

Tetivni četverokuti: nepoznato o poznatom

Muhar, Damjan

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:141639>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-31**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Damjan Muhar

**TETIVNI ČETVEROKUTI: NEPOZNATO
O POZNATOM**

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marija Galić

Zagreb, studeni 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	1
1 Tetivni četverokut	2
1.1 Pojam tetivnog četverokuta	2
1.2 Osnovne karakterizacije tetivnog četverokuta	3
2 Manje poznate karakterizacije tetivnog četverokuta	7
2.1 Odnosi kutova	7
2.2 Karakteristične točke	9
2.3 Ostale karakterizacije	13
3 Ptolemejev teorem	20
3.1 Povijesni kutak i iskaz teorema	20
3.2 Dokazi	20
4 Površina tetivnog četverokuta	25
4.1 Brahmaguptina formula	25
5 Specijalni slučajevi tetivnog četverokuta	29
5.1 Harmonijski četverokut	29
5.2 Bicentrični četverokut	35
5.3 Tetivni ortoid	37
5.4 Newtonov četverokut	38
6 Tetivni četverokuti u nastavi matematike	40
6.1 Motivacijska aktivnost	40
6.2 Aktivnosti otkrivanja tetivnih četverokuta i njihovih svojstava	41
Bibliografija	48

Uvod

Tetivni četverokut je četverokut kojem se može opisati kružnica, odnosno četverokut kojem su stranice tetive neke kružnice. Općepoznata karakterizacija tetivnog četverokuta je: „Četverokut je tetivan ako i samo ako su njegovi nasuprotni unutarnji kutovi suplementarni.” Međutim, tetivni četverokuti imaju brojne druge karakterizacije koje ćemo navesti i dokazati u ovome radu. Primjerice, vanjski kut konveksnog četverokuta jednake je veličine kao nasuprotni unutarnji kut četverokuta ako i samo ako je četverokut tetivan.

Klaudije Ptolemej, antički matematičar, geograf i astronom, dokazao je lemu koja nam je danas poznata kao Ptolemejev teorem: „Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina njegovih nasuprotnih stranica. S druge strane, indijski matematičar koji je djelovao u 7. stoljeću, Brahmagupta, otkrio je Brahmaguptinu formulu za računanje površine tetivnog četverokuta.

U prvom poglavlju ovoga rada navodimo definiciju tetivnog četverokuta te njegove osnovne karakterizacije s pripadajućim dokazima. U drugom poglavlju analiziramo neke manje poznate karakterizacije i svojstva ove klase četverokuta. Zatim, u trećem i četvrtom poglavlju, navodimo i dokazujemo već spomenuti Ptolemejev teorem i Brahmaguptinu formulu.

Tetivni četverokuti, osim što im se može opisati kružnica, mogu imati i još neka dodatna svojstva. U petom poglavlju analiziramo specijalne slučajeve tetivnih četverokuta: harmonijske i bicentrične četverokute, tetivne ortoide te Newtonove četverokute.

U posljednjem poglavlju navedeni su primjeri istraživačkih aktivnosti kojima učenici otkrivaju tetivne četverokute i njihova svojstva. Učenici se s tetivnim četverokutima susreću već u osnovnoj školi kada otkrivaju da se kvadratu i pravokutniku može opisati kružnica, no sam pojam tetivnog četverokuta otkrivaju tek tijekom srednjoškolskog obrazovanja.

Cilj ovog rada je približavanje većeg broja manje poznatih karakterizacija tetivnih četverokuta čitatelju te poticanje čitatelja na promišljanje o ostalim svojstvima ove klase četverokuta.

Poglavlje 1

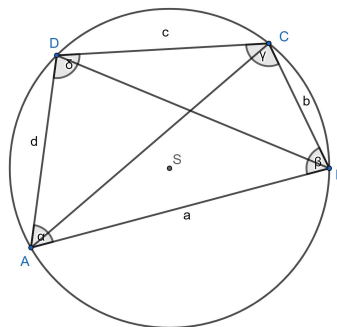
Tetivni četverokut

Ovo poglavlje započinjemo navođenjem definicije tetivnog četverokuta. Zatim slijede osnovne karakterizacije tetivnih četverokuta i njihovi dokazi.

1.1 Pojam tetivnog četverokuta

Definicija 1.1.1. *Tetivni četverokut je četverokut kojem se može opisati kružnica.*

Vrhovi tetivnog četverokuta pripadaju kružnici te su stoga stranice četverokuta tetive kružnice. Iz te činjenice proizlazi naziv ove klase četverokuta. Ovdje uvodimo oznake (kao na Slici 1.1) koje ćemo koristiti u ostatku rada. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut te neka su njegove stranice duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ i $d = |DA|$. Dužine \overline{AC} i \overline{BD} dijagonale su promatranog tetivnog četverokuta, a njihove duljine označavat ćemo s $e = |AC|$ i $f = |BD|$. Unutarnje kutove tetivnog četverokuta označavat ćemo s $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ i $\angle CDA = \delta$.



Slika 1.1: Tetivni četverokut $ABCD$

1.2 Osnovne karakterizacije tetivnog četverokuta

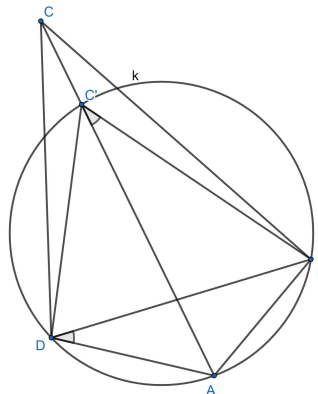
U nastavku ovog rada pozivat ćemo se na dvije propozicije iz Euklidovih Elemenata III. Propozicija 20. govori nam da je veličina središnjeg kuta nad nekim lukom kružnice jednaka dvostrukoj veličini obodnog kuta nad tim lukom. Druga propozicija koja nam je potrebna je Propozicija 21. koja tvrdi da su svi obodni kutovi nad istim lukom kružnice jednakih veličina. Sada navodimo općepoznate karakterizacije tetivnih četverokuta. Neke od njih koristit ćemo u dokazima u sljedećim poglavljima. Dokazi sljedećih dvaju teorema preuzeti su iz [16].

Teorem 1.2.1. *Kut između stranice i dijagonale konveksnog četverokuta jednak je kutu između nasuprotne stranice i druge dijagonale ako i samo ako je četverokut tetivan.*

Dokaz. Prvo dokazujemo: Kut između stranice i dijagonale konveksnog četverokuta jednak je kutu između nasuprotne stranice i druge dijagonale \Rightarrow četverokut je tetivan.

Neka je $\angle BDA = \angle BCA$. Trebamo dokazati da je četverokut $ABCD$ tetivan. Pretpostavimo suprotno, tj. da $ABCD$ nije tetivan. Svakom trokutu možemo opisati kružnicu (po teoremu o sjecištu simetrala stranica trokuta). Ako trokutu $\triangle ABD$ opišemo kružnicu k , onda točka C ne pripada toj kružnici (jer smo pretpostavili da $ABCD$ nije tetivan četverokut). Točka C je tada ili izvan ili unutar te kružnice.

Pretpostavimo da je točka C izvan kružnice k (kao na Slici 1.2). Neka je točka C' sjecište dužine \overline{AC} i kružnice k . Tada je četverokut $ABC'D$ tetivan. Budući da su kutovi $\angle BDA$ i $\angle BC'A$ obodni kutovi nad istim lukom kružnice, slijedi da su njihove veličine jednake, tj. vrijedi $\angle BDA = \angle BC'A$. Međutim, na početku dokaza smo pretpostavili da je $\angle BDA = \angle BCA$. Sada zaključujemo da vrijedi $\angle BC'A = \angle BCA$.



Slika 1.2: Slučaj kada je točka C izvan kružnice k

Kut $\angle BC'A$ vanjski je kut trokuta $\triangle BCC'$. Stoga njegova veličina odgovara zbroju veličina dvaju odgovarajućih unutarnjih kutova tog trokuta:

$$\angle BC'A = \angle BCC' + \angle C'BC,$$

odnosno

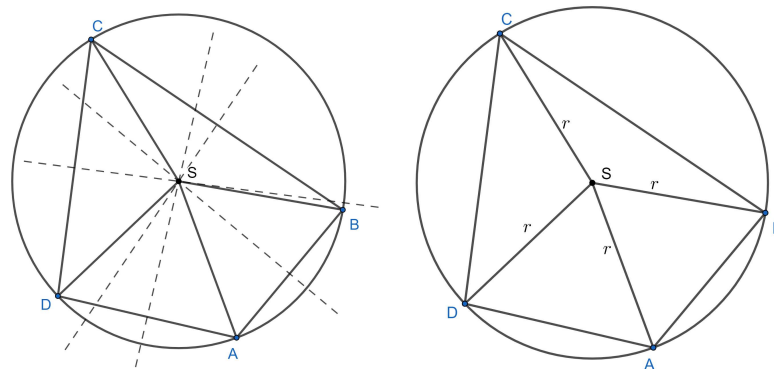
$$\angle BC'A = \angle BCA + \angle C'BC.$$

Iz $\angle BC'A = \angle BCA$ slijedi da je $\angle C'BC = 0^\circ$, odnosno da točka C pripada pravcu BC' . Točka C pripada pravcu AC' što znači da je ona presjek pravaca BC' i AC' , tj. da se točke C i C' podudaraju. To je u kontradikciji s pretpostavkom da je točka C izvan kružnice k . Zaključujemo da je četverokut $ABCD$ tetivan. Slučaj u kojem je točka C unutar kružnice k dokazuje se analogno.

Preostaje dokazati: Četverokut je tetivan \Rightarrow kut između stranice i dijagonale konveksnog četverokuta jednak je kutu između nasuprotne stranice i druge dijagonale. Ova implikacija slijedi direktno iz Propozicije 21. iz Euklidovih Elementa III. \square

Teorem 1.2.2. *Simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki ako i samo je četverokut tetivan.*

Dokaz. Simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki $\Rightarrow ABCD$ je tetivan. Neka je S točka u kojoj se sijeku sve četiri simetrale stranica četverokuta (kao na Slici 1.3).



Slika 1.3: Simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki ako i samo je četverokut tetivan

Budući da se ta točka nalazi na simetrali dužine \overline{AB} , slijedi da je ona jednako udaljena od njenih krajeva, tj. $|SA| = |SB|$. Međutim, točka S nalazi se i na simetrali dužina \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} . Stoga vrijedi: $|SB| = |SC|$, $|SC| = |SD|$, $|SA| = |SD|$. Zaključujemo da je $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$, odnosno da su točke A , B , C i D jednako udaljene od točke

S . Drugim riječima, te točke pripadaju kružnici sa središtem S i radijusom $r = |SA|$. Zaključujemo da je četverokut $ABCD$ tetivan.

Preostaje dokazati: Četverokut $ABCD$ je tetivan \Rightarrow simetrale njegovih stranica sijeku se u jednoj točki.

Neka je S središte kružnice kojoj pripadaju vrhovi četverokuta $ABCD$. Budući da točke A, B, C i D pripadaju kružnici, vrijedi: $|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = r$, gdje je r radijus kružnice. Iz jednakosti $|SA| = |SB|$ slijedi da se S nalazi na simetrali stranice \overline{AB} . Analogno zaključujemo da točka S pripada i simetralama preostalih stranica četverokuta $ABCD$, odnosno simetrale stranica sijeku se u jednoj točki i to je upravo točka S . \square

Sljedeća karakterizacija najučestalija je u literaturi te je dio određenih obrazovnih programa srednjih škola.

Teorem 1.2.3 (Teorem o tetivnom četverokutu). *Ako je četverokut tetivan, onda zbroj veličina dvaju nasuprotnih kutova tog četverokuta iznosi 180° .*

Dokaz. Neka je k kružnica i $ABCD$ (tetivan) četverokut kojem vrhovi pripadaju toj kružnici. Promotrimo trokut $\triangle ABC$. Zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta je 180° pa slijedi:

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ. \quad (1.1)$$

Kutovi $\angle CAB$ i $\angle CDB$ jednakih su veličina jer su to obodni kutovi nad istim lukom kružnice k . Analogno, veličine kutova $\angle BCA$ i $\angle BDA$ su također jednake. Sada slijedi

$$\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = \angle CAB + \angle BCA.$$

Dodavanjem veličine kuta $\angle ABC$ na obje strane jednakosti dobivamo:

$$\angle CDA + \angle ABC = \angle CAB + \angle BCA + \angle ABC.$$

Sada iz (1.1) slijedi da je $\angle CDA + \angle ABC = 180^\circ$. Analogno se pokaže da je i zbroj veličina kutova $\angle DAB$ i $\angle BCD$ jednak 180° . \square

Vrijedi i obrat ovog teorema.

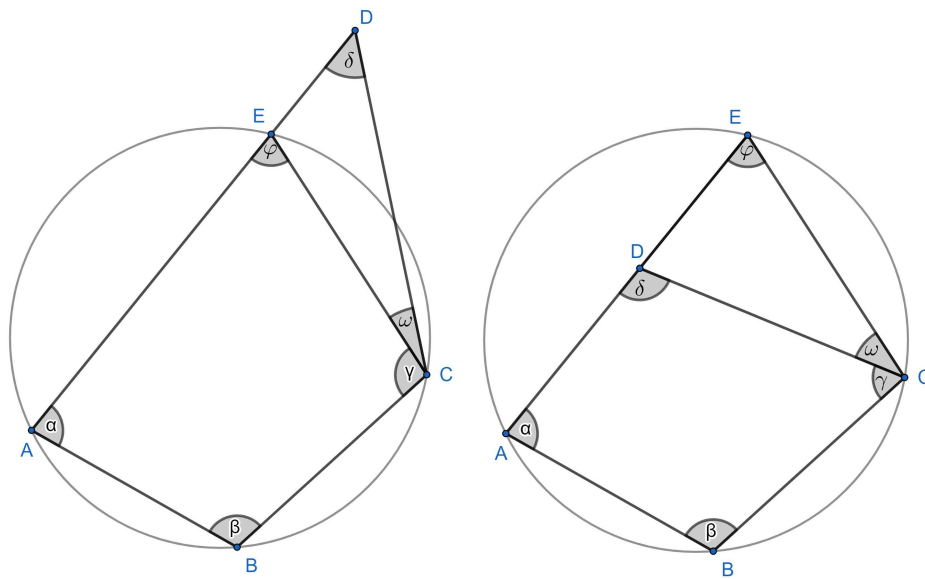
Teorem 1.2.4 (Obrat teorema o tetivnom četverokutu). *Ako su nasuprotni kutovi četverokuta suplementarni, onda je taj četverokut tetivan.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ četverokut uz oznake kao na Slici 1.4. Zadano je $\alpha + \gamma = 180^\circ$ i $\beta + \delta = 180^\circ$. Neka je k kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$. Trebamo dokazati da je $ABCD$ tetivan četverokut, tj. da točka D također pripada kružnici k . Točka E sjecište je kružnice k i pravca AD . Želimo pokazati da se točke D i E podudaraju.

Pretpostavimo suprotno, tj. da se točke D i E ne podudaraju (tada $ABCD$ nije tetivan četverokut). Tada postoji trokut $\triangle CDE$. Razlikujemo dva slučaja ovisno o tome je li točka D unutar ili izvan kružnice k .

1° Točka D nalazi se izvan kružnice k .

Četverokut $ABCE$ je tetivan pa vrijedi $\beta + \varphi = 180^\circ$. S druge strane, zadano je da vrijedi $\beta + \delta = 180^\circ$. Iz toga slijedi da je $\varphi = \delta$. Kut φ vanjski je kut trokuta $\triangle CDE$ pa vrijedi $\varphi = \delta + \omega$. Budući da su veličine kutova φ i δ jednake, zaključujemo da je $\omega = 0^\circ$, odnosno da se točke D i E podudaraju. Došli smo do kontradikcije s početnom pretpostavkom da se točke D i E ne podudaraju. Stoga je četverokut $ABCD$ tetivan.



Slika 1.4: Prikaz oba slučaja u kojima točka D ne pripada kružnici k

2° Točka D nalazi se unutar kružnice k .

Analogno kao u prvom slučaju, budući da je $ABCE$ tetivan, zaključujemo da vrijedi $\varphi = \delta$. Kut δ vanjski je kut trokuta $\triangle CED$ pa vrijedi $\delta = \varphi + \omega$. Veličine kutova φ i δ su jednake pa slijedi da je $\omega = 0^\circ$, odnosno da se točke D i E podudaraju. Dakle, kao i u prvom slučaju, došli smo do kontradikcije s pretpostavkom da $ABCD$ nije tetivan četverokut.

□

Poglavlje 2

Manje poznate karakterizacije tetivnog četverokuta

U ovom poglavlju navodimo karakterizacije tetivnih četverokuta koje nisu uobičajene u literaturi.

2.1 Odnosi kutova

Dokaze teorema koje ćemo navesti u ovom potpoglavlju čitatelj može detaljnije pogledati u [16].

Teorem 2.1.1. *Vanjski kut konveksnog četverokuta jednake je veličine kao nasuprotni unutarnji kut četverokuta ako i samo ako je četverokut tetivan.*

Dokaz. Neka je φ vanjski kut pri vrhu A , a α odgovarajući unutarnji kut četverokuta $ABCD$. Tada vrijedi: $\alpha + \varphi = 180^\circ$. Po Teoremu 1.2.3 vrijedi $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Dokaz provodimo navođenjem niza ekvivalencija:

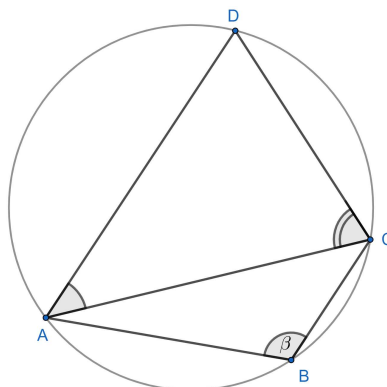
$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= 180^\circ, \\ \Leftrightarrow \alpha + \gamma &= \alpha + \varphi, \\ \Leftrightarrow \gamma &= \varphi.\end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.2. *Neka je $ABCD$ konveksan četverokut. Vrijedi: $\angle DAC + \angle ACD = \beta$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ konveksan tetivan četverokut. Nizom ekvivalencija dokazujemo traženu tvrdnju:

$$\begin{aligned}
 ABCD \text{ je tetivan četverokut} &\Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ, \\
 &\Leftrightarrow (\angle CAB + \angle DAC) + (\angle ACD + \angle BCA) = 180^\circ, \\
 &\Leftrightarrow \angle DAC + \angle ACD = 180^\circ - (\angle CAB + \angle BCA).
 \end{aligned}$$



Slika 2.1: $\angle CAD + \angle DCA = \beta$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan

Budući da je zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta jednak 180° , dobivamo

$$\angle DAC + \angle ACD = 180^\circ - (\angle CAB + \angle BCA) \Leftrightarrow \angle CAD + \angle DCA = \beta. \quad (2.1)$$

□

Teorem 2.1.3. *Neka je $ABCD$ konveksan četverokut. Vrijedi: $\alpha - \beta = \angle CAB - \angle ABD$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.*

Dokaz. Mjera kuta α jednaka je zbroju mjera kutova $\angle CAB$ i $\angle DAC$, a mjera kuta β jednaka je zbroju mjera kutova $\angle ABD$ i $\angle DBC$. Iz toga slijedi:

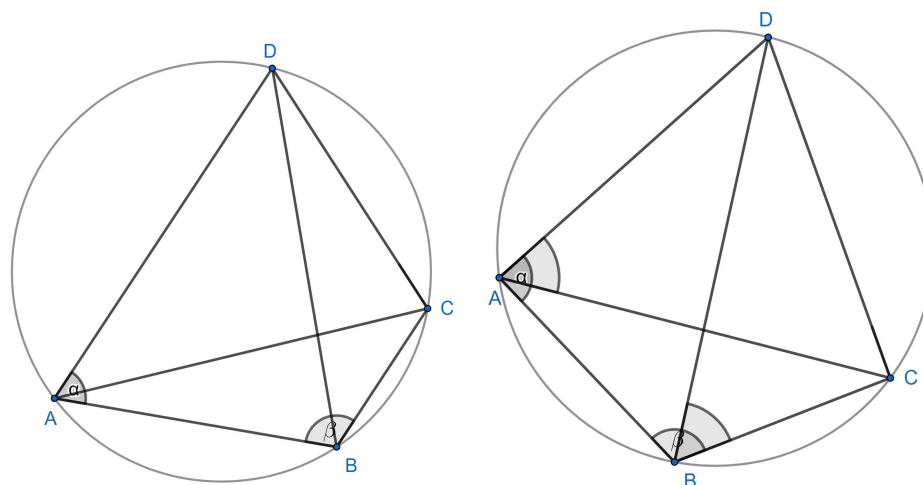
$$\angle DAC = \alpha - \angle CAB, \quad (2.2)$$

$$\angle DBC = \beta - \angle ABD. \quad (2.3)$$

Primjenom Teorema 1.2.1 dobivamo da je četverokut $ABCD$ tetivan ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{aligned}
 \angle DAC &= \angle DBC, \\
 \Leftrightarrow \alpha - \angle CAB &= \beta - \angle ABD, \\
 \Leftrightarrow \alpha - \beta &= \angle CAB - \angle ABD.
 \end{aligned}$$

□



Slika 2.2: $\alpha - \beta = \angle BAC - \angle ABD$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan

2.2 Karakteristične točke

U ovom potpoglavlju, uz karakterizacije tetivnog četverokuta, navodimo i neke definicije te teoreme vezane uz proizvoljan četverokut koji su potrebni za razumijevanje određenih teorema u nastavku rada.

Definicija 2.2.1. *Težišnica četverokuta je spojnica jednog vrha četverokuta s težištem trokuta kojem su vrhovi preostala tri vrha četverokuta.*

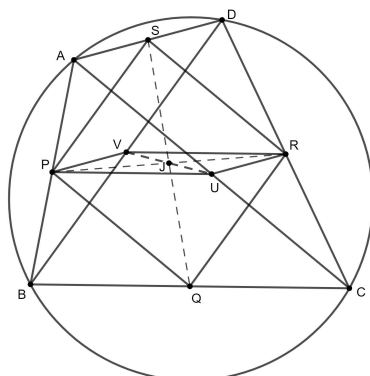
Teorem 2.2.2. *Težišnice četverokuta sijeku se u jednoj točki J koju nazivamo geometrijsko težište četverokuta. Ono dijeli svaku težišnicu četverokuta u omjeru $3 : 1$, mjereći od vrha.*

Dokaz ovog teorema čitatelj može pronaći u [11], a dokaze teorema koje ćemo navesti u nastavku ovog potpoglavlja u [1].

Teorem 2.2.3. *Dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih stranica četverokuta i dužina koja spaja polovišta dijagonala sijeku se u jednoj točki koja ih raspolavlja.*

Dokaz. Neka su točke P , Q , R i S redom polovišta stranica \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} . Neka je točka J sjecište pravaca \overline{PR} i \overline{QS} . Dužina \overline{PS} srednjica je trokuta $\triangle ABD$ pa vrijedi: $PS \parallel BD$, $|PS| = \frac{1}{2}|BD|$. Slično, dužina \overline{QR} srednjica je trokuta $\triangle BCD$ pa vrijedi: $QR \parallel BD$, $|QR| = \frac{1}{2}|BD|$. Zaključujemo da je $PQRS$ paralelogram. Stoga su dužine \overline{PR} i \overline{QS} dijagonale paralelograma.

Označimo s U i V redom polovišta dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} danog četverokuta. Tada je dužina \overline{PV} srednjica trokuta $\triangle ABD$ pa vrijedi: $PV \parallel AD$, $|PV| = \frac{1}{2}|AD|$. Slično, dužina



Slika 2.3: Točka J raspolavlja dužine \overline{PR} i \overline{UV}

\overline{RU} srednjica je trokuta $\triangle ACD$ pa vrijedi: $RU \parallel AD$, $|RU| = \frac{1}{2}|AD|$. Zaključujemo da je četverokut $PURV$ paralelogram. Budući da se dijagonale paralelograma međusobno raspolavljaju, slijedi da se dužine \overline{PR} i \overline{UV} sijeku u točki J koja ih raspolavlja.

□

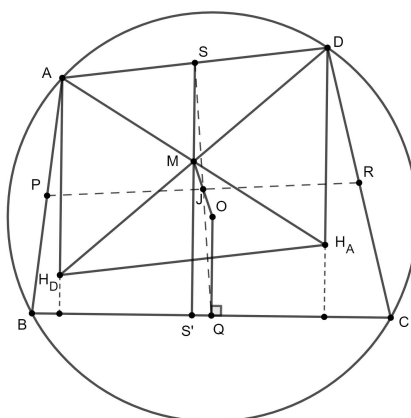
Napomena. Može se pokazati da je točka u kojoj se dužine navedene u prethodnom teoremu sijeku upravo težište danog četverokuta.

Definicija 2.2.4. *Neka je $ABCD$ tetivni četverokut te neka su točke P , Q , R i S redom polovišta stranica \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} . Nožišta okomica iz točaka P , Q , R i S na nasuprotnu stranicu četverokuta označimo s P' , Q' , R' i S' . Dužine $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$ i $\overline{SS'}$ nazivamo maltitudama četverokuta $ABCD$.*

Teorem 2.2.5. *Okomice iz polovišta stranica tetivnog četverokuta na nasuprotne stranice četverokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je O središte kružnice opisane tetivnom četverokutu $ABCD$, a J njegovo težište. Polovišta stranica \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} označimo redom s P , Q , R i S kao na Slici 2.4. Nožište okomice iz točke S na stranicu \overline{BC} označeno je sa S' , a Q je nožište visine iz točke O na navedenu stranicu. Pravci SS' i OJ sijeku se u točki M . Dužine $\overline{SS'}$ i \overline{OQ} su paralelne, a točka J raspolavlja dužinu \overline{QS} (slijedi iz Teorema 2.2.3). Tada točka J raspolavlja i dužinu \overline{OM} . Dakle, SS' prolazi točkom M koja je centralnosimetrična točki O s obzirom na točku J , odnosno prolazi točkom koja ne ovisi o izboru okomice kojom započinjemo. Stoga će i ostale okomice iz polovišta stranica tetivnog četverokuta na nasuprotnu stranicu (maltitude četverokuta $ABCD$ prolaziti točkom M , tj. sjeći će se u toj točki.

□



Slika 2.4: Točka M sjecište je maltituda četverokuta

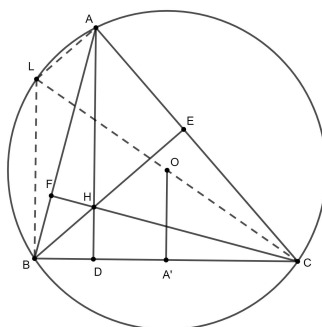
Definicija 2.2.6. *Točku u kojoj se sijeku maltitude tetivnog četverokuta nazivamo anticentrom četverokuta.*

Napomena. Primijetimo da smo u dokazu prethodnog teorema pokazali da je anticentar tetivnog četverokuta točka centralnosimetrična središtu opisane kružnice s obzirom na težište danog četverokuta.

Sada ćemo iskazati i dokazati pomoćni teorem koji će nam koristiti u dokazivanju još jedne zanimljivosti vezane uz tetivne četverokute.

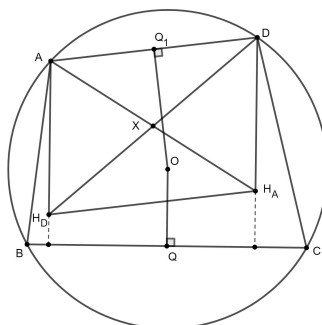
Teorem 2.2.7. *Udaljenost stranice trokuta od središta njemu opisane kružnice jednaka je polovini udaljenosti nasuprotnog vrha i ortocentra trokuta.*

Dokaz. U ovom dokazu koristit ćemo oznake kao na Slici 2.5. Neka je A' nožište okomice iz središta opisane kružnice (točke O) na stranicu \overline{BC} . Točka L dijametralno je suprotna točki C s obzirom na kružnicu opisanu trokutu. Po Talesovom poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice slijedi da je trokut $\triangle BCL$ pravokutan. Dužina OA' spaja polovišta dviju stranica pravokutnog trokuta $\triangle BCL$, odnosno, OA' srednjica je trokuta $\triangle BCL$ pa vrijedi $|OA'| = \frac{1}{2}|BL|$. Budući da je trokut $\triangle BCL$ pravokutan s pravim kutom u vrhu B i da je \overline{AD} visina trokuta $\triangle ABC$ iz vrha A , slijedi da su dužine \overline{BL} i \overline{AH} okomite na dužinu \overline{BC} , tj. međusobno su paralelne. S druge strane, dužine \overline{BH} i \overline{AL} okomite su na \overline{AC} jer \overline{BH} pripada visini trokuta $\triangle ABC$ iz vrha B , a trokut $\triangle CAL$ je (po Talesovom poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice) pravi s pravim kutom pri vrhu A . Zaključujemo, četverokut $ALBH$ ima dva para paralelnih stranica pa je to paralelogram. Stoga vrijedi $|BL| = |AH|$. Tada je $|OA'| = \frac{1}{2}|BL| = \frac{1}{2}|AH|$ što smo i htjeli dokazati. \square



Slika 2.5: Usporedba udaljenosti stranice trokuta od središta kružnice te udaljenosti nasuprotnog vrha i ortocentra trokuta

Teorem 2.2.8. Dužine koje spajaju vrhove tetivnog četverokuta s ortocentrom trokuta čiji su vrhovi preostala tri vrha četverokuta međusobno se raspolavljaju.



Slika 2.6: Dužine se sijeku u točki X

Dokaz. Koristit ćemo oznake kao na Slici 2.6. Neka su H_D i H_A redom ortocentri trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$, a točke Q i Q_1 nožišta okomica iz O (središta četverokuta opisane kružnice) na \overline{BC} i \overline{AD} . Primjenom Teorema 2.2.7 slijedi:

$$|AH_D| = 2|OQ| = |DH_A|.$$

Dužine $\overline{AH_D}$ i $\overline{DH_A}$ okomite su na \overline{BC} te su stoga međusobno paralelne. Zaključujemo da je AH_DH_A paralelogram pa se njegove dijagonale $\overline{AH_A}$ i $\overline{DH_D}$ međusobno raspolavljaju. Ponovimo analogan postupak: Neka su H_B i H_C ortocentri trokuta $\triangle ACD$ i $\triangle ABD$.

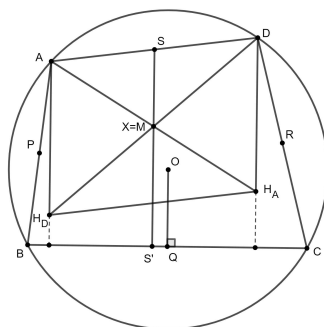
Primjenom Teorema 2.2.7 slijedi:

$$|BH_C| = 2|OQ_1| = |CH_B|.$$

Budući da je $H_C B C H_B$ paralelogram, njegove dijagonale $\overline{CH_C}$ i $\overline{BH_B}$ se raspolavljaju. Analogno možemo pokazati da se i dužine $\overline{DH_D}$ i $\overline{BH_B}$ raspolavljaju iz čega slijedi tražena tvrdnja. \square

Propozicija 2.2.9. *Točka X u kojoj se sijeku dužine koje spajaju vrh tetivnog četverokuta s ortocentrom trokuta čiji su vrhovi preostala tri vrha četverokuta podudara se s anticentrom M zadanog četverokuta.*

Dokaz. Po Teoremu 2.2.8 slijedi da se dužine koje spajaju vrh tetivnog četverokuta s ortocentrom trokuta čiji su vrhovi preostala tri vrha četverokuta sijeku u jednoj točki koja ih raspolavlja. Trebamo pokazati da se točka X podudara s anticentrom M zadanog četverokuta.



Slika 2.7: Točke X i M se podudaraju

Neka su točke S, P, Q i R redom polovišta stranica $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{BC}$ i \overline{CD} . Promatramo trokut $\triangle DAH_D$ na Slici 2.7. Dužina \overline{SX} paralelna je s dužinom $\overline{AH_D}$ pa je stoga okomita na \overline{BC} . Dakle, \overline{SX} prolazi anticentrom M . Analogno se pokaže da i dužine $\overline{PX}, \overline{QX}$ i \overline{RX} prolaze točkom M iz čega slijedi tražena tvrdnja. \square

2.3 Ostale karakterizacije

Dokazi prvog i posljednjeg teorema u ovom potpoglavlju preuzeti su iz [16], a dokazi preostalih teorema iz [17].

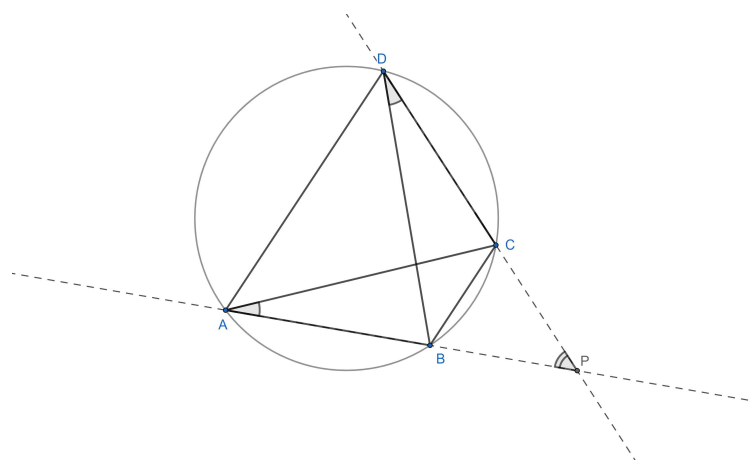
Teorem 2.3.1. *Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da stranice \overline{AB} i \overline{DC} nisu paralelne te neka je točka P sjecište pravaca AB i DC . Vrijedi: $|AP| \cdot |PB| = |DP| \cdot |PC|$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.*

Dokaz. Dokažimo prvo smjer: Četverokut $ABCD$ je tetivan $\Rightarrow |AP| \cdot |PB| = |DP| \cdot |PC|$.
 Budući da je $ABCD$ tetivan, kutovi $\angle CAB$ i $\angle CDB$ su jednakih mjera jer su to obodni kutovi nad istim kružnim lukom. Trokuti $\triangle CAP$ i $\triangle BDP$ imaju zajednički kut $\angle BPC$, a zaključili smo da vrijedi $\angle CAB = \angle CDB$, iz čega, po *KK* poučku o sličnosti trokuta, slijedi da su ti trokuti slični. Iz njihove sličnosti slijedi:

$$\frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|PC|}{|PB|},$$

što možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$|AP| \cdot |PB| = |DP| \cdot |PC|.$$



Slika 2.8: $|AP| \cdot |PB| = |DP| \cdot |PC|$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan

Sada dokazujemo drugi smjer, odnosno: $|AP| \cdot |PB| = |DP| \cdot |PC| \Rightarrow$ četverokut $ABCD$ je tetivan. Ako vrijedi jednakost $|AP| \cdot |PB| = |DP| \cdot |PC|$, onda vrijedi i

$$\frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|PC|}{|PB|}.$$

Dakle, trokuti $\triangle CAP$ i $\triangle BDP$ imaju dva para proporcionalnih stranica, a kut $\angle BPC$ među njima zajednički je tim trokutima. Po *SKS* poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti $\triangle CAP$ i $\triangle BDP$ slični. Slični trokuti imaju odgovarajuće kutove jednakih mjera pa vrijedi $\angle CAB = \angle CDB$. Dobili smo da je kut između stranice i dijagonale konveksnog četverokuta jednak kutu između nasuprotne stranice i druge dijagonale pa po Teoremu 1.2.1 slijedi da je $ABCD$ tetivan.

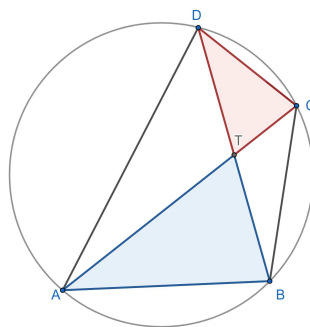
□

Teorem 2.3.2. *Za konveksni četverokut $ABCD$ vrijedi jednakost*

$$\sin \angle CAB \cdot \sin \angle ACD = \sin \angle ABD \cdot \sin \angle CDB$$

ako i samo ako je četverokut tetivan.

Dokaz. Neka je T sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$. Primjenom poučka o sinusu na



Slika 2.9: Prikaz trokuta $\triangle ABT$ i $\triangle TCD$

trokute $\triangle ABT$ i $\triangle TCD$ redom dobivamo:

$$\frac{|AT|}{\sin \angle ABT} = \frac{|BT|}{\sin \angle TAB}$$

i

$$\frac{|CT|}{\sin \angle CDT} = \frac{|DT|}{\sin \angle TCD}.$$

Iz tih dviju jednakosti slijedi:

$$\frac{|AT|}{\sin \angle ABT} \cdot \frac{|CT|}{\sin \angle CDT} = \frac{|BT|}{\sin \angle TAB} \cdot \frac{|DT|}{\sin \angle TCD}.$$

Stoga imamo:

$$|AT| \cdot |CT| = |BT| \cdot |DT| \Leftrightarrow \sin \angle TAB \cdot \sin \angle TCD = \sin \angle ABT \cdot \sin \angle CDT,$$

tj.

$$|AT| \cdot |CT| = |BT| \cdot |DT| \Leftrightarrow \sin \angle CAB \cdot \sin \angle ACD = \sin \angle ABD \cdot \sin \angle CDB.$$

Budući da je s lijeve strane znaka ekvivalencije karakterizacija tetivnog četverokuta (Teorem 2.3.1), zaključujemo da je onda i s desne strane također karakterizacija tetivnog četverokuta. \square

Teorem 2.3.3. *Za konveksni četverokut $ABCD$ vrijedi:*

$$\cos \alpha + \cos \gamma = \cos \beta + \cos \delta = 0$$

ako i samo ako je četverokut tetivan.

Drugim riječima, zbroj kosinusa nasuprotnih unutarnjih kutova četverokuta jednak je nuli ako i samo ako je četverokut tetivan.

Dokaz. Najprije dokazujemo: Ako je $ABCD$ tetivan četverokut, onda vrijedi $\cos \alpha + \cos \gamma = \cos \beta + \cos \delta = 0$. S obzirom da je četverokut $ABCD$ tetivan, vrijedi $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Stoga je

$$\cos \alpha + \cos \gamma = \cos \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha - \cos \alpha = 0.$$

Budući da je $\beta + \delta = 180^\circ$, druga jednakost dokazuje se analogno.

Sada dokazujemo: Ako je $\cos \alpha + \cos \gamma = \cos \beta + \cos \delta = 0$, onda je četverokut tetivan. Dokaz provodimo metodom svođenja na kontradikciju. Pretpostavimo suprotno, tj. da četverokut $ABCD$ nije tetivan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\alpha > 180^\circ - \gamma$. Kut α unutarnji je kut četverokuta pa za njega vrijedi $0 < \alpha < 180^\circ$. Funkcija kosinus padajuća je na intervalu $(0, 180^\circ)$ pa dobivamo: $\cos \alpha < \cos 180^\circ - \gamma$. Slijedi:

$$\cos \alpha + \cos \gamma < \cos(180^\circ - \gamma) + \cos \gamma = -\cos \gamma + \cos \gamma = 0.$$

Budući da je u promatranom slučaju $\alpha + \gamma > 180^\circ$, slijedi da je $\beta + \delta < 180^\circ$, odnosno $\beta < 180^\circ - \delta$. Provodimo analogan postupak: $\cos \beta > \cos 180^\circ - \delta$. Slijedi:

$$\cos \beta + \cos \delta > \cos(180^\circ - \delta) + \cos \delta = -\cos \delta + \cos \delta = 0.$$

Dobiveni rezultati $\cos \alpha + \cos \gamma < 0$ i $\cos \beta + \cos \delta > 0$ u kontradikciji su s polaznom pretpostavkom da vrijedi $\cos \alpha + \cos \gamma = \cos \beta + \cos \delta = 0$. Dakle, četverokut je tetivan. \square

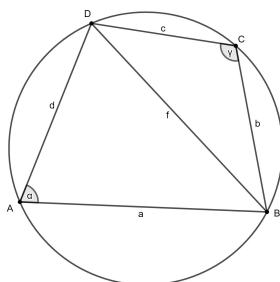
Teorem 2.3.4. *Neka je $ABCD$ konveksni četverokut sa stranicama duljina a, b, c i d te dijagonalama duljina $|AC| = e$ i $|BD| = f$. Za duljine dijagonala četverokuta vrijedi*

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$$

i

$$f = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$$

ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.



Slika 2.10: Četverokut $ABCD$ s konstruiranom dijagonalom \overline{BD}

Dokaz. Izvedimo najprije izraz za duljinu dijagonale \overline{BD} konveksnog četverokuta. Primjenom poučka o kosinusu na trokute $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ dobivamo:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha,$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma.$$

Prvu jednadžbu množimo izrazom bc , a drugu izrazom ad . Tim postupkom dolazimo do sljedećih jednakosti:

$$bc f^2 = a^2 bc + bcd^2 - 2abcd \cos \alpha,$$

$$ad f^2 = ab^2 d + ac^2 d - 2abcd \cos \gamma.$$

Zbrajanjem tih dviju jednadžbi dobivamo:

$$(bc + ad)f^2 = ac(ab + cd) + bd(cd + ab) - 2abcd(\cos \alpha + \cos \gamma).$$

Stoga je

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd) - 2abcd(\cos \alpha + \cos \gamma)}{ad + bc}.$$

Po Teoremu 2.3.3 četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $\cos \alpha + \cos \gamma = 0$. Stoga je četverokut $ABCD$ tetivan ako i samo ako je

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Duljina dužine je nenegativna pa konačno dobivamo:

$$f = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}.$$

Analogan postupak primijenimo i pri izvodu izraza za duljinu druge dijagonale četverokuta. Tako dobivamo:

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc) - 2abcd(\cos \beta + \cos \delta)}{ab + cd}.$$

Ponovno primjenjujemo Teorem 2.3.3 i zaključujemo da je $ABCD$ tetivan ako i samo ako je

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

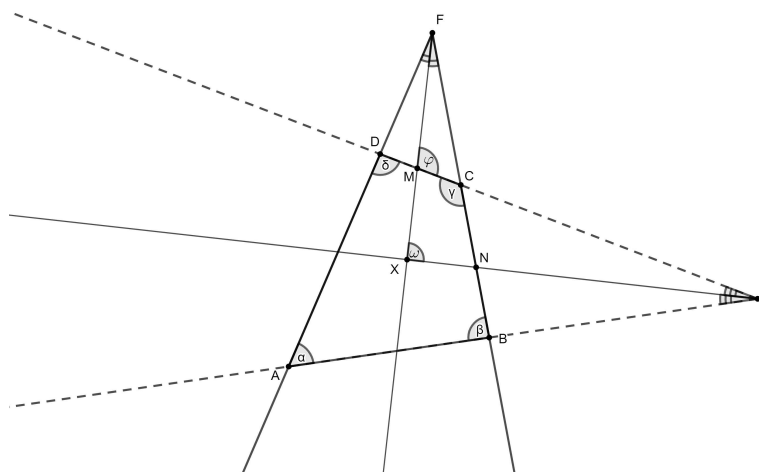
odnosno

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

□

Teorem 2.3.5. *Neka je $ABCD$ konveksan četverokut te neka su točke E i F redom sjecišta pravaca AD i BC , odnosno AB i CD . Simetrale kutova $\angle CFD$ i $\angle AED$ međusobno su okomite ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.*

Dokaz. Koristit ćemo oznake kao na Slici 2.11. Za kutove u trokutu $\triangle AED$ vrijedi: $\angle AED = 180^\circ - \alpha - \delta$, a za kutove u trokutu $\triangle ABF$ vrijedi: $\angle BFA = 180^\circ - \alpha - \beta$. Neka su kutovi φ i ω kao na Slici 2.11 i neka su FM i EN simetrale kutova $\angle BFA$ i $\angle AED$. Sjecište tih simetrala označimo sa X .



Slika 2.11: Simetrale kutova $\angle CFD$ i $\angle AED$ međusobno su okomite ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan

Kut γ vanjski je kut trokuta $\triangle MCF$ pa vrijedi jednakost: $\gamma = \varphi + \frac{1}{2}\angle CFD$. Nadalje, kut φ vanjski je kut trokuta $\triangle MXE$ pa vrijedi: $\varphi = \omega + \frac{1}{2}\angle AED$. Množenjem te jednakosti s 2 te uvrštavanjem poznatog slijedi:

$$\begin{aligned} 2\omega &= 2\varphi - \angle AED, \\ &= 2\left(\gamma - \frac{1}{2}\angle CFD\right) - \angle AED, \\ &= 2\gamma - \angle CFD - \angle AED, \\ &= 2\angle BCD - 180^\circ + \alpha + \beta - 180^\circ + \alpha + \delta, \\ &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta - 360^\circ) + \alpha + \gamma. \end{aligned}$$

Izraz unutar zagrade jednak je nuli jer je zbroj kutova u četverokutu jednak 360° . Dakle,

$$2\omega = \alpha + \gamma, \text{ tj. } \omega = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Po Teoremu 1.2.3 slijedi da je četverokut $ABCD$ tetivan ako i samo ako vrijedi:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ,$$

odnosno ako i samo ako su simetrale kutova $\angle CFD$ i $\angle AED$ međusobno okomite. □

Poglavlje 3

Ptolemejev teorem

3.1 Povijesni kutak i iskaz teorema

Kao što smo već u uvodu spomenuli, Klaudije Ptolemej bio je antički matematičar, geograf i astronom. Živio je u Aleksandriji na prijelazu s 1. u 2. stoljeće. Najpoznatije Ptolemejevo djelo je *Almagest* (originalnog naziva Matematička kolekcija) u kojem je matematičkom teorijom opisano kretanje geometrijskih tijela. Bavio se i sfernom geometrijom te trigonometrijom. Također, dokazao je lemu koju danas znamo pod imenom *Ptolemejev teorem* čiji iskaz i nekoliko dokaza navodimo u ovom poglavlju.

Teorem 3.1.1 (Ptolemejev teorem). *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina njegovih nasuprotnih stranica, tj. ako je $ABCD$ tetivni četverokut, onda vrijedi*

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

3.2 Dokazi

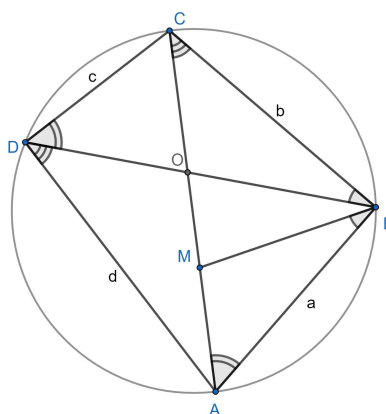
Planimetrijski dokaz primjenom sličnosti trokuta

Dokaz. Neka je $ABCD$ četverokut uz oznake kao na Slici 3.1 te neka se točka M nalazi na pravcu AC tako da vrijedi $\angle ABM = \angle DBC$. Kutovi $\angle DBC$ i $\angle DAC$ su obodni kutovi nad istim kružnim lukom pa su oni jednakih mjera: $\angle ABM = \angle DBC = \angle DAC$. Analogno, vrijedi: $\angle CAB = \angle CDB$. Budući da $\triangle MAB$ i $\triangle CDB$ imaju dva para jednakih kutova ($\angle ABM = \angle DBC$ i $\angle MAB = \angle CAB = \angle CDB$), po *KK* poučku o sličnosti zaključujemo da su ti trokuti slični, tj. $\triangle MAB \sim \triangle CDB$. Tada vrijedi:

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AM|}{|CD|},$$

što možemo zapisati i ovako:

$$|AB| \cdot |CD| = |AM| \cdot |BD|. \quad (3.1)$$



Slika 3.1: Prikaz četverokuta $ABCD$ i točke M

Točka M odabrana je tako da je $\angle ABM = \angle DBC$. Stoga vrijedi:

$$\angle DBC + \angle MBO = \angle ABM + \angle MBO.$$

Iz toga slijedi: $\angle MBC = \angle ABO$. Uz to vrijedi i $\angle BCA = \angle BDA$ (obodni kutovi nad istim kružnim lukom) pa, po *KK* poučku o sličnosti trokuta, zaključujemo da su $\triangle CMB \triangle DAB$ slični. Vrijedi:

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|CM|}{|AD|},$$

što možemo zapisati i ovako:

$$|AD| \cdot |BC| = |CM| \cdot |BD|. \quad (3.2)$$

Konačno, zbrajanjem lijevih i desnih strana jednakosti (3.1) i (3.2) dobivamo:

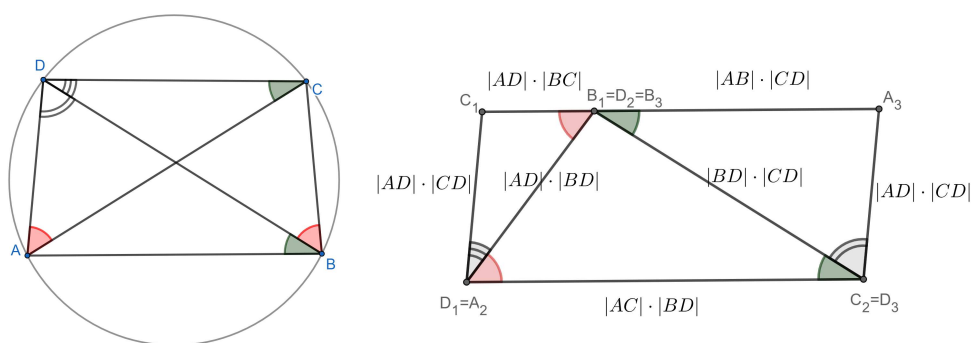
$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |CM| \cdot |BD| + |AM| \cdot |BD|, \\ &= |BD| \cdot (|CM| + |AM|), \\ &= |BD| \cdot |AC|. \end{aligned}$$

□

Drugi planimetrijski dokaz

Sljedeći dokaz preuzet je iz [7].

Dokaz. Promotrimo trokute $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ i $\triangle ABD$ omeđene stranicama i dijagonalama tetivnog četverokuta $ABCD$. Duljine stranica trokuta $\triangle BCD$ pomnožimo vrijednošću $|AD|$. Tim postupkom dobivamo trokut $\triangle B_1C_1D_1$ koji je sličan trokutu $\triangle ABD$ s koeficijentom sličnosti $k_1 = |AD|$. Duljine stranica dobivenog trokuta su: $|B_1C_1| = |BC| \cdot |AD|$, $|C_1D_1| = |CD| \cdot |AD|$, $|B_1D_1| = |BD| \cdot |AD|$ (trokut je prikazan na Slici 3.2).



Slika 3.2: Trokuti $\triangle B_1C_1D_1$, $\triangle A_2C_2D_2$ i $\triangle A_3B_3D_3$ čine jedan četverokut

Analogno, duljine stranica trokuta $\triangle ACD$ pomnožimo vrijednošću $|BD|$, a duljine stranica trokuta $\triangle ABD$ vrijednošću $|CD|$. Tako dobivamo trokute $\triangle A_2C_2D_2$ i $\triangle A_3B_3D_3$ za koje vrijedi $\triangle A_2C_2D_2 \sim \triangle ACD$, $\triangle A_3B_3D_3 \sim \triangle ABD$ s koeficijentima sličnosti redom $k_2 = |BD|$ i $k_3 = |CD|$. Duljine stranica tako dobivenih trokuta su: $|A_2C_2| = |AC| \cdot |BD|$, $|C_2D_2| = |CD| \cdot |BD|$, $|A_2D_2| = |AD| \cdot |BD|$, $|A_3B_3| = |AB| \cdot |CD|$, $|B_3D_3| = |BD| \cdot |CD|$, $|A_3D_3| = |AD| \cdot |CD|$.

Po Teoremu 1.2.1 vrijedi

$$\angle ACD = \angle ABD. \quad (3.3)$$

Analogno,

$$\angle DBC = \angle DAC. \quad (3.4)$$

Nadalje, vrijedi

$$|B_1D_1| = |BD| \cdot |AD| = |A_2D_2| \quad (3.5)$$

i

$$|C_2D_2| = |CD| \cdot |BD| = |B_3D_3|. \quad (3.6)$$

Zbog (3.3), (3.4), (3.5) i (3.6) od trokuta $\triangle B_1C_1D_1$, $\triangle A_2C_2D_2$ i $\triangle A_3B_3D_3$ možemo sastaviti četverokut kao na Slici 3.2. Koristeći rezultate dobivene u ovom dokazu te činjenicu da

je četverokut $ABCD$ tetivan i da je zbroj kutova u trokutu jednak 180° , dobivamo da za kutove dobivenog četverokuta vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle D_1D_3B_3 + \angle B_3D_3A_3, &= \angle A_3B_3D_3 + \angle B_3D_3A_3, \\ &= 180^\circ - \angle D_3A_3B_3, \\ &= 180^\circ - \angle DAB, \\ &= \angle BCD\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\angle B_1D_1D_3 + \angle C_1D_1B_1, &= \angle D_1B_1C_1 + \angle C_1D_1B_1, \\ &= 180^\circ - \angle B_1C_1D_1, \\ &= 180^\circ - \angle BCD, \\ &= \angle DAB.\end{aligned}$$

Budući da vrijedi $\angle D_1D_3B_3 + \angle B_3D_3A_3 = \angle BCD$ i $\angle B_1D_1D_3 + \angle C_1D_1B_1 = \angle DAB$, tj. četverokut $C_1D_1D_3A_3$ ima oba para nasuprotnih kutova sukladna, zaključujemo da je taj četverokut paralelogram. Ptolemejev teorem slijedi iz jednakosti duljina nasuprotnih stranica paralelograma:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

□

Treći planimetrijski dokaz

Izvor posljednjeg dokaza Ptolemejevog teorema kojeg ćemo navesti je [2].

Dokaz. Neka su DO , DP i DR okomice iz vrha D redom na pravce BC , AC i AB . Budući da je $ABCD$ tetivan četverokut, po Teoremu 1.2.1 slijedi: $\angle DAC = \angle DBC$, $\angle ACD = \angle ABD$ i $\angle DRB = \angle APD = \angle BOD = 90^\circ$. Također, vrijedi: $\angle RAD = 180^\circ - (\angle DAC + \angle CAB) = \angle OCD$. Iz navedenih jednakosti mjera kutova po KK poučku o sličnosti trokuta slijedi: $\triangle APD \sim \triangle BOD$, $\triangle DPC \sim \triangle DRB$ i $\triangle DRA \sim \triangle DOC$. Budući da su $\triangle APD$ i $\triangle BOD$ slični imamo:

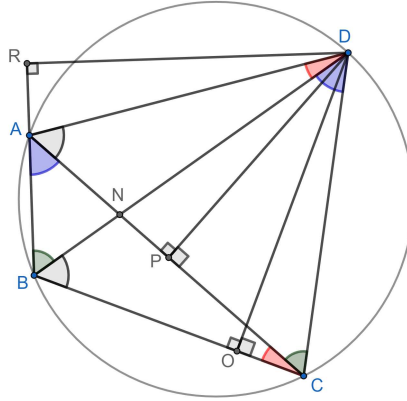
$$\frac{|AP|}{|BO|} = \frac{|AD|}{|BD|},$$

što možemo zapisati i ovako:

$$|AP| \cdot |BD| = |BO| \cdot |AD|. \quad (3.7)$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle DPC$ i $\triangle DRB$ slijedi da je

$$\frac{|CP|}{|BR|} = \frac{|CD|}{|BD|},$$



Slika 3.3: Prikaz okomica DO , DP i DR iz vrha D redom na pravce BC , AC i BA

što možemo zapisati i ovako:

$$|CP| \cdot |BD| = |CD| \cdot |BR|. \quad (3.8)$$

Analogno, $\triangle DRA \sim \triangle DOC$ povlači

$$\frac{|AR|}{|CO|} = \frac{|AD|}{|CD|},$$

odnosno

$$|AR| \cdot |CD| = |AD| \cdot |CO|. \quad (3.9)$$

Uvrštavanjem jednakosti $|AP| = |AC| - |CP|$ i $|BO| = |BC| - |CO|$ u (3.7) dobivamo:

$$(|AC| - |CP|) \cdot |BD| = (|BC| - |CO|) \cdot |AD|,$$

tj.

$$|AC| \cdot |BD| = |BC| \cdot |AD| + |CP| \cdot |BD| - |CO| \cdot |AD|. \quad (3.10)$$

Nadalje, vrijedi $|BR| = |AB| + |AR|$. Stoga, uvrštavanjem u (3.8) dobivamo:

$$|BD| \cdot |CP| = |AB| \cdot |CD| + |AR| \cdot |CD|. \quad (3.11)$$

Zbrajanjem izraza s lijevih i desnih strana jednakosti (3.9), (3.10) i (3.11) dobivamo:

$$|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD|.$$

□

Poglavlje 4

Površina tetivnog četverokuta

4.1 Brahmaguptina formula

Brahmagupta, indijski matematičar iz 7. st., otkrio je formulu za računanje površine tetivnog četverokuta. S jedne strane, Brahmaguptina formula predstavlja generalizaciju Heronove formule (izraz za površinu trokuta), a s druge je strane specijalan slučaj Bretschneiderove formule koju navodimo bez dokaza (dokaz se može pronaći u [5]).

Teorem 4.1.1 (Bretschneiderova formula). *Za površinu P četverokuta $ABCD$ vrijedi:*

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}},$$

gdje su $a, b, c,$ i d duljine stranica četverokuta, s je njegov poluopseg, a α i γ veličine nasuprotnih kutova četverokuta.

Znamo da su nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta suplementarni, odnosno da vrijedi $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Uvrštavanjem vrijednosti tog izraza u Bretschneiderovu formulu dobivamo Brahmaguptinu formulu:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}}, \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{180^\circ}{2}}, \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \end{aligned}$$

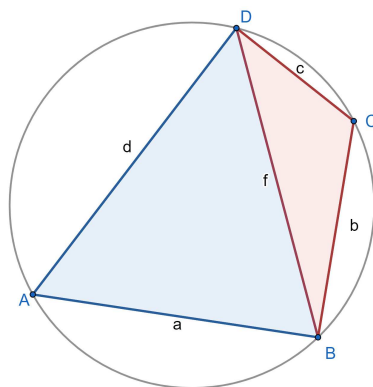
Teorem 4.1.2 (Brahmaguptina formula). *Za površinu P tetivnog četverokuta $ABCD$ vrijedi:*

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

gdje su $a, b, c, i d$ duljine stranica četverokuta, a s je njegov poluopseg.

Dokaz je preuzet iz [4].

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut uz oznake kao na Slici 4.1. Dijagonala \overline{BD} dijeli



Slika 4.1: Površina P tetivnog četverokuta jednaka je zbroju površina $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$

dani četverokut na dva trokuta, $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$. Površina P tetivnog četverokuta jednaka je zbroju površina tih dvaju trokuta:

$$P = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD}. \quad (4.1)$$

Površina trokuta jednaka je polovini umnoška duljina dviju stranica trokuta te sinusa kuta između njih:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ad \sin \alpha,$$

$$P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bc \sin \gamma.$$

Budući da je četverokut $ABCD$ tetivan, vrijedi $\gamma = 180^\circ - \alpha$. Uvrštavanjem dobivenih izraza u (4.1) te primjenom trigonometrijskog identiteta $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ dobivamo:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}ad \sin \alpha + \frac{1}{2}bc \sin \gamma, \\ &= \frac{1}{2}ad \sin \alpha + \frac{1}{2}bc \sin(180^\circ - \alpha), \\ &= \frac{1}{2}ad \sin \alpha + \frac{1}{2}bc \sin \alpha, \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha(ad + bc). \end{aligned}$$

Vrijednosti izraza s lijeve i desne strane jednakosti su jednake pa su onda i njihovi kvadrati jednakih vrijednosti:

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{4} \sin^2 \alpha (ad + bc)^2 \quad / \cdot 4, \\ \Leftrightarrow 4P^2 &= (1 - \cos^2 \alpha)(ad + bc)^2, \\ \Leftrightarrow 4P^2 &= (ad + bc)^2 - (\cos \alpha (ad + bc))^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

pri čemu smo koristili osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

Primjenom poučka o kosinusu na trokute $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ dobivamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma, \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha. \end{aligned}$$

Sada slijedi

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma &= a^2 + d^2 + 2ad \cos \alpha, \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - \alpha) &= a^2 + d^2 + 2ad \cos \alpha, \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha &= a^2 + d^2 + 2ad \cos \alpha, \\ \Leftrightarrow 2 \cos \alpha (ad + bc) &= b^2 + c^2 - a^2 - d^2 \quad / : 2, \\ \Leftrightarrow \cos \alpha (ad + bc) &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza (4.3) u (4.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} 4P^2 &= (ad + bc)^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 \quad / \cdot 4, \\ \Leftrightarrow 16P^2 &= 4(ad + bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2. \end{aligned}$$

Primjenom algebarskog identiteta razlike kvadrata te kvadrata binoma dolazimo do sljedećih jednakosti:

$$\begin{aligned} 16P^2 &= [2(ad + bc) - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)][2(ad + bc) + (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)], \\ &= (a^2 + 2ad + d^2 - b^2 + 2bc - c^2)(-a^2 + 2ad - d^2 + b^2 + 2bc + c^2), \\ &= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2], \\ &= (a + d - b + c)(a + d + b - c)(b + c + a - d)(b + c - a + d). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $16P^2 = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$ iz čega slijedi da je površina P tetivnog četverokuta $ABCD$ dana izrazom

$$P = \frac{1}{4} \sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}$$

kojeg nazivamo Brahmaguptinom formulom. Algebarskom manipulacijom dolazimo do drugog zapisa te formule:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(-a+b+c+d) \frac{1}{2}(a-b+c+d) \frac{1}{2}(a+b-c+d) \frac{1}{2}(a+b+c-d)}, \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \end{aligned}$$

□

Poglavlje 5

Specijalni slučajevi tetivnog četverokuta

Osim što se nekim četverokutima može opisati kružnica, oni mogu imati i neka dodatna svojstva. Ako se tetivnom četverokutu može i upisati kružnica, onda takav četverokut nazivamo bicentričnim četverokutom. Nadalje, tetivne četverokute kojima je umnožak duljina nasuprotnih stranica jednak nazivamo harmonijskim četverokutima. U ovom poglavlju ćemo, uz bicentrične i harmonijske četverokute, promotriti još dvije specijalne skupine tetivnih četverokuta, a to su tetivni ortoidi te Newtonovi četverokuti.

5.1 Harmonijski četverokut

Definicija 5.1.1. *Tetivni četverokut je harmonijski ako je umnožak duljina njegovih nasuprotnih stranica jednak.*

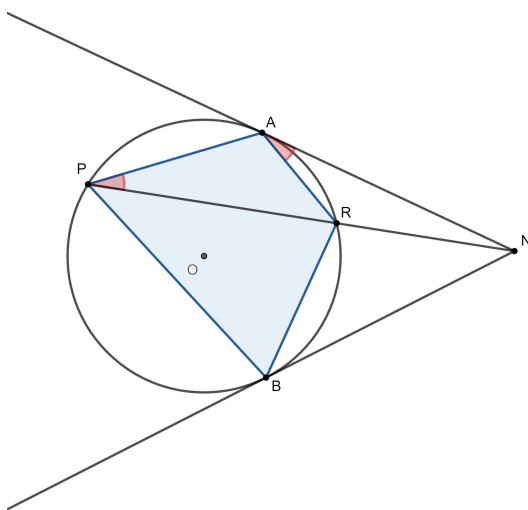
Detaljnije o primjerima i dokazima u ovom potpoglavljju čitatelj može pronaći u [19].

Propozicija 5.1.2. *Zadana je kružnica k i točka N izvan nje. Neka su NA i NB tangente iz točke N na kružnicu k s diralištima A i B . Neka je p proizvoljan pravac koji prolazi točkom N i siječe kružnicu u točkama P i R . Tada je četverokut $APBR$ harmonijski.*

Dokaz. Želimo pokazati da je umnožak duljina nasuprotnih stranica četverokuta $APBR$ jednak, što možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\frac{|AR|}{|AP|} = \frac{|BR|}{|BP|}.$$

Promatramo trokute $\triangle NAR$ i $\triangle NPA$. Ta dva trokuta imaju zajednički kut $\angle RNA$. S druge strane, $\angle NAR$ je kut kojeg zatvaraju tangenta NA i tetiva \overline{AR} kružnice k , dok je $\angle APR$ obodni kut nad tetivom \overline{AR} . Sada primjenjujemo sljedeći teorem (dokaz čitatelj može pogledati u [3]):

Slika 5.1: Četverokut $APBR$

Teorem 5.1.3 (Teorem o kutu između tangente i tetive). *Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

Dakle, vrijedi $\angle NAR = \angle APR$. Po *KK* poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti $\triangle NAR$ i $\triangle NPA$ slični. Tada vrijedi:

$$\frac{|AR|}{|AP|} = \frac{|NR|}{|AN|} = \frac{|AN|}{|PN|}. \quad (5.1)$$

Analogno zaključujemo da su $\triangle NBR$ i $\triangle NPB$ također slični trokuti. Slijedi:

$$\frac{|BR|}{|BP|} = \frac{|NR|}{|BN|} = \frac{|BN|}{|PN|}. \quad (5.2)$$

Budući da je $|AN| = |BN|$, iz (5.1) i (5.2) možemo zaključiti:

$$\frac{|AR|}{|AP|} = \frac{|BR|}{|BP|},$$

što možemo zapisati i ovako:

$$|AR| \cdot |BP| = |AP| \cdot |BR|.$$

Dakle, umnožak duljina nasuprotnih stranica promatranog četverokuta je jednak pa se radi o harmonijskom četverokutu. \square

Prije nego što navedemo sljedeće propozicije prisjetit ćemo se pojmova koji će biti sadržani u njihovim iskazima i dokazima.

Definicija 5.1.4. *Apolonijeva kružnica je skup točaka ravnine čije su udaljenosti od dviju fiksni točaka u konstantnom omjeru.*

Slično, Apolonijeva kružnica za dužinu \overline{AB} i omjer $\frac{p}{q}$ skup je točaka čije su udaljenosti od jednog i drugog kraja dužine \overline{AB} u omjeru $\frac{p}{q}$.

Definicija 5.1.5. *Za dvije kružnice kažemo da su ortogonalne ako se sijeku i ako su tangente na te kružnice u točkama presjeka međusobno okomite.*

Sada navodimo nekoliko propozicija vezanih za harmonijske četverokute.

Propozicija 5.1.6. *Neka je $ABCD$ harmonijski četverokut upisan u kružnicu s_1 i neka je*

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BC|} = k.$$

Tada su kružnica s_1 i Apolonijeva kružnica za dužinu \overline{AC} i omjer k ortogonalne (uz oznake kao na Slici 5.2).

Dokaz. Dokaz započinjemo konstruiranjem simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta trokuta $\triangle ACD$ pri vrhu D . Neka je točka E sjecište simetrale kuta $\angle CDA$ i pravca AC , a točka F sjecište simetrale vanjskog kuta trokuta $\triangle ACD$ prvi vrhu D i pravca AC . Budući da su DE i DF simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta trokuta pri istom vrhu, one su međusobno okomite, odnosno vrijedi $\angle FDE = 90^\circ$. Po obratu Talesovog poučka o obodnom kutu nad promjerom kružnice slijedi da se točka D nalazi na kružnici kojoj je promjer dužina \overline{EF} . Navedenu kružnicu označimo sa s_2 , a njeno središte (polovište dužine \overline{EF}) označimo s I . Po pretpostavci propozicije vrijedi:

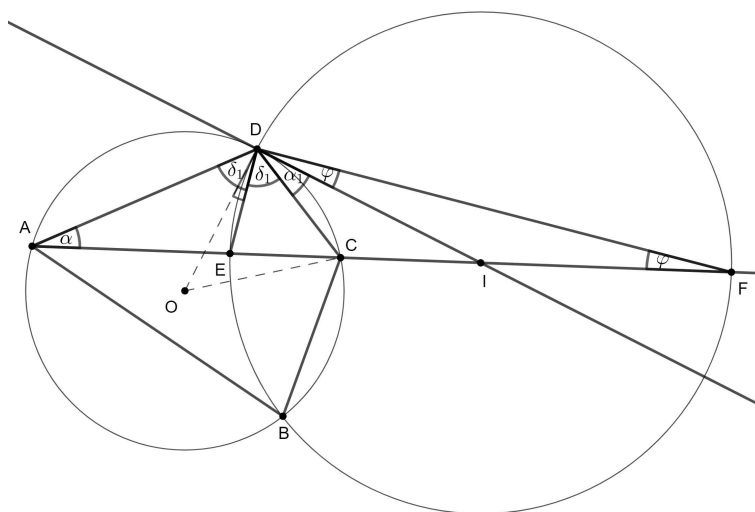
$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BC|} = k$$

iz čega zaključujemo da se točke B i D nalaze na Apolonijevoj kružnici za dužinu \overline{AC} i omjer k .

Sada primjenjujemo sljedeće teoreme (dokaze čitatelj može pronaći u [9] i [10]):

Teorem 5.1.7 (Teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta). *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru duljina preostalih dviju stranica.*

Teorem 5.1.8 (Teorem o simetrali vanjskog kuta trokuta). *Simetrala vanjskog kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu izvana u omjeru duljina preostalih dviju stranica.*


 Slika 5.2: Prikaz četverokuta $ABCD$, kružnice s_1 i kružnice s_2

Dakle, vrijedi:

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|CD|} = k$$

i

$$\frac{|AF|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|CD|} = k.$$

Zaključujemo da se i točke E i F nalaze na Apolonijevoj kružnici za dužinu \overline{AC} i omjer k , tj. da je s_2 tražena Apolonijeva kružnica. Preostaje nam dokazati da je ID tangenta kružnice s_1 .

Ranije smo zaključili da vrijedi: $\angle FDE = 90^\circ$. Uvodimo oznake za kutove: $\angle AFD = \varphi$, $\angle IDC = \alpha_1$, $\angle DAF = \alpha$. Trokut $\triangle FDE$ je pravokutan pa za veličinu kuta $\angle DEF$ vrijedi: $\angle DEF = 90^\circ - \varphi$. Simetrala DE dijeli kut $\angle CDA$ na dva kuta jednakih veličina (označimo ih s δ_1 kao na Slici 5.2): $\angle CDE = \angle EDA = \delta_1$. Trokut $\triangle IFD$ je jednakokračan jer je $|IF| = |DI| = r_2$, gdje je r_2 radijus kružnice s_2 . Stoga je $\angle FDI = \varphi$. Sada imamo:

$$\angle FDE = \varphi + \alpha_1 + \delta_1, \quad (5.3)$$

odnosno

$$\varphi + \alpha_1 + \delta_1 = 90^\circ. \quad (5.4)$$

Sada promatramo trokut $\triangle ACD$. Budući da je zbroj unutarnjih kutova trokuta jednak 180° , slijedi:

$$\begin{aligned}\angle ACD &= 180^\circ - (\delta_1 + \delta_1 + \alpha), \\ &= 180^\circ - 2\delta_1 - \alpha.\end{aligned}$$

Ponovno računamo zbroj unutarnjih kutova, ali ovaj put trokuta $\triangle ECD$:

$$180^\circ = \angle DEC + \angle ECD + \angle CDE, \quad (5.5)$$

$$180^\circ = 90^\circ - \varphi + 180^\circ - 2\delta_1 - \alpha + \delta_1, \quad (5.6)$$

$$90^\circ = \delta_1 + \varphi + \alpha. \quad (5.7)$$

Iz (5.4) i (5.7) slijedi: $\alpha = \alpha_1$.

Središte kružnice s_1 označimo s O kao na Slici 5.2, a kut $\angle EDO$ označimo sa ψ . Tada za mjeru kuta $\angle IDO$ vrijedi: $\angle IDO = \alpha + \delta_1 + \psi$. Nadalje, kut $\angle DOC$ središnji je kut nad tetivom \overline{CD} kružnice s_1 , a kut $\angle DAC$ obodni je kut nad istom tetivom. Slijedi da je $\angle DOC = 2\angle DAC = 2\alpha$. Trokut $\triangle DOC$ jednakokratan je jer su \overline{DO} i \overline{OC} polumjeri kružnice s_1 . Stoga je $\angle OCD = \angle CDO = \delta_1 + \psi$. Sada iz zbroja kutova u trokutu $\triangle DOC$ dobivamo:

$$\begin{aligned}180^\circ &= \angle CDO + \angle DOC + \angle OCD, \\ &= \delta_1 + \psi + 2\alpha + \delta_1 + \psi, \\ &= 2\delta_1 + 2\psi + 2\alpha.\end{aligned}$$

Dijeljenjem lijeve i desne strane jednakosti brojem 2 dobivamo:

$$\delta_1 + \psi + \alpha = 90^\circ.$$

Iz toga slijedi da je $\angle IDO = \alpha + \delta_1 + \psi = 90^\circ$, odnosno da je ID tangenta kružnice s_1 . S druge strane, iz $\angle IDO = 90^\circ$ slijedi i da je OD tangenta kružnice s_2 . Stoga su s_1 i s_2 ortogonalne kružnice.

□

Propozicija 5.1.9. Četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu s_1 je harmonijski ako i samo ako se pravac AC i tangente na kružnicu s_1 s diralištima B i D sijeku u jednoj točki (pri čemu AC i BD nisu promjeri kružnice s_1).

Dokaz. Propozicija se dokazuje primjenom rezultata iz Propozicija 5.1.2 i 5.1.6. Koristit ćemo oznake kao u prethodnoj propoziciji.

Tvrđnja : „Ako je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu s_1 harmonijski, onda se pravac AC i tangente na kružnicu s_1 s diralištima B i D sijeku u jednoj točki.” slijedi iz rezultata dobivenih u dokazu Propozicije 5.1.6. Budući da je četverokut harmonijski, znamo da je umnožak duljina njegovih nasuprotnih stranica jednak, što možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BC|} = k.$$

Ponovimo korake konstrukcije geometrijskih objekata sa Slike 5.2 kao u Propoziciji 5.1.6. Pravac ID tangenta je na kružnicu s_1 pa je i IB tangenta na istu kružnicu. Dakle, pravac AC i tangente iz točke I na kružnicu s_1 s diralištima B i D sijeku se u točki I .

Tvrđnja : „Ako se pravac AC i tangente na kružnicu s_1 s diralištima B i D sijeku u jednoj točki, onda je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu s_1 harmonijski.” slijedi direktno iz Propozicije 5.1.2. Uistinu, I je točka izvan kružnice s_1 koja pripada tangentama ID i IB na kružnicu s_1 (s diralištima D i B), a AC je pravac koji prolazi točkom I te siječe kružnicu u dvije točke (A i C). Iz toga slijedi da je četverokut $ABCD$ harmonijski. \square

Propozicija 5.1.10. *Ako je četverokut $ABCD$ harmonijski, onda vrijedi:*

$$|AC| \cdot |BD| = 2|AB| \cdot |CD| = 2|BC| \cdot |AD|.$$

Dokaz. Četverokut je harmonijski pa je umnožak duljina njegovih nasuprotnih stranica jednak:

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|. \quad (5.8)$$

S druge strane, harmonijski četverokut je tetivan pa možemo primijeniti Ptolemejev teorem (Teorem 3.1.1):

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|. \quad (5.9)$$

Iz 5.8 i 5.9 slijedi:

$$\begin{aligned} |AC| \cdot |BD| &= |BC| \cdot |AD| + |BC| \cdot |AD|, \\ |AC| \cdot |BD| &= 2|BC| \cdot |AD| \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} |AC| \cdot |BD| &= |AB| \cdot |CD| + |AB| \cdot |CD|, \\ |AC| \cdot |BD| &= 2|AB| \cdot |CD|. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo traženu tvrdnju: $|AC| \cdot |BD| = 2|AB| \cdot |CD| = 2|BC| \cdot |AD|$. \square

5.2 Bicentrični četverokut

Kako bismo mogli definirati bicentrične četverokute, prisjetimo se definicije tangencijalnog četverokuta.

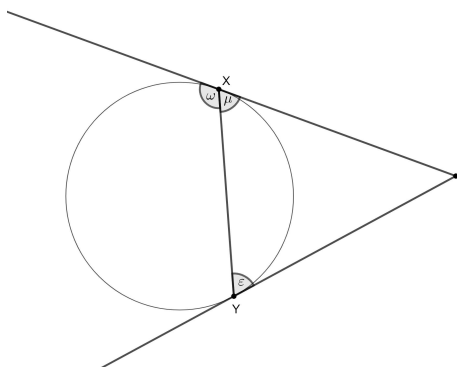
Definicija 5.2.1. *Konveksan četverokut kojem možemo upisati kružnicu nazivamo tangencijalnim četverokutom.*

Definicija 5.2.2. *Bicentričan četverokut je konveksan četverokut kojem se može opisati i upisati kružnica.*

Navest ćemo iskaz i dokaz teorema (izvor je [13]) koji govori o nužnom i dovoljnom uvjetu da tangencijalan četverokut bude i tetivan, odnosno da je bicentričan. U dokazu tog teorema koristit ćemo sljedeću lemu:

Lema 5.2.3. *Kutovi koje s različitih strana tetive zatvaraju tetiva kružnice i tangente na tu kružnicu u krajnjim točkama tetive su suplementarni.*

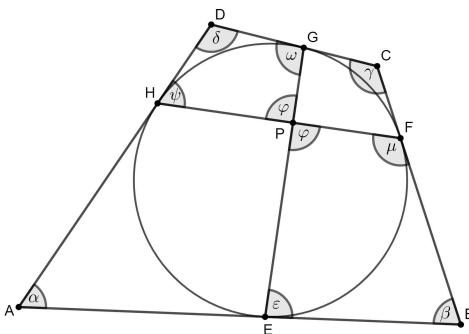
Odnosno, uz oznake kao na Slici 5.3, vrijedi: $\varepsilon + \omega = 180^\circ$.



Slika 5.3: Kutovi ε i ω su suplementarni

Dokaz. Neka je k kružnica i neka je točka T izvan kružnice. Iz točke T konstruirane su tangente na kružnicu k s diralištima X i Y kao na Slici 5.3. Trokut $\triangle XYT$ je jednakokravan pa vrijedi: $\varepsilon = \mu$. S druge strane, kutovi ω i μ su sukuti pa imamo: $\omega + \mu = 180^\circ$. Stoga je $\varepsilon + \omega = 180^\circ$. \square

Teorem 5.2.4. *Neka je $ABCD$ tangencijalan četverokut. Tangentne tetive četverokuta $ABCD$ okomite su ako i samo ako je $ABCD$ bicentričan.*



Slika 5.4: Tangentne tetive četverokuta $ABCD$ okomite su ako i samo ako je $ABCD$ bicentričan

Dokaz. Označimo kutove kao na Slici 5.4. Kutovi $\angle FPE$ i $\angle HPG$ su vršni pa zaključujemo da je $\angle FPE = \angle HPG =: \varphi$. Promatramo četverokute $BFPE$ i $DHPG$. Zbroj kutova u četverokutu je 360° pa vrijedi:

$$\varepsilon + \mu + \varphi + \beta = 360^\circ$$

i

$$\omega + \psi + \varphi + \delta = 360^\circ.$$

Zbrajanjem lijevih i desnih strana tih dviju jednakosti dobivamo:

$$\varepsilon + \omega + \mu + \psi + 2\varphi + \beta + \delta = 720^\circ. \quad (5.10)$$

Primjenom Leme 5.2.3 dobivamo: $\varepsilon + \omega = 180^\circ$ i $\mu + \psi = 180^\circ$. Uvrstimo dobiveno u (5.10) pa imamo:

$$360^\circ + 2\varphi + \beta + \delta = 720^\circ \Leftrightarrow \beta + \delta = 360^\circ - 2\varphi.$$

Tangentne tetive su okomite ako i samo ako je

$$\varphi = 90^\circ \Leftrightarrow \beta + \delta = 360^\circ - 180^\circ \Leftrightarrow \beta + \delta = 180^\circ.$$

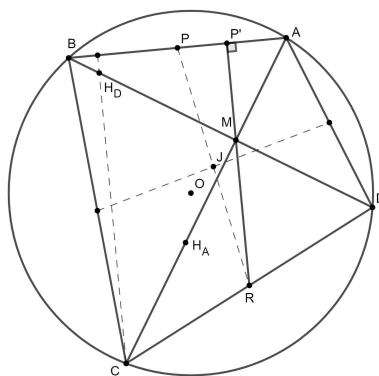
Dobili smo jednu od općepoznatih karakterizacija tetivnih četverokuta, tj. po Teoremu 1.2.3 slijedi da je $ABCD$ tetivan četverokut pa je stoga i bicentričan. \square

5.3 Tetivni ortoid

Definicija 5.3.1. Četverokut kojem su dijagonale međusobno okomite nazivamo ortoidom.

Sada ćemo navesti iskaze i dokaze dvaju teorema vezanih za tetivne ortoide, tj. ortoide kojima se može opisati kružnica (izvor dokaza je [1]).

Teorem 5.3.2. Ako je ortoid tetivan, onda se anticentar tog četverokuta podudara s točkom presjeka njegovih dijagonala.



Slika 5.5: Anticentar se podudara sa sjecištem dijagonala

Dokaz. Neka je O središte kružnice opisane tetivnom ortoidu $ABCD$, J njegovo težište, H_D ortocentar trokuta $\triangle ABC$, a H_A ortocentar trokuta $\triangle BCD$ (oznake kao na Slici 5.5). Budući da su \overline{AC} i \overline{BD} okomite, točka H_D pripada pravcu BD . Po Teoremu 2.2.8 i Propoziciji 2.2.9 slijedi da pravac DH_D prolazi anticentrom M četverokuta $ABCD$. Stoga M pripada dijagonali \overline{BD} .

Nadalje, točka H_A pripada pravcu AC . Primjenom Teorema 2.2.8 i Propozicije 2.2.9 zaključujemo da pravac AH_A prolazi anticentrom M četverokuta $ABCD$. Tada M pripada dijagonali \overline{AC} . Time smo dokazali da se anticentar M tetivnog ortoidea $ABCD$ podudara s presjekom njegovih dijagonala. \square

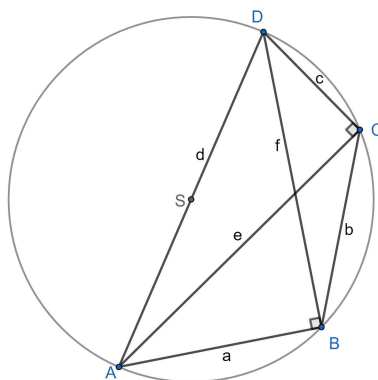
Teorem 5.3.3 (Brahmaguptin teorem). *U tetivnom ortoidu okomica iz sjecišta dijagonala na stranicu četverokuta raspolavlja nasuprotnu stranicu.*

Dokaz. U ovom dokazu koristimo oznake oznake kao na Slici 5.5. Neka je RP' okomica iz polovišta R stranice \overline{CD} na njoj nasuprotnu stranicu \overline{AB} . Po Teoremu 2.2.5 okomice iz polovišta stranica tetivnog četverokuta na nasuprotnu stranicu četverokuta (maltitude)

sijeku se u jednoj točki koju nazivamo anticentrom četverokuta (točka M na Slici 5.5). Budući da je četverokut $ABCD$ tetivan ortoid, po Teoremu 2.2.5 slijedi da se anticentar M podudara s točkom presjeka dijagonala promatranog četverokuta. Dakle, RP' je maltituda četverokuta $ABCD$ pa ona prolazi anticentrom M koji je također i sjecište dijagonala četverokuta. Stoga je pravac $RP' = MP'$ okomica iz sjecišta dijagonala M na stranicu \overline{AB} koja prolazi polovištem R stranice \overline{CD} . Zaključujemo da MP' raspolavlja stranicu \overline{CD} . Iz činjenice da se maltituda četverokuta $ABCD$ sijeku u jednoj točki, koja je ujedno i sjecište dijagonala, slijedi tražena tvrdnja. \square

5.4 Newtonov četverokut

Definicija 5.4.1. *Newtonov četverokut je konveksan četverokut koji je upisan u kružnicu, a jedna njegova stranica promjer je te kružnice.*



Slika 5.6: Newtonov četverokut

Newtonov četverokut specijalan je slučaj tetivnog četverokuta, što je jasno iz same definicije. Ime je dobio po engleskom matematičaru Isaacu Newtonu koji se bavio problemom pronalaska promjera d kružnice takvog da je on ujedno i četvrta stranica konveksnog četverokuta upisanog u tu kružnicu kojem su preostale tri stranice duljina a , b i c . Rješavajući taj problem došao je do jednakosti koju, također po njemu, nazivamo Newtonova jednadžba:

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0.$$

Iako se nije bavio njenim rješavanjem, Newton je navedenu jednadžbu izveo na šest načina. Navest ćemo jedan u kojem se koriste Ptolemejev teorem i Pitagorin poučak.

Neka je $ABCD$ Newtonov četverokut uz oznake kao na Slici 5.6. Izvest ćemo Newtonovu jednadžbu kao u [12]. Primjenom Ptolemejevog teorema dobivamo:

$$ac + bd = ef. \quad (5.11)$$

Kutovi $\angle ABD$ i $\angle ACD$ obodni su kutovi nad promjerom te su stoga pravi (Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice). Primjenom Pitagorinog poučka na trokute $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ dobivamo: $e^2 = d^2 - a^2$ i $f^2 = d^2 - c^2$, tj. $e = \sqrt{d^2 - a^2}$ i $f = \sqrt{d^2 - c^2}$ jer su e i f nenegativne veličine. Uvrstimo dobivene izraze u (5.11):

$$ac + bd = \sqrt{d^2 - a^2} \sqrt{d^2 - c^2}.$$

Kvadriranjem lijeve i desne strane jednakosti te algebarskom manipulacijom dolazimo do tražene jednakosti:

$$\begin{aligned} (ac + bd)^2 &= (d^2 - a^2)(d^2 - c^2), \\ \Leftrightarrow a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 &= d^4 - a^2d^2 - c^2d^2 + a^2c^2, \\ \Leftrightarrow d^4 - d^2(a^2 + b^2 + c^2) - 2acbd &= 0, \\ \Leftrightarrow d[d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc] &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, za $d \neq 0$ slijedi da je $d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0$.

Poglavlje 6

Tetivni četverokuti u nastavi matematike

Iako se u osnovnoj školi još uvijek ne uvodi pojam tetivnog četverokuta, učenici već tada otkrivaju da se kvadratu i pravokutniku može opisati kružnica. Pojam tetivnog četverokuta uvodi se u srednjoj školi te se otkrivaju i neke od njegovih osnovnih karakterizacija. Navest ćemo primjer niza aktivnosti kojima učenici otkrivaju tetivne četverokute i njihova svojstva.

Za početak motiviramo otkrivanje tetivnih četverokuta kontekstualiziranim zadatkom. Zatim slijedi aktivnost razvrstavanja četverokuta na one kojima se može i one kojim se ne može opisati kružnica te aktivnost konstruiranja opisanih kružnica četverokutima. Nakon toga učenici pomoću nekoliko primjera tetivnih četverokuta otkrivaju teorem o tetivnom četverokutu (Teorem 1.2.3). Naposljetku učenici, radeći u alatu dinamične geometrije, otkrivaju Ptolemejev teorem (Teorem 3.1.1).

6.1 Motivacijska aktivnost

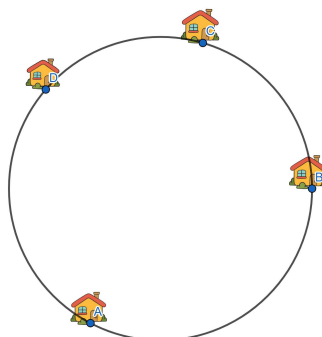
Cilj aktivnosti: Učenici će uočiti četverokut s opisanom kružnicom.

Primjer zadatka kojeg možemo zadati učenicima:

Zadatak: Marko želi posaditi stablo jabuke tako da ono bude jednako udaljeno od četiriju kuća prikazanih na Slici 6.1. Na kojem mjestu Marko treba posaditi stablo?

Napomena: Točke kojima prikazujemo kuće zadamo tako da one pripadaju istoj kružnici (kao na Slici 6.1). Učenici zadatak dobivaju ili na nastavnom listiću ili u obliku unaprijed pripremljenog apleta u alatu dinamične geometrije.

Diskusija i rješenje: Učenike potpitanjima navodimo na zaključak da se stablo treba nalaziti na mjestu središta kružnice koja prolazi zadanim točkama. Učenici dobivaju dodatan zadatak spojiti zadane točke dužinama te odrediti geometrijski lik koji se dobije na taj



Slika 6.1: Četiri kuće

način i opisati međusobni odnos kružnice i dobivenog geometrijskog lika. Zaključuju da spajanjem točaka dužinama dobivamo četverokut koji je upisan početnoj kružnici, odnosno kružnica je opisana tom četverokutu.



Slika 6.2: Središte kružnice i četverokut upisan kružnici

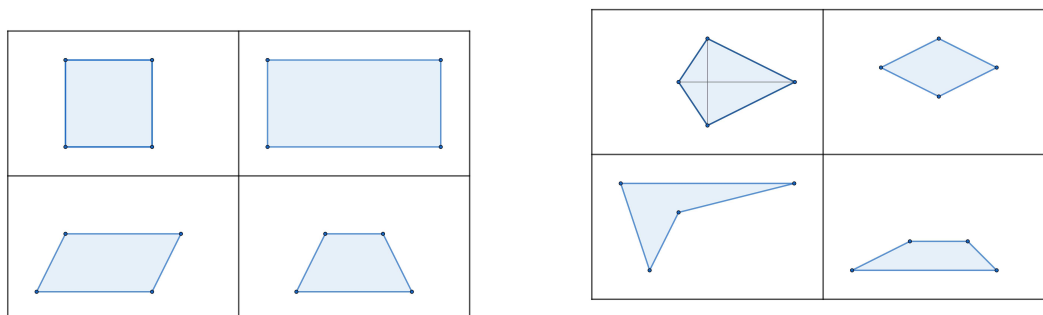
6.2 Aktivnosti otkrivanja tetivnih četverokuta i njihovih svojstava

Nakon motivacijskog zadatka slijedi aktivnost ponavljanja četverokuta kojima se može i kojima se ne može opisati kružnica.

Aktivnost – Prepoznavanje četverokuta

Cilj aktivnosti: Učenici će prepoznati četverokute kojima se može i kojima se ne može opisati kružnica.

Napomena: Učenici zadatak mogu dobiti na nastavnom listiću ili im nastavnik može dati kartice s četverokutima koje treba razvrstati. Aktivnost je pogodna za rad učenika u paru.

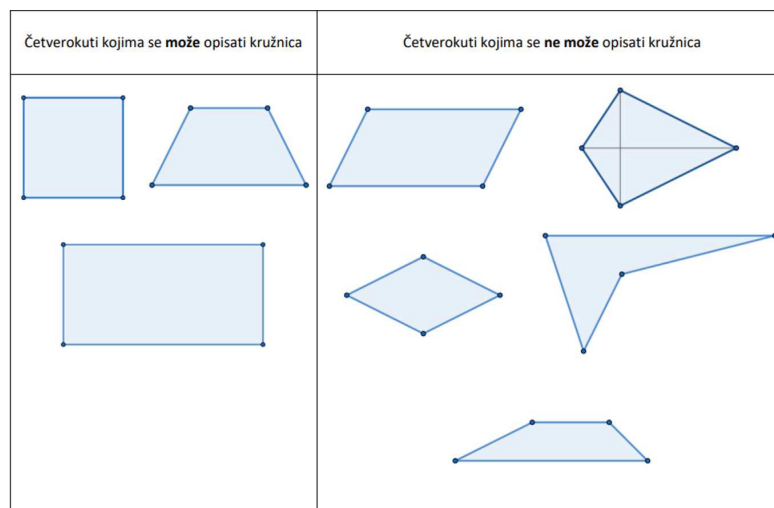


Slika 6.3: Kartice s raznim četverokutima

Primjer zadatka kojeg možemo zadati učenicima:

Zadatak: Razvrstaj zadane četverokute s obzirom na to može li im se opisati kružnica. Kartice s četverokutima nalaze se na Slici 6.3.

Diskusija i rješenje: Primjer učeničkog rješenja nalazi se na Slici 6.4.



Slika 6.4: Razvrstani četverokuti s obzirom na to može li im se opisati kružnica

Pitanjima u diskusiji potičemo učenike na prisjećanje postupka konstruiranja trokutu opisane kružnicu, a zatim i kružnice opisane kvadratu. Učenici još u osnovnoj školi otkrivaju da je središte trokutu opisane kružnice sjecište simetrala njegovih stranica, a središte kružnice opisane kvadratu u sjecištu njegovih dijagonala.

U sljedećoj aktivnosti učenici, po uzoru na konstrukciju trokutu opisane kružnice, konstruiraju opisane kružnice četverokutima (u slučajevima u kojima je to moguće).

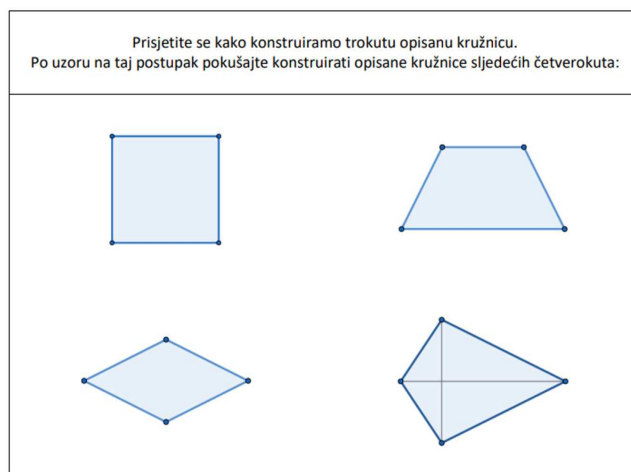
Aktivnost – Konstruiranje opisanih kružnica

Cilj aktivnosti: Učenici će, pokušavajući konstruirati opisane kružnice, prepoznati one četverokute kojima se može te one kojima se ne može opisati kružnica.

Napomena: Aktivnost je pogodna za rad učenika u skupinama (npr. četveročlanim). Svaka skupina dobije svoj nastavni listić s nekoliko četverokuta kojima pokušavaju opisati kružnicu. Nakon što sve skupine završe s dobivenim zadatkom, u razrednoj se diskusiji komentiraju četverokuti iz svih skupina te se, generalizacijom pomoću nepotpune indukcije, dolazi do općeg zaključka.

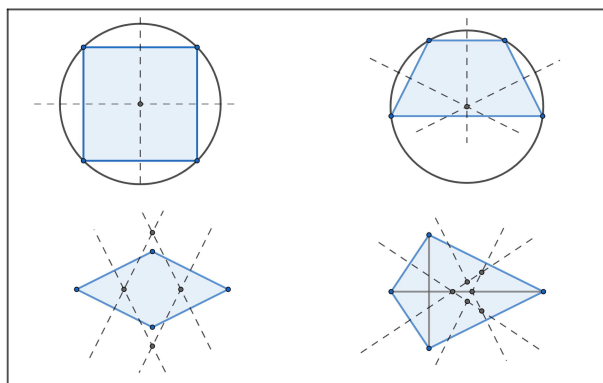
Primjer zadatka kojeg možemo zadati jednoj skupini učenika:

Zadatak: Prisjetite se kako konstruiramo trokutu opisanu kružnicu. Po uzoru na taj postupak pokušajte konstruirati opisane kružnice sljedećih četverokuta (Slika 6.5):



Slika 6.5: Primjer zadatka kojeg možemo zadati jednoj skupini učenika

Diskusija i rješenje: S učenicima diskutiramo kakve su sve četverokute imali zadane te jesmo li svima mogli opisati kružnicu. Učenike navodimo na zaključak da se kružnica



Slika 6.6: Rješenje zadatka za jednu skupinu učenika

može opisati samo onim četverokutima kojima se simetrale stranica sijeku u jednoj točki. Komentiramo da su stranice četverokuta kojem smo opisali kružnicu ujedno i tetive te kružnice te da stoga takve četverokute nazivamo tetivnim.

Rješenje zadatka sa Slike 6.5 nalazi se na Slici 6.6.

Aktivnost – Teorem o tetivnom četverokutu

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da je zbroj veličina dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta jednak 180° .

1. Izmjerite veličine unutarnjih kutova tetivnog četverokuta te zapišite potrebne podatke u tablicu.

	Četverokut A	Četverokut B	Četverokut C	Četverokut D
α				
β				
γ				
δ				

2. Izračunajte zbrojeve veličina svih parova unutarnjih kutova tetivnog četverokuta. Uočavate li neku pravilnost? Zapišite svoja opažanja.

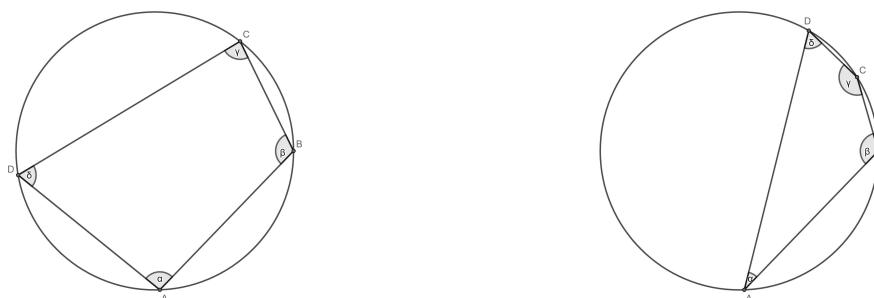
	Četverokut A	Četverokut B	Četverokut C	Četverokut D
$\alpha + \beta$				
$\alpha + \gamma$				
$\alpha + \delta$				
$\beta + \gamma$				
$\beta + \delta$				
$\gamma + \delta$				

Slika 6.7: Nastavni listić

Učenici dobivaju zadatak izmjeriti unutarnje kutove tetivnog četverokuta te popuniti tablicu traženim podacima. Učenike možemo podijeliti u skupine i svakoj skupini dati nastavni listić s nekoliko primjera tetivnih četverokuta. Aktivnost se može organizirati i u obliku radnih centara tako da podijelimo učenike u nekoliko jednakobrojnih skupina te svaka skupina dobije nastavni listić s jednim tetivnim četverokutom kojeg mjere veličine unutarnjih kutova. Nakon nekoliko minuta, kada svi dovrše zadatak, skupine međusobno zamijene listiće te mjere kutove sljedećeg tetivnog četverokuta i tako sve dok svaka skupina ne dobije sve listiće.



Slika 6.8: Četverokuti A i B



Slika 6.9: Četverokuti C i D

Napomena: Broj varijanti listića jednak je broju skupina učenika. Na Slici 6.7 nalaze se zadaci s nastavnog listića kojeg dobiva svaki učenik, a na Slikama 6.8 i 6.9 su primjeri tetivnih četverokuta koje dobivaju učenici u radnim centrima.

Zadatak:

1. Izmjerite veličine unutarnjih kutova tetivnog četverokuta te zapišite potrebne podatke u tablicu.
2. Izračunajte zbrojeve veličina svih parova unutarnjih kutova tetivnog četverokuta. Uočavate li neku pravilnost? Zapišite svoja opažanja.

Diskusija i rješenje: Učenici trebaju zaključiti da postoje određene pravilnosti u popunjennoj tablici, odnosno da su nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta suplementarni. Riješen nastavni listić nalazi se na Slici 6.10.

1. Izmjerite veličine unutarnjih kutova tetivnog četverokuta te zapišite potrebne podatke u tablicu.

	Četverokut A	Četverokut B	Četverokut C	Četverokut D
α	65°	80°	95°	30°
β	105°	90°	110°	120°
γ	115°	100°	85°	150°
δ	75°	90°	70°	60°

2. Izračunajte zbrojeve veličina svih parova unutarnjih kutova tetivnog četverokuta. Uočavate li neku pravilnost? Zapišite svoja opažanja.

	Četverokut A	Četverokut B	Četverokut C	Četverokut D
$\alpha + \beta$	170°	170°	205°	150°
$\alpha + \gamma$	180°	180°	180°	180°
$\alpha + \delta$	140°	170°	165°	90°
$\beta + \gamma$	220°	190°	195°	270°
$\beta + \delta$	180°	180°	180°	180°
$\gamma + \delta$	190°	190°	155°	210°

Slika 6.10: Riješen nastavni listić

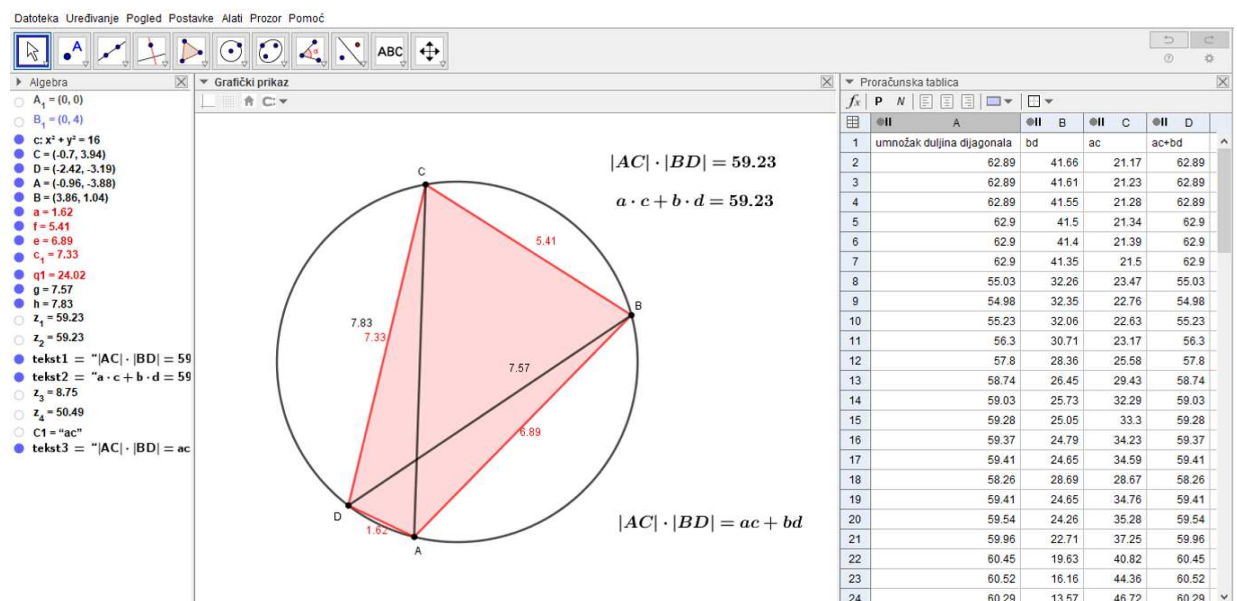
Aktivnost – Ptolemejev teorem

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti Ptolemejev teorem.

Učenici u alatu dinamične geometrije mijenjaju duljine stranica četverokuta te ih mjere kao i duljine dijagonala četverokuta. Računaju umnožak duljina dijagonala te zbroj umnožaka duljina nasuprotnih stranica te zaključuju da su te vrijednosti jednake.

Zadatak: U alatu dinamične geometrije mijenjajte dimenzije tetivnog četverokuta pomičući rubne točke te zapišite duljine stranica i duljine dijagonala tog četverokuta u tablicu. Zatim izračunajte umnožak duljina dijagonala te umnožak duljina nasuprotnih stranica. Što uočavate?

Diskusija i rješenje: S učenicima komentiramo njihove zaključke te pitamo vrijede li ti zaključci u svim slučajevima. Učenici trebaju zaključiti da je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.



Slika 6.11: Primjer rješenja zadatka u alatu dinamične geometrije

Bibliografija

- [1] Altshiller-Court, N.: *College geometry*. The American Mathematical Monthly, 31(5):232–235, 1924.
- [2] Amarasinghe, I.S.: *A Concise Elementary Proof for the Ptolemy's Theorem*. Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries(G.J.A.R.C.M.G), 02:20 – 25, 2013.
- [3] Brilliant.org: *Alternate Segment Theorem*. listopad 2023. <https://brilliant.org/wiki/alternate-segment-theorem-2/>.
- [4] Brilliant.org: *Brahmagupta's Formula*. rujan 2023. <https://brilliant.org/wiki/brahmaguptas-fomula/>.
- [5] Brilliant.org: *Bretschneider's Formula*. rujan 2023. <https://brilliant.org/wiki/bretschneiders-formula/>.
- [6] Brückler, M.: *Povijest matematike*. 2022. https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/skripta.pdf.
- [7] Chaitanya's random pages: *A collection of proofs of Ptolemy's theorem*. 2015. <https://ckrao.wordpress.com/2015/05/24/a-collection-of-proofs-of-ptolemys-theorem/>.
- [8] Chomsky, N.: *Apollonian circles*. 2021. <http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Apollonian.pdf>.
- [9] Cut The Knot: *Angle Bisector Theorem*, listopad 2023. <https://www.cut-the-knot.org/triangle/AngleBisectorTheorem.shtml>.
- [10] Cut The Knot: *External Angle Bisectors*, listopad 2023. <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ExternalAngleBisector.shtml>.

- [11] Grbac, I.: *Karakteristične točke i pravci četverokuta*. rujan 2015. <https://repozitorij.pmf.unizg.hr/en/islandora/object/pmf:5324>.
- [12] Hajja, M. Sondow, J.: *Newton Quadrilaterals, the Associated Cubic Equations, and Their Rational Solutions*. The American Mathematical Monthly, 126(2):135 – 150, veljača 2019. <https://www.jstor.org/stable/48662469>.
- [13] Josefsson, M.: *Calculations Concerning the Tangent Lengths and Tangency Chords of a Tangential Quadrilate*. Forum Geometricorum, 10:119–130, 2010.
- [14] Josefsson, M.: *Characterizations of Bicentric Quadrilaterals*. Forum Geometricorum, 10:165–173, 2010.
- [15] Josefsson, M.: *Characterizations of Orthodiagonal Quadrilaterals*. Forum Geometricorum, 12:13–25, 2012.
- [16] Josefsson, M.: *Characterizations of Cyclic Quadrilaterals*. International Journal of Geometry, 8(1):5–21, 2019.
- [17] Josefsson, M.: *More Characterizations of Cyclic Quadrilaterals*. International Journal of Geometry, 8(2):14–32, 2019.
- [18] Joyce, D.E.: *Euclid's Elements*. studeni 2023. <https://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII21.html>.
- [19] Van Truong, P.N., L.Đ. Khanh i B.H.Đ. Quang: *About the Harmonic Quadrilateral*. 2012. <https://www.dynamicmathematicslearning.com/Truong-et%20al-Harmonic-Quadrilateral.pdf>.

Sažetak

U ovom diplomskom radu navedene su brojne karakterizacije i svojstva tetivnih četverokuta te aktivnosti za učenike kojima se otkrivaju neke od njih u nastavi matematike. Na početku rada navedena je definicija tetivnog četverokuta zajedno s iskazima i dokazima njegovih općepoznatih karakterizacija. Dokazali smo da je kut između stranice i dijagonale tetivnog četverokuta jednak kutu između nasuprotne stranice i druge dijagonale. Također, pokazali smo da se simetrale stranica konveksnog četverokuta sijeku u jednoj točki ako i samo ako je četverokut tetivan. U drugom poglavlju predstavljene su karakterizacije tetivnih četverokuta koje nisu uobičajene u literaturi. Primjer takvog teorema je: „Zbroj kosinusa nasuprotnih unutarnjih kutova četverokuta jednak je nuli ako i samo ako je četverokut tetivan.” U trećem poglavlju u fokusu je Ptolemejev teorem za kojeg su navedena tri planimetrijska dokaza. U četvrtom poglavlju analizirana je Brahmaguptina formula koja predstavlja poopćenje Heronove formule na tetivne četverokute. Pretposljednje poglavlje donosi pregled specijalnih slučajeva tetivnih četverokuta. U radu su navedena svojstva tetivnih četverokuta kojima je umnožak duljina nasuprotnih stranica jednak, tetivnih četverokuta kojim se može upisati kružnica, zatim tetivnih četverokuta s okomitim dijagonalama te Newtonovih četverokuta. U zadnjem poglavlju navedene su istraživačke aktivnosti za učenike koje se mogu iskoristiti u nastavi matematike s ciljem otkrivanja tetivnih četverokuta i njihovih svojstava.

Summary

This thesis presents numerous characterizations and properties of cyclic quadrilaterals, as well as activities for students to explore some of them in math classes. The thesis begins with the definition of a cyclic quadrilateral, along with statements and proofs of its well-known characterizations. We have proven that the angle between a side and a diagonal of a cyclic quadrilateral is equal to the angle between the opposite side and the other diagonal. Additionally, we have shown that the four perpendicular bisectors to the sides of a convex quadrilateral are concurrent if and only if the quadrilateral is cyclic. The second chapter presents characterizations of cyclic quadrilaterals that are not commonly found in literature. An example of such a theorem is: „The sum of the cosines of opposite interior angles of a quadrilateral is zero if and only if the quadrilateral is cyclic.” The third chapter focuses on Ptolemy’s theorem, for which three planimetric proofs are provided. The fourth chapter analyzes Brahmagupta’s formula, which generalizes Heron’s formula for cyclic quadrilaterals. The penultimate chapter provides an overview of special cases of cyclic quadrilaterals. The thesis includes properties of cyclic quadrilaterals with equal product of opposite sides, cyclic quadrilaterals that can be inscribed in a circle, as well as cyclic quadrilaterals with perpendicular diagonals and Newton’s quadrilaterals. The final chapter presents research activities for students that can be used in math classes to discover cyclic quadrilaterals and their properties.

Životopis

Rođen sam 8. rujna 1998. u Bjelovaru. Završio sam IV. osnovnu školu u istome gradu, a zatim sam pohađao Gimnaziju Bjelovar, prirodoslovno-matematički smjer. Obrazovanje sam nastavio 2017. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Prijediplomski studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu završio sam 2021. godine. Te godine upisao sam diplomski studij Matematika; smjer: nastavnički na istome fakultetu. Tijekom studija radio sam nekoliko poslova preko studentskog ugovora i sudjelovao u raznim radionicama za učenike i nastavnike kao što je radionica „Metode rješavanja matematičkih problema” za učitelje razredne nastave Osnovne škole Augusta Šenoae održane u Zagrebu 2023. godine. Održavao sam demonstrature iz kolegija Teorija brojeva i Kompleksna analiza na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Dobitnik sam nagrade za najuspješnije studente završnih godina svih preddiplomskih, diplomskih i integriranih studija Prirodoslovno-matematičkog fakulteta.