Razvoj pojma površine u osnovnoj i srednjoj školi

Weitzer, Eva

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Eva Weitzer

RAZVOJ POJMA POVRŠINE U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Voditelj rada:

Eva Špalj, prof.

Zagreb, studeni, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom

u sastavu:

1. ________________________________, predsjednik

2. ________________________________, član

3. ________________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ___________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ________________________________

2. ________________________________

3. ________________________________

HVALA, mojoj mentorici, profesorici Evi Špalj te mojoj obitelji i prijateljima!

Sadržaj

Uvod

Matematika je nastala iz praktičnih potreba čovjeka kao što su mjeriteljstvo, građevinarstvo, trgovina i porezi. To saznajemo proučavajući staroegipatsku i starogrčku matematiku te ma – tematiku na području Mezopotamije gdje su zapravo bili začeci geometrije koja je jedna od najstarijih matematičkih disciplina (prema [1]). Naziv te discipline je nastao iz dviju grčkih riječi *geo* (zemlja) i *metria* (mjerenje) te bi u doslovnom prijevodu značio *zemljomjerstvo.* U današnjem smislu, geometrija je matematička disciplina koja proučava oblike u ravnini i prostoru te njihova svojstva i odnose.

Geometrijsko znanje je potrebno i suvremenom čovjeku u raznim praktičnim primjenama kao što je računanje površine raznih objekata. Zato je pojam površine uvršten u Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj ([6]). Koncept površine se uvodi i izgrađuje postepeno u školi počevši od četvrtog razreda osnovne škole pa nadalje. Dakle, učenici se bave površinom u devet razreda škole, a ipak na kraju obrazovanja velika većina ne zna izračunati površinu pravokutnika, trokuta i kruga. Primje – rice, većini učenika je teško izračunati površinu poda ili zida neke prostorije i izračunati koliko im je keramičkih pločica potrebno za popločavanje istih. Cilj ovog rada je dati konkretne praktične aktivnosti i pristupe u obradi pojma površine na način koji učenicima nije apstraktan, nego konkretan i razumljiv te ne rezultira samo proceduralnim, već i konceptualnim znanjem. Proceduralno znanje definira se kao niz koraka potrebnih za rješavanje problema, a uključuje vještine, algoritme ili strategije, dok je konceptualno znanje razumijevanje koncepata i pravila koja određuju neko područje i odnosa među njima (prema [5]).

U prvom poglavlju ovog rada dane su aksiomatske definicije pojma mjere i površine te dokazi formula za izračunavanje površine pravokutnika, paralelograma i trokuta. U sljedećem po – glavlju su opisani ishodi učenja nacionalnog matematičkog kurikuluma vezanih za koncept površine. Preciznije, opisano je koji su sadržaji vezani za površinu predviđeni za učenje u pojedinim razredima i na koji način. U posljednjem poglavlju izložene su razne aktivnosti za otkrivanje pojma površine i formula za izračunavanje površina likova s naglaskom na gradivo osnovnoškolskih razreda, jer se tu postavljaju temelji za razvoj spomenutog koncepta. Osim toga, naglasak je na gradivu četvrtog razreda srednje škole vezanog za površinu, a to je pojam integrala. Prikazane aktivnosti su raznolike te se njeguju razni pristupi u obradi kao što su individualni praktični rad učenika ili rad u parovima ili skupinama pomoću nastavnih listića, upotreba alata dinamične geometrije te frontalni rad.

Poglavlje 1

Funkcija površine

1.1 Mjera

Sljedeće potpoglavlje je pisano prema knjizi [4]. U osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj nastavi matematike učenici uče kako izračunati duljinu jednostavnijih podskupova od $\mathbb{R}$, površinu jednostavnijih podskupova od $\mathbb{R}^2$ i volumen jednostavnijih podskupova od $\mathbb{R}^3$. Teorija mjere je grana matematike koja proučava pojmove kao što su duljina, površina i volumen u poopćenim oblicima to jest na složenijim skupovima. Te pojmove jednom riječju nazivamo mjera. U najopćenitijem slučaju, objekti mjerenja mogu biti elementi neke unaprijed zadane familije podskupova $\mathcal{A}$ od nepraznog skupa X. Ti objekti ne moraju biti samo matematički, već mogu biti iz svakodnevnog života kao što je trgovina, tržnica, fizika i slično. Svakom objektu $A \in \mathcal{A}$ se mjerenjem jednoznačno pridružuje vrijednost $\mu(A)$ koja primjerice može predstavljati cijenu, masu, temperaturu, duljinu, površinu i volumen objekta. Pritom vrijede neka svojstva koja ne ovise o izboru familije $\mathcal{A}$ niti mjere μ. (Jukić) U nastavku slijedi opis tih svojstava.

Uvedimo najprije pojmove algebre i σ-algebre skupova. Za skup X, familiju svih njegovih podskupova nazivamo partitivni skup od X i označavamo $\mathcal{P}(X)$.

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je algebra na skupu X ako vrijedi:*

1. *$X \in \mathcal{A}$.*
2. *Ako je $A \in \mathcal{A}$, onda $A^C \in \mathcal{A}$. (zatvorenost na komplement)*
3. *$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, onda je $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$. (zatvorenost na konačne unije)*

Uočimo da iz svojstava 1. i 2. slijedi da je familija $\mathcal{A}$ zatvorena i na konačne presjeke to jest za $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\cap_{i=1}^n A_i = \left(\cup_{i=1}^n A_i^C \in \mathcal{A}\right)^C \in \mathcal{A}$.

Algebra $\mathcal{A}$ je σ-algebra ako je zatvorena na prebrojive unije što je preciznije iskazano u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.1.2. *Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je σ - algebra na skupu X ako vrijedi:*

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. *Ako je $A \in \mathcal{A}$, onda $A^C \in \mathcal{A}$.*
3. $A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{A}$, *onda je* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Za uređen par $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je izmjeriv prostor, a svaki element od $\mathcal{A}$ zovemo izmjeriv skup.

Očito je svaka σ - algebra ujedno i algebra, no obrat ne mora vrijediti što je ilustrirano u sljedećem primjeru.

Primjer 1.1.3. *Neka je X beskonačan skup.*
Definirajmo $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A$ je konačan ili A^C je konačan$\}$. Pokažimo da je $\mathcal{A}$ algebra, ali nije σ - algebra na X.

Rješenje: Treba pokazati da vrijede svojstva 1. - 3. iz definicije 1.1.1.

1. Familija $\mathcal{A}$ sadrži skup X jer je $X^C = \emptyset$ konačan skup.
2. Neka je $A \in \mathcal{A}$. Treba pokazati da je tada i $A^C \in \mathcal{A}$. Razlikujemo dva slučaja. Prvo, ako je A konačan, tada je $\left(A^C\right)^C = A$ konačan pa je $A^C \in \mathcal{A}$. Drugo, ako A nije konačan, tada je A^C konačan pa mora vrijediti $A^C \in \mathcal{A}$. Dakle, familija $\mathcal{A}$ je zatvorena na komplementiranje.
3. Pokažimo da je familija $\mathcal{A}$ zatvorena i na konačne unije. Dovoljno je pokazati da je unija dvaju proizvoljnih skupova iz $\mathcal{A}$ opet skup iz $\mathcal{A}$. Neka su $A, B \in \mathcal{A}$. Razlikujemo dva slučaja. Prvi slučaj je da su skupovi A i B konačni. Tada je skup $A \cup B$ konačan, jer je unija konačnih skupova konačan skup, što povlači da je $A \cup B \in \mathcal{A}$. Drugi slučaj je da je barem jedan od skupova A^C i B^C konačan skup. Promotrimo skup $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. Očito je $A^C \cap B^C$ konačan skup pa jer je podskup konačnog skupa konačan skup slijedi da je $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Stoga je $\mathcal{A}$ algebra na X. Pokažimo da nije σ - algebra na X. Budući da je X beskonačan skup, postoji skup $Y = \{y_1, y_2, y_3 \ldots\} \subseteq X$ takav da je Y u bijekciji s $\mathbb{N}$. Definirajmo skupove $A_n = \{y_{2n}\}, n \in \mathbb{N}$ koji su konačni pa vrijedi $A_n \in \mathcal{A}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Promotrimo skup $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Očito je skup $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{y_2, y_4, y_6, \ldots\}$ beskonačan. Njegov komplement $\{y_1, y_3, y_5, \ldots\}$ je također beskonačan pa $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}$. Zaključujemo da familija $\mathcal{A}$ nije zatvorena na prebrojive unije pa nije σ - algebra. $\square$

Definicija 1.1.4. *Neka je $\mathcal{A}$ familija koja je σ - algebra na skupu X. Mjera na $\mathcal{A}$ je svako preslikavanje $\mu\colon \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\mu(A) \geq 0$ *za svaki* $A \in \mathcal{A}$, *(nenegativnost)*
2. $\mu(\emptyset) = 0$,
3. *za svaki niz* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *disjunktnih skupova iz* $\mathcal{A}$ *vrijedi* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. *(prebrojiva aditivnost)*

Za $\mu(A)$ *kaže se da je mjera skupa A.*

U sljedećem primjeru ćemo navesti jedno preslikavanje koje je mjera i jedno koje nije.

Primjer 1.1.5. *Neka je $\mathcal{A}$ bilo koja σ - algebra na skupu X.*

a) Funkcija $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ *definirana formulom*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \infty, & \text{ako je } A \neq \emptyset \end{cases}$$

je mjera.

b) Funkcija $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ *definirana formulom*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ 1, & \text{ako je } A \neq \emptyset \end{cases}$$

nije mjera.

Rješenje:

a) Treba pokazati da funkcija μ zadovoljava svojstva 1. - 3. iz definicije 1.1.4.

1. Očito je $\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ prema danoj definiciji te funkcije.
2. Očito je $\mu(\emptyset) = 0$ prema danoj definiciji promatrane funkcije.
3. Razlikujemo tri slučaja. Prvo, neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ i neka je $A_i \neq \emptyset$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je sigurno $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \emptyset$. Uočimo da je $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{A}$, jer je $\mathcal{A}$ prema pretpostavci σ - algebra pa je $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$. Očito je $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \infty$ pa zaključujemo da vrijedi $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
   Drugi slučaj je kada je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ i neka je $A_i = \emptyset$ za neki $i \in \mathbb{N}$. Tada je sigurno $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \emptyset$. Uočimo da je $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{A}$, jer je $\mathcal{A}$ prema

pretpostavci σ - algebra pa je $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$. Očito je $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \infty + 0 = \infty$ pa zaključujemo da vrijedi $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
Treći slučaj je kada je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz praznih skupova, što je trivijalno.

b) Dovoljno je pokazati da funkcija μ ne zadovoljava svojstvo 3. iz definicjje 1.1.4. Neka su A_1 i A_2 disjunktni skupovi iz $\mathcal{A}$ različiti od praznog skupa. Tada je $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$, jer je $\mathcal{A}$ prema pretpostavci σ - algebra. Zato je $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$, ali $\mu(A_1)+\mu(A_2) = 1+1 = 2$ pa $\mu(A_1 \cup A_2) \neq \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Zaključujemo da promatrana funkcija nije mjera, jer ne zadovoljava svojstvo prebrojive aditivnosti.

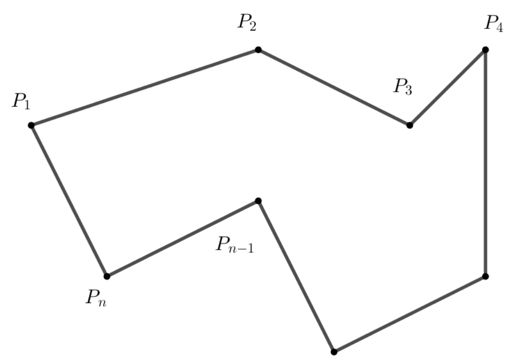
□

1.2 Površina poligona

U ovom poglavlju bavit ćemo se još jednim primjerom mjere, a to je funkcija površine. U tu svrhu uvodimo sljedeću definiciju poligona (prema [7]) te zbroja poligona prema (prema [10]).

Definicija 1.2.1. *Poligon P je uređeni niz točaka $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, n \geq 3$ koje zovemo vrhovima poligona P zajedno sa skupom dužina, koje zovemo rubovi. Rubovi spajaju vrhove P_i s $P_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1$ i vrh P_n s P_1.*

Sljedeća slika prikazuje poligon.



Slika 1.1

Definicija 1.2.2. *Neka su Π, Π_1 i Π_2 poligoni takvi da je $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ te da poligoni Π_1 i Π_2 nemaju zajedničkih unutarnjih točaka. Tada kažemo da je poligon Π zbroj poligona Π_1 i Π_2 i pišemo $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$.*

Definicije i teoremi koji slijede su preuzeti iz [6].

Definicija 1.2.3. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona u ravnini (uključujući $\emptyset$). Površina (ili ploština) p na skupu $\mathcal{P}$ je funkcija $p \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $p(\Pi) \geq 0, \forall \Pi \in \mathcal{P}$, *(aksiom pozitivnosti)*
2. $p(\Pi_1 + \Pi_2) = p(\Pi_1) + p(\Pi_2), \forall \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$, *(aksiom aditivnosti)*
3. *ako je* $\Pi_1 \cong \Pi_2$, *onda je* $p(\Pi_1) = p(\Pi_2)$, *(aksiom invarijantnosti)*
4. *postoji bar jedan kvadrat K sa stranicom 1 takav da je $p(K) = 1$.*
   (aksiom normiranosti)

Broj $p(\Pi)$ zovemo površina poligona Π.

Napomena 1.2.4. *Uočimo da je funkcija p monotono rastuća funkcija, to jest ako je $\Pi \subseteq \Pi'$, onda je $p(\Pi) \leq p(\Pi')$. Pogledajmo zašto to zbilja vrijedi.*
Ako je $\Pi \subseteq \Pi'$, onda postoje $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ takvi da je
$\Pi' = \Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_n$ pa zbog svojstva 2. iz definicije 1.2.3 vrijedi

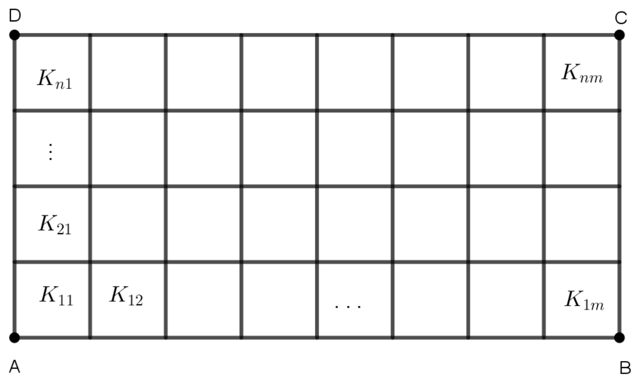
$$p(\Pi') = p(\Pi) + \sum_{i=1}^{n} p(\Pi_i)$$

Nadalje, zbog svojstva 1. iz definicije 1.2.3 zaključujemo da je $p(\Pi') \geq p(\Pi)$. Također, uočimo da je $p(\Pi) = p(\Pi + \emptyset) = p(\Pi) + p(\emptyset)$ pa slijedi da je $p(\emptyset) = 0$.

Sadržaj sljedećih teorema su formule za površinu pravokutnika, paralelograma i trokuta.

Teorem 1.2.5. *Ako je funkcija p površina i ako je $\Pi = ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| = a$ i $|BC| = b$, onda je $p(ABCD) = ab$.*

Dokaz:
Prvi slučaj: Neka su a i b prirodni brojevi to jest neka je $a = m$ i $b = n$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$. Podijelimo pravokutnik $ABCD$ na jedinične kvadrate $K_{ij}, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ kao na slici 1.2.



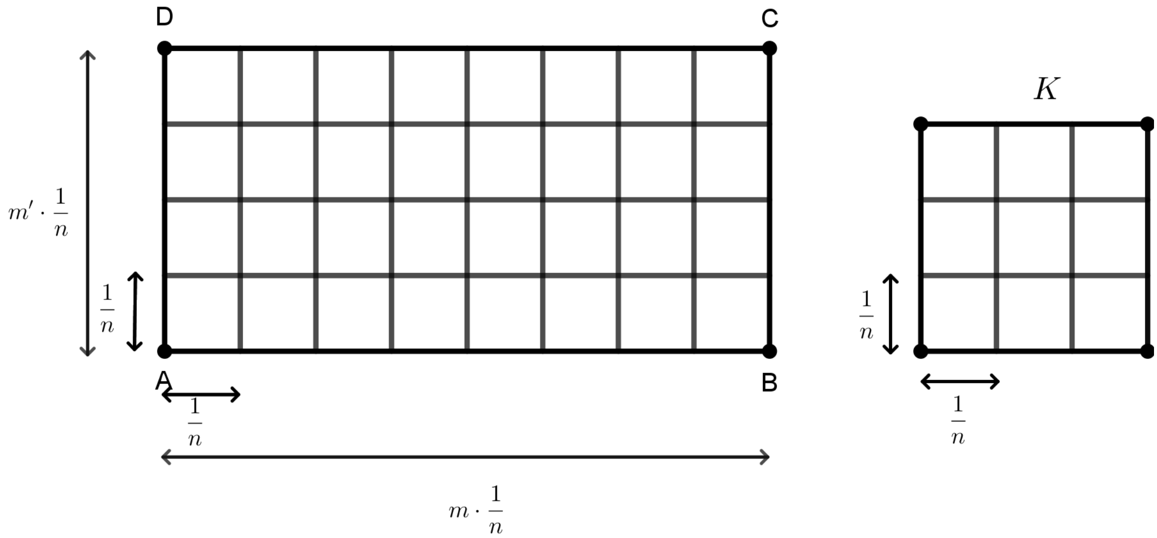
Slika 1.2

Uočimo da su svi ti kvadrati $K_{ij}, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ međusobno sukladni i površine 1. Koristeći svojstvo 2. iz definicije 1.2.3 dobivamo:

$$\begin{aligned} p\,(ABCD) &= p\,(K_{11} + K_{12} + \ldots + K_{1m} + K_{2,1} + K_{22} + \ldots + K_{2m} + \ldots + K_{nm}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p\left(K_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} 1 \\ &= mn \\ &= ab \end{aligned}$$

pa je u ovom slučaju teorem dokazan.

Drugi slučaj: Neka su a i b pozitivni racionalni brojevi. Tada je uvijek moguće postići da je $a = \frac{m}{n}$ i $b = \frac{m'}{n}$ gdje su $m, m', n \in \mathbb{N}$. Neka je K kvadrat sa stranicom duljine 1. Podijelimo svaku stranicu tog kvadrata i pravokutnika $ABCD$ na dijelove duljine $\frac{1}{n}$. Uočimo da na svakoj stranici kvadrata ima po n takvih dijelova, nad stranicama AB i CD pravokutnika $ABCD$ ima m takvih dijelova te nad stranicama BC i AD ima m' takvih dijelova. Povucimo diobenim točkama paralele sa pravcima kojima pripadaju stranice kvadrata K i pravokutnika $ABCD$ kao na slici 1.3.



Slika 1.3

Dobivamo da je kvadrat K zbroj od n^2 kvadrata stranice duljine $\frac{1}{n}$, a pravokutnik $ABCD$ zbroj od mm' kvadrata stranice duljine $\frac{1}{n}$. Svi kvadrati stranice duljine $\frac{1}{n}$ su međusobno sukladni pa iz svojstva 3. definicije 1.2.3 slijedi da imaju jednake površine. Neka je K_n jedan od tih kvadrata stranice duljine $\frac{1}{n}$. Prema svojstvu 2. definicije 1.2.3 dobivamo:

$$p(K) = n^2 p(K_n) \tag{1.1}$$

$$p(ABCD) = mm' p(K_n) \tag{1.2}$$

Prema svojstvu 4. iz 1.2.3 je $p(K) = 1$ pa iz jednakosti 1.1 slijedi $p(K_n) = \frac{1}{n^2}$. Sada iz jednakosti 1.2 dobivamo

$$p(ABCD) = \frac{mm'}{n^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n} = ab$$

što smo trebali pokazati.

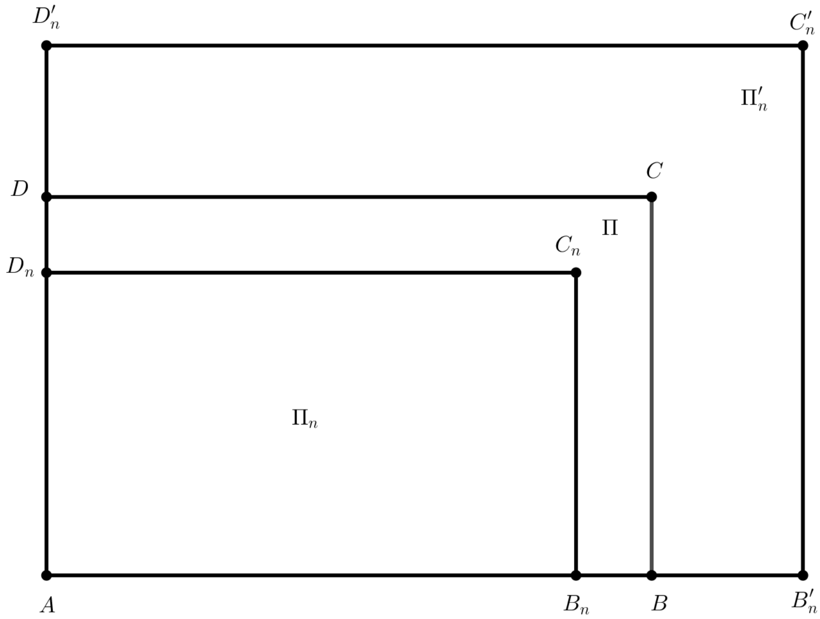
Treći slučaj: Neka su a i b bilo koja dva pozitivna realna broja. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\frac{a_n}{n} \leq a < \frac{a_n + 1}{n} \quad \text{i} \quad \frac{b_n}{n} \leq b < \frac{b_n + 1}{n}.$$

Iz tih nejednakosti slijedi da je

$$\frac{a_n b_n}{n^2} \leq ab < \frac{(a_n+1)(b_n+1)}{n^2}. \tag{1.3}$$

Neka je Π_n pravokutnik $AB_nC_nD_n$ sa stranicama duljine $\frac{a_n}{n}$ i $\frac{b_n}{n}$ i neka je Π'_n pravokutnik $AB'_nC'_nD'_n$ sa stranicama duljine $\frac{a_n+1}{n}$ i $\frac{b_n+1}{n}$, smješteni kao na slici 1.4.



Slika 1.4

Tada je $\Pi_n \subseteq \Pi \subset \Pi'_n$ pa zbog monotonosti funkcije p vrijedi

$$p(\Pi_n) \leq p(\Pi) < p(\Pi'_n). \tag{1.4}$$

Koristeći rezultate drugog slučaja ovog dokaza dobivamo da je

$$p(\Pi_n) = \frac{a_n b_n}{n^2}, \tag{1.5}$$

$$p(\Pi'_n) = \frac{(a_n+1)(b_n+1)}{n^2}. \tag{1.6}$$

Primjenjujući jednakosti 1.5 i 1.6 na nejednakosti 1.3 dobivamo da vrijedi

$$p(\Pi_n) \leq ab < p(\Pi'_n). \tag{1.7}$$

Iz 1.4 oduzimajući ab dobivamo

$$p(\Pi_n) - ab \leq p(\Pi) - ab < p(\Pi'_n) - ab \tag{1.8}$$

Manipulacijom lijeve nejednakosti u 1.7 dobivamo

$$\begin{aligned} p(\Pi_n) &\leq ab \Big/ \cdot (-1) \\ -p(\Pi_n) &\geq -ab \Big/ + p(\Pi'_n) \\ p(\Pi'_n) - p(\Pi_n) &\geq p(\Pi'_n) - ab \\ \Rightarrow p(\Pi) - ab &< p(\Pi'_n) - p(\Pi_n) \end{aligned}$$

Manipulacijom desne nejednakosti u 1.7 dobivamo

$$\begin{aligned} p(\Pi'_n) &> ab \Big/ \cdot (-1) \\ -p(\Pi'_n) &< -ab \Big/ + p(\Pi_n) \\ p(\Pi_n) - p(\Pi'_n) &< p(\Pi_n) - ab \\ \Rightarrow p(\Pi) - ab &> p(\Pi_n) - p(\Pi'_n) \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi

$$|p(\Pi) - ab| < p(\Pi'_n) - p(\Pi_n).$$

Uočimo da je ab aproksimacija broja $p(\Pi)$ s pogreškom aproksimacije manjom od

$$p(\Pi'_n) - p(\Pi_n) = \frac{a_n + b_n + 1}{n^2} \leq \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n}.$$

Sada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ odaberemo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{a+b}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada je $|p(\Pi) - ab| < \varepsilon$. Ali zadnja nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$ pa mora biti $p(\Pi) = ab$, što je trebalo i dokazati. □

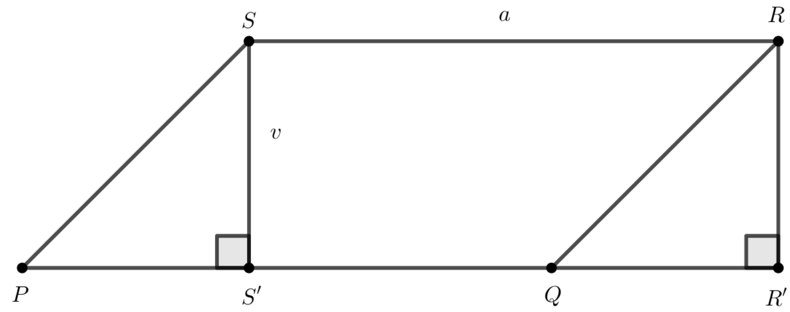
Teorem 1.2.6. *Neka je PQRS paralelogram sa stranicom duljine a i pripadnom visinom duljine v, a $\triangle ABC$ trokut sa stranicom duljine a i pripadnom visinom duljine v_a. Ako površina p postoji, onda je*

a) $p(PQRS) = av$;

b) $p(\triangle ABC) = \frac{1}{2}av_a$.

Dokaz:

a) Neka je $|PQ| = a$, $|RR'| = |SS'| = v$, gdje su $\overline{RR'}$ i $\overline{SS'}$ visine paralelograma $PQRS$ na stranicu $\overline{PQ}$, kao na slici 1.5.



Slika 1.5

Tada je $\measuredangle PS'S = \measuredangle QR'R = 90°$, a jer je PR' transverzala pravaca PS i QR vrijedi $\measuredangle SPS' = \measuredangle RQR'$. Primjenjujući svojstvo da je zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu jednak 180° na trokute $\triangle SPS'$ i $\triangle RQR'$ dobivamo da je $\measuredangle PSS' = \measuredangle QRR'$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned} \measuredangle PS'S &= \measuredangle QR'R \\ \measuredangle PSS' &= \measuredangle QRR' \\ |SS'| &= |RR'| \end{aligned}$$

pa su trokuti $\triangle SPS'$ i $\triangle RQR'$ sukladni po K-S-K poučku o sukladnosti trokuta. Primjenjujući svojstvo 3. iz definicije 1.2.3 dobivamo da vrijedi $p(\triangle SPS') = p(\triangle RQR')$. Uočimo da je četverokut $PR'RS$ jednak zbroju paralelograma $PQRS$ i trokuta $\triangle RQR''$, ali i zbroju pravokutnika $S'R'RS$ i trokuta $\triangle SPS'$. Koristeći svojstvo 2. iz definicije 1.2.3 dobivamo

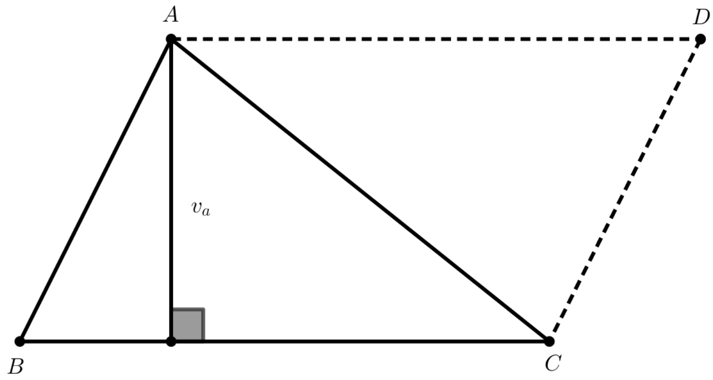
$$\begin{aligned} p(PR'RS) &= p(PQRS) + p(\triangle RQR') \\ p(PR'RS) &= p(S'R'RS) + p(SPS') \end{aligned}$$

Oduzimanjem posljednje dvije jednakosti i uvažavanjem $p(\triangle SPS') = p(\triangle RQR')$ dobivamo

$$p(PQRS) = p(S'R'RS)\,.$$

Nadalje, $S'R'RS$ je pravokutnik sa stranicama duljina a i v pa prema teoremu 1.2.5 vrijedi $p(PQRS) = av$.

b) Neka je $\triangle ABC$ trokut sa stranicom duljine a i pripadnom visinom v_a. Nadopunimo trokut $\triangle ABC$ do paralelograma $ABCD$ kao na slici 1.6.



Slika 1.6

Tada je prema a) dijelu ovog dokaza $p(ABCD) = av_a$. Uočimo da je paralelogram $ABCD$ zbroj trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ koji su sukladni po S-S-S poučku o sukladnosti trokuta. Koristeći svojstva 2. i 3 iz definicije 1.2.3 dobivamo

$$p(ABCD) = p(\triangle ABC + \triangle ACD) = p(\triangle ABC) + p(\triangle ACD) = 2p(\triangle ABC).$$

Uvažavajući da je $p(ABCD) = av_a$ zaključujemo da vrijedi $p(\triangle ABC) = \dfrac{1}{2}av_a$.

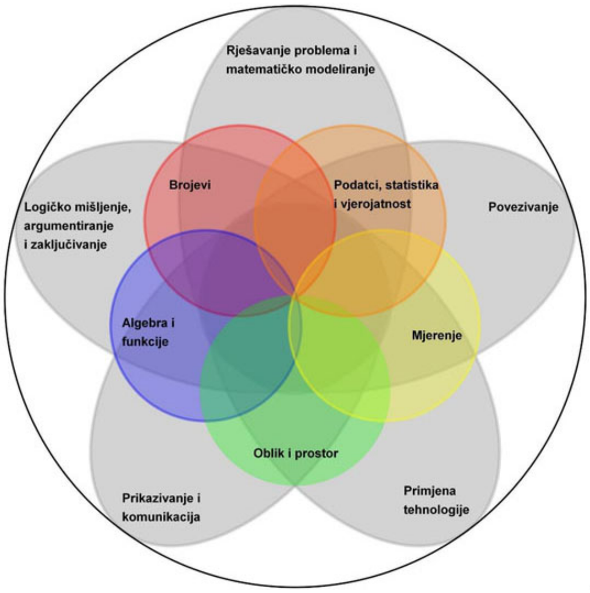
□

Poglavlje 2

Nacionalni matematički kurikulum

Pod pojmom nacionalni matematički kurikulum podrazumijeva se dokument Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj koji je objavljen 7.9.2019. u Narodnim novinama. On određuje svrhu i opis predmeta, odgojno - obrazovne ciljeve, ishode i sadržaje učenja i poučavanja predmeta, strukturu kurikuluma, povezanost s drugim predmetima te vrednovanje nastavnog predmeta Matematike u osnovnim školama i gimnazijam u Republici Hrvatskoj. U kurikulumu su istaknute dvije dimenzije matematičkog obrazovanja: matematički procesi i matematičke domene. Učenje i poučavanje matematike ostvaruje se povezivanjem tih dviju dimenzija. Matematički procesi su opće matematičke vještine i kompetencije koje se prožimaju kroz sve matematičke sadržaje. U kurikulumu, procesi su organizirani u pet skupina: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije. Matematičke domene su specifične matematičke kompetencije vezane uz matematičke sadržaje koji proizlaze iz velikih matematičkih ideja i koncepata. Srodni koncepti grupirani su u pet domena: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje te podaci statistika i vjerojatnost. Matematičke domene se neprestano razvijaju tijekom godina učenja matematike što se naziva vertikalna povezanost. Također, domene su međusobno povezane, usvojenost koncepata jedne domene je često potrebna za usvajanje koncepata druge domene. To se naziva horizontalna povezanost. Na slici 2.1 (preuzeto iz [6]) je prikazana međusobna povezanost i isprepletenost matematičkih procesa i domena. Pojam površine se nalazi u domeni mjerenje. On se u prva tri razreda osnovne škole ne obrađuje, ali učenici upoznaju geometrijske likove kao ravne plohe geometrijskih tijela. Jako je važno da učenici bojaju ili izrezuju geometrijske likove iz kolažnog papira kako bi doživjeli cijeli lik,a ne samo njegove stranice. Na taj način se izbjegavaju miskoncepcije te lakše shvaća pojam površine u sljedećim razredima. U nastavku poglavlja bit će prikazano u kojim razredima i na koji način se obrađuje pojam površine. Organizacija matematičkog kurikuluma nije jednaka u svim gimnazijama.

Ona ovisi o vrsti gimnazije, odnosno o godišnjem broju nastavnih sati matematike u pojedinom programu. Postoje gimnazije sa 105, 140, 175 ili 210 sati matematike godišnje. Jasno je da je kurikulumom predviđeno više obrazovnih ishoda što je veća godišnja satnica matematike.



Slika 2.1

2.1 Četvrti razred osnovne škole

Učenici u četvrtom razredu osnovne škole otkrivaju pojam ravnine te da su geometrijski likovi kvadrat, pravokutnik, trokut i krug djelovi ravnine. Uspoređuju površine tih likova prema veličini dijela ravnine koju zauzimaju te tako upoznaju pojam površine, dakle ne koriste se formulama. Geometrijski likovi se smještaju u kvadratnu mrežu te učenici mjere njihovu površinu prebrojavajući jedinične kvadrate (nije bitna duljina stranice), a zatim ucrtavaju geometrijske likove zadanih površina u kvadratnu mrežu. Učenici upoznaju mjerne jedinice za površinu i njihove oznake: centimetar kvadratni (cm^2), decimetar kvadratni (dm^2) i metar kvadratni (m^2). To su redom jedinični kvadrati duljine stranica 1 cm, 1 dm i 1 m. Poželjno je izraditi od papira te jedinične kvadrate kako bi učenici stekli osjećaj njihove veličine, što je korisno u zadacima u kojima treba procjeniti veličine. U proširenom sadžaju kurikuluma, predviđeno je preračunavanje mjernih jedinica za površinu.

2.2 Peti razred osnovne škole

Učenici u petom razredu osnovne škole otkrivaju, obrazlažu i primjenjuju formule za površinu pravokutnika i kvadrata. Formulu za površinu pravokutnika otkrivaju tako što računaju površinu danih pravokutnika smještenih u kvadratnu mrežu prebrojavanjem jediničnih kvadrata koji ih prekrivaju. Zatim mjere duljine stranica danih pravokutnika i uočavaju vezu umnoška duljina stranica i izmjerenih površina. Formulu za površinu kvadrata otkrivaju uvažavajući da je kvadrat specijalni slučaj pravokutnika. Zatim se uvode mjerne jedinice za površinu i njihove oznake slično kao u četvrtom razredu, ali bez preračunavanja (milimetar kvadratni, centimetar kvadratni, decimetar kvadratni, metar kvadratni i kilometar kvadratni). Za prikaz jednog milimetra kvadratnog, prigodan je milimetarski papir. Nadalje, učenici povezuju umnožak dvaju jednakih brojeva s pojmom kvadrata broja i mjernom jedinicom za površinu. Vrlo je važno da učenici procijene površinu zadanog lika prije samog računanja, da rješavaju zadatke povezane s okolinom i računaju površine likova koje mogu podijeliti na površine pravokutnika kojima znaju dimenzije.

2.3 Šesti razred osnovne škole

U razredima koji prethode šestom razredu, učenici su naučili prepoznati i opisati trokut, prepoznati pravokutni trokut, razlikovati trokute s obzirom na stranice te mu odrediti opseg. U šestom razredu, učenici otkrivaju i opisuju kako izračunati površinu trokuta. Prvo to otkrivaju za pravokutni trokut, nadopunjavajući pravokutni trokut do pravokutnika kojem već znaju izračunati površinu te lako određuju formulu za površinu pravokutnog trokuta. Zatim određuju formulu za površinu nekog općeg trokuta, dijeleći trokut visinom na dva pravokutna trokuta, nadopunjavajući ih do pravokutnika pa slično dolaze do tražene formule. U šestom razredu, učenici otkrivaju i formulu za površinu paralelograma. To čine rezanjem trokuta koji je nastao povlačenjem jedne visine paralelograma na osnovicu i nadopunjavanjem ostatka paralelograma tim trokutom do pravokutnika. Alternativno, dijele paralelogram dijagonalom na dva trokuta kojima znaju izračunati površine pa lako otkrivaju željenu formulu. U udžbenicima se pojavljuju zadaci određivanja površine romba. Učenici znaju da je romb paralelogram pa površinu romba određuju kao površinu paralelograma. Kurikulumom je, u proširenom sadržaju, predviđeno određivanje površine trapeza i deltoida. Površinu trapeza otkrivaju sličnim načinom kao površinu paralelograma. Također, predviđeno je da učenici određuju površine raznih likova sastavljenih od osnovnih geometrijskih likova. Na primjer, površinu deltoida mogu odrediti dijeleći ga na dva trokuta kojima znaju odrediti površinu. Nadalje, učenici trebaju naučiti preračunavati mjerne jedinice za površinu (mm^2, cm^2, dm^2, m^2, km^2). Poželjno je da učenici to nauče na praktičnim modelima, kao što su milimetarski papir i hamer papir, prebrojavajući odgovarajući broj nacrtanih jediničnih kvadrata.

2.4 Sedmi razred osnovne škole

Učenici u sedmom razredu osnovne škole opisuju i računaju površinu pravilnih i nepravilnih mnogokuta. Formulu za površinu pravilnih mnogokuta otkrivaju uspoređujući površinu karakterističnog trokuta i danog mnogokuta. Površine nepravilnih mnogokuta računaju određujući površine poznatih likova od kojih je dani mnogokut sastavljen. Nadalje, učenici istražuju i računaju površinu kruga i njegovih dijelova. Formulu za površinu kruga otkrivaju dijeleći krug na sve veći broj sukladnih kružnih isječaka, preslagujući ih u oblik koji nalikuje paralelogramu dimenzija $r\pi$ i r, gdje je r radijus promatranog kruga. Budući da već znaju računati površinu paralelograma, lako određuju formulu za površinu kruga. Sljedeće otkrivaju formulu za površinu kružnog isječka primjenom proporcionalnosti. Preciznije, učenici istražuju i uočavaju da su površina kružnog isječka i pripadnog središnjeg kuta proporcionalne veličine te uočavaju da središnjem kutu veličine 1° odgovara kružni isječak površine $\frac{r^2\pi}{360}$. Generalizacijom pomoću nepotpune indukcije zaključuju da je formula za površinu kružnog isječka s pripadnim središnjim kutem α dana s $r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$. Nadalje, učenici određuju površinu kružnog vijenca oduzimajući površinu pripadnog manjeg kruga od površine pripadnog većeg kruga. Preporuka za ostvarivanje navedenih ishoda je da se provjerava učeničko logičko razmišljanje i sposobnost analize problema, a ne tehnika računanja.

2.5 Osmi razred osnovne škole

Učenici u osmom razredu otkrivaju Pitagorin poučak te ga primjenjuju u zadacima računanja površine pravokutnog trokuta, kvadrata, pravokutnika, jednakostraničnog i jednakokračnog trokuta te romba. Usto, primjenjuju do sada naučene formule za računanje površine osnovnih geometrijskih likova pri računanju oplošja geometrijskih tijela.

2.6 Prvi razred gimnazije

Učenici otkrivaju pojam sličnih trokuta i koeficijent sličnosti. Primjenjujući naučeno određuju da je omjer površina sličnih trokuta jednak kvadratu njihovog koeficijenta sličnosti. Zatim otkrivaju i primjenjuju Heronovu formulu za površinu trokuta. Nadalje, učenici otkrivaju Euklidov poučak u pravokutnom trokutu te ga primjenjuju u zadacima određivanja površine pravokutnog trokuta. Bilo bi dobro da učenici spomenuto prvo naslute promatrajući materijale pripremljene u alatu dinamične geometrije, a zatim provedu formalne dokaze. Heronovu formulu mogu dokazati primjenom Pitagorinog poučka, a u sljedećem razredu pomoću kosinusovog poučka. Euklidov poučak dokazuju primjenom sličnosti trokuta. U ovom razredu, učenici otkrivaju četiri karakteristične točke trokuta te u gimnazijama sa 140 ili više sati matematike godišnje otkrivaju formule za površinu trokuta sa zadanim polumjerom opisane ili upisane kružnice. Također, učenici u ovom razredu otkrivaju trigonometrijske omjere i pomoću njih određuju nepoznate stranice likova (trokuta, kvadrata, pravokutnika, paralelograma, romba, trapeza, pravilnih mnogokuta, deltoida) kako bi pomoću poznatih formula izračunali površine. U ovom razredu se ne izvode eksplicitne formule za površinu trokuta izražene pomoću trigonometrijskih funkcija kutova u trokutu.

2.7 Drugi razred gimnazije

Učenici se prisjećaju formule za površinu kružnog isječka koju su otkrili u sedmom razredu osnovne škole. U gimnazijama s više od 105 sati matematike godišnje, koriste tu formulu i formulu za površinu trokuta kako bi odredili površinu kružnog odsječka. U drugom razredu gimnazije, učenici otkrivaju poučke o sinusima i kosinusu te ih primjenjuju za računanje površine proizvoljnog trokuta u raznim zadacima. Također, pomoću trigonometrijskih omjera izraze visinu trokuta i dobivaju da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljina dviju stranica trokuta i sinusa kuta između njih. Osim toga, pomoću kosinusovog poučka dokazuju Heronovu formulu za površinu trokuta, a pomoću poučka o sinusima formulu za površinu trokuta izraženu pomoću radijusa opisane kružnice. Na kraju, računanje površine likova pomoću trigonometrije primjenjuju u stereometriji, točnije pri računanju oplošja raznih geometrijskih tijela.

2.8 Treći razred gimnazije

U trećem razredu gimnazije se ne obrađuje pojam površine u smislu uvođenja novih formula, koncepata i proširenja znanja.Jedino se, u gimnazijama s 210 sati matematike, vektorski umnožak geometrijski interpretira kao površina paralelograma kojeg razapinju.
Međutim, dosada naučeni načini izračunavanja površine se primjenjuju u zadacima ostalih domena kurikuluma. Primjeri takvih zadataka su dani u nastavku (preuzeti iz [7]).

Primjer 1. Zadan je pravokutni trokut kojem su katete na pravcima $x = 5$ i $y = 3$. Odredi koordinate vrhova tog trokuta i njegovu površinu, ako hipotenuza leži na simetrali II. i IV. kvadranta.

Primjer 2. Odredi površinu kvadrata kojem jedan vrh ima koordinate $D(-3, 2)$, a stranica AB leži mu na pravcu $x - 2y = 4$.

Primjer 3. Odredi jednadžbu normale i tangente kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ u njenoj točki $D(2, 1)$. Odredi i površinu trokuta kojeg tangenta i normala određuju s osi ordinata.

Primjer 4. U elipsu $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ upisan je pravokutnik tako da mu dvije nasuprotne stranice sadrže žarišta elipse. Izračunaj površinu tog pravokutnika.

Primjer 5. Zadana je hiperbola $3x^2 - y^2 = 12$ i parabola $y = 16x^2$. Odredi jednadžbe njigovih zajedničkih tangenti. Izračunaj površinu trapeza čiji su vrhovi točke dodira tih tangenti.

2.9 Četvrti razred gimnazije

U četvrtom razredu gimnazije s više sati matematike godišnje, učenici izračunavaju površinu ispod grafa jednostavnih funkcija rabeći Newton - Leibnizovu formulu i tablicu neodređenih integrala. U ostalim gimnazijama to je predviđeno kao izborni ishod. Slično kao i u prethodnom razredu, dosadašnje formule za površinu geometrijskih likova primjenjuju se i u zadacima iz drugih matematičkih područja. Primjeri takvi zadataka slijede u nastavku. (preuzeto iz [2]).

Primjer 1. U pravilan šesterokut stranice 10 cm upisan je krug, u krug pravilan šesterokut, u šesterokut opet krug... Odredi površinu svih šesterokuta.

Primjer 2. U pravokutni trokut s katetama duljina 10 cm i 8 cm upisan je pravokutnik. Odredi dimenzije pravokutnika tako da njegova površina bude maksimalna.

Primjer 3. Dvije staze u parku imaju oblik krivulja $y = -x^2 + 2x + 2$ i $y = 2x^2 - 4x + 2$. Kolika je površina omeđena tim stazama?

Poglavlje 3
Aktivnosti otkrivanja pojma površine i formula

Slušajući iskustva nastavnika matematike u osnovnoj i srednjoj školi, čest je slučaj da učenici bez razmišljanja kažu da je površina trokuta jednaka $a \cdot b$ (što su a i b ne znaju) ili da uopće ne znaju izračunati površinu kvadrata te pravokutnika. Smatram da je to rezultat konceptu – alnog ne razumijevanja pojma površine te učenja napamet formula za izračunavanje površine pojedinih likova. Nadalje, prosječni rezultati (prema [8.]) nacionalnih ispita iz Matematike provedenih u osnovnoj školi za školsku godinu 2022. / 2023. nisu dobri. Nacionalni ispit iz Matematike za osmi razred osnovne škole sadrži ukupno 35 zadataka, od čega 25 % zadataka pripada domeni mjerenje. Najviše učenika osmih razreda je ispit iz matematike napisalo za ocjenu dva i tri. Ocjenu dva je dobilo 39.2 % učenika, a ocjenu tri 31.4 % učenika. Za ocjenu vrlo dobar napisalo je 15.9 % učenika, odlično ga je napisalo samo 4.9 %, a za ocjenu ne – dovoljan čak 8.6 % učenika. Učenici četvrtog razreda osnovne škole su također pisali nacio – nalni ispit iz Matematike, ali se u njemu nije provjeravala ostvarenost ishoda uspoređivanja i mjerenja površine likova.

U nastavku ovog poglavlja je dan niz aktivnosti uvođenja pojma površine, otkrivanja i kon – ceptualnog razumijevanja formula za površine likova u osnovnoj i srednjoj školi. Većina aktivnosti je inspirirana seminarom [3] i knjigom [9]. U nekim aktivnostima su nastavni listići odmah popunjeni očekivanim učeničkim odgovorima te su istaknuti crvenim nakošenim slovima. Međutim, u nekim aktivnostima je radi boljeg razumijevanja prvo naveden neispu – njen nastavni listić, a zatim listić popunjen odgovorima.

Aktivnost 1: Procijenimo i razvrstajmo!

Cilj aktivnosti: Učenici će razvrstati objekte prikazane na slici po površini i uočiti potrebu za procjenom površine objekta.

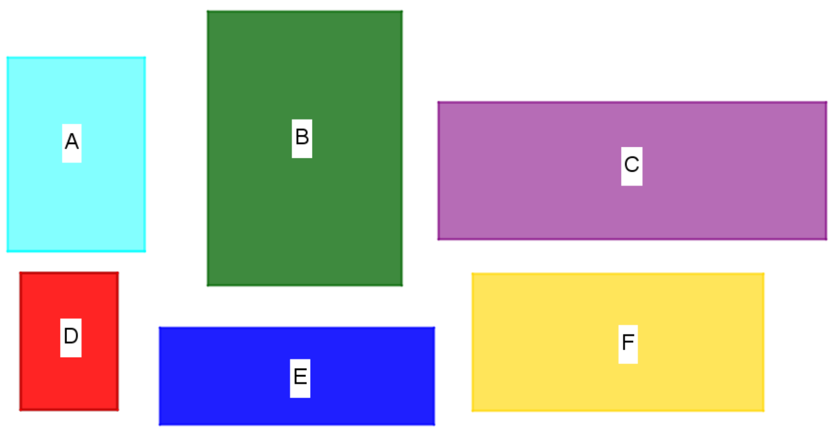
Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u šesteročlanim skupinama)

Potreban materijal: nastavni listić sa zadatkom i tablicom za svaku skupinu učenika

Tijek aktivnosti: Svaka grupa učenika će dobiti nastavni listić sa zadatkom i uputama za rješavanje. Učenici popunjavaju listić te slijedi diskusija. U usmenoj diskusiji učenici uočavaju da nisu svi jednako procijenili koja će pločica prekriti najveći dio poda te da ne mogu sa sigurnošću tvrditi koja je skupina u pravu. Dolaze do zaključka da je pločice potrebno nekako izmjeriti.

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. U trgovini keramičkim pločicama „Kera" svaka izložena pločica je označena svojom šifrom kao na slici. Što misliš, koja će pločica prekriti najveći dio poda? Popunite tablicu počevši od pločice za koju procjenjuješ da će prekriti najveći dio poda.



Mogući učenički odgovori					Točan odgovor	
	ŠIFRA PLOČICE			**ŠIFRA PLOČICE**		
1.	*C*		**1.**	*B*	**1.**	*B, C*
2.	*B*		**2.**	*C*	**2.**	*B, C*
3.	*F*	ILI	**3.**	*F*	**3.**	*F*
4.	*A*		**4.**	*E*	**4.**	*A, E*
5.	*E*		**5.**	*A*	**5.**	*A, E*
6.	*D*		**6.**	*D*	**6.**	*D*

Aktivnost 2: Mjerenje objekata neformalnim jedinicama

Cilj aktivnosti: Učenici će mjeriti površinu objekata neformalnim jedinicama – dlanom, okruglom gumicom za brisanje i mobitelom i otkriti potrebu za formalnim mjernim jedinicama.

Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u četveročlanim skupinama)

Potreban materijal: nastavni listić sa zadatkom i tablicom za svaku skupinu učenika, različite veličine papira u boji pločica (nastali spajanjem papira formata A4)

Tijek aktivnosti: Svaka skupina učenika će dobiti nastavni listić sa zadatkom i uputama za rješavanje i papire u različitim bojama koje reprezentiraju pločice iz zadatka. Svaka skupina mjeri površinu pločica (papira) pomoću nekog objekta (dlanom, gumicom ili mobitelom). Rezultate zapisuju u tablicu te sljedi usporedba u diskusiji.

Pitanja za diskusiju:

Na koji način ste izmjerili veličine pločica? (*Pomoću dlana, gumice, mobitela.)*

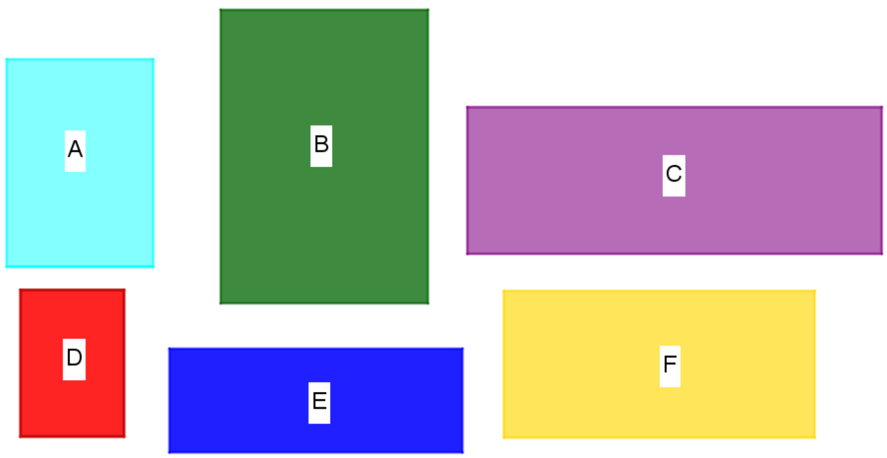
Usporedite poredak veličina pločica po grupama. Što uočavate? (*Svi imamo jednake poretke ili se malo razlikuju.)*

Koje je mjerenje po vašem mišljenju najpreciznije i zašto? (*Mjerenje mobitelom, jer nismo imali puno praznina dok smo njime mjerili, a dok smo mjerili gumicom i dlanom jesmo.)*

Kakve bi trebale biti mjerne jedinice kojima ćemo mjeriti veličinu objekta? (*U obliku pravokutnika/ kvadrata, jer ih možemo dobro prisloniti jednu uz drugu, bez pojavljivanja praznina*.)

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. U trgovini keramičkim pločicama „Kera“ svaka izložena pločica je označena svojom šifrom kao na slici. Papiri koje ste dobili predstavljaju te pločice. Izmjerite veličine pločica pomoću dlana, gumice i mobitela. Zapišite rezultate u tablicu.



	Šifra pločice	Broj dlanova potreban da prekrijemo pločicu	Broj gumica potreban da prekrijemo pločicu	Broj mobitela potreban da prekrijemo pločicu
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

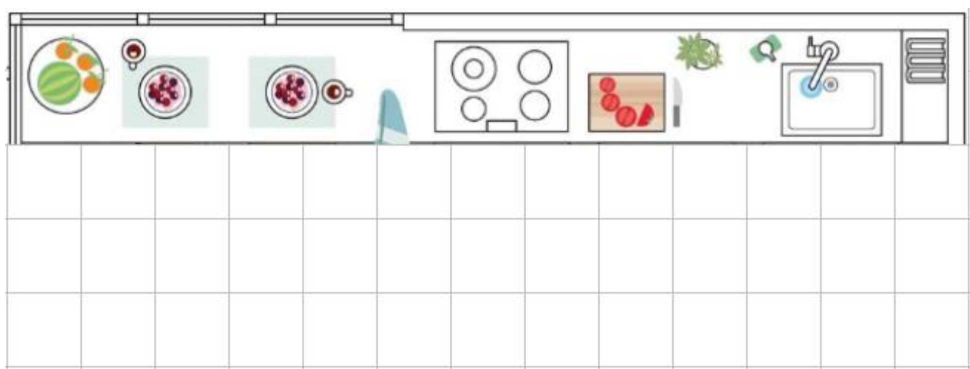
Aktivnost 3: Uvođenje kvadratne mreže i pojma površine

Cilj aktivnosti: Učenici će smještanjem objekata u kvadratnu mrežu otkriti pojam površine.

Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u šesteročlanim skupinama), frontalna nastava

Potreban materijal: nastavni listić za svaku skupinu učenika

Tijek aktivnosti: Nastavnik na projekcijskom platnu prikazuje sliku kuhinje s popločanim podom. Učenici trebaju odgovoriti koliko je pločica potrebno da se poploča taj pod. Zatim nastavnik usmeno navodi učenike da kažu da ih taj pod podsjeća na kvadratnu mrežu i da bi jedinica za mjerenje veličine pločica iz prethodne aktivnosti mogla biti kvadrat. Nakon toga, sličice koje reprezentiraju pločice iz prethodne aktivnosti su smještene u kvadratnu mrežu te im učenici određuju veličinu prebrojavanjem kvadrata koji ih prekrivaju. Svaka grupa rezultate piše na nastavni listić te slijedi usmena usporedba rezultata među grupama te razgovorom učenici dolaze do pojma površine.



Pitanja za diskusiju:

Na što vas podsjeća pod u kuhinji? (*Na mrežu.)*

Od čega se sastoji ta mreža? (*Od jednakih kvadrata.)*

Kako biste nazvali tu mrežu? (*Kvadratna mreža.)*

Na koji način ste izmjerili veličine pločica u trgovini? (*Prebrojavajući od koliko se kvadrata sastoji.)*

Usporedite poredak veličina pločica po grupama. Što uočavate? (*Svi smo dobili jednake rezultate kada smo prebrojavali od koliko se kvadrata sastoji pojedina pločica i kada smo pločice sortirali po veličini.)*

O čemu ovisi cijena stana kada kupujemo zemljište? *(O lokaciji, veličini, POVRŠINI.)*

Svakodnevnim govorom kažemo da nas zanima koliko stan/ zemljište ima čega? *(Kvadrata.)*

Kako još kažemo da stan/zemljište ima 90 kvadrata? *(Ima površinu 90 kvadrata.)*

Ako je neki lik prekriven kvadratićima, što bi bila njegova površina? (*Površina tog lika jednaka je broju kvadratića koji ga prekrivaju.)*

Kako smo zvali dužinu OE na brojevnom pravcu? (*Jedinična dužina.)*

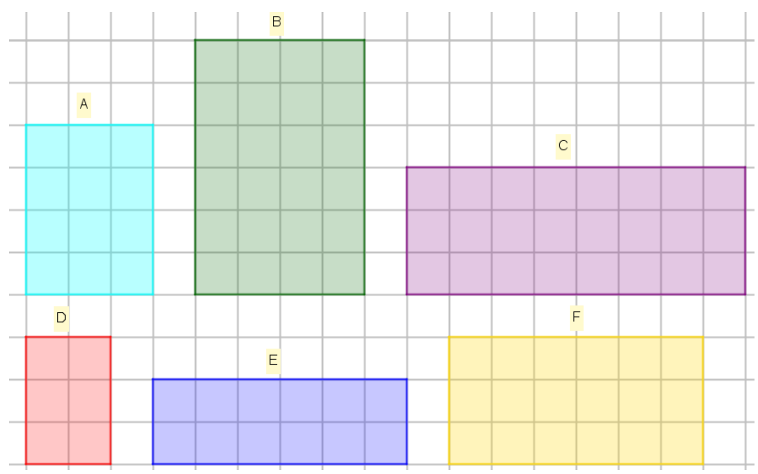
Kako biste onda nazvali kvadrat u kvadratnoj mreži kojim mjerimo površinu? (*Jedinični kvadrat.)*

Što je površina? (*Površina lika jednaka je broju jediničnih kvadratića koji u potpunosti prekrivaju taj lik.*

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Popunite tablicu prebrojavajući od koliko se kvadratića sastoji pojedina pločica.

	Šifra pločice	Broj kvadrata za prekrivanje pločice
1.	*A*	*12*
2.	*B*	*24*
3.	*C*	*24*
4.	*D*	*6*
5.	*E*	*12*
6.	*F*	*18*



Zadatak 2. Poredajte po veličini pločice od najveće do najmanje koristeći se prethodnim zadatkom.

B =C, A=E, F, D.

Aktivnost 4: Potreba za uvođenjem formalnih mjernih jedinica za površinu

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti potrebu za uvođenjem formalnih mjernih jedinica za površinu

Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u parovima)

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika u paru, škare

Tijek aktivnosti: Svaki učenik u paru dobije svoj nastavni listić na kojem se nalazi neki geometrijski lik smješten u kvadratnu mrežu, ali se jedinični kvadrati u kvadratnim mrežama razlikuju kod pojedinih učenika. Učenici izrezuju likove i preklapanjem utvrđuju da se radi o jednakim likovima pa su to likovi s jednakom površinom. Zatim prebrojavanjem jediničnih kvadrata od kojih se sastoji lik uočavaju da su dobili različite rezultate što je nemoguće. Učenici uočavaju da je to zato što jedinični kvadrati nisu bili jednakih dimenzija te uočavaju da je potrebno uvesti mjerne jedinice za površinu.

Pitanja za diskusiju:

Što ste uočili uspoređivanjem rezultata u paru? (*Da smo dobili jednake likove, ali smo zaključili da imaju različite površine.)*

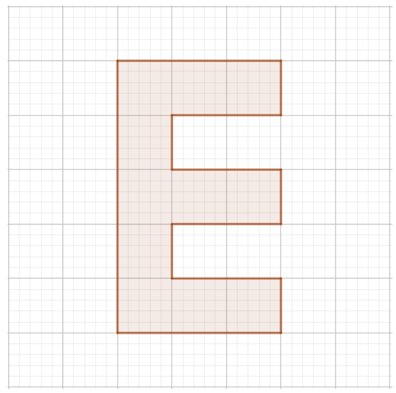
Je li to moguće? (*Nije.)*

Što mislite zašto se to dogodilo? (*Jer se jedinični kvadrati razlikuju u pojedinoj kvadratnoj mreži.)*

Kako biste riješili ovaj problem? (*Trebali bismo uvesti mjerne jedinice za površinu.)*

NASTAVNI LISTIĆ A

Zadatak 1. Izreži lik na donjoj slici te ga usporedi s likom učenika s kojim si u paru. Što uočavaš? *Likovi su jednaki jer smo ih uspjeli preklopiti.*



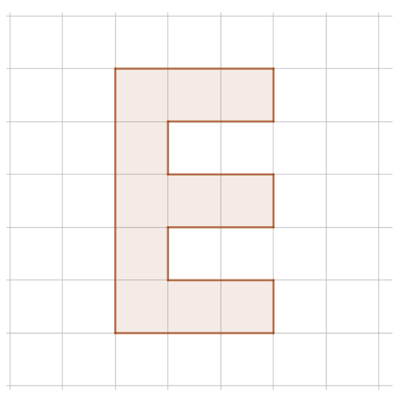
Zadatak 2. Kolika je površina tog lika? *Površina tog lika je 275 jediničnih kvadrata.*

Zadatak 3. Usporedi svoj odgovor iz prethodnog zadatka s učenikom s kojim si u paru. Je li to moguće? Što misliš zašto se to dogodilo?

Dobili smo jednake likove, ali oni nemaju jednaku površinu. To je nemoguće. To se dogodilo jer se jedinični kvadrati razlikuju po dimenziji.

NASTAVNI LISTIĆ B

Zadatak 1. Izreži lik na donjoj slici te ga usporedi s likom učenika s kojim si u paru. Što uočavaš? *Likovi su jednaki jer smo ih uspjeli preklopiti.*



Zadatak 2. Kolika je površina tog lika? *Površina tog lika je 11 jediničnih kvadrata.*

Zadatak 3. Usporedi svoj odgovor iz prethodnog zadatka s učenikom s kojim si u paru. Je li to moguće? Što misliš zašto se to dogodilo?

Dobili smo jednake likove, ali oni nemaju jednaku površinu. To je nemoguće. To se dogodilo jer se jedinični kvadrati razlikuju po dimenziji.

Aktivnost 5: Mjerne jedinice za površinu

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti mjerne jedinice za površinu.

Nastavni oblik: individualni rad, frontalan nastava

Potreban materijal: nastavni listić – A, B, C za svakog učenika

Tijek aktivnosti: Učenici dobivaju nastavni listić A te navođeni nastavnikovim pitanjima zaključuju koje su dimenzije jediničnog kvadrata. Zatim dobivaju nastavni listić B na kojem otkrivaju pojam centimetra kvadratnog te analogijom u diskusiji otkrivaju ostale mjerne jedinice za površinu. Nakon toga dobivaju nastavni listić C kako bi zornije vidjeli razliku između jediničnog kvadrata i centimetra kvadratnog.

Pitanja za diskusiju:

Ako je površina kvadrata čije su stranice duljine 1 cm jednaka 1 kvadratni centimetar i označavamo ga s 1 cm^2, čemu bi bila jednaka površina kvadrata čije su stranice duljine 1 mm? (*Jedan milimetar kvadratni i označavamo ga 1 mm^2.)*

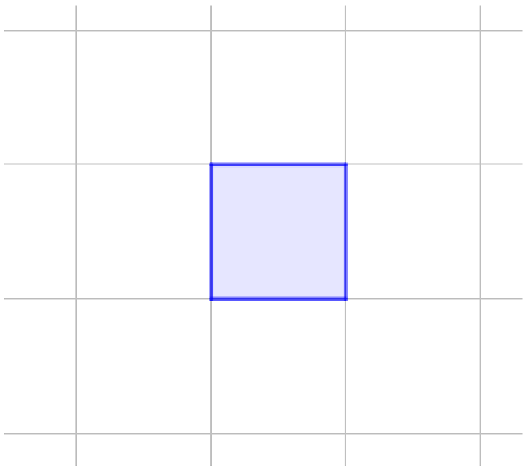
Čemu je jednaka površina kvadrata čije su stranice duljine 1 dm i kako bismo to značili? (*Jedan decimetar kvadratni i označili bismo to s 1 dm^2*.)

Čemu je jednaka površina kvadrata čije su stranice duljine 1 m i kako bismo to značili? (*Jedan metar kvadratni i označili bismo to s 1 m^2*.)

Čemu je jednaka površina kvadrata čije su stranice duljine 1 km i kako bismo to značili? (*Jedan kilometar kvadratni i označili bismo to s 1 km^2*.)

NASTAVNI LISTIĆ A

Zadatak 1. Prouči sliku i odgovori na pitanja.



Koliko iznosi širina prikazanog lika?

Jednu jediničnu dužinu.

Koliko iznosi duljina prikazanog lika?

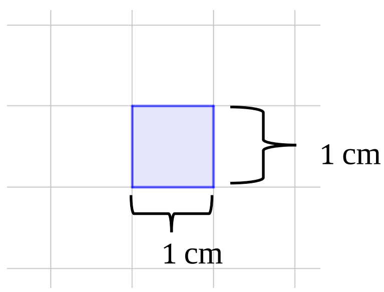
Jednu jediničnu dužinu.

Kolika je površina prikazanog lika?

Jedan jedinični kvadrat.

NASTAVNI LISTIĆ B

Zadatak 1. Prouči sliku i odgovori na pitanja.



Koliko iznosi širina prikazanog lika?

Jedan centimetar.

Koliko iznosi duljina prikazanog lika?

Jedan centimetar.

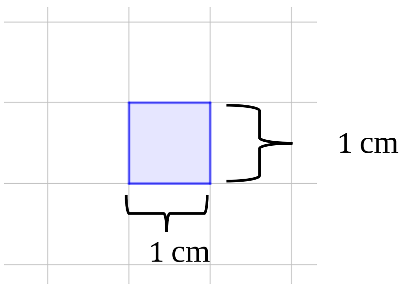
Ako kvadrat kojem duljina i širina iznose 1 **jediničnu** dužinu ima površinu 1 **jedinični** kvadrat, čemu je jednaka površina kvadrata kojem duljina i širina iznose 1 **centimetar**?

Jedan kvadratni centimetar.

NASTAVNI LISTIĆ C

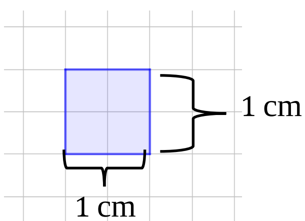
Zadatak. Danim likovima odredi površinu izraženu jediničnim kvadratima i centimetrima kvadratnim.

a)



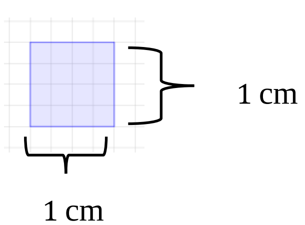
Površina lika je jednaka jedan jedinični kvadrat i jedan centimetar kvadratni.

b)



Površina lika je jednaka četiri jedinična kvadrata i jedan centimetar kvadratni.

c)



Površina lika je jednaka šesnaest jediničnih kvadrata i jedan centimetar kvadratni.

Aktivnost 6: Veza mjernih jedinica za površinu

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti vezu mjernih jedinica za površinu.

Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u šesteročlanim skupinama) u tri radna centra

Potreban materijal: nastavni listići za svakog učenika u svakom radnom centru

Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u šesteročlane skupine i obilaze tri radna centra – A, B i C. U radnom centru A učenici otkrivaju vezu između cm^2 i mm^2, u radnom centru B otkrivaju vezu između dm^2 i cm^2 te u radnom centru C otkrivaju vezu između m^2 i dm^2. Nakon toga slijedi razredna diskusija u kojoj učenici otkrivaju vezu svih mjernih jedinica za površinu

Pitanja za diskusiju:

Koristeći međusobni odnos mjernih jedinica metar i decimetar, kako ste u obliku umnoška mogli zapisati međusobni odnos mjernih jedinica m^2 i dm^2?

$(1\text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2 = (10 \cdot 10)\text{dm}^2)$

Na koji način smo, bez upotrebe kvadrata, mogli izračunati broj kvadratnih decimetara u jednom kvadratnom metru? (*Mogli smo dva puta pomnožiti broj koji nam govori koliko decimetara ima u jednom metru*.)

Koristeći međusobni odnos mjernih jedinica metar i decimetar, kako ste u obliku umnoška mogli zapisati međusobni odnos mjernih jedinica dm^2 i cm^2?

$(1\text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2 = (10 \cdot 10)\text{cm}^2)$

Na koji način smo, bez upotrebe kvadrata, mogli izračunati broj kvadratnih centimetara u jednom kvadratnom decimetru? (*Mogli smo dva puta pomnožiti broj koji nam govori koliko centimetara ima u jednom decimetru.)*

Koristeći međusobni odnos mjernih jedinica metar i decimetar, kako ste u obliku umnoška mogli zapisati međusobni odnos mjernih jedinica cm^2 i mm^2?

$(1\text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2 = (10 \cdot 10)\text{mm}^2)$

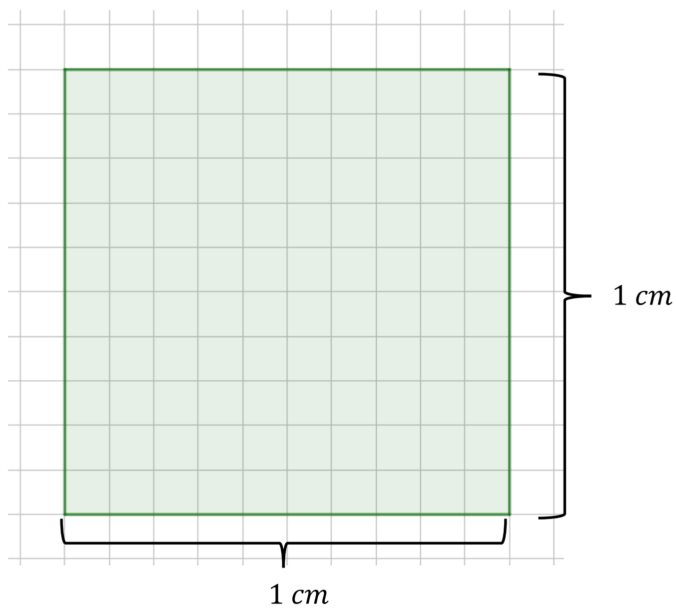
Na koji način smo, bez upotrebe kvadrata, mogli izračunati broj kvadratnih milimetara u jednom kvadratnom centimetru? (*Mogli smo dva puta pomnožiti broj koji nam govori koliko milimetara ima u jednom centimetru.)*

Koliko bi kvadratnih metara imao jedan kvadratni kilometar? (*Jedan kilometar ima 1000 metara pa jedan kvadratni kilometar ima* $(1000 \cdot 1000)\ m^2 = 1\,000\,000\ m^2$*.)*

Napomena: Nakon ove aktivnosti bilo bi poželjno izraditi s učenicima fizički model na kojem se vidi odnos milimetara kvadratnih, centimetara kvadratnih, decimetara kvadratnih i metara kvadratnih kako bi učenici razvili osjećaj za veličinu. Model se može izraditi od hamer papira, a za milimetre kvadratne je zgodno iskoristiti milimetarski papir.

NASTAVNI LISTIĆ A

Zadatak 1. Prouči sliku i odgovori na pitanja.



Kolika je površina osjenčanog lika?

1 cm² → $1\ cm^2$

Koliko jediničnih kvadrata sadrži osjenčani lik?

100

Kolika je duljina i širina stranice jediničnog kvadrata. Izrazi u milimetrima.

Duljina i širina stranice jediničnog kvadrata je 10 puta manja od jednog centimetra pa one iznose $1\ mm$.

Kolika je površina jediničnog kvadrata?

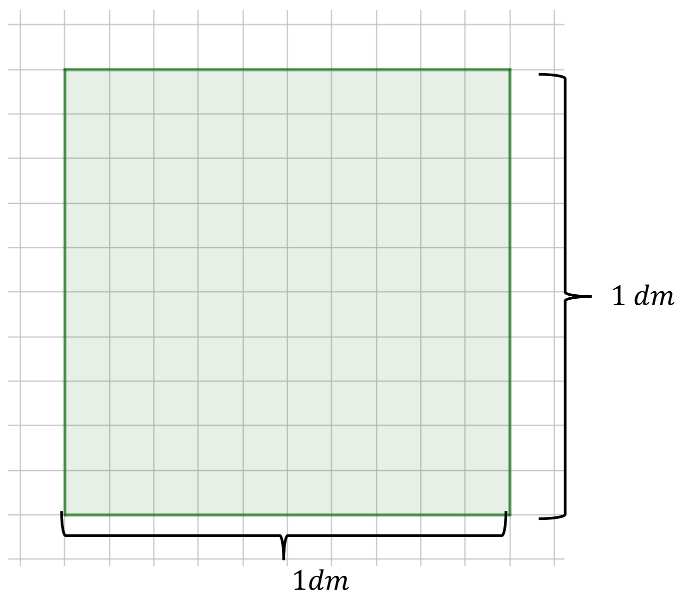
1 mm^2.

Kako bismo još mogli izraziti površinu osjenčanog lika?

Površinu osjenčanog kvadrata možemo izraziti kao $100\ mm^2$.

NASTAVNI LISTIĆ B

Zadatak 1. Prouči sliku i odgovori na pitanja.



Kolika je površina osjenčanog lika?

1 dm^2.

Koliko jediničnih kvadrata sadrži osjenčani lik?

100.

Kolika je duljina i širina stranice jediničnog kvadrata? Izrazi u centimetrima.

Duljina i širina stranice jediničnog kvadrata je 10 puta manja od jednog decimetra pa one iznose $1\ cm$.

Kolika je površina jediničnog kvadrata?

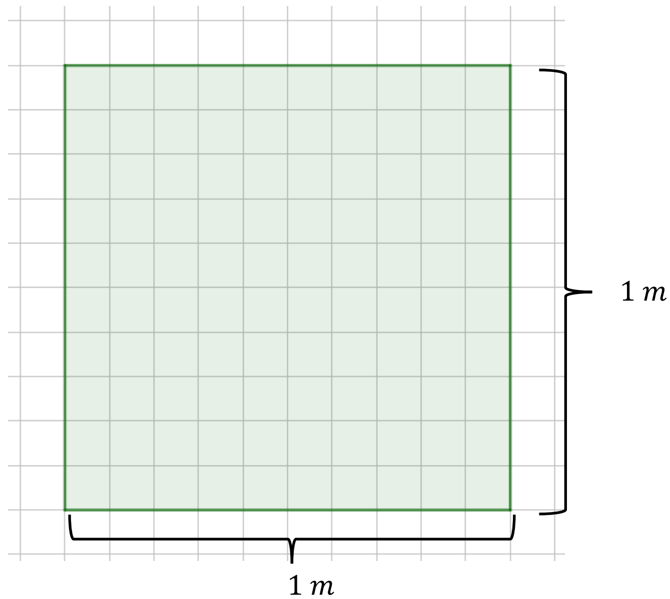
1 cm^2.

Kako bismo još mogli izraziti površinu osjenčanog lika?

Površinu osjenčanog kvadrata možemo izraziti kao $100\ cm^2$.

NASTAVNI LISTIĆ C

Zadatak 1. Prouči sliku i odgovori na pitanja.



Kolika je površina osjenčanog lika?

1 m^2.

Koliko jediničnih kvadrata sadrži osjenčani lik?

100.

Kolika je duljina i širina stranice jediničnog kvadrata? Izrazi u decimetrima.

Duljina i širina stranice jediničnog kvadrata je 10 puta manja od jednog metra pa one iznose $1\ dm$.

Kolika je površina jediničnog kvadrata?

1 dm^2.

Kako bismo još mogli izraziti površinu osjenčanog lika?

Površinu osjenčanog kvadrata možemo izraziti kao $100\ dm^2$.

Sljedeća aktivnost se bavi međusobnim odnosom opsega i površine nekog lika. Poželjno ju je provesti kako bi učenici zornije uočili razliku između opsega i površine lika te kako bi se izbjeglo „miješanje“ tih dvaju koncepata.

Aktivnost 7: Veza površine i opsega

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da ne postoji pravilnost u odnosu opsega i površine geometrijskih likova.

Nastavni oblik: diferencirana nastava (rad u parovima)

Potreban materijal: nastavni listići za svakog učenika u paru, kvadratna mreža u kojoj je jedinična duljina 1 cm

Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove i dobivaju nastavni listić kojeg rješavaju prema uputama. Analizirajući rješenja zaključuju da opseg i površina nekog lika mogu biti u bilo kakvom odnosu (jednaki, opseg veći od površine, opseg manji od površine.)

Pitanja za diskusiju:

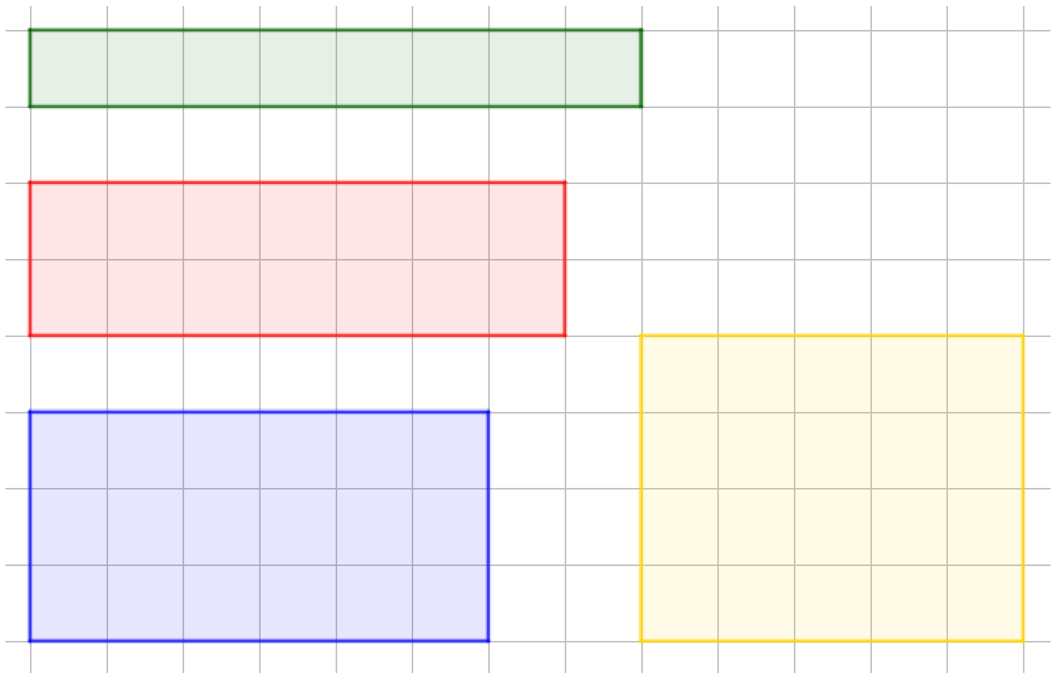
Promotrite rješenja u tablicama? Uočavate li neki pravilnost? (*Ne uočavamo pravilnosti, ali vidimo da likovi jednakog opsega mogu imati različite površine.)*

Zašto likovi jednakih opsega mogu imati različite površine? *(Zato što ne moraju zauzimati jednake dijelove ravnine.)*

U kakvoj vezi mogu biti opseg i površina lika? (*Mogu biti jednaki ili jedan veći od drugog.)*

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Pomoću kvadratne mreže nacrtaj što više pravokutnika opsega 18 cm.



Zadatak 2. Zamijeni nastavni listić s učenikom u paru. Odredi opseg i površinu pravokutnika iz prvog zadataka.

Opseg pravokutnika	Površina pravokutnika
18	*8*
18	*14*
18	*18*
18	*20*

Zadatak 3. Promotri tablicu iz prethodnog zadatka. Što uočavaš?

Da lik može imati veći opseg od površine, manji opseg od površine ili jednak opseg i površinu. Nema neke pravilnosti.

Sljedeća aktivnost doprinosi uvježbavanju i boljem razumijevanju koncepata opsega i površine te razvijanju viših kognitivnih procesa.

Aktivnost 8: Osmisli sam!

Cilj aktivnosti: Učenici će generirati likove zadanih opsega i površine.

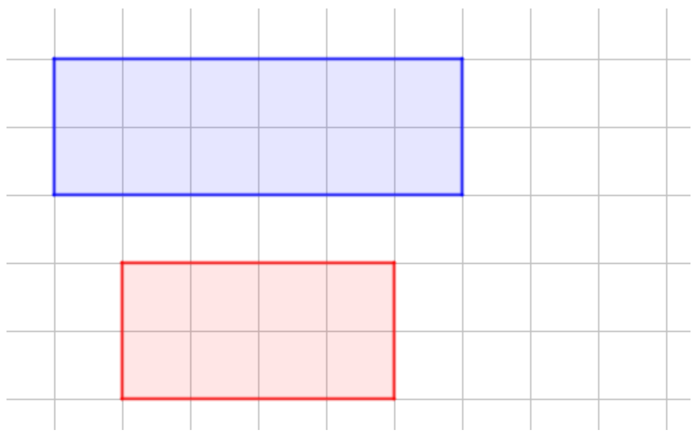
Nastavni oblik: individualni rad

Potreban materijal: nastavni listići za svakog učenika

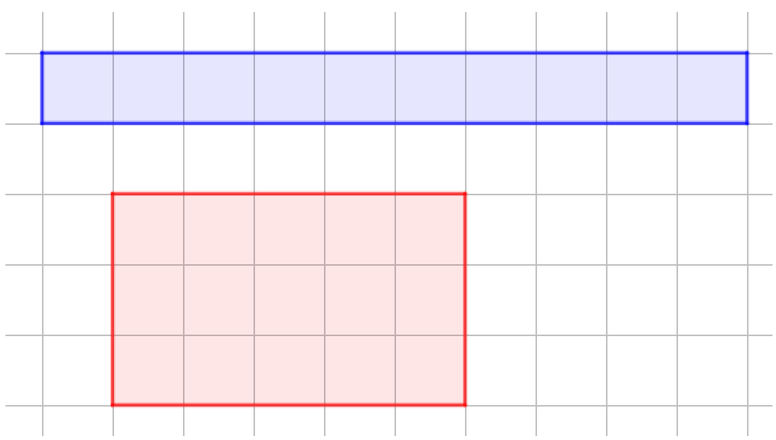
Tijek aktivnosti: Učenici dobivaju nastavni listić te ga samostalno rješavaju prema uputama.

NASTAVNI LISTIĆ

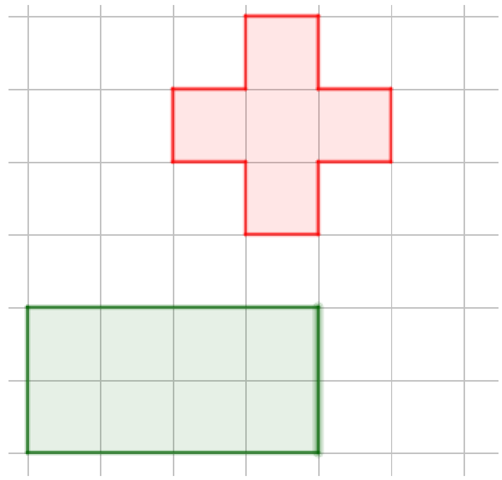
Zadatak 1. U kvadratnoj mreži nacrtaj dva lika tako da lik većeg opsega ima i veću površinu.



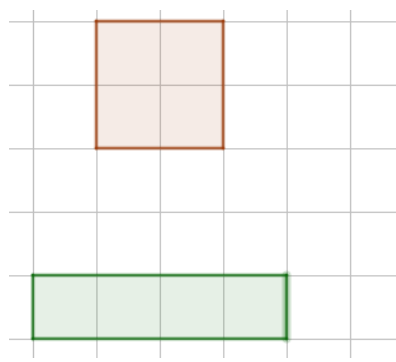
Zadatak 2. U kvadratnoj mreži nacrtaj dva lika tako da lik većeg opsega ima manju površinu.



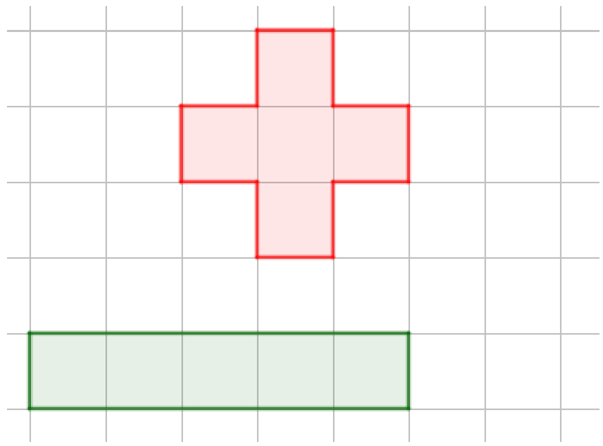
Zadatak 3. U kvadratnoj mreži nacrtaj dva lika jednakih opsega, ali različitih površina.



Zadatak 4. U kvadratnoj mreži nacrtaj dva lika jednakih površina, ali različitih opsega.



Zadatak 5. U kvadratnoj mreži nacrtaj dva različita lika jednakih površina i opsega.



Sljedeća aktivnost također pridonosi boljem razumijevanju koncepta površine, ali je i korisna kao uvodna aktivnost za otkrivanje formula za površinu trokuta i paralelograma.

Aktivnost 9: Nepromjenjivost površine

Cilj aktivnosti: Učenici će osvijestiti da se preraspodjelom dijelova lika u različite oblike ne mijenja površina.

Nastavni oblik: individualni rad

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika, škare

Tijek aktivnosti: Učenici dobivaju nastavni listić te ga samostalno rješavaju prema uputama.

Pitanja za diskusiju:

Kakve ste pravokutnike dobili? (*Jednakih površina.)*

Kako ste to utvrdili? (*Preklapanjem.)*

Kakvi su dijelovi pravokutnika dobiveni rezanjem po dijagonali? (*Jednaki.)*

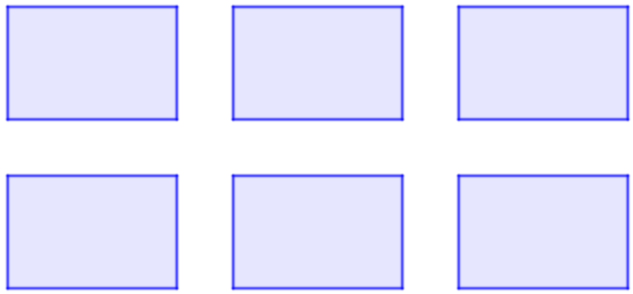
Kako ste to utvrdili? (*Preklapanjem.)*

Kakve su površine likova koje ste sami načinili? Zašto? (*Jednake su jer se sastoje od dvaju dijelova jednakih površina.)*

Mijenja li se površina lika ako liku promijenimo oblik? (*Ne.)*

NASTAVNI LISTIĆ

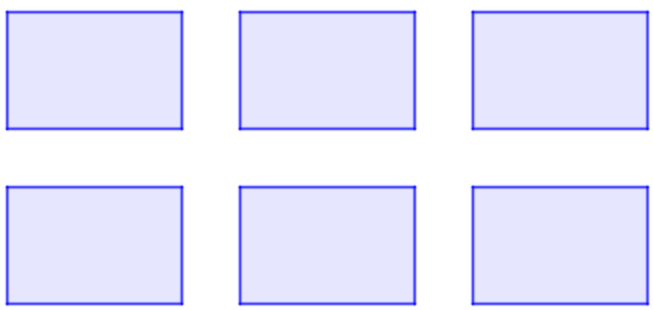
Zadatak 1. Izreži zadane pravokutnike i preklopi ih. Usporedi površine tih pravokutnika.



Zadatak 2. Izreži pravokutnike po dijagonali. Dobio/la si dva dijela pravokutnika. Složi što više različitih likova koji se sastoje od tih dvaju dijelova. Usporedi te površine preklapanjem.

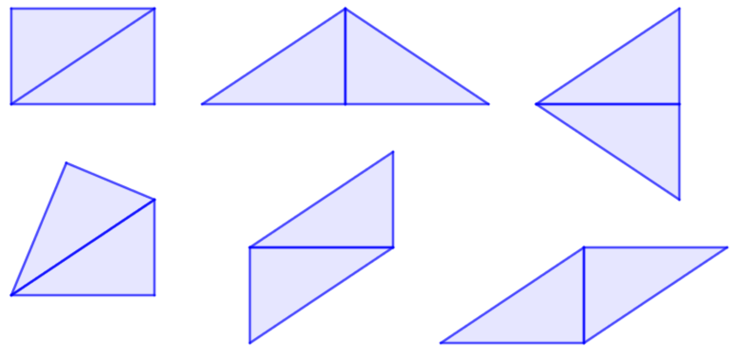
RJEŠENJA NASTAVNOG LISTIĆA

Zadatak 1. Izreži zadane pravokutnike i preklopi ih. Usporedi površine tih pravokutnika.



Pravokutnici imaju jednake površine.

Zadatak 2. Izreži pravokutnike po dijagonali. Dobio/la si dva dijela pravokutnika. Složi što više različitih likova koji se sastoje od tih dvaju dijelova. Usporedi te površine preklapanjem.



Preklapajući po dva dijela svakog od likova vidimo da su površine likova jednake.

Aktivnost 10: Površina pravokutnika

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti kako se računa površina pravokutnika.

Nastavni oblik: individualni rad

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika, jedan jedinični kvadrat za svakog učenika, ravnalo.

Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobije nastavni listić sa zadatkom, model jediničnog kvadrata i ravnalo. Na listiću su dva pravokutnika približno jednakih površina te učenici trebaju odrediti koji pravokutnik ima veću površinu. Smiju crtati po pravokutnicima, ali ih ne smiju rezati i preklapati. Neki učenici će nacrtati sve jedinične kvadrate po pravokutnicima, a neki samo jedan redak i jedan stupac pa pomnožiti , a neki jedan redak i ravnalom odrediti koliko je takvih redaka potrebno da se prekrije cijeli pravokutnik. Učenicima slabijih sposobnosti poželjno je pravokutnik smjestiti u kvadratnu mrežu kako bi lakše došli do cilja.

Pitanja za diskusiju:

Kako ste odredili koji pravokutnik ima manju površinu? (*Tako što smo odredili koliko je jediničnih kvadrata potrebno da prekrijemo pojedini pravokutnik.)*

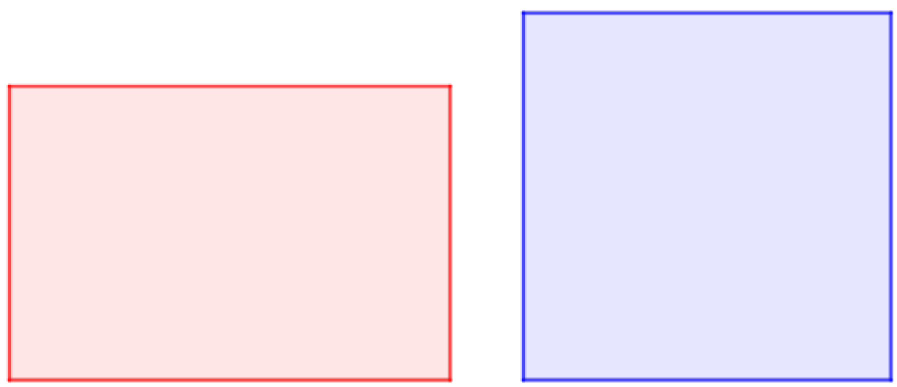
Koji je najbrži način od tri viđena? (*Drugi.)*

Koja je veza površine pravokutnika i njegove širine i duljine? (*Ako pomnožimo širinu i duljinu pravokutnika, dobit ćemo njegovu površinu.)*

NAPOMENA: Nakon što su učenici uočili vezu širine i duljine pravokutnika i njegove površine, nastavnik uvodi pojmove baze i visine pravokutnika. Stoga je površina pravokutnika jednaka umnošku duljina njegove baze i visine. Potrebno je prokomentirati dvojaki izbor baze i visine. U udžbenicima se ne njeguje ovakav pristup, ali smatram da bi to bilo poželjno, jer se na taj način izbjegavaju kasnije greške u primjeni formula za površine likova. Naime, ovakva formula za površinu pravokutnika se kasnije generalizira na površinu trokuta, paralelograma i romba. Nadalje, u udžbenicima je posebno istaknuta formula za površinu kvadrata. Smatram da ju nije potrebno posebno isticati, jer je kvadrat specijalan slučaj pravokutnika. Na taj način se izbjegava nepotrebno gomilanje formula.

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Odredi koji od dvaju pravokutnika na slici ima veću površinu. Smiješ koristiti model jediničnog kvadrata i ravnalo te možeš crtati po slikama, ali ne smiješ ih rezati i preklapati.



Zadatak 2. Odgovori na pitanja.

Koliko iznosi površina većeg pravokutnika?

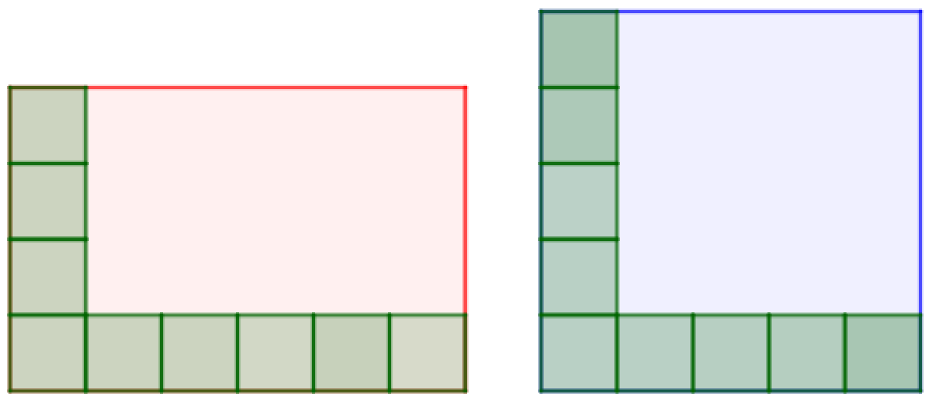
Koliko iznose širina i duljina tog pravokutnika?

Koja je veza površine pravokutnika i njegove širine i duljine?

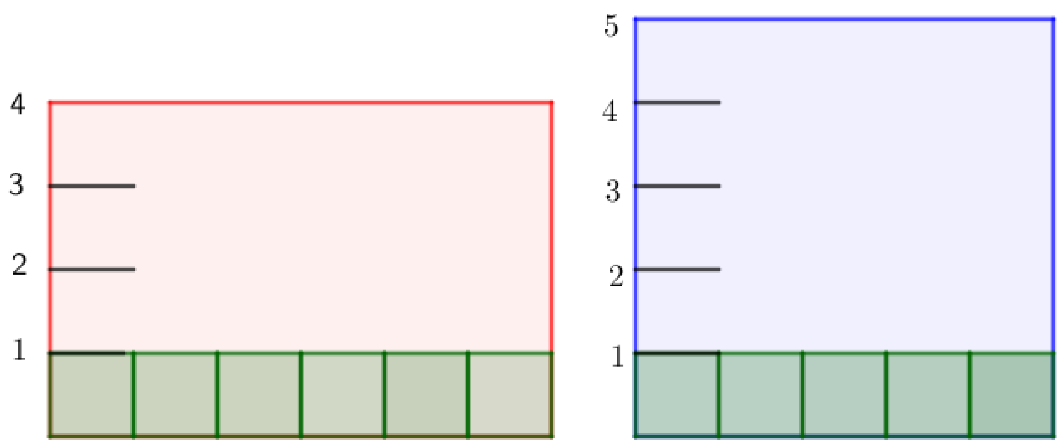
RJEŠENJE NASTAVNOG LISTIĆA

Zadatak 1. Odredi koji od dvaju pravokutnika na slici ima manju površinu. Smiješ koristiti model jediničnog kvadrata i ravnalo te možeš crtati po slikama, ali ne smiješ ih rezati i preklapati.

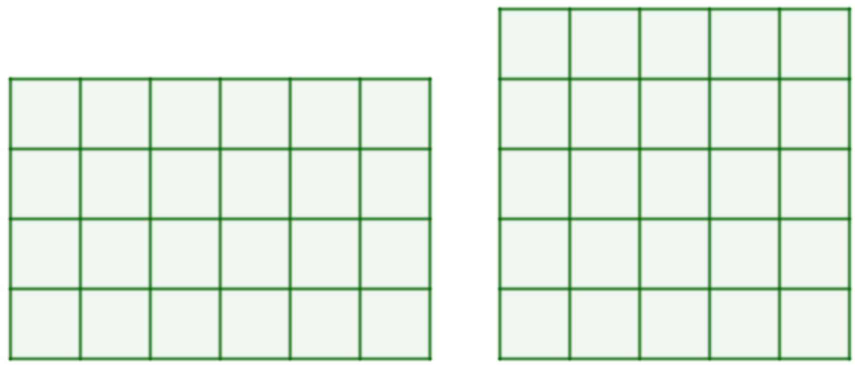
Prva mogućnost:



Druga mogućnost:



Treća mogućnost:



Zadatak 2. Odgovori na pitanja.

Koliko iznosi površina manjeg pravokutnika?

Crveni pravokutnik je manji, jer je njegova površina 24 jediničnih kvadrata, a od plavog 25.

Koliko iznose širina i duljina tog pravokutnika?

Duljina iznosi 6, a širina 4 jedinične duljine.

Koja je veza površine pravokutnika i njegove širine i duljine?

Ako pomnožimo širinu i duljinu pravokutnika, dobit ćemo njegovu površinu.

Aktivnost 11: Površina trokuta

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti kako se računa površina trokuta.

Nastavni oblik: rad u parovima

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika u paru, nacrtani pravokutnik

Tijek aktivnosti: Svaki učenik izreže dani pravokutnik po dijagonali. Preklapanjem se utvrdi da su dobivena dva sukladna pravokutna trokuta. Usmenom diskusijom učenici uočavaju da su visina pravokutnog trokuta i visina pravokutnika jednake te da je površina pravokutnog trokuta dva puta manja od površine pravokutnika. Zaključuju da je površina pravokutnika jednaka polovini umnoška duljina njegove baze i visine. Potrebno je prokomentirati dvojaki izbor baze i visine. Zatim učenici rade u parovima. Jedan učenik dobiva raznostraničan šiljastokutni trokut, a drugi raznostraničan tupokutni trokut. Slijede upute na nastavnim listićima i dolaze do formule za površine pojedinih trokuta.

Pitanja za diskusiju:

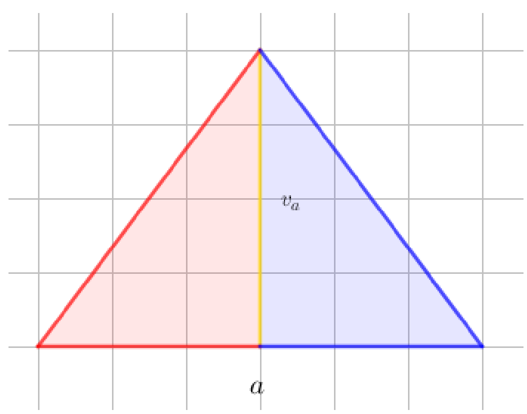
Kako računamo površinu trokuta? (*Kao polovinu umnoška duljine baze i visine trokuta.)*

Ovisi li to o vrsti trokuta s obzirom na kut? (*Ne ovisi, jer smo isti zaključak donesli za pravokutan, šiljastokutan i tupokutan trokut*.)

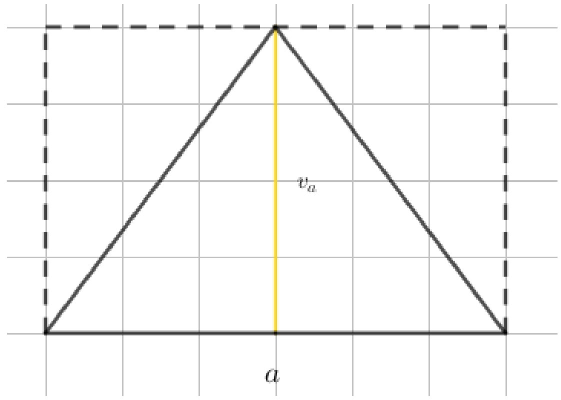
NAPOMENA: Nakon što su učenici otkrili formulu za površinu trokuta, potrebno je prokomentirati da bazu i visinu trokuta možemo odabrati na tri načina te da je rezultat uvijek isti. To se može predstaviti učenicima u nekom od alata dinamične geometrije.

NASTAVNI LISTIĆ A

Zadatak 1. Nacrtaj visinu zadanom trokutu i označi ju s v_a. Nastala su dva trokuta. Lijevi trokut oboji crveno, a desni plavo i izreži ih.

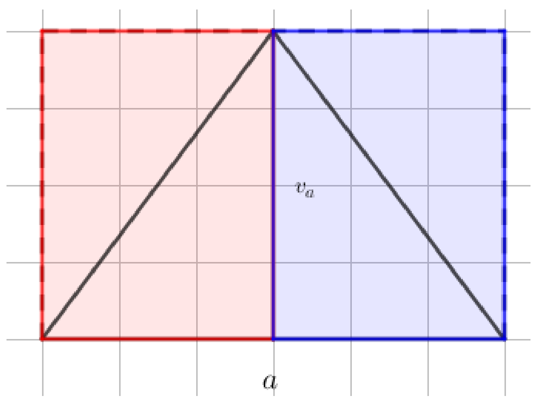


Zadatak 2. Na donjoj slici je dana slika identična onoj u prvom zadatku. Nacrtaj visinu zadanom trokutu. Nadopuni trokut do pravokutnika. Kolika je visina pravokutnika, a kolika je duljina baze? *Visina pravokutnika je jednaka visina zadanog trokuta i iznosi v_a, a duljina baze jednaka je duljini stranice trokuta a.*



Zadatak 3. Prislanjanjem crvenog i plavog trokuta na nastali pravokutnik istraži odnos površine pravokutnika i početnog trokuta.

Pravokutnik ima dva puta veću površinu od početnog trokuta.



Zadatak 4. Koliko iznosi površina pravokutnika?

$P = a \cdot v_a$

Zadatak 5. Koliko iznosi površina početnog trokuta?

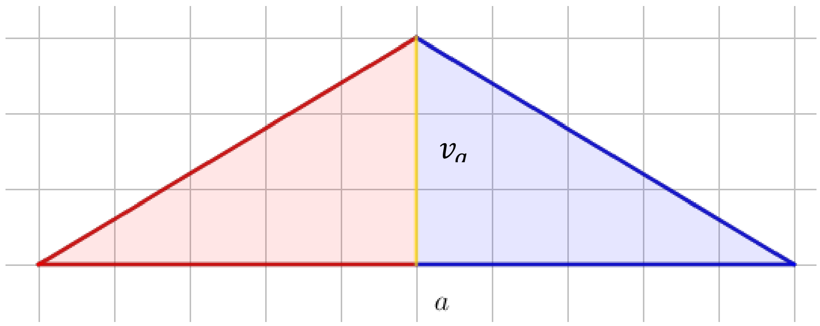
$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Zadatak 6. Usporedi rješenja s učenikom u paru i pokušaj nadopuniti rečenicu.

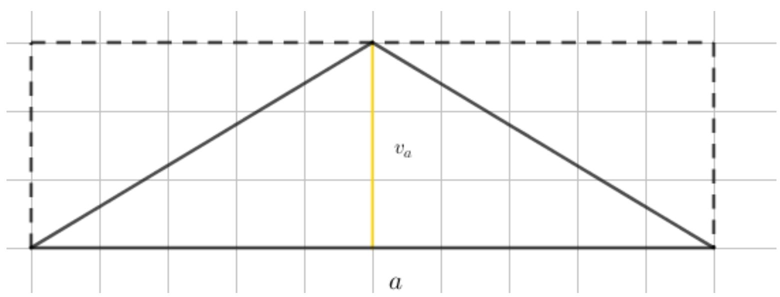
Površina trokuta baze duljine a i visine duljine h jednaka je $P = \frac{a \cdot h}{2}$.

NASTAVNI LISTIĆ B

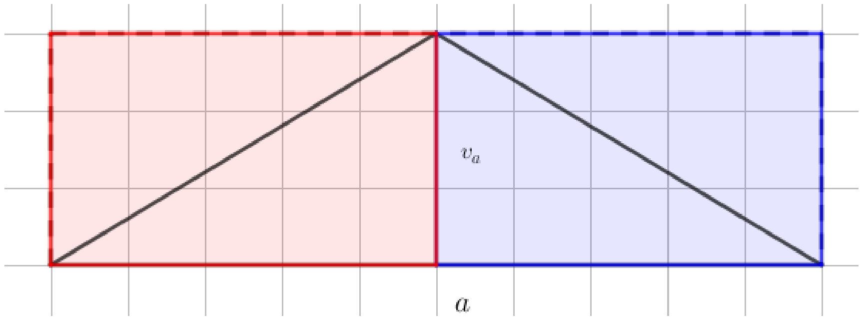
Zadatak 1. Nacrtaj visinu zadanom trokutu i označi ju s v_a. Nastala su dva trokuta. Lijevi trokut oboji crveno, a desni plavo i izreži ih.



Zadatak 2. Na donjoj slici je dana slika identična onoj u prvom zadatku. Nacrtaj visinu zadanom trokutu. Nadopuni trokut do pravokutnika. Kolika je visina pravokutnika, a kolika je duljina baze? *Visina pravokutnika je jednaka visina zadanog trokuta iznosi v_a, a duljina baze jednaka je duljini stranice trokuta a.*



Zadatak 3. Prislanjanjem crvenog i plavog trokuta na nastali pravokutnik istraži odnos površine pravokutnika i početnog trokuta. *Pravokutnik ima dva puta veću površinu od početnog trokuta.*



Zadatak 4. Koliko iznosi površina pravokutnika?

$P = a \cdot v_a$

Zadatak 5. Koliko iznosi površina početnog trokuta?

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Zadatak 6. Usporedi rješenja s učenikom u paru i pokušaj nadopuniti rečenicu.

Površina trokuta baze duljine a i visine duljine h jednaka je $P = \frac{a \cdot h}{2}$.

Aktivnost 12: Površina paralelograma

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti kako se računa površina paralelograma.

Nastavni oblik: rad u parovima

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika u paru

Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove te dobivaju nastavne listiće koje rješavaju prema uputama. Na listićima su dani sukladni paralelogrami, ali se promatraju različite baze i visine kako bi učenici uočili da površina paralelograma ne ovisi o izboru baze i visine.

Pitanja za diskusiju:

Kakve ste paralelograme promatrali? (*Sukladne.)*

U koji lik ste presložili paralelogram? (*U pravokutnik*.)

Kakva je površina paralelograma? (*Jednaka je površini nastalog pravokutnika jer se preslagivanjem površina ne mijenja.)*

Kakve su baza i visina paralelograma i pravokutnika? (*Jednake.)*

Čemu je jednaka površina paralelograma? (*Umnošku duljine baze i visine.)*

Na koliko načina možemo izračunati površinu paralelograma? (*Na dva načina, jer bazu i visinu možemo birati na dva načina.)*

NAPOMENA: Prilikom odabira paralelograma treba paziti da nožište visine paralelograma pripada bazi paralelograma. Nadalje, formulu za površinu romba nije potrebno posebno izvoditi, jer je romb specijalna vrsta paralelograma.

NASTAVNI LISTIĆ A

Zadatak 1. Na slici je dan paralelogram i istaknuta mu je jedna visina. Izreži paralelogram i usporedi ga s učenikom u paru. Zatim ga presjeci po toj visini. Dobivene dijelove presloži u pravokutnik. Usporedite i pravokutnike.

Zadatak 2. Kakvi su paralelogrami koje ste uspoređivali?

Zadatak 3. Kakvi su pravokutnici koje ste uspoređivali?

Zadatak 4. Usporedi bazu i visinu paralelograma i nastalog pravokutnika.

Zadatak 5. Čemu je jednaka površina pravokutnika?

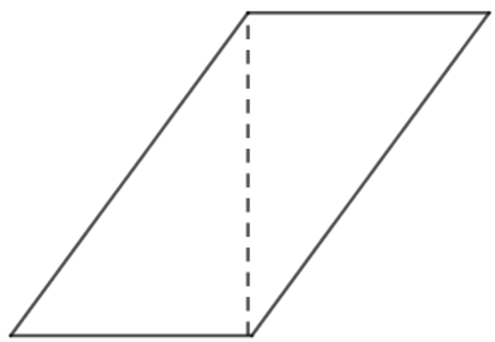
Zadatak 6. Kakve su površine zadanog paralelograma i nastalog pravokutnika? Zašto?

Zadatak 7. Usporedi rješenja s učenikom u paru i nadopuni:

Površina paralelograma baze duljine a i visine duljine h jednaka je ________.

NASTAVNI LISTIĆ B

Zadatak 1. Na slici je dan paralelogram i istaknuta mu je jedna visina. Izreži paralelogram i usporedi ga s učenikom u paru. Zatim ga presjeci po toj visini. Dobivene dijelove presloži u pravokutnik. Usporedite i pravokutnike.



Zadatak 2. Kakvi su paralelogrami koje ste uspoređivali?

Zadatak 3. Kakvi su pravokutnici koje ste uspoređivali?

Zadatak 4. Usporedi bazu i visinu paralelograma i nastalog pravokutnika.

Zadatak 5. Čemu je jednaka površina pravokutnika?

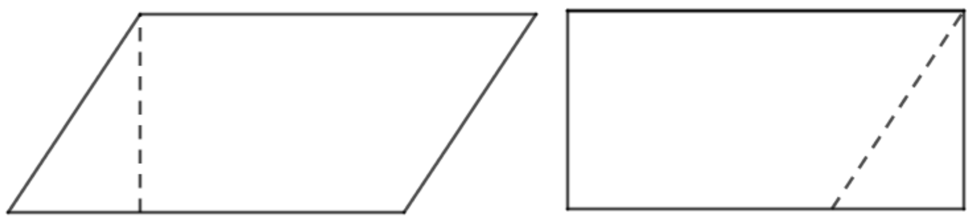
Zadatak 6. Kakve su površine zadanog paralelograma i nastalog pravokutnika? Zašto?

Zadatak 7. Usporedi rješenja s učenikom u paru i nadopuni: Površina paralelograma baze duljine a i visine duljine h jednaka je ________.

RJEŠENJA NASTAVNIH LISTIĆA

NASTAVNI LISTIĆ A

Zadatak 1. Na slici je dan paralelogram i istaknuta mu je jedna visina. Izreži paralelogram i usporedi ga s učenikom u paru. Zatim ga presjeci po toj visini. Dobivene dijelove presloži u pravokutnik. Usporedite i pravokutnike.



Zadatak 2. Kakvi su paralelogrami koje ste uspoređivali?

Sukladni.

Zadatak 3. Kakvi su pravokutnici koje ste uspoređivali?

Sukladni.

Zadatak 4. Usporedi bazu i visinu paralelograma i nastalog pravokutnika.

Baza i visina su im sukladne.

Zadatak 5. Čemu je jednaka površina pravokutnika?

Jednaka je umnošku duljina baze i visine.

Zadatak 6. Kakve su površine zadanog paralelograma i nastalog pravokutnika? Zašto?

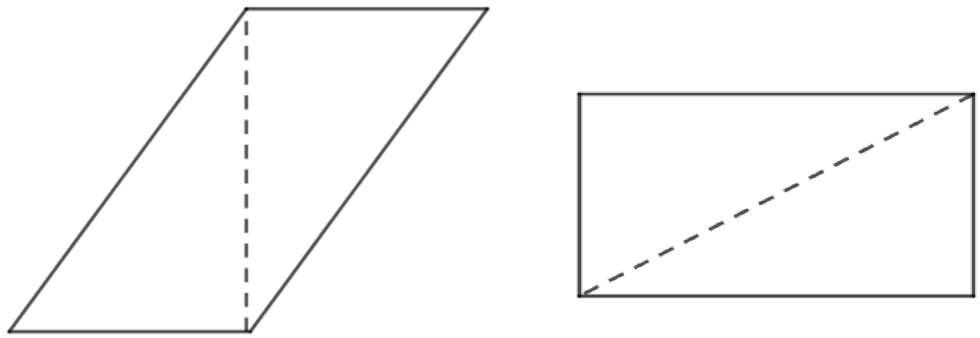
Jednake jer je pravokutnik nastao preslagivanjem dijelova paralelograma.

Zadatak 7. Usporedi rješenja s učenikom u paru i nadopuni:

Površina paralelograma baze duljine a i visine duljine h jednaka je $b \cdot h$.

NASTAVNI LISTIĆ B

Zadatak 1. Na slici je dan paralelogram i istaknuta mu je jedna visina. Izreži paralelogram i usporedi ga s učenikom u paru. Zatim ga presjeci po toj visini. Dobivene dijelove presloži u pravokutnik. Usporedite i pravokutnike.



Zadatak 2. Kakvi su paralelogrami koje ste uspoređivali? *Sukladni.*

Zadatak 3. Kakvi su pravokutnici koje ste uspoređivali?

Sukladni.

Zadatak 4. Usporedi bazu i visinu paralelograma i nastalog pravokutnika.

Baza i visina su im sukladne.

Zadatak 5. Čemu je jednaka površina pravokutnika?

Jednaka je umnošku duljina baze i visine.

Zadatak 6. Kakve su površine zadanog paralelograma i nastalog pravokutnika? Zašto?

Jednake jer je pravokutnik nastao preslagivanjem dijelova paralelograma.

Zadatak 7. Usporedi rješenja s učenikom u paru i nadopuni:

Površina paralelograma baze duljine a i visine duljine h jednaka je $b \cdot h$.

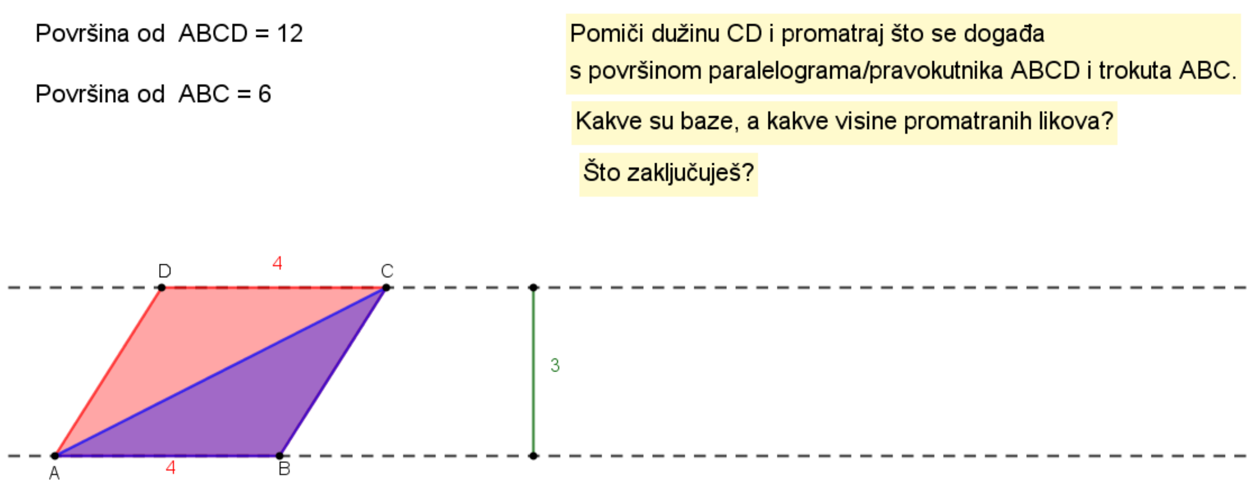
Aktivnost 13: Veza površine trokuta, pravokutnika i paralelograma jednakih baza i visina.

Cilj aktivnosti: Učenici će u alatu dinamične geometrije zornije uočiti vezu između površine trokuta, pravokutnika i paralelograma jednakih baza i visina.

Nastavni oblik: individualni rad

Potreban materijal: radni materijal izrađen u GeoGebri

Tijek aktivnosti: Učenici otvaraju materijal u GeoGebri te rade prema uputama. Uočavaju da pravokutnik i paralelogram jednakih baza i visina imaju jednake površine, ali imaju dvostruke veću površinu od trokuta jednake baze i visine.



Aktivnost 14: Površina trapeza

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti kako se računa površina trapeza.

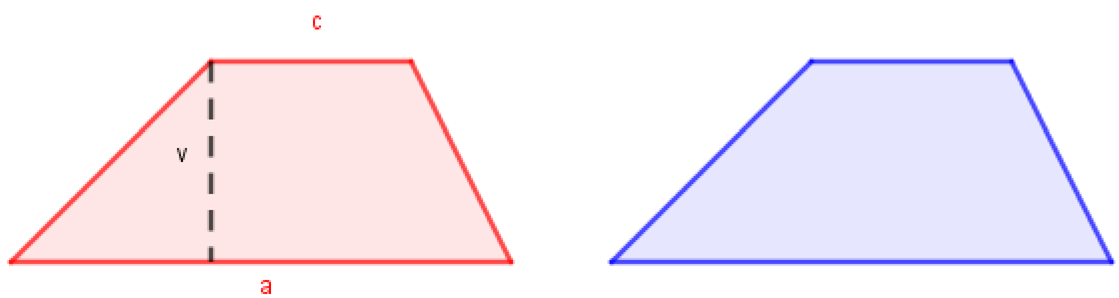
Nastavni oblik: individualni rad

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić kojeg rješava prema uputama. Dobivaju dva sukladna trapeza koja izrezuju i preslaguju u paralelogram. Zaključuju da paralelogram ima duljinu baze jednaku zbroju duljina baza trapeza te da su im visine jednake. Također, površina trapeza je dva puta manja od površine paralelograma pa zaključuju da je površina trapeza jednaka polovini umnoška duljine visine trapeza i zbroja duljina njegovih baza.

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Izrežite dva dana trapeza. Kakvi su oni međusobno? Posložite ih tako da čine jedan paralelogram.



Zadatak 2. Kolika je duljina baze paralelograma, a kolika visine?

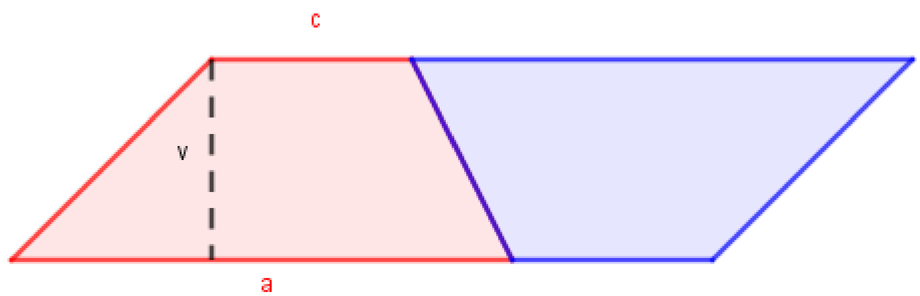
Zadatak 3. Napiši čemu je jednaka formula paralelograma.

Zadatak 4. Kakve su površine trapeza i paralelograma? Zašto?

Zadatak 5. Čemu je jednaka površina trapeza?

RJEŠENJA NASTAVNOG LISTIĆA

Zadatak 1. Izrežite dva dana trapeza. Kakvi su oni međusobno? Posložite ih tako da čine jedan paralelogram. *Preklopili smo ih pa vidimo da su sukladni.*



Zadatak 2. Kolika je duljina baze paralelograma, a kolika visine?

Duljina baze je $a + c$, a visina je jednaka visini trapeza i iznosi v.

Zadatak 3. Napiši čemu je jednaka formula paralelograma.

$P = (a + c) \cdot v$

Zadatak 4. Kakve su površine trapeza i paralelograma? Zašto?

Površina trapeza je dva puta manja, jer se paralelogram sastoji od dvaju trapeza.

Zadatak 5. Čemu je jednaka površina trapeza?

$$P = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Aktivnost 15: Površina kruga

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti kako se računa površina trapeza.

Nastavni oblik: individualni rad

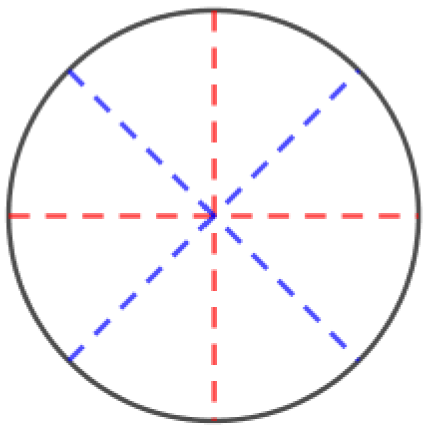
Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

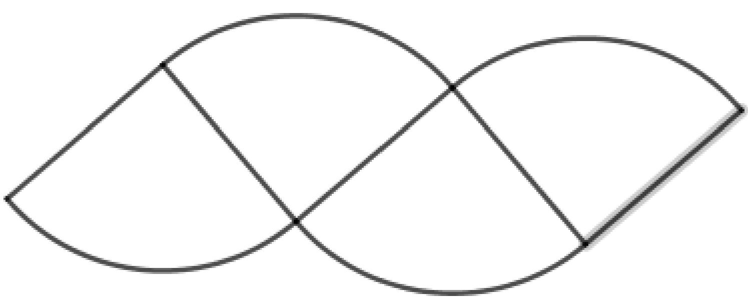
Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić kojeg rješava prema uputama. Dobivaju krug kojeg izrezuju na četiri pa osam sukladnih kružnih isječaka. Preslaguju ih u likove koji nalikuju paralelogramima s bazom duljine $r\pi$ i visinom duljine r, gdje je r

radijus danog kruga.. Učenici uočavaju da ako bismo krug dijelili na sve više sukladnih kružnih isječaka, lik kojeg slažemo bi postao paralelogram. Površina paralelograma bi tada iznosila $r^2\pi$, što je jednako površini početnog kruga.

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Izreži dani krug po crvenim dužinama. Dobivene dijelove posložite na predložak. Kakva je površina tog predloška?





Zadatak 2. Kolika je duljina lijevog i desnog ruba dobivenog lika?

Zadatak 3. Kolika je duljina gornjeg i donjeg ruba dobivenog lika?

Zadatak 4. Kolika je visina dobivenog lika?

Zadatak 5. Izreži dijelove po plavim dužinama i presloži ih u oblik kao u prvom zadatku. Kolika je površina nastalog lika?

Zadatak 6. Kolika je duljina lijevog i desnog ruba dobivenog lika?

Zadatak 7. Kolika je duljina gornjeg i donjeg ruba dobivenog lika?

Zadatak 8. Kolika je visina dobivenog lika?

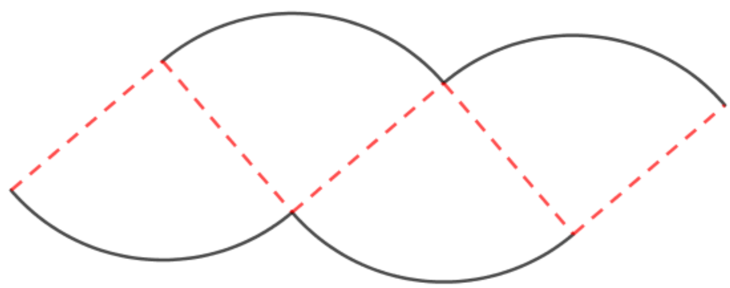
Zadatak 9. Koji lik bi nastao da krug dijelimo na što više sukladnih kružnih lukova?

Zadatak 10. Kolika bi bila duljina baze, a kolika visina tog lika? Kolika bi mu bila površina?

Zadatak 11. Nadopuni: površina kruga radijusa r je ___________.

RJEŠENJA NASTAVNOG LISTIĆA

Zadatak 1. Izreži dani krug po crvenim dužinama. Dobivene dijelove posložite na predložak. Kakva je površina tog predloška? *Jednaka je površini danog kruga, jer smo krug samo presložili.*



Zadatak 2. Kolika je duljina lijevog i desnog ruba dobivenog lika?

Jednaka je radijusu kruga.

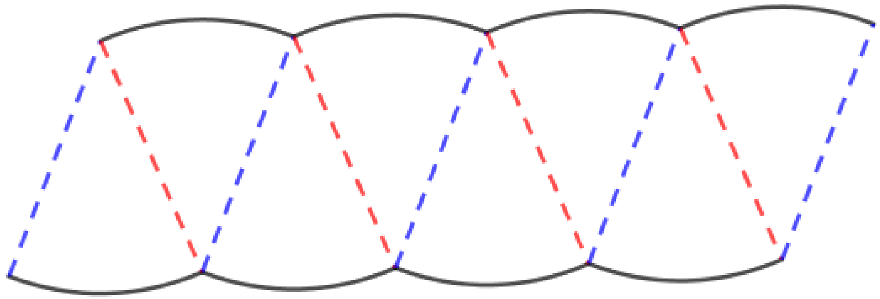
Zadatak 3. Kolika je duljina gornjeg i donjeg ruba dobivenog lika?

Duljina gornjeg ili donjeg ruba jednaka je polovini opsega kruga tj. $r\pi$.

Zadatak 4. Kolika je visina dobivenog lika?

Visina lika je jednaka radijusu kruga.

Zadatak 5. Izreži dijelove po plavim dužinama i presloži ih u oblik kao u prvom zadatku. Kolika je površina nastalog lika? *Jednaka je površini danog kruga, jer smo krug samo presložili.*



Zadatak 6. Kolika je duljina lijevog i desnog ruba dobivenog lika?

Jednaka je radijusu kruga.

Zadatak 7. Kolika je duljina gornjeg i donjeg ruba dobivenog lika?

Duljina gornjeg ili donjeg ruba jednaka je polovini opsega kruga tj. $r\pi$.

Zadatak 8. Kolika je visina dobivenog lika?

Visina lika je jednaka radijusu kruga.

Zadatak 9. Koji lik bi nastao da krug dijelimo na što više sukladnih kružnih lukova?
Paralelogram.

Zadatak 10. Kolika bi bila duljina baze, a kolika visina tog lika? Kolika bi mu bila površina?

Duljina baze bila bi jednaka polovini opsega kruga tj. $r\pi$, a visina radijusu kruga. Površina bi onda iznosila $r^2\pi$

Zadatak 11. Nadopuni: površina kruga radijusa r je $r^2\pi$.

Aktivnost 16: Površina kružnog isječka

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti kako se računa površina kružnog isječka

Nastavni oblik: individualni rad

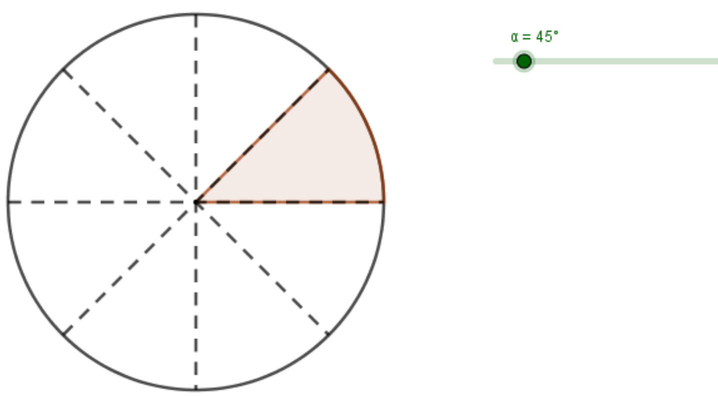
Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika, materijal izrađen u GeoGebri

Tijek aktivnosti: Svaki učenik dobiva nastavni listić kojeg rješava prema uputama i uz pomoć materijala izrađenog u GeoGebri. Učenici prvo uočavaju da su središnji kut i površina kružnog isječka proporcionalne veličine. Dolaze do zaključka da kružni isječak, čiji je središnji kut 1°, ima površinu jednaku $\frac{P}{360}$, gdje je P površina kruga. Zatim analogijom i generalizacijom pomoću nepotpune indukcije zaključuju da je površina kružnog isječka radijusa r i pripadnog središnjeg kuta α jednaka $\alpha \cdot \frac{r^2\pi}{360}$.

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Povećavaj kut Alfa u materijalu u GeoGebri i popuni tablicu.

Središnji kut kružnog isječka	Dio kruga	Površina kružnog isječka
$360°$	*cijeli krug*	*površina kruga* $= P$
$180°$	*polovina kruga*	$\frac{P}{2}$
$90°$	*četvrtina kruga*	$\frac{P}{4}$
$45°$	*osmina kruga*	$\frac{P}{8}$
$1°$	*360. dio kruga*	$\frac{P}{360}$



Zadatak 2. Promotri prvi i zadnji stupac tablice. Što uočavaš?

Da su površina kružnog isječka i veličina pripadnog središnjeg kuta proporcionalne veličine.

Zadatak 3. Popuni tablicu

Središnji kut	Površina kružnog isječka
$1°$	$\frac{P}{360}$
$2°$	$2 \cdot \frac{P}{360}$
$5°$	$3 \cdot \frac{P}{360}$
$100°$	$100 \cdot \frac{P}{360}$
$\alpha°$	$\alpha \cdot \frac{P}{360}$

Zadatak 4. Ako je r radijus kruga, a α veličina pripadnog središnjeg kuta, čemu je jednaka površina pripadnog kružnog isječka. Koristi se zadnjim retkom prethodne tablice za pomoć.

$$\alpha \cdot \frac{P}{360} = \alpha \cdot \frac{r^2\pi}{360}$$

U nastavku rada preskaćemo preostale formule za računanje površine trokuta i ostalih likova koje učenici uče tijekom školovanja, a koje su spomenute u drugom poglavlju, jer tu nema ništa konceptualno novog. Iduće aktivnosti služe otkrivanju pojma neodređenog integrala te otkrivanju načina računanja površine lika omeđenog zakrivljenom linijom

Aktivnost 17: Motivacija za neodređeni integral

Cilj aktivnosti: Učenici će osvijestiti problem postojanja funkcije $F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $F'(\mathrm{x}) = f(x)$ za sve x iz intervala $\langle a, b\rangle$.

Nastavni oblik: individualni rad, frontalna nastava

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

Svaki učenik dobiva nastavni listić te ga samostalno popunjava. Učenik ima samo 5 minuta da popuni listić. Nakon toga slijedi razredna diskusija.

Pitanja za diskusiju:

Što nam je u zadatku poznato? (*Koeficijent smjera tangente u zadanoj točki*.)

Što on predstavlja? (*Derivaciju funkcije koju tražimo u danoj točki njenog grafa.*)

Što onda znamo, a što tražimo? (*Znamo derivaciju funkcije, a tražimo funkciju čija je to derivacija*.)

Kako ćemo je odrediti? (*Mogli bismo ju odrediti pogađanjem, ali je to neefikasno. Moramo naučiti određivati funkciju ako je poznata njena derivacija.)*

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Kako glasi jednadžba tangente na graf neke funkcije f u točki $T(x_0, f(x_0))$?

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$

Zadatak 2. Koeficijent smjera tangente na graf neke funkcije f u točki $T(x_0, f(x_0))$ je

$k = 2{x_0}^2 - 5$. Koja je to funkcija ako je $T(3,1)$?

Uočavamo da je $x_0 = 3$ *pa je koeficijent smjera pripadne tangente* $k = 2 \cdot 3^2 - 5 = 13.$

Dakle zaključujemo da je $f'(3) = 13$. *Pitamo se derivacija koje funkcije u točki* $x = 3$ *ima vrijednost 13. Pokušavam „naštimati“, ali ne uspjevam jer nemam dovoljno vremena.*

Aktivnost 18: Pojam primitivne funkcije i neodređenog integrala.

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti pojam primitivne funkcije i neodređenog integrala.

Nastavni oblik: rad učenika u paru, frontalna nastava

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika u paru

Tijek aktivnosti:

Svaki učenik dobiva nastavni listić te ga samostalno popunjava. Zatim uspoređuju rješenja i donose zaključke. Nakon toga slijedi razredna diskusija.

Pitanja za diskusiju:

Što predstavlja funkcija f za funkciju F? (*Njenu derivaciju.)*

Kako određujemo funkciju f ako nam je poznata funkcija F? (*Deriviramo funkciju F.)*

Što radimo kako bismo odredili funkciju F ako nam je poznata funkcija f? (*Radimo suprotno od deriviranja.)*

Kako biste nazvali tu operaciju „suprotnog deriviranja“? (*Antideriviranje.)*

Što onda predstavlja funkcija F za funkciju f? (*Njezinu antiderivaciju.)*

Kako zovemo zajednice iz kojih je proizašla naša civilizacija? (*Primitivne zajednice.)*

Odakle je proizašla funkcija f? (*Iz funkcije F, tj.nastala je derivacijom funkcije F.)*

Kako bismo nazvali funkciju F? (*Primitivna funkcija funkcije f.)*

Koliko ste funkcija F, tj. antiderivacija odredili za svaku zadanu funkciju f? (*Više njih.)*

Po čemu su se one razlikovale? (*Po konstanti.)*

Koliko antiderivacija ima neka funkcija? (*Beskonačno mnogo.)*

Nastavnik uvodi nove pojmove:

Zadana je funkcija $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Tada svaku funkciju F za koju za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $F'(x) = f(x)$ nazivamo ANTIDERIVACIJA ili PRIMITIVNA FUNKCIJA funkcije f.

Skup svih primitivnih funkcija ili antiderivacija dane funkcije f zove se NEODREĐENI INTEGRAL funkcije f na intervalu $\langle a, b\rangle$. To zapisujemo: $\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Što mislite, zašto smo upotrijebili pridjev neodređeni? (*Zato što nije određena jedinstvena funkcija F čijom derivacijom nastaje funkcija* f*, nego ih ima beskonačno.)*

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Odredi funkciju F takvu da je $F' = f(x)$, ako je:

a) $f(x) = 2$, $F(x) = 2x, F(x) = 2x + 5, F(x) = 2x - 6 \ldots$

b) $f(x) = 2x$, $F(x) = x^2, F(x) = x^2 + 1, F(x) = x^2 - 3 \ldots$

c) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x, F(x) = \sin x + 0.5, F(x) = \sin x - 1.5 \ldots$

d) $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x, F(x) = e^x - 0.3, F(x) = e^x + 10 \ldots$

Zadatak 2. Usporedi rješenja s rješenjima učenika u paru. Je li funkcija F jedinstvena za pojedinu zadanu funkciju f?

Usporedbom rješenja zaključujemo da funkcija F nije jedinstvena za zadanu funkciju f.

Aktivnost 19: Integral potencije

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti integral potencije to jest čemu je jednako $\int x^n dx$.

Nastavni oblik: rad učenika u paru, frontalna nastava

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika u paru

Tijek aktivnosti:

Učenici u paru dobivaju isti listić te svatko riješi pola prvog zadatka. Zatim proučavaju rješenja i samostalno donose zaključak.

Pitanja za diskusiju:

Za kakve funkcije ste računali neodređeni integral? (*Za funkcije koja ima oblik neke potencije.)*

Što ste uočili promatranjem rješenja prvog zadatka? (*Neodređeni integral potencije je neka potencija čiji je eksponent uvećan za jedan te je podijeljena tim eksponentom uvećanim za jedan*.)

Čemu je onda jednako $\int x^n dx$? ($\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$.)

Je li taj izraz definiran za sve realne brojeve n? (*Nije za* $n = -1$).

Za koje x – eve je definirana funkcija $f(x) = \ln x$? ($x > 0$).

Za koje x – eve je definirana funkcija $f(x) = \ln -x$? ($x < 0$).

Derivirajte $f(x) = \ln x$. ($f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$).

Derivirajte $f(x) = \ln(-x)$. ($f'(x) = \frac{1}{x}, x < 0$).

Koja je domena funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$? ($\mathbb{R}\backslash\{0\}$.)

Kako bi izgledao neodređeni integral $\int \frac{1}{x} dx$ za $x > 0$? ($\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c,\ c \in \mathbb{R}, x > 0$.)

Kako bi izgledao neodređeni integral $\int \frac{1}{x} dx$ za $x < 0$? ($\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c,\ c \in \mathbb{R}, x < 0$.)

Kako bismo to kraće zapisali? ($\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.)

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Riješite zadatak tako što će jedan učenik riješiti prva dva, a drugi učenik zadnja dva zadatka.

$\int 1dx = x + c,\ c \in \mathbb{R}$ jer je $(x + c)' = 1$.

$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c,\ c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{x^5}{5} + c\right)' = x^4$.

$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c,\ c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{x^{-1}}{-1} + c\right)' = x^{-2}$

$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c,\ c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c\right)' = x^{\frac{1}{2}}$.

Zadatak 2. Promotri rješenja prethodnog zadatka pa nadopuni:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = x^n$.

Aktivnost 20: Integrali $\int a^x dx$ i $\int \frac{1}{x \ln a} dx$

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti čemu je jednako $\int a^x dx$ i $\int \frac{1}{x \ln a} dx$.

Nastavni oblik: rad učenika u paru, frontalna nastava

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika u paru

Tijek aktivnosti:

Učenici u paru dobivaju isti nastavni listić 1 te svatko riješi pola prvog zadatka. Zatim proučavaju rješenja i samostalno donose zaključak. Zatim dobivaju nastavni listić 2 te ga na isti način rješavaju.

Pitanja za diskusiju:

Promatrajući rješenja nastavnog listića 1 što ste zaključili čemu je jednako $\int a^x dx$?
($\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$.)

Promatrajući rješenja nastavnog listića 2 što ste zaključili čemu je jednako $\int \frac{1}{x \ln a} dx$?
($\int \frac{1}{x \ln a} dx = \log_a x + c, c \in \mathbb{R}$)

Za kakve brojeve a gornji izrazi imaju smisla? (*Za sve nenegativne realne brojeve a različite od 1.*)

NASTAVNI LISTIĆ 1

Zadatak 1. Riješite zadatak tako što će jedan učenik riješiti prva dva, a drugi učenik zadnja dva zadatka.

$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{2^x}{\ln 2} + c\right)' = 2^x$.

$\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + c\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{5^x}{\ln 5} + c\right)' = 5^x$

$\int 1.5^x dx = \frac{1.5^x}{\ln 1.5} + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{1.5^x}{\ln 1.5} + c\right)' = 1.5^x$

Zadatak 2. Promotri rješenja prethodnog zadatka pa nadopuni:

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}\right)' = a^x$

NASTAVNI LISTIĆ 2

Zadatak 1. Riješite zadatak tako što će jedan učenik riješiti prva dva, a drugi učenik zadnja dva zadatka.

$\int \frac{1}{x \ln 2} dx = \log_2 x + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $(\log_2 x + c)' = \frac{1}{x \ln 2}$.

$\int \frac{1}{x \ln 0.5} dx = \log_{0.5} x + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $(\log_{0.5} x + c)' = \frac{1}{x \ln 0.5}$

$\int \frac{1}{x \ln\frac{3}{2}} dx = \log_{\frac{3}{2}} x + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\log_{\frac{3}{2}} x + c\right)' = \frac{1}{x \ln\frac{3}{2}}$

$\int \frac{1}{x \ln\sqrt{5}} dx = \log_{\sqrt{5}} x + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $\left(\log_{\sqrt{5}} x + c\right)' = \frac{1}{x \ln\sqrt{5}}$.

Zadatak 2. Promotri rješenja prethodnog zadatka pa nadopuni:

$\int \frac{1}{x \ln a} dx = \log_a x + c, c \in \mathbb{R}$ jer je $(\log_a x + c)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Aktivnost 21: Tablica neodređenih integrala

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti tablicu neodređenih integrala.

Nastavni oblik: rad učenika u paru, frontalna nastava

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika u paru

Tijek aktivnosti:

Učenici u paru određuju derivacije zadanih funkcija, a potom pomoću toga popunjavaju tablicu neodređenih integrala.

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Popuni tablice. Jedan učenik popunjava lijevu tablicu, a drugi popunjava desnu tablicu. Zatim prepišite od učenika u paru ono što vam nedostaje.

Funkcija	Derivacija funkcije
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{sin^2 x}$

Funkcija	Derivacija funkcije
x	1
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{cos^2 x}$

Zadatak 2. Samostalno popuni sljedeću tablicu koristeći se rješenjima prvog zadatka i rezultatima prethodne dvije aktivnosti.

Neodređeni integral
$\int 1\,dx = x + c, c \in \mathbb{R}$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}, a > 0, \neq 1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c, c \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c, c \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\int 0\,dx = c, c \in \mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}, n \neq -1$
$\int e^x\,dx = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x\ln a}\,dx = \log_a x + c, c \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, x > 0$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = \operatorname{ctg} x + c, c \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Aktivnost 22: Problem površine

Cilj aktivnosti: Učenici će računati površinu lika omeđenog zakrivljenom linijom.

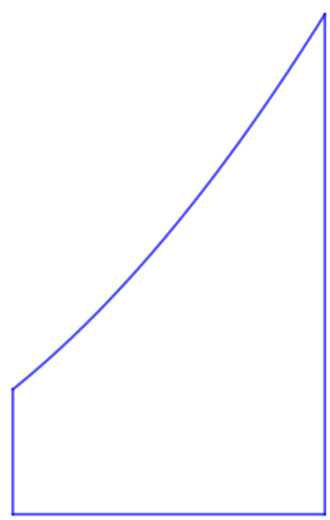
Nastavni oblik: frontalna nastava.

Potreban materijal: materijal u Geogebri

Tijek aktivnosti:

Nastavnik učenicima na projekcijskom platnu prikazuje zadatak u kojem je potrebno izračunati površinu bazena koji ima oblik lika omeđenog zakrivljenom linijom. Nastavnik prvo navodi učenike da kažu da ih ta zakrivljena linija podsjeća na dio parabole. Zatim nastavnik navodi učenike da bi taj lik mogli smjestiti u pravokutni koordinatni sustav i pogađanjem nacrtati graf odgovarajuće kvadratne funkcije. Zatim učenici dolaze do ideje da bismo ovu površinu mogli aproksimirati površinom upisanih i opisanih pravokutnika. Nastavnik prikazuje u materijalu u GeoGebri što je upisani, a što opisani pravokutnik. Nakon toga će učenici u sljedećoj aktivnosti računati površine upisanih i opisanih pravokutnika.

Zadatak: Bazen ima oblik lika kakav je prikazan na donjoj slici. Izračunajte mu površinu.



Pitanja za diskusiju

Možete li odmah pomoću neke formule odrediti površinu danog lika? *(Ne možemo, jer lik nema sve ravne stranice.)*

Na što vas podsjeća zakrivljena stranica lika? (*Na dio parabole*.)

Gdje bismo mogli smjestiti ovu sliku? (*U pravokutni koordinatni sustav te nacrtati odgovarajući graf kvadratne funkcije.)*

Kako ćemo nacrtati odgovarajući graf? (*Pogađanjem*.)

Kako biste mogli približno izračunati površinu danog lika? (*Tako da mu upišemo ili opišemo pravokutnik i izračunamo mu površinu.)*

Kakva je površina danog lika u odnosu na površinu upisanog pravokutnika? (*Manja.)*

Kakva je površina danog lika u odnosu na površinu opisanog pravokutnika? (*Veća.)*

Jesmo li morali koristiti upisane i opisane pravokutnike? (*Nismo, mogli smo i neke druge likove na primjer krug ili trokut.)*

Koja je prednost korištenja pravokutnika? (*Njihova se površina najjednostavnije izračuna*.)

Aktivnost 23: Računanje površine pomoću upisanih i upisanih pravokutnika

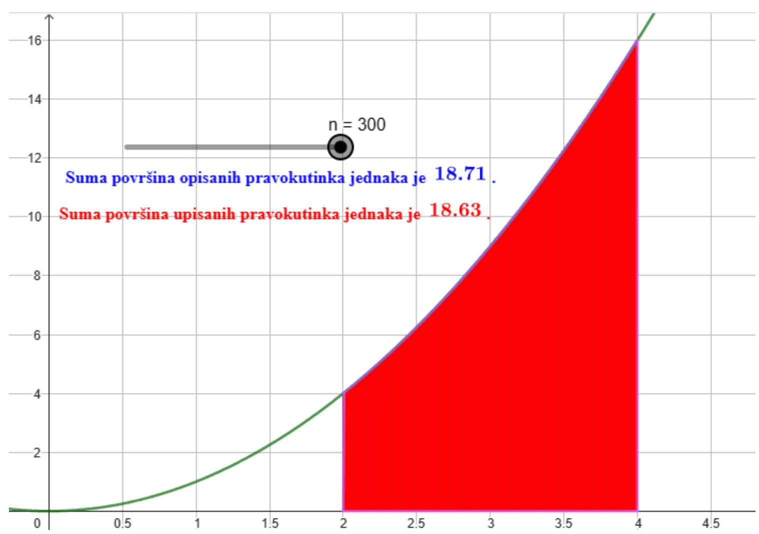
Cilj aktivnosti: Učenici će računati površinu lika omeđenog zakrivljenom linijom pomoću opisanih i upisanih pravokutnika.

Nastavni oblik: rad u tročlanim skupinama, frontalna nastava

Potreban materijal: nastavni listić, materijal u Geogebri

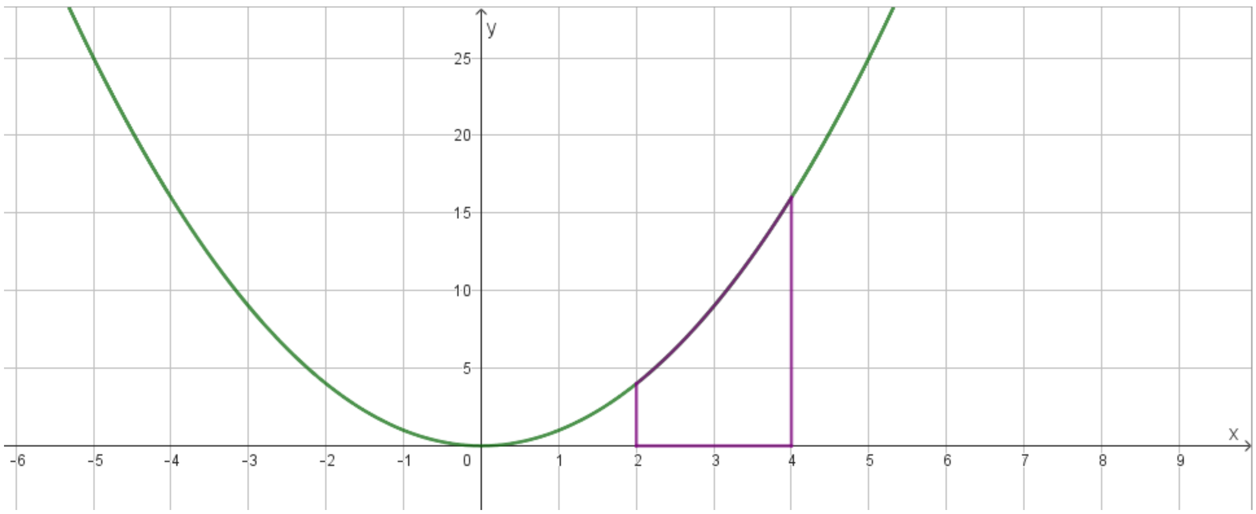
Tijek aktivnosti:

Svaki učenik u skupini dobije jednaki nastavni listić te ga rješava prema uputama. Učenici imaju zadatak podijeliti zadani interval na dva, tri ili četiri jednaka dijela te računati pripadne zbrojeve površina opisanih i upisanih pravokutnika. Učenici uočavaju da se zbroj površina upisanih pravokutnika sve više povećava kako interval dijelimo na sve više jednakih dijelova, a zbroj površina opisanih pravokutnika se smanjuje. Naslućuju da će se ti zbrojevi izjednačiti ako interval podijelimo na dovoljan broj jednakih dijelova. U to ih uvjerava nastavnik pokazivanjem prikladnog materijala u GeoGebri te zaključuju da je površina danog lika približno jednaka 18.6 kvadratnih jediničnih duljina.

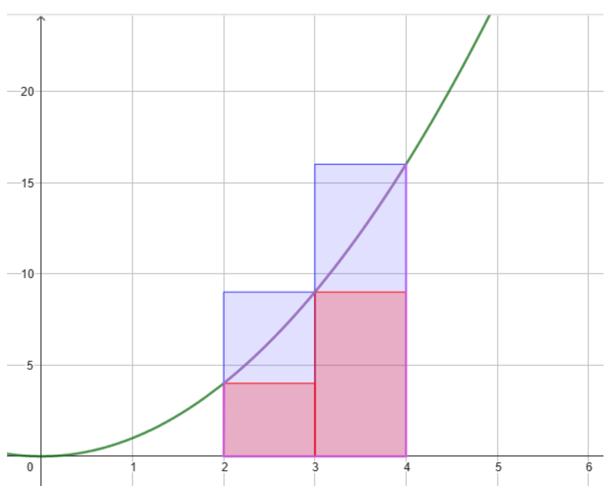


NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1. Na slici je graf funkcije $f(x) = x^2$ i ljubičasti lik kojem trebate izračunati približnu površinu. Neka svaki učenik riješi jedan podzadatak.



a) Podijelite interval $[2,\ 4]$ na dva jednaka dijela. Upišite i opišite danom liku pravokutnike te izračunajte njihove površine. Aproksimirajte površinu danog lika pomoću zbroja površina upisanih te opisanih pravokutnika.



Uočimo da je širina svakog pravokutnika jednaka jedan. Pravokutnike promatramo slijeva na desno.

Visina prvog upisanog pravokutnika je $f(2) = 4$ *pa mu je i površina jednaka 4 kvadratne jedinične duljine.*

Visina drugog upisanog pravokutnika je $f(3) = 9$ *pa mu je i površina jednaka 9 kvadratnih jediničnih duljina.*

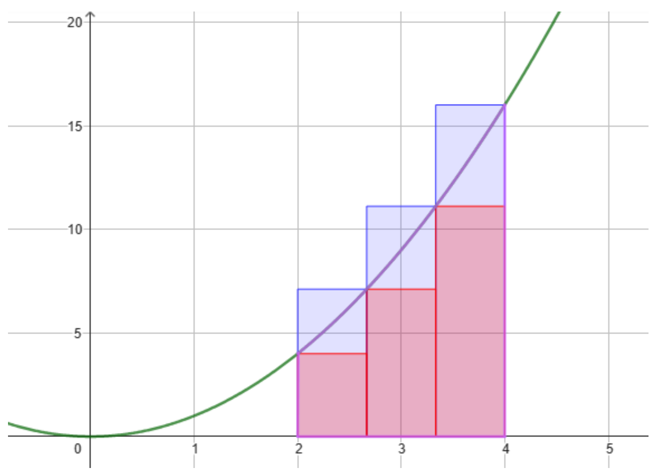
Zbroj površina upisanih pravokutnika je 13 kvadratnih jediničnih duljina.

Visina prvog opisanog pravokutnika je $f(3) = 9$ *pa mu je i površina jednaka 9 kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina drugog opisanog pravokutnika je $f(4) = 16$ *pa mu je i površina jednaka 16 kvadratnih jediničnih duljina.*

Zbroj površina opisanih pravokutnika je 25 kvadratnih jediničnih duljina.

b) Podijelite interval $[2,\ 4]$ na tri jednaka dijela. Upišite i opišite danom liku pravokutnike te izračunajte njihove površine. Aproksimirajte površinu danog lika pomoću zbroja površina upisanih te opisanih pravokutnika.



Uočimo da je širina svakog pravokutnika jednaka $\frac{2}{3}$. *Pravokutnike promatramo slijeva na desno.*

Visina prvog upisanog pravokutnika je $f(2) = 4$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{8}{3}$ *kvadratne jedinične duljine.*

Visina drugog upisanog pravokutnika je $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9}$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{128}{27}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina trećeg upisanog pravokutnika je $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9}$ *pa mu je i površina jednaka* $\frac{200}{27}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Zbroj površina upisanih pravokutnika je $\frac{400}{27} \approx 14.81$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

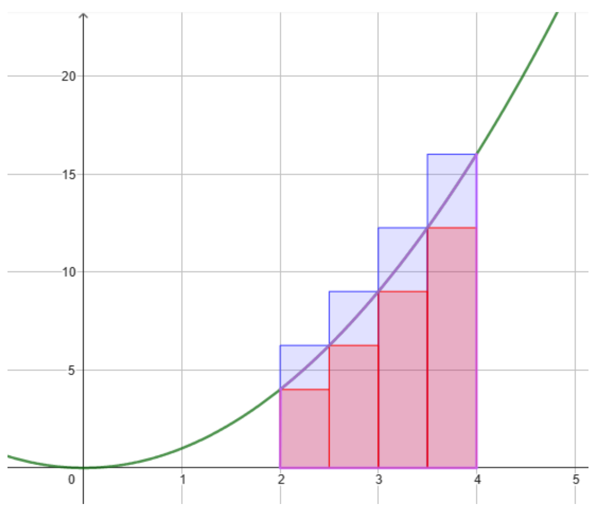
Visina prvog opisanog pravokutnika je $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9}$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{128}{27}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina drugog opisanog pravokutnika je $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9}$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{200}{27}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina trećeg opisanog pravokutnika je $f(4) = 16$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{32}{3}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Zbroj površina opisanih pravokutnika je $\frac{616}{27} \approx 22.81$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

c) Podijelite interval $[2,\ 4]$ na četiri jednaka dijela. Upišite i opišite danom liku pravokutnike te izračunajte njihove površine. Aproksimirajte površinu danog lika pomoću zbroja površina upisanih te opisanih pravokutnika.



Uočimo da je širina svakog pravokutnika jednaka $\frac{1}{2}$. *Pravokutnike promatramo slijeva na desno.*

Visina prvog upisanog pravokutnika je $f(2) = 4$ *pa mu je površina jednaka 2 kvadratne jedinične duljine.*

Visina drugog upisanog pravokutnika je $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{25}{8}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina trećeg upisanog pravokutnika je $f(3) = 9$ *pa mu je i površina jednaka* $\frac{9}{2}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina četvrog upisanog pravokutnika je $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$ *pa mu je i površina jednaka* $\frac{49}{8}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Zbroj površina upisanih pravokutnika je $\frac{63}{4} \approx 15.75$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina prvog opisanog pravokutnika je $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{25}{8}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina drugog opisanog pravokutnika je $f(3) = 9$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{9}{2}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina trećeg opisanog pravokutnika je $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$ *pa mu je površina jednaka* $\frac{49}{8}$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Visina četvrtog opisanog pravokutnika je $f(4) = 16$ *pa mu je površina jednaka 8 kvadratnih jediničnih duljina.*

Zbroj površina opisanih pravokutnika je $\frac{37}{4} \approx 21.75$ *kvadratnih jediničnih duljina.*

Zadatak 2. Popunite tablicu podacima. Što uočavate? Što će se dogoditi kada budemo zadani interval dijelili na što više jednakih dijelova?

Broj jednakih dijelova na koji ste podijelili zadani interval	Zbroj površina upisanih pravokutnika	Zbroj površina opisanih pravokutnika
2	13	25
3	14.81	22.81
4	15.75	21.75

Uočavamo da se zbroj površina upisanih pravokutnika sve više povećava kako dijelimo zadani interval na što više jednakih dijelova, zbroj površina opisanih pravokutnika se smanjuje. Očekujemo da će se te površine izjednačiti.

Aktivnost 24: Newton – Leibnizova formula

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti Newton Leibnizovu formulu.

Nastavni oblik: individualan rad, frontalna nastava.

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika.

Tijek aktivnosti:

Svaki učenik dobije nastavni listić te ga rješava prema uputama. Učenici uočavaju da površinu lika ispod grafa na nekom segmentu mogu računati pomoću primitivne funkcije zadane funkcije. Na taj način određuju površinu lika iz prethoden aktivnosti, uspoređuju rezultate i vide da se podudaraju. Generalizacijom uz pomoć nepotpune indukcije zaključuju kako glasi Newton – Leibnizova formula te nastavnik uvodi pojam određenog integrala. Nakon toga, učenici bi u sljedećoj aktivnosti otkrili precizniju definiciju određenog intrevala, ali to nije u fokusu ovog diplomskog rada.

Pitanja za diskusiju:

Na koji ste način u prvom zadatku odredili pvršinu lika ispod grafa na danom segmentu? (*Zaključili smo da je taj lik pravokutnik, sa slike smo mu odredili širinu i duljinu i lako izračunali površinu.)*

Koji je drugi način na koji ste tom liku odredili površinu. (*Odredili smo primitivnu funkciju zadane funkcije i izračunali joj vrijednosti u rubovima segmenta. Te smo vrijednosti oduzeli i dobili površinu traženog lika*.)

Kakva su ta dva rezultata? (*Jednaka.)*

Na koji način ste u drugom zadatku određivali površinu lika ispod grafa funkcije na danom segmentu? (*Odredili smo primitivnu funkciju zadane funkcije i izračunali joj vrijednosti u rubovima segmenta. Te smo vrijednosti oduzeli i dobili površinu traženog lika.)*

Usporedite taj rezultat s površinom tog lika koju smo izračunali u prethodnoj aktivnosti. (*U prethodnoj aktivnosti smo traženu površinu aproksimirali s 18.6 kvadratnih jediničnih duljina, a u ovom zadatku smo dobili da je tražena površina* $\frac{56}{3}$ *kvadratnih jediničnih duljina što je približno jednako*.)

Kako bismo mogli općenito odrediti površinu lika ispod grafa na danom segmentu? (*Odredili bismo primitivnu funkciju zadane funkcije i izračunali joj vrijednosti u rubovima segmenta. Te bismo vrijednosti oduzeli i dobili površinu traženog lika*.)

Tu formulu nazivamo Newton Leibnizova formula.

Kako nazivamo skup svih primitivnih funkcija neke funkcije? (*Neodređeni integral.)*

Je li bilo bitno koju primitivnu funkciju odaberemo? (*Nije, jer se konstante uvijek pokrate.)*

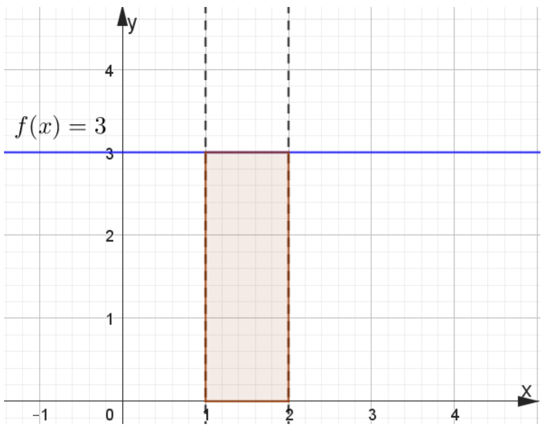
Kako biste nazvali dobiveni rezultat budući da ste odredili vrijednosti tih primitivnih funkcija? (*Određeni integral.)*

Nastavnik uvodi oznaku za određeni integral i piše na ploču formulu: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

NASTAVNI LISTIĆ

Zadatak 1.

a) Izračunaj površinu lika omeđenog grafom funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3$, x – osi te pravcima $x = 1$ i $x = 2$, to jest površinu ispod grafa funkcije f na segmentu $[1,2]$ kao na donjoj slici.



Taj lik je pravokutnik čija širina iznosi 1 jediničnu duljinu, a duljina 3 jedinične duljine. Stoga površina danog lika iznosi 3 kvadratne jedinične duljine.

b) Neka je $F(x) = 3x + c, c \in \mathbb{R}$. Koja je veza između funkcija f i F?

Funkcija F je primitivna funkcija funkcije f.

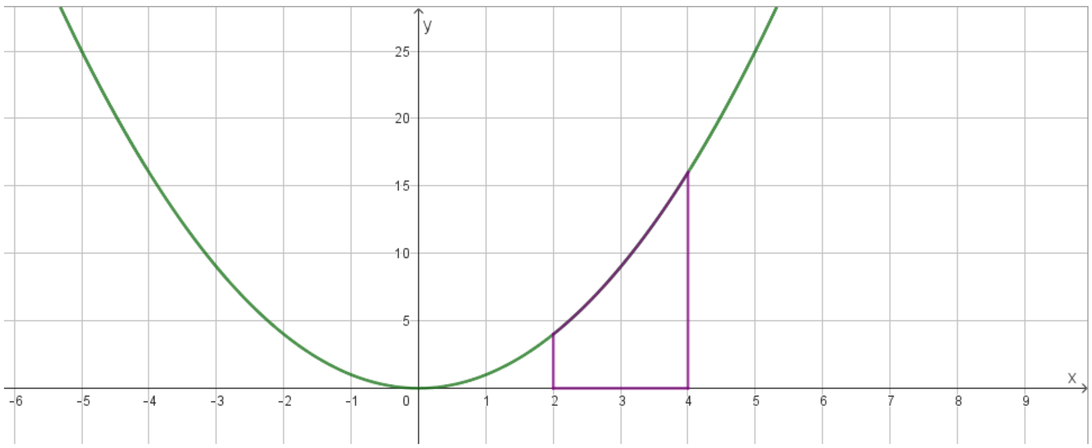
c)Izračunaj $F(1)$ i $F(2)$ pa $F(2) - F(1)$.

$F(2) - F(1) = 3 \cdot 2 + c - (3 \cdot 1 + c) = 3$

d) Usporedi odgovore u a) i c). Što uočavaš?

Dobili smo jednake iznose, to znači da površinu ispod grafa funkcije na nekom segmentu možemo izračunati pomoću pripadne primitivne funkcije.

Zadatak 2. Pokušajte na isti način izračunati površinu lika omeđenog grafom funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, x – osi te pravcima $x = 2$ i $x = 4$, to jest površinu ispod grafa funkcije f na segmentu $[2,4]$ kao na donjoj slici.



Prvo treba odrediti primitivnu funkciju F funkcije f, a to je $F(x) = \frac{x^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$.

Površina danog lika je jednala $F(4) - F(2) = \frac{4^3}{3} + c - \frac{2^3}{3} - c = \frac{56}{3}$ kvadratnih jediničnih duljina.

Bibliografija

[1] F. M. Bruckler, *Povijest matematike 1-izmijenjeno i dopunjeno izdanje*, dostupno na https://www.mathos.unios.hr/images/uploads/714.pdf (studeni 2023.)

[2] A. Copić, M. Ćulav Markičević, Lj. Jeličić, R. Kalazić, S. Lukač, K. J. Penzar, Z. Šikić,

Matematika 3, udžbenik za treći razred gimnazije i srednje strukovne škole, 2. svezak, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[3] A. Čižmešija, *Seminar metodike nastave matematike 4: Integrali,* Zagreb, 2023.

[4] D. Jukić, *Mjera i integral,* Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[5] Kategorije znanja u matematici, dostupno na https://arhiva-2021.loomen.carnet.hr/mod/book/view.php?id=169432&chapterid=40750 (studeni 2023.)

[6] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, Narodne novine 7/2019., dostupno na https://narodnenovine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html (studeni 2023.)

[7] D. Matijević, D. Ševerdija, *Problemi vidljivosti*, Osječki matematički list 10 (2010), 71 – 84.

[8] *Rezultati nacionalnih ispita: Ovo je prosječna ocjena; evo što učenici najgore znaju,* dostupno na https://www.tportal.hr/vijesti/clanak/rezultati-nacionalnih-ispita-ovo-je-prosjecna-ocjena-evo-sto-ucenici-najgore-znaju-20230607?meta_refresh=1 (studeni 2023.)

[9] J. A. Van De Walle, K. S. Karp, J. M. Bay – Williams, *1. Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally, 8th Edition,* Pearson, New Jersey, 2013.

[10] D. Veljan i B. Pavković, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, (1992).

Sažetak

Jedan od najvažnijih geometrijskih pojmova koji se obrađuje u osnovnoj i srednjoj školi je pojam površine, jer ima veliki značaj u primjeni u svakodnevnom životu. U ovom radu prvo su dane aksiomatske definicije pojma mjere i površine te dokazi formula za izračunavanje površine pravokutnika, paralelograma i trokuta. Nadalje, opisani su ishodi učenja nacionalnog matematičkog kurikuluma vezanih za koncept površine. Posljednje su izložene razne praktične aktivnosti koje trebaju pridonijeti konceptualnom razumijevanju pojma površine likova s naglaskom na gradivo osnovnoškolskih razreda te integrala koji se obrađuju u četvrtom razredu srednje škole.

Summary

One of the most important geometrical concepts taught in elementary school is the concept of the area, which is important for its use in everyday life. In the first part of this diploma thesis, the concepts of measure and area are axiomatically defined with proofs of formulas for areas of rectangles, parallelograms, and triangles. Furthermore, the learning outcomes of the national mathematics curriculum related to the concept of surface area are described. Lastly, various practical activities for students to introduce the concept of the surface area and formulas for calculating the surface area of different geometrical figures with emphasis on the teaching content of elementary school and integrals introduced in the fourth year of high school are described.

Životopis

Zovem se Eva Weitzer i rođena sam 3. rujna 1997. godine u Puli. Pohađala sam Osnovnu školu Marije i Line u Umagu te opću gimnaziju u Srednjoj školi „Vladimir Gortan“ u Bujama. Tijekom školovanja sam imala veliki interes za matematiku pa sam 2016. godine upisala prijediplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu. Prijediplomski studij sam promijenila 2019. godine upisavši nastavnički smjer Matematike koji sam završila 2021. godine. Iste godine sam upisala diplomski sveučilišni studij Matematike nastavničkog smjera na istom fakultetu te ću ga završiti ove godine. Zaposlena sam u Srednjoj školi Gospodarska škola Istituto professionale Buje od rujna 2023. godine.