljenosti cilja

Predstavimo još metodu koja se nadovezuje na prethodni odjeljak Kompromisna rješenja i aproksimacija idealne točke. U odnosu na prethodni odjeljak dodana su ograničenja na funkcije cilja. Sadržaj ovog odjeljka prati literaturu [3].

Fiksirajmo $\hat{x} \in X$. Neka je y^I idealna točka. Skalarni problem glasi:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \varphi(x) &:= \left(\sum_{i=1}^{p} (f_i(x) - y_i^I)^2 \right), \\ f_i(x) &\leq f_i(\hat{x}),\ i = 1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Označimo dani problem (4.42) sa $P_{\hat{x}}$, a skup svih rješenja problema (4.42) sa $S_{\hat{x}}$. Prvo možemo vidjeti poveznicu efikasnih rješenja i rješenja problema $P_{\hat{x}}$.

Teorem 4.7.1. *Neka su $\hat{x}, \bar{x} \in X$. Vrijede sljedeće tvrdnje.*

1. *Ako je $\bar{x} \in X_E$ tada je $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$.*
2. *$S_{\hat{x}} \subseteq X_E$.*
3. *Posljedično imamo $\bigcup_{\hat{x} \in X} S_{\hat{x}} = X_E$, $\forall \hat{x} \in X$.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $\bar{x} \in X_E$, ali da nije rješenje problema $P_{\bar{x}}$. Tada postoji neki $x \in X$ takav da je

$$\sum_{i=1}^{p} (f_i(x) - y_i^I)^2 < \sum_{i=1}^{p} (f_i(\bar{x}) - y_i^I)^2, \tag{4.43}$$

i

$$f_i(x) \leq f_i(\bar{x}),\ i = 1, \ldots, p. \tag{4.44}$$

Budući da je y^I idealni vektor te iz (4.44) dobivamo

$$0 \leq f_i(x) - y_i^I \leq f_i(\bar{x}) - y_i^I,\ i = 1, \ldots, p. \tag{4.45}$$

Sada iz (4.43) i (4.45) dobivamo da za barem jedan i mora vrijediti $f_i(x) - y_i^I < f_i(\bar{x}) - y_i^I$, a to povlači da postoji neki i takav da je $f_i(x) < f_i(\bar{x})$. To je kontradikcija s činjenicom da je $\bar{x} \in X_E$. Stoga je $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$.

2. Neka je $\bar{x} \in S_{\hat{x}}$. Tada vrijedi sljedeći sustav:

$$\sum_{i=1}^{p} (f_i(\bar{x}) - y_i^I)^2 \leq \sum_{i=1}^{p} (f_i(x) - y_i^I)^2,\ \forall x \in X, \tag{4.46}$$

i

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\hat{x}), \; i = 1, \dots, p. \tag{4.47}$$

Pretpostavimo da $\bar{x} \notin X_E$. Tada postoji neki $\tilde{x} \in X$ takav da je

$$f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\bar{x}), i = 1, \dots, p \tag{4.48}$$

te za barem jedan $i \in \{1, \dots, p\}$, primjerice $i = r$ vrijedi

$$f_r(\tilde{x}) < f_r(\bar{x}) \tag{4.49}$$

Sada iz (4.47), (4.48) i (4.49) dobivamo

$$f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\bar{x}) \leq f_i(\hat{x}), \; i = 1, \dots, p, \; i \neq r, \tag{4.50}$$

i

$$f_r(\tilde{x}) < f_r(\bar{x}) \leq f_r(\hat{x}). \tag{4.51}$$

Tako je $\tilde{x}$ dopustiv za problem $P_{\hat{x}}$. Budući da je y^I idealni vektor imamo da je $f_i(\tilde{x}) - y_i^I \geq 0$. Koristeći (4.48) i (4.49) dobivamo

$$\sum_{i=1}^{p} (f_i(\tilde{x}) - y_i^I)^2 < \sum_{i=1}^{p} (f_i(\bar{x}) - y_i^I)^2,$$

što je kontradikcija s (4.46) za $x = \tilde{x}$. Stoga je $\bar{x} \in X_E$.

3. Pretpostavimo da je $\bar{x} \in X_E$. Tada po (1) imamo da je $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$. Stoga je

$$\bar{x} \in \bigcup_{\hat{x} \in X} S_{\hat{x}}$$

i zato

$$X_E \subseteq \bigcup_{\hat{x} \in X} S_{\hat{x}}.$$

S druge strane, neka je $\bar{x} \in \bigcup_{\hat{x} \in X} S_{\hat{x}}$. Tada postoji neki $\hat{x} \in X$ takav da je $\bar{x} \in S_{\hat{x}}$. Iz (2) tada imamo da je $\bar{x} \in X_E$. Stoga je

$$\bigcup_{\hat{x} \in X} S_{\hat{x}} \subseteq X_E.$$

Odnosno vrijedi :

$$\bigcup_{\hat{x} \in X} S_{\hat{x}} = X_E.$$

□

Sada možemo povezati ovaj problem (4.42) s problemom metode težinske sume (3.2). Neka je problem metode težinske sume označen s P_λ, a skup svih njegovih rješenja označen sa S_λ.

Teorem 4.7.2. *Fiksirajmo $\bar{x} \in X$. Ako vrijedi jedan od uvjeta*

(i) $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$, *ili*

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}^p_\geq$ *i S_λ je jednočlan,*

tada je $S_\lambda \subseteq S_{\bar{x}}$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $\bar{x} \in S_\lambda$. Tada imamo

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(x) - f_k(\bar{x})) \geq 0, \ \forall x \in X. \tag{4.52}$$

Pretpostavimo da $\bar{x} \notin S_{\bar{x}}$. Znamo da tada postoji $\tilde{x} \in X$ takav da je

$$\sum_{k=1}^{p} (f_k(\tilde{x}) - y_k^I)^2 < \sum_{k=1}^{p} (f_k(\bar{x}) - y_k^I)^2, \tag{4.53}$$

i

$$f_k(\tilde{x}) \leq f_k(\bar{x}), \ k = 1, \ldots, p. \tag{4.54}$$

Budući da je y^I idealni vektor vrijedi $f_k(\tilde{x}) - y_k^I \geq 0$. Stoga iz (4.54) možemo pisati

$$0 \leq f_k(\tilde{x}) - y_k^I \leq f_k(\bar{x}) - y_k^I, \ k = 1, \ldots, p. \tag{4.55}$$

Iz (4.53) i (4.55), možemo zaključiti da za barem jedan $i \in \{1, \ldots, p\}$ vrijedi $f_i(\tilde{x}) - y_i^I < f_i(\bar{x}) - y_i^I$. Zato za barem jedan i imamo

$$f_i(\tilde{x}) < f_i(\bar{x}). \tag{4.56}$$

Kako je $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$, iz (4.54) i (4.56) dobivamo

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f_k(\tilde{x}) - f_k(\bar{x})) < 0,$$

a to je kontradikcija s (4.52). Dakle, $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$.

(ii) Ako je $\bar{x} \in S_\lambda$ i S_λ je jednočlan, tada je $\{\bar{x}\} = S_\lambda$. Zato imamo

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(f_k(x) - f_k(\bar{x})) > 0, \ \forall x \in X, \ x \neq \bar{x}. \tag{4.57}$$

Pretpostavimo da $\bar{x} \notin S_{\bar{x}}$. Kao u (i) dobivamo (4.54) i (4.56). Zbog toga što je $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ i zbog (4.54), (4.56) imamo

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(f_k(\tilde{x}) - f_k(\bar{x})) \leq 0,$$

što je kontradikcija s (4.57). Stoga je $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$.

□

Pogledajmo još poveznicu problema (4.42) i problema metode ε-uvjeta (4.3). U (4.23) sa $S_k(\varepsilon)$ označili smo skup rješenja problema metode ε-uvjeta.

Teorem 4.7.3. *Fiksirajmo $\bar{x} \in X$ i $\varepsilon := f(\bar{x})$. Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) Ako je $\bar{x} \in S_k(\varepsilon)$ za sve $k \in \{1, \ldots, p\}$, tada je $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$.

(ii) Ako postoji neki $\hat{x} \in X$ takav da je $\bar{x} \in S_{\hat{x}}$, tada je $\bar{x} \in S_k(\varepsilon)$ za sve $k \in \{1, \ldots, p\}$.

Dokaz.

1. Koristeći Teorem 4.1.3 slijedi da je $\bar{x}$ efikasno rješenje. Sada prema Teoremu 4.7.1 (1) imamo da je $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$.

2. Prema Teoremu 4.7.1 (2) vrijedi da je svako rješenje problema $P_{\hat{x}}$ efikasno. Sad korištenjem Teorema 4.1.3 znamo da svako efikasno rješenje riješava problem metode ε-uvjeta (4.23) za sve $k \in \{1, \ldots, p\}$. Stoga je $\bar{x} \in S_k(\varepsilon)$ za sve $k \in \{1, \ldots, p\}$.

□

Bibliografija

[1] Matthias Ehrgott, *Multicriteria optimization*, Springer Science & Business Media, 2005.

[2] Ilja Gogić, Pavle Pandžić i Josip Tambača, *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/Diferencijalni_racun.pdf`, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2021., posjećena u lipnju 2023.

[3] Mohammed Mustafa Rizvi, *New Optimality Conditions for Nonlinear Multiobjective Optimization Problems and New Scalarization Technqiues for Constructing Pathological Pareto Fronts*, Disertacija, University of South Australia, 2013.

[4] R. Tyrrell Rockafellar i Roger J B Wets, *Variational analysis*, Springer Science & Business Media, 2009.

[5] Wikipedia, *Relative interior*, 2023, `https://en.wikipedia.org/wiki/Relative_interior`, posjećena u lipnju 2023.

Sažetak

U ovom diplomskom radu predstavljene su najznačajnije metode skalarizacije koje su primijenjene na probleme višekriterijske optimizacije.

Definiramo što su to efikasne i nedominirane točke te navodimo ekvivalentne definicije efikasnosti koje se često koriste, ovisno kako se uklapaju u određeni kontekst. Zatim definiramo granice na nedominirani skup. To su idealne i nadir točke koje se koriste kao referentne točke u kompromisnom programiranju. Nedominirane točke definirane su pomoću standardnog uređaja na $\mathbb{R}^p$ prostoru. Efikasne točke ne dopuštaju poboljšanje jedne funkcije cilja, a da se pri tome ne pogorša vrijednost barem jedne od preostalih funkcija cilja. Omjer kompromisa između kriterija može biti mjeren računanjem povećanja u jednoj komponenti po jedinici smanjenja u drugoj komponenti. Ovi omjeri kompromisa mogu biti neograničeni. Pravilne efikasne točke su efikasne točke koje imaju ograničen omjer kompromisa.

Metoda težinske sume je vrlo poznata i široko primijenjena metoda za rješavanje problema višekriterijske optimizacije. U obzir uzimamo samo nenegativne ili strogo pozitivne težine. Ovisno o težinama, rješenja će biti slabo efikasna ili efikasna. Prikazali smo i odnos između pravilnih nedominiranih točaka i optimalnih točaka skalarizacije težinskom sumom s pozitivnim težinama. Točke se poklapaju za konveksne skupove. Za nekonveksne probleme metoda težinske sume nije primijenjiva.

Obradili smo i neke druge metode skalarizacije koje možemo koristiti i u nekonveksnom slučaju. Predstavljene su metoda ε-uvjeta, hibridna metoda, metoda elastičnog ograničenja, metoda ciljnih uvjeta, Bensonova metoda, kompromisna rješenja i metoda udaljenosti cilja.

Summary

This thesis presents the most significant scalarization methods applied to multicriteria optimization problems.

We define what are efficient solutions and nondominated points and mention equivalent definitions of efficiency that are often used, depending on how they fit into a certain context. Then we define limits on the nondominated set. These are ideal and nadir points that are used as reference points in compromise programming. The nondominated points are defined by the componentwise order on the $\mathbb{R}^p$ space. Efficient solutions do not allow the improvement of one objective function without worsening the value of at least one of the remaining objective functions. The trade-off ratio between the criteria can be measured by calculating the increase in one component per unit decrease in the other component. These trade-off ratios can be unlimited. Proper efficient solutions are efficient solutions that have a limited trade-off ratio.

The Weighted Sum Method is a well-known and widely applied method for solving multicriteria optimization problems. We only consider non-negative or strictly positive weights. Depending on the weights, the solutions will be weakly efficient or efficient. We also presented the relationship between regular nondominated points and optimal points of weighted sum scalarization with positive weights. Points coincide for convex sets. For nonconvex problems, the Weighted Sum Method is not applicable.

We mentioned some other scalarization methods that we can use in the nonconvex case as well. There are presented The ε-Constraint Method, The Hybrid Method, The Elastic Constraint Method, The Objective-Constraint Method, Benson's Method, Compromise Solutions and The Distance-Objective Method.

Životopis

Rođena sam 13. veljače 1997. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu skolu Dr. Ivan Merz. Nakon završene osnovne škole, upisala sam i završila VII. opću gimnaziju. Nakon srednje škole, 2015. godine upisala sam studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Završetkom Preddiplomskog sveučilišnog studija Matematike upisala sam Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.