Optimalno upravljanje i primjene u ekonomiji

Feješ, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Feješ

OPTIMALNO UPRAVLJANJE I PRIMJENE U EKONOMIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, veljača, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala cijeloj obitelji, ponajprije mami koja je istrpjela cijeli ovaj put
mentoru, izv. prof. dr. sc. Marku Ercegu na velikoj pomoći i pristupačnosti prilikom izrade rade
svim prijateljima koji su bili uz mene tijekom studiranja, a najviše Lauri koja me motivirala kad je bilo najteže i njezinim prekrasnim roditeljima za nezaboravna učenja u uredu i prefine ručkove

Sadržaj

Uvod

Teorija optimalnog upravljanja se kao matematička disciplina pojavila sredinom prošlog stoljeća, točnije 1940.-1950. kada su tadašnji inženjeri pokušavali dizajnirati elektromehaničke uređaje koji bi se samostalno prilagođavali i ispravljali s obzirom na neki, unaprijed zadani, cilj. Najvažniji cilj teorije je opisati optimalno ponašanje dinamičkih procesa koji se kroz vrijeme odvijaju prema unaprijed propisanim pravilima.

Desetljeće kasnije, matematičari Bellman, Hestenes i ruska grupa pod vodstvom Pontrjagina bavila se problemima vezanim uz teoriju varijacijskog računa i njihovi rezultati (prvenstveno Pontrjaginov princip maksimuma) su vrlo brzo prilagođeni teoriji optimalnog upravljanja. Upravo ta činjenica govori o tome koliko su te dvije teorije međusobno povezane. Naime, teorija optimalnog upravljanja je zapravo generalizacija klasičnog varijacijskog računa. Samim time, svaki problem iz varijacijskog računa možemo promatrati (riješiti) kao problem optimalnog upravljanja, no vrijedi i obratno, uz neke dodatne uvjete. Kao što bi se i očekivalo, moraju dati ekvivalentne rezultate. Razlika u ta dva pristupa je u tome što za neke probleme imamo jasniji uvid koristeći jednu za razliku od druge teorije. Najčešće je slučaj da upravo teorija optimalnog upravljanja nudi bolju intuiciju jer je osnovna komponenta upravljačka funkcija (npr. investiranje u portfelj) s kojom upravljamo nekim dinamičkim sustavom (npr. portfeljom) radi dobivanja optimalnog rezultata (npr. ostvarivanja maksimalnog profita).

Od samih početaka pa sve do danas neprestano se razvija te ima široku primjenu u raznim problemima, od svakodnevnog života, ekonomije, financija i sl.

U prvom poglavlju ovog rada prolazimo kroz osnovne rezultate teorije optimalnog upravljanja koje ćemo kasnije primijeniti pri pronalasku optimalnog rješenja važnih primjera iz ekonomije. Također, na samim tim primjerima pokazujemo ekonomsku interpretaciju ranije iskazanih matematičkih tvrdnji.

U drugom poglavlju uvodimo neke složenije primjere u kojima nadograđujemo do tada obrađeno. Naglasak je na primjerima iz ekonomije, problemima više varijabli od kojih ističemo onaj s poznatom Cobb-Douglasovom funkcijom proizvodnje.

U trećem poglavlju rada poopćujemo tvrdnje navodeći važan teorem vezan uz Pontrjaginov princip maksimuma koji zaokružuje cijelu teoriju.

U radu se uglavnom prati referenca [2], dok za dodatne teme i proširenja postojećih čitatelja upućujemo na [3] i [5].

Poglavlje 1

Uvod u teoriju optimalnog upravljanja

1.1 Postavljanje problema i primjeri

U problemima optimalnog upravljanja, varijable su podijeljene u dvije klase: varijable stanja i upravljačke varijable (koje često zovemo upravljačke funkcije). Promjena (kretanje) svake od varijabli stanja je određena diferencijalnom jednadžbom prvog reda. Najjednostavniji problem optimalnog upravljanja je odabir po dijelovima neprekidne upravljačke funkcije $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, takve da se postiže:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \tag{1.1}$$

$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \tag{1.2}$$

$$x(t_0) = x_0 \text{ fiksirano; } x(t_1) \text{ slobodno,} \tag{1.3}$$

gdje su su funkcije f i g neprekidno diferencijabilne funkcije (klase C^1) s tri nezavisna argumenta. Primijetimo, u ovom problemu se pojavljuje samo jedna varijabla stanja $x(t)$ i jedna upravljačka funkcija $u(t)$ te je fiksirana samo početna točka ili, često kažemo, početno stanje (početni uvjet). Ovdje se radi o problemu maksimizacije, no možemo promatrati i probleme minimizacije na isti način. Upravljačka funkcija $u(t)$ mora biti po dijelovima neprekidna funkcija u vremenu t, dok je kretanje varijable stanja $x(t)$ određeno gornjom diferencijalnom jednadžbom. Ta jednadžba (1.2) se naziva jednadžba stanja (ili ponekad jednadžba prijelaza). Često ćemo u nastavku ovog rada radi jednostavnije notacije izostavljati argument t za varijable stanja i upravljačke funkcije. Upravljačka funkcija u ima direktni i indirektni utjecaj na traženu optimalnu vrijednost integrala. Direktno, kroz samu svoju vrijednost kao argument funkcije f i indirektno preko svojeg utjecaja na kretanje varijable stanja x (vidi (1.2)) koja je također argument funkcije f.

Pogledajmo problem varijacijskog računa gdje se traži neprekidno diferencijabilna funkcija $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, takva da se postiže:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x'(t))dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x(t_0) = x_0.$$

Zaključujemo da se on vrlo lako transformira u ekvivalentan problem optimalnog upravljanja stavljajući $u(t) = x'(t)$. Tada problem optimalnog upravljanja glasi:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Varijabla stanja je $x(t)$, upravljačka funkcija $u(t)$, a funkcija $g(t, x, u) = u$.

Primjer 1.1.1.

$$\max \int_0^1 (x + u)dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x' = 1 - u^2, \quad x(0) = 1.$$

Ovo je jednostavan problem optimalnog upravljanja gdje imamo:

$$f(t, x, u) = x + u, \quad g(t, x, u) = 1 - u^2,$$

te je zadana vrijednost u početnoj točki $x(0) = 1$.

Ilustracije radi, navedimo dva konkretna primjera iz ekonomije koja su malo složenija od osnovnog problema jer sadrže i neke dodatne uvjete te ograničenja na upravljačku funkciju, a razradit ćemo ih kasnije u radu.

Primjer 1.1.2. Tvrtka dobiva narudžbu za B jedinica nekog proizvoda koje mora dostaviti do trenutka T. Tražimo raspored proizvodnje kako bismo isporučili narudžbu na određeni datum i to uz minimalan trošak. Trošak proizvodnje jedne jedinice raste linearno sa stopom proizvodnje, a trošak zadržavanja jedne jedinice proizvoda na zalihama po jedinici vremena je konstantan (c_2). Neka $x(t)$ označava ukupnu količinu zaliha do trenutka t. Tada imamo $x(0) = 0$ i moramo postići $x(T) = B$. Stopa po kojoj se mijenja količina zaliha je stopa proizvodnje $x'(t)$. Dakle, ukupni trošak te tvrtke u trenutku t iznosi:

$$[c_1 x'(t)]\, x'(t) + c_2 x(t) = c_1 [x'(t)]^2 + c_2 x(t),$$

gdje prvi član označava ukupni trošak proizvodnje (umnožak troška proizvodnje jedne jedinice proizvoda i stope proizvodnje), a drugi član ukupni trošak zadržavanja zaliha; c_1 i c_2 su pozitivne konstante. Problem zapisan u terminima optimalnog upravljanja:

$$\min \int_0^T [c_1 u^2(t) + c_2 x(t)]dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B, \quad u(t) \geq 0.$$

Ovdje je upravljačka funkcija $u(t)$ upravo stopa proizvodnje, a količina zaliha $x(t)$ varijabla stanja. Uočimo da se ovdje radi o problemu minimizacije, da je konačna točka isto fiksirana i da imamo (prirodan) uvjet nenegativnosti upravljačke funkcije. Također, dobro je primijetiti kako je ovo problem koji se može riješiti i varijacijskim računom jer je funkcija g identiteta po u.

Općenito, svaki se problem varijacijskog računa može svesti na problem optimalnog upravljanja. Osim toga što optimalno upravljanje pokriva širu klasu problema od varijacijskog računa, optimalno upravljanje nudi puno bolju interpretaciju za neke probleme iz ekonomije. Sljedeći primjer iz ekonomije, koji se za razliku od prošlog, ne može jednostavno shvatiti kao problem varijacijskog računa, uobičajeno je promatrati kao problem optimalnog upravljanja.

Primjer 1.1.3. Neka je $P(x)$ profitna stopa koja se može zaraditi sa zalihama proizvodnog kapitala x, gdje je $P'(0) > 0$ i $P'' < 0$. Zalihe kapitala propadaju po konstantnoj proporcionalnoj stopi $b \geq 0$. Trošak investicije C je rastuća konveksna funkcija stope investicija u uz uvjete $C'(0) = 0$ i $C'' > 0$. Tražimo stopu investicija $u(t)$ koja maksimizira sadašnju (diskontiranu) vrijednost toka profita kroz unaprijed fiksirani period $0 \leq t \leq T$. Problem:

$$\max \int_0^T e^{-rt}[P(x) - C(u)]dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x' = u - bx, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad u \geq 0.$$

Varijabla stanja je razina kapitala x, a upravljačka funkcija je stopa investicija u. Uočimo da je kretanje varijable stanja dano diferencijalnom jednadžbom prvog reda što je karakteristično za sve probleme optimalnog upravljanja. Također, imamo uvjet nenegativnosti upravljačke funkcije (stope investicija).

Ovaj primjer je važan u ekonomiji jer se može reinterpretirati kao mnogo drugih problema. Na primjer, jedan od takvih je problem u kojemu varijabla stanja x označava ljudski kapital, $P(x)$ zaradu pojedinca s ljudskim kapitalom x, $C(u)$ trošak edukacije ili treninga, a b stopa zaboravljanja. Također, x može označavavati količinu dobra neke tvrtke, $P(x)$ maksimalnu stopu zarade te tvrtke od dobra x, $C(u)$ rashodi (trošak) zbog reklamiranja i promocije dobra.

1.2 Nužni uvjeti za rješenje

Prvi cilj u analizi problema optimalnog upravljanja (1.1) - (1.3) je izvesti rezultate o postojanju rješenja te pronaći metodu kojom možemo efikasno to rješenje i eksplicitno odrediti. Prvi korak je određivanje *nužnih uvjeta* koje rješenje (1.1) - (1.3) (ako postoji) mora zadovoljavati. U traženju istih koristimo postupak sličan traženju rješenja nelinearnog programiranja pomoću Lagrangeovih multiplikatora. Razlika je što uvjet (1.2) mora biti zadovoljen za svaki t u intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$, pa stoga λ nije više samo konstanta, već imamo funkciju multiplikatora $\lambda(t)$.

Neka je, zasada, $\lambda(t)$ bilo koja neprekidno diferencijabilna funkcija argumenta t na intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$. Uz pretpostavku da optimalno rješenje problema (1.1)-(1.3) postoji, rješenje označavamo s $u^*(t)$, $x^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, i izvedimo nužne uvjete koje rješenje mora zadovoljavati. Za sve funkcije x, u koje zadovoljavaju (1.2) i (1.3) i bilo koju neprekidno diferencijabilnu funkciju λ, sve definirano na $t_0 \leq t \leq t_1$, vrijedi sljedeće:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) - \lambda(t)x'(t)]\, dt \tag{1.4}$$

jer je po pretpostavci (1.2) zbroj drugog i trećeg člana u integralu jednak nuli. Primjenom parcijalne integracije na posljednjem članu dobivamo:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)x'(t)dt = -\lambda(t_1)\, x(t_1) + \lambda(t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\lambda'(t)dt, \tag{1.5}$$

pa vraćanjem dobivenog u (1.4) slijedi:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t)u(t))dt = &\int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) + x(t)\lambda'(t)]\, dt \\ &- \lambda(t_1)\, x(t_1) + \lambda(t_0)\, x(t_0)\,.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Upravljačka funkcija $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, zajedno s početnim uvjetom (1.3) i diferencijalnom jednadžbom (1.2) određuje varijablu stanja koja je optimalna, tj. $x^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Dakle, dovoljno je pronaći (optimalnu) upravljačku funkciju jer ona implicira (optimalnu) varijablu stanja. Neka je $u^*(t)$ optimalna upravljačka funckija, $h(t)$ neka proizvoljna, ali unaprijed fiksirana funkcija i a proizvoljan parametar. Variramo optimalnu upravljačku funkciju pomoću parametra a i dobivamo: $u^*(t) + ah(t)$. Označimo s $y(t, a)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, varijablu stanja generiranu s (1.2) i (1.3) i s variranom upravljačkom funkcijom $u^*(t) + ah(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Pretpostavimo također da je $y(t, a)$ glatka funkcija po oba argumenta, a drugi argument u funkciju ulazi kao parametar. Očito, za $a = 0$ imamo optimalno rješenje i također varirana varijabla stanja mora zadovoljavati početni uvjet, tj.

$$\begin{aligned} y(t,0) &= x^*(t), \quad && t_0 \leq t \leq t_1 \\ y(t_0,a) &= x_0, && a \text{ blizu } 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Sada, s fiksiranim u^*, x^* i h, u odgovarajući integral iz (1.1) uvrstimo variranu varijablu stanju $y(t,a)$ zajedno s pripadnom (variranom) upravljačkom funkcijom $u^*(t) + ah(t)$ te vidimo da ta optimalna vrijednost ovisi samo o parametru a. Dakle, označimo tu funkciju s J, i primijenimo znanje iz analize funkcija jedne varijable:

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_1} f\left(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)\right) dt.$$

Raspišimo ovaj integral pomoću (1.6):

$$\begin{aligned} J(a) = &\int_{t_0}^{t_1} \left[f\left(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)\right) + \lambda(t) g\left(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)\right) + y(t,a)\lambda'(t)\right] dt \\ &- \lambda(t_1)\, y(t_1,a) + \lambda(t_0)\, x_0, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem članu primijenili (1.7). Jer je u^* optimalna (maksimalna) upravljačka funkcija, funkcija $J(a)$ mora poprimati maksimum u točki $a = 0$. Dakle, 0 je stacionarna točka funkcije J, tj. $J'(0) = 0$. Računamo:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{da}\Bigg(\int_{t_0}^{t_1} \left[f\left(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)\right) + \lambda(t) g\left(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)\right) + y(t,a)\lambda'(t)\right] dt \\ &\qquad - \lambda(t_1)\, y(t_1,a) + \lambda(t_0)\, x_0\Bigg) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{da}\left[f\left(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)\right) + \lambda(t) g\left(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)\right) + y(t,a)\lambda'(t)\right] dt \\ &\qquad - \frac{d}{da}\Big(\lambda(t_1)\, y(t_1,a)\Big), \end{aligned}$$

gdje je zamjena derivacije i integrala dopuštena jer su podintegralne funkcije f, g i y glatke funkcije po svim argumentima, pa tako i po a (vidi [1, Teorem 11.1]). Koristeći svojstva derivacije složene funkcije više varijabli slijedi:

$$J'(a) = \int_{t_0}^{t_1} (y_a f_x + h f_u + \lambda y_a g_x + \lambda h g_u + \lambda' y_a)\, dt - \lambda(t_1) y_a.$$

Grupiramo izraz pod integralom, i uvrstimo $a = 0$:

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[(f_x + \lambda g_x + \lambda') y_a + (f_u + \lambda g_u) h\Big]\, dt - \lambda(t_1) y_a(t_1, 0) = 0. \tag{1.8}$$

U gornjim izrazima f_x, g_x i f_u, g_u označavaju parcijalne derivacije funkcija f i g po drugom i trećem argumentu, redom, a y_a je parcijalna derivacija od y po drugom argumentu. Jer je $a = 0$, funkcije su evaluirane u $(t, x^*(t), u^*(t))$ (x^* i u^* su fiksirane funkcije od t). Budući da je točan utjecaj variranja upravljačke funkcije na tijek varijable stanja teško odrediti, funkciju λ biramo tako da eliminara tu potrebu.

Neka λ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$\lambda'(t) = -\left[f_x(t, x^*, u^*) + \lambda(t) g_x(t, x^*, u^*)\right], \quad \text{uz uvjet: } \lambda(t_1) = 0. \tag{1.9}$$

Uočimo da je to linearna diferencijalna jednadžba prvog reda (λ je nepoznata funkcija) čije rješenje postoji, a što se najlakše vidi uz dodatnu pretpostavku da je u^* neprekidna funkcija (općenito je po dijelovima neprekidna). Naime, kako su f i g klase C^1, oba koeficijenta (dana kompozicijom) su neprekidne funkcije pa po standardnoj teoriji (vidi [6, poglavlje 4]) znamo da postoji rješenje klase C^1 na cijelom intervalu $[t_0, t_1]$. Uz tako zadanu funkciju λ kao u (1.9), tvrdnja (1.8) vrijedi pod uvjetom da je:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[f_u(t, x^*, u^*) + \lambda g_u(t, x^*, u^*)\right] h dt = 0,$$

za proizvoljnu funkciju $h(t)$.
Posebno, mora vrijediti za $h(t) = f_u(t, x^*, u^*) + \lambda(t) g_u(t, x^*, u^*)$, pa dobivamo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) g_u(t, x^*(t), u^*(t))\right]^2 dt = 0,$$

iz čega zaključujemo i dolazimo do uvjeta optimalnosti:

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0, \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Dakle, pokazali smo da ako funkcije u^*, x^* maksimiziraju (1.1) uz ispunjavanje uvjeta (1.2) i (1.3), tada postoji neprekidno diferencijabilna funkcija λ tako da u^*, x^* i λ istovremeno zadovoljavaju:

- jednadžbu stanja i početni uvjet:

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.10}$$

- multiplikatorsku jednadžbu:

$$\lambda'(t) = -\left[f_x(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) g_x(t, x(t), u(t))\right], \quad \lambda(t_1) = 0, \tag{1.11}$$

- uvjet optimalnosti:

$$f_u(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) g_u(t, x(t), u(t)) = 0, \quad t_0 \le t \le t_1. \tag{1.12}$$

Navedene jednadžbe (1.10)-(1.12) čine nužne uvjete koje rješenje problema optimalnog upravljanja mora zadovoljavati.

Slično kao i u nelinearnom programiranju gdje smo formirali Lagrangian, ovdje formiramo tzv. *Hamiltonian*, koristan alat preko kojeg praktično u primjerima generiramo gore navedene nužne uvjete. *Hamiltonian* definiramo na sljedeći način:

$$H(t, x, u, \lambda) := f(t, x, u) + \lambda\, g(t, x, u).$$

Tada su nužni uvjeti (sve u točki $(t, x(t), u(t), \lambda(t)$ za proizvoljni t):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \Leftrightarrow \text{ (1.12):} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \lambda g_u = 0 \tag{1.13}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda' \quad \Leftrightarrow \text{ (1.11):} \quad \lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(f_x + \lambda g_x) \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' \quad \Leftrightarrow \text{ (1.10):} \quad x' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g \tag{1.15}$$

te dodatno, početni uvjet uz (1.15): $x(t_0) = x_0$ i uz (1.14): $\lambda(t_1) = 0$ (često se naziva uvjet transverzalnosti). Općenito, izrazimo u iz (1.13) te ubacivanjem u (1.14) i (1.15) dobivamo sustav dvije diferencijalne jednadžbe po x i λ. Upravo taj sustav odgovara *Hamiltonovom sustavu* (*kanonski sustav*). Nadalje, iz (1.13) slijedi da je u stacionarna točka Hamiltoniana za svaki t za dane vrijednosti od x i λ. Da bi vrijednost integrala u (1.1) bila maksimalna (minimalna) u problemu maksimizacije (minimizacije) iz (1.6) vidimo da moramo maksimizirati (minimizirati) vrijednost podintegralnog izraza koji ovisi o u, a što je upravo Hamiltonian. Ostali članovi u (1.6) ili ne ovise o u ili su konstante. Dakle, u problemu maksimizacije, nužno je da $u^*(t)$ maksimizira $H(t, x^*(t), u, \lambda(t))$ po u, tj. da za svaki t vrijedi:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x^*, u^*, \lambda) \leq 0.$$

U problemu minimizacije, nužno je da $u^*(t)$ minimizira $H(t, x^*(t), u, \lambda(t))$ po u, tj. da za svaki t vrijedi:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x^*, u^*, \lambda) \geq 0.$$

Pokažimo kako možemo (koristeći Hamiltonian) pronaći nužne uvjete koje rješenje problema iz primjera 1.1.1 mora zadovoljavati. Podsjetimo se, tražimo:

$$\max \int_0^1 (x + u)dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x' = 1 - u^2, \quad x(0) = 1.$$

Hamiltonian je:

$$H(t, x, u, \lambda) = x + u + \lambda\,(1 - u^2).$$

Iz uvjeta (1.13) slijedi

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - 2\lambda u = 0. \tag{1.16}$$

Koristeći uvjet (1.14) formiramo diferencijalnu jednadžbu:

$$\lambda' = -1$$

uz uvjet transverzalnosti: $\lambda(1) = 0$. Integriranjem rješavamo danu diferencijalnu jednadžbu prvog reda te uvrštavanjem uvjeta transverzalnosti dobivamo:

$$\lambda(t) = -t + 1.$$

Vraćanjem dobivene funkcije λ u (1.16) slijedi:

$$u(t) = \frac{1}{2(-t+1)}.$$

Uvrštavanjem dobivenog u u (1.15) dolazimo do diferencijalne jednadžbe:

$$x' = 1 - \frac{1}{4(-t+1)^2},$$

koju rješavamo integriranjem uz uvrštavanje početnog uvjeta $x(0) = 1$ te konačno:

$$x(t) = t - \frac{1}{4(-t+1)} + \frac{5}{4}.$$

Još je potrebno provjeriti da su to nužni uvjeti za maksimum, što provjeravamo računajući:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x, u, \lambda) = -2\lambda = -2(-t+1) \leq 0 \tag{1.17}$$

pri čemu nejednakost vrijedi za $0 \leq t \leq 1$. Zaključno, da bi početni problem imao optimalno rješenje, nužno je da vrijedi:

$$x(t) = t - \frac{1}{4(-t+1)} + \frac{5}{4},$$

$$\lambda(t) = -t + 1,$$

$$u(t) = \frac{1}{2(-t+1)}.$$

Primjer 1.2.1. Odredite nužne uvjete koje rješenje sljedećeg problema mora zadovoljavati.

$$\min \int_0^1 u^2(t)dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1.$$

Prije nego što krenemo sa standardnim postupkom preko Hamiltoniana, uočimo kako je podintegralna funkcija nenegativna (dakle vrijednost integrala je nenegativna), a traži se minimalna vrijednost tog integrala s domenom $t \in [0, 1]$. Dakle, ako pokažemo da je konstantna upravljačka funkcija $u \equiv 0$ dopustiva, očito će upravo to odgovarati (globalnom) minimumu, odnosno rješenju problema.

Provedimo račun:

$$H(t, x, u, \lambda) = u^2 + \lambda\,(x + u)$$
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0$$
$$\lambda' = -\lambda, \quad \lambda(1) = 0.$$

Rješavanjem zadnje jednadžbu metodom separacije varijabli i uvršavanjem uvjeta, dobivamo da je rješenje trivijalno:

$$\lambda \equiv 0,$$

iz čega slijedi da je i

$$u(t) \equiv 0.$$

Iz jednadžbe stanja i početnog uvjeta zadanih u problemu ostaje:

$$x' = x, \quad x(0) = 1,$$

što rješavanjem daje:

$$x(t) = e^t.$$

Da se doista radi o nužnim uvjetima za minimum, provjeravamo računanjem:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x, u, \lambda) = 2 \geq 0.$$

Dakle, da bi rješenje bilo optimalno nužno je da vrijedi:

$$x(t) = e^t,$$
$$u(t) = 0,$$
$$\lambda(t) = 0.$$

Naravno, u ovom slučaju, kao što smo već na početku primjera komentirali, dobivene funkcije zaista čine rješenje danog problema. Dodatno, kako smo iz nužnih uvjeta dobili samo te funkcije, možemo zaključiti i da je rješenje jedinstveno.

1.3 Dovoljni uvjeti za rješenje

Jednom kada smo našli nužne uvjete za rješenje problema optimalnog upravljanja, pitamo da se kada će oni biti i dovoljni. Kod nelinearnog programiranja, Karush-Kuhn-Tuckerovi nužni uvjeti optimalnosti su također i dovoljni pod uvjetom da konkavna (konveksna) funkcija cilja koju promatramo bude maksimizirana (minimizirana) na zatvorenom konveksnom skupu. Kod varijacijskog računa, nužni uvjeti optimalnosti su ujedno i dovoljni ukoliko je podintegralna funkcija konkavna (konveksna) u $(x,\ x')$. S obzirom na povezanost teorija optimalnog upravljanja i varijacijskog računa, za očekivati je da sličan rezultat vrijedi i za optimalno upravljanje. Zaista, vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 1.3.1. *Osnovni teorem dovoljnosti (Mangasarian)*
Pretpostavimo da su $f = f(t,x,u)$ i $g = g(t,x,u)$ obje klase C^1 i f konkavna u $(x,\ u)$ te promatramo problem:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)dt$$
$$\textit{uz uvjete:} \quad x'(t) = g(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.18}$$

Nadalje, pretpostavimo da funkcije x^*, u^* i λ zadovoljavaju nužne uvjete optimalnosti (1.10)-(1.12) za sve $t_0 \le t \le t_1$. Uz uvjet da su x i λ neprekidne funkcije te da vrijedi jedno od sljedećeg:

1. *Za svaki $t \in [t_0, t_1]$ preslikavanje $(x,u) \longmapsto g(t,x,u)$ je linearno.*
2. *Za svaki $t \in [t_0, t_1]$ je $\lambda(t) \ge 0$ i preslikavanje $(x,u) \longmapsto g(t,x,u)$ konkavno.*
3. *Za svaki $t \in [t_0, t_1]$ je $\lambda(t) \le 0$ i preslikavanje $(x,u) \longmapsto g(t,x,u)$ konveksno.*

Tada su x^* i u^* optimalna rješenja gornjeg problema.

Dokaz. Najprije pretpostavimo da vrijedi slučaj 2. iz iskaza teorema. Također, neka x^*, u^* i λ zadovoljavaju nužne uvjete optimalnosti (1.10)-(1.12) za sve $t_0 \le t \le t_1$. Neka su x i u proizvoljne funkcije koje zadovoljavaju (1.18). Radi lakše notacije, za $t \in [t_0, t_1]$ označimo s $f^*(t)$ i $g^*(t)$ funkcije evaluirane u točki $(t, x^*(t), u^*(t))$, a s $f(t)$ i $g(t)$ funkcije izračunate u $(t, x(t), u(t))$. Da su dani nužni uvjeti također i dovoljni za optimalno rješenje (ovdje maksimum) pokazat ćemo ako je:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (f^*(t) - f(t))\,dt \ge 0 \tag{1.19}$$

(jer su odabrani x i u proizvoljni dopustivi).

Prisjetimo se karakterizacije konkavnosti za diferencijabilnu funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i dvije proizvoljne točke x^* i x^0 iz domene funkcije f:

$$f(x^*) - f\left(x^0\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^* - x_i^0\right) f_i(x^*), \tag{1.20}$$

gdje f_i označava parcijalnu derivaciju funkcije f po i-toj komponenti. Jer je f konkavna u (x, u) i diferencijabilna funkcija, po (1.20) vrijedi:

$$f^*(t) - f(t) \geq (x^*(t) - x(t))\, f_x^*(t) + (u^*(t) - u(t))\, f_u^*(t). \tag{1.21}$$

Kombiniranjem (1.19) i (1.21) slijedi:

$$\begin{aligned} I &\geq \int_{t_0}^{t_1} \left[(x^*(t) - x(t))\, f_x^*(t) + (u^*(t) - u(t))\, f_u^*(t)\right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[(x^*(t) - x(t))\left(-\lambda(t) g_x^*(t) - \lambda'(t)\right) + (u^*(t) - u(t))\left(-\lambda(t) g_u^*(t)\right)\right] dt, \end{aligned}$$

gdje jednakost slijedi supstitucijom f_x^* i f_u^* iz nužnih uvjeta (1.11) i (1.12) redom. Grupiranjem izraza pod integralom dobivamo:

$$I \geq \int_{t_0}^{t_1} \Big[\lambda(t)\Big(-(x^*(t) - x(t))\, g_x^*(t) - (u^*(t) - u(t))\, g_u^*(t)\Big) - \lambda(t)'(x^*(t) - x(t))\Big] dt. \tag{1.22}$$

Parcijalnom integracijom zadnjeg člana koji sadrži λ' dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \lambda'(t)(x^*(t) - x(t)) dt &= (x^*(t) - x(t))\lambda(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(x'^*(t) - x'(t)) dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(x'^*(t) - x'(t)) dt, \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi zbog istog početnog uvjeta i nužnog uvjeta transverzalnosti ($\lambda(t_1) = 0$). Iskoristimo li nužan uvjet (1.10) zamjenom dobivamo:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(x'^*(t) - x'(t)) dt = -\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(g^*(t) - g(t)) dt. \tag{1.23}$$

Vraćanjem (1.23) u (1.22) i grupiranjem slijedi:

$$I \geq \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\left[g^*(t) - g(t) - (x^*(t) - x(t))\, g_x^*(t) - (u^*(t) - u(t))\, g_u^*(t)\right] dt. \tag{1.24}$$

U ovom slučaju 2. funkcija g je konkavna i diferencijabilna u (x, u) te mora vrijediti:

$$g^*(t) - g(t) \geq (x^*(t) - x(t))\, g_x^*(t) + (u^*(t) - u(t))\, g_u^*(t) \tag{1.25}$$

te dodatno iz pretpostavke o nenegativnosti funkcije λ, slijedi:

$$I \geq 0.$$

U slučaju 1. kada je funkcija g linearna po x i u, u (1.25) vrijedi jednakost, pa preostaje $I \geq 0$ jer je podintegralna funkcija jednaka nuli neovisno o (predznaku) funkcije λ pa zato tamo taj uvjet izostavljamo.

Lako se pokaže da u slučaju 3., tj. uz pretpostavku da je g konveksna i vrijedi $\lambda(t) \leq 0$ za sve t, da su nužni uvjeti i dovoljni za optimalnost jer će produkt ispod integrala u (1.24) biti opet nenegativan. □

Analogno postupamo i donosimo zaključke i u problemu minimizacije, osim što funkcija f mora biti konveksna umjesto konkavna.

Napomena 1.3.2. *Uočimo da smo analizu provedenu u prethodnom dokazu mogli podijeliti na podsegmente segmenta $[t_0, t_1]$. Ovaj pogled nam omogućuje da poopćimo tvrdnju teorema 1.3.1 tako da za svaki $t \in [t_0, t_1]$ moramo biti u jednom od tri slučaja, ali ne nužno u istom na cijelom segmentu.*

Vratimo se primjeru 1.1.1:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^1 (x + u)dt \\ &\text{uz uvjete:} \quad x' = 1 - u^2, \quad x(0) = 1, \end{aligned}$$

gdje smo dobili nužne uvjete za rješenje:

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \frac{1}{4(-t+1)} + \frac{5}{4}, \\ \lambda(t) &= -t + 1, \\ u(t) &= \frac{1}{2(-t+1)}. \end{aligned}$$

Lako se vidi da je funkcija $f(t, x, u) = x + u$ neprekidno diferencijabilna i linearna (i konveksna i konkavna) u x i u. Funkcija $g(t, x, u) = 1 - u^2$ je klase C^1 i ovisi samo o argumentu u pa zaključujemo:

$$g(t, x, u) = h(u) = 1 - u^2 \Rightarrow h''(u) = -2 < 0,$$

tj. da je g konkavna u (x, u). Jer je g nelinearna u u, potrebno je još provjeriti predznak funkcije λ:

$$\lambda(t) = -t + 1 \geq 0$$

za sve $0 \leq t \leq 1$, čime je zadovoljen i uvjet nenegativnosti funkcije λ gdje su x i λ neprekidne funkcije na domeni. Dakle, time su zadovoljene sve pretpostavke Mangasarianovog teorema u slučaju 2. i nužni uvjeti su i dovoljni, pa slijedi optimalno rješenje:

$$x^*(t) = t - \frac{1}{4(-t+1)} + \frac{5}{4},$$

$$\lambda(t) = -t + 1,$$

$$u^*(t) = \frac{1}{2(-t+1)}.$$

Istu analizu možemo provesti i kod primjera 1.2.1

$$\min \int_0^1 u^2(t)dt$$

$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1,$$

gdje nužne uvjete zadovoljavaju:

$$x(t) = e^t$$

$$u(t) = 0$$

$$\lambda(t) = 0.$$

Budući da se radi o problemu minimizacije, potrebno je da je funkcija f konveksna što se lako vidi jer:

$$f(t, x, u) = h(u) = u^2 \Rightarrow h''(u) = 2 > 0$$

Za funkciju $g(t, x, u) = x + u$ vrijedi da je linearna po x i u, dakle nije potrebno promatrati predznak funkcije λ. Obje funkcije f i g su klase C^1 i time su pretpostavke Mangasarianovog teorema zadovoljene, tj. optimalno rješenje je:

$$x^*(t) = e^t$$

$$u^*(t) = 0$$

$$\lambda(t) = 0.$$

Mangasarianov teorem je u praksi lako primijeniti, no nisu sve funkcije konkavne (konveksne). U tom slučaju, generaliziranu inačicu tog teorema otkrio je Arrow, i taj se teorem primjenjuje na širu klasu problema, ali je zato (općenito gledano) teže provjeriti njegove pretpostavke. Prije iskaza tog teorema, promatramo osnovni problem maksimizacije (1.1)-(1.3) te neka $u = U(t, x, \lambda)$ označava vrijednost upravljačke funkcije koja maksimizira Hamiltonian:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u)$$

za dane vrijednosti (t, x, λ). Tada, U odražava ovisnost optimalne upravljačke funkcije u o parametrima našeg problema. Neka je:

$$\begin{aligned} H^0(t, x, \lambda) &= \max_u H(t, x, u, \lambda) = H(t, x, U(t, x, \lambda), \lambda) \\ &= f(t, x, U(t, x, \lambda)) + \lambda g(t, x, U(t, x, \lambda)). \end{aligned}$$

Dakle, H^0 označava vrijednost Hamiltoniana izračunata u maksimiziranom u i naziva se *maksimizirani Hamiltonian*.

Teorem 1.3.3. ***(Arrow)***
Neka je za svaki $t \in [t_0, t_1]$ i sve doputive λ maksimizirani Hamiltonian $H^0(t, x, \lambda)$ konkavna funkcija po x. Ako postoje neprekidne $x^*(t)$ i $\lambda(t)$ takve da je zadovoljeno (1.2) i (1.3) te su za $u^*(t) := U(t, x^*(t), \lambda(t))$ ispunjeni nužni uvjeti optimalnosti (1.11) i (1.12), tada su x^*, u^* optimalna rješenja početnog problema.

Napomena 1.3.4. *U praksi je potrebno provjeriti konkavnost funkcije $x \longmapsto H^0(t, x, \lambda)$ za λ iz slike funkcije $\lambda = \lambda(t)$, odnosno dovoljno je promatrati (za fiksan t) funkciju $x \longmapsto H^0(t, x, \lambda(t))$.*

Za dokaz ovog teorema i potpuniji uvid u rezultate dovoljnih uvjeta optimalnosti čitatelja upućujemo na [3, odjeljak 2.6]. Dakle, u ovom teoremu su objedinjeni nužni i dovoljni uvjeti, i za razliku od Mangasarianovog teorema, konkavnost od f i g u (x, u) su zamijenjene slabijom pretpostavkom o konkavnosti maksimiziranog Hamiltoniana H^0. Iako je provjeravanje pretpostavki o funkcijama f i g zasebno lakši zadatak nego provjeravanje svojstava izvedene funkcije (H^0), u nekim slučajevima (npr. f i g nisu konkavne u (x, u)) moguće je primijeniti jedino teorem kojeg je otkrio Arrow.

Da je Mangasarianov teorem zapravo poseban slučaj Arrowljevog teorema, tj. da za dvije funkcije f i g koje su obje konkavne u (x, u), slijedi da je H^0 konkavna u x pokazujemo sljedećom lemom:

Lema 1.3.5. *Ako je funkcija $G(x, u)$ konkavna u (x, u), tada je i $\max_u G(x, u)$ konkavna funkcija u x.*

Dokaz. Neka su x_1, x_2 dvije vrijednosti od x i neka u_i maksimiziraju $G(x_i, u)$, po u, za $i = 1, 2$. Tada za svaki $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned}
&\alpha \max_u G(x_1, u) + (1-\alpha) \max_u G(x_2, u) \\
&\quad = \alpha\, G(x_1, u_1) + (1-\alpha)\, G(x_2, u_2) \\
&\quad \leq G(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2,\ \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2) \\
&\quad \leq \max_u G(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2, u)
\end{aligned}$$

gdje prva jednakost slijedi iz same definicije od u_i, druga nejednakost iz defincije konkavnosti funkcije G, a zadnja iz svojstva maksimuma. Time je po definiciji pokazano da je $\max_u G(x, u)$ konkavna funkcija u x. $\square$

Pokažimo kako možemo lako primijeniti Arrowljev teorem na primjeru 1.1.1. Već prije smo izračunali Hamiltonian:

$$H(t, x, u, \lambda) = x + u + \lambda\,(1 - u^2).$$

Iz (1.16) slijedi da je kandidat za optimalan u:

$$u(t) = \frac{1}{2\lambda(t)},$$

za sve $t \in [0, 1]$. Iz (1.17) proizlazi da je:

$$u(t) = U(t, x, \lambda) = \frac{1}{2\lambda},$$

vrijednost upravljačke funkcije koja maksimizira Hamiltonian. Tada je maksimizirani Hamiltonian:

$$H^0(t, x, \lambda) = x + \frac{1}{2\lambda} + \lambda\,(1 - \frac{1}{4\lambda^2}).$$

Iz gornjeg izraza, sada se lako zaključi da vrijedi pretpostavka teorema o konkavnosti funkcije $H^0(t, x, \lambda)$ po x jer je ona linearna funkcija po x za sve t i danu funkciju λ. Uz to, i iz ostalih pretpostavki teorema 1.3.3 (kao što smo već ranije izračunali) slijedi optimalno rješenje.

1.4 Interpretacija

Funkcija multiplikatora λ u teoriji optimalnog upravljanja ima smislenu i značajnu interpretaciju u ekonomiji. Pokazat ćemo da je $\lambda(t)$ granična vrijednost pridružene varijable stanja u trenutku t. To znači da ukoliko se dogodi neki "mali" egzogeni (vanjski) prirast varijable stanja u trenutku t i ako se nakon toga problem modificirao u optimalnom smjeru, da će prirast u konačnoj optimalnoj vrijednosti biti po stopi $\lambda(t)$.

Promatramo problem:

$$\begin{aligned} &\max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)dt \\ &\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = g(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Označimo s $V(x_0, t_0)$ maksimum od (1.26), za dano početno stanje x_0 u trenutku t_0. Nadalje, neka su x^* optimalna varijabla stanja i u^* optimalna upravljačka funkcija neprekidna u t te λ pridružena funkcija multiplikatora. Modificirajmo problem (1.26) tako da početnom stanju dodamo "mali" prirast, tj. $x(t_0) = x_0 + a$, gdje je a broj *blizu* nule ($a \neq 0$). Tada $V(x_0 + a, t_0)$ označava maksimum tog modificiranog problema.

Dodavanjem diferencijalne jednadžbe u (1.26) koristeći funkciju $\lambda(t)$ klase C^1 slijedi:

$$V(x_0,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,x^*,u^*)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big[f(t,x^*,u^*) + \lambda(t)g(t,x^*,u^*) - \lambda(t)x^{*'}(t)\Big]\,dt. \tag{1.27}$$

Analogno kao i u (1.5), rastavimo i zadnji član parcijalno integriramo te vratimo u (1.27):

$$V(x_0,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[f^*(t) + \lambda(t)g^*(t) + \lambda'(t)x^*(t)\Big]dt - \lambda(t_1)\,x^*(t_1) + \lambda(t_0)\,x_0,$$

gdje radi lakše notacije * iznad oznaka funkcija označava funkcije izračunate u $(t, x^*(t), u^*(t))$. Uočimo također da je u zadnjem članu zapisano primjenjujući $x^*(t_0) = x_0$ zbog početnog uvjeta. Analogno, koristeći isti λ:

$$\begin{aligned} V(x_0+a,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big[f(t) + \lambda(t)g(t) + \lambda'(t)x(t)\Big]dt - \lambda(t_1)x(t_1) + \\ + \lambda(t_0)\,[x_0 + a]\,, \end{aligned}$$

gdje su x i u optimalna rješenja za ovaj modificirani problem i u zadnjem izrazu koristimo početni uvjet.

Oduzimanjem dobivenih izraza slijedi:

$$
\begin{aligned}
V(x_0, +a, t_0) - V(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t,x,u) - f(t, x^*, u^*) \right] dt \\
= \int_{t_0}^{t_1} \Big[f(t) + \lambda(t)g(t) + \lambda'(t)x(t) - f^*(t) - \lambda(t)g^*(t) - \lambda'(t)x^*(t) \Big] dt + \\
+ \lambda(t_0)\, a - \lambda(t_1)\left[x(t_1) - x^*(t_1) \right].
\end{aligned}
$$

Razvojem podintegralnog izraza u Taylorov red oko (t, x^*, u^*) slijedi:

$$
\begin{aligned}
&V(x_0 + a, t_0) - V(x_0, t_0) = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Big[\Big(f_x^*(t) + \lambda(t)g_x^*(t) + \lambda'(t) \Big)\Big(x(t) - x^*(t) \Big) + \Big(f_u^*(t) + \lambda(t)g_u^*(t) \Big)\Big(u(t) - u^*(t) \Big) \Big] dt + \\
&+ \lambda(t_0)\, a - \lambda(t_1)\left[x(t_1) - x^*(t_1) \right] + \text{ ostatak višeg reda.} \qquad (1.28)
\end{aligned}
$$

Neka je λ funkcija multiplikatora koja zadovoljava nužne uvjete za rješenje (1.26), čime su uvjeti (1.10)-(1.12) zadovoljeni za x^*, u^*, λ, tj.:

$$
\lambda' = -(f_x^* + \lambda g_x^*), \quad f_u^* + \lambda g_u^* = 0, \quad \lambda(t_1) = 0.
$$

Uvrštavanjem u (1.28) ostaje:

$$
V(x_0 + a, t_0) - V(x_0, t_0) = \lambda(t_0)\, a + \text{ ostatak višeg reda.}
$$

Dijeljenjem s a ($a \neq 0$), i puštanjem limesa (u članovima višeg reda javljaju se izrazi $(x(t) - x^*(t))^2$ i $(u(t) - u^*(t))^2$ koji kvadratno ovise o a pa će ti članovi podijeljeni s a težiti u nulu kada $a \to 0$; vidi [6, lema 7.14]) slijedi:

$$
\lim_{a \to 0} \frac{V(x_0 + a, t_0) - V(x_0, t_0)}{a} = V_x(x_0, t_0) = \lambda(t_0), \qquad (1.29)
$$

ukoliko limes postoji. Prva jednakost u (1.29) je upravo definicija parcijalne derivacije funkcije V po x. Time smo pokazali interpretaciju funkcije λ, ali samo u početnom stanju.

Da bismo pokazali da interpretacija vrijedi u svakom trenutku t, podsjetimo se da za integrale vrijedi svojstvo aditivnosti, pa će svaki dio optimalnog programa biti sam za sebe optimalan. Neka je x^*, u^* rješenje problema (1.26) i u optimalnom smo programu do nekog trenutka t_s ($t_0 \leq t \leq t_s$) kada stanemo i tražimo optimalno rješenje od tog trenutka do kraja:

$$
\begin{aligned}
&\max \int_{t_s}^{t_1} f(t,x,u)dt \\
&\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = g(t,x,u), \quad x(t_s) = x^*(t_s)
\end{aligned} \qquad (1.30)
$$

Rješenje gornjeg problema (1.30) mora opet biti $x^*(t)$, $u^*(t)$, $t_s \leq t \leq t_1$, dakle isto kao i rješenje originalnog problema (1.26) (na široj domeni) samo sada promatrajući isključivo na intervalu $[t_s, t_1]$.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji veća vrijednost optimalnog rješenja problema (1.30) nego što ju postižu $x^*(t)$, $u^*(t)$ na $t_s \leq t \leq t_1$. U tom slučaju, možemo poboljšati originalnu optimalnu vrijednost rješenja (1.26) tako da pratimo rješenja $x^*(t)$, $u^*(t)$ za $t_0 \leq t \leq t_s$ i zatim se "prebacimo" na optimalna rješenja od (1.30). Ali tu dolazimo do kontradikcije s pretpostavkom optimalnosti rješenja x^*, u^* za (1.26). Dakle, zaključujemo da su x^*, u^*, $t_s \leq t \leq t_1$ optimalna za (1.30). Gore pokazano za zadaću (1.30) nas vodi do zaključka da tada vrijedi i:

$$V_x(x(t_s), t_s) = \lambda(t_s)$$

uz uvjet da parcijalna derivacija postoji te gdje je λ funkcija multiplikatora iz problema (1.26) (jer se optimalna rješenja podudaraju za $t_s \leq t \leq t_1$). Jer je vrijeme t_s bilo proizvoljno, kad postoji V_x vrijedi i:

$$V_x(x(t), t) = \lambda(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

i označava graničnu vrijednost pridružene varijable stanja x u trenutku t. Kada promatramo konačnu točku, lako se interpretira da granična vrijednost varijable stanja u tom trenutku t_1 mora biti nula (jer ne može biti više promjene na optimalnu vrijednost) čime dolazimo do uvjeta transverzalnosti: $\lambda(t_1) = 0$. Iz svega ovoga, vidimo da učinak promjene varijable stanja na optimalnu vrijednost rješenja našeg problema ovisi o trenutku t kada je do promjene došlo i to preko funkcije λ.

Pokažimo interpretaciju na važnom primjeru iz ekonomije 1.1.3 kojeg smo uveli u prvom odjeljku ovog poglavlja. Tražimo:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T e^{-rt}[P(x) - C(u)]dt \\ &\text{uz uvjete:} \quad x' = u - bx, \quad x(0) = x_0 > 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Napomenimo kako ćemo, barem zasada, pretpostaviti da je uvjet $u(t) \geq 0$ zadovoljen automatski za sve t, tj. rješavamo primjer bez tog ograničenja. Funkciju $\lambda(t)$ onda ovdje interpretiramo kao diskontiranu stopu po kojoj se mijenja razina profita kada se razina kapitala poveća za "malu" jedinicu u trenutku t. Računamo Hamiltonian:

$$H = e^{-rt}[P(x) - C(u)] + \lambda(u - bx).$$

Optimalne funkcije x^*, u^* i λ moraju zadovoljavati uvjete (1.31) te nužne uvjete optimalnosti:

$$H_u = -e^{-rt}C'(u) + \lambda = 0, \tag{1.32}$$
$$\lambda' = -H_x = -e^{-rt}P'(x) + b\lambda, \quad \lambda(T) = 0, \tag{1.33}$$
$$H_{uu} = -e^{-rt}C''(u) < 0. \tag{1.34}$$

Zbog pretpostavke iz zadatka $C'' > 0$ vrijedi uvjet (1.34). Iz (1.32) slijedi:

$$\lambda(t) = e^{-rt}C'(u(t)) \tag{1.35}$$

što znači da u svakom trenutku t, granični trošak investiranja (izraz s desne strane) mora biti jednak graničnoj vrijednosti jedinice kapitala λ (izraz s lijeve strane). Oba izraza su diskontirana na početni trenutak $t = 0$ preko diskontnog faktora (e^{-rt}), što će biti dodatno pojašnjeno u sljedećem odjeljku. Dakle, drugim riječima, da bi tvrtka maksimizirala svoj profit, granični trošak (trošak nove dodatne jedinice) mora biti jednak graničnoj korisnosti istodobno u svakom trenutku t.

Također, manipulacijom diferencijalne jednadžbe (1.33) možemo pokazati još jednu interpretaciju granične vrijednosti jedinice kapitala λ. Oduzimanjem $b\lambda$ sa svake strane, množenjem s integrirajućim faktorom e^{-bt} slijedi:

$$e^{-bt}(\lambda'(t) - b\lambda(t)) = (\lambda(t)e^{-bt})' = -e^{-(r+b)t}P'(x).$$

Integriranjem od t do T, i uvrštavanjem uvjeta $\lambda(T) = 0$ dobivamo:

$$e^{-bt}\lambda(t) = \int_t^T e^{-(r+b)s}P'(x(s))ds.$$

Dakle, graničnu vrijednost jedinice kapitala u trenutku t dobivamo množenjem zadnje jednakosti faktorom $e^{(r+b)t}$:

$$e^{rt}\lambda(t) = \int_t^T e^{-(r+b)(s-t)}P'(x(s))ds, \tag{1.36}$$

iz čega vidimo da je granična vrijednost jedinice kapitala u trenutku t jednaka diskontiranom toku graničnog profita koji će se generirati od ovog trenutka t do kraja planiranog perioda T. To nam pokazuje činjenicu da kapital propada po stopi $b \geq 0$ jer za sve $s > t$ jedinica kapitala pridonosi samo dijelom (e^{-bs}) od onoga što je pridonosila ta ista jedinica originalno u trenutku t. Kombiniranje (1.35) i (1.36) daje uvjet da granični trošak mora biti jednak graničnoj korisnosti za optimalno investiranje:

$$C'(u(t)) = \int_t^T e^{-(r+b)(s-t)}P'(x(s))ds.$$

1.5 Diskontiranje u ekonomiji i trenutna vrijednost

Kao što smo vidjeli u primjeru 1.1.3, tako i u većini problema optimalnog upravljanja koji se pojavljuju u ekonomiji, potrebno je izračunati sadašnju vrijednost budućih novčanih iznosa, što nazivamo diskontiranje, po (kamatnoj) stopi r, pa promatramo probleme oblika:

$$\max \int_0^T e^{-rt} f(t,x,u)dt$$
$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = g(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0$$

od nekog početnog trenutka $t = 0$ do trenutka T. Hamiltonian je tada:

$$H = e^{-rt} f(t,x,u) + \lambda g(t,x,u),$$

i zahtjevamo da optimalno rješenje zadovoljava nužne uvjete:

$$H_u = e^{-rt} f_u + \lambda g_u = 0 \tag{1.37}$$
$$\lambda' = -H_x = e^{-rt} f_x - \lambda g_x, \quad \lambda(T) = 0. \tag{1.38}$$

Dakle, sve vrijednosti iznad su diskontirane (izračunata im je sadašnja vrijednost) u trenutku $t = 0$, a funkcija multiplikatora $\lambda(t)$ je granična vrijednost varijable stanja u trenutku t diskontirana na $t = 0$. Izraz e^{-rt} se naziva *diskontni faktor*. No, često je praktičnije diskutirati rješenja u trenutnim vrijednostima (u trenutku t) nego u diskontiranim (u trenutku $t = 0$). Prisjetimo se da je diferencijalna jednadžba prvog reda *autonomna* (vidi [6]) ako vrijedi:

$$u'(t) = f(u) \quad \text{za neku funkciju} f.$$

Ako t nije eksplicitan argument funkcije f i g, tada će diferencijalne jednadžbe koje opisuju optimalno rješenje biti autonomne (ne ovise eksplicitno, direktno o argumentu) kada je funkcija multiplikatora dana u obliku trenutne vrijednosti, a ne diskontirane.

Zapišimo Hamiltonian u sljedećem obliku:

$$H = e^{-rt}\left[f(t,x,u) + e^{rt}\lambda g(t,x,u)\right]$$

i sada definiramo trenutnu vrijednost funkcije multiplikatora u oznaci $m(t)$ s:

$$m(t) := e^{rt}\lambda(t). \tag{1.39}$$

To je, dakle, granična vrijednost varijable stanja u trenutku t (gdje su sve vrijednosti izražene kao trenutne, u trenutku t), tj. (neprekidno) ukamaćena funkcija multiplikatora po stopi r. Sada možemo definirati i trenutnu vrijednost Hamiltoniana $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H} := e^{rt}H = f(t,x,u) + mg(t,x,u). \tag{1.40}$$

Deriviranjem (1.39) po t slijedi:

$$m' = re^{rt}\lambda + \lambda' e^{rt} = rm - e^{rt}H_x,$$

gdje zadnja jednakost proizlazi zamjenom iz (1.37) i (1.38). Iz (1.40) slijedi da je $H = e^{-rt}\mathscr{H}$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned} m' &= rm - e^{rt}\,\frac{\partial\left(e^{-rt}\mathscr{H}\right)}{\partial x} = rm - e^{rt}e^{-rt}\mathscr{H}_x \\ &= rm - f_x - mg_x. \end{aligned}$$

Nadalje, za (1.37) vrijedi:

$$H_u = \frac{\partial\left(e^{-rt}\mathscr{H}\right)}{\partial u} = e^{-rt}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial u} = 0$$

iz čega zaključujemo da mora vrijediti:

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial u} = 0.$$

Uvjet $x' = g$ zamijenjen je s:

$$x' = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial m} = g.$$

Dakle, konačno, u terminima trenutne vrijednosti Hamiltoniana

$$\mathscr{H} := e^{rt}H = f(t,x,u) + mg(t,x,u),$$

nužni ekvivalentni uvjeti za optimalno rješenje su:

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial u} = f_u + mg_u = 0 \tag{1.41}$$

$$m' = rm - \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x} \tag{1.42}$$

$$x' = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial m} = g \tag{1.43}$$

te uvjet transverzalnosti $m(T) = 0$ koji slijedi iz:

$$\lambda(T) = e^{-rT}m(T) = 0 \Rightarrow m(T) = 0.$$

Dodatno, kao i prije, nužno je da u problemu maksimizacije $u^*(t)$ maksimizira $\mathscr{H}(t, x^*(t), u, \lambda(t))$, tj. da za svaki t vrijedi:

$$\frac{\partial^2\mathscr{H}}{\partial u^2}(t, x^*, u^*, \lambda) \leq 0.$$

U problemu minimizacije, nužno je da $u^*(t)$ minimizira $\mathscr{H}(t, x^*(t), u, \lambda(t))$ po u, tj. da za svaki t vrijedi:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial u^2}(t, x^*, u^*, \lambda) \geq 0.$$

Prednost ovih zapisa je u tome što jednadžbe (1.41)-(1.43) ne sadrže diskontne faktore, a ako dodatno znamo da f i g ne ovise eksplicitno o argumentu t, već samo o (x, u), dobivamo autonomne jednadžbe:

$$\begin{aligned} x' &= g(x, u), \\ f_u(x, u) &+ m g_u(x, u) = 0, \\ m' &= rm - f_x(x, u) - m g_x(x, u). \end{aligned}$$

Kao i prije, da bi našli nužne uvjete za rješenje, iz druge jednadžbe izrazimo funkciju $u = u(m, x)$, te vraćanjem u preostale dvije dobivamo sustav od dvije autonomne diferencijalne jednadžbe. Općenito, prednost takvih, u odnosu na one koje nisu autonomne, je u tome što se rješavaju puno lakše (metodom separacije), a i dodatno, kada nije moguće naći eksplicitno rješenje, uz autonomne diferencijalne jednadžbe moguće je provesti analizu preko faznog dijagrama.

Vratimo se našem primjeru 1.1.3 kojeg je mnogo elegantnije zapisivati u terminima trenutnih vrijednosti. Tada, trenutni Hamiltonian zapisujemo:

$$\mathscr{H}(t, x, u, m) = P(x) - C(u) + m(u - bx). \tag{1.44}$$

Dalje računamo:

$$\mathscr{H}_u = 0 \Rightarrow C'(u) = m, \tag{1.45}$$

gdje trenutna vrijednost funkcije multiplikatora zadovoljava:

$$m' = rm - P'(x) + bm = (r + b)m - P'(x) \tag{1.46}$$

te dodatno:

$$x' = u - bx, \quad x(0) = x_0 > 0. \tag{1.47}$$

Uz gore provjerene nužne uvjete koje optimalno rješenje mora zadovoljavati, nužno je također da vrijedi:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial u^2}(t, x^*, u^*, \lambda) = -C''(u) \leq 0,$$

što slijedi iz pretpostavke zadatka $C'' > 0$. Uočimo, u ovom problemu ne možemo eksplicitno odrediti rješenje jer nisu definirane funkcije P i C. Ipak, možemo izraziti optimalnu upravljačku funkciju u, jer iz $C'' > 0$ slijedi da je C' strogo monotona funkcija i postoji njezin inverz, tj. možemo pisati:

$$C'(u) = m \Rightarrow u = C'^{-1}(m) = \varphi(m) \tag{1.48}$$

uz oznaku: $\varphi := C'^{-1}$.
Sada, sva svojstva funkcije φ slijede iz svojstva od C'. Jer je $C'(0) = 0$ slijedi da je $\varphi(0) = 0$. Deriviranjem (1.45) i jer vrijedi $C'' > 0$:

$$C''(u)\, du = dm \Rightarrow \frac{du}{dm} = \frac{1}{C''} = \varphi' > 0.$$

Vraćanjem u iz (1.48) u (1.47) te uz diferencijalnu jednadžbu (1.46) dobivamo sustav po x i m:

$$x' = \varphi(m) - bx \tag{1.49}$$
$$m' = (r + b)m - P'(x). \tag{1.50}$$

Kao što je bilo napomenuto ranije, funkcije P i C nisu eksplicitno definirane, pa ovaj sustav ne možemo eksplicitno riješiti, ali možemo komentirati optimalna rješenja preko faznih dijagrama i skiciranjem trajektorija što nazivamo kvalitativnom analizom. Uočimo da će rješenje biti uistinu optimalno prema teoremu 1.3.1 jer je funkcija cilja $f(t, x, u) = e^{-rt}[P(x) - C(u)]$ konkavna po (x, u), kao zbroj dvije konkavne funkcije. Naime, iz $P'' < 0$ i $C'' > 0$, tj. $-C'' < 0$, dobivamo prethodno spomenuto. Funkcija $g(t, x, u) = u - bx$ je očito linearna po x i u te su time zadovoljene sve pretpostavke Mangasarianovog teorema.

Provedimo sada kvalitatitvnu analizu na primjeru 1.1.3. Zbog tehničkih detalja, uzimamo $T = +\infty$, tj. pripadni integral promatramo u granicama 0 i $+\infty$. Označimo:

$$x' = \varphi(m) - bx \ := h(x, m) \tag{1.51}$$
$$m' = (r + b)m - P'(x) \ := j(x, m). \tag{1.52}$$

Prva linija razgraničenja:

$$x' = 0 \Rightarrow \varphi(m) = bx,$$

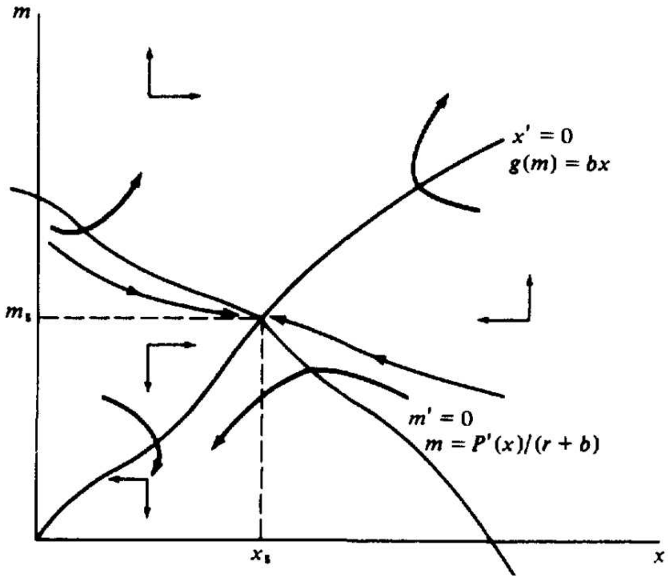
jer $\varphi(0) = 0$ i $\varphi' > 0$ ova linija prolazi ishodištem i strogo rastuća je. Za točke na liniji (x_a, m_a) vrijedi dakle, $\varphi(m) = bx$, dok za točke $(x_a, m_a + k)$ za $k > 0$ (iznad linije) vrijedi:

$$\varphi(m_a + k) - bx_a > 0 \Rightarrow x' > 0.$$

Analogno, za točke ispod linije zaključujemo da mora vrijediti $x' < 0$. Druga linija razgraničenja:

$$m' = 0 \Rightarrow (r + b)m = P'(x) \Rightarrow m = \frac{P'(x)}{r + b}.$$

Jer je $P'' < 0$ slijedi da je P' padajuća funkcija pa zbog toga takva je i funkcija m, te iznad te linije m raste ($m' > 0$), a ispod pada ($m' < 0$).



Slika 1.1: Fazni dijagram za sustav, slika preuzeta iz [2].
Funkcija g sa slike predstavlja našu funkciju φ.

Točkom (x_s, m_s) (vidi sliku 1.1) označena je međuvremenska ravnoteža (stacionarna točka) koju dobijemo rješavanjem sustava:

$$x' = 0$$

$$m' = 0,$$

tj. sjecište dviju linija razgraničenja. To je točka u kojoj nema težnje za promjenom, pa je zato i dobivamo rješavanjem ovog sustava. Strelicama su označene tzv. linije tijeka. Budući da se radi o problemu u kojemu smo pretpostavili $T = +\infty$ i sustav je autonoman, možemo se pitati o kojoj vrsti ravnoteže se radi. Ako se sve linije tijeka udaljavaju od ravnoteže kažemo da se radi o nestabilnoj, a ako se približavaju, stabilnoj. Postoji slučaj i u kojemu se u nekim smjerovima udaljavaju, a u drugima pak približavaju, pa govorimo o sedlastoj točki (vidi [4]).

Iz slike 1.1 u našem primjeru vidljivo je da se radi o sedlastoj točki. Da bi to pokazali, uočimo najprije da se ovdje radi o izoliranoj stacionarnoj točki (x_s, m_s) te zatim dani sustav lineariziramo. Ekvivalentan linearizirani (aproksimativni) sustav u okolini (x_s, m_s) dobivamo razvojem desnih strana od (1.51) i (1.52) u Talyorov red oko (x_s, m_s) pri čemu zapisujemo samo linearne članove:

$$\begin{aligned} x' &= h(x_s, m_s) + h_x(x_s, m_s)(x - x_s) + h_m(x_s, m_s)(m - m_s) \\ y' &= j(x_s, m_s) + j_x(x_s, m_s)(x - x_s) + j_m(x_s, m_s)(m - m_s). \end{aligned}$$

Jer je (x_s, m_s) međuvremenska ravnoteža, mora vrijediti $h(x_s, m_s) = j(x_s, m_s) = 0$, pa sustav uz uvrštavanje gornjih parcijalnih derivacija postaje:

$$\begin{aligned} x' &= -b(x - x_s) + \varphi'(m_s)(m - m_s) \\ m' &= -P''(x_s)(x - x_s) + (r + b)(m - m_s). \end{aligned}$$

Označimo sljedeće konstante:

$$\begin{aligned} a_1 &= h_x(x_s, m_s) = -b, & a_2 &= j_x(x_s, m_s) = -P''(x_s) \\ b_1 &= h_m(x_s, m_s) = \varphi'(m_s), & b_2 &= j_m(x_s, m_s) = r + b. \end{aligned}$$

Korijene karakteristične jednadžbe, odnosno svojstvene vrijednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

tada računamo po formuli:

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{(a_1 + b_2) \pm \left[(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)\right]^{1/2}}{2} \\ &= \frac{a_1 + b_2}{2} \pm \frac{[(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1]^{1/2}}{2}, \end{aligned}$$

te uvrštavanjem slijedi:

$$k_{1,2} = \frac{r}{2} \pm \frac{\left[(r + 2b)^2 - 4\varphi'(m_s) P''(x_s)\right]^{1/2}}{2}.$$

Zbog $\varphi' > 0$ i $P'' < 0$, $r > 0$, $b \geq 0$ izraz pod korijenom je sigurno pozitivan, pa imamo dva realna korijena. Još vrijedi:

$$(r + 2b)^2 - 4\varphi'(m_s) P''(x_s) > r^2 \Rightarrow \frac{\left[(r + 2b)^2 - 4\varphi'(m_s) P''(x_s)\right]^{1/2}}{2} > \frac{r}{2}$$

iz čega zaključujemo da će manji korijen biti sigurno negativan. Jer je $k_1 + k_2 = r > 0$, drugi korijen sigurno mora biti pozitivan. Dakle, imamo dva različita realna korijena suprotnih predznaka iz čega zaključujemo da se radi o sedlastoj točki (vidi [6, poglavlje 14]). U slučaju kada je $x_0 < x_s$ sustav teži međuvremenskoj ravnoteži tako x monotono raste, a m monotono pada. Zbog toga što je u rastuća funkcija od m (1.48), slijedi da stopa investicija u također monotono pada u ovom slučaju. Analogno, možemo komentirati ostale putanje iz faznog dijagrama na slici 1.1

Alternativno, možemo diskutirati i na sljedeći način koji se u ekonomiji naziva *analizom komparativne statike*. Naime, uspoređujemo dva ravnotežna stanja, prije i poslije promjene neke egzogene varijable. Ukoliko se poveća stopa r, to će spustiti niže liniju razgraničenja $m' = 0$, dok će linija $x' = 0$ ostati na istome što će rezultirati manjim vrijednostima od x_s i m_s. Dakle:

$$\frac{\partial x_s}{\partial r} < 0 \qquad \frac{\partial m_s}{\partial r} < 0 \qquad \frac{\partial u_s}{\partial r} < 0.$$

Interpretacija gornjih tvrdnji u našem primjeru bi bila, da se povećanjem (kamatne) stope r smanjuje ravnotežna zaliha kapitala i njena ravnotežna granična vrijednost, a samim time i ravnotežna stopa investicija. Analogno, možemo komentirati i sve ostale slučajeve promjena varijabli.

Postoji i tzv. *analiza komparativnom dinamikom* kojom promatramo promjene u cijeloj optimalnoj putanji (ne kao maloprije samo u ravnotežnim stanjima), no zbog kompleksnosti u to nećemo ulaziti.

Ovaj primjer ćemo eksplicitno riješiti za konkretno zadane funkcije P i C.

Primjer 1.5.1. U primjeru 1.1.3 neka su zadane:

$$P(x) = ax - \frac{x^2}{2}$$
$$C(u) = cu^2.$$

Iz pretpostavki zadatka, dobivamo uvjete na konstante a i c. Zbog $P'(0) > 0$:

$$P'(x) = a - x \Rightarrow P'(0) = a \Rightarrow a > 0.$$

Lako se provjeri da je zadovoljen uvjet $P''(x) = -1 < 0$ i $C'(0) = 0$. Zbog $C'' > 0$ slijedi:

$$C''(u) = 2c \Rightarrow c > 0.$$

Riješimo preko trenutnih vrijednosti. Dakle, prema prethodno izračunatom (1.44):

$$\mathscr{H}(t, x, u, m) = ax - \frac{x^2}{2} - cu^2 + m(u - bx).$$

Koristeći nužne uvjete za optimalnost (1.45)-(1.47):

$$2cu = m \Rightarrow u = \frac{m}{2c}$$

$$m' = (r+b)m + x - a$$

te uz $u(x,m) = \frac{m}{2c} = \varphi(m)$ (1.47) postaje:

$$x' = \frac{m}{2c} - bx, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Pošto se radi o problemu maksimizacije nužno je također provjeriti:

$$\mathscr{H}_{uu}(t,x,u,m) = -2c \le 0,$$

što vrijedi jer je $c > 0$. Nadalje, rješavamo sustav od dvije linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda po m i x:

$$\begin{cases} m' = (r+b)m + x - a \\ x' = \dfrac{m}{2c} - bx, \quad x(0) = x_0 > 0. \end{cases} \tag{1.53}$$

Koristimo teorem koji nam govori da je rješenje sustava zbroj homogenog (opće rješenje pripadnog homogenog sustava) i partikularnog rješenja (za nehomogeni sustav), pa prvo rješavamo homogeni sustav:

$$\begin{cases} m' = (r+b)m + x \\ x' = \dfrac{m}{2c} - bx\ . \end{cases} \tag{1.54}$$

Jedna od metoda za rješavanje ovog homogenog sustav je svesti ove dvije linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda na jednu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Deriviranjem prve jednadžbe u (1.54) slijedi:

$$m'' = (r+b)m' + x' \tag{1.55}$$

i uvrštavanjem druge jednadžbe iz (1.54) u (1.55):

$$m'' = (r+b)m' + \frac{m}{2c} - bx. \tag{1.56}$$

Supstitucijom $x = m' - (r+b)m$ iz prve jednadžbe sustava, uvrštavanjem u (1.56) te sređivanjem dobivamo:

$$m'' - rm' - \left(\frac{1}{2c} + b(r+b)\right)m = 0.$$

Računamo korijene pridružene karakteristične jednadžbe:

$$k_{1,2} = \frac{r}{2} \pm \sqrt{r^2 + 4\left(\frac{1}{2c} + b(r+b)\right)}.$$

Jer je $r > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$ izraz pod korijenom je pozitivan, dakle imamo dva realna različita rješenja. S obzirom na to, opća rješenja homogenog sustava su:

$$m(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

$$x(t) = (k_1 - r - b)\; C_1 e^{k_1 t} + (k_2 - r - b)\; C_2 e^{k_2 t}.$$

Jer su preostali članovi iz nehomogenog sustava (1.53) konstante, partikularno rješenje dobivamo rješavanjem sustava:

$$\begin{cases} m' = (r+b)m - x - a = 0 \\ \;x' = \dfrac{1}{2c} m - bx = 0\;. \end{cases} \tag{1.57}$$

Uočimo, to je upravo točka međuvremenske ravnoteže. Rješavanjem (1.57) dobivamo:

$$(x_s, m_s) = \left(\frac{a}{2bc(r+b)+1}, \frac{2abc}{2bc(r+b)+1} \right).$$

Konačno, rješenje sustava:

$$m(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + \frac{2abc}{2bc(r+b)+1},$$

$$x(t) = (k_1 - r - b)\; C_1 e^{k_1 t} + (k_2 - r - b)\; C_2 e^{k_2 t} + \frac{a}{2bc(r+b)+1}.$$

Iz $u = \frac{m}{2c}$ nalazimo i upravljačku funkciju:

$$u(t) = \frac{C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}}{2c} + \frac{2abc}{4bc^2(r+b)+1},$$

kadgod je zadovoljen uvjet $u(t) \geq 0$ za sve t.

Napomena 1.5.1. *Uvrštavanjem početnog uvjeta:*

$$x(0) = x_0 > 0$$

i uvjeta transverzalnosti:

$$m(T) = 0,$$

te rješavanjem sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice dobivamo konstante C_1 i C_2.

Da bismo provjerili da su to uistinu optimalna rješenja, provjerimo i ostale pretpostavke Mangasarianovog teorema dovoljnosti. Za funkcije iz ovog primjera:

$$f(t,x,u) = P(x) - C(u) = ax - \frac{x^2}{2} - cu^2,$$

$$g(t,x,u) = u - bx,$$

očito je da su obje klase C^1 i da je g linearna u (x,u), tj. vrijedi slučaj (1) iz teorema 1.3.1. Jer se radi o problemu maksimizacije, preostaje pokazati da je funkcija f konkavna po (x,u). Formiramo *Hesseovu* matricu u (x,u):

$$H(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2c \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da, uz prethodno zaključeno $c > 0$, vrijedi:

$$\det H = 2c > 0.$$

Također je:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1 < 0,$$

iz čega zaključujemo da je matrica H negativno definitna, pa je f (strogo) konkavna. Stroga konkavnost nam ovdje može pomoći u zaključku da će rješenje biti jedinstveno. Izračunate funkcije x i m (pa time i λ) su neprekidne i stoga zaključujemo da su gore izračunata rješenja zaista i optimalna jer zadovoljavaju sve pretpostavke teorema. Uočimo da, zasada, nenegativnost upravljačke funkcije pretpostavljamo automatski (zanemarujemo taj uvjet) dok će više o ograničenjima na upravljačku funkciju biti rečeno u odjeljku 2.3.

Poglavlje 2

Složeniji problemi kroz primjere iz ekonomije

2.1 Fiksirana krajnja točka

Kao što smo vidjeli u primjeru 1.1.2, osim zadane vrijednosti varijable stanja u početnom trenutku, možemo imati i zadanu (fiksiranu) vrijednost u krajnjoj točki. Dakle, problem tada postaje:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \tag{2.1}$$

$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = g(t, x, u), \tag{2.2}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{2.3}$$

Interpretativno, dodatni uvjet nam govori da bi upravljačka funkcija trebala navoditi varijablu stanju prema fiksiranoj poziciji x_1 u trenutku t_1, tj. na kraju promatranog vremenskog perioda. Zbog toga, nužni uvjeti su malo modificirani u odnosu na problem iz prvog poglavlja.

Pretpostavimo prije svega da postoji dopustivo rješenje gornjeg problema i koristimo sličan pristup pokazivanja nužnih uvjeta kao i prije. Neka u^* označava optimalnu upravljačku funkciju i x^* odgovarajuću optimalnu varijablu stanja koja se može dobiti uvrštavanjem $u = u^*$ u (2.2) i rješavanjem diferencijalne jednadžbe uz početne uvjete (2.3). S J^* označimo maksimalnu vrijednost od (2.1). Neka je u još neka dopustiva upravljačka funkcija, x pridužena varijabla stanja koja zadovoljava (2.2) i (2.3) te J vrijednost integrala za dane u i x.

Za istu multiplikatorsku funkciju λ, te iz (1.6) uz činjenicu da je $x(t_1) = x^*(t_1) = x_1$ i $x(t_0) = x^*(t_0) = x_0$ slijedi:

$$J - J^* = \Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t,x,u) + \lambda g(t,x,u) + x\lambda' - f(t,x^*,u^*) - \lambda g(t,x^*,u^*) - x^*\lambda' \right] dt.$$

Za podintegralni izraz, koristimo Taylorov razvoj oko (t, x^*, u^*):

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda g_x + \lambda')(x - x^*) + (f_u + \lambda g_u)(u - u^*) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \text{ost. višeg reda},$$

uz napomenu da su sve parcijalne derivacije u gornjem izrazu izračunate u točki (t, x^*, u^*). Definiramo:

$$\delta x = x - x^*, \quad \delta u = u - u^*.$$

Linearni dio po δx, δu od ΔJ, bez ostatka višeg reda, se naziva *prva varijacija* od J (u oznaci δJ):

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda g_x + \lambda')\delta x + (f_u + \lambda g_u)\delta u \right] dt. \tag{2.4}$$

Isto kao i prije, odabiremo funkciju λ takvu da zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$\lambda'(t) = -\left[f_x(t,x^*,u^*) + \lambda(t) g_x(t,x^*,u^*) \right], \tag{2.5}$$

čime je koeficijent uz δx u (2.4) jednak nuli. Da bi pokazali da je J^* uistinu maksimalna vrijednost, mora vrijedi $J - J^* = \Delta J \leq 0$, tj.:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[f_u(t,x^*,u^*) + \lambda g_u(t,x^*,u^*) \right] \delta u \, dt \leq 0, \tag{2.6}$$

za proizvoljnu dopustivu varijaciju upravljačke funkcije δu (inače se može lako pokazati da ne bi vrijedilo $\Delta J \leq 0$). Primijetimo, da dopustivost ovdje uključuje uvjet koji mora zadovoljavati varijabla stanja u krajnjoj točki.

Lema 2.1.1. *Ako postoji dopustiva upravljačka funkcija koja dovodi sustav iz stanja $x(t_0) = x_0$ u stanje $x(t_1) = x_1$, tada koeficijent uz δu u (2.6) mora biti 0.*

Dokaz leme se može naći u [2, dodatak poglavlju II.6]. Koristeći tu lemu, iz (2.6) slijedi da mora vrijediti:

$$f_u(t,x^*,u^*) + \lambda g_u(t,x^*,u^*) = 0, \tag{2.7}$$

kada vrijedi (2.5). Time su objedinjeni svi nužni uvjeti. Dakle, zaključno, ako su x^*, u^* optimalni za (2.1)-(2.3), tada postoji funkcija λ tako da x^*, u^*, λ istovremeno zadovoljavaju (2.2), (2.3), (2.5) i (2.7). Hamiltonian je maksimiziran po varijabli u za svaki t. Uočimo da više nemamo nužan uvjet transverzalnosti $\lambda(t_1) = 0$, već fiksirana vrijednost x_1 varijable stanja u krajnjoj točki daje ekvivalentan nužan uvjet.

Riješimo sada primjer 1.1.2 u kojemu tražimo optimalan raspored proizvodnje uz minimalan trošak. Podsjetimo se, $u(t)$ označava stopu proizvodnje, a $x(t)$ količinu zaliha u trenutku t. Zasada ćemo pronaći optimalno rješenje bez ograničenja na upravljačku funkciju $u \geq 0$ (za rješenje s tim ograničenjem vidi odjeljak 2.3):

$$\begin{aligned} &\min \int_0^T [c_1 u^2(t) + c_2 x(t)]dt \\ &\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B. \end{aligned}$$

Ovo je problem u kojemu se pojavljuje fiksirana i početna i krajnja točka. Preciznije, količina zaliha s kojom raspolažemo na početku je 0 ($x(0) = 0$), a trebala bi dostići razinu B u trenutku T ($x(T) = B$). Formiramo Hamiltonian:

$$H = c_1 u^2 + c_2 x + \lambda u.$$

Optimalno rješenje mora zadovoljavati nužne uvjete:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2c_1 u + \lambda = 0, \tag{2.8}$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -c_2. \tag{2.9}$$

Integriranjem (2.9) dobivamo:

$$\lambda(t) = -c_2 t + A, \tag{2.10}$$

za neku konstantu $A \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem (2.10) u (2.8) slijedi:

$$u(t) = \frac{c_2 t - A}{2c_1}.$$

Jer mora vrijediti $x' = u$, integriranjem slijedi:

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} - \frac{At}{2c_1} + C, \tag{2.11}$$

za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$. Iz početnog uvjeta $x(0) = 0$ i (2.11) slijedi da je $C = 0$, a iz uvjeta za krajnju točku $x(T) = B$ izračunom dobivamo konstantu A:

$$A = \frac{c_2 T}{2} - \frac{2Bc_1}{T}.$$

Uvrštavanjem dobivenih konstanti A i C, rješenje nužno mora zadovoljavati:

$$x(t) = \frac{c_2 t(t-T)}{4c_1} + \frac{Bt}{T},$$

$$u(t) = \frac{c_2(2t-T)}{4c_1} + \frac{B}{T},$$

$$\lambda(t) = -c_2 t + \frac{c_2 T}{2} - \frac{2Bc_1}{T},$$

za sve t takve da $0 \leq t \leq T$. Provjerimo i ostale pretpostavke osnovnog teorema dovoljnosti (*Mangasarian*) kako bi utvrdili da li su gornje zapisana rješenja uistinu i optimalna. Funkcije x i λ su neprekidne za $T \neq 0$. U ovom primjeru imamo:

$$f(t,x,u) = c_1 u^2 + c_2 x,$$

$$g(t,x,u) = u$$

i očito je da su obje klase C^1 i da je g linearna u (x,u), tj. vrijedi slučaj (1) iz teorema 1.3.1. Jer se radi o problemu minimizacije, preostaje pokazati da je funkcija f konveksna po (x,u). Formiramo *Hesseovu* matricu u (x,u):

$$H(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2c_1 \end{bmatrix}.$$

Jer je gornja matrica dijagonalna, lako iščitavamo svojstvene vrijednosti na dijagonali koje su nenegativne, pa zaključujemo da je Hessian pozitivno semidefinitna matrica čime smo pokazali da je funkcija f konveksna po (x,u).

Osim problema optimalnog upravljanja u kojima se pojavljuje slobodna i fiksirana krajnja točka, mogući su također i razni uvjeti nejednakosti za istu (vidi [2, poglavlje II.7]).

2.2 Problemi s više varijabli, Cobb-Douglas

Sve naše zaključke koje smo dosada donijeli za jednu upravljačku funkciju i jednu varijablu stanja lako možemo proširiti na više varijabli (vidi [2, poglavlje II.5]). Općenito, broj upravljačkih funkcija i varijabli stanja ne mora nužno biti isti. Pretpostavimo da imamo n varijabli stanja i m upravljačkih funkcija. Radi lakšeg pisanja, uvodimo vektorsku notaciju. Promatramo problem:

$$\max \int_{t_0}^{t_t} f\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t)\right) dt \tag{2.12}$$

$$\text{uz uvjete:} \quad x_i'(t) = g_i\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t)\right), \tag{2.13}$$

$$x_i\left(t_0\right) \text{ fiksirano, } x_i\left(t_1\right) \text{ slobodno, } i = 1, \ldots, n, \tag{2.14}$$

gdje su funkcije f i g neprekidno diferencijabilne po svim argumentima. Neka $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \ldots, g_n]$ označavaju pripadne vektore. Vektor optimalnih upravljačkih funkcija označimo s $\mathbf{u}^*$, a iz njega generirani pridruženi vektor optimalnih varijabli stanja s $\mathbf{x}^*$. Nadalje zapisujemo sve nužne uvjete da bi rješenje bilo optimalno.

Ako vektori $\mathbf{u}^*$ i $\mathbf{x}^*$ zadovoljavaju (2.12)-(2.14), tada postoje neprekidno diferencijabilne funkcije koje zapisujemo u vektoru $\boldsymbol{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)]$ takve da uz:

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \cdot g_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}$ istovremeno zadovoljavaju:

$$\begin{aligned}
x_i' &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad x_i\left(t_0\right) \text{ fiksirano}, \quad i = 1, \ldots, n; \\
\lambda_k' &= -\frac{\partial H}{\partial x_k} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right), \quad k = 1, \ldots, n; \\
0 &= \frac{\partial H}{\partial u_j} = \frac{\partial f}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial u_j}, \quad j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Dodatno, $\mathbf{u}^*(t)$ maksimizira $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t))$ po argumentu $\mathbf{u}$ za svaki t.

Navedimo jedan primjer problema optimalnog upravljanja više varijabli iz ekonomije povezan uz poznatu *Cobb-Douglasovu* funkciju proizvodnje.

Primjer 2.2.1. (Cobb-Douglas) Neka su količina kapitala $K(t)$ i broj sati rada (kao iskoristivi resurs) $R(t)$ dva faktora koja utječu na proizvodnju $Q(t)$, sve u trenutku t. Funkcija proizvodnje je Cobb-Douglasova zadana s $Q(t) = AK^{1-\alpha}(t)R^{\alpha}(t)$, gdje je $0 < \alpha < 1$, mjera promjene produktivnosti Q pri promjeni količine kapitala. Parametar A odražava tehnološku razinu proizvodnje. Konačni produkt proizvodnje može se trošiti, što pridonosi korisnosti $U(C) = \ln C$, gdje je $C(t)$ potrošnja u trenutku t, ili dalje investirati. Ukupan raspoloživi broj sati rada na početku promatranog intervala je X_0. Cilj je maksimizirati korisnost kroz unaprijed fiksirani period T:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T \ln C(t)dt \\ \text{uz uvjete:} \quad & X' = -R, \quad X(0) = X_0, \quad X(T) = 0 \\ & K' = AK^{1-\alpha}R^{\alpha} - C, \quad K(0) = K_0, \quad K(T) = 0, \\ & C \geq 0, \quad R \geq 0. \end{aligned}$$

Preostali broj sati rada (rezerve rada) u trenutku t je $X(t)$. Na kraju promatranog intervala, količina kapitala i preostali broj sati rada su jednaki 0 što vidimo iz gornjih uvjeta u krajnjoj točki. Na početku raspolažemo s količinom kapitala od K_0, a iz druge diferencijalne jednadžbe iščitavamo da je promjena kapitala jednaka razlici proizvodnje i potrošnje, što odgovara investicijama. U ovom problemu imamo dvije varijable stanje K i X te dvije upravljačke funkcije C i R. Radi jednostavnijeg zapisa, definiramo omjer rada i kapitala:

$$y(t) := \frac{R(t)}{K(t)}.$$

Zamjenom $R(t) = K(t)y(t)$ problem postaje:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T \ln C dt \\ \text{uz uvjete:} \quad & X' = -Ky, \quad X(0) = X_0, \quad X(T) = 0, && (2.15) \\ & K' = AKy^{a} - C, \quad K(0) = K_0, \quad K(T) = 0, && (2.16) \\ & C \geq 0, \quad y \geq 0. && (2.17) \end{aligned}$$

Jer korisnost od C postaje proizvoljno mala kako C teži k nuli, očito je nužno, zbog samog oblika funkcije cilja, da je u optimalnoj točki zadovoljeno $C > 0$ (mogli bismo reći i da funkcija cilja ima barijeru za $C = 0$). Također, uz zamjenu $R(t) = K(t)y(t)$ Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje postaje:

$$Q(t) = AK(t)y^{\alpha}(t),$$

iz čega vidimo da granična produktivnost postaje beskonačno velika kada potrošnja C teži k nuli zbog sve većih količina kapitala K (zaliha) što znači da optimalno rješenje mora zadovoljavati $y > 0$. Dakle, time smo se uvjerili da će pretpostavke o nenegativnosti upravljačkih funkcija (2.17) biti doista zadovoljene.

Neka su λ_1 i λ_2 funkcije multiplikatora pridružene varijablama stanja X i K, redom. Interpretacija tih funkcija, u ekonomskom smislu, bi bila granične vrijednosti rezervi rada i kapitala. Računamo Hamiltonian:

$$H = \ln C - \lambda_1 K y + \lambda_2 \left(A K y^{\alpha} - C \right).$$

Optimalno rješenje $C, y, X, K, \lambda_1, \lambda_2$ mora zadovoljavati (2.15)-(2.17) te ostale nužne uvjete:

$$H_C = \frac{1}{C} - \lambda_2 = 0, \tag{2.18}$$

$$H_y = -\lambda_1 K + \alpha \lambda_2 A K y^{\alpha-1} = 0, \tag{2.19}$$

$$\lambda_1' = -H_X = 0, \tag{2.20}$$

$$\lambda_2' = -H_K = \lambda_1 y - \lambda_2 A y^{\alpha}, \tag{2.21}$$

gdje H_C, H_y, H_X, H_K označavaju parcijalne derivacije Hamiltoniana po varijablama C, y, X, K, redom. Iz (2.19), kadgod je $K > 0$, dijeljenjem s K slijedi:

$$\lambda_1 = \alpha \lambda_2 A y^{\alpha-1}. \tag{2.22}$$

Iz (2.20) zaključujemo da je λ_1 konstanta, pa deriviranjem (2.22) po t dobivamo:

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = (1-\alpha)\frac{y'}{y}. \tag{2.23}$$

Supstitucijom λ_1 iz (2.22) u (2.21) dobivamo:

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = -(1-\alpha) A y^{\alpha}. \tag{2.24}$$

Kombiniranjem (2.23) i (2.24) slijedi:

$$y' y^{-(\alpha+1)} = -A,$$

pa integriranjem metodom separacije varijabli:

$$A y^{\alpha} = \frac{1}{k_1 + \alpha t}, \tag{2.25}$$

gdje je $k_1 \in \mathbb{R}$ konstanta. Jer $y = \frac{R}{K}$ iz (2.25) zaključujemo da optimalan omjer broj radnih sati i kapitala opada s vremenom. Također, možemo primijetiti:

$$\frac{K}{Q} = \frac{K}{A K y^{\alpha}} = \frac{1}{A y^{\alpha}} = k_1 + \alpha t,$$

da optimalan omjer kapitala i proizvodnje raste linearno s vremenom po stopi α. Sada dalje vraćanjem (2.25) u (2.24) slijedi:

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = -\frac{1-\alpha}{k_1 + \alpha t}$$

i konačno integriranjem:

$$\lambda_2(t) = \frac{(k_1 + \alpha t)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{k_2},$$

gdje je $k_2 \in \mathbb{R}$ konstanta. Vraćanjem izračunate λ_2 u (2.18) slijedi optimalna funkcija potrošnje C:

$$C(t) = k_2(k_1 + \alpha t)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \tag{2.26}$$

Iz diferencijalne jednadžbe i rubnih uvjeta (2.16) vidimo da se optimalna potrošnja povećava s vremenom, a analizirajući eksponent u (2.26), to povećanje je po rastućoj stopi ako je $\alpha < \frac{1}{2}$, po konstantnoj stopi ako je $\alpha = \frac{1}{2}$ i po padajućoj stopi u slučaju $\alpha > \frac{1}{2}$. Dalje, ubacivanjem C iz (2.26) te (2.25) u (2.16) dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda po K:

$$K' = \frac{K}{k_1 + \alpha t} - k_2(k_1 + \alpha t)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad K(0) = K_0, \quad K(T) = 0. \tag{2.27}$$

Konačno, rješavanjem (2.27), vraćanjem u (2.15) i integriranjem dobivamo optimalan X. Dvije konstante dobivene rješavanjem zadnje diferencijalne jednadžbe po X, kao i konstante k_1 i k_2 dobivamo korištenjem rubnih uvjeta iz (2.15) i (2.16).

Spomenimo na kraju da kod optimalnog upravljanja više varijabli, postoji mnoštvo problema u kojima neke komponente vektora varijable stanja mogu biti npr. fiksirane u krajnjoj točki, neke slobodne, za neke može vrijediti nenegativnosti, dok za ostale određeni uvjeti nejednakosti (vidi [2, poglavlje II.7]).

2.3 Ograničenja na upravljačku funkciju

Kao što smo vidjeli u primjerima 1.1.2 i 1.1.3 upravljačka funkcija može biti ograničena jer, na primjer, zahtijevamo nenegativnost investicija. Tada promatramo probleme oblika:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \tag{2.28}$$

$$\text{uz uvjete:} \quad x' = g(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.29}$$

$$a \leq u \leq b. \tag{2.30}$$

Izostanak jedne granice ograničenja je zapravo poseban slučaj kada ili $a \to -\infty$ ili $b \to \infty$. Ukoliko vrijedi oboje istovremeno, tada nemamo ograničenja na upravljačku funkciju.

Označimo s J vrijednost integrala u (2.28) za neke dopustive funkcije x i u, a s J^* maksimalnu vrijednost. Kao i ranije, dodavanjem funkcije multiplikatora u (2.29) i parcijalnim integriranjem, računamo varijaciju δJ, ostavljajući samo linearni dio od $J - J^*$:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda g_x + \lambda') \delta x + (f_u + \lambda g_u) \delta u \right] dt - \lambda(t_1) \delta x(t_1).$$

Biramo λ tako da zadovoljava:

$$\lambda' = -(f_x + \lambda g_x), \quad \lambda(t_1) = 0. \tag{2.31}$$

Uz to, varijacija δJ postaje:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) \delta u \, dt.$$

Kako bi x, u, λ bili optimalna rješenja, mora vrijedi $J - J^* \leq 0$, tj.:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) \delta u \, dt \leq 0, \tag{2.32}$$

za sve dopustive varijacije δu. Prema (2.30), ako se upravljačka funkcija nalazi na lijevom rubu svoje dopustive domene, tj. $u(t) = a$ u nekom trenutku t, da bi održali dopustivost (upravljačke funkcije u) mora vrijediti da je $\delta u \geq 0$. U slučaju kada je $u = b$ mora vrijediti $\delta u \leq 0$, a za $a < u < b$ nemamo uvjeta na δu. Dakle, prema tome i prema (2.32), za $t \in [t_0, t_1]$ dolazimo do zaključaka:

$$u(t) = a \Rightarrow \delta u(t) \geq 0 \Rightarrow f_u(t) + \lambda(t) g_u(t) < 0, \tag{2.33}$$

$$a \leq u(t) \leq b \Rightarrow \delta u(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_u(t) + \lambda(t) g_u(t) = 0, \tag{2.34}$$

$$u(t) = b \Rightarrow \delta u(t) \leq 0 \Rightarrow f_u(t) + \lambda(t) g_u(t) > 0, \tag{2.35}$$

u nekom trenutku t. Dakle, ako x^*, u^* rješavaju (2.28)-(2.30), tada mora postojati funkcija λ tako da x^*, u^*, λ istovremeno zadovoljavaju (2.29), (2.30), (2.31) i (2.33)-(2.35).

U terminima Hamiltoniana:

$$H(t,x,u,\lambda) = f(t,x,u) + \lambda g(t,x,u),$$

mora vrijediti:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \qquad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Uvjeti (2.33)-(2.35) mogu se dobiti maksimizacijom H po u uz uvjet (2.30) što zapravo predstavlja problem nelinearnog programiranja (vidi [7]) po u:

$$\begin{aligned} max\ H &= f + \lambda g, \\ a \le u &\le b. \end{aligned}$$

Očito je taj problem ekvivalentan problemu:

$$\begin{aligned} max\ H &= f + \lambda g, \\ -u &\le -a, \\ u &\le b. \end{aligned}$$

Lagrangian za taj problem tada je:

$$L = f(t,x,u) + \lambda g(t,x,u) + w_1(b-u) + w_2(-a+u),$$

za neke (Lagrangeove) multiplikatore w_1, w_2. Tako dobivamo uvjete ekvivalentne uvjetima (2.33)-(2.35) koji su samo izraženi preko Lagrangiana:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f_u + \lambda g_u - w_1 + w_2 = 0, \tag{2.36}$$

$$w_1 \ge 0, \quad w_1(b-u) = 0, \tag{2.37}$$

$$w_2 \ge 0, \quad w_2(-a+u) = 0, \tag{2.38}$$

i uz uvjete $b - u \ge 0$ i $-a + u \ge 0$ koji moraju biti zadovoljeni prema zadatku. Na primjer, kada je $u^*(t) = a$, tada je nužno $b - u^* > 0$, pa iz (2.37) slijedi $w_1 = 0$. Tada (2.36) postaje $f_u + \lambda g_u + w_2 = 0$, a zbog nenegativnosti od w_2 mora vrijediti $f_u + \lambda g_u \le 0$, tj. (2.33). Ostala dva slučaja možemo komentirati analogno.

Sada možemo riješiti primjer 1.1.2 u potpunosti, uz ograničenje na upravljačku funkciju.

$$\min \int_0^T [c_1 u^2(t) + c_2 x(t)]dt$$

$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B, \quad u(t) \ge 0.$$

U prvom odjeljku ovog poglavlja smo došli do rješenja bez ograničenja za x:

$$x(t) = \frac{c_2 t(t-T)}{4c_1} + \frac{Bt}{T},$$

pa iz toga računamo da je:

$$x'(t) = \frac{c_2(2t-T)}{4c_1} + \frac{B}{T}.$$

Također, jer su $c_1, c_2 > 0$ vrijedi:

$$x''(t) = \frac{c_2}{2c_1} > 0,$$

iz čega zaključujemo da je x' rastuća funkcija po t. Jer je $x'(t) = u(t)$ i zbog ograničenja $u(t) \geq 0$ za sve t slijedi da mora vrijediti:

$$\frac{c_2(2t-T)}{4c_1} + \frac{B}{T} \geq 0.$$

Dakle, posebno, mora vrijediti u početnoj točki pa će zbog činjenice da je x' rastuća vrijediti i za sve $0 < t \leq T$:

$$x'(0) = \frac{-c_2 T}{4c_1} + \frac{B}{T},$$

što će biti zadovoljeno ako je $B \geq \frac{c_2 T^2}{4c_1}$. U slučaju kada je $B < \frac{c_2 T^2}{4c_1}$, rješenje nije dopustivo i tada moramo eksplicitno voditi računa o nenegativnosti upravljačke funkcije.

Rješavamo problem nelinearnog programiranja gdje moramo minimizirati Hamiltonian za svaki t po u:

$$\begin{aligned} &min\ H(t, x, u, \lambda) = c_1 u^2(t) + c_2 x(t) + \lambda(t) u(t), \\ &\quad u(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Ekvivalentan problem u terminima maksimizacije je:

$$\begin{aligned} &max\ -H(t, x, u, \lambda) = -c_1 u^2(t) - c_2 x(t) - \lambda(t) u(t), \\ &\quad - u(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Računamo Lagrangian, s multiplikatorom w:

$$L(x, u, \lambda, w) = -c_1 u^2(t) - c_2 x(t) - \lambda(t) u(t) + w(t) u(t).$$

Nužni uvjeti za optimalan u tada slijede iz (2.36)-(2.38):

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -2c_1 u(t) - \lambda(t) + w(t) = 0 \tag{2.39}$$

$$w(t) \geq 0, \qquad u(t) \geq 0, \qquad w(t) u(t) = 0. \tag{2.40}$$

Također, mora vrijediti:

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -c_2,$$

iz čega integriranjem slijedi:

$$\lambda(t) = k_0 - c_2 t, \tag{2.41}$$

za neku konstantu $k_0 \in \mathbb{R}$. Vraćanjem (2.41) u (2.39) slijedi:

$$u(t) = \frac{w(t) - \lambda(t)}{2c_1} = \frac{c_2 t - k_0 + w(t)}{2c_1}. \tag{2.42}$$

Kako bismo riješili problem, najprije naslućujemo strukturu rješenja. Jer je vremenski raspon T dug u odnosu na količinu B koju trebamo proizvesti, nagađamo kako postoji neki početni period, $0 \leq t \leq t^*$ (za neki t^* koji ćemo naknadno odrediti) u kojem nema proizvodnje, tj.:

$$\begin{aligned} u(t) &= 0, && 0 \leq t < t^*, \\ u(t) &> 0, && t^* \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Kada je $u(t) = 0$, iz (2.42) slijedi:

$$w(t) = k_0 - c_2 t \geq 0, \qquad 0 \leq t < t^*,$$

gdje nejednakost mora biti zadovoljena zbog uvjeta iz (2.40). Jer $c_2 > 0$, zaključujemo da je $w(t)$ padajuća (linearna) funkcija za $0 \leq t \leq t^*$, stoga je nenegativnost osigurana pod uvjetom da vrijedi:

$$k_0 - c_2 t^* \geq 0. \tag{2.44}$$

U slučaju kada je $u(t) > 0$ iz (2.40) slijedi $w(t) = 0$ za $t^* \leq t \leq T$, pa iz (2.42):

$$u(t) = \frac{c_2 t - k_0}{2c_1} \geq 0, \qquad t^* \leq t \leq T.$$

Jer $\frac{c_2}{2c_1} > 0$, $u(t)$ je rastuća (linearna) funkcija za $t^* \leq t \leq T$, pa posebno vrijedi i $c_2 t^* - k_0 \geq 0$. Ta zadnja nejednakost i nejednakost iz (2.44) zajedno daju:

$$k_0 = c_2 t^*.$$

Uz tu izračunatu konstantu, naše pretpostavke (2.43) tada postaju:

$$\begin{aligned} u(t) &= 0, && 0 \leq t < t^*, \\ u(t) &= \frac{c_2(t - t^*)}{2c_1}, && t^* \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Iz $x'(t) = u(t)$ integriranjem slijedi:

$$x(t) = 0, \qquad 0 \le t < t^*,$$
$$x(t) = \frac{c_2(t - t^*)^2}{4c_1}, \qquad t^* \le t \le T,$$

pri čemu smo konstante izračunali iz početnog uvjeta $x(0) = 0$ te iz činjenice da x mora biti neprekidna funkcija, što znači da $x(t^*) = 0$. Konačno, koristeći uvjet za krajnju točku $x(T) = B$ dobivamo:

$$t^* = T - 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}, \tag{2.45}$$

što je pozitivan broj s obzirom da smo u režimu $B < \frac{c_2T^2}{4c_1}$.

Ako interpretiramo dobiveno, vidimo da, za dovoljno veliki T, duljina vremenskog perioda proizvodnje $T - t^*$ ovisi o kvocijentu $\frac{Bc_1}{c_2}$; duljina perioda proizvodnje raste s količinom proizvoda B koju treba proizvesti i s koeficijentom troška proizvodnje po jedinici c_1, dok pada s koeficijentom troška zadržavanja zaliha po jedinici proizvoda c_2. Potpuno je i prirodno očekivati takvo što, tj. da će vrijeme početka proizvodnje ovisiti o roku u kojem moramo isporučiti te proizvode, o količini koju je potrebno proizvesti i na kraju i o samim troškovima proizvodnje i držanja zaliha. Kad bi proizvodnja počela odmah, tj. $t^* = 0$ vidimo da bi se nalazili u slučaju bez ograničenja koji smo komentirali na početku primjera jer:

$$T = 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}.$$

Na kraju, prikažimo optimalno rješenje u pridruženoj tablici:

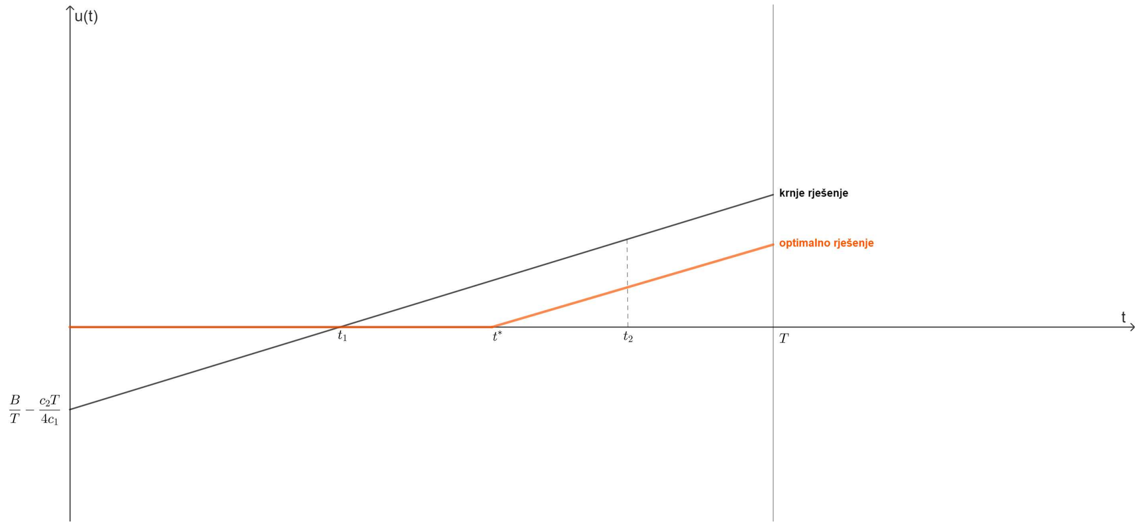
	$0 \le t < t^*$	$t^* \le t \le T$
$u^*(t)$	0	$c_2(t - t^*)/2c_1$
$x^*(t)$	0	$c_2(t - t^*)^2/4c_1$
$\lambda(t)$	$c_2(t^* - t)$	$c_2(t^* - t)$
$w(t)$	$c_2(t^* - t)$	0

Tablica 2.1: Optimalno rješenje primjera (1.1.2)

Napomena 2.3.1. *Uočimo kako do rješenja nismo mogli doći rješavajući najprije problem bez ograničenja pa zatim brisanjem nedopustivog dijela. Dakle, rješavanjem problema bez ograničenja* $u(t) \ge 0$*:*

$$u(t) = \frac{c_2(2t - T)}{4c_1} + \frac{B}{T}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.46}$$

samo za $B \geq \frac{c_2 T^2}{4c_1}$ *i postavljanjem* $u(t) = 0$ *za sve* t *gdje je* $u(t) < 0$ *ne daje optimalno rješenje. Prikažimo to i grafički:*



Slika 2.1: Usporedba rješenja

gdje su $t_1 = \frac{T}{2} - \frac{2c_1 B}{c_2 T}$ *i* $t_2 = 2t_1 = T - \frac{4c_1 B}{c_2 t}$, *a* t^* *dan s (2.45) . Na slici 2.1 vidimo da za krnje rješenje (bez ograničenja) (2.46) vrijedi* $u(t) < 0$ *za sve* $0 \leq t < t_1$ *i* $u(t_1) = 0$. *Jer je stopa proizvodnje negativna, također je i količina zaliha negativna za sve* $0 \leq t < t_1$. *Proizvodnja od trenutka* t_1 *do trenutka* t_2 *nastoji vratiti količinu zaliha na nulu. Zatim, od trenutka* t_2 *do* T *proizvodnja upotpunjuje traženu količinu zaliha do razine* B *na kraju perioda, ali uz veći trošak nego optimalni plan. Ukoliko bi proizvodnja započela u trenutku* t_2 *i pratila "krnje" rješenje, potrebna količina* B *bi i dalje bila isporučena do kraja perioda, ali uz nepotrebno visok trošak. Dakle, optimalno rješenje koje minimizira ukupni trošak je s početkom proizvodnje u trenutku* t^*.

Poglavlje 3

Pontrjaginov princip maksimuma

Iskaz Pontrjaginovog principa maksimuma nešto je drugačiji u odnosu na pristup koji smo do sada koristili s ciljem pronalaska optimalnog rješenja problema optimalnog upravljanja. Naša dosadašnja saznanja i zaključci su točni, ali, ipak, pod malo strožim uvjetima od onih koje smo naveli. Iskažimo problem koji promatramo.

Cilj je pronaći vektor upravljačke funkcije $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_m(t)]$ tako da su $u_1, \ldots, u_m$ po dijelovima neprekidne funkcije i pridruženi vektor varijable stanja $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ gdje su $x_1, \ldots, x_n$ neprekidne i po dijelovima diferencijabilne funkcije, sve definirane na fiksiranom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$, takve da:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt,$$

i zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe:

$$x_i'(t) = g_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

početne uvjete:

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad i = 1, \ldots n \qquad (x_{i0} \text{ fiksirano}),$$

uvjete u krajnjoj točki:

$$\begin{aligned} &x_i(t_1) = x_{i1}, \quad i = 1, \ldots, p \\ &x_i(t_1) \geq x_{it}, \quad i = p+1, \ldots, q \quad (x_{i1}, \quad i = 1, \ldots, q, \quad \text{fiksirano}), \\ &x_i(t_1) \ \text{slobodno}, \quad i = q+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

te uvjet na upravljačku funkciju:

$$\mathbf{u}(t) \in U, \qquad U \text{ dani skup u } \mathbb{R}^m. \tag{3.1}$$

Također, pretpostavljamo da su $f, g_i, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ i $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ neprekidne funkcije po svim argumentima za sve $i, j = 1, \ldots, n$.

Teorem 3.0.1. ***(Pontrjaginov princip maksimuma)*** *Kako bi $\boldsymbol{x}^*(t)$, $\boldsymbol{u}^*(t)$ bili optimalni za problem iznad, nužno je da postoji konstanta λ_0 i neprekidne funkcije $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ takve da za sve $t_0 \leq t \leq t_1$ vrijedi $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t)) \neq (0,0)$ i tako da za svaki $t_0 \leq t \leq t_1$:*

$$H(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}(t)) \leq H(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)), \tag{3.2}$$

gdje je funkcija Hamiltoniana H definirana s:

$$H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Osim u točkama prekida od $\boldsymbol{u}^*(t)$, mora vrijediti:

$$\lambda_i'(t) = -\frac{\partial H(t, \boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t))}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Nadalje:

$$\lambda_0 = 1 \qquad \textit{ili} \qquad \lambda_0 = 0$$

te, konačno, moraju vrijediti uvjeti transverzalnosti za krajnju točku:

$$\begin{array}{ll} \lambda_i(t_1) \ \textit{bez uvjeta,} & i = 1, \ldots, p \\ \lambda_i(t_1) \geq 0 & \left(= 0 \ \textit{ako je: } x_i^*(t_1) > x_{i1}\right) \\ \lambda_i(t_1) = 0, & i = q+1, \ldots, n. \end{array}$$

U ovom iskazu možemo uočiti dvije glavne razlike u odnosu na naše dosadašnje analize. Prva se tiče tehničke dosljednosti, a druga stila. Prvo ćemo se posvetiti tehničkom detalju vezanom uz konstantu λ_0 (pridruženu funkciji f) koju dosad nismo spominjali. Vidimo da ta konstanta može poprimiti samo vrijednosti 0 ili 1, a mi smo uvijek do sada pretpostavili da vrijedi $\lambda_0 = 1$, pod implicitnom pretpostavkom da će problem imati rješenje do kojeg ćemo doći uzimajući u obzir podintegralnu funkciju f (vidi funkciju Hamiltoniana H). Taj uvjet se često naziva uvjetom regularnosti problema. No, postoje problemi u kojima optimalno rješenje zahtjeva $\lambda_0 = 0$. Navedimo primjer jednog takvog.

Primjer 3.0.1.

$$\max \int_0^T u(t)dt$$

$$\text{uz uvjete:} \quad x'(t) = u^2(t), \quad x(0) = x(T) = 0.$$

Uočimo da iz $x'(t) = u^2(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$ slijedi da je x rastuća funkcija za sve t koja poprima istu vrijednost 0 u početnoj i krajnjoj točki, pa je zbog tog jedina dopustiva funkcija konstantna $x(t) = 0$ za sve t. Samim time, $u(t) = 0, 0 \leq t \leq T$, je jedina dopustiva upravljačka funkcija. Računajući bez konstante λ_0:

$$H(t, x, u, \lambda) = u + \lambda u^2,$$

imamo:

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x, u, \lambda) = 1 + 2\lambda u = 0,$$

što $u = 0$ očito ne zadovoljava. Uz multiplikator λ_0 točna verzija tada je:

$$H(t, x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 u + \lambda u^2,$$

i zatim:

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 + 2\lambda u = 0.$$

Izborom $\lambda_0 = 0$ i $u = 0$ očito je zadovoljena zadnja jednakost te daje optimalno (i jedino dopustivo) rješenje u ovom slučaju. Na taj način smo, zapravo, proveli maksimizaciju neovisno o funkciji f.

Kao drugo, uočimo tu stilističku razliku gdje je područje upravljanja zadano implicitino u (3.1), pri čemu zahtjevamo da vektor upravljačke funkcije $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_m(t)]$ leži u nekom skupu U. Skup U može biti cijeli m-dimenzionalan Euklidski prostor ili neki njegov podskup. Zbog toga, izbor upravljačke funkcije koja maksimizira Hamiltonian za svaki t može biti iskazan jedino implicitno, kao u (3.2). Kasnije, ukoliko preciznije navedemo skup U i uz neke dodatne informacije o funkcijama f i g_i, $i = 1, \ldots, n$ možemo primjenjujući, na primjer, Kuhn–Tuckerov teorem, odrediti optimalno rješenje $\mathbf{u}^*$ koje daje i maksimum u (3.2).

Na samom kraju spomenimo da se u ovom radu nismo bavili pitanjem egzistencije rješenja problema optimalnog upravljanja. Postoje uvjeti pod kojima rješenje sigurno postoji. Na primjer, ako su funkcije f i g neprekidne i ograničene koje imaju ograničene derivacije i ako je f strogo konkavna po upravljačkim varijablama, a g linearna po istima, tada se može pokazati da rješenje postoji (vidi [3, poglavlje 2.8]).

Bibliografija

[1] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača: *Integrali funkcija više varijabli*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2019. dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/int/pred/predavanjaint_2019.pdf (pristupljeno 4. veljače 2024.).

[2] M. I. Kamien, N. L. Schwartz: *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, drugo izdanje, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.

[3] A. Seierstad, K. Sydsaeter: *Optimal control theory with economic applications*, North-Holland, 1987.

[4] K. Šorić: *Dinamički sustavi u ekonomiji*, Matematički odsjek PMF-a, Zagreb, nastavni materijali, 2023.

[5] J. L. Troutman: *Variational calculus and optimal control*, Springer-Verlag, 1996.

[6] Z. Tutek, M. Vrdoljak: *Obične diferencijalne jednadžbe*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2019.

[7] M. Vrdoljak: *Uvod u optimizaciju*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2023.

Sažetak

Ideja ovog rada je upoznati se s teorijom optimalnog upravljanja, matematičkom pozadinom iste i zatim primijeniti pokazane tvrdnje na primjerima iz ekonomije. Izveli smo nužne uvjete za rješenje te pokazali kada će oni biti i dovoljni pomoću Mangasarianovog teorema. Važan alat koji koristimo u svim primjerima je Hamiltonian. Među ostalim, na početku rada uvodimo i dva primjera iz ekonomije koji se protežu cijelim radom: jedan u kojem tražimo optimalan raspored proizvodnje (u smislu minimalnog troška), a drugi vezan uz investiranje s ciljem maksimizacije profita. Za oba prethodno navedena primjera, kao i mnoge druge, s izgradnjom teorije su nađena optimalna rješenja. Za složenije probleme navodimo primjere u kojima imamo dodatne početne uvjete ili neka ograničenja na upravljačku funkciju te probleme više varijabli (Cobb-Douglas). Rad zaključujemo s opće poznatim Pontrjaginovim principom maksimuma.

Summary

The idea of this thesis is to get acquainted with the theory of optimal control, mathematical background of the same, and then apply the demonstrated statements to examples from economics. We developed the necessary conditions for a solution and showed when they will be both necessary and sufficient with the help of the Mangasarian theorem. An important tool that we used in all examples is the Hamiltonian. At the beginning of the thesis, among others, we introduced two examples from economics that are extended throughout the thesis: one in which we are looking for an optimal production schedule (in terms of minimum cost), and the other related to investing with the aim of maximizing profit. For both of the above examples, like many others, optimal solutions were found when the whole theory was built. For more complex problems, we mentioned examples in which we have additional initial conditions or some other restrictions on control function, and multi-variable problems like Cobb-Douglas. We concluded the thesis with the well-known Pontryagin maximum principle.

Životopis

Rođen sam 30.12.1996. u Zagrebu. Nakon završetka osnovne škole, upisujem III. gimnaziju i to prirodoslovno - matematički smjer. Kroz srednjoškolsko obrazovanje javlja mi se veliki interes za matematiku te zbog istog 2015. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike na PMF-u u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika. Tijekom studiranja intenzivno održavam instrukcije iz matematike, a početkom 2024. sam se zaposlio u Samsungu u Zagrebu.