

Youngova rešetka

Kustura, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:972994>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-16**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Filip Kustura

Youngova rešetka

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, veljača 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik

2. _____ , član

3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____

2. _____

3. _____

Sadržaj

Uvod	1
1 Particije prirodnih brojeva i rešetka $L(m, n)$	3
1.1 Osnovne definicije i svojstva	3
1.2 Izomorfizam između $L(m, n)$ i B_R/G_{mn}	9
2 q-binomni koeficijenti	12
2.1 Osnovne definicije i svojstva	12
2.2 Interpretacije q -binomnih koeficijenata	19
3 Youngove tablice	25
3.1 Osnovne definicije i svojstva	25
3.2 Algoritam RSK	33
Literatura	37
Sažetak	39
Summary	40
Životopis	41

Uvod

Algebarska kombinatorika je područje u kojem se primjenjuju algebarske tehnike na kombinatorne probleme. Ona u različitim kombinatornim kontekstima, između ostalog, koristi metode teorije grupa i teorije reprezentacije te često uključuje tematiku vezanu uz parcijalno uređene skupove. U ovom diplomskom radu fokus će biti na Youngovoj rešetki, odnosno particijama prirodnih brojeva uz parcijalni uređaj inkluzije pripadnih Youngovih dijagrama. Obradit će se neka njena kombinatorna svojstva te svojstva njoj bliskih pojmova kao što su Youngove tablice i q -binomni koeficijenti.

Prvo poglavlje posvećeno je osnovnim definicijama i svojstvima vezanim uz pojam Youngove rešetke. U njemu definiramo particije prirodnih brojeva i njihove dijelove te definiramo odgovarajući parcijalni uređaj. Definiramo pojam rešetke i pokazujemo da skup particija prirodnih brojeva zajedno s pripadnim uređajem čini rešetku koju nazivamo Youngovom rešetkom. Od važne uloge su i specifični podskupovi skupa svih particija. Preciznije, osvrćemo se na takve podskupove čije particije imaju zadanu gornju ogradu m na broj dijelova kao i zadanu gornju ogradu n na vrijednost njenih dijelova. Takve podskupove označavamo s $L(m, n)$ i oni su u poglavlju popraćeni primjerima s Hasseovim dijagramima. Uvodimo Youngove dijagrame koji vizualno predstavljaju particije te navodimo pojmove vezane uz parcijalno uređene skupove, a jedan od njih je pojam ranga elementa parcijalno uređenog skupa. Jedna od uobičajenih struktura koje su od interesa u algebarskoj kombinatorici su parcijalno uređeni skupovi na kojima je definirano djelovanje grupe, pojam koji uvodimo u nastavku poglavlja. Kao nastavak na pojam djelovanja grupe, uvodimo i pojam orbite te dajemo primjere kao ilustraciju tih pojmova. Definiramo pojam izomorfizma parcijalno uređenih skupova te dajemo izomorfizam između $L(m, n)$ i jednog skupa orbita. Na kraju navodimo posljednicu tog izomorfizma na svojstva skupa $L(m, n)$.

U drugom poglavlju promatramo broj elemenata skupa $L(m, n)$ koji su zadanog ranga. U tu svrhu definiramo pojam q -binomnih koeficijenata te prikazujemo njihova brojna svojstva i rekurzivne relacije koje zadovoljavaju. Dokazujemo da se zapravo radi o polinomima, a potom određujemo njihov stupanj. Navodimo da su njihovi koeficijenti simetrični i unimodalni te dajemo poopćenje binomnog teorema, a to je q -binomni teorem. U nastavku poglavlja dajemo brojne interpretacije q -binomnih koeficijenata. Jedna od interpretacija daje upravo broj elemenata skupa $L(m, n)$ koji su zadanog ranga. Između ostalog, opisujemo i one interpretacije koje se tiču vektorskih potprostora nad konačnim poljem. U svrhu jedne interpretacije definiramo i pojam reduciranog kanonskog oblika matrice te navodimo svojstva i primjere.

Treće poglavlje zasnovano je na pojmu Youngovih tablica. One kao glavni

alat igraju ulogu u teoriji reprezentacije simetrične grupe. Nakon uvodnih pojmova vezanih za šetnju iz teorije grafova, definiramo pojam Hasseove šetnje te njene korake i tip. Budući da je Hasseova šetnja zapravo šetnja u Hasseovom dijagramu parcijalno uređenog skupa, na taj način je povezana s pojmom Youngove rešetke, odnosno Youngovim dijagramom particije. Uvodimo pojam standardne Youngove tablice koju zadaje particija. Navodimo pojam kuke kao i poznatu formulu za broj standardnih Youngovih tablica zadanog oblika. Dolazimo i do formule za broj Hasseovih šetnji u Youngovoj rešetki koje su zadanog tipa, počinju u praznoj particiji \emptyset i završavaju u zadanoj particiji. Ona je dana kroz teorem koji kao važnu posljedicu ima činjenicu da je skup svih permutacija konačnog skupa ekvipotentan sa specifičnim podskupom skupa Hasseovih šetnji u Youngovoj rešetki. U drugom dijelu poglavlja opisan je algoritam RSK čiji se koraci vrše nad parcijalnim Youngovim tablicama. Algoritam RSK je važan jer daje bijekciju između skupa svih permutacija konačnog skupa i skupa svih uređenih parova standardnih Youngovih tablica koje su istog oblika.

1 Particije prirodnih brojeva i rešetka $L(m, n)$

1.1 Osnovne definicije i svojstva

Definicija 1.1. Particija prirodnog broja $n \geq 0$ je niz $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ prirodnih brojeva $\mu_i \geq 0$ takav da je $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ i $\sum_{i \geq 1} \mu_i = n$. Ukoliko je μ particija broja n , onda to označavamo s $\mu \vdash n$ ili s $|\mu| = n$. Broj n nazivamo površinom, a brojeve $\mu_i > 0$ dijelovima particije μ .

Iz definicije slijedi da su svi osim konačno mnogo članova niza μ_i koji čine particiju μ jednaki 0. Dakle, particija ima konačno mnogo dijelova.

Napomena 1.2. Ponekad izostavljamo nule iz zapisa particije, npr. $(8, 4, 1, 1)$, $(8, 4, 1, 1, 0, 0)$ i $(8, 4, 1, 1, 0, 0, \dots)$ predstavljaju istu particiju broja 14 s četiri dijela. Nadalje, 8411 koristimo kao pokratu za particiju $(8, 4, 1, 1)$. Jedinstvenu particiju $(0, 0, \dots)$ bez dijelova označavamo s \emptyset .

Primjer 1.3. Postoji pet particija broja 4, a to su: 4, 31, 22, 211 i 1111.

Definirajmo sada uređaj na skupu svih particija prirodnih brojeva.

Definicija 1.4. Za dane particije $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ i $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, definiramo $\mu \leq \lambda$ ako za sve i vrijedi $\mu_i \leq \lambda_i$.

Prisjetimo se, parcijalno uređen skup (X, \leq) je uređen par nepraznog skupa X i binarne relacije \leq na X koja je refleksivna ($x \leq x, \forall x \in X$), tranzitivna ($x \leq z$ i $z \leq y \Rightarrow x \leq y$) i antisimetrična ($x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x = y$). Često samo skup X nazivamo parcijalno uređenim skupom ako se pripadna relacija podrazumijeva. Označimo s Y skup svih particija prirodnih brojeva. Uređaj iz definicije 1.4 zajedno sa skupom svih particija Y čini parcijalno uređen skup (Y, \leq) . Taj parcijalno uređen skup ima i neka dodatna svojstva koja ćemo razmotriti.

Definicija 1.5. Neka je $A \subseteq X$ podskup parcijalno uređenog skupa. Za element $g \in X$ kažemo da je gornja međa od A ako vrijedi $a \leq g, \forall a \in A$. Element $s \in X$ je supremum od A ako je gornja međa od A i za svaku gornju među g od A vrijedi $s \leq g$. Ukoliko postoji, supremum je jedinstven i označavamo ga $\sup A$. Analogno definiramo donju među i infimum skupa A . Parcijalno uređen skup nazivamo rešetkom ako za sve $x, y \in X$ postoje supremum $x \vee y = \sup\{x, y\}$ i infimum $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Promotrimo neke primjere rešetki.

Primjer 1.6. *Parcijalno uređen skup $(\mathbb{N}, |)$ prirodnih brojeva s relacijom djeljivosti je rešetka. Naime, lako se provjeri da je supremum dvaju elemenata iz \mathbb{N} njihov najmanji zajednički višekratnik, a infimum njihov najveći zajednički djelitelj. Najmanji element rešetke $(\mathbb{N}, |)$ je broj 1, ali ona nema najveći element.*

Primjer 1.7. *Za dani skup S , njegov partitivni skup, u oznaci 2^S , i relacija \subseteq čine rešetku. Operacije $x \vee y = \sup\{x, y\}$ i $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ u tom slučaju su unija, odnosno presjek. Najveći element rešetke $(2^S, \subseteq)$ je skup S , a najmanji element prazan skup \emptyset .*

Propozicija 1.8. *Parcijalno uređen skup (Y, \leq) je rešetka.*

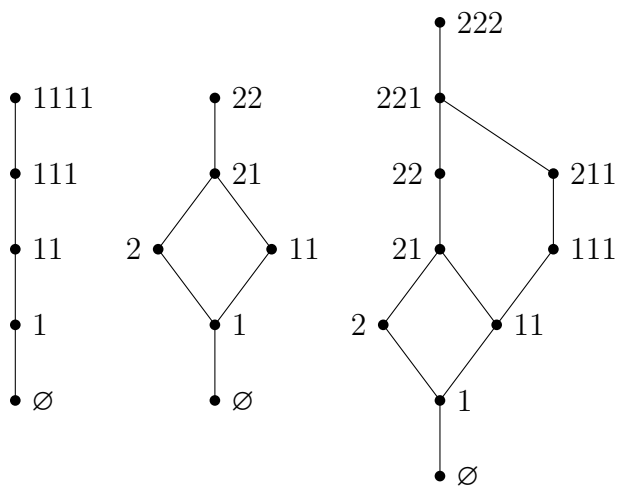
Dokaz. Neka su $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots), \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in Y$ proizvoljne particije. Definiramo particije $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ i $\iota = (\iota_1, \iota_2, \dots)$ sa $\sigma_i = \max\{\mu_i, \lambda_i\}$, odnosno $\iota_i = \min\{\mu_i, \lambda_i\}$, za sve $i \geq 1$. Očito za tako definirane particije vrijedi $\sup\{\mu, \lambda\} = \sigma$ i $\inf\{\mu, \lambda\} = \iota$. \square

Definicija 1.9. *Rešetku (Y, \leq) nazivamo Youngovom rešetkom.*

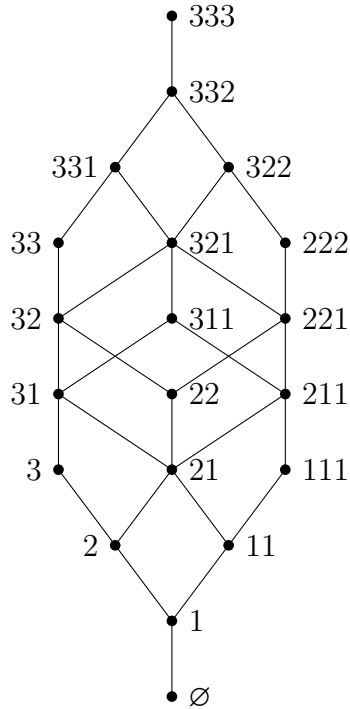
Jasno je da Youngova rešetka nema najveći element, dok je njezin najmanji element particija \emptyset .

Za dane prirodne brojeve $m, n > 0$, označimo s $L(m, n)$ skup svih particija s najviše m dijelova za čiji maksimalni dio μ_1 vrijedi $\mu_1 \leq n$. Na primjer, $L(3, 2) = \{\emptyset, 1, 2, 11, 21, 22, 111, 211, 221, 222\}$. Spomenimo pojam koji ćemo

Slika 1: Parcijalno uređeni skupovi $L(4, 1), L(2, 2)$ i $L(3, 2)$.



Slika 2: Parcijalno uređen skup $L(3, 3)$.

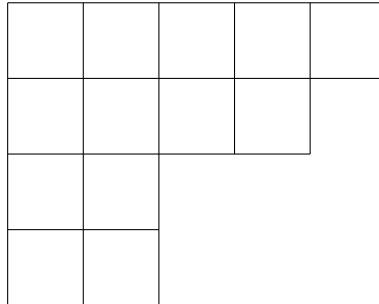


koristiti za prikazivanje parcijalno uređenih skupova. Neka je (P, \leq) konačan parcijalno uređen skup. Za $x, y \in P$, kažemo da y *natkriva* x ako vrijedi $x < y$ (tj. $x \leq y$ i $x \neq y$) te ne postoji $z \in P$ za koji vrijedi $x < z < y$. Činjenicu da y natkriva x označavamo s $x < y$ ili s $y \triangleright x$. Parcijalno uređen skup (P, \leq) često prikazujemo tzv. Hasseovim dijagramom. Taj prikaz ostvaruje se usmjerenim grafom sa skupom vrhova P i usmjerenim bridovima (x, y) uvijek kada vrijedi da y natkriva x . Hasseov dijagram obično prikazujemo na način da “manje” vrhove postavljamo ispod “većih”, odnosno bridovi su usmjereni odozdo prema gore. Na slici 1 nalaze se Hasseovi dijagrami koji prikazuju parcijalno uređene skupove $L(4, 1)$, $L(2, 2)$ i $L(3, 2)$, dok je na slici 2 prikazan parcijalno uređen skup $L(3, 3)$. Naravno, iz svojstava relacije $<$, odnosno \leq , slijedi da Hasseov dijagram jedinstvo određuje parcijalno uređen skup.

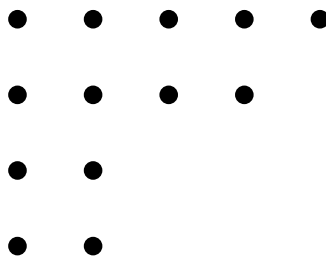
Particije prirodnih brojeva moguće je prikazati i pomoću takozvanih *Youngovih* ili *Ferrersovih dijagrama*. *Youngov dijagram* particije μ je ulijevo poravnat niz kvadratića s μ_i kvadratića u i -tom retku. Na primjer, Youngov dijagram particije $(5, 4, 2, 2)$ prikazan je na slici 3.

Ukoliko umjesto kvadratića koristimo točke, onda pripadni dijagram na-

Slika 3: Youngov dijagram particije $(5, 4, 2, 2)$.



Slika 4: Ferrersov dijagram particije $(5, 4, 2, 2)$.



zivamo *Ferrersovim dijagramom*. Ferrersov dijagram particije $(5, 4, 2, 2)$ prikazan je na slici 4.

Očigledno je da površina particije odgovara broju kvadratića (točaka) pripadnog Youngovog (Ferrersovog) dijagrama, a broj dijelova particije odgovara visini dijagrama. Veličina najvećeg dijela particije jednaka je širini dijagrama.

Uočimo da je $L(m, n)$ ujedno i skup svih Youngovih dijagrama D koje je moguće smjestiti u pravokutnik dimenzija $m \times n$ (pritom se gornji lijevi vrh dijagrama D i gornji lijevi vrh pravokutnika poklapaju). Uvijek ćemo pretpostavljati da ako je Youngov dijagram D sadržan u pravokutniku, onda im se gornji lijevi vrhovi poklapaju. Također, istaknimo i sljedeću očiglednu činjenicu koju ćemo iskoristiti kasnije.

Propozicija 1.10. *Neka su $\mu, \lambda \in Y$ proizvoljne particije te označimo redom s D_μ, D_λ njihove Youngove dijagrame. Tada vrijedi $\mu \leq \lambda$ ako i samo ako je dijagram D_μ sadržan u dijagramu D_λ .*

Radi lakše vizualizacije, o infimumu $\inf\{\mu, \lambda\}$ dviju particija $\mu, \lambda \in Y$ možemo razmišljati kao o particiji čiji je pripadni Youngov dijagram jednak “presjeku” Youngovih dijagrama particija μ i λ . U tom kontekstu, Youngov dijagram particije $\sup\{\mu, \lambda\}$ je “unija” Youngovih dijagrama particija μ i λ .

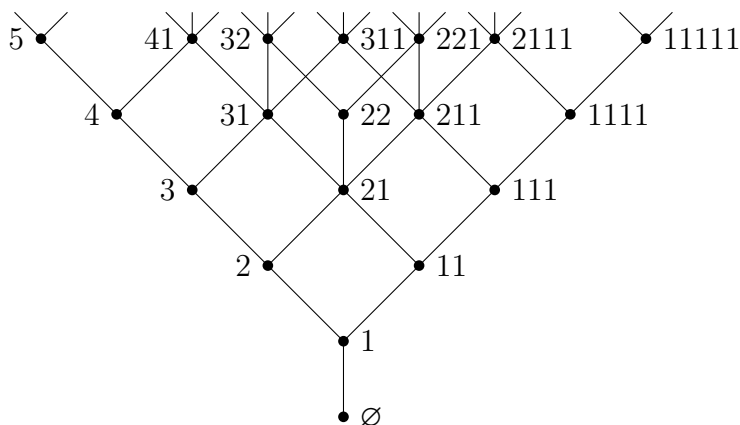
Neka je μ proizvoljna particija. Uklanjanjem jednog od kvadratića Youngovog dijagrama particije μ koji se nalaze na kraju svog retka i na kraju svog stupca, dobivamo upravo Youngov dijagram particije λ za koju vrijedi da μ natkriva λ . Moguće je ukloniti onoliko kvadratića Youngovog dijagrama particije koliko ona ima različitih dijelova, odnosno koliko pripadni Youngov dijagram ima redaka različite duljine. Naime, u slučaju dijelova koji se ne ponavljaju, odnosno redaka za koje vrijedi da niti jedan drugi redak nije iste duljine, moguće je ukloniti točno jedan kvadratić iz tog retka – krajnji desni kvadratić. U slučaju dijelova koji se ponavljaju, odnosno redaka za koje postoji jedan ili više drugih redaka iste duljine, moguće je ukloniti kvadratić samo iz jednog retka te duljine, i to najnižeg takvog retka. Na primjer, Youngovom dijagramu na slici 3 kvadratić možemo ukloniti na tri načina – uklanjanjem krajnjeg desnog kvadratića u prvom, drugom ili četvrtom retku. U trećem retku to nije moguće učiniti jer u tom slučaju ne nastaje particija. Za svaki takav kvadratić koji je moguće ukloniti, a da se pritom i dalje dobije particija prirodnog broja, moguće je dodati točno jedan kvadratić, a da pritom također dobijemo particiju prirodnog broja. To je jasno u slučaju dijelova koji se ne ponavljaju gdje kvadratić dodajemo upravo na kraj retka, dok u slučaju dijelova koji se ponavljaju kvadratić sada možemo dodati samo u najvišem retku koji pripada dijelu koji se ponavlja. Osim tih kvadratića, moguće je dodati i još jedan kvadratić “na dno” dijagrama tako da nastane novi redak duljine jedan, odnosno da nastane novi dio particije. Za particije dobivene dodavanjem kvadratića na jedan od upravo opisanih načina očito vrijedi da natkrivaju početnu particiju μ .

Razmatranje iz prethodnog odlomka može poslužiti kao dokaz svojstva Youngove rešetke koje govori o grananju pripadnog Hasseovog dijagrama, a navedeno je u idućoj propoziciji. Svojstvo je ilustrirano slikom 5.

Propozicija 1.11. *Broj particija koje particija $\mu \in Y$ natkriva jednak je broju njenih različitih dijelova. Nadalje, ako particija μ natkriva $j \geq 0$ particija skupa Y , onda $j + 1$ particija skupa Y natkriva particiju μ .*

Uvedimo sada pojmove koji će nam biti potrebni u daljnjim razmatranjima. Lanac u parcijalno uređenom skupu (P, \leq) je totalno uređen podskup $L \subseteq P$. Drugim riječima, za $x, y \in L$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. Duljinu lanca L definiramo kao $|L| - 1$. Dakle, lanac duljine n je oblika $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Rang parcijalno uređenog skupa P je maksimalna duljina lanca u P . Lanac

Slika 5: Isječak Hasseovog dijagrama Youngove rešetke.



nazivamo *maksimalnim* ukoliko nije sadržan ni u kojem drugom lancu. Lanac $y_0 < y_1 < \dots < y_j$ nazivamo *zasićenim* ako svaki y_{i+1} natkriva y_i . Ako je P ranga n i $x \in P$, kažemo da je x ranga j , u oznaci $\rho(x) = j$, ako najveći zasićeni lanac u P s elementom x na vrhu ima duljinu j . Dakle, ako označimo $P_j = \{x \in P : \rho(x) = j\}$, tada je P disjunktna unija $P = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n$ i svaki maksimalni lanac u P je oblika $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, pri čemu je $\rho(x_j) = j$. Skup P_j nazivamo j -tom *razinom* od P . S $p_j := |P_j|$ označavamo broj elemenata od P ranga j . Parcijalno uređen skup ranga n je *rang-simetričan* ako je $p_i = p_{n-i}$ za $0 \leq i \leq n$ te *rang-unimodalan* ako postoji $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ takav da je $p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_j \geq p_{j+1} \geq p_{j+2} \geq \dots \geq p_n$. *Antilanac* u parcijalno uređenom skupu P je podskup $A \subseteq P$ u kojem su svaka dva elementa neusporediva, odnosno za $x, y \in A$ vrijedi $x \not\leq y$ i $y \not\leq x$.

U Youngovoj rešetki postoji direktna veza između particija i njihovog ranga. Preciznije, za particiju $\mu \in Y$ vrijedi da je njezin rang jednak površini.

Propozicija 1.12. *Ako je $\mu \in Y$ particija prirodnog broja $n \geq 0$, u oznaci $|\mu| = n$, onda je $\rho(\mu) = n$.*

Dokaz. Particiju μ površine n moguće je konstruirati u točno n iteracija počevši od prazne particije \emptyset . Svaka iteracija sastoji se od ranije opisanog postupka dodavanja kvadratića pripadnom Youngovom dijagramu, odnosno dodavanja novog dijela particije ili inkrementiranja već postojećeg dijela. Na taj način dobivamo najveći zasićeni lanac $\emptyset = \lambda^0 < \lambda^1 < \dots < \lambda^n = \mu$ u (Y, \geq) duljine upravo n s elementom μ na vrhu. Dakle, po definiciji vrijedi $\rho(\mu) = n$. \square

1.2 Izomorfizam između $L(m, n)$ i B_R/G_{mn}

Spomenimo sada pojmove iz teorije grupa koje ćemo koristiti u nastavku.

Definicija 1.13. *Neka je G grupa i neka je S skup. Kažemo da G djeluje na S ako je dano "množenje" gv elemenata iz S elementima iz G koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $gx \in S$,
2. $(gh)x = g(hx)$,
3. $ex = x$

za sve $g, h \in G, x \in S$, pri čemu je e neutralni element grupe G .

Pogledajmo neke primjere djelovanja grupe na skup.

Primjer 1.14. (1) *Ako je za grupu G i skup S definirano $gx = x$, za sve $g \in G, x \in S$, time je dano trivijalno djelovanje grupe G na skup S .*

(2) *Grupa permutacija (S_n, \circ) djeluje na n -člani skup $\{1, \dots, n\}$ tako da permutira njegove elemente.*

(3) *Neka je u xy -ravnini dana rotacija točke oko ishodišta u smjeru obrnutom od kazaljke na satu za $\alpha \in \mathbb{R}$ radijana. Ovime je dano djelovanje grupe $(\mathbb{R}, +)$ na xy -ravnini, odnosno skupu \mathbb{R}^2 .*

(4) *Translacija točke xy -ravnine za $\alpha \in \mathbb{R}$ udesno, odnosno zbrajanje točke s točkom $(\alpha, 0)$ daje još jedno djelovanje grupe $(\mathbb{R}, +)$ na xy -ravnini.*

Još neki primjeri mogu se pronaći na [12]. Kao nastavak na definiciju 1.13, uvodimo pojam *orbite*. Neka je G grupa, S skup i neka G djeluje na S . Kažemo da su elementi $x, y \in S$ G -ekvivalentni ako postoji $g \in G$ takav da je $gx = y$. Korištenjem svojstava iz definicije grupe lako se provjeri da je G -ekvivalentnost relacija ekvivalencije, a njene klase ekvivalencije nazivamo *orbitama*. Prema tome, x i y se nalaze u istoj orbiti ako su G -ekvivalentni. Orbitu koja sadrži x označavamo s Gx . Dakle, $Gx = \{gx : g \in G\}$. Skup svih orbita označavamo sa S/G .

Slika 6: Pravokutnik R_{43} .

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

- Primjer 1.15.** (1) U primjeru 1.14(1), orbite su jednočlani skupovi $\{x\}$, pri čemu je $x \in S$.
- (2) U primjeru 1.14(2), skup svih orbita je jednočlan, njegov jedini element je skup $\{1, \dots, n\}$.
- (3) U primjeru 1.14(3), orbite su kružnice sa središtem u ishodištu. Također, degenerirana kružnica koja se sastoji samo od ishodišta je orbita.
- (4) U primjeru 1.14(4), orbite su horizontalni pravci. Uočimo da se orbite u (3) i (4) razlikuju iako u oba slučaja ista grupa G djeluje na isti skup S .

Približavamo se važnom svojstvu skupa $L(m, n)$. Prije toga, definirat ćemo izomorfizam parcijalno uređenih skupova te uvesti grupu G_{mn} i skup B_R .

Definicija 1.16. *Parcijalno uređene skupove (P, \leq_P) i (Q, \leq_Q) nazivamo izomorfnima ako postoji bijektivno preslikavanje $\varphi: P \rightarrow Q$ takvo da je $x \leq_P y$ u P ako i samo ako je $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ u Q .*

Neka je $R = R_{mn}$ pravokutnik koji se sastoji od $m \times n$ kvadratića. Na primjer, R_{43} s redom označenim kvadratićima prikazan je na slici 6.

Definirajmo grupu G_{mn} . Neka je G_{mn} podgrupa od S_R , grupe permutacija kvadratića pravokutnika R . Permutacija iz G_{mn} djeluje na način da prvo permutira elemente unutar svakog retka pravokutnika R , a potom međusobno permutira retke. Na primjer, neka permutacija iz G_{mn} može djelovati na R_{43} na način opisan slikom 7. Na ovaj način definirana je grupa G_{mn} permutacija kvadratića pravokutnika $R = R_{mn}$. Dakle, grupa G_{mn} djeluje na skupu svih podskupova skupa R koji ćemo označiti s B_R . U lemi 1.17 opisane su orbite ovog djelovanja.

Slika 7: Djelovanje neke permutacije iz G_{43} na pravokutnik R_{43} .

9	8	7
1	2	3
12	10	11
5	6	4

Lema 1.17. *Orbite djelovanja grupe G_{mn} na skup B_R su skupovi koje je moguće reprezentirati točno jednim Youngovim dijagramom, odnosno točno jednim ulijevo poravnatim podskupom $D \subseteq R$ s retcima nerastuće duljine.*

Dokaz. Neka je $S \subseteq R$ i neka je $\pi \in G_{mn}$. Uz skup S , promotrimo i skup πS . Broj elemenata i -tog retka skupa S , odnosno πS , označimo s a_i , odnosno b_i . Budući da permutacija G_{mn} samo permutira elemente unutar retka skupa S , a potom i međusobno permutira retke, jasno je da je niz b_1, \dots, b_m zapravo samo neka permutacija niza a_1, \dots, a_m .

Neka je sada j_1, \dots, j_m permutacija skupa $\{1, \dots, m\}$. Sve takve permutacije za koje je $a_{j_1} \geq a_{j_2} \geq \dots \geq a_{j_m}$ daju točno jedan Youngov dijagram D_a particije $a = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$. Iz tog razloga, ako D_a reprezentira klasu, odnosno orbitu πS , onda je on jedini Youngov dijagram koji ju reprezentira. Uočimo da dijagram D_a doista reprezentira orbitu πS . Naime, nakon permutiranja elemenata unutar redaka pravokutnika R , retke skupa S poravnamo ulijevo. Tada nakon međusobnog permutiranja redaka, retke skupa S posložimo tako da su njihove duljine nepadajuće. Na taj način dobivamo opisani Youngov dijagram. \square

Definicija 1.18. *Neka je G podgrupa od S_n , grupe permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$. S B_n označimo parcijalno uređen skup $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$, gdje je $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ partitivni skup skupa $\{1, \dots, n\}$. Definiramo kvocijentni parcijalno uređen skup B_n/G na sljedeći način. Ako su \mathfrak{o} i \mathfrak{o}' orbite, definiramo $\mathfrak{o} \leq \mathfrak{o}'$ u B_n/G ako postoje $x \in \mathfrak{o}$ i $y \in \mathfrak{o}'$ takvi da je $x \leq y$ u B_n . Može se provjeriti da je ovako definirana relacija na skupu svih orbita relacija parcijalnog uređaja.*

Dolazimo do spomenutog važnog svojstva skupa $L(m, n)$.

Teorem 1.19. *Neka je $R = R_{mn}$. Tada su $L(m, n)$ i skup orbita B_R/G_{mn} izomorfni.*

Dokaz. Prema lemi 1.17, svaka orbita iz B_R/G_{mn} sadrži jedinstveni Youngov dijagram. Štoviše, dvije različite orbite su disjunktne, stoga ne sadrže isti Youngov dijagram. Dakle, preslikavanje $\varphi: B_R/G_{mn} \rightarrow L(m, n)$ definirano s $\varphi(D_\mu) = \mu$ je bijektivno. Prema napomeni 1.10, za proizvoljne particije μ, λ vrijedi $D_\mu \subseteq D_\lambda$ ako i samo ako je $\mu \leq \lambda$. Dakle, s φ je dan izomorfizam između $L(m, n)$ i B_R/G_{mn} . \square

Za kraj poglavlja dat ćemo posljedicu teorema 1.19. Prije toga definiramo pojam Spernerovog svojstva.

Definicija 1.20. *Neka je P parcijalno uređen skup ranga $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da P ima Spernerovo svojstvo ili da je P Spernerov ako vrijedi*

$$\max\{|A|: A \text{ je antilanac u } P\} = \max\{|P_i|: 0 \leq i \leq n\}.$$

Drugim riječima, nijedan antilanac u P nije veći od razine P_i s maksimalnim brojem elemenata.

U narednom teoremu dana su važna svojstva kvocijentnog parcijalnog uređenog skupa B_n/G , pri čemu je G podgrupa od S_n . Dokaz teorema moguće je pronaći u [10, str. 48].

Teorem 1.21. *Neka je G podgrupa od S_n . Tada je kvocijentni parcijalno uređen skup B_n/G ranga n , rang-simetričan je i rang-unimodalan te ima Spernerovo svojstvo.*

Konačno, teoremi 1.19 i 1.21 zajedno daju sljedeći rezultat.

Korolar 1.22. *Parcijalno uređen skup $L(m, n)$ je rang-simetričan, rang-unimodalan te ima Spernerovo svojstvo.*

2 q -binomni koeficijenti

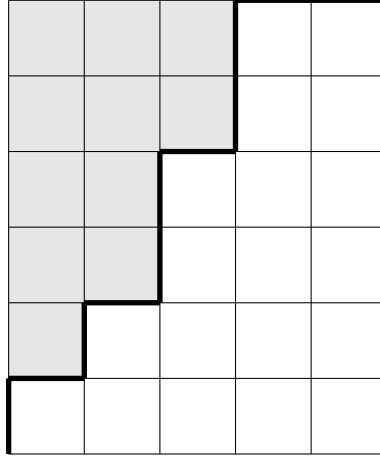
2.1 Osnovne definicije i svojstva

Promotrimo $|L(m, n)|$, ukupan broj elemenata skupa $L(m, n)$.

Propozicija 2.1. *Vrijedi $|L(m, n)| = \binom{m+n}{m}$.*

Dokaz. Uspostavimo bijekciju između skupa svih nizova duljine $m + n$ koji se sastoje od m slova ‘G’ i n slova ‘D’ te skupa svih Youngovih dijagrama D sadržanih u pravokutniku R dimenzija $m \times n$. Za dani dijagram D , iscrtajmo njegov donji desni rub na način da počnemo od donjeg lijevog vrha pravokutnika R i slijedimo rub dijagrama, pomičući se u svakom koraku

Slika 8: Pravokutnik R i dijagram D u slučaju $m = 6, n = 5$ i $\mu = (3, 3, 2, 2, 1)$.



za jednu stranicu kvadratića prema gore ('G') ili udesno ('D'). Ukoliko se nakon iscertavanja ruba dijagrama ne nađemo na gornjem desnom vrhu pravokutnika, izvršimo još onoliko pomaka udesno koliko je potrebno da bismo završili tamo. Prilikom pomicanja bilježimo niz koraka koje smo napravili, pišući slovo 'G' ukoliko smo se pomaknuli prema gore, odnosno slovo 'D' ukoliko smo se pomaknuli udesno. Ovako dobivamo niz traženih osobina. Na primjer, neka je $m = 6, n = 5$ i $\mu = (3, 3, 2, 2, 1)$. U tom slučaju, pripadni pravokutnik R i dijagram D prikazani su na slici 8. Odgovarajući niz slova 'G' i 'D' je "GDGDGGDGGDD".

Obrnuto, za dani niz slova 'G' i 'D', pomičemo se iz donjeg lijevog vrha pravokutnika R prema njegovom dijagonalno suprotnom vrhu u skladu s članovima niza. Na taj način iscertavamo donji desni rub dijagrama D .

Jasno je da je upravo konstruirana veza je bijektivna. Budući da je broj binarnih nizova duljine $m+n$ s m slova 'G' i n slova 'D' jednak $\binom{m+n}{m}$, tvrdnja slijedi. \square

U nastavku ćemo promotriti broj elemenata skupa $L(m, n)$ koji su ranga i . Prije toga, definirat ćemo potrebne pojmove i opisati neka njihova svojstva. Za $j \geq 1$ definiramo

$$[j]_q := 1 + q + q^2 + \dots + q^{j-1}.$$

Dakle, imamo $[1]_q = 1, [2]_q = 1 + q, [3]_q = 1 + q + q^2$ itd. Nadalje, za $j \geq 1$ definiramo

$$[j]! := [1]_q [2]_q \dots [j]_q$$

te postavimo $[0]! = 1$. Sada imamo $[1]! = 1, [2]! = 1+q, [3]! = (1+q)(1+q^2) =$

$1 + 2q + 2q^2 + q^3$ itd. Konačno, za $k \geq j \geq 0$ definiramo

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q := \frac{[k]!}{[j]![k-j]!}. \quad (1)$$

Izraz $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ nazivamo *q-binomnim koeficijentom* (ili *Gaussovim koeficijentom*).

S obzirom da za $q = 1$ vrijedi $[j]! = j!$, slijedi

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_1 = \binom{k}{j}.$$

Također, iz definicije *q*-binomnih koeficijenata slijedi simetrija, kao i za binomne koeficijente:

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} k \\ k-j \end{bmatrix}_q. \quad (2)$$

Uočimo još da vrijedi

$$[j]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{j-1} = \frac{q^j - 1}{q - 1}. \quad (3)$$

Korištenjem jednakosti (3) raspišimo definiciju *q*-binomnog koeficijenta $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q &= \frac{[k]!}{[j]![k-j]!} \\ &= \frac{[1]_q [2]_q \dots [k]_q}{[1]_q [2]_q \dots [j]_q \cdot [1]_q [2]_q \dots [k-j]_q} \\ &= \frac{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q - 1)}{(q^j - 1)(q^{j-1} - 1) \dots (q - 1) \cdot (q^{k-j} - 1)(q^{k-j-1} - 1) \dots (q - 1)} \quad (4) \end{aligned}$$

$$= \frac{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q^{k-j+1} - 1)}{(q^j - 1)(q^{j-1} - 1) \dots (q - 1)}. \quad (5)$$

Alternativni zapisi (4) i (5) koristit će nam na nekim mjestima u nastavku.

Primjer 2.2. Korištenjem jednakosti (3) zaključujemo da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}_q = 1 \\ \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} k \\ k-1 \end{bmatrix}_q = [k]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q &= \frac{[4]_q [3]_q [2]_q [1]_q}{[2]_q [1]_q [2]_q [1]_q} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6. \end{aligned}$$

U prošlom primjeru q -binomni koeficijent $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ uvijek je bio polinom u varijabli q s nenegativnim koeficijentima. Općenito, to vrijedi za sve q -binomne koeficijente, a ta činjenica slijedit će iz iduće leme.

Propozicija 2.3. Za sve $k \geq 1$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{k-j} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q, \quad (6)$$

uz početne uvjete $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1, \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = 0$ ako $j < 0$ ili $j > k$.

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{k-j} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q &= \frac{[k-1]!}{[j]![k-1-j]!} + q^{k-j} \frac{[k-1]!}{[j-1]![k-j]!} \\ &= \frac{[k-1]!}{[j-1]![k-1-j]!} \left(\frac{1}{[j]_q} + \frac{q^{k-j}}{[k-j]_q} \right) \\ &= \frac{[k-1]!}{[j-1]![k-1-j]!} \frac{[k-j]_q + q^{k-j}[j]_q}{[j]_q[k-j]_q} \\ &= \frac{[k-1]!}{[j-1]![k-1-j]!} \frac{[k]_q}{[j]_q[k-j]_q} \\ &= \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q. \end{aligned}$$

□

Uočimo da su početni uvjeti na q -binomne koeficijente iz iskaza propozicije 2.3 identični početnim uvjetima koje zadovoljavaju binomni koeficijenti $\binom{k}{j}$. Korištenjem jednakosti (2) dobivamo nešto drukčiji oblik rekurzije (6). Preciznije, imamo

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + q^j \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}_q. \quad (7)$$

q -binomni koeficijenti zadovoljavaju još jednu rekurzivnu relaciju.

Propozicija 2.4. *Vrijedi*

$$(q^j - 1) \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = (q^k - 1) \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q. \quad (8)$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} (q^j - 1) \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q &= \cancel{(q^j - 1)} \frac{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q^{k-j+1} - 1)}{\cancel{(q^j - 1)}(q^{j-1} - 1) \dots (q - 1)} \\ &= (q^k - 1) \frac{(q^{k-1} - 1)(q^{k-2} - 1) \dots (q^{k-j+1} - 1)}{(q^{j-1} - 1)(q^{j-2} - 1) \dots (q - 1)} \\ &= (q^k - 1) \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q. \end{aligned}$$

□

Kombinatorni dokazi formula (2), (7) i (8) mogu se pronaći u [5, str. 15, 16]. Propozicija 2.3 je q -analogon Pascalove rekurzije. Naime, uvrstimo li $q = 1$ u (6), dobivamo

$$\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1},$$

što je poznata Pascalova formula kojom se računa “Pascalov trokut”.

Korištenjem formule (6) i danih početnih uvjeta, induktivno se dokaže da je q -binomni koeficijent $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ doista polinom u varijabli q s nenegativnim

koeficijentima. Lako je odrediti stupanj polinoma $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$. Iz definicije (1) slijedi da je njegov stupanj jednak razlici stupnjeva polinoma u brojniku i polinoma u nazivniku. Imamo

$$\deg \left(\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q \right) = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} - \frac{(k-j)(k-j+1)}{2} = j(k-j).$$

Dakle, postoje koeficijenti $a_0, a_1, \dots, a_{j(k-j)} \geq 0$ takvi da je

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{j(k-j)} a_i x^i.$$

Propozicija 2.5. *Koeficijenti $a_0, a_1, \dots, a_{j(k-j)}$ q -binomnog koeficijenta su simetrični, odnosno za $0 \leq i \leq j(k-j) = \deg\left(\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q\right)$ vrijedi*

$$a_i = a_{j(k-j)-i}.$$

Dokaz. Za proizvoljan polinom $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ vrijedi

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n.$$

Dakle, koeficijenti polinoma p su simetrični ako i samo ako je

$$p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right). \quad (9)$$

Korištenjem zapisa (4) q -binomnog koeficijenta $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ dobivamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}} &= \frac{(q^{-k} - 1) \dots (q^{-1} - 1)}{(q^{-j} - 1) \dots (q^{-1} - 1) \cdot (q^{-(k-j)} - 1) \dots (q^{-1} - 1)} \\ &= \frac{q^{-k}(1 - q^k) \dots q^{-1}(1 - q)}{q^{-j}(1 - q^j) \dots q^{-1}(1 - q) \cdot q^{-(k-j)}(1 - q^{k-j}) \dots q^{-1}(1 - q)} \\ &= \frac{q^{-\frac{k(k+1)}{2}}(1 - q^k) \dots (1 - q)}{q^{-\frac{j(j+1)}{2}}(1 - q^j) \dots (1 - q) \cdot q^{-\frac{(k-j)(k-j+1)}{2}}(1 - q^{k-j}) \dots (1 - q)} \\ &= \frac{1}{q^{j(k-j)}} \cdot \frac{(q^k - 1) \dots (q - 1)}{(q^j - 1) \dots (q - 1) \cdot (q^{k-j} - 1) \dots (q - 1)} \\ &= \frac{1}{q^{j(k-j)}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q, \end{aligned}$$

odnosno vrijedi jednakost (9). □

Za koeficijente q -binomnog koeficijenta vrijedi i više. Za polinom $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$, odnosno niz c_0, c_1, \dots, c_n kažemo da je *unimodal* ako

postoji $0 \leq j \leq n$ takav da je $c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_j \geq c_{j+1} \geq c_{j+2} \geq \dots \geq c_n$. Britanski matematičar James J. Sylvester u 19. stoljeću je nakon četvrt stoljeća slatnje dokazao da su koeficijenti q -binomnog koeficijenta unimodalni ([10, str. 65, 71], [3, str. 4, 13] i [11, str. 3]). Ova netrivialna činjenica zajedno s propozicijom 2.5 daje da za koeficijente a_0, a_1, \dots, a_n q -binomnog koeficijenta $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ vrijedi

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \geq a_{m+1} \geq \dots \geq a_n, \text{ ako je } n = 2m,$$

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m = a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n, \text{ ako je } n = 2m + 1.$$

Specijalan slučaj idućeg teorema je poznati binomni teorem. Naime, kao i dosad, potrebno je uvrstiti $q = 1$. Teorem je, kao i u slučaju binomnog teorema, moguće dokazati indukcijom, no ovdje dajemo drukčiji dokaz.

Teorem 2.6 (q -binomni teorem).

$$\prod_{i=1}^n (1 + q^{i-1}x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k, \quad n \geq 0. \quad (10)$$

Dokaz. Neka je s

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (1 + q^{i-1}x)$$

dan polinom p dviju varijabli. Zapišimo ga u kanonskom obliku

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k(q) x^k,$$

gdje je $a_k = a_k(q)$ polinom u varijabli q , za svaki $0 \leq k \leq n$. Lako se provjeri da polinom p zadovoljava sljedeću jednakost:

$$(1 + x)p(qx) = p(x)(1 + q^n x).$$

Iz navedene jednakosti, izjednačavanjem koeficijenata dobivamo

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} = a_k + q^n a_{k-1},$$

iz čega slijedi

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{q^n - q^{k-1}}{q^k - 1}. \quad (11)$$

Budući da je $a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0$, korištenjem (11) i (3) dobivamo

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{q^n - q^{k-1}}{q^k - 1} \cdot \frac{q^n - q^{k-2}}{q^{k-1} - 1} \cdots \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= \frac{q^{k-1}(q^{n-k+1} - 1)}{q^k - 1} \cdot \frac{q^{k-2}(q^{n-k+2} - 1)}{q^{k-1} - 1} \cdots \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= q^{k+(k-1)+\cdots+1} \cdot \frac{(q-1)[n-k+1]_q}{(q-1)[k]_q} \cdot \frac{(q-1)[n-k+2]_q}{(q-1)[k-1]_q} \cdots \frac{(q-1)[n]_q}{(q-1)[0]_q} \\
&= q^{\binom{k}{2}} \cdot \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \\
&= q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Teorem 2.6 moguće je dokazati i indukcijom. [1, str. 30], [5, str. 22]

2.2 Interpretacije q -binomnih koeficijenata

Označimo s $p_i(m, n)$ broj elemenata rešetke $L(m, n)$ koji su ranga i . U sljedećem teoremu dana je kombinatorna interpretacija q -binomnih koeficijenata. Dokaz teorema moguće je pronaći u [10, str. 62].

Teorem 2.7. *Neka su $m, n > 0$ te $i \geq 0$ prirodni brojevi. Vrijedi*

$$\sum_{i \geq 0} p_i(m, n) q^i = \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q. \quad (12)$$

Neka je $a \in \mathbb{N}$ i neka je P skup svih puteva u cjelobrojnoj mreži od njenog ishodišta $(0, 0)$ do točke s koordinatama (m, n) , pri čemu su dozvoljeni samo koraci prema “gore” i prema “desno”, kao u dokazu propozicije 2.1. Promotrimo problem brojanja puteva iz skupa P takvih da je površina omeđena koordinatnim osima, putem i pravcem $x = m$ jednaka a . Ovom problemu pristupit ćemo koristeći funkcije izvodnice na način da put koji omeđuje površinu veličine a doprinosi funkciji izvodnici s pribrojnikom q^a , pri čemu je q samo formalna varijabla. Još jedna interpretacija q -binomnih koeficijenata dana je u idućem teoremu.

Teorem 2.8. *Funkcija izvodnica za broj puteva iz P koji omeđuju površinu zadane veličine jednaka je $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$.*

Dokaz. Neka je $S(k, j)$ suma težina puteva od $(0, 0)$ do $(k - j, j)$, pri čemu je težina puta jednaka q^a ako je površina koju put omeđuje jednaka a . Očito vrijedi $S(k, 0) = S(k, k) = 1$. Puteve od $(0, 0)$ do $(k - j, j)$ podijelimo na dva disjunktna podskupa: one čiji je zadnji korak prema gore i one čiji je zadnji korak prema desno. U prvom slučaju zadnji korak započinje na koordinati $(k - j, j - 1)$ i taj put zadnjim korakom ne stvara novu površinu, stoga on doprinosi ukupnoj sumi $S(k, j)$ s vrijednošću $S(k - 1, j - 1)$. U drugom slučaju zadnji korak započinje na koordinati $(k - j - 1, j)$ te taj put zadnjim korakom povećava ukupnu površinu za j jedinica i zato doprinosi ukupnoj sumi $S(k, j)$ s vrijednošću $q^j S(k - 1, j)$. Po principu sume sada vrijedi $S(k, j) = S(k - 1, j - 1) + q^j S(k - 1, j)$. Dakle, brojevi $S(k, j)$ zadovoljavaju istu rekurziju (7) te iste početne uvjete, stoga slijedi da su jednaki q -binomnim koeficijentima $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$. \square

Sljedeći teorem daje novu interpretaciju q -binomnih koeficijenata.

Teorem 2.9. *Neka je $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$ i neka je $\mathcal{A}_{k,j}$ familija j -članih podskupova skupa A_k , za $0 \leq j \leq k$. Tada je*

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \sum_{S \in \mathcal{A}_{k,j}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}}, \text{ gdje je } w(S) = \sum_{s \in S} s. \quad (13)$$

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po k . Promotrimo prvo slučaj $k = 1, j = 0, 1$. Za $j = 0$ imamo $\mathcal{A}_{1,0} = \{\emptyset\}$ i $w(\emptyset) = 0$. Dakle, dobivamo da su lijeva i desna strana jednakosti (13) jednake 1. Za $j = 1$ imamo da je jedini element familije $\mathcal{A}_{1,1}$ jednak $A_1 = \{1\}$ te vrijedi $w(\{1\}) = 1$. Opet dobivamo da su lijeva i desna strana jednakosti (13) jednake 1.

Pretpostavimo da jednakost (13) vrijedi za $1 \leq k \leq n - 1$, pri čemu je $n \geq 2$, i neka je $k = n$. U slučaju $j = 0$ dobivamo, kao i za $n = 1$, da su lijeva i desna strana jednakosti (13) jednake 1. Neka je sada $j \geq 1$ i neka su $\mathcal{B} = \{S \in \mathcal{A}_{k,j} : k \notin S\}$ te $\mathcal{B}' = \{S \in \mathcal{A}_{k,j} : k \in S\}$. Očito vrijedi $\mathcal{A}_{n,j} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$. Dakle, članovi familije \mathcal{B} su j -člani podskupovi skupa A_{k-1} , odnosno $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{k-1,j}$. O članovima familije \mathcal{B}' možemo razmišljati kao o $(j-1)$ -članim podskupovima skupa A_{k-1} u koje još ubacimo element k . Iz tog

razloga desna strana jednakosti (13) jednaka je

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{A}_{k,j}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} &= \sum_{S \in \mathcal{B}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in \mathcal{B}'} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{A}_{k-1,j}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in \mathcal{A}_{k-1,j-1}} q^{(w(S)+k) - \frac{j(j+1)}{2}} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{A}_{k-1,j}} q^{w(S) - \frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in \mathcal{A}_{k-1,j-1}} q^{w(S) - \frac{j(j-1)}{2}} \cdot q^{k-j} \\
&= \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{k-j} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q \\
&= \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q,
\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz rekurzivne relacije (6). Indukcijom po j , jednakost (13) vrijedi za $0 \leq j \leq n$ i time je dokaz završen. \square

Iduća interpretacija q -binomnih koeficijenata dana je narednim teoremom.

Teorem 2.10. *Neka je $q = p^\alpha$ potencija nekog prostog broja i neka je \mathbb{F}_q polje s q elemenata. Tada je $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ broj j -dimenzionalnih potprostora od \mathbb{F}_q^k , vektorskog prostora dimenzije k nad poljem \mathbb{F}_q .*

Dokaz. Ako je $j = 0$, tada je $\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$ te postoji jedan potprostor dimenzije 0, a to je prostor koji sadrži samo nulvektor, stoga tvrdnja vrijedi.

Neka je $j \geq 1$. Množenjem (5) s $\frac{1 \cdot q \dots q^{j-1}}{1 \cdot q \dots q^{j-1}}$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{j-1})}{(q^j - 1)(q^j - q) \dots (q^j - q^{j-1})}.$$

Neka je L broj potprostora dimenzije j vektorskog prostora \mathbb{F}_q^k , M broj različitih baza u fiksiranom j -dimenzionalnom potprostoru, a N broj različitih j -torki linearno nezavisnih vektora prostora \mathbb{F}_q^k . Tada vrijedi

$$L \cdot M = N.$$

Odredimo N , broj različitih j -torki $(v_1, \dots, v_j) \in (\mathbb{F}_q^k)^j$ linearno nezavisnih vektora v_i . Vektor v_1 možemo izabrati na $q^k - 1$ načina jer može biti jednak

proizvoljnom netrivialnom vektoru. Vektor v_2 tada možemo izabrati na $q^k - q$ načina jer mora biti različit od proizvoljne linearne kombinacije vektora v_1 , kojih ima q . Općenito, restrikcija na vektor v_i je da mora biti različit od proizvoljne linearne kombinacije vektora v_1, \dots, v_{i-1} . Dakle, vektor v_i možemo izabrati na $q^k - q^{i-1}$ načina. Slijedi da je broj različitih j -torki (v_1, \dots, v_j) , odnosno N , jednak

$$(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{j-1}).$$

Analognim argumentiranjem (uz zamjenu $k = j$) možemo utvrditi da je M jednak

$$(q^j - 1)(q^j - q) \dots (q^j - q^{j-1}).$$

Kako je $L = \frac{N}{M}$, slijedi da je broj potprostora dimenzije j vektorskog prostora \mathbb{F}_q^k jednak

$$\frac{(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{j-1})}{(q^j - 1)(q^j - q) \dots (q^j - q^{j-1})},$$

čime slijedi tvrdnja teorema. □

I poznata Vandermondeova konvolucija,

$$\binom{m+n}{j} = \sum_{i=0}^j \binom{m}{i} \binom{n}{j-i},$$

ima svoj q -analogon:

$$\left[\begin{matrix} m+n \\ j \end{matrix} \right]_q = \sum_{i=0}^j q^{(j-i)(m-i)} \left[\begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} n \\ j-i \end{matrix} \right]_q. \quad (14)$$

Kombinatorni dokaz jednakosti (14) sličan dokazu teorema 2.10 moguće je pronaći u [6, str. 23].

Propozicija 2.11. *Broj regularnih $k \times k$ matrica nad poljem \mathbb{F}_q jednak je*

$$(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{k-1}).$$

Dokaz. Kvadratna matrica je regularna ako i samo ako su joj retci linearno nezavisni. U dokazu teorema 2.10 vidjeli smo da je broj linearno nezavisnih vektora u k -dimenzionalnom prostoru nad poljem \mathbb{F}_q jednak upravo $(q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{k-1})$. □

Spomenimo još jednu interpretaciju q -binomnih koeficijenata. U tu svrhu definirajmo prvo poseban tip matrica.

Definicija 2.12. Za matricu $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{F})$ kažemo da je u reduciranom kanonskom obliku ako vrijede sljedeća svojstva:

- nulretci matrice A nalaze se na njenom dnu,
- svaki redak matrice A je ili nulredak ili je njegov prvi nenul element jednak 1 (takav element naziva se vodećom jedinicom),
- ukoliko postoji, vodeća jedinica svakog retka (osim prvog retka) nalazi se desno u odnosu na vodeću jedinicu njemu prethodnog retka,
- ako se u nekom stupcu matrice nalazi vodeća jedinica nekog retka, onda su svi ostali elementi tog stupca jednaki nuli.

Spomenimo da je reducirani kanonski oblik zapravo specijalan slučaj općenitijeg *kanonskog oblika* matrice, no njime se ovdje nećemo baviti. Slijede neki primjeri matrica u reduciranom kanonskom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Promotrimo sada važna svojstva reduciranog kanonskog oblika matrice. Svaku matricu moguće je dovesti u reducirani kanonski oblik korištenjem elementarnih transformacija nad njenim retcima. Naime, međusobnom zamjenom redaka moguće je postići da se nulretci matrice nalaze na njenom dnu. Nadalje, zamjenom redaka možemo postići i da redak u kojem se nenul element pojavljuje u stupcu s najmanjim indeksom bude prvi redak. Množenjem prvog retka s recipročnim skalarom $\lambda \neq 0$ možemo taj prvi nenul element pretvoriti u 1, a potom i poništiti sve elemente matrice ispod njega dodavanjem prvog retka pomnoženog odgovarajućim skalarom. Ovaj postupak možemo primijeniti na svaki idući redak sve dok ne dobijemo matricu u reduciranom kanonskom obliku.

Propozicija 2.13. Dvije matrice imaju isti reducirani kanonski oblik ako i samo ako njihovi retci razapinju isti potprostor

Dokaz. Elementarnim transformacijama nad retcima matrice potprostor razapet retcima ostaje nepromijenjen, stoga ako se dvije matrice elementarnim transformacijama nad retcima mogu svesti na isti reducirani kanonski oblik, onda njihovi retci razapinju isti potprostor.

Obrnuto, pretpostavimo da retci dviju matrica u reduciranom kanonskom obliku razapinju isti potprostor. Tada se prvi redak druge matrice može prikazati kao linearna kombinacija redaka prve matrice, a zbog vodećih jedinica

te ostalih svojstava matrica u reduciranom kanonskom obliku zaključujemo da je jednak prvom retku prve matrice. Analogno zaključujemo da je drugi redak druge matrice jednak drugom retku prve matrice itd., a na kraju dobivamo da su te dvije matrice jednake. \square

Propozicija 2.14. *Retci matrice u reduciranom kanonskom obliku su linearno nezavisni ako i samo ako je zadnji redak matrice različit od nulretka.*

Dokaz. Ako je bilo koji redak matrice jednak nulretku, onda su retci očito linearno zavisni.

Obrnuto, neka je zadnji redak matrice u reduciranom kanonskom obliku različit od nulretka. Tada su zbog svojstava reduciranog kanonskog oblika matrice i svi njeni prethodni retci različiti od nulretka. Uz to, svi retci sadrže jedinicu na mjestu na kojem ostali retci sadrže nulu. Dakle, retci matrice su linearno nezavisni. \square

Propozicija 2.15. *Neka je $q > 1$ i neka je \mathbb{F}_q polje s q elemenata. Tada je broj matrica dimenzija $j \times k$ u reduciranom kanonskom obliku nad poljem \mathbb{F}_q koje nemaju nulredaka jednak broju j -dimenzionalnih potprostora od \mathbb{F}_q^k .*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicija 2.13 i 2.14. \square

Dakle, propozicija 2.15 i teorem 2.10 zajedno daju da je broj matrica dimenzija $k \times j$ u reduciranom kanonskom obliku nad poljem \mathbb{F}_q koje nemaju nulredaka jednak $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$.

Primjer 2.16. *Matrice dimenzija 2×4 nad poljem \mathbb{F}_q koje su u reduciranom kanonskom obliku te koje nemaju nulredaka su jednog od sljedećih oblika:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu $*$ označava proizvoljan element polja \mathbb{F}_q . Dakle, broj takvih matrica jednak je $q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$, a u primjeru 2.2 vidjeli smo da je taj polinom jednak upravo q -binomnom koeficijentu $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q$.

3 Youngove tablice

3.1 Osnovne definicije i svojstva

U poglavlju 1 definirali smo Youngovu rešetku Y , odnosno skup svih particija prirodnih brojeva zajedno s pripadnim uređajem. Taj uređaj sveli smo na uređaj nad skupom Youngovih dijagrama (propozicija 1.10). Youngovu rešetku ilustrirali smo slikom 5.

Prisjetimo se sada pojma šetnje iz teorije grafova. Šetnja duljine ℓ u grafu $G = (V, E)$ je niz $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_\ell, v_\ell)$, gdje je $e_i \in E$ brid $\{v_{i-1}, v_i\}$, za $i = 1, \dots, \ell$. Kažemo da je to šetnja od vrha v_0 do vrha v_ℓ . Dakle, *duljina šetnje* je broj bridova u nizu (tj. broj vrhova u nizu umanjen za jedan). Ako je $v_\ell = v_0$, šetnju nazivamo *zatvorenom*.

Napomena 3.1. *U jednostavnim grafovima s neusmjerenim i jednostrukim bridovima, bez petlji, s kakvim smo se susretali u kontekstu Youngove rešetke, bridovi šetnje u potpunosti su određeni vrhovima. Iz tog razloga u šetnji često navodimo samo vrhove, npr. $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$, pri čemu se podrazumijeva da su vrhovi v_{i-1} i v_i susjedni, odnosno da postoji brid $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$.*

Istaknimo i sljedeće. Budući da nijedan lanac u Youngovoj rešetki nije maksimalne duljine, Youngova rešetka je beskonačnog ranga. Drugim riječima, Y je jednak beskonačnoj disjunktnoj uniji $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} Y_i$, pri čemu Y_i sadrži sve elemente iz Y koji su ranga i . Kao i u slučaju konačnih parcijalno uređenih skupova, skup Y_i nazivamo i -tom razinom od Y .

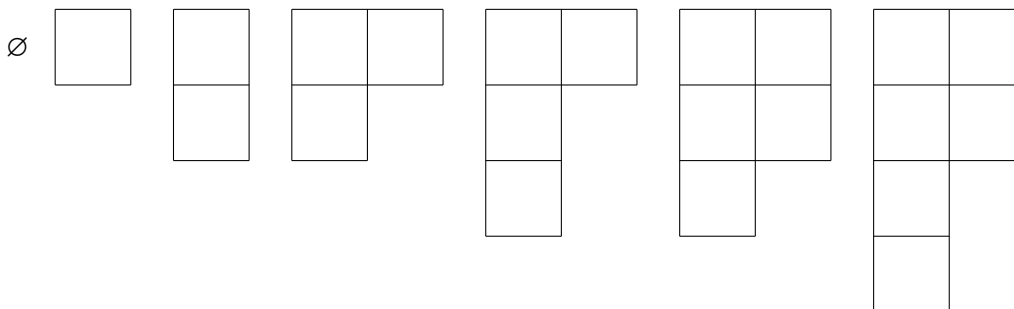
Šetnju u Hasseovom dijagramu parcijalno uređenog skupa nazivamo *Hasseovom šetnjom*. Neka je $(\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^\ell)$ šetnja u Youngovoj rešetki. Za sve $i = 0, \dots, \ell$ vrijedi da je μ^i particija nekog prirodnog broja te iz razmatranja neposredno prije propozicije 1.11 zaključujemo da vrijedi točno jedno od sljedećeg:

$$(1) \quad \mu^i < \mu^{i+1} \text{ i } |\mu^i| = |\mu^{i+1}| - 1,$$

$$(2) \quad \mu^i > \mu^{i+1} \text{ i } |\mu^i| = |\mu^{i+1}| + 1.$$

“Kretanje” po Hasseovom dijagramu, odnosno korake Hasseove šetnje, svrstavamo na sljedeći način. Pomak tipa (1) označavamo s ‘ G ’ (“gore” jer prelazimo na veću razinu), a Pomak tipa (2) s ‘ D ’ (“dolje”). Ako se Hasseova šetnja W sastoji od, redom, koraka A_1, A_2, \dots, A_ℓ , pri čemu je $A_i \in \{G, D\}$ za sve $i = 1, \dots, \ell$, tada kažemo da je W tipa $A_\ell A_{\ell-1} \dots A_2 A_1$. Uočimo da je tip šetnje zapisan u obrnutom redoslijedu koraka od kojih se sastoji. Opravdanje za ovakvu notaciju leži u činjenici da ćemo u nastavku G i D poistovjetiti

Slika 9: Šetnja tipa G^6 .



s linearnim transformacijama koje komponiramo zdesna nalijevo. Na primjer, šetnja $(\emptyset, 1, 11, 1, \emptyset, 1, 2, 3, 31, 21, 11, 111)$ je tipa $GDDGGGGDDGG = GD^2G^4D^2G^2$.

Napomena 3.2. Kad govorimo o (Hasseovoj) šetnji u Youngovoj rešetki, pritom mislimo na šetnju u Hasseovom dijagramu Youngove rešetke.

Hasseove šetnje tipa G^ℓ koje počinju u \emptyset su zapravo zasićeni lanci $\emptyset = \mu^0 < \mu^1 < \dots < \mu^\ell$. Takve šetnje možemo poistovjetiti s nizom Youngovih dijagrama koji počinje s praznim dijagramom i čije članove dobivamo dodavanjem točno jednog kvadratića prethodnom članu (dijagramu). Na primjer, šetnja tipa G^6 prikazana je slikom 9. Također, šetnju tipa G^ℓ možemo prikazati koristeći posljednju particiju u nizu, odnosno njen Youngov dijagram, tako da kvadratiće označimo redom brojevima prema njihovom dodavanju. Na taj način dobivamo dijagram na slici 10 koji nazivamo *standardnom Youngovom tablicom (SYT)*. Općenito, standardna Youngova tablica τ sastoji se od Youngovog dijagrama neke particije μ broja $n \in \mathbb{N}$, zajedno s brojevima $1, 2, \dots, n$ upisanim u kvadratiće dijagrama tako da se svaki broj pojavljuje točno jednom te tako da su svaki redak i svaki stupac rastući. Particiju μ nazivamo *oblikom* takve standardne Youngove tablice te pišemo $sh(\tau) = \mu$. Na primjer, postoje četiri standardne Youngove tablice oblika $(2, 1, 1, 1)$, a prikazane su na slici 11.

Označimo s f^μ broj standardnih Youngovih tablica oblika μ . Na primjer, $f^{(2,1,1,1)} = 4$. Postoji formula za računanje vrijednosti f^μ dane particije μ . Prije nego ju istaknemo, potrebno je definirati pojam *kuke*.

Slika 10: Standardna Youngova tablica koja pripada šetnji tipa G^6 .

1	3
2	5
4	
6	

Slika 11: Standardne Youngove tablice oblika $(2, 1, 1, 1)$.

1	2	1	3	1	4	1	5
3		2		2		2	
4		4		3		3	
5		5		5		4	

Definicija 3.3. *Neka je x kvadratić Youngovog dijagrama particije μ . Definiramo kuku kvadratića x , u oznaci $H(x)$, kao skup svih kvadratića koji se nalaze točno ispod x ili zdesna kvadratiću x , uključujući i njega samog. Kardinalitet skupa $H(x)$ (odnosno broj takvih kvadratića) nazivamo duljinom kuke kvadratića x i označavamo s $h(x)$.*

Na primjer, na slici 12 u kvadratiće dijagrama particije $(4, 4, 3)$ upisane su duljine pripadne kuke.

Teorem 3.4. *Neka je $\mu \vdash n$. Tada je*

$$f^\mu = \frac{n!}{\prod_{x \in \mu} h(x)},$$

pri čemu je u nazivniku produkt po svim kvadratićima Youngovog dijagrama particije μ .

Postoji nekoliko različitih dokaza teorema 3.4. Elegantan dokaz koji se oslanja na područje vjerojatnosti nalazi se u [4].

Slika 12: Duljine kuka dijagrama particije (4, 4, 3).

6	5	4	2
5	4	3	1
3	2	1	

Na primjer, broj standardnih Youngovih tablica oblika (4, 4, 3) (slika 12) iznosi

$$f^{(4,3,3)} = \frac{11!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462.$$

Dyckov put u cjelobrojnoj mreži je najkraći put od ishodišta (0, 0) do točke (n, n) koji ne silazi ispod pravca $y = x$. Takav put počinje i završava na tom pravcu te ga smije doticati, ali nijedan njegov vrh nema koordinate (x, y) takve da vrijedi $x > y$. Označimo s C_n broj takvih puteva. Idući korolar posljedica je teorema 3.4.

Korolar 3.5. *Vrijedi*

$$C_n = f^{(n,n)} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Brojevi C_n iz korolara 3.5 nazivaju se Catalanovim brojevima i poznati su po mnogim kombinatornim interpretacijama ([7, str. 19], [9, str. 46]). Neka je sada $w = A_\ell A_{\ell-1} \dots A_1$ riječ nad dvočlanom abecedom $\{G, D\}$ te neka je $\mu \vdash n$. Označimo s $\alpha(w, \mu)$ broj Hasseovih šetnji u Youngovoj rešetki koje su tipa w , započinju u praznoj particiji \emptyset i završavaju u particiji μ . Na primjer, $\alpha(GDGG, 2) = 2$, a jedine dvije moguće šetnje tog tipa su $(\emptyset, 1, 2, 1, 2)$ i $(\emptyset, 1, 11, 1, 2)$. Ranije smo naveli kako šetnje tipa G^ℓ možemo prikazati pomoću standardnih Youngovih tablica. Dakle, vrijedi $\alpha(G^\ell, \mu) = f^\mu$ pa je broj Hasseovih šetnji u Y koje su tipa $D^\ell G^\ell$, započinju u praznoj particiji \emptyset , penju se do particije $\mu \vdash \ell$ i potom vraćaju do \emptyset jednak $(f^\mu)^2$. Iz tog razloga, imamo

$$\alpha(D^\ell G^\ell, \emptyset) = \sum_{\mu \vdash \ell} (f^\mu)^2.$$

U narednoj propoziciji dan je nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju proizvoljne Hasseove šetnje tipa w od prazne particije \emptyset do particije μ .

Propozicija 3.6. Za $i = 1, \dots, k$, neka su $a_i, b_i \geq 0$ prirodni brojevi takvi da je $w = D^{b_k} G^{a_k} \dots D^{b_2} G^{a_2} D^{b_1} G^{a_1}$ i neka je $\mu \vdash \ell$. Tada postoji Hasseova šetnja tipa w od \emptyset do μ ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^k (a_i - b_i) = \ell, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^j (a_i - b_i) \geq 0, \quad \text{za } j = 1, \dots, k. \quad (17)$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji Hasseova šetnja tipa w od \emptyset do μ . Budući da pomakom tipa G prelazimo na veću, a pomakom tipa D na manju razinu Youngove rešetke, jasno je da je $\sum_{i=1}^k (a_i - b_i)$ razina na kojoj završava šetnja tipa w koja započinje u \emptyset . Dakle, $\sum_{i=1}^k (a_i - b_i) = |\mu| = \ell$.

Nakon $\sum_{i=1}^j (a_i + b_i)$ pomaka šetnje w , nalazimo se na razini $\sum_{i=1}^j (a_i - b_i)$. Budući da je najmanja razina Youngove rešetke 0, slijedi da je za $j = 1, \dots, k$ $\sum_{i=1}^j (a_i - b_i) \geq 0$.

Obratno, pretpostavimo da vrijede svojstva (16) i (17). Neka je G^ℓ šetnja od \emptyset do μ . Svaki niz koraka G^p kojim neka šetnja od \emptyset do μ završava moguće je zamijeniti nizom koraka tipa $G^t D^s G^r$ tako da je $r - s + t = p$, pri čemu je $r - s \geq 0$. Na taj način moguće je konstruirati šetnju tipa $D^{b_k} G^{a_k} \dots D^{b_2} G^{a_2} D^{b_1} G^{a_1}$. Zbog svojstva (16) to je šetnja upravo od \emptyset do μ , a zbog svojstva (17) doista se radi o Hasseovoj šetnji, odnosno ni u kojem koraku šetnje ne spuštamo se ispod nulte razine $Y_0 = \{\emptyset\}$. \square

Ukoliko je w riječ nad abecedom $\{G, D\}$ koja zadovoljava svojstva (16) i (17), tada kažemo da je w valjana μ -riječ. U nastavku ćemo odrediti eksplisitu formulu za računanje $\alpha(w, \mu)$. Prije toga, definirat ćemo linearne transformacije koje će opravdati obrnuti poredak prilikom označavanja tipa šetnji.

Neka je S konačan skup. Uvodimo $\mathbb{R}S$ kao oznaku za realan vektorski prostor koji se sastoji od svih formalnih linearnih kombinacija (s realnim koeficijentima) elemenata skupa S . Dakle, skup S je baza prostora $\mathbb{R}S$. Neka je sada $\mathbb{R}Y_j$ realan vektorski prostor s bazom $Y_j \subseteq Y$. Za sve $\mu \vdash i$ definiramo linearne transformacije $G_i: \mathbb{R}Y_i \rightarrow \mathbb{R}Y_{i+1}$ i $D_i: \mathbb{R}Y_i \rightarrow \mathbb{R}Y_{i-1}$ s

$$G_i(\mu) = \sum_{\lambda \vdash i+1, \mu < \lambda} \lambda \quad (18)$$

$$D_i(\mu) = \sum_{\omega \vdash i-1, \omega < \mu} \omega. \quad (19)$$

Primjer 3.7. Neka je $\mu = (6, 6, 4, 3, 3, 1, 1, 1) \vdash 25$. Tada je

$$G_{25}(\mu) = 76433111 + 66533111 + 66443111 + 66433211 + 66433111,$$

$$D_{25}(\mu) = 65433111 + 66333111 + 66432111 + 6643311.$$

Ako je m broj različitih dijelova particije $\mu \vdash n$, tada iz propozicije 1.11 slijedi da se $G_n(\mu)$ sastoji od $m + 1$, a $D_n(\mu)$ od m sumanada.

Sada navodimo lemu potrebnu za dokaz teorema u kojem je dana eksplisitna formula za računanje $\alpha(w, \mu)$.

Lema 3.8. Neka je $i \geq 0$. Vrijedi

$$D_{i+1}G_i - G_{i-1}D_i = I_i, \quad (20)$$

gdje je I_i identiteta na prostoru $\mathbb{R}Y_i$.

Dokaz. Označimo operator na lijevoj strani jednakosti (20) s L_i . Neka je $\mu \vdash i$ particija. Primijenimo L_i na μ i nakon toga primijenimo linearnost operatora. Promotrimo skalar uz particiju λ . Neka je $\lambda \neq \mu$. Ako λ možemo dobiti iz μ dodavanjem jednog kvadratića s particiji μ , odnosno njenom Youngovom dijagramu, a potom uklanjanjem (zbog $\lambda \neq \mu$ nužno različitog) kvadratića t , time su kvadratići s i t jedinstveno određeni. Dakle, skalar uz particiju λ u izrazu $D_{i+1}G_i(\mu)$ jednak je 1. U tom slučaju postoji točno jedan način za ukloniti kvadratić particije μ i potom dodati njemu različit kvadratić tako da se dobije particija λ . Preciznije, potrebno je ukloniti kvadratić t i dodati kvadratić s , stoga je skalar uz particiju λ u izrazu $G_{i-1}D_i(\mu)$ također jednak 1. Dakle, nakon primjene operatora L_i na particiju μ , skalar uz particiju λ jednak je 0.

Neka je opet $\lambda \neq \mu$. Ako λ ne možemo dobiti iz μ dodavanjem i uklanjanjem jednog kvadratića, to znači da se λ i μ razlikuju u više od jednog retka. U tom slučaju primjenom operatora L_i na particiju μ dobivamo da je skalar uz particiju λ jednak 0.

Neka je sada $\lambda = \mu$ i neka je m broj različitih dijelova particije μ . Kao što smo već ranije ustanovili, postoji $m + 1$ načina za dodati i potom ukloniti isti kvadratić particije μ te m načina za učiniti isto, samo u obrnutom redosljedu. Dakle, skalar uz particiju λ u izrazu $D_{i+1}G_i(\mu)$ jednak je $m + 1$, a u izrazu $G_{i-1}D_i(\mu)$ jednak je m . Slijedi da je, kada primijenimo operator L_i na particiju μ , skalar uz particiju λ jednak 1.

Ukupno, imamo $L_i = I_i$, što je i trebalo dokazati. \square

Teorem 3.9. Neka je μ particija i neka je $w = A_\ell A_{\ell-1} \dots A_1$ valjana μ -riječ nad abecedom $\{G, D\}$. Neka je $\mathcal{I}_w = \{i : A_i = D\}$. Za $i \in \mathcal{I}_w$ označimo s d_i broj

pojavljivanja slova 'D' u riječi w desno od slova A_i , a s g_i broj pojavljivanja slova 'G' u riječi w desno od slova A_i . Dakle, $g_i - d_i$ je razina u Y na kojoj se nalazimo neposredno prije pomaka $A_i = D$. Tada je

$$\alpha(w, \mu) = f^\mu \prod_{i \in \mathcal{I}_w} (g_i - d_i). \quad (21)$$

Dokaz. U svrhu jednostavnije notacije izostavljat ćemo indekse iz oznaka za linearne transformacije definirane s (18) i (19). Naime, indeksi su jednoznačno određeni elementima na koje transformacije G i D djeluju. Na primjer, za $\mu \vdash i$, izraz $DGGD(\mu)$ je zapravo pokratak za $D_{i+1}G_iG_{i-1}D_i(\mu)$.

Prema lemi 3.8, podriječ DG proizvoljne riječi x koja se sastoji od slova G i D moguće je zamijeniti s $GD+I$. Na primjer, zamijenimo li prvo pojavljivanje podriječi DG u riječi $GDGGDGDD$ s $GD+I$, dobivamo $GGDGDGDD+GGDGDD$. Krenimo od riječi w i ponavljajmo postupak zamjene DG u svakoj riječi s $GD+I$, sve dok takve podriječi DG postoje. Na kraju za svaku dobivenu riječ vrijedi da je oblika G^iD^j te da je riječ w linearna kombinacija takvih riječi. Uočimo da se zamjenom DG s $GD+I$ ne mijenja razlika između broja slova G i D , odnosno riječi G^iD^j koje se pojavljuju u linearnoj kombinaciji imaju fiksnu razliku $i-j$ jednaku ukupnom broju slova G u riječi w umanjenoj za broj slova D u riječi w . Neka je

$$w = \sum_{i-j=n} c_{ij}(w)G^iD^j, \quad (22)$$

gdje je $c_{ij}(w) \in \mathbb{Z}$. Za $i < 0$ ili $j < 0$ postavimo $c_{ij}(w) := 0$. Pokažimo da su koeficijenti $c_{ij}(w)$ jedinstveni. Pretpostavimo suprotno, da postoje $d_{ij}(w)$ koji čine još jedan niz koeficijenata za koje vrijedi $w = \sum_{i-j=n} d_{ij}(w)G^iD^j$. Tada dobivamo

$$\sum_{i-j=n} (c_{ij}(w) - d_{ij}(w))G^iD^j = 0. \quad (23)$$

Označimo $e_{ij}(w) := c_{ij}(w) - d_{ij}(w)$ i pretpostavimo da postoje k i l takvi da je $e_{kl}(w) \neq 0$. Neka je l' najmanji broj za koji je $e_{l'+n, l'} \neq 0$ i neka je $\lambda \vdash l'$. Primijenimo obje strane jednakosti (23) na λ . Lijeva strana svede se samo na sumand za koji je $j = l'$, a desna strana jednaka je 0, što je kontradiktorno. Dakle, koeficijenti $c_{ij}(w)$ su jedinstveni.

Primijenimo sada slijeva operator G na jednakost (22). Dobivamo

$$Gw = \sum_{i-j=n} c_{ij}G^{i+1}D^j.$$

Iz jedinstvenosti koeficijenata c_{ij} slijedi

$$c_{ij}(Gw) = c_{i-1, j}(w). \quad (24)$$

Pokažimo sada matematičkom indukcijom da vrijedi jednakost

$$DG^i = G^i D + iG^{i-1}. \quad (25)$$

Postavimo li $G^{-1} = 0$ te $G^0 = I$, lako se provjeri da jednakost (25) vrijedi za $i = 0, 1$. Pretpostavimo da jednakost vrijedi za neki $p \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned} DG^{p+1} &= DG^p G \\ &= (G^p D + pG^{p-1})G \\ &= G^p DG + pG^p \\ &= G^p(GD + I) + pG^p \\ &= G^{p+1}D + G^p + pG^p \\ &= G^{p+1}D + (p+1)G^p \end{aligned}$$

Dakle, jednakost (25) vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Primijenimo li slijeva operator D na jednakost (22), korištenjem jednakosti (25) dobivamo

$$\begin{aligned} Dw &= \sum_{i-j=n} c_{ij}(w) DG^i D^j \\ &= \sum_{i-j=n} c_{ij}(w) (G^i D + iG^{i-1}) D^j, \end{aligned}$$

iz čega opet zbog jedinstvenosti koeficijenata c_{ij} slijedi

$$c_{ij}(Dw) = c_{i,j-1}(w) + (i+1)c_{i+1,j}(w). \quad (26)$$

Uvrstimo li $j = 0$ u (24) i (26), dobivamo

$$c_{i0}(Gw) = c_{i-1,0}(w), \quad (27)$$

$$c_{i0}(Dw) = (i+1)c_{i+1,0}(w). \quad (28)$$

Primijenimo sada obje strane jednakosti (22) na \emptyset . Budući da za sve $j > 0$ vrijedi $D^j(\emptyset) = 0$, imamo $w(\emptyset) = c_{n0}(w)G^n$, stoga je koeficijent uz μ u $w(\emptyset)$ dan s

$$\alpha(w, \mu) = c_{n0}(w)\alpha(G^n, \mu) = c_{n0}(w)f^\mu,$$

pri čemu vrijedi $\mu \vdash n$. Iz jednakosti (27) i (28) slijedi

$$c_{n0}(w) = \prod_{i \in \mathcal{I}_w} (g_i - d_i),$$

stoga vrijedi tvrdnja teorema. □

Primjer 3.10. Neka su $\mu = (4, 4, 3)$ i $w = G^3 DG^6 D^2 G^5$. Tada je w valjana μ -riječ nad abecedom $\{G, D\}$ te vrijedi $\mathcal{I}_w = \{6, 7, 14\}$ i $d_6 = 0, g_6 = 5, d_7 = 1, g_7 = 5, d_{14} = 2, g_{14} = 11$. Korištenjem teorema 3.4 ranije smo izračunali $f^{(4,4,3)} = 462$. Prema teoremu 3.9 imamo

$$\alpha(w, \mu) = 462 \cdot (5 - 0) \cdot (5 - 1) \cdot (11 - 2) = 83160.$$

Slijedi zanimljiva činjenica kao posljedica teorema 3.9.

Korolar 3.11. Vrijedi

$$\alpha(D^\ell G^\ell, \emptyset) = \sum_{\mu \vdash \ell} (f^\mu)^2 = \ell!.$$

Dokaz. Za valjanu μ -riječ $w = D^\ell G^\ell$, skup \mathcal{I}_w iz teorema 3.9 jednak je skupu $\{\ell+1, \ell+2, \dots, 2\ell\}$. Također, za sve $i \in \mathcal{I}_w$ vrijedi $d_i = i - \ell - 1$ te $g_i = \ell$. Uzmemo li u obzir da je $f^\emptyset = 1$, uvrštavanjem u formulu (21) slijedi tvrdnja. \square

Kao važnu posljedicu teorema 3.9, odnosno korolara 3.11 imamo da je skup svih permutacija ℓ -članog skupa ekvipotentan sa skupom Hasseovih šetnji u Y koje su tipa $D^\ell G^\ell$, započinju u praznoj particiji \emptyset , penju se do particije $\mu \vdash \ell$ i potom vraćaju do \emptyset .

3.2 Algoritam RSK

U nastavku poglavlja dat ćemo bijekciju između skupa svih permutacija n -članog skupa, u oznaci S_n i skupa svih uređenih parova (P, Q) standardnih Youngovih tablica koje su istog oblika $\mu \vdash n$. To ćemo učiniti na način da definiramo poseban algoritam i njemu inverzni algoritam. Definiramo *parcijalnu Youngovu tablicu* (eng. *near Young tableau (NYT)*) kao standardnu Youngovu tablicu čije su oznake unutar kvadratića proizvoljni brojevi iz skupa \mathbb{N}^+ , a ne samo brojevi iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Za standardnu Youngovu tablicu P , neka je P_{ij} oznaka unutar kvadratića u i -tom retku te j -tom stupcu tablice P . Naziv algoritma koji ćemo iskoristiti za dokaz već spomenute ekvipotentnosti je RSK. Taj naziv dolazi od početnih slova prezimena Gilberta de Beauregard Robinsona, Craigea Schensteda i Donalda Knutha koji su zaslužni za njegov razvoj. Osnovna operacija algoritma RSK sastoji se od *retčanog umetanja* $P \leftarrow k$ prirodnog broja k u tablicu $P = (P_{ij})$. Retčano umetanje $P \leftarrow k$ definirano je na sljedeći način: neka je l najmanji indeks takav da je $P_{1l} > k$. Ako takav l ne postoji, odnosno svi elementi prvog retka tablice P su manji od k , onda k postavimo na kraj prvog retka. Postupak retčanog umetanja staje i kao rezultat imamo tablicu $P \leftarrow k$. Međutim, ako indeks l postoji, onda zamijenimo P_{1l} s k . Nakon toga na opisan način primijenimo umetanje

elementa P_{1l} u drugi redak tablice P . Na ovaj način nastavljamo postupak sve dok neki element nije umetnut na kraj nekog retka. Moguće je da postupak staje tek kad se neki element umetne kao prvi element novog retka tablice P . Nakon opisanog retčanog umetanja, novu tablicu označavamo s $P \leftarrow k$.

Primjer 3.12. *Neka je parcijalna Youngova tablica P dana s*

$$P = \begin{array}{cccccc} & 1 & 6 & 10 & 18 & 20 \\ & 2 & 7 & 21 & & \\ & 3 & 8 & 22 & & \\ & 5 & 11 & & & \\ & 14 & & & & \end{array} .$$

Tada je tablica $P \leftarrow 17$ prikazana u nastavku, pri čemu su novi elementi unutar pojedinih redaka boldirani:

$$(P \leftarrow 17) = \begin{array}{cccccc} & 1 & 6 & 10 & \mathbf{17} & 20 \\ & 2 & 7 & \mathbf{18} & & \\ & 3 & 8 & \mathbf{21} & & \\ & 5 & 11 & \mathbf{22} & & \\ & 14 & & & & \end{array} .$$

Lako se dokaže da retčanim umetanjem u parcijalnu Youngovu tablicu također nastaje parcijalna Youngova tablica. Opišimo sada korake algoritma *RSK*. Neka je $\pi = a_1 a_2 \dots a_n \in S_n$ proizvoljna permutacija n -članog skupa. Induktivno konstruirajmo niz $(P_0, Q_0), (P_1, Q_1), \dots, (P_n, Q_n)$ parova (P_i, Q_i) parcijalnih Youngovih tablica koje su istog oblika, pri čemu tablice P_i i Q_i sadrže i kvadratića. Prvo definiramo $(P_0, Q_0) := (\emptyset, \emptyset)$. Ako je par (P_{i-1}, Q_{i-1}) definiran, tada postavimo $P_i := (P_{i-1} \leftarrow a_i)$. Dakle, tablicu P_i dobivamo iz P_{i-1} retčanim umetanjem broja a_i . Tablicu Q_i konstruiramo iz Q_{i-1} umetanjem broja i na način da su tablice Q_i i P_i istog oblika. Broj i je očito veći od svih brojeva unutar kvadratića tablice Q_{i-1} , stoga će redak i stupac u koji ga umetnemo ostati rastići. Označimo $(P, Q) := (P_n, Q_n)$. Činjenicu da iz permutacije π na opisan način dobivamo par (P, Q) označavamo s $\pi \xrightarrow{RSK} (P, Q)$.

Primjer 3.13. Neka je $\pi = 72835641 \in S_8$. Tada su parovi $(P_1, Q_1), \dots, (P_8, Q_8)$ dani sljedećom tablicom:

i	P_i	Q_i
1	7	1
2	2 7	1 2
3	2 8 7	1 3 2
4	2 3 7 8	1 3 2 4
5	2 3 5 7 8	1 3 5 2 4
6	2 3 5 6 7 8	1 3 5 6 2 4
7	2 3 4 6 5 8 7	1 3 5 6 2 4 7
8	1 3 4 6 2 8 5 7	1 3 5 6 2 4 7 8

Teorem 3.14. Algoritam RSK daje bijekciju između simetrične grupe S_n i skupa svih parova (P, Q) standardnih Youngovih tablica istog oblika μ , pri čemu je $\mu \vdash n$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da postoji inverz algoritma RSK. Dakle, Za proizvoljan par (P, Q) potrebno je odrediti jedinstvenu permutaciju π takvu da vrijedi $\pi \xrightarrow{RSK} (P, Q)$.

Kvadratić tablice Q označen brojem n je posljednje dodan kvadratić tijekom izvršavanja algoritma RSK. Neka je r oznaka kvadratića na istom mjestu u tablici P . Element r je ili dodan direktno na kraj prvog retka, ili je na ovo mjesto tijekom retčanog umetanja poguran od strane nekog elementa s iz retka iznad elementa r . Ako je poguran od strane elementa s , po načinu na koji je retčano umetanje definirano znamo da je s najveći element svog retka manji od r . Dakle, možemo napraviti inverz ovog retčanog umetanja, odnosno pogurati r u redak iznad na mjesto na kojem se nalazi s , a potom na isti način pogurati s u redak iznad. Nakon konačno koraka pogurat ćemo

neki element u prvi redak tablice, a on će iz tablice izbaciti neki element t . Na ovaj način dobivamo da je element t bio posljednje umetnuti element u tablicu P . Dakle, ako je $\pi = a_1 a_2 \dots a_n$, onda je $a_n = t$.

Opisani postupak primijenimo na mjesto na kojem se u tablici Q nalazi kvadratić označen brojem $n - 1$, dobivajući tako element a_{n-1} . Postupak ponavljamo dalje i na taj način iz zadanog para (P, Q) konstruiramo jedinstvenu permutaciju π za koju vrijedi $\pi \xrightarrow{RSK} (P, Q)$. \square

Uočimo da je algoritmom RSK i njemu inverznim algoritmom dan alternativni dokaz korolara 3.11

Literatura

- [1] P. J. Cameron, *Enumerative Combinatorics, The LTCC lectures*, 2013., dostupno na:
<https://cameroncounts.files.wordpress.com/2013/12/ec.pdf>
(siječanj 2024.)
- [2] H. Cohn, *Projective Geometry over \mathbb{F}_1 and the Gaussian Binomial Coefficients*, dostupno na:
<https://arxiv.org/pdf/math/0407093.pdf> (prosinac 2023.)
- [3] B. Ek, *Unimodal polynomials and lattice walk enumeration with experimental mathematics*, dostupno na:
<https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/Theses/BryanEkThesis.pdf> (prosinac 2023.)
- [4] C. Greene, A. Nijenhuis, H. S. Wilf, *A Probabilistic Proof of a Formula for the Number of Young Tableaux of a Given Shape*, *Adv. Math.* 31 (1979.), 104–109, dostupno na:
<https://www2.math.upenn.edu/~wilf/website/Probabilistic%20proof.pdf> (veljača 2024.)
- [5] D. Jagetić, *q-analogoni kombinatoričkih brojeva i identiteta*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2015., dostupno na:
<https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:492625> (veljača 2024.)
- [6] V. Kac, P. Cheung, *Quantum Calculus*, Springer, 2002., dostupno na:
https://cdn.preterhuman.net/texts/math/quantum_calculus.pdf (veljača 2024.)
- [7] V. Krčadinac, *Kombinatorika*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2024., dostupno na:
<https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/komb/komb-skripta.pdf> (siječanj 2024.)
- [8] D. Mujkić, *Reprezentacije konačnih grupa s primjenama na simetričnu grupu*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 1994.
- [9] I. Nakić, *Diskretna matematika*, predavanja ak. god. 2011./2012., Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, dostupno na:
<https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf> (veljača 2024.)

- [10] R. P. Stanley, *Algebraic Combinatorics. Walks, Trees, Tableaux, and More. Second edition*, Springer, 2018.
- [11] L. Székely, *q-combinatorics*, dostupno na:
<https://people.math.sc.edu/laszlo/Qcomb.pdf> (prosinac 2023.)
- [12] Wikipedia, *Group action*, dostupno na:
https://en.wikipedia.org/wiki/Group_action (siječanj 2024 .)
- [13] Wikipedia, *Young's lattice*, dostupno na:
https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_lattice (prosinac 2023.)

Sažetak

Ovaj rad bavi se područjem algebarske kombinatorike. Točnije, fokus je usmjeren na Youngovu rešetku, odnosno skup particija prirodnih brojeva zajedno s odgovarajućim parcijalnim uređajem. U radu su predstavljeni Youngovi dijagrami kojima se prikazuju particije prirodnih brojeva te se proučavaju posebni podskupovi skupa particija i njihova svojstva. Korištenjem koncepta q -binomnih koeficijenata istražuju se neka svojstva Youngove rešetke. Razmatraju se brojna svojstva i rekurzivne relacije koje zadovoljavaju q -binomni koeficijenti, uključujući simetriju i unimodalnost, a dane su i mnoge kombinatorne interpretacije q -binomnih koeficijenata. Također, istražuju se Hasseove šetnje u Youngovoj rešetki čija važnost leži u tome što je skup svih permutacija konačnog skupa ekvipotentan sa specifičnim podskupom skupa Hasseovih šetnji. Koncept koji se nadovezuje na Youngovu rešetku su Youngove tablice, važan alat u teoriji reprezentacija simetrične grupe. U radu je također opisan algoritam RSK koji uspostavlja bijekciju između permutacija konačnog skupa i uređenih parova standardnih Youngovih tablica istog oblika.

Summary

The area of interest in this thesis is algebraic combinatorics. The focus is directed towards the analysis of Young's lattice, that is, the set of partitions of natural numbers together with the corresponding partial order. In the thesis, Young's diagrams which represent partitions of natural numbers are presented and special subsets of the set of partitions and their properties are studied. Using the concept of q -binomial coefficients, some properties of Young's lattice are investigated. Numerous properties and recursive relations for q -binomial coefficients are discussed, including symmetry and unimodality, and many combinatorial interpretations of q -binomial coefficients are given. Also, Hasse walks in Young's lattice are discussed. The importance of Hasse walks lies in the fact that the set of all permutations of a finite set is equipotent with a specific subset of the set of Hasse walks. A concept related are Young tableaux, an important tool in the representation theory of the symmetric group. The thesis also gives a description of the RSK algorithm that establishes a bijection between permutations of a finite set and pairs of standard Young tableau of the same form.

Životopis

Rođen sam u srpnju 1998. godine. Odrastao sam u Kutini gdje sam završio osnovnu školu nakon koje upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju, također u Kutini. Po završetku gimnazije upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon stjecanja prvostupničke diplome nastavljam s diplomskim studijem Računarstva i matematike na istom fakultetu. Od 2022. godine radim kao programer u zagrebačkoj tvrtki u odjelu za razvoj softvera.