SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Bruno Iljazović

NELINEARNA FOURIEROVA ANALIZA I PROBLEM GIBANJA NEKOLIKO TIJELA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, travanj 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

AKNS sustav je sustav diferencijalnih jednadžbi koji se pojavljuje u proučavanju integrabilnih sustava, nelinearnih valova i solitona. U zadnjih par desetljeća razvijene su razne tehnike za rješavanje AKNS sustava koje omogućavaju konstrukciju eksplicitnih rješenja i proučavanje njihovih svojstava, uključujući stabilnost rješenja.

U prvom poglavlju obradit ćemo osnove Fourierove (harmonijske) analize. Uvest ćemo Fourierove redove i višestruke Fourierove redove, koji su usko povezani uz glavni dio rada. Potom uvodimo Fourierovu transformaciju na L^1 i proširujemo je na prostore L^p, za $1 < p \leq 2$. Prvo poglavlje završavamo svojstvima dijadskih intervala koja koristimo u kasnijim dokazima.

U drugom i glavnom poglavlju uvodimo AKNS sustave koji se prirodno pojavljuju u proučavanju gibanja tijela koncentričnim kružnim putanjama u ravnini s mogućim međusobnim interakcijama. Dobit ćemo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi čija su rješenja pozicije tijela u ravnini u vremenu. Prvo ćemo dati eksplicitna rješenja gornje-trokutastih sustava pomoću višestrukih Fourierovih integrala. Za općeniti 2×2 sustav dat ćemo formalno rješenje u obliku reda te dokazati konvergenciju u najjednostavnijem slučaju. Zatim ćemo dokazati stabilnost rješenja gornje-trokutastih sustava kada funkcije interakcija pripadaju prostorima L^p za $1 \leq p < 2$. Na kraju ćemo pokazati da se L^2 slučaj ne može obraditi istom metodom.

Poglavlje 1

Osnove Fourierove analize

U ovom radu oznakom L^p, za $1 \leq p \leq \infty$, označavat ćemo prostor izmjerivih funkcija na $\mathbb{R}$ za koje je Lebesgueov integral

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx$$

konačan. Normu u prostoru L^p označavat ćemo s

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Funkcija f pripada prostoru L^∞ ako je

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ za g.s. } x \in \mathbb{R}\} < \infty,$$

što je tada i njena norma. Za $1 \leq p \leq \infty$ s p' ćemo označavati dualni (ili konjugirani) indeks od p, za koji vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Trebat će nam Hölderova nejednakost.

Teorem 1.0.1. *Neka su funkcije $f \in L^p$ i $g \in L^{p'}$ za $1 < p < \infty$. Tada funkcija fg pripada prostoru L^1 i vrijedi*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Također ćemo koristiti njen općenitiji oblik.

Korolar 1.0.2. *Neka su $p_1, ..., p_n \in \langle 0, \infty \rangle$ i r takav da je*

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

Tada funkcija

$$\prod_{i=1}^{n} f_i$$

pripada prostoru L^r *i vrijedi*

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}.$$

1.1 Fourierovi redovi

Fourierova analiza bavi se razlaganjem dane funkcije na jednostavnije komponente, kao što su trigonometrijske funkcije, kako bi se bolje razumjela njena svojstva.

Stavimo $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ te neka je funkcija f 2π-periodična i integrabilna na $[0, 2\pi\rangle$, tj. konačan je integral

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Važno svojstvo gornjeg integrala je invarijantnost na translacije,

$$\int_{\mathbb{T}} f(t - t_0)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt.$$

Fourierovi koeficijenti

Definirajmo u ovom potpoglavlju za funkciju $f \in L^1(\mathbb{T})$ normu

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt.$$

Definicija 1.1.1. *Trigonometrijski polinom na* $\mathbb{T}$ *je funkcija* P *oblika*

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int},$$

gdje je N *prirodan broj, a* $a_n \in \mathbb{C}$.

Brojeve n zovemo frekvencijama od P, a najveći n takav da je $|a_n| + |a_{-n}| \neq 0$ stupanj od P. Znajući funkciju P možemo izračunati koeficijente a_n formulom

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(t)e^{-int}dt.$$

To proizlazi izravno iz

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ijt}dt = \begin{cases} 1 & \text{ako } j = 0, \\ 0 & \text{ako } j \neq 0, \end{cases}$$

za sve $j \in \mathbb{Z}$.

Definicija 1.1.2. *Trigonometrijski red definiramo kao izraz S oblika*

$$S(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}.$$

U gornjoj definiciji nema pretpostavki o veličini koeficijenata ili konvergenciji reda, pa njih za sada gledamo formalno. Konjugirani trigonometrijski red definiramo s

$$\tilde{S}(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sgn}(n) a_n e^{int}.$$

Neka je funkcija $f \in L^1(\mathbb{T})$. Definiramo n-ti *Fourierov koeficijent* s

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt.$$

Definicija 1.1.3. *Fourierov red $S[f]$ funkcije $f \in L^1(\mathbb{T})$ je trigonometrijski red*

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Konjugirani Fourierov red označavamo sa $\widetilde{S}[f]$. Kažemo da je trigonometrijski red Fourierov red ako je Fourierov red neke funkcije $f \in L^1(\mathbb{T})$. Lako je dokazati sljedeća svojstva Fourierovih koeficijenata.

Propozicija 1.1.4. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Tada imamo sljedeće.*

(a) $\widehat{(f+g)}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$.

(b) Za $\alpha \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$\widehat{(\alpha f)}(n) = \alpha \widehat{f}(n).$$

(c) Za $\overline{f}(t) := \overline{f(t)}$ vrijedi

$$\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}.$$

(d) Za $f_\tau(t) := f(t-\tau)$, $\tau \in \mathbb{T}$ vrijedi

$$\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n)e^{-in\tau}.$$

(e) Vrijedi

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt = \|f\|_1.$$

Korolar 1.1.5. *Neka su funkcije $f_j \in L^1(\mathbb{T})$, $j = 0, 1, ...$ i $\|f_j - f_0\|_1 \xrightarrow{j\to\infty} 0$. Tada vrijedi uniformna konvergencija*

$$\widehat{f_j} \to \widehat{f_0}.$$

Teorem 1.1.6. *Neka je funkcija $f \in L^1(\mathbb{T})$ i $\widehat{f}(0) = 0$. Definiramo F*

$$F(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Tada je F neprekidna funkcija, 2π-periodična i vrijedi

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}(n), \quad n \neq 0.$$

Dokaz. Neprekidnost od F je očita, a periodičnost slijedi iz

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau)d\tau = 2\pi\widehat{f}(0) = 0.$$

Konačno, vrijedi

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(t)\frac{1}{-in}e^{-int}dt = \frac{1}{in}\widehat{f}(n),$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili parcijalnu integraciju. □

Sada definiramo konvoluciju na $L^1(\mathbb{T})$.

Teorem 1.1.7. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Vrijedi da je funkcija*

$$\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$$

integrabilna na $\mathbb{T}$ za gotovo svaki t. Definiramo funkciju h:

$$h(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Vrijedi $h \in L^1(\mathbb{T})$,

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1,$$

i

$$\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n),$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Funkciju h iz prethodnog teorema zovemo konvolucijom f i g te pišemo $h = f * g$. Neka je $f \in L^1(\mathbb{T})$. Za parcijalne sume Fourierovog reda imamo sljedeće.

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)} f(t) dt = (D_N * f)(x), \end{aligned}$$

gdje smo s D_N definirali *Dirichletovu jezgru*,

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

Uvodimo i usrednjenje Dirichletove jezgre, Fejérovu jezgru K_N,

$$K_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Fejérove jezgre, za razliku od Dirichletovih, zadovoljavaju svojstva „dobre" jezgre, iskazana u sljedećem teoremu.

Teorem 1.1.8. *Za jezgre* $K_N(x)$ *vrijedi sljedeće.*

(a) Za svaki $N \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_N(t) dt = 1.$$

(b) Vrijedi

$$\sup_N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_N(t)| \, dt < \infty.$$

(c) Za sve $0 < \delta < \pi$,

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} |K_N(t)| \, dt = 0.$$

Dokaz ovog teorema i drugi detalji mogu se naći u knjigama [7] ili [11].

Korolar 1.1.9. *Neka je funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$. Vrijedi konvergencija*

$$\|K_N * f - f\|_1 \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Posljedica gornjeg korolara je jedinstvenost funkcije $f \in L^1(\mathbb{T})$ ako su poznati njeni Fourierovi koeficijenti $\widehat{f}(n)$.

Korolar 1.1.10. *Neka je funkcija $f \in L^1(\mathbb{T})$ i $\widehat{f}(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Tada je $f(x) = 0$ za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Iz $\widehat{f}(n) = 0$ slijedi $(K_N * f)(x) = 0$ za sve N pa iz Korolara 1.1.9 slijedi tvrdnja. $\square$

Korolar 1.1.11 (Riemann-Lebesgueova lema)**.** *Neka je funkcija $f \in L^1(\mathbb{T})$. Tada vrijedi*

$$\widehat{f}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i N takav da je $\|K_N * f - f\|_1 < \epsilon$. Za $|n| > N$ vrijedi $\widehat{K_N}(n) = 0$ pa imamo

$$|\widehat{f}(n)| = |(\widehat{K_N * f})(n) - \widehat{f}(n)| \leq \|K_N * f - f\|_1 < \epsilon,$$

gdje smo iskoristili Teorem 1.1.7 i Propoziciju 1.1.4 (e). $\square$

1.2 Višestruki Fourierovi redovi

Neka je funkcija f 2π-periodična te neka pripada prostoru $L^p([0, 2\pi])$ za $1 < p < \infty$. Poznato je da tada vrijedi

$$\sum_{-N\leq n\leq N} \widehat{f}(n)e^{inx} \xrightarrow{N\to\infty} f(x). \tag{1.1}$$

Konvergencija vrijedi i u L^p topologiji i gotovo svuda. Za glatke funkcije obje konvergencije su očite. Stoga je za $f \in L^p$ konvergencija u L^p topologiji ekvivalentna ograničenosti operatora

$$f \mapsto \sum_{-N\leq n\leq N} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

na prostoru L^p, s konstantom ograničenosti neovisnom o N, a konvergencija gotovo svuda operatora

$$f \mapsto \sup_N \left| \sum_{-N \leq n \leq N} \widehat{f}(n) e^{inx} \right|.$$

Fiksirajmo $p = 2$ za ostatak diskusije. Ako označimo funkcije s lijeve strane izraza (1.1) s f_N, kvadriranjem izraza dobivamo

$$f_N^2(x) \xrightarrow{N \to \infty} f^2(x). \tag{1.2}$$

Konvergencija gotovo svuda slijedi izravno, a korištenjem Hölderove nejednakosti imamo

$$\|f^2 - f_N^2\|_1 \leq \|f - f_N\|_2 \|f + f_N\|_2 \xrightarrow{N \to \infty} 0,$$

tj. vrijedi konvergencija u L^1 topologiji. Kvadriranjem sume imamo

$$\sum_{-N \leq n_1, n_2 \leq N} \widehat{f}(n_1) \widehat{f}(n_2) e^{in_2 x} e^{in_1 x} \xrightarrow{N \to \infty} f^2(x).$$

Sumu možemo rastaviti na 3 dijela:

$$\begin{aligned} \sum_{-N \leq n_1, n_2 \leq N} \widehat{f}(n_1) \widehat{f}(n_2) e^{in_1 x} e^{in_2 x} = & \sum_{-N \leq n_1 < n_2 \leq N} \widehat{f}(n_1) \widehat{f}(n_2) e^{in_1 x} e^{in_2 x} \\ & + \sum_{-N \leq n_1 = n_2 \leq N} \widehat{f}(n_1) \widehat{f}(n_2) e^{in_1 x} e^{in_2 x} \\ & + \sum_{-N \leq n_2 < n_1 \leq N} \widehat{f}(n_1) \widehat{f}(n_2) e^{in_1 x} e^{in_2 x}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Za srednji član vrijedi

$$\sum_{-N \leq n_1 = n_2 \leq N} \widehat{f}(n_1) \widehat{f}(n_2) e^{in_1 x} e^{in_2 x} = \sum_{-N \leq n \leq N} \widehat{f * f}(n) e^{2inx}.$$

Funkcija $f * f$ opet pripada L^2 gornji izraz konvergira prema $(f * f)(2x)$ u L^2 topologiji ili gotovo svuda. Kako je $L^2([0, 2\pi])$ topologija jača od one na $L^1([0, 2\pi])$, konvergencija vrijedi i u L^1. Prvi i treći članovi su jednaki što povlači da red

$$\sum_{-N \leq n_1 < n_2 \leq N} \widehat{f}(n_1) \widehat{f}(n_2) e^{in_1 x} e^{in_2 x}$$

konvergira u L^1 topologiji i gotovo svuda. Ako umjesto kvadriranja izraza (1.1) pomnožimo izraze za različite funkcije $f, g \in L^2([0, 2\pi])$ te rastavimo na 3 dijela kao u (1.3), prvi i treći dio više nisu jednaki pa nemamo lagani odgovor na konvergenciju reda

$$\sum_{-N\le n_1<n_2\le N} \widehat{f}(n_1)\widehat{g}(n_2)e^{in_1x}e^{in_2x}. \tag{1.4}$$

Konvergencija u L^1 topologiji je, slično kao gore, ekvivalentna ograničenosti operatora

$$(f,g)\mapsto \sum_{-N\le n_1<n_2\le N} \widehat{f}(n_1)\widehat{g}(n_2)e^{in_1x}e^{in_2x} \tag{1.5}$$

s $L^2\times L^2\to L^1$, s konstantom ograničenosti neovisnom o N, a konvergencija gotovo svuda operatora

$$(f,g)\mapsto \sup_N \left|\sum_{-N\le n_1<n_2\le N} \widehat{f}(n_1)\widehat{g}(n_2)e^{in_1x}e^{in_2x}\right|. \tag{1.6}$$

Općenito, zanima nas konvergira li višestruki Fourierov red

$$\sum_{-N\le n_1<\ldots<n_d\le N} \widehat{f_1}(n_1)\ldots\widehat{f_d}(n_d)e^{in_1x}\ldots e^{in_dx},$$

u prostoru L^{2d} ili gotovo svuda. Kao i prije, uz to pitanje je povezana ograničenost operatora

$$(f_1,\ldots,f_d)\mapsto \sum_{-N\le n_1<\ldots<n_d\le N} \widehat{f_1}(n_1)\ldots\widehat{f_d}(n_d)e^{in_1x}\ldots e^{in_dx}, \tag{1.7}$$

s prostora $L^2\times\ldots\times L^2$ u $L^{2/d}$ neovisno o N, te operatora

$$(f_1,\ldots,f_d)\mapsto \sup_N \left|\sum_{-N\le n_1<\ldots<n_d\le N} \widehat{f_1}(n_1)\ldots\widehat{f_d}(n_d)e^{in_1x}\ldots e^{in_dx}\right|. \tag{1.8}$$

Takvim pitanjima bavit ćemo se kasnije, u odjeljku 2.6.

1.3 Fourierova transformacija

Teorija Fourierovih redova primjenjiva je samo na funkcije definirane na kružnici ili, ekvivalentno, periodične funkcije definirane na cijelom $\mathbb{R}$. Sada uvodimo analognu teoriju za funkcije na cijelom $\mathbb{R}$ koje nisu periodične. Ipak, morat ćemo zadati neke uvjete na funkcije koje promatramo; to da su na neki način „male” u beskonačnosti.

Prisjetimo se da Fourierov red preslikava funkciju u niz brojeva, Fourierove koeficijente. Sada će slika funkcije f biti druga funkcija, s oznakom $\hat{f}$, opet definirana na $\mathbb{R}$.

Zato je moguća određena simetrija između funkcije i njene Fourierove transformacije, dok kod Fourierovih redova analogija nije jasna.

Prisjetimo se Fourierovih koeficijanata za periodičnu funkciju f:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

za koje onda vrijedi, uz dodatne uvjete na f,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}. \tag{1.9}$$

Fourierovu transformaciju dobijemo kada zamijenimo diskretne simbole u gornjim izrazima s kontinuiranim.

Definicija 1.3.1. *Neka funkcija f pripada prostoru L^1. Njenu Fourierovu transformaciju definiramo kao funkciju*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

Analogija od (1.9) je inverzna Fourierova transformacija, formalno:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

Na $\mathbb{R}^n$ analogno definiramo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx.$$

Vrijedi

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_1,$$

pa je Fourierova transformacija ograničen operator s $L^1(\mathbb{R}^n)$ u $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ s konstantom ograničenosti 1.

Fourierova transformacija na Schwartzovom prostoru

Želimo proširiti Fourierovu transformaciju s prostora L^1 na L^p, za $1 < p \leq 2$. Prvo pogledajmo ponašanje na Schwartzovom prostoru $\mathcal{S}$.

Definicija 1.3.2. *Schwartzov prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je prostor brzo opadajućih funkcija definiran s*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |f|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < \infty, \text{ za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Lako se provjeri da za funkciju $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i za $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x)| \leq C_m(1 + |x|)^{-m}.$$

Odavde slijedi da

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n),$$

za svaki $1 \leq p \leq \infty$. Schwartzov prostor je generiran prebrojivom familijom $|\cdot|_{\alpha,\beta}$, čiji su članovi samo polunorme jer uvjet

$$|f|_{\alpha,\beta} = 0 \quad \text{ako i samo ako } f = 0$$

ne vrijedi za npr. konstantu funkciju f i $\beta > 0$. Prostor $\mathcal{S}$ nije normiran prostor, ali postoji metrika ρ, definirana s

$$\rho(f, g) = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \cdot \frac{|f - g|_{\alpha,\beta}}{1 + |f - g|_{\alpha,\beta}}.$$

Schwartzov prostor uz gornju metriku, $(\mathcal{S}, \rho)$, jest potpun metrički prostor. Za $f_k \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$ pišemo

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f,$$

ako

$$|f_k - f|_{\alpha,\beta} \to 0, \quad k \to \infty,$$

za sve $\alpha, \beta \geq 0$.

Neka su f i g funkcije iz prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tada

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f, g)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{g(\xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} f(x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathrm{e}^{2\pi i x\xi} g(\xi)}\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x = (f, \mathcal{F}^* g)_{L^2},\end{aligned}$$

gdje je $\mathcal{F}^* g(x) := \widehat{g}(-x)$. Na $\mathcal{S}$ je opravdana definicija inverzne Fourierove transformacije $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.

Teorem 1.3.3. *Neka je funkcija $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = f.$$

Dokaz ovih teorema mogu se naći u knjizi [11].

Korolar 1.3.4 (Parsevalova jednakost). *Fourierova transformacija na $\mathcal{S}$ je izometrija (u L^2 smislu).*

Dokaz.

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}f)_{L^2} = (f, \mathcal{F}^*\mathcal{F}f)_{L^2} = (f, f)_{L^2} = \|f\|_{L^2}^2.$$

□

Fourierova transformacija na L^p prostorima

Sada možemo definirati Fourierovu transformaciju i na L^2. Sljedeći teorem slijedi izravno iz prethodnog i činjenice da je Schwartzov prostor gust u L^2.

Teorem 1.3.5 (Plancherel). *Fourierova transformacija se jedinstveno proširuje sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do unitarnog operatora na $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Za proširenje na ostale L^p trebamo sljedeći teorem.

Teorem 1.3.6 (Riesz-Thorinov interpolacijski teorem). *Neka je T ograničen operator s $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ na $L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$ s konstantom ograničenosti M_1, i s $L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ na $L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$ s konstantom ograničenosti M_2. Tada je T ograničen operator s $L^p(\mathbb{R}^n)$ na $L^q(\mathbb{R}^N)$ za p, q:*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

s konstantom ograničenosti $M_1^\theta M_2^{1-\theta}$.

Korolar 1.3.7 (Hausdorff-Youngova nejednakost). *Fourierova transformacija se jedinstveno proširuje sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do operatora $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ i vrijedi*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p,$$

za sve funkcije $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Od prije znamo:

(1) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ je ograničena, s $M_1 = 1$.

(2) $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ je ograničena, s $M_2 = 1$.

Koristeći prethodni teorem, imamo da je $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ ograničen, gdje za p, q vrijedi:

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2} = \frac{1+\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{\infty} + \frac{1-\theta}{2} = \frac{1-\theta}{2}.$$

Dakle slijedi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

tj. $q = p'$. Mora biti $0 \le \theta \le 1$ pa slijedi $1 \le p \le 2$. Konstanta ograničenosti je $1^\theta 1^{1-\theta} = 1$. □

1.4 Dijadski intervali

Definicija 1.4.1. *Dijadske intervale u* $[0, 1]$ *definiramo kao skup*

$$\Big\{ \big[2^{-m}j, 2^{-m}(j+1)\big\rangle : m \in \mathbb{N}, j \in \{0, ..., 2^m - 1\} \Big\}.$$

Korisna će nam biti sljedeća svojstva dijadskih intervala. Označimo s

$$\omega(m, j) := \big[2^{-m}j, 2^{-m}(j+1)\big\rangle$$

intervale iz gornje definicije.

Propozicija 1.4.2. *Dva dijadska intervala su ili disjunktni ili je jedan sadržan u drugome.*

Dokaz. Neka su $\omega(m, j)$, $\omega(n, k)$ dva dijadska intervala. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $m \le n$. Sada je očito da ako $2^{n-m}j \le k < 2^{n-m}(j + 1)$ onda $\omega(n, k) \subseteq \omega(m, j)$, a inače su disjunktni. □

Trebat će nam i sljedeći rastav na dijadske intervale.

Propozicija 1.4.3. *Neka je* $x \in \langle 0, 1]$. *Tada se* $[0, b\rangle$ *može prikazati kao disjunktna unija dijadskih intervala* $\{\omega(m, j)\}$ *tako da se svaki* $m \in \mathbb{N}$ *pojavljuje najviše jedanput.*

Dokaz. Stavimo

$$I_1 = [a_1, b_1\rangle = [0, 2^{-1}\rangle.$$

Dodajmo 1 u skup $\mathcal{N}$ ako $b_1 < b$. Za $n > 1$ neka je

$$I_n = [a_n, b_n\rangle$$

gdje je $b_n = a_n + 2^{-n}$, a $a_n = b_{n-1}$ ako smo dodali $n-1$ u $\mathcal{N}$ te $a_n = a_{n-1}$ inače. Očito je $\{I_n : n \in \mathcal{N}\}$ beskonačna, disjunktna familija dijadskih intervala, a $\bigcup_{n\in\mathcal{N}} I_n = [0, b\rangle$ slijedi iz

$$|b - b_n| \leq 2^{-n},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo to indukcijom po n. Očito je $|b - b_1| = |b - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$. Neka vrijedi $|b - b_n| \leq 2^{-n}$. Ako je $b_n < b$, n smo uključili u $\mathcal{N}$ pa je

$$|b - b_{n+1}| = |b - (a_{n+1} + 2^{-n-1})| = |b - b_n - 2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1}$$

jer je $0 < b - b_n \leq 2^{-n}$. Ako je $b_n \geq b$ onda n nismo uključili u $\mathcal{N}$ pa je

$$\begin{aligned}|b_{n+1} - b| &= |a_{n+1} + 2^{-n-1} - b| = |a_n + 2^{-n-1} - b| = |b_n - 2^{-n} + 2^{-n-1} - b| \\ &= |b_n - b - 2^{-n-1}| \leq 2^{-n-1}\end{aligned}$$

zbog $0 \leq b_n - b \leq 2^{-n}$. □

Poglavlje 2

AKNS sustavi

2.1 Uvod

U ovom poglavlju većinom pratimo 5. poglavlje knjige [8]. Promatramo n tijela koja se slobodno gibaju kružnim putanjama oko središnje točke O u jednoj ravnini **različitim** brzinama $d_1 \neq ... \neq d_n$. Ako (x, y) poziciju tijela predstavimo kompleksnim brojem $x + iy$, a u O stavimo ishodište koordinatnog sustava, putanje možemo predstaviti funkcijama

$$u_j(t) := C_j e^{id_j t}$$

za $j \in \{1, ..., n\}$. Funkcije u_j zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe:

$$u_j'(t) = id_j u_j(t).$$

Dalje pretpostavimo da postoje interakcije među tijelima, opisane izmjerivim funkcijama $a_{jk}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $k \neq j$. Funkcija a_{jk} opisuje utjecaj k-tog tijela na j-to tijelo na sljedeći način:

$$u_j'(t) = id_j u_j(t) + \sum_{k \neq j} a_{jk}(t) u_k(t).$$

Ako uvedemo oznake

$$u = [u_1, ..., u_n]^t,$$

$$A := (a_{jk})_{j,k=1}^n : \mathbb{R}_+ \to M_{n \times n}(\mathbb{C}),$$

$$D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n) \in M_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

gornji sustav možemo kompaktnije zapisati:

$$u' = iDu + Au.$$

Primijetimo da matrice $A(t)$ imaju nule na dijagonali. Općenito su a_{jk} nelinearne funkcije te je pripadne sustave teško riješiti. Ako rješenja postoje, prirodno je postaviti pitanje jesu li konačna, tj. postoji li krug oko O izvan kojega sva tijela nikada ne izlaze.

Na tako postavljeno pitanje vrlo teško je odgovoriti, jer ono previše ovisi o točnom obliku funkcija a_{jk}. Zato je prirodnije relaksirati model uvođenjem dodatnog parametra λ te potom pitati koje je „tipično" ponašanje modela za gotove sve vrijednosti od λ. Dakle, sustav postaje

$$u' = i\lambda Du + Au.$$

Gornji sustavi su poznati u literaturi pod nazivom AKNS ili AKNS-ZS prema inicijalima autora članaka [1], [12].

Uvedimo zamjenu:

$$v_j(x) := e^{-i\lambda d_j x} u_j(x),$$

$$v = [v_1, ..., v_n]^t,$$

tako da tada vrijedi:

$$v_j'(x) = \sum_{k \neq j} a_{jk}(x) e^{i\lambda(d_k - d_j)x} v_k(x)$$

ili kraće, uz $w_{jk}(x) := a_{jk}(x)e^{i\lambda(d_k-d_j)x}$ i $W := (w_{jk})_{j,k=1}^n$:

$$v' = Wv. \tag{2.1}$$

Ako dokažemo da su rješenja v gornjeg sustava ograničena tada će to biti i u. Stoga od sada promatramo sustav (2.1).

2.2 2×2 gornje-trokutasti sustavi

Analizirajmo prvo najjednostavniji slučaj, gdje je W 2×2 gornje-trokutasta matrica. Sustav (2.1) postaje:

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(x)e^{i\lambda(d_1-d_2)x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix},$$

tj.

$$v_1'(x) = v_2(x)f(x)e^{i\lambda(d_1-d_2)x}, \tag{2.2}$$
$$v_2'(x) = 0. \tag{2.3}$$

Iz (2.3) slijedi

$$v_2(x) = C_\lambda,$$

a iz (2.2)

$$v_1(x) = C_\lambda \int_{-\infty}^{x} f(y)e^{i\lambda(d_1-d_2)y}dy + \widetilde{C_\lambda}.$$

Nadalje, $v_2^\lambda := v_2$ je očito ograničena za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, a za $v_1^\lambda := v_1$ imamo:

$$\|v_1^\lambda\|_\infty \leq |C_\lambda| \sup_x \left| \int_{-\infty}^{x} f(y)e^{i\lambda(d_1-d_2)y}dy \right| + |\widetilde{C_\lambda}|. \tag{2.4}$$

Ako je $f \in L^1$, vrijedi

$$\|v_1^\lambda\|_\infty \leq |C_\lambda| \|f\|_1 + |\widetilde{C_\lambda}|$$

pa je riješeno pitanje ograničenosti (čak za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$). Primijetimo da, kada bi vrijedilo $d_1 = d_2$, pripadnost prostoru L^1 bi bio i nužan uvjet na f da bi rješenja v_1^λ bila ograničena. Kako su d_1 i d_2 različiti, prostor „dobrih" funkcija f možemo proširiti.

Označimo s C Carlesonov maksimalni operator:

$$Cg(x) = \sup_N \left| \int_{\xi<N} \widehat{g}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \right|.$$

L. Carleson je 1966. godine u [2] dokazao da je gornji operator ograničen na L^2 prostoru. To vrijedi i za sve L^r, $1 < r < \infty$ (R. Hunt 1968., [6]).

Neka je sada g takva da $\widehat{g} = f \in L^p$ za $1 < p \leq 2$. Vrijedi

$$\widehat{\widehat{g}}(x) = g(-x) \quad g.s. \implies g \in L^{p'} \quad i \quad \|g\|_{p'} = \|\widehat{\widehat{g}}\|_{p'}.$$

Koristeći ograničenost Carlesonovog operatora i Hausdorff-Youngovu nejednakost (za $\widehat{g}$) dobivamo:

$$\|Cg\|_{p'} \lesssim \|g\|_{p'} = \|\widehat{\widehat{g}}\|_{p'} \lesssim \|\widehat{g}\|_p. \tag{2.5}$$

Posebno, iz $\|Cg\|_{p'} < \infty$ slijedi $Cg(x) < \infty$ za g.s. $x \in \mathbb{R}$. Sada iz (2.4) slijedi:

$$\begin{aligned}\|v_1^\lambda\|_\infty &\leq |C_\lambda| \sup_x \left| \int_{-\infty}^x f(y) e^{i\lambda(d_1-d_2)y} dy \right| + |\widetilde{C_\lambda}| \\ &= |C_\lambda| Cg\left(\lambda(d_1-d_2)\right) + |\widetilde{C_\lambda}|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Stoga je i $\|v_1^\lambda\|_\infty < \infty$ za gotovo svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, ako je $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$.

Primijetimo da je nejednakost (2.5) zapravo ograničenost operatora

$$f \mapsto \left(\xi \mapsto \sup_N \left| \int_{x<N} f(x) e^{ix\xi} dx \right| \right) \tag{2.7}$$

s L^p u $L^{p'}$. Označimo ovaj operator s $\widetilde{C}$. Ograničenost od $\widetilde{C}$ za $1 \leq p < 2$ može se dokazati direktno, bez upotrebe Carleson-Huntovog teorema. Taj dokaz ćemo predstaviti u potpoglavlju 2.6 (Teorem 2.6.1).

Neka je sada funkcija f oblika $f = \widehat{g}$ za $g \in L^q$, $1 < q \leq 2$. Opet koristeći ograničnenost Carlesonovog operatora dobivamo:

$$\|Cg\|_q \lesssim \|g\|_q.$$

Isto kao u (2.6) dobivamo da je $\|v_1\|_\infty < \infty$ za gotovo svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prirodno je pitati vrijede li analogni rezultati i za općenite AKNS sustave. Slučaj gdje su elementi matrice A u L^p za $1 \leq p < 2$ je proširen za općenite matrice svih dimenzija ([4], [5]) i neke od tih rezultata ćemo pokriti u sljedećim potpoglavljima.

Kada su elementi matrica oblika $a_{lm} = \widehat{g}$, $g \in L^q$, $1 < q \leq 2$ jedini slučaj koji je potpuno jasan je gornji, za 2×2 matrice.

2.3 3×3 gornje-trokutasti sustavi

Neka je sada sustav (2.1) oblika:

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \\ v_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_1(x)e^{i\lambda(d_1-d_2)x} & f_2(x)e^{i\lambda(d_1-d_3)x} \\ 0 & 0 & f_3(x)e^{i\lambda(d_2-d_3)x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{bmatrix},$$

tj.

$$v_1'(x) = v_2(x) f_1(x) e^{i\lambda(d_1-d_2)x} + v_3(x) f_2(x) e^{i\lambda(d_1-d_3)x}, \tag{2.8}$$

$$v_2'(x) = v_3(x) f_3(x) e^{i\lambda(d_2-d_3)x}, \tag{2.9}$$

$$v_3'(x) = 0. \tag{2.10}$$

Iz (2.10) je $v_3(x) = C_\lambda$, iz (2.9) dobivamo

$$v_2(x) = C_\lambda \int_{-\infty}^{x} f_3(y) e^{i\lambda(d_2-d_3)y} dy + \widetilde{C_\lambda},$$

dok (2.8) postaje:

$$\begin{aligned} v_1'(x) = C_\lambda & \left(\int_{-\infty}^{x} f_3(y) e^{i\lambda(d_2-d_3)y} dy \right) f_1(x) e^{i\lambda(d_1-d_2)x} \\ & + C_\lambda f_2(x) e^{i\lambda(d_1-d_3)x} + \widetilde{C_\lambda} f_1(x) e^{i\lambda(d_1-d_2)x}. \end{aligned}$$

Konačno:

$$\begin{aligned} v_1(x) = C_\lambda & \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f_3(z) e^{i\lambda(d_2-d_3)z} dz \right) f_1(y) e^{i\lambda(d_1-d_2)y} dy && (2.11) \\ & + C_\lambda \int_{-\infty}^{x} f_2(y) e^{i\lambda(d_1-d_3)y} dy + \widetilde{C_\lambda} \int_{-\infty}^{x} f_1(y) e^{i\lambda(d_1-d_2)y} dy && (2.12) \\ & + \widetilde{\widetilde{C_\lambda}}. && (2.13) \end{aligned}$$

Ponovno je za $f_1, f_2, f_3 \in L^1$ račun trivijalan, i vrijedi $\|v_1^\lambda\|_\infty, \|v_2^\lambda\|_\infty, \|v_3^\lambda\|_\infty < \infty$ za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

Funkcije v_2 i v_3 su istog oblika kao u 2×2 slučaju, pa su i ograničene pod istim uvjetima. U v_1 članove s jednostrukim integralima (2.12) možemo ograničiti isto kao i v_2, no prvi član, (2.11), je složenijeg oblika:

$$C_\lambda \int_{z<y<x} f_3(z) f_1(y) e^{i\lambda((d_2-d_3)z+(d_1-d_2)y)} dz dy. \tag{2.14}$$

Uvedimo dvostruki Carlesonov operator C_2^α:

$$C_2^\alpha g(x) := \sup_N \left| \int_{\xi_1<\xi_2<N} \widehat{f}(\xi_1) \widehat{g}(\xi_2) e^{ix(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \right|,$$

gdje je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ te $\alpha_i \neq 0$. Navodimo sljedeći teorem bez dokaza (za detalje pogledati u [9]).

Teorem 2.3.1 (Muscalu, Tao, Thiele)**.** *Bilinearni operator $C_2^\alpha : L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}) \to L^r(\mathbb{R})$ je ograničen ako vrijedi*

- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$,
- $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$,

- $1 < p, q \leq \infty$,
- $\frac{2}{3} < r < \infty$.

U našem slučaju je $(d_2 - d_3) + (d_1 - d_2) = d_1 - d_3 \neq 0$, te za $\widehat{f} \in L^p$, $\widehat{g} \in L^q$, $1 \leq p, q \leq 2, p + q > 2$ vrijedi

$$p', q' \geq 2 \implies r = \frac{1}{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}} \geq 1 > \frac{2}{3}.$$

Stoga možemo izravno iskoristiti gornji rezultat i Hausdorff-Youngovu nejednakost:

$$\|C_2^{\alpha}(f,g)\|_r \lesssim \|f\|_{p'}\|g\|_{q'} \lesssim \|\widehat{f}\|_p\|\widehat{g}\|_q. \tag{2.15}$$

Posebno je $C_2^{\alpha}(f,g) < \infty$ za g.s. $x \in \mathbb{R}$. Koristeći ovu ocjenu u (2.14), odnosno (2.11), dobije se da kada su $f_1 \in L^{p_1}$, $f_2 \in L^{p_2}$, $f_3 \in L^{p_3}$ za $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 2$, $\|v_1^{\lambda}\|_{\infty}, \|v_2^{\lambda}\|_{\infty}, \|v_3^{\lambda}\|_{\infty} < \infty$ za gotovo svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ponovno primijetimo da je nejednakost (2.15) zapravo ograničenost operatora

$$(f,g) \mapsto \left(\xi \mapsto \sup_N \left| \int_{x_1 < x_2 < N} f(x_1) g(x_2) e^{i\xi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 \right| \right). \tag{2.16}$$

Označimo ga s $\widetilde{C}_2^{\alpha}$.

2.4 $n \times n$ gornje-trokutasti sustavi

Situacija za $n > 3$ je slična kao za $n = 3$. Kada su $f_1, ..., f_n \in L^p$ za $1 \leq p < 2$ iz ograničenosti operatora

$$\widetilde{C}_n^{\alpha}(f_1, ..., f_n)(x) := \sup_N \left| \int_{x_1 < ... < x_n < N} f_1(x_1)...f_n(x_n) e^{ix(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)} dx_1 ... dx_n \right|$$

slijedi ponovno $\|v_1^{\lambda}\|_{\infty}, ..., \|v_n^{\lambda}\|_{\infty} < \infty$ za gotovo svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Mi ćemo u Korolaru 2.6.4 dobiti ograničenost od $\widetilde{C}_n^{\alpha}$, te je time riješeno pitanje za $1 \leq p < 2$. Definirajmo i $\widetilde{T}_n^{\alpha}$ kao $\widetilde{C}_n^{\alpha}$ bez supremuma.

Za $p = 2$ dovoljne su ocjene na operatore C_n^{α}:

$$C_n^{\alpha}(f_1, ..., f_n)(\xi) = \sup_N \left| \int_{\xi_1 < ... < \xi_n < N} \widehat{f_1}(\xi_1)...\widehat{f_n}(\xi_n) e^{ix(\alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_n \xi_n)} d\xi_1 ... d\xi_n \right|.$$

Označimo s T_n^α operator C_n^α bez supremuma. Uz dodatne uvjete na α,

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} \alpha_j \neq 0, \tag{2.17}$$

za sve $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$, C_n^α jesu ograničeni s $L^2 \times ... \times L^2 \to L^{2/n}$. Za detalje pogledati u [10]. Kako su kod nas uvjeti (2.17) zadovoljeni, riješeno je pitanje i za $p = 2$.

2.5 Općeniti 2×2 AKNS sustavi, $1 \leq p < 2$

Slučaj općenitih AKNS sustava koji se ne mogu eksplicitno riješiti poput gornjetrokutastih možemo pokriti sljedećim sustavom:

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(x)e^{-i\lambda x} \\ \overline{f(x)}e^{i\lambda x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

tj.

$$v_1'(x) = v_2(x)f(x)e^{-i\lambda x}, \tag{2.19}$$

$$v_2'(x) = v_1(x)\overline{f(x)}e^{i\lambda x}. \tag{2.20}$$

Postavimo početne uvjete:

$$v_1(-\infty) = 1,$$
$$v_2(-\infty) = 0.$$

Provedimo Picardove iteracije da bismo dobili kandidat za rješenje:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x) \\ \theta_0(x) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1(-\infty) \\ v_2(-\infty) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{k+1}(x) \\ \theta_{k+1}(x) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1(-\infty) \\ v_2(-\infty) \end{bmatrix} + \int_{-\infty}^{x} \begin{bmatrix} 0 & f(s)e^{-i\lambda s} \\ \overline{f(s)}e^{i\lambda s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_k(s) \\ \theta_k(s) \end{bmatrix} ds.$$

Odnosno,

$$\varphi_0(x) = 1,$$
$$\theta_0(x) = 0,$$
$$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_{-\infty}^{x} f(s)e^{-i\lambda s}\theta_k(s)ds,$$
$$\theta_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{x} \overline{f(s)}e^{i\lambda s}\varphi_k(s)ds.$$

Iteriranjem dobijemo:

$$\varphi_k(x) = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ 2|n}}^{k} \int_{x_1<...<x_n<x} \overline{f(x_1)} e^{i\lambda x_1} f(x_2) e^{-i\lambda x_2} ... f(x_n) e^{-i\lambda x_n} dx_1 ... dx_n,$$

$$\theta_k(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ 2\nmid n}}^{k} \int_{x_1<...<x_n<x} \overline{f(x_1)} e^{i\lambda x_1} f(x_2) e^{-i\lambda x_2} ... \overline{f(x_n)} e^{i\lambda x_n} dx_1 ... dx_n.$$

Sada koristeći definicije od $\widetilde{T}_n^\alpha$ možemo dokazati sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.5.1. *Neka je $f \in L^1$ i $\alpha_i = (-1)^{i+1}$. Tada su*

$$v_1(x) = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ 2|n}}^{\infty} \widetilde{T}_n^\alpha(\overline{f}, f, ..., f)(\lambda; x),$$

$$v_2(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ 2\nmid n}}^{\infty} \widetilde{T}_n^\alpha(\overline{f}, f, ..., \overline{f})(\lambda; x)$$

rješenja sustava (2.18).

Dokaz. Dokažimo da prvo su v_1, v_2 dobro definirani. Vrijedi:

$$\begin{aligned} |\widetilde{T}_n^\alpha(\overline{f}, ...)(\lambda; x)| &\leq \int_{x_1<...<x_n<x} |f(x_1)|...|f(x_n)| \left| e^{i\lambda(x_1 - x_2 + ... \pm x_n)} \right| dx_1 ... dx_n \\ &\leq \int_{x_1<...<x_n} |f(x_1)|...|f(x_n)| dx_1 ... dx_n, \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x_1)|...|f(x_n)| dx_1 ... dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1)| dx_1 \right) ... \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x_n)| dx_n \right) = \|f\|_1^n.$$

Sada za bilo koju permutaciju $p(n)$ od $1, ..., n$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \int_{x_{p(1)}<...<x_{p(n)}} |f(x_1)|...|f(x_n)| dx_1 ... dx_n &= \int_{x_{p(1)}<...<x_{p(n)}} |f(x_{p(1)})|...|f(x_{p(n)})| dx_1 ... dx_n \\ &= \int_{x_1<...<x_n} |f(x_1)|...|f(x_n)| dx_1 ... dx_n. \end{aligned}$$

Sumiranjem po svim permutacijama, kojih ima $n!$, dobivamo

$$\sum_p \int_{x_{p(1)}<...<x_{p(n)}} |f(x_1)|...|f(x_n)| dx_1 ... dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x_1)|...|f(x_n)| dx_1 ... dx_n.$$

Dokazali smo sljedeću ocjenu:

$$|\widetilde{T}_n^\alpha(\overline{f}, ...)(\lambda; x)| \le \frac{1}{n!}\|f\|_1^n.$$

Kako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\|f\|_1^n = e^{\|f\|_1} < \infty,$$

iz Weierstrass M-testa slijedi da redovi u definiciji od v_1, v_2 konvergiraju apsolutno i uniformno. To da v_1, v_2 zadovoljavaju sustav (2.18) je očito iz konstrukcije Picardovim iteracijama. □

Iz dokaza posebno imamo ocjenu $\|v_1\|_\infty, \|v_2\|_\infty \le e^{\|f\|_1}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

Situacija u L^p, $1 < p < 2$ je bitno složenija. Potrebno je ocijeniti izraze $\widetilde{T}_n^\alpha(\overline{f}, ...)$ s dovoljno niskim ocjenama da bi bile sumabilne po n, kao u L^1 slučaju gore. S tim se ocjenama nećemo baviti u ovom radu.

Nadalje, za $p = 2$ problem je što sada uvjeti (2.17) ne moraju biti zadovoljeni. U Teoremu 2.7.1 pokazat ćemo da operator T_3^α zaista nije općenito ograničen s $L^2 \times L^2 \times L^2 \to L^{2/3}$.

2.6 Ograničenost operatora $\widetilde{C}_n^\alpha$, $1 \le p < 2$

Vratimo se na operator $\widetilde{C}$ iz (2.7) i dokažimo obećanu ocjenu. Dokazi su adaptirani iz [3].

Teorem 2.6.1. *Neka je $f \in L^p$ za $1 \le p < 2$ te $\alpha \ne 0$. Tada je operator*

$$C_1^\alpha(f)(\xi) = \sup_N \left| \int_{x<N} f(x) e^{i\alpha x \xi} dx \right| \tag{2.21}$$

ograničen s L^p u $L^{p'}$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $\alpha = 1$ jer će ocjena za ostale α očito slijediti, npr. supstitucijom $\xi \to \alpha\xi$.

Definiramo preslikavanje φ:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} |f(s)|^p ds.$$

Primijetimo da je $\varphi(-\infty) = 0$, a $\varphi(\infty) = 1$ te da je φ rastuća. Stoga je za svaki interval $I \subseteq [0, 1]$, $\varphi^{-1}(I)$ također interval. Sada je

$$||f\chi_{\varphi^{-1}(I)}||_p^p = \int_{\varphi^{-1}(I)} |f(s)|^p ds = |I|,$$

što povlači

$$||f\chi_{\varphi^{-1}(I)}||_p \le |I|^{1/p} \tag{2.22}$$

za svaki $i \in \{1,...,n\}$ i $I \subseteq [0,1]$. Definirajmo

$$M_m(f)(\xi) := \sup_{\substack{|\omega|=2^{-m}\\ \omega\subseteq[0,1]}} \left|\int_{\varphi^{-1}(\omega)} f(x)e^{i\xi x}dx\right|.$$

Sada fiksirajmo N. Iz svojstva dijadskih intervala $[0,\varphi(N)] \subseteq [0,1]$ možemo napisati kao disjunktnu uniju $S_N := \{\omega_m : |\omega_m| = 2^{-m}\}$ gdje se svaki m pojavljuje najviše jedanput. Dakle, imamo:

$$\int_{x<N} f(x)e^{i\xi x}dx = \sum_{\omega_m\in S_N} \int_{\varphi^{-1}(\omega_m)} f(x)e^{i\xi x}dx,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{x<N} f(x)e^{i\xi x}dx\right| &\le \sum_{\omega_m\in S_N} \left|\int_{\varphi^{-1}(\omega_m)} f(x)e^{i\xi x}dx\right|\\ &\le \sum_{m=1}^{\infty} M_m(f)(\xi).\end{aligned}$$

Desna strana ne ovisi o N pa vrijedi i

$$|\widetilde{C}(f)(\xi)| \le \sum_{m=1}^{\infty} M_m(f)(\xi) \implies \|\widetilde{C}(f)\|_{p'} \le \sum_{m=1}^{\infty} \|M_m(f)\|_{p'}. \tag{2.23}$$

Za $M_m(f)$ imamo ocjenu:

$$\|M_m(f)\|_{p'}^{p'} \le \sum_{\substack{|\omega|=2^{-m}\\ \omega\subseteq[0,1]}} \|f\widehat{\chi_{\varphi^{-1}(\omega)}}\|_{p'}^{p'} \le \sum_{\substack{|\omega|=2^{-m}\\ \omega\subseteq[0,1]}} \|f\chi_{\varphi^{-1}(\omega)}\|_p^{p'} \le 2^m(2^{-m})^{\frac{p'}{p}} = 2^{m(1-\frac{p'}{p})}$$

gdje smo iskoristili Hausdorff-Youngovu nejednakost te (2.22). Uvrštavanjem u (2.23) dobivamo

$$\|\widetilde{C}(f)\|_{p'} \le \sum_{m=1}^{\infty} \|M_m(f)\|_{p'} \le \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}.$$

Zadnji red konvergira zbog $p < 2$. □

Teorem 2.6.2. *Neka su funkcije $k_i(x,\xi)$, $i = 1, ..., n$ definirane na $\mathbb{R}^2$ i takve da su operatori*

$$(K_i f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) k_i(x,\xi) dx$$

ograničeni s L^p u $L^{p'}$ za $1 \leq p < 2$. Neka su $f_i \in L^p$ za $1 \leq p < 2$, $i = 1, ..., n$. Tada funkcija

$$\xi \mapsto \int_{x_1 < x_2 < ... < x_n} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) k_i(x_i, \xi) dx_1 ... dx_n$$

pripada prostoru $L^{p'/n}$.

Dokaz. Označimo operator iz iskaza T_n. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $||f_i||_p = \frac{1}{n}$. Naime, neka za takve f_i vrijedi ocjena

$$\|T_n(f_1, ..., f_n)\|_{p'/n} \leq C.$$

Sada za $g_1, ..., g_n \in L^p$ definiramo $\tilde{g_i} = \frac{1}{n\|g_i\|_p} g_i$. Vrijedi:

$$\|T_n(g_1, ..., g_n)\|_{p'/n} = n^n \|g_1\|_p ... \|g_n\|_p \|T_n(\tilde{g_1}, ..., \tilde{g_n})\|_{p'/n} \leq C n^n \|g_1\|_p ... \|g_n\|_p$$

jer je $\|\tilde{g_i}\|_p = \frac{1}{n}$. Definiramo funkciju f:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^p \right)^{1/p}$$

i preslikavanje φ:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} |f(s)|^p ds.$$

Primijetimo da je $\varphi(-\infty) = 0$, a $\varphi(\infty) = 1$ i da je φ rastuća. Stoga je za svaki interval $I \subseteq [0,1]$, $\varphi^{-1}(I)$ također interval. Sada je

$$||f_i \chi_{\varphi^{-1}(I)}||_p^p = \int_{\varphi^{-1}(I)} |f_i(s)|^p ds \leq \int_{\varphi^{-1}(I)} |f(s)|^p ds = |I|,$$

što povlači

$$||f_i \chi_{\varphi^{-1}(I)}||_p \leq |I|^{1/p}$$

za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ i $I \subseteq [0,1]$. Rastavimo integral po dijadskim intervalima ω_i (za x_i i x_{i+1}):

$$\sum_{\omega_1} ... \sum_{\omega_{n-1}} \int_{\varphi(x_1) \in \omega_1^l; \varphi(x_2) \in \omega_1^r \cap \omega_2^l; ...; \varphi(x_n) \in \omega_{n-1}^r} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) k_i(x_i, \xi) \right) dx_1 ... dx_n.$$

Gornji rastav možemo dalje raspisati:

$$\sum_{m_1,\dots,m_{n-1}\geq 0}\sum_{|\omega_1|=2^{-m_1}}\dots\sum_{|\omega_{n-1}|=2^{-m_{n-1}}} K_1(f_1\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^l)})(\xi)\cdot K_2(f_2\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^r\cap\omega_2^l)})(\xi)$$
$$\cdot\dots\cdot K_n(f_n\chi_{\varphi^{-1}(\omega_{n-1}^r)})(\xi).$$

Od sada nadalje u svim sumama po dijadskim intervalima pretpostavljamo da sumiramo samo po onim intervalima za koje je $\omega_j^r\cap\omega_{j+1}^l$ neprazan za sve presjeke koji se koriste u sumi. Također, neka su dijadski intervali otvoreni, što ne mijenja račun jer je razlika u skupu mjere 0, ali olakšava time da je presjek dva susjedna intervala prazan.

Fiksirajmo $m_1,\dots,m_{n-1}$ i definirajmo $F_N^{\omega,\overline{m}}(\overline{g})(\xi)$:

$$\sum_{\substack{|\omega_1|=2^{-m_1}\\ \omega_1\subseteq\omega}}\dots\sum_{\substack{|\omega_{N-1}|=2^{-m_{N-1}}\\ \omega_{N-1}\subseteq\omega}} K(g_1\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^l)})(\xi)K(g_2\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^r\cap\omega_2^l)})(\xi)\dots K(g_n\chi_{\varphi^{-1}(\omega_{N-1}^r)})(\xi),$$

za $N>1$, $\omega\subseteq[0,1]$, $\overline{m}\in\mathbb{N}^N$, gdje smo s $\overline{g}$ označili n-torku funkcija $(g_1,\dots,g_N)$. K_i-eve smo zamijenili jedinstvenim operatorom K jer to ne mijenja račun (koristimo samo njihovu ograničenost). Stavimo odmah i $\overline{f}=(f_1,\dots,f_N)$. Želimo pokazati da za sve $\overline{g}$ za koje vrijedi $||g_i\chi_{\varphi^{-1}(I)}||_p\leq|I|^{1/p}$, za sve K koji su ograničeni kao u iskazu teorema te za sve $N>1,\omega,\overline{m}$ vrijedi ocjena:

$$\|F_N^{\omega,\overline{m}}(\overline{g})\|_{p'/N}\lesssim|\omega|2^{-\gamma(m_1+\dots+m_{N-1})}\tag{2.24}$$

za neki $\gamma>0$. Tada ćemo biti gotovi jer kada primijenimo ocjenu na $F_n^{[0,1],\overline{m}}(\overline{f})$ desna strana će biti sumabilna po $\overline{m}=(m_1,\dots,m_{n-1})$.

Ocjenu (2.24) ćemo dokazati indukcijom po N. Za $N=2$, primjenom nejednakosti trokuta, potom Hölderove nejednakosti i ograničenosti od K imamo:

$$\begin{aligned}\|F_2^{\omega,m_1}(g_1,g_2)\|_{p'/2}&\leq\sum_{\substack{|\omega_1|=2^{-m_1}\\ \omega_1\subseteq\omega}}\|K(g_1\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^l)})K(g_2\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^r)})\|_{p'/2}\\&\leq\sum_{\substack{|\omega_1|=2^{-m_1}\\ \omega_1\subseteq\omega}}\|K(g_1\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^l)})\|_{p'}\|K(g_2\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^r)})\|_{p'}\\&\lesssim\sum_{\substack{|\omega_1|=2^{-m_1}\\ \omega_1\subseteq\omega}}\|g_1\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^l)}\|_p\|g_2\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^r)}\|_p.\end{aligned}$$

Primjenom uvjeta na $\overline{g}$ slijedi

$$\|F_2^{\omega,m_1}(g_1,g_2)\|_{p'/2}\leq\sum_{\substack{|\omega_1|=2^{-m_1}\\ \omega_1\subseteq\omega}}|\omega_1^l|^{1/p}|\omega_1^r|^{1/p}\leq\frac{|\omega|}{|\omega_1|}|\omega_1|^{2/p}\leq|\omega|2^{-m_1(2/p-1)}.$$

Kako je $p < 2$ vrijedi $\gamma := (2/p - 1) > 0$ pa je ocjena (2.24) pokazana za $N = 2$.

Sada neka je $N > 2$ te pretpostavimo da (2.24) vrijedi za sve $1 < N' < N$. Neka je m_k minimum među $\overline{m}$, s najmanjim indeksom k ako ima više minimuma. Kako je $N > 2$, barem jedan od k, $N - k$ je veći od 1. Neka je to k. Slučaj kada je $k = 1$, a $N - k > 1$ rješava se potpuno analogno slučaju $k = N - 1$ dolje.

Želimo pokazati da vrijedi $\omega_j \subseteq \omega_k^l$ za $1 \leq j < k$. Kako je $\omega_{k-1}^r \cap \omega_k^l$ neprazan, te $m_{k-1} \geq m_k$ iz svojstava dijadskih intervala mora biti $\omega_{k-1} \subseteq \omega_k$. Opet iz svojstava dijadskih intervala imamo 3 mogućnosti: $\omega_{k-1} \subseteq \omega_k^l$, $\omega_{k-1} \subseteq \omega_k^r$ ili $\omega_{k-1} = \omega_k$. Iz nepraznosti gornjeg presjeka slijedi $\omega_{k-1} \subseteq \omega_k^l$. Pretpostavimo da je $\omega_{j+1} \subseteq \omega_k^l$. Kako je $\omega_j^r \cap \omega_{j+1}^l$ neprazan, $\omega_j \cap \omega_k$ je također neprazan te iz $m_j \geq m_k$ slijedi $\omega_j \subseteq \omega_k$. Opet je jedina mogućnost $\omega_j \subseteq \omega_k^l$. Dakle, induktivno smo dokazali da je $\omega_j \subseteq \omega_k^l$ za $1 \leq j < k$.

Posebno vrijedi $\omega_{k-1}^r \cap \omega_k^l = \omega_{k-1}^r$ pa možemo razdvojiti sume u $F_N^{\omega,\overline{m}}$. Prvo neka je $k = N - 1$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
F_N^{\omega,\overline{m}}(\overline{g})(\xi) &= \sum_{\omega_{N-1}} \left(\sum_{\omega_1,\dots,\omega_{N-2}} K(g_1 \chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^l)})(\xi) \dots K(g_{N-1} \chi_{\varphi^{-1}(\omega_{N-2}^r)})(\xi) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(K(g_N \chi_{\varphi^{-1}(\omega_{N-1}^r)})(\xi) \right) \\
&= \sum_{\omega_{N-1}} \left(F_{N-1}^{\omega_{N-1}^l,(m_1,\dots,m_{N-2})}(g_1, \dots, g_{N-1}) \right) \left(K(g_N \chi_{\varphi^{-1}(\omega_{N-1}^r)})(\xi) \right).
\end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti trokuta, Hölderove nejednakosti, pretpostavke indukcije te ograničenosti od K slijedi

$$\begin{aligned}
\|F_N^{\omega,\overline{m}}(\overline{g})\|_{p'/N} &\leq \sum_{\omega_{N-1}} \|F_{N-1}^{\omega_{N-1}^l,(m_1,\dots,m_{N-2})}(g_1, \dots, g_{N-1}))\|_{p'/(N-1)} \|K(g_N \chi_{\varphi^{-1}(\omega_{N-1}^r)})\|_{p'} \\
&\leq \sum_{\omega_{N-1}} |\omega_{N-1}^l| 2^{-\gamma(m_1+\dots+m_{N-2})} |\omega_{N-1}^r|^{1/p} \\
&\leq \frac{|\omega|}{|\omega_{N-1}|} |\omega_{N-1}| 2^{-\gamma(m_1+\dots+m_{N-2})} 2^{-m_{N-1}/p} \\
&\leq |\omega| 2^{-\min(\gamma,1/p)(m_1+\dots+m_{N-1})}.
\end{aligned}$$

Sada neka je $k < N - 1$, tj. $N - k > 1$. Analogno kao gore induktivno se dokaže i $\omega_j \subseteq \omega_k^r$ za $k < j \leq N - 1$. Posebno je $\omega_k^r \cap \omega_{k+1}^l = \omega_{k+1}^l$ pa možemo ponovno rastaviti sumu u $F_N^{\omega,\overline{m}}$:

$$
\begin{aligned}
F_N^{\omega,\overline{m}}(\overline{g})(\xi) = \sum_{\omega_k} & \left(\sum_{\omega_1,\dots,\omega_{k-1}} K(g_1\chi_{\varphi^{-1}(\omega_1^l)})(\xi)\dots K(g_k\chi_{\varphi^{-1}(\omega_{k-1}^r)})(\xi) \right) \\
& \left(\sum_{\omega_{k+1},\dots,\omega_{N-1}} K(g_{k+1}\chi_{\varphi^{-1}(\omega_{k+1}^l)})(\xi)\dots K(g_{N-1}\chi_{\varphi^{-1}(\omega_{N-1}^r)})(\xi) \right) \\
= \sum_{\omega_k} & \left(F_k^{\omega_k^l,\overline{m}^{(1)}}(\overline{g}^{(1)}) \right) \left(F_{N-k}^{\omega_k^r,\overline{m}^{(2)}}(\overline{g}^{(2)}) \right),
\end{aligned}
$$

gdje su $\overline{m}^{(1)} = (m_1,\dots,m_{k-1})$, $\overline{m}^{(2)} = (m_{k+1},\dots,m_{N-1})$, $\overline{g}^{(1)} = (g_1,\dots,g_k)$, $\overline{g}^{(2)} = (g_{k+1},\dots,g_N)$. Primjenom nejednakosti trokuta, Hölderove nejednakosti te pretpostavke indukcije slijedi tražena ocjena:

$$
\begin{aligned}
\|F_N^{\omega,\overline{m}}(\overline{g})\|_{p'/N} &\leq \sum_{\omega_k} \|F_k^{\omega_k^l,\overline{m}^{(1)}}(\overline{g}^{(1)})\|_{p'/k} \|F_{N-k}^{\omega_k^r,\overline{m}^{(2)}}(\overline{g}^{(2)})\|_{p'/(N-k)} \\
&\leq \sum_{\omega_k} |\omega_k^l| 2^{-\gamma_1(m_1+\dots+m_{k-1})} |\omega_k^r| 2^{-\gamma_2(m_{k+1}+\dots+m_{N-1})} \\
&\leq \sum_{\omega_k} 2^{-2m_k} 2^{-\min(\gamma_1,\gamma_2)(m_1+\dots+m_{k-1}+m_{k+1}+\dots+m_{N-1})} \\
&= \frac{|\omega|}{|\omega_k|} 2^{-2m_k} 2^{-\min(\gamma_1,\gamma_2)(m_1+\dots+m_{k-1}+m_{k+1}+\dots+m_{N-1})} \\
&= |\omega| 2^{-\min(1,\gamma_1,\gamma_2)(m_1+\dots+m_{N-1})}.
\end{aligned}
$$

□

Sada je lako dokazati sljedeće korolare.

Korolar 2.6.3. *Neka su $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ realni brojevi različiti od nule, $1 \leq p < 2$ i $N \in \mathbb{R}$. Tada je operator*

$$
\widetilde{T}_n^{\alpha,N}(\xi) = \int_{x_1<x_2<\dots<x_n<N} f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n)e^{i\xi(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)}dx_1dx_2\dots dx_n
$$

ograničen s $L^p \times \dots \times L^p$ u $L^{p'/n}$.

Dokaz. Stavimo

$$
k_i^N(x,\xi) := e^{ix\alpha_i\xi}\chi_{\langle -\infty,N]}.
$$

Za $f \in L^p$ vrijedi

$$\left|\int_{\mathbb{R}} k_i^N(x,\xi)f(x)\right| \leq \sup_N \left|\int_{\mathbb{R}} k_i^N(x,\xi)f(x)\right| = \widetilde{C}_1^{\alpha_i}(f)(\xi).$$

Sada Teorem 2.6.1 povlači ograničenost operatora

$$(K_i f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)k_i^N(x,\xi)dx.$$

s prostora L^p u $L^{p'}$. Konačno, Teorem 2.6.2 daje ograničenost od $\widetilde{T}_n^{\alpha,N}$. $\square$

Korolar 2.6.4. *Neka su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ realni brojevi različiti od nule i $1 \leq p < 2$. Tada je operator*

$$\widetilde{C}_n^{\alpha}(\xi) = \sup_N \left|\int_{x_1<x_2<...<x_n<N} f_1(x_1)f_2(x_2)...f_n(x_n)e^{i\xi(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)}dx_1dx_2...dx_n\right|$$

ograničen s $L^p \times ... \times L^p$ u $L^{p'/n}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati ograničenost operatora

$$(f_1,...,f_n) \mapsto \left(\xi \mapsto \int_{x_1<...<x_n<\mathbf{N}(\xi)} f_1(x_1)...f_n(x_n)e^{i\xi(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}dx_1...dx_n\right)$$

(skraćeno $\widetilde{T}_n^{\alpha,\mathbf{N}}$) s $L^p \times ... \times L^p$ u $L^{p'/n}$ za svaku izmjerivu funkciju $\mathbf{N} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da konstanta ograničenosti ne ovisi o $\mathbf{N}$. Stavimo

$$k_i^{\mathbf{N}}(x,\xi) := e^{ix\alpha_i\xi}\chi_{\langle-\infty,\mathbf{N}(\xi)]}.$$

Za $f \in L^p$ ponovno vrijedi

$$\left|\int_{\mathbb{R}} k_i^{\mathbf{N}}(x,\xi)f(x)\right| \leq \sup_N \left|\int_{\mathbb{R}} k_i^N(x,\xi)f(x)\right| = \widetilde{C}_1^{\alpha_i}(f)(\xi).$$

Sada Teorem 2.6.1 povlači ograničenost operatora

$$(K_i f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)k_i^{\mathbf{N}}(x,\xi)dx.$$

s prostora L^p u $L^{p'}$. Konačno, Teorem 2.6.2 daje ograničenost od $\widetilde{T}_n^{\alpha,\mathbf{N}}$. $\square$

2.7 Neograničenost operatora $\widetilde{T}_3^{\alpha}$, $p = 2$

U ovom poglavlju dokazat ćemo sljedeće:

Teorem 2.7.1. *$\widetilde{T}_3^{\alpha}$ dan sa*

$$\widetilde{T}_3^{\alpha}(f,\overline{f},f)(x) = \int_{x_1<x_2<x_3} f(x_1)\overline{f(x_2)}f(x_3)e^{ix(x_1-x_2+x_3)}dx_1dx_2dx_3,$$

nije ograničen operator s $L^2 \times L^2 \times L^2$ u $L^{2/3}$.

Neka je $f \in L^2$ proizvoljna i $g \in L^2$ takva da $\hat{g} = f$. Tada $\widetilde{T}_3^{\alpha}$ postaje:

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi_1<\xi_2<\xi_3} \hat{g}(\xi_1)\overline{\hat{g}(\xi_2)}\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1-\xi_2+\xi_3)}d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \\
&= -\int_{\xi_1<-\xi_2<\xi_3} \hat{g}(\xi_1)\overline{\hat{g}(-\xi_2)}\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \\
&= -\int_{\xi_1<-\xi_2<\xi_3} \hat{g}(\xi_1)\hat{\overline{g}}(\xi_2)\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}d\xi_1d\xi_2d\xi_3.
\end{aligned}$$

Simbol

$$-\chi_{\{\xi_1<-\xi_2<\xi_3\}} = -\chi_{\mathbb{R}_-}(\xi_1+\xi_2)\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi_2+\xi_3)$$

ćemo radi jednostavnosti zamijeniti sa

$$\operatorname{sgn}(\xi_1+\xi_2)\operatorname{sgn}(\xi_2+\xi_3).$$

Kasnije ćemo vidjeti da je ta zamjena u redu. Prednost ove zamjene je sljedeća reprezentacija operatora. Koristeći

$$\operatorname{sgn}(\xi) = \frac{1}{i\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t}\frac{dt}{t},$$

imamo:

$$\begin{aligned}
T^o(g,\overline{g},g)(x) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi_1)\hat{\overline{g}}(\xi_2)\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}\operatorname{sgn}(\xi_1+\xi_2)\operatorname{sgn}(\xi_2+\xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \\
&= -\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3} p.v. \int_{\mathbb{R}^2} \hat{g}(\xi_1)\hat{\overline{g}}(\xi_2)\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}e^{i(\xi_1+\xi_2)t}e^{i(\xi_2+\xi_3)s}\frac{dt}{t}\frac{ds}{s}d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \\
&= -\frac{1}{\pi^2}p.v. \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi_1)e^{i(x+t)\xi_1}d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} \hat{\overline{g}}(\xi_2)e^{i(x+t+s)\xi_1}d\xi_2 \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi_3)e^{i(x+s)\xi_1}d\xi_3\frac{dt}{t}\frac{ds}{s} \\
&= -\frac{1}{\pi^2}p.v. \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x+t}{2\pi}\right)\overline{g\left(\frac{x+t+s}{2\pi}\right)}g\left(\frac{x+s}{2\pi}\right)\frac{dt}{t}\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Radi kraćeg zapisa, dalje nastavljamo sa

$$T(g,\overline{g},g)(x) := p.v. \int_{\mathbb{R}^2} g\left(x+t\right) \overline{g\left(x+t+s\right)} g\left(x+s\right) \frac{dt}{t}\frac{ds}{s}. \tag{2.25}$$

Ako dokažemo da je T neograničen, očito će tada to biti i T^o. Trebat će nam sljedeća lema.

Lema 2.7.2. *Postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ takve da za svaki $N > C_2$ vrijedi:*

$$\left| \int_0^N \int_0^N \frac{\sin(ts)}{ts} dtds \right| > C_1 \ln N$$

Dokaz. Izračunajmo prvo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt &= \Im\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it}}{t}dt\right) = \Im\left(\frac{1}{2} i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{it}}{t}, 0\right)\right) \\ &= \Im\left(\frac{1}{2} i\pi \lim_{t\to 0} t\frac{e^{it}}{t}, 0\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Iz svojstva limesa slijedi da postoji $C > 0$ takav da za svaki $x > C$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt > \frac{\pi}{4} \tag{2.26}$$

te je potom

$$\begin{aligned}\int_0^N \int_0^N \frac{\sin(ts)}{ts} dtds &= \int_0^N \left(\int_0^N \frac{\sin(ts)}{t}dt\right)\frac{ds}{s} = \int_0^N \left(\int_0^{Ns} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\frac{ds}{s} \\ &= \int_0^{C/N} \left(\int_0^{Ns} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\frac{ds}{s} + \int_{C/N}^N \left(\int_0^{Ns} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\frac{ds}{s} \\ &= \int_0^{C} \left(\int_0^{s} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\frac{ds}{s} + \int_{C/N}^N \left(\int_0^{Ns} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)\frac{ds}{s} \\ &= (1) + (2).\end{aligned}$$

Za (1), imamo

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{s\to 0} \frac{\sin s}{s} = 1$$

gdje smo iskoristili L'Hôpitalovo pravilo. Slijedi da je funkcija

$$s \mapsto \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\sin t}{t} dt$$

neprekidna na $[0, C]$ pa označimo njen integral od 0 do C s C_3:

$$\int_0^C \left(\int_0^s \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \frac{ds}{s} =: C_3.$$

Za (2), iz $x > C/N$ slijedi $Nx > C$ pa iz (2.26) slijedi

$$\int_{C/N}^N \left(\int_0^{Ns} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \frac{ds}{s} > \frac{\pi}{4} \int_{C/N}^N \frac{ds}{s} = \frac{\pi}{4}(2 \ln N - \ln C).$$

Koristeći dobivene ocjene za (1) i (2) imamo

$$\int_0^N \int_0^N \frac{\sin(ts)}{ts} dtds > C_3 + \frac{\pi}{4}(2 \ln N - \ln C) = \frac{\pi}{4} \ln N + (\frac{\pi}{4} \ln N + C_3 - \frac{\pi}{4} \ln C).$$

Uzmimo dovoljno velik C_2 tako da $\frac{\pi}{4} \ln C_2 \geq \frac{\pi}{4} \ln C - C_3$. Sada vrijedi tražena nejednakost uz $C_1 = \frac{\pi}{4}$ i C_2. □

Uzmimo $g(x) = e^{ix^2}$. Sada formalno vrijedi (za T definiran u (2.25))

$$\begin{aligned} T(g, \overline{g}, g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x+t)^2} e^{-i(x+t+s)^2} e^{i(x+s)^2} \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} \\ &= e^{ix^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-2its}}{ts} dtds \\ &= i\pi e^{ix^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sgn}(-2t)}{t} dt \\ &= -2i\pi e^{ix^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} dt, \end{aligned}$$

što je beskonačna vrijednost. Ovo motivira dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 2.7.3. *Operator $T : L^2 \times L^2 \times L^2 \mapsto L^{2/3}$ iz (2.25) nije ograničen.*

Dokaz. Uzmimo $g_N(x) = e^{ix^2} \chi_{[-N,N]}$. Trebat će nam L^2 norma:

$$\|g_N\|_2 = \left(\int_{-N}^N \left| e^{ix^2} \right|^2 \right)^{1/2} = (2N)^{1/2}.$$

Rastavimo integral iz definicije od T na dva dijela:

$$\begin{aligned} T(g_N, \overline{g_N}, g_N)(x) &= p.v. \int_{\mathbb{R}^2} g_N(x+t) \overline{g_N(x+t+s)} g_N(x+s) \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} \\ &= p.v. \int_{-N/10}^{N/10} \int_{-N/10}^{N/10} g_N(x+t) \overline{g_N(x+t+s)} g_N(x+s) \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} \\ &+ \int_{|t|>N/10} \int_{|s|>N/10} g_N(x+t) \overline{g_N(x+t+s)} g_N(x+s) \frac{dt}{t} \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Neka je $x \in [-N/10, N/10]$. Drugi integral sume možemo ocijeniti:

$$\left| \int_{|t|>N/10} \int_{|s|>N/10} g_N(x+t)\overline{g_N(x+t+s)}g_N(x+s)\frac{dt}{t}\frac{ds}{s} \right|$$
$$\leq \int_{-2N}^{2N} \int_{-2N}^{2N} \frac{10}{N}\frac{10}{N} dtds = \frac{100}{N^2}(4N)^2 =: B_1.$$

Za prvi integral, iz $x, t, s \in [-N/10, N/10]$ je $(x+s), (x+t), (x+s+t) \in [-N, N]$. Stoga slijedi

$$p.v. \int_{-N/10}^{N/10} \int_{-N/10}^{N/10} e^{i(x+t)^2} e^{-i(x+t+s)^2} e^{i(x+s)^2} \frac{dt}{t}\frac{ds}{s} = e^{ix^2} p.v. \int_{-N/10}^{N/10} \int_{-N/10}^{N/10} \frac{e^{-2its}}{ts} dtds$$
$$= e^{ix^2} p.v. \int_{-N/10}^{N/10} \int_{-N/10}^{N/10} \frac{\cos(2ts)}{ts} - ie^{ix^2} \int_{-N/10}^{N/10} \int_{-N/10}^{N/10} \frac{\sin(2ts)}{ts} dtds$$
$$= -4ie^{ix^2} \int_0^{N/10} \int_0^{N/10} \frac{\sin(2ts)}{ts} dtds,$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili parnost kosinusa te neparnost sinusa. Sada je

$$|T(g_N, \overline{g_N}, g_N)(x)| \geq 4 \left| \int_0^{N/10} \int_0^{N/10} \frac{\sin(2ts)}{ts} dtds \right| - B_1.$$

Primjenom prethodne leme dobivamo da postoje B_2, B_3 t.d.

$$|T(g_N, \overline{g_N}, g_N)(x)| > B_2 \ln N$$

za svaki $N > B_3$. Sada imamo:

$$\|g_N\|_2 = (2N)^{1/2} \implies \|g_N\|_2 \|\overline{g_N}\|_2 \|g_N\|_2 = (2N)^{3/2},$$

dok je

$$\|T(g_N, \overline{g_N}, g_N)\|_{2/3} \geq \left(\int_{-N/10}^{N/10} |T(g_N, \overline{g_N}, g_N)(x)|^{2/3} \right)^{3/2} > B_2 \ln N \left(\frac{N}{5} \right)^{3/2}.$$

$\square$

Još nam preostaje obrazložiti zamjenu simbola $-\chi_{\mathbb{R}_-}(\xi_1 + \xi_2)\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi_2 + \xi_3)$ sa $\operatorname{sgn}(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{sgn}(\xi_2 + \xi_3)$.

Dokaz teorema 2.7.1. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y) &= \chi_{\mathbb{R}_+}(x)\chi_{\mathbb{R}_+}(y) - \chi_{\mathbb{R}_+}(x)\chi_{\mathbb{R}_-}(y) - \chi_{\mathbb{R}_-}(x)\chi_{\mathbb{R}_+}(y) + \chi_{\mathbb{R}_-}(x)\chi_{\mathbb{R}_-}(y) \\ &= 1 - 2\chi_{\mathbb{R}_+}(x)\chi_{\mathbb{R}_-}(y) - 2\chi_{\mathbb{R}_-}(x)\chi_{\mathbb{R}_+}(y). \qquad (2.27)\end{aligned}$$

Za funkcije g_N iz dokaza teorema vrijedi $\widehat{g_N}(-\xi) = \widehat{g_N}(\xi)$ te $\widehat{\overline{g_N}}(-\xi) = \widehat{\overline{g_N}}(\xi)$ iz čega dobivamo

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi_1)\hat{\overline{g}}(\xi_2)\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi_1+\xi_2)\chi_{\mathbb{R}_-}(\xi_2+\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &\qquad = \int_{-\xi_1<\xi_2<-\xi_3} \hat{g}(\xi_1)\hat{\overline{g}}(\xi_2)\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &\qquad = -\int_{\xi_1<-\xi_2<\xi_3} \hat{g}(-\xi_1)\hat{\overline{g}}(-\xi_2)\hat{g}(-\xi_3)e^{-ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &\qquad = -\int_{\xi_1<-\xi_2<\xi_3} \hat{g}(\xi_1)\hat{\overline{g}}(\xi_2)\hat{g}(\xi_3)e^{-ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.\end{aligned}$$

Dakle, ako označimo s T_- operator sa simbolom $\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi_1+\xi_2)\chi_{\mathbb{R}_-}(\xi_2+\xi_3)$, vrijedi:

$$|\widetilde{T}_3^\alpha(g,\overline{g},g)(x)| = |T_-(g,\overline{g},g)(-x)| \implies \|\widetilde{T}_3^\alpha(g,\overline{g},g)\|_{2/3} = \|T_-(g,\overline{g},g)\|_{2/3}. \qquad (2.28)$$

Operator sa simbolom 1,

$$T_1 := \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi_1)\hat{\overline{g}}(\xi_2)\hat{g}(\xi_3)e^{ix(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

je očito ograničen s $L^2 \times L^2 \times L^2$ u $L^{2/3}$. Iz (2.27) imamo

$$\|T(g,\overline{g},g)\|_{2/3} \le \|T_1(g,\overline{g},g)\|_{2/3} + 2\|T_-(g,\overline{g},g)\|_{2/3} + 2\|\widetilde{T}_3^\alpha(g,\overline{g},g)\|_{2/3}.$$

Konačno, iz Teorema 2.7.3 i jednakosti (2.28) slijedi neograničenost od $\widetilde{T}_3^\alpha$. □

Bibliografija

[1] Mark J. Ablowitz, David J. Kaup, Alan C. Newell i Harvey Segur, *The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems*, Studies in Applied Mathematics **53** (1974), br. 4, 249–315.

[2] Lennart Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Mathematica **116** (1966), 135 – 157.

[3] Michael Christ i Alexander Kiselev, *Absolutely Continuous Spectrum for One-Dimensional Schrodinger Operators with Slowly Decaying Potentials: Some Optimal Results*, Journal of the American Mathematical Society **11** (1998), br. 4, 771–797.

[4] ______, *Maximal Functions Associated to Filtrations*, Journal of Functional Analysis **179** (2001), br. 2, 409–425, ISSN 0022-1236.

[5] ______, *WKB Asymptotic Behavior of Almost All Generalized Eigenfunctions for One-Dimensional Schrödinger Operators with Slowly Decaying Potentials*, Journal of Functional Analysis **179** (2001), 426–447.

[6] Richard A. Hunt, *On the convergence of Fourier series*, Southern Illinois Univ. Press (1968).

[7] Yitzhak Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2004.

[8] Camil Muscalu i Wilhelm Schlag, *Classical and multilinear harmonic analysis 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, England, siječanj 2013.

[9] Camil Muscalu, Terence Tao i Christoph Thiele, *The Bi-Carleson operator*, Geometric & Functional Analysis GAFA (2005).

[10] Camil Muscalu, Terence Tao i Christoph Thiele, *Multi-linear multipliers associated to simplexes of arbitrary length*, Advances in analysis: the legacy of Elias M. Stein, Princeton Math. Ser., sv. 50, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014, str. 346–401. MR 3329857

[11] E.M. Stein i R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.

[12] V. E. Zakharov i A. B. Shabat, *Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media*, Journal of Experimental and Theoretical Physics **34** (1970), 62–69.

Sažetak

U ovom radu obrađena je teorija AKNS sustava s aspekta nelinearne Fourierove analize. U prvom dijelu su dane osnove Fourierove analize, a potom su dana eksplicitna rješenja i dokazana je stabilnost rješenja AKNS sustava gdje je to moguće.

Summary

In this work, the theory of AKNS systems is discussed from the perspective of nonlinear Fourier analysis. The first part provides the basics of Fourier analysis, followed by explicit solutions and proofs of stability for AKNS systems where this is possible.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu, 17. svibnja 1998. godine, gdje sam pohađao Osnovnu školu Tituša Brezovačkog i XV. gimnaziju. Tijekom obrazovanja redovito sam sudjelovao na državnim natjecanjima iz matematike, fizike i informatike. Predstavljao sam Hrvatsku na Međunarodnoj olimpijadi iz astronomije i astrofizike 2015. godine. 2017. godine upisujem studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu te 2020. studij Primijenjene matematike na istom fakultetu. Tijekom studija bio sam demonstrator iz nekoliko kolegija te sudjelovao na natjecanju Vojtěch Jarník 2019. godine.