Aksiomatizacije i modeli teorije NFU

Adlešić, Tin

Doctoral thesis / Doktorski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:800738

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-22**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tin Adlešić

Aksiomatizacije i modeli teorije NFU

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2024.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tin Adlešić

Aksiomatizacije i modeli teorije NFU

DOKTORSKI RAD

Mentori:

izv. prof. dr. sc. Tin Perkov

doc. dr. sc. Vedran Čačić

Zagreb, 2024.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Tin Adlešić

Axiomatizations and models of theory NFU

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisors:
assoc. prof. Tin Perkov
assist. prof. Vedran Čačić

Zagreb, 2024.

Baki Dragici i dedi Zlatku

ZAHVALE

Zahvaljujem mentorima Vedranu Čačiću i Tinu Perkovu na pomoći pri izradi ove disertacije.

Sažetak

Glavna tema disertacije je Quineova teorija skupova s atomima (NFU), koja se može smatrati vrstom teorije tipova. Disertacija je podijeljena na dva dijela.

U prvom dijelu strogo formaliziramo sintaksu te razvijamo teoriju NFU. Zatim prikazujemo teoriju kardinalnih brojeva koristeći uređene parove Kuratowskog. Najvažniji doprinos ovog dijela je dokaz principa kardinalnog kvadriranja. Pomoću njega definiramo tipski ujednačene uređene parove te prezentiramo alternativnu aksiomatizaciju teorije NFU. Nakon toga, uvodimo osnove teorije ordinalnih brojeva u alternativnoj aksiomatizaciji i nastavljamo razvoj kardinalnih brojeva.

Drugi dio prikazuje Boffinu konstrukciju modela teorije NFU pomoću modela Zermelo–Fraenkelove teorije skupova. Dokazujemo da Boffina konstrukcija zaista definira model teorije NFU, te zatim konstuiramo modele teorije NFU s aksiomom beskonačnosti te teorije NFU s aksiomom izbora. Na kraju pokazujemo kako konstruirati model teorije NFU s aksiomima beskonačnosti i izbora, a onda posljedično i alternativne aksiomatizacije.

Ključne riječi: teorija skupova, Quineova teorija, teorija modela

SUMMARY

The main topic of this dissertation is Quine's set theory with atoms (NFU), which can be regarded as a form of type theory. The dissertation is divided into two parts.

In the first part, we rigorously formalize the syntax and develop the theory NFU. Then we develop the theory of cardinal numbers, using Kuratowski's ordered pairs. The main contribution of this part is a proof of the cardinal squaring principle. Using it, we define type-level ordered pairs and present the alternative axiomatic extension of NFU. After that, we introduce the basic concepts of ordinal numbers in the alternative axiomatization and continue to develop the theory of cardinal numbers.

The second part is the exposition of Boffa's construction of a model for NFU, using the model of Zermelo–Fraenkel's set theory. We show that Boffa's construction yields a model for NFU and we then construct a model for NFU with the axiom of infinity and NFU with the axiom of choice. In the end, we show how to construct a model for NFU with both the axiom of infinity and choice and then consequently for the alternative axiomatization.

Keywords: set theory, Quine's theory, model theory

Sadržaj

UVOD

Quineova teorija skupova *New Foundations*[1] popularno se opisuje kao alternativna teorija skupova. Iako riječ „alternativno" povlači za sobom brojne negativne konotacije, ona u ovom slučaju ima svoje stvarno, nemetaforičko značenje. Quineova teorija nije i ne pretendira biti nešto što će zamijeniti Zermelo–Fraenkelovu teoriju skupova. Ona je samo drugi, drugačiji pristup donekle poznatoj temi.

Razloga za proučavanje Quineove teorije ima nekoliko. Prvi i osnovni je, dakako, znatiželja. Iako je znatiželja daleko najvažnija komponenta bilo kakvog znanstvenog istraživanja, u isto vrijeme je i najneodređenija. Drugi razlog je osjećaj da je Zermelo–Fraenkelova teorija gotovo u potpunosti zaokružena cjelina. U njoj čak i neočekivani rezultati bivaju očekivani. Ovakvu hrabru izjavu ipak treba uzeti s velikom dozom opreza jer je uvijek moguće da se iz najmanje nepodudarnosti razvije nešto novo i revolucionarno. Treći razlog je pokušaj razumijevanja zašto je Quineova teorija zapravo alternativna. Drugim riječima, zašto ona nije postigla odgovarajući stupanj sigurnosti i privlačnosti poput Zermelo–Fraenkelove. Naposljetku postoji i četvrti razlog, usko povezan s trećim; kako je moguće Quineovu teoriju približiti standardnoj teoriji skupova te na koji način je njenim proučavanjem moguće obogatiti korpus matematičkog znanja? Navedena četiri razloga, iako subjektivna po naravi, ipak imaju objektivnu komponentu.

Motivacija za proučavanje Quineove teorije je i matematička i filozofska. Matematička motivacija potaknuta je željom za istraživanjem teorije skupova (uz Zermelo–Fraenkelovu) koja je dovoljno ekspresivna da se unutar nje može razviti cijela današnja matematika. To zapravo nije moguće napraviti u originalnoj Quineovoj teoriji, ali postaje moguće ako se u teoriju dodaju atomi te se ona još proširi aksiomima beskonačnosti i izbora. S filozofske strane Quineova teorija je interesantna jer je zasnovana na Russell–Whiteheadovoj teoriji tipova, a usko je vezana i uz Zermelovu aksiomatiku. Najvažnije, Quineova teorija je teorija skupova najbliža logicis-

[1] Hrv. Novi temelji.

tičkom idealu.

Sadržaj

Glavna teorija koju proučavamo u disertaciji je Quineova teorija skupova s atomima. Sama disertacija je podijeljena na pet poglavlja.

Prvo i drugo poglavlje dva su najvažnija poglavlja cijele disertacije. U prvom poglavlju uvodimo osnovne metateorijske i teorijske rezultate Quineove teorije s atomima te dokazujemo neke važne općenite rezultate.[2] U drugom poglavlju razvijamo teoriju kardinalnih brojeva. Najvažniji rezultat ovog dijela disertacije je *princip kardinalnog kvadriranja*.

U trećem poglavlju iznosimo alternativno aksiomatsko proširenje Quineove teorije s atomima u cilju rješavanja problema uređenih parova. Nakon toga prikazujemo razvoj teorije ordinalnih brojeva, a također nastavljamo i završavamo prikaz teorije kardinalnih brojeva, koristeći tipski ujednačene uređene parove.

U četvrtom poglavlju dokazujemo konzistentnost Quineove teorije s atomima pomoću Boffine konstrukcije modela. Boffin model definira se pomoću modela Zermelo–Fraenkelove teorije skupova, stoga ukratko prikazujemo i tu teoriju.

Na kraju u zaključku rekapituliramo sve do tada rečeno i navodimo neke teme za daljnje proučavanje teorije.

Kako bi praćenje bilo olakšano, u dodatku A uvodimo osnove matematičke logike. To nikako nije sveoubhvatni prikaz, ali je potencijalno dobar uvod za svakoga tko se želi informirati o nekoj teoriji skupova, a nije dovoljno upoznat s matematičkom logikom. U dodatku B prikazana je povijest teorije skupova od samih njenih početaka do otkrića Quineove teorije.

[2] Veći dio sintaksnog dijela ovog poglavlja objavljen je u [2].

1. TEORIJA NFU

Teorija NFU je teorija skupova, formalizirana kao teorija prvog reda. Pretpostavljamo upoznatost s pojmovima i oznakama iz logike prvog reda, a više o tome može se pronaći u [17] i [58]. Detaljnije o teoriji modela može se pronaći u [10].

Signatura teorije skupova ne sadrži konstantske i funkcijske simbole, a od relacijskih sadrži dvomjesne relacijske simbole $=$, $\in$ i jednomjesni relacijski simbol *set*. Relacijski simboli $=$ i $\in$ interpretiraju se na uobičajeni način, a interpretacija relacijskog simbola *set* je predikat koji označava da je neki objekt skup. Termi u teoriji skupova su isključivo individualne varijable, no jezik možemo proširiti (što i radimo) odgovarajućim konstantskim i funkcijskim simbolima, pa tako dobivamo i ostale vrste terma. Ta proširenja jezika shvaćamo jednostavno kao pokrate. Nadalje, svaki term koji nije varijabla je zapravo apstrakcijski term oblika $\{z \mid \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$, ali uz određena ograničenja.

U ovom poglavlju uvodimo osnove sintakse i semantike teorije NFU. Za potrebe iskaza i dokaza tvrdnji o tipizacijama, uvodimo novi pojam **povezanosti formule**. Nakon uvođenja aksioma teorije NFU, definiramo apstrakcijske terme, koji nam olakšavaju razvoj teorije. Budući da u teoriji NFU samo stratificirane formule definiraju skupove, nužno je zadati pravila pridruživanja tipova apstrakcijskim termima, pri čemu tako proširene tipizacije moraju čuvati svojstvo stratificiranosti nakon eliminacije apstrakcijskih terma. Nadalje, uvodimo osnovne skupove i skupovne operacije teorije NFU, a na kraju uvodimo aksiom izbora.

1.1. STRATIFIKACIJA

Jedan od najvažnijih pojmova teorije NFU, koji je izdvaja od većine ostalih teorija skupova, je pojam stratifikacije.

Definicija 1.1. Neka je φ formula. Kažemo da je φ **stratificirana** ako postoji preslikavanje tp_φ s varijabli od φ u pozitivne prirodne brojeve, takvo da za svaku potformulu od φ oblika $x = y$

vrijedi $tp_\varphi(x) = tp_\varphi(y)$, a za svaku potformulu od φ oblika $x \in y$ vrijedi $tp_\varphi(y) = tp_\varphi(x) + 1$. Broj $tp_\varphi(x)$ zovemo **tip** varijable x u formuli φ, a preslikavanje tp_φ koje zadovoljava navedene uvjete zovemo **tipizacija** formule φ.

Spomenute uvjete na tipizaciju tp_φ još nazivamo **uvjetima stratifikacije** (za formulu φ). Dakle, formula je stratificirana ako za nju postoji preslikavanje koje zadovoljava uvjete stratifikacije. Kada utvrđujemo da je neka formula stratificirana, pridružene tipove ćemo pisati ponad varijabli poput eksponenata (npr x^4). Iz definicije odmah slijedi da je svaka potformula stratificirane formule također stratificirana.

Definicija 1.2. Neka je φ formula. Definiramo uređaj na tipizacijama formule φ na sljedeći način:

$$tp_\varphi \leq tp'_\varphi :\Leftrightarrow (\forall x \in Var\ \varphi)\big(tp_\varphi(x) \leq tp'_\varphi(x)\big).$$

Budući da će nam kasnije biti potrebno da svaki tip ima prethodnika, korisno je omogućiti da tipizacija tp poprima i negativne (cijele) brojeve. Time se ne mijenja pojam stratificirane formule.

Teorem 1.3. Ako je φ stratificirana formula i tp_φ njena tipizacija (koja može poprimati i negativne cijele brojeve), onda za svaki cijeli broj k, preslikavanje $tp_\varphi + k$ također zadovoljava uvjete stratifikacije.

Dokaz. Neka je k proizvoljni cijeli broj, φ stratificirana formula i tp_φ preslikavanje koje zadovoljava uvjete stratifikacije. Ako je $x = y$ potformula od φ, tada po pretpostavci vrijedi $tp_\varphi(x) = tp_\varphi(y)$. No tada je očito i $tp_\varphi(x) + k = tp_\varphi(y) + k$. Ako je $x \in y$ potformula od φ, tada po pretpostavci vrijedi $tp_\varphi(y) = tp_\varphi(x) + 1$. Tada također vrijedi $tp_\varphi(y) + k = \big(tp_\varphi(x) + k\big) + 1$. Dakle, preslikavanje $tp_\varphi + k$ zadovoljava uvjete stratifikacije. ∎

Iz teorema 1.3 slijedi da tipove varijabli možemo promatrati samo kao prirodne brojeve veće od nule, jer negativne tipove (ako su dozvoljeni) lako primjenom tog teorema povećamo za odgovarajući k tako da svi tipovi budu pozitivni. Također, zbog istog teorema možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je najmanji tip varijable u svakoj formuli upravo 1. Tipovi koje pišemo ponad varijabli uvijek će biti pozitivni prirodni brojevi.

Intuitivno je jasno da je moguće svakoj stratificiranoj formuli odrediti najmanju tipizaciju s obzirom na definiciju 1.2, a u nastavku tu tvrdnju i dokazujemo. Štoviše, pokazat ćemo kako iz bilo koje tipizacije konstruirati najmanju.

Definicija 1.4. Neka je φ formula. Kažemo da su varijable x i y iz $Var\ \varphi$ **1-povezane**, i pišemo $x \parallel^1 y$, ako je atomarna formula $x \in y$ ili $x = y$ potformula od φ.

Relaciju $\parallel^1$ proširujemo do najmanje relacije ekvivalencije $\parallel$ koja je sadrži. Ako vrijedi $x \parallel y$, tada kažemo da su x i y **povezane**.

Definicija 1.5. Za formulu φ kažemo da je **povezana** ako su sve njezine varijable povezane.

Budući da je $\parallel$ relacija ekvivalencije na $Var\ \varphi$, ona čini particiju varijabli formule φ na blokove, koje zovemo **blokovima povezanosti**: $Var\ \varphi = \bigcup_{i=1}^{t} B_i$. Varijable iz različitih blokova nisu povezane, pa tipovi iz jednog bloka nemaju utjecaja na tipove varijabli iz drugih blokova. Stoga je dovoljno tipizacije zadavati na pojedinim blokovima povezanosti. Primijetimo da povezane formule imaju samo jedan blok povezanosti.

Teorem 1.6. Neka je φ stratificirana formula te tp_φ i tp'_φ tipizacije. Ako za $x, y \in Var\ \varphi$ vrijedi $x \parallel y$, onda je $tp_\varphi(x) - tp_\varphi(y) = tp'_\varphi(x) - tp'_\varphi(y)$.

Dokaz. Definirajmo relaciju $//$ između varijabli formule φ s obzirom na tipizacije tp_φ i tp'_φ na sljedeći način: $x \mathbin{//} y$ ako i samo ako je $tp_\varphi(x) - tp_\varphi(y) = tp'_\varphi(x) - tp'_\varphi(y)$.

Očito je $//$ relacija ekvivalencije i sigurno sadrži relaciju $\parallel^1$. Naime, za proizvoljne varijable x i y za koje vrijedi $x \parallel^1 y$ imamo da je $x \in y$, ili $x = y$ potformula od φ. Tada iz uvjeta stratifikacije na tipizacije tp_φ i tp'_φ ($-1 = -1$, odnosno $0 = 0$) slijedi $x \mathbin{//} y$. Budući da je relacija $\parallel$ najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži $\parallel^1$, svakako je $\parallel$ sadržana u $//$. Dakle, $x \parallel y$ povlači $x \mathbin{//} y$, što smo i trebali dokazati. ■

Drugim riječima, ako su dvije varijable u istom bloku povezanosti, onda razlika njihovih tipova ne ovisi o tipizaciji.

Teorem 1.7. Neka je φ stratificirana formula. Tada postoji najmanja tipizacija za φ.

Dokaz. Neka je $Var\ \varphi = \bigcup_{i=1}^{t} B_i$ i tp_φ pripadna tipizacija. Za svaki i je $tp_\varphi(B_i)$ neprazni skup prirodnih brojeva pa ima najmanji element, koji označimo s a_i. Označimo restrikcije preslikavanja tp_φ na blok B_i s $tp_i := tp_\varphi \restriction B_i$ i definirajmo preslikavanje $mtp_\varphi := \bigcup_{i=1}^{t}(tp_i - a_i + 1)$. To preslikavanje je dobro definirano jer je domena svakog preslikavanja $tp_i - a_i + 1$ blok B_i, a blokovi su međusobno disjunktni.

Dokažimo da je mtp_φ tipizacija, odnosno da zadovoljava uvjete stratifikacije. Te uvjete treba provjeriti samo na 1-povezanim varijablama. One su povezane pa se nalaze u istom bloku

B_i. Budući da je tp_i restrikcija od tp_φ, ona zadovoljava uvjete stratifikacije za te varijable, pa po teoremu 1.3 uvjete stratifikacije zadovoljava i $tp_i - a_i + 1$, odnosno mtp_φ, koja se s njome podudara na B_i.

Dokažimo još da je mtp_φ najmanja tipizacija. Neka je tp'_φ proizvoljna tipizacija iste formule φ i pretpostavimo da postoji varijabla x takva da je $tp'_\varphi(x) < mtp_\varphi(x)$. Tada postoji i takav da je $x \in B_i$, a u B_i također postoji varijabla x_i takva da je $a_i = tp_\varphi(x_i)$. Vrijedi $x \parallel x_i$ jer su x i x_i u istom bloku. Po konstrukciji tada vrijedi $mtp_\varphi(x_i) = a_i - a_i + 1 = 1$. Sada primjenom teorema 1.6 imamo $mtp_\varphi(x) - mtp_\varphi(x_i) = tp'_\varphi(x) - tp'_\varphi(x_i)$, odnosno $tp'_\varphi(x_i) = 1 - \big(mtp_\varphi(x) - tp'_\varphi(x)\big)$. Budući da je $mtp_\varphi(x) - tp'_\varphi(x) > 0$, slijedi da je $tp'_\varphi(x_i) < 1$, što je kontradikcija s izborom tipizacije tp'_φ (podrazumijevamo da su vrijednosti tp'_φ pozitivni prirodni brojevi). ■

Postojanje najmanje tipizacije stratificirane formule nije samo korisno svojstvo, odnosno potvrda naše intuicije, već pomoću nje možemo u potpunosti odrediti sve tipizacije.

Teorem 1.8. Neka je φ stratificirana formula i neka su $B_1, \dots, B_t$ blokovi (klase ekvivalencije relacije $\parallel$) njenih varijabli. Neka je F bilo koje preslikavanje varijabli od φ u prirodne brojeve. Tada je F tipizacija od φ ako i samo ako postoje prirodni brojevi $k_1, \dots, k_t$ takvi da je $F = \bigcup_{i=1}^{t} \big(mtp_\varphi {\restriction} B_i + k_i\big)$.

Dokaz. Ako je F tipizacija, onda analognim postupkom kao u dokazu teorema 1.7 dobijemo najmanju tipizaciju $mtp_\varphi = \bigcup_{i=1}^{t}(F \restriction B_i + 1 - a_i)$, pa je $F = \bigcup_{i=1}^{t}(mtp_\varphi \restriction B_i + k_i)$, gdje je $k_i = a_1 - 1$.

Pretpostavimo da postoje $k_1, \dots, k_t$ takvi da je $F = \bigcup_{i=1}^{t} \big(mtp_\varphi {\restriction} B_i + k_i\big)$. Trebamo provjeriti da F zadovolja uvjete stratifikacije.

Neka je $x \in y$ potformula od φ. To znači da su x i y 1-povezane varijable. Stoga se one nalaze u istom bloku, koji označimo s B_j. Imamo

$$F(y) = \bigcup_{i=1}^{t} \big(mtp_\varphi {\restriction} B_i + k_i\big)(y) = \big(mtp_\varphi {\restriction} B_j + k_j\big)(y) = mtp_\varphi(y) + k_j$$

i analogno $F(x) = mtp_\varphi(x) + k_j$. Budući da mtp_φ zadovoljava uvjete stratifikacije, imamo $mtp_\varphi(y) = mtp_\varphi(x) + 1$. Stoga je i $F(y) = mtp_\varphi(y) + k_j = mtp_\varphi(x) + 1 + k_j = F(x) + 1$.

Slično dokazujemo da je $F(x) = F(y)$ ako je $x = y$ potformula od φ. Dakle, F zadovoljava uvjete stratifikacije. ■

Direktna posljedica teorema 1.8 je sljedeći rezultat.

Teorem 1.9. Neka je φ povezana stratificirana formula. Tada su sve njene tipizacije oblika $mtp_\varphi + k$, gdje je mtp_φ najmanja tipizacija od φ, a k je prirodni broj.

Dokaz. Neka je tp_φ proizvoljna tipizacija od φ. Budući da je formula φ povezana, postoji samo jedan blok povezanosti njenih varijabli, koji označimo s B. Po teoremu 1.8 postoji prirodni broj k takav da je $tp_\varphi = mtp_\varphi \restriction B + k$. Budući da vrijedi $mtp_\varphi \restriction B = mtp_\varphi$, imamo $tp_\varphi = mtp_\varphi + k$. ■

Važnost sljedećeg teorema je u tome što daje tipsko određenje za uvođenje novog relacijskog simbola koji je određen s φ.

Teorem 1.10. Ako je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ stratificirana i povezana formula, onda postoje jedinstveni cijeli brojevi $k_1, \dots, k_n$ takvi da je $k_1 = 0$ i vrijedi sljedeće: za svaku stratificiranu formulu ψ u kojoj je φ potformula, i za svaku tipizaciju tp_ψ formule ψ vrijedi
$tp_\psi(x_i) - tp_\psi(x_1) = k_i$ za sve $i = 1, \dots, n$.

Dokaz. Neka je tp_φ neka tipizacija za φ. Definiramo $k_i := tp_\varphi(x_i) - tp_\varphi(x_1)$, dakle $k_1 = 0$. Neka je ψ proizvoljna stratificirana formula kojoj je φ potformula i neka je tp_ψ proizvoljna tipizacija od ψ. Budući da je φ potformula od ψ, restrikcija $tp_\psi \restriction Var\ \varphi$ je tipizacija od φ. Nadalje, φ je povezana, stoga vrijedi $x_i \parallel x_1$ za svaki $i = 1, \dots, n$. Sada po teoremu 1.6 vrijedi $tp_\psi(x_i) - tp_\psi(x_1) = (tp_\psi \restriction Var\ \varphi)(x_i) - (tp_\psi \restriction Var\ \varphi)(x_1) = tp_\varphi(x_i) - tp_\varphi(x_1) = k_i$, za svaki $i = 1, \dots, n$. ■

Za svaku stratificiranu formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ možemo uvesti novi relacijski simbol R mjesnosti n, tako da je $R(x_1, \dots, x_n)$ pokrata za $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Brojeve $k_1, \dots, k_n$ iz teorema 1.10 navodit ćemo u obliku rečenice

„ako je $R(x_1, \dots, x_n)$ potformula stratificirane formule, onda x_1 ima tip $m + k_1, \dots,$ x_{n-1} ima tip $m + k_{n-1}$ i x_n ima tip $m + k_n$."

Gornju terminologiju ćemo također koristiti u situacijama kada određene varijable u $R(x_1, \dots, x_n)$ budu imale unaprijed zadane tipove. Tada se svi unaprijed određeni tipovi moraju slagati (u smislu $tp_\varphi(x_i) - tp_\varphi(x_j) = k_i - k_j$) i oni zapravo određuju ostale tipove (u smislu $tp_\varphi(x_j) = tp_\varphi(x_i) - k_i + k_j$).

U nastavku ćemo tipizacijom stratificirane formule smatrati najmanju tipizaciju u smislu definicije 1.2. Također, pojmove stratifikacije i povezanosti promatrat ćemo kao združene. To znači da ubuduće smatramo da je svaka stratificirana formula ujedno i povezana, što nećemo posebno naglašavati.[1] Obično će iz zapisa iz kojeg se vidi stratificiranost formule, biti jasno da je formula i povezana.

[1] Sve „korisne” formule kojima se iskazuju neki odnosi između objekata simboliziraju te objekte slobodnim varijablama i moraju imati te slobodne varijable povezane jer se u protivnom ne bi radilo o jednom, već o više svojstava nezavisnih objekata. Također i vezane varijable moraju biti povezane s njima jer bi ih u protivnome bilo moguće eliminirati iz formule.

1.2. Osnovni pojmovi teorije NFU

Teorija **Novi temelji s atomima** (NFU)[2] može se aksiomatizirati dvama aksiomima i jednom shemom aksioma: to su (slabi) aksiom ekstenzionalnosti, aksiom skupovnosti i shema aksioma stratificirane komprehenzije. Postoje razne druge aksiomatizacije, poput aksiomatizacije s konačno mnogo aksioma koju koristi Holmes u [35].[3]

***Aksiom ekstenzionalnosti*:**

$$\forall x \forall y \big(set(x) \land set(y) \land \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y \big).$$

***Aksiom skupovnosti*:**

$$\forall x \forall y \big(y \in x \to set(x) \big).$$

***Stratificirana komprehenzija*:** za stratificiranu formulu $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$,

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \big(set(y) \land \forall z \big(z \in y \leftrightarrow \varphi(z, x_1, \ldots, x_n) \big) \big).$$

Kao što smo već rekli, „stratificirana komprehenzija” je zapravo shema aksioma: po jedan aksiom za svaku stratificiranu formulu φ. Inspiraciju za promatranje stratificiranih formula Quine je dobio iz jednostavne teorije tipova [44]. Iz aksioma skupovnosti obratom po kontrapoziciji slijedi da ako je neki objekt ne-skup, tj. atom (prave klase ne smatramo objektima, već ih koristimo u neformalnom smislu), onda ne sadrži elemente.

Povijest teorije NFU započinje Quineovim člankom [48] iz 1937. u kojem uvodi teoriju NF.[4] Naziv članka *New Foundations for Mathematical Logic* sugerira da je Quine na umu imao logičku teoriju klasa, a iz izlaganja se primjećuje da je teorija zasnovana na idejama iz Whiteheadovog i Russellovog djela *Principia Mathematica*.[5] Razlika između Quineovog pristupa i *Principie* je u tome što Quine koristi osnovni jezik s manje simbola, i važnije, izbjegava pojave sintaksno iste klase s različitim tipovima [48, 59]. Prednost teorije NF u odnosu na naivnu teoriju skupova je u tome što sprječava (koliko je do sada poznato) pojavu paradoksa. Prednosti teorije NF u odnosu na teoriju ZF nisu toliko jasne i nekontroverzne. Može se argumentirati

[2] Od engleskog *New Foundations with urelements*.

[3] Konačnu aksiomatizaciju originalne Quineove teorije (bez atoma) je prvi iznio Hailperin 1944. godine [33].

[4] NF se zadaje aksiomom ekstenzionalnosti i aksiomom stratificirane komprehenzije. Teorija NFU je teorija NF u kojoj dozvoljavamo postojanje atoma. Više o teoriji NF može se pronaći u [21].

[5] Rosser u [50] opisuje Quineovu teoriju kao „uvelike pojednostavljenu verziju teorije tipova.”

da NF ima intuitivniju definiciju ordinalnih i kardinalnih brojeva (preko klasa ekvivalencije) u odnosu na ZF te jednostavniji aksiomatski sustav, mnogo bliži intuitivnom shvaćanju pojma skupa nego što je to ZF.

Međutim, NF ima dvije velike mane. Specker je 1953. dokazao da u NF ne vrijedi aksiom izbora [55], a nije ni pronađen dokaz relativne konzistentnosti NF s teorijom ZF[6]. Zbog toga je Jensen 1969. predložio teoriju NFU kao modificiranu verziju originalne Quineove teorije, i dokazao da konzistentnost teorije NFU slijedi iz konzistentnosti jednostavne teorije tipova [40]. Štoviše, dokaz konzistentnosti jednostavne teorije tipova moguće je provesti u Peanovoj aritmetici [40], što znači da je isto moguće i za NFU. Dakle, **ako je Peanova aritmetika konzistentna, konzistentna je i teorija NFU**.

Iz prethodne diskusije i drugog Gödelova teorema nepotpunosti slijedi da u NFU nije moguće dokazati aksiom beskonačnosti (nazovimo ga Inf), jer bi tada bilo moguće izgraditi unutarnji model za PA u NFU, čime bismo dokazali konzistentnost teorije PA u PA. Međutim, teorija NFU je relativno konzistentna s aksiomom beskonačnosti [40] pa možemo promatrati teoriju $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}$. Također je $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}$ relativno konzistentna s aksiomom izbora (standardno označenim AC) [40], stoga u konačnici možemo promatrati teoriju $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}$. Za sada još ne uvodimo aksiome Inf i AC; uvest ćemo ih kasnije, u trenutku kada nam budu potrebni.

1.2.1. Apstrakcijski termi

Za bilo koju stratificiranu formulu, stratificirana komprehenzija osigurava nam postojanje skupa koji sadrži točno one elemente koji zadovoljavaju tu formulu. Budući da je po aksiomu ekstenzionalnosti svaki takav skup (za danu formulu) jedinstven, za njih uvodimo posebnu notaciju, *apstrakcijske terme*.

Definicija 1.11. Neka je $\varphi(z,z_1,\ldots,z_n)$ stratificirana formula. Izraz $\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}$ zovemo **apstrakcijski term** sa **slobodnim varijablama** x_1, …, x_n.

Smatramo da apstrakcijski term $\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}$ za svaku n-torku $x_1, \ldots, x_n$ denotira (određuje) skup svih z takvih da vrijedi $\varphi(z,x_1,\ldots,x_n)$. Apstrakcijske terme obično označavamo malim gotskim slovima poput $\mathfrak{t}$ i $\mathfrak{s}$, te ponekad u zagradi poslije terma navodimo njegove slobodne varijable. Primjerice, term $\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}$ možemo označiti s $\mathfrak{t}(x_1,\ldots,x_n)$.

Kažemo da je term oblika $\mathfrak{t}(x_1,\ldots,x_n)=\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}$ **zadan** formulom $\varphi(z,x_1,\ldots,x_n)$, a za skup koji taj term denotira da je **definiran** formulom $\varphi(z,x_1,\ldots,x_n)$.

[6] Pokušaji dokaza konzistentnosti NF-a mogu se pronaći u [26] i [38].

Apstrakcijske terme moguće je definirati bez uvjeta stratificiranosti formule kojom su zadani, no aksiom stratificirane komprehenzije ne određuje kada nešto *nije* skup, stoga ne možemo znati određuje li apstrakcijski term zadan nestratificiranom formulom skup ili ne. Zbog toga bi korištenje takvih apstrakcijskih terma bilo vrlo problematično jer svaki apstrakcijski term koji određuje skup, može biti zadan i nestratificiranom formulom. Drugim riječima, time bismo imali entitete koji istovremeno jesu i nisu elementi naše teorije, ili one za koje ne možemo odrediti jesu li uopće elementi naše teorije.

Pojam (atomarnih) formula proširujemo tako da osim varijabli mogu sadržavati apstrakcijske terme. Takve formule nazivamo **formulama u proširenom jeziku**.

Definicija 1.12. Neka su $\varphi(z,z_1,\ldots,z_n)$ i $\psi(z,z_1,\ldots,z_m)$ stratificirane formule. **Eliminacija apstrakcijskih terma** je postupak kojim se formule u proširenom jeziku pretvaraju u semantički ekvivalentne formule u osnovnom jeziku, primjenom sljedećih transformacija:

1. $x \in \{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\} :\Leftrightarrow \varphi(x,x_1,\ldots,x_n)$.
2. $x = \{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\} :\Leftrightarrow set(x) \land \forall y \big(y \in x \leftrightarrow y \in \{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}\big)$, gdje je y nova varijabla.
3. $\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\} \in x :\Leftrightarrow (\exists y \in x)\big(y = \{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}\big)$, gdje je y nova varijabla.
4. $set(\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}) :\Leftrightarrow \exists t \big(t = \{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}\big)$.
5. $\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\} = \{z \mid \psi(z,y_1,\ldots,y_m)\} :\Leftrightarrow$
   $\forall x \big(\varphi(x,x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \psi(x,y_1,\ldots,y_m)\big)$, gdje je x nova varijabla.
6. $\{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\} \in \{z \mid \psi(z,y_1,\ldots,y_m)\} :\Leftrightarrow$
   $\exists t \big(t \in \{z \mid \psi(z,y_1,\ldots,y_m)\} \land t = \{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}\big)$, gdje je t nova varijabla.

Eliminacijom apstrakcijskog terma u definiciji 1.12(2) osiguravamo da varijabla jednaka apstrakcijskom termu predstavlja skup, jer u suprotnom ne bismo mogli razlikovati prazni skup od (ostalih) atoma — svi bi oni mogli biti denotirani apstrakcijskim termom $\{z \mid z \neq z\}$.

Teorem 1.13. Formula $x \neq x$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $\neg(z^1 = z^1)$. ■

Sada standardno definiramo skup $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$, kojeg nazivamo **prazni skup**.

Teorem 1.14. U NFU vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$\forall x\big(set(x) \leftrightarrow \big(\exists y(y \in x) \vee x = \emptyset\big)\big).$$

Dokaz. Neka je x proizvoljan. Pretpostavimo da vrijedi $set(x)$. Po logičkom pravilu isključenja trećega imamo $\forall y(y \notin x)$ ili $\exists y(y \in x)$. Tvrdnja je trivijalna ako vrijedi druga formula. Ako vrijedi $\forall y(y \notin x)$, iz $set(\emptyset)$ (što dobijemo iz aksioma stratificirane komprehenzije) i aksioma ekstenzionalnosti imamo $x = \emptyset$. Dakle, vrijedi $\exists y(y \in x) \vee x = \emptyset$.

S druge strane, pretpostavimo da vrijedi $\exists y(y \in x) \vee x = \emptyset$. Ako vrijedi $x = \emptyset$, tada po teoremu 1.13 i aksiomu stratificirane komprehenzije vrijedi $set(x)$. Ako vrijedi $\exists y(y \in x)$, tada $set(x)$ vrijedi po aksiomu skupovnosti. ■

Zanimljiva značajka teorije NFU je da, za razliku od ZFC, dozvoljava „velike" skupove.

Teorem 1.15. Formule $set(x)$ i $x = x$ su stratificirane.

Dokaz. Tvrdnje slijede iz zapisa $set(x^1)$ i $x^1 = x^1$. ■

Skup $SET := \{x \mid set(x)\}$ nazivamo **skup svih skupova**, a $V := \{x \mid x = x\}$ nazivamo **univerzalni** skup. Primijetimo da se u SET nalaze samo skupovi, dok se u V nalaze svi skupovi i atomi (ako uopće postoje). Izjavu „x je skup" možemo još (osim kao $set(x)$) zapisati kao $x \in SET$. Za skupove SET i V vrijedi $SET \in SET$ i $V \in V$, tako da je u teoriji NFU formula $\exists x(x \in x)$ teorem, ali nije stratificirana.

Definicija 1.16. Kažemo da je skup x **podskup** skupa y, i pišemo $x \subseteq y$, ako vrijedi $set(x) \wedge set(y) \wedge (\forall z \in x)(z \in y)$. Pišemo $x \subset y$ ako vrijedi $x \subseteq y \wedge x \neq y$.

Iz zapisa $set(x^2) \wedge set(y^2) \wedge (\forall z^1 \in x^2)(z^1 \in y^2)$ slijedi da je formula $x \subseteq y$ stratificirana. Iz teorema 1.10 imamo da ako je $x \subseteq y$ potformula stratificirane formule, onda u njoj x i y imaju isti tip.

Teorem 1.17. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Formule $z \in x \vee z \in y$, $z \in x \wedge z \in y$ te $z \in x \wedge z \notin y$ su stratificirane.

2. Formule $(\exists t \in x)(z \in t)$, $(\forall t \in x)(z \in t)$ i $z \notin x$ su stratificirane.

3. Formule $z = x$ i $(\exists t \in x)\forall u(u \in z \leftrightarrow u = t)$ su stratificirane.

Dokaz. Sve tvrdnje slijede iz sljedećih zapisa:

1. $z^1 \in x^2 \vee z^1 \in y^2$, $z^1 \in x^2 \wedge z^1 \in y^2$, $z^1 \in x^2 \wedge z^1 \notin y^2$.

2. $(\exists t^2 \in x^3)(z^1 \in t^2)$, $(\forall t^2 \in x^3)(z^1 \in t^2)$, $z^1 \notin x^2$.

3. $z^1 = x^1$, $(\exists t^1 \in x^2)\forall u^1(u^1 \in z^2 \leftrightarrow u^1 = t^1)$. ■

Za skupove x i y definiramo skupove $x \cup y := \{z \mid z \in x \vee z \in y\}$, $x \cap y := \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$ i $x \setminus y := \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}$ koje nazivamo redom **unija**, **presjek** i **skupovna razlika** x i y. Skupove $\bigcup x := \{z \mid (\exists t \in x)(z \in t)\}$, $\bigcap x := \{z \mid (\forall t \in x)(z \in t)\}$ i $x^c := \{z \mid z \notin x\}$ nazivamo redom **unija**, **presjek** i **komplement** od x, a skupove $\mathscr{P}(x) := \{z \mid z \subseteq x\}$ i $\mathscr{P}_1(x) := \{z \mid (\exists t \in x)\forall u(u \in z \leftrightarrow u = t)\}$ nazivamo redom **partitivni skup** i **singleton partitivni skup** od x. Za bilo koji objekt u definiramo skup $\{u\} := \{z \mid z = u\}$ koji nazivamo **singleton** od u. Za bilo koja dva objekta u i v definiramo skup $\{u, v\} := \{u\} \cup \{v\}$, koji nazivamo **par** x i y.

Primijetimo da smo u prethodnim definicijama singleton i par definirali na atomima i skupovima. Razlog za njihovu općenitiju definiciju je taj što želimo promatrati uređene parove svih objekata iz V, kako bismo mogli funkcije primjenjivati na atomima.

Kod provjere stratificiranosti neke formule, tipove pridružujemo samo varijablama, stoga je nužno eliminirati svaki apstrakcijski term u smislu definicije 1.12. Međutim, kako teorija postaje sve kompleksnija, takvom postaje i provjera stratificiranosti formula. Naime, nije uvijek jednostavno eliminirati sve apstrakcijske terme i dobiti razumljivu formulu, a također se pojavljuje potreba za uvođenjem apstrakcijskih terma koji su zadani formulom koja sadrži apstrakcijske terme. Stoga je mogućnost određivanja tipova apstrakcijskim termima od velike važnosti.

Definicija 1.18. Neka je ψ formula u proširenom jeziku i neka su $\mathfrak{t}_i := \{z_i \mid \varphi_i(z_i, z_{i1}, \ldots, z_{in_i})\}$, $i = 1, \ldots, n$ svi apstrakcijski termi koji se pojavljuju u ψ, pri čemu su φ_i stratificirane formule s pripadnim tipizacijama tp_{φ_i}. Preslikavanje tp takvo da je $tp(z_{ij}) = tp_{\varphi_i}(z_{ij})$ za sve i, j, proširujemo na apstrakcijske terme kao $tp(\mathfrak{t}_i) := tp_{\varphi_i}(z_i) + 1$ za svaki i. Kažemo da je formula ψ **stratificirana u proširenom jeziku** ako postoji preslikavanje tp_ψ s varijabli i terma formule ψ u prirodne brojeve, koje zadovoljava uvjete stratifikacije i vrijedi $tp_\psi(\mathfrak{t}_i) = tp_{\varphi_i}(z_i) + 1$ za sve i. Tada preslikavanje tp_ψ još nazivamo i **tipizacija u proširenom jeziku**.

Uvodimo konvenciju da je svaka tipizacija u proširenom jeziku formule ψ, koja sadrži apstrakcijski term $\mathfrak{t}(x_1, \ldots, x_n) = \{z \mid \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$, definirana i na svim varijablama formule φ. Drugim riječima, sve varijable formule φ smatramo također varijablama formule ψ.

Potrebno je sada dokazati da definicija 1.18 ispravno dodjeljuje tipove. Drugim riječima, stratificirana formula iz proširenog jezika mora biti stratificirana i u osnovnom jeziku, kada se iz nje eliminiraju apstrakcijski termi.

Teorem 1.19. Neka je ψ' stratificirana formula u proširenom jeziku i neka su $\mathfrak{t}_1$, …, $\mathfrak{t}_n$ svi apstrakcijski termi u ψ'. Tada je formula ψ, dobivena iz ψ' eliminacijom apstrakcijskih terma $\mathfrak{t}_1$, …, $\mathfrak{t}_n$, stratificirana (u osnovnom jeziku).

Dokaz. Dokaz tvrdnje za $n = 1$ može se iščitati iz dokaza za $n = 2$, a dokaz tvrdnje za $n > 2$ je analogan dokazu za $n = 2$ jer su relacije $\in$ i $=$ binarne, a *set* je unarna.

Neka su $\mathfrak{t} = \{z \mid \varphi(z, z_1, \dots, z_n)\}$ i $\mathfrak{s} = \{w \mid \chi(w, w_1, \dots, w_m)\}$ apstrakcijski termi koji se pojavljuju u ψ'. Označimo pripadne tipizacije s tp_φ, tp_χ i $tp_{\psi'}$. Želimo definirati tipizaciju, koju označavamo s tp. Definiramo $tp(y) := tp_{\psi'}(y)$ za svaku varijablu koja je zajednička formulama ψ i ψ'. Primijetimo da zbog povezanosti formule φ vrijedi $z \parallel x_i$ za sve i, pa je tipizacija na svim takvim varijablama jednoznačno određena (tipizacijom od φ). Dakle, $tp_{\psi'}(a) = tp_\varphi(a)$ za svaku varijablu a formule φ. Sada još moramo definirati tp za varijable koje nastaju eliminacijom apstrakcijskih terma iz formule ψ' te zatim provjeriti zadovoljava li tp uvjete stratifikacije za potformulu nastalu eliminacijom. Imamo šest slučajeva.

Ako je $y \in \mathfrak{t}$ potformula od ψ', nakon eliminacije dobivamo $\varphi(y, z_1, \dots, z_n)$. Budući da je y u obje formule ψ i ψ', tp je za nju definirana. Definiramo $tp(a) := tp_\varphi(a)$ za svaku varijablu a od φ. Očito tp zadovoljava uvjete stratifikacije.

Ako je $y = \mathfrak{t}$ potformula od ψ', onda nakon eliminacije dobivamo $\forall b(b \in y \leftrightarrow b \in \mathfrak{t})$, tj. $\forall b\big(b \in y \leftrightarrow \varphi(b, z_1, \dots, z_n)\big)$, gdje je b nova varijabla. Definiramo $tp(b) := tp_\varphi(z)$ i $tp(a) := tp_\varphi(a)$ za svaku varijablu a od φ. Budući da je $tp_{\psi'}(y) = tp_{\psi'}(\mathfrak{t})$ i $tp_{\psi'}(\mathfrak{t}) = tp_\varphi(z) + 1$, imamo $tp(y) = tp_{\psi'}(\mathfrak{t}) = tp_\varphi(z) + 1 = tp(b) + 1$. Dakle, tp zadovoljava uvjete stratifikacije.

Ako je $\mathfrak{t} \in y$ potformula od ψ', eliminacijom dobivamo $(\exists u \in y)\big(set(u) \land \forall b\big(b \in u \leftrightarrow \varphi(b, z_1, \dots, z_n)\big)\big)$, gdje su u i b nove varijable, pa definiramo $tp(u) := tp_\varphi(z) + 1$, $tp(b) := tp_\varphi(z)$ i $tp(a) := tp_\varphi(a)$ za svaku varijablu a od φ. Provjerimo da tp zadovoljava uvjete stratifikacije. Imamo $tp(y) = tp_{\psi'}(y) = tp_{\psi'}(\mathfrak{t}) + 1 = \big(tp_\varphi(z) + 1\big) + 1 = \big(tp(b) + 1\big) + 1 = tp(u) + 1$ te $tp(u) = tp_\varphi(z) + 1 = tp(b) + 1$. Dakle, tp zadovoljava uvjete stratifikacije.

Ako je $set(\mathfrak{t})$ potformula od ψ', nakon eliminacije dobivamo $\exists u\big(set(u) \land \forall b\big(b \in u \leftrightarrow \varphi(b, z_1, \dots, z_n)\big)\big)$, gdje su u i b nove varijable, pa definiramo $tp(u) := tp_\varphi(z) + 1$, $tp(b) := tp_\varphi(z)$ i $tp(a) := tp_\varphi(a)$ za svaku varijablu a od φ. Budući da vrijedi $tp(u) = tp_\varphi(z) + 1 = tp(b) + 1$, slijedi da tp zadovoljava uvjete stratifikacije.

Preostaju još dva slučaja: kada je $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$ potformula od ψ' ili kada je $\mathfrak{t} \in \mathfrak{s}$ potformula od ψ'. Primijetimo da se ta dva slučaja međusobno isključuju: nije moguće da su obje formule potformule od ψ' jer tada ψ' ne bi bila stratificirana u proširenom jeziku.

Ako je $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$ potformula ψ', nakon eliminacije dobivamo
$\forall x\big(\varphi(x, z_1, \ldots, z_n) \leftrightarrow \chi(x, w_1, \ldots, w_m)\big)$, gdje je x nova varijabla. Primijetimo da, budući da je ψ' stratificirana, vrijedi $tp_{\psi'}(\mathfrak{t}) = tp_{\psi'}(\mathfrak{s})$, što daje $tp_{\varphi}(z)+1 = tp_{\chi}(w)+1$, tj. $tp_{\varphi}(z) = tp_{\chi}(w)$. Sada definiramo $tp(x) := tp_{\varphi}(z) = tp_{\chi}(w)$, $tp(a) := tp_{\varphi}(a)$ za svaku varijablu a od φ i $tp(b) := tp_{\chi}(b)$ za svaku varijablu b od χ. Ako postoji zajednička varijabla y od φ i χ, ona mora biti slobodna u obje formule, stoga vrijedi $y = z_i = w_j$, za neke i, j. Budući da je ψ' stratificirana u proširenom jeziku, imamo $tp_{\psi'}(y) = tp_{\varphi}(z_i) = tp_{\chi}(w_j)$, što znači da je tp dobro definirana u varijabli y.

Ako je $\mathfrak{t} \in \mathfrak{s}$ potformula od ψ', nakon eliminacije dobivamo
$\exists u\big(\chi(u, w_1, \ldots, w_m) \land u = \{z \mid \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)\}\big)$, tj.
$\exists u\big(\chi(u, w_1, \ldots, w_m) \land set(u) \land \forall x(x \in u \leftrightarrow \varphi(x, z_1, \ldots, z_n)\big)$, gdje su u i x nove varijable. Definiramo $tp(u) := tp_{\chi}(w)$, $tp(x) := tp_{\varphi}(z)$, $tp(a) := tp_{\varphi}(a)$ za svaku varijablu a od φ i $tp(b) := tp_{\chi}(b)$ za svaku varijablu b od χ. Ako postoji zajednička varijabla od φ i χ, primjenjujemo isti argument kao u prethodnom slučaju.

Dakle, tp zadovoljava uvjete stratifikacije kada se eliminiraju svi termi koji se nalaze u formuli ψ', odnosno ψ je stratificirana u osnovnom jeziku. ■

Sada pomoću definicije 1.18 možemo pridružiti tipove termima definiranima nakon teorema 1.13 i 1.17 koji denotiraju odgovarajuće skupove. Relativno je teško probijati se kroz tehnički jezik definicije 1.18, stoga navodimo jednostavniji pristup koji je u praksi mnogo korisniji od direktnog korištenja definicije.

Neka je $\mathfrak{t} = \{z \mid \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)\}$ apstrakcijski term i $\varphi(z, z_1, \ldots, z_n)$ stratificirana formula. Relativne tipove terma $\mathfrak{t}$ i njegovih parametara $x_1, \ldots, x_n$ određujemo tako da odredimo tipove varijablama u formuli $z \in t \leftrightarrow \varphi(z, z_1, \ldots, z_n)$, a tip varijable t je tip terma $\mathfrak{t}$. Ubuduće u formuli za provjeravanje nećemo pisati varijablu t, već cijeli term.

Analogno uvođenju relacijskih simbola, za svaku stratificiranu formulu $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ možemo uvesti novi funkcijski simbol f mjesnosti n (ili konstantski simbol u slučaju $n = 0$) tako da je $f(x_1, \ldots, x_n)$ pokrata za $\{z \mid \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$ i vrijedi teorem analogan teoremu 1.10.

Teorem 1.20. Ako je $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ stratificirana formula, onda postoje jedinstveni cijeli brojevi $k_1, \ldots\ k_n$ takvi da vrijedi sljedeće: za svaku stratificiranu formulu ψ u proširenom jeziku, u kojoj se pojavljuje term $\mathfrak{f} := f(x_1,\ldots,x_n) := \{z \mid \varphi(z,x_1,\ldots,x_n)\}$, za svaku tipizaciju tp_ψ formule ψ vrijedi $tp_\psi(x_i) = tp_\psi(\mathfrak{f}) + k_i$, za sve $i = 1,\ldots,n$.

Dokaz. Neka je formula $\varphi(z,x_1,\ldots,x_n)$ stratificirana i tp_φ neka njezina tipizacija. Definirajmo $k_i := tp_\varphi(x_i) - tp_\varphi(z) - 1$. Tip varijable z tada je $tp_\varphi(z) = tp_\varphi(x_i) - 1 - k_i$. Po definiciji 1.18 tu tipizaciju proširujemo do tipizacije tp takve da vrijedi $tp(\mathfrak{f}) = tp_\varphi(z) + 1$.

Neka je sada ψ stratificirana formula u kojoj se pojavljuje $\mathfrak{f}$ te neka je tp_ψ tipizacija od ψ. Tada vrijedi $tp_\psi(\mathfrak{f}) = tp_\varphi(z) + 1 = tp_\varphi(x_i) - 1 - k_i + 1 = tp_\varphi(x_i) - k_i$ za svaki $i = 1,\ldots,n$. Iz toga jednostavno slijedi $tp_\varphi(x_i) = tp_\psi(\mathfrak{f}) + k_i$ za sve $i = 1,\ldots,n$. ■

Brojeve k_1, …, k_n iz teorema 1.20 navodit ćemo u obliku rečenice:

„ako x_1 ima tip $m + k_1$, …, ako x_{n-1} ima tip $m + k_{n-1}$ i x_n ima tip $m + k_n$, onda funkcijski term $f(x_1,\ldots,x_n)$ ima tip m."

Teorem 1.21. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako x ima tip n, onda $\bigcup x$ i $\bigcap x$ imaju tip $n-1$, x^c ima tip n te $\mathscr{P}(x)$, $\{x\}$ i $\mathscr{P}_1(x)$ imaju tip $n+1$.

2. Ako x i y imaju tip n, onda $x \cup y$, $x \cap y$ te $x \setminus y$ imaju tip n.

Dokaz. 1. Za $\bigcup x$ imamo $z^1 \in \bigcup x^2 \leftrightarrow (\exists t^2 \in x^3)(z^1 \in t^2)$.

Za $\bigcap x$ imamo $z^1 \in \bigcap x^2 \leftrightarrow (\forall t^2 \in x^3)(z^1 \in t^2)$.

Za x^c imamo $z^1 \in x^{c2} \leftrightarrow \neg(z^1 \in x^2)$.

Za $\mathscr{P}(x)$ imamo $z^2 \in \mathscr{P}(x)^3 \leftrightarrow \forall u^1(u^1 \in z^2 \to u^1 \in x^2)$.

Za $\{x\}$ imamo $z^1 \in \{x\}^2 \leftrightarrow z^1 = x^1$.

Za $\mathscr{P}_1(x)$ imamo $z^2 \in \mathscr{P}_1(x)^3 \leftrightarrow (\exists t^1 \in x^2)(set(z^2) \wedge \forall u^1(u^1 \in z^2 \leftrightarrow u^1 = t^1)$.

2. Za $x \cup y$ imamo $z^1 \in (x \cup y)^2 \leftrightarrow (z^1 \in x^2 \vee z^1 \in y^2)$.

Za $x \cap y$ imamo $z^1 \in (x \cap y)^2 \leftrightarrow (z^1 \in x^2 \wedge z^1 \in y^2)$.

Za $x \setminus y$ imamo $z^1 \in (x \setminus y)^2 \leftrightarrow (z^1 \in x^2 \wedge z^1 \notin y^2)$. ■

Korisno je uvesti notacijsku konvenciju i za ugniježđene apstrakcijske terme, koju ćemo u nastavku uvelike koristiti.

Definicija 1.22. Neka su $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ i $\psi(w,x_1,\ldots,x_k)$ stratificirane formule. **Eliminacija ugniježđenih apstrakcijskih terma** je sljedeća transformacija:

$$\big\{\{w \mid \psi(w,x_1,\ldots,x_k)\} \mid \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\big\} :=$$
$$\big\{z \mid \exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \wedge z = \{w \mid \psi(w,x_1,\ldots,x_k)\}\big)\big\}.$$

Primijetimo da singleton partitivni skup možemo definirati ugniježđenim apstrakcijskim termom $\mathscr{P}_1(x) := \big\{\{t\} \mid t \in x\big\}$.

1.2.2. Relacije

Uređene parove želimo definirati ne samo za skupove, već i za atome. U ovom trenutku najpogodnija definicija za to je on Kuratowskog.

Definicija 1.23. Za sve $x,y \in V$ definiramo njihov **uređeni par** $(x,y) := \big\{\{x\},\{x,y\}\big\}$.

Mana ovako definiranih uređenih parova je u tome što oni nisu tipski ujednačeni. Točnije, tipovi koordinatnih projekcija x i y nisu jednaki tipu cijelog uređenog para (x,y), što može stvoriti probleme kod daljnjih generalizacija (npr. kod definicije uređenih trojki). Jedino što je zaista bitno kod uređenih parova je da vrijedi $(x,y) = (a,b)$ ako i samo ako je $x = a$ i $y = b$. Dokaz toga je isti kao u ZF.

Teorem 1.24. Ako x i y imaju tip n, onda (x,y) ima tip $n+2$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$z^2 \in (x,y)^3 \leftrightarrow z^2 = \{x^1\}^2 \vee z^2 = \{x^1,y^1\}^2. \qquad \blacksquare$$

U teoriji NFU (bez dodatnih aksioma) ne možemo dokazati postojanje tipski ujednačenih uređenih parova, ali možemo ako u teoriju uvedemo aksiom beskonačnosti i aksiom izbora, što je i napravljeno u poglavlju 2. Također je moguće, kao što predlaže Holmes [35], uvesti aksiom uređenih parova, no postoji nekoliko problema u vezi tog aksioma, koji su navedeni u poglavlju 3 i [3].

Mi ćemo problem tipski ujednačenih uređenih parova riješiti tako što ćemo razviti teoriju NFU do trenutka kada ćemo biti u mogućnosti dokazati njihovo postojanje (za to su nam potrebni još aksiom beskonačnosti i aksiom izbora). U međuvremenu, želimo kod pridjeljivanja tipova posebno naznačiti koji skupovi ovise o definiciji uređenih parova, a koji ne. To postižemo uvođenjem „varijabilnog tipa" za tip uređenog para i skupova koji o njemu ovise. Preciznije, umjesto rezultata teorema 1.24 koristit ćemo sljedeće:

ako x i y imaju tip n, onda (x,y) ima tip $n+\delta$.

Broj δ može biti bilo koji prirodni broj, a njegova vrijednost ovisit će o trenutno korištenoj definiciji uređenih parova. Za parove Kuratowskog će biti $\delta = 2$, a za tipski ujednačene će biti $\delta = 0$. U nastavku, do definicije tipski ujednačenih parova, koristit ćemo parove Kuratowskog, stoga će vrijediti $\delta = 2$. No, ključno je da će formule, u kojima ćemo pisati varijabilne tipove, biti stratificirane za bilo koji δ.

Nadalje, zapisivanje tipova pomoću varijabilnog tipa ne pomaže samo za praćenje ovisnosti skupova o parovima, već pokazuje da stratificiranost formule ne ovisi o tipu para. Točnije, ako je φ stratificirana s parovima za koje je $\delta = a$, onda će biti stratificirana također i u slučaju kada je $\delta = b$. To ne vrijedi općenito, ali će svakako vrijediti za sve formule koje će nam trebati.

Teorem 1.25. Formula $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\big(z = (x,y)\big)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $(\exists x^1 \in X^2)(\exists y^1 \in Y^2)\big(z^{1+\delta} = (x^1,y^1)^{1+\delta}\big)$. ∎

Za skupove X i Y definiramo njihov **Kartezijev produkt**

$$X \times Y := \big\{(x,y) \bigm| x \in X \land y \in Y\big\}.$$

Teorem 1.26. Ako X i Y imaju tip n, onda $X \times Y$ ima tip $n+\delta$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$z^{1+\delta} \in \big(X \times Y\big)^{2+\delta} \leftrightarrow (\exists x^1 \in X^2)(\exists y^1 \in Y^2)\big(z^{1+\delta} = (x^1,y^1)^{1+\delta}\big).$$ ∎

Standardno definiramo (binarnu) relaciju kao podskup Kartezijevog produkta dva skupa.

Definicija 1.27. Neka su X i Y skupovi. Kažemo da je R **binarna relacija** između skupova X i Y ako je $R \subseteq X \times Y$, što pišemo $rel(R,X,Y)$.

Umjesto $(x,y) \in R$ pisat ćemo $x\,R\,y$ i reći da su x i y **u relaciji** R. Ako x i y nisu u relaciji R, pišemo $x \not R\, y$. Budući da je $x\,R\,y$ samo drugačija oznaka za $(x,y) \in R$, ako x i y imaju tip n u nekoj stratificiranoj formuli u kojoj se $x\,R\,y$ pojavljuje kao potformula, onda R ima tip $n+\delta+1$, uz anotaciju $x^n\, R^{n+1+\delta}\, y^n$. Nadalje, ako X i Y imaju tip n u nekoj stratificiranoj formuli u kojoj se $rel(R,X,Y)$ pojavljuje kao potformula, onda R u toj formuli ima tip $n+\delta$.

Kažemo da je R **binarna relacija na** X ako vrijedi $R \subseteq X \times X$. Pojmove **refleksivne** i **irefleksivne** relacije definiramo na standardni način, pri čemu pojam refleksivne relacije ovisi o skupu X. Nadalje, na standardni način također definiramo **simetrične**, **antisimetrične** i **tranzitivne** relacije.

Teorem 1.28. Neka je $\varphi(x,y)$ stratificirana formula s dvije slobodne varijable x i y. Ako u toj formuli x i y imaju isti tip, onda za svaka dva skupa X i Y postoji (binarna) relacija R između X i Y takva da vrijedi $x\,R\,y \leftrightarrow \varphi(x,y)$ za sve $x \in X$ i $y \in Y$.

Dokaz. Formula φ je stratificirana, stoga postoji neka njena tipizacija u proširenom jeziku tp_φ. Provjerimo da je formula $\psi := (\exists x \in X)(\exists y \in Y)\big(t = (x,y) \land \varphi(x,y)\big)$ stratificirana.

Budući da x i y imaju isti tip u stratificiranoj formuli, term (x,y) također ima tip. Označimo $n := tp_\varphi(x) = tp_\varphi(y)$ i definirajmo preslikavanje tp na sljedeći način:

$$tp(t) := tp\big((x,y)\big) := n + \delta,$$
$$tp(X) := tp(Y) := n + 1,$$
$$tp(z) := tp_\varphi(z) \text{ inače.}$$

Očito je tp tipizacija (u proširenom jeziku) formule ψ. Dakle, ψ je stratificirana. Definiramo skup $R := \{t \mid \psi\} = \{(x,y) \mid x \in X \land y \in Y \land \varphi(x,y)\}$, za koji očito vrijedi $x\,R\,y \leftrightarrow \varphi(x,y)$, za svaki $x \in X$ i $y \in Y$. ∎

Za relaciju R iz teorema 1.28 kažemo da je definirana stratificiranom formulom.

Teorem 1.29. Formule $\exists y(x\,R\,y)$ i $\exists x(x\,R\,y)$ su stratificirane.

Dokaz. Tvrdnje slijede iz zapisa $\exists y^1(x^1\,R^{2+\delta}\,y^1)$ i $\exists x^1(x^1\,R^{2+\delta}\,y^1)$. ∎

Za relaciju $R \subseteq X \times Y$ definiramo **domenu** kao $dom(R) := \{x \mid \exists y(x\,R\,y)\}$, **sliku** kao $rng(R) := \{y \mid \exists x(x\,R\,y)\}$ i **ekstenziju** kao $ext(R) := dom(R) \cup rng(R)$.

Teorem 1.30. Ako R ima tip n, onda $dom(R)$, $rng(R)$ i $ext(R)$ imaju tip $n - \delta$.

Dokaz. Tvrdnje slijede iz zapisa

$$z^1 \in dom(R)^2 \leftrightarrow \exists y^1(z^1\,R^{2+\delta}\,y^1)$$
$$z^1 \in rng(R)^2 \leftrightarrow \exists x^1(x^1\,R^{2+\delta}\,z^1).$$

Tvrdnja za ext slijedi iz prethodno dokazanog i teorema 1.21(2). ∎

Formula $(\exists x^1 \in C^2)(x^1\,R^{2+\delta}\,y^1 \land (x^1,y^1)^{1+\delta} = t^{1+\delta})$ je stratificirana, stoga definiramo **restrikciju** relacije R na skup C kao $R \restriction C := \{(x,y) \mid x \in C \land x\,R\,y\}$. Zatim definiramo **sliku** skupa A po relaciji R kao $R[A] := rng(R \restriction A)$. Ako C ima tip n i R ima tip $n+\delta$, onda $R \restriction C$ ima tip $n+\delta$. Iz toga slijedi da ako A ima tip n i R ima tip $n+\delta$, onda $R[A]$ ima tip n.

Teorem 1.31. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Formula $t = (x,x)$ je stratificirana.

2. Formula $x\,R\,y \wedge y\,R'\,z \wedge t = (x,z)$ je stratificirana.

3. Formula $\exists x \exists y \big(x\,R\,y \wedge t = (y,x)\big)$ je stratificirana.

Dokaz. 1. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$t^{1+\delta} = (x^1,x^1)^{1+\delta}.$$

2. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$x^1\,R^{2+\delta}\,y^1 \wedge y^1\,R'^{2+\delta}\,z^1 \wedge t^{1+\delta} = (x^1,z^1)^{1+\delta}.$$

3. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$\exists x^1 \exists y^1 \big(x^1\,R^{2+\delta}\,y^1 \wedge t^{1+\delta} = (y^1,x^1)^{1+\delta}\big). \qquad \blacksquare$$

Definiramo **identitetu** kao $id := \{(x,x) \mid x \in V\}$. Za relacije $R, R' \subseteq V \times V$ definiramo njihovu **kompoziciju** kao $R' \circ R := \{(x,z) \mid x\,R\,y \wedge y\,R'\,z\}$. Za relaciju $R \subseteq V \times V$ definiramo njen **inverz** kao $R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$. Nadalje, definiramo **prasliku** skupa B relacije R kao $R^{-1}[B] := rng(R^{-1} \restriction B)$. Ako B ima tip n i R ima tip $n+\delta$, onda $R^{-1}[B]$ ima tip n.

Teorem 1.32. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako R i R' imaju tip n, onda $R' \circ R$ ima tip n.

2. Ako R ima tip n, onda R^{-1} ima tip n.

Dokaz. 1. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$t^{1+\delta} \in (R' \circ R)^{2+\delta} \leftrightarrow x^1\,R^{2+\delta}\,y^1 \wedge y^1\,R'^{2+\delta}\,z^1 \wedge t^{1+\delta} = (x^1,z^1)^{1+\delta}.$$

2. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$t^{1+\delta} \in \big(R^{-1}\big)^{2+\delta} \leftrightarrow \exists x^1 \exists y^1 \big(x^1\,R^{2+\delta}\,y^1 \wedge t^{1+\delta} = (y^1,x^1)^{1+\delta}\big). \qquad \blacksquare$$

Na standardni način definiramo pojam funkcije, kao relacije s funkcijskim svojstvom.

Definicija 1.33. Neka su X i Y skupovi. Kažemo da je f **funkcija** sa X u Y ako vrijedi $rel(f,X,Y) \wedge (\forall x \in X)(\exists! y \in Y)(x\ f\ y)$, što pišemo $func(f,X,Y)$.

Ako X i Y imaju tip n u nekoj stratificiranoj formuli u kojoj se $func(f,X,Y)$ pojavljuje kao potformula, onda f ima tip $n+\delta$ u toj formuli. Funkciju f sa X u Y često ćemo označavati s $f\colon X \to Y$, a umjesto $x\ f\ y$ pisat ćemo standardno $y = f(x)$.

Značenje oznake $f(x)$ se bitno razlikuje od značenja oznake za funkcijski term. Naime, $f(x)$ je zapravo prikriveni dvomjesni funkcijski term $ap(f,x)$. Ako x ima tip n i f tip $n+1+\delta$, onda $ap(f,x)$ ima tip n, što još pišemo $ap(f^{n+1+\delta},x^n)^n$ ili $f^{n+1+\delta}(x^n)^n$.

Teorem 1.34. Neka je $\mathfrak{t}$ term sa slobodnom varijablom x. Ako u stratificiranoj formuli $\mathfrak{t}$ i x imaju isti tip, onda za svaki skup A postoji funkcija f s domenom A takva da vrijedi

$$f(x) = \mathfrak{t}, \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

Dokaz. Formula $(\exists x^1 \in A^2)\big(q = (x^1,\mathfrak{t}^1)^{1+\delta}\big)$ je stratificirana, stoga možemo definirati

$$f := \big\{q \mid (\exists x \in A)\big(q = (x,\mathfrak{t})\big)\big\} = \{(x,\mathfrak{t}) \mid x \in A\}.$$

Skup f je očito funkcija za koju vrijedi $f(x) = \mathfrak{t}$. ■

Analogno se dokazuje poopćenje teorema 1.34.

Teorem 1.35. Neka je $\mathfrak{t}$ term sa slobodnim varijablama x i y. Ako u stratificiranoj formuli $\mathfrak{t}$ i (x,y) imaju isti tip, onda za svaka dva skupa A i B postoji funkcija f s domenom $A \times B$ takva da je

$$f(x,y) = \mathfrak{t}, \qquad \text{za svaki } x \in A \text{ i } y \in B.$$

Dokaz. Formula $(\exists x^1 \in A^2)(\exists y^1 \in B^2)\big(q^{1+2\delta} = ((x^1,y^1)^{1+\delta},\mathfrak{t}^{1+\delta})^{1+2\delta}\big)$ je stratificirana, stoga možemo definirati

$$f := \big\{q \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)\big(q = ((x,y),\mathfrak{t})\big)\big\} = \big\{\big((x,y),\mathfrak{t}\big) \bigm| x \in A \wedge y \in B\big\}.$$

Skup f je očito funkcija za koju vrijedi $f(x,y) = \mathfrak{t}$ za svaki $x \in A$ i $y \in B$. ■

Za funkciju iz teorema 1.34, odnosno 1.35 kažemo da je definirana termom $\mathfrak{t}$.

Teorem 1.36. Formula $func(f,X,Y)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$f^{2+\delta} \subseteq (X^2 \times Y^2)^{2+\delta} \wedge (\forall x^1 \in X^2)(\exists! y^1 \in Y^2)\big(x^1\ f^{2+\delta}\ y^1\big). \qquad ■$$

Za skupove X i Y definiramo skup svih funkcija s X u Y kao $Y^X := \{f \mid func(f,X,Y)\}$.

Teorem 1.37. Ako X i Y imaju tip n, onda Y^X ima tip $n+1+\delta$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$z^{1+\delta} \in \left(Y^X\right)^{2+\delta} \leftrightarrow func(z^{1+\delta}, X^1, Y^1).$$

■

Standardno se definiraju pojmovi surjekcije, injekcije i bijekcije.

Definicija 1.38. Neka su X i Y skupovi.

1. Kažemo da je f **surjekcija** s X **na** Y ako vrijedi $func(f,X,Y) \wedge rng(f) = Y$, što pišemo $surj(f,X,Y)$.

2. Kažemo da je f **injekcija** s X u Y ako vrijedi $func(f,X,Y) \wedge func(f^{-1}, rng(f), X)$, što pišemo $inj(f,X,Y)$.

3. Kažemo da je f **bijekcija** između X i Y ako vrijedi $surj(f,X,Y) \wedge inj(f,X,Y)$, što pišemo $bij(f,X,Y)$.

Ako X i Y imaju tip n u nekoj stratificiranoj formuli u kojoj se pojavljuje bilo $surj(f,X,Y)$ bilo $inj(f,X,Y)$ kao potformula, onda f u toj formuli ima tip $n+\delta$.

Kažemo da je relacija R na skupu X **relacija ekvivalencije** na X ako je refleksivna na X, simetrična i tranzitivna. Formula $x^1\ R^{2+\delta}\ y^1$ je stratificirana za bilo koju relaciju R. Stoga, ako je R relacija ekvivalencije na skupu X, možemo definirati **klasu ekvivalencije** elementa $x \in X$ s obzirom na R kao skup $[x]_R := \{y \mid x\,R\,y\}$.

Teorem 1.39. Ako x ima tip n, a R ima tip $n+1+\delta$, onda $[x]_R$ ima tip $n+1$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $z^1 \in [x]_R^2 \leftrightarrow x^1 R^{2+\delta} z^1$. ■

Teorem 1.40. Formula $(\exists x \in dom(R))(t = [x]_R)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $(\exists x^1 \in X^2)\left(t^2 = [x^1]^2_{R^{2+\delta}}\right)$. ■

Definiramo **kvocijentni skup** od X po relaciji ekvivalencije R kao $X/R := \{[x]_R \mid x \in dom(R)\}$.

Teorem 1.41. Ako X ima tip n, a R ima tip $n+\delta$, onda X/R ima tip $n+1$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$z^2 \in (X/R)^3 \leftrightarrow (\exists x^1 \in dom(R)^2)\big(z^2 = [x^1]^2_{R^{2+\delta}}\big). \qquad \blacksquare$$

Teorem 1.42. Neka je R relacija ekvivalencije na skupu X. Tada skup X/R čini particiju skupa X. Drugim riječima, svi elementi od X/R su neprazni, u parovima disjunktni i $\bigcup(X/R) = X$.

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [16], i sasvim je isti kao u ZF. $\blacksquare$

1.2.3. Dobro uređeni skupovi

Definicija 1.43. Za relaciju $\leq$ kažemo da je **parcijalni uređaj** ako vrijedi $rel(\leq, V, V)$ $\wedge \big(\forall x \in ext(\leq)\big)(x \leq x) \wedge \forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y \forall z \big(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\big)$, što pišemo $Po(\leq)$.

Ponekad uz parcijalni uređaj $\leq$ želimo promatrati relaciju $<$ koju definiramo kao:

$$a < b :\Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b. \tag{1.1}$$

Napomena 1.44. Iz relacije $\leq$ možemo lako dobiti relaciju $<$, ali za obrnuti smjer moramo navesti konkretni skup na kojem zadajemo relaciju. Za skup X i relaciju $<$ na X definiramo relaciju $(\leq) := (<) \cup (id \upharpoonright X)$. Jednako kao i u teoriji ZFC dokazujemo da vrijedi sljedeća ekvivalencija za relacije na X:

$\leq$ je refleksivna na X, antisimetrična i tranzitivna $\Leftrightarrow$ $<$ je irefleksivna i tranzitivna.

Teorem 1.45. Formula $Po(\leq)$ je stratificirana.

Dokaz. Sljedeće formule su stratificirane:

1. $rel(\leq^{2+\delta}, V^2, V^2)$
2. $\big(\forall x^1 \in ext(\leq)^2\big)(x^1 \leq^{2+\delta} x^1)$
3. $\forall x^1 \forall y^1 (x^1 \leq^{2+\delta} y^1 \wedge y^1 \leq^{2+\delta} x^1 \rightarrow x^1 = y^1)$
4. $\forall x^1 \forall y^1 \forall z^1 \big(x^1 \leq^{2+\delta} y^1 \wedge y^1 \leq^{2+\delta} z^1 \rightarrow x^1 \leq^{2+\delta} z^1\big)$

S ovim tipizacijama je i njihova konjunkcija stratificirana, a to znači da je $Po(\leq)$ stratificirana.[7]

$\blacksquare$

[7]Primijetimo da su sve varijable povezane preko varijable $\leq$ koja ima isti tip u svakom konjunktu.

Kada provjeravamo da je $\leq$ parcijalni uređaj, dovoljno je za $\leq$ dokazati refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost. Kažemo da je $\leq$ parcijalni uređaj **na** X ako vrijedi $ext(\leq) = X$. Tada još kažemo da je X parcijalno uređen relacijom $\leq$.

Napomena 1.46. Ako je φ formula u kojoj se pojavljuje $<$, a φ' je formula dobivena od formule φ eliminacijom (nekih ili svih) pojava $<$ pomoću (1.1), onda je tip od $<$ u φ jednak tipu $\leq$ u φ'.

Definicija 1.47. Neka je $\leq$ parcijalni uređaj, $Y \subseteq dom(\leq)$ i $y_0 \in dom(\leq)$. Tada kažemo da je y_0

1. **maksimalni**, odnosno **minimalni** element od Y
   ako je $y_0 \in Y$ i $(\forall y \in Y)(y_0 \not< y)$, odnosno $y_0 \in Y$ i $(\forall y \in Y)(y \not< y_0)$.
2. **gornja**, odnosno **donja** međa od Y
   ako je $(\forall y \in Y)(y \leq y_0)$, odnosno $(\forall y \in Y)(y_0 \leq y)$.
3. **najveći**, odnosno **najmanji** element od Y
   ako je $y_0 \in Y$ i y_0 je gornja, odnosno donja međa od Y.
4. **supremum**, odnosno **infimum** od Y
   ako je y_0 najmanja gornja, odnosno najveća donja međa od Y.

Supremum i infimum skupa Y su jedinstveni ako postoje, i redom ih označavamo sa $\sup Y$ i $\inf Y$. Ako Y ima tip $n+1$, onda $\sup Y$ i $\inf Y$ imaju tip n.

Definicija 1.48. Neka je $\leq$ parcijalni uređaj. Kažemo da je L **lanac** u $(\leq)$ ako vrijedi $set(L) \wedge (\forall x \in L)(\forall y \in L)(x \leq y \vee y \leq x)$, što označavamo s $ch(L, \leq)$.

Uvjet na lanac nazivamo **linearnost**. Ako se $ch(L, \leq)$ pojavljuje u stratificiranoj formuli i ako L ima tip n, onda $\leq$ ima tip $n+\delta$. Ako vrijedi $ch(dom(\leq), \leq)$, onda kažemo da je $\leq$ **linearni uređaj**.

Primijetimo da se kod linearnog uređaja pojmovi maksimalnog (minimalnog) i najvećeg (najmanjeg) elementa podudaraju. Nadalje, u linearnom uređaju negaciju od $x < y$ možemo zapisati kao $y \leq x$.

Teorem 1.49. Neka je X skup funkcija uređenih inkluzijom i $C \subseteq X$ lanac. Tada vrijedi

1. $\left(\bigcup C\right)^{-1} = \bigcup\{f^{-1} \mid f \in C\}$.

2. $dom\big(\bigcup C\big) = \bigcup\big\{dom(f) \mid f \in C\big\}$.

3. $rng\big(\bigcup C\big) = \bigcup\big\{rng(f) \mid f \in C\big\}$.

4. $\bigcup C$ je funkcija.

5. Ako je svaka funkcija $f \in C$ injekcija, onda je $\bigcup C$ injekcija.

Dokaz. 1. Ako je $z \in \big(\bigcup C\big)^{-1}$, onda je $z = (x,y)$ za neke x,y takve da je $(y,x) \in \bigcup C$. Tada postoji $f \in C$ takav da je $(y,x) \in f$, što povlači $(x,y) \in f^{-1} \subseteq \bigcup\{f^{-1} \mid f \in C\}$. Analogno se dokazuje druga inkluzija.

2. Ako je $z \in dom\big(\bigcup C\big)$, onda postoji $y \in rng\big(\bigcup C\big)$ takav da je $(z,y) \in \bigcup C$. To znači da postoji $f \in C$ takva da je$(z,y) \in f$, odnosno $z \in dom(f)$. Iz toga dobivamo $z \in \bigcup\big\{dom(f) \mid f \in C\big\}$. Ako je $z \in \bigcup\big\{dom(f) \mid f \in C\big\}$, onda postoji $f \in C$ takva da je $z \in dom(f)$. To znači da postoji $y \in rng(f)$ takav da je $(z,y) \in f \subseteq \bigcup C$, što povlači $z \in dom\big(\bigcup C\big)$.

3. Slijedi iz (1) i (2).

4. Neka je $x \in dom\big(\bigcup C\big)$ i pretpostavimo da postoje $a,b \in rng\big(\bigcup C\big)$ takvi da su $(x,a),(x,b) \in \bigcup C$ i $a \neq b$. To znači da postoje $f_1, f_2 \in C$ takvi da je $(x,a) \in f_1$ i $(y,b) \in f_2$. Budući da je C lanac, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $f_1 \subseteq f_2$. Iz toga slijedi $(x,a),(x,b) \in f_2$. Budući da je f_2 funkcija, dobivamo $a = b$, što je kontradikcija. Dakle, $\bigcup C$ je funkcija.

5. Slijedi iz (1) i (4). ■

Teorem 1.49 koristimo u nastavku kako bismo značajno skratili određene dokaze.

Definicija 1.50. Za relaciju $(\leq)$ kažemo da je **dobar uređaj** ako vrijedi $Po(\leq) \wedge \forall Y \big(Y \subseteq dom(\leq) \wedge Y \neq \emptyset \to (\exists y_0 \in Y)(\forall y \in Y)(y_0 \leq y)\big)$, što pišemo $Wo(\leq)$.

Teorem 1.51. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Formula $Wo(\leq)$ je stratificirana.

2. Formula $\exists \leq \big(t = dom(\leq) \wedge Wo(\leq)\big)$ je stratificirana.

Dokaz. 1. Tvrdnja slijedi iz zapisa $Po\big(\leq^{2+\delta}\big) \wedge \forall Y^2 \big(Y^2 \subseteq dom(\leq)^2 \wedge Y^2 \neq \emptyset^2 \to (\exists y_0^1 \in Y^2)(\forall y^1 \in Y^2)(y_0^1 \leq^{2+\delta} y^1)\big)$.

2. Tvrdnja slijedi iz zapisa $\exists \leq^{1+\delta} \big(t^1 = dom(\leq)^1 \land Wo(\leq^{1+\delta})\big)$. ■

Teorem 1.52. Svaki dobar uređaj je linearan.

Dokaz. Neka je $\leq$ dobar uređaj. Uzmimo proizvoljne $x, y \in dom(\leq)$. Tada je $\{x,y\} \subseteq dom(\leq)$ pa postoji z takav da je $z \leq x$ i $z \leq y$. No tada je $z = x$ ili $z = y$, što povlači da vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. ■

Budući da je dobar uređaj sam po sebi parcijalni uređaj s nekim dodatnim svojstvima, ekstenzija dobrog uređaja se podudara s njegovom domenom.

Definicija 1.53. Neka su $\leq$ i $\preceq$ relacije.

1. Kažemo da funkcija $f \colon dom(\leq) \to dom(\preceq)$ **čuva dobar uređaj** ako vrijedi

$$Wo(\leq) \land Wo(\preceq) \land func\big(f, dom(\leq), dom(\preceq)\big) \land$$
$$\land \big(\forall x_1 \in dom(\leq)\big)\big(\forall x_2 \in dom(\leq)\big)\big(x_1 < x_2 \to f(x_1) \preceq f(x_2)\big),$$

   što pišemo $wop\big(f, \leq, \preceq\big)$.

2. Kažemo da je funkcija $f \colon dom(\leq) \to dom(\preceq)$ **sličnost** ako vrijedi

$$bij\big(f, dom(\leq), dom(\preceq)\big) \land wop\big(f, \leq, \preceq\big) \land wop\big(f^{-1}, \preceq, \leq\big),$$

   što pišemo $sim\big(f, \leq, \preceq\big)$. Ako postoji takva funkcija tada kažemo da su $\leq$ i $\preceq$ **slični** i pišemo $(\leq) \simeq \preceq$.

Ukratko, sličnost je bijekcija između dobro uređenih skupova, takva da i ona i njezin inverz čuvaju uređaj. Primijetimo da nisu slične domene relacija, već same relacije.

Ako se u nekoj formuli $wop\big(f, \leq, \preceq\big)$ ili $sim\big(f, \leq, \preceq\big)$ pojavljuje kao potformula, onda $\leq$, $\preceq$ i f imaju isti tip. Dakle, formula $\exists f^1 sim(f^1, \leq^1, \preceq^1)$ je stratificirana, pa iz teorema 1.28 slijedi da postoji relacija $\simeq$ na dobrim uređajima da vrijedi $(\leq) \simeq (\preceq) \Leftrightarrow \exists f sim(f, \leq, \preceq)$. Standardno se dokazuje [16] da je $\simeq$ relacija ekvivalencije.

Teorem 1.54. Neka je $\leq$ dobar uređaj i neka je $f \colon dom(\leq) \to dom(\leq)$ funkcija koja čuva uređaj. Tada za svaki $x \in dom(\leq)$ vrijedi $x \leq f(x)$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji $x_0 \in dom(\leq)$ takav da vrijedi $f(x_0) < x_0$. Formula $f^{2+\delta}(z^1)^1 <^{2+\delta} z^1$ je stratificirana pa definiramo skup $Y := \{z \mid f(z) < z\}$. Nastavak dokaza je potpuno isti kao u ZFC. ■

Neka je $\leq$ parcijalno uređen skup i $x \in dom(\leq)$. Formula $z^1 <^{2+\delta} x^1$ je stratificirana, stoga definiramo skup $P_{\leq}(x) := \{z \mid z < x\}$, kojeg nazivamo **početni komad** elementa x s obzirom na $\leq$.

Teorem 1.55. Ako x ima tip n i $\leq$ ima tip $n+1+\delta$, onda $P_{\leq}(x)$ ima tip $n+1$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $z^1 \in P_{\leq}(x)^2 \leftrightarrow z^1 \in dom(\leq)^2 \wedge z^1 <^{2+\delta} x^1$ ■

Primijetimo da je $x_1 \leq x_2$ ekvivalentno s $P_{\leq}(x_1) \subseteq P_{\leq}(x_2)$. Relaciju $\leq$ restringiranu na neki početni komad $P_{\leq}(x)$ također nazivamo početni komad (kada ne postoji mogućnost zabune) i označavamo s $p_{\leq}(x) := (\leq) \cap \left(P_{\leq}(x) \times P_{\leq}(x)\right)$. Primijetimo da ako x ima tip n i $\leq$ ima tip $n+1+\delta$, onda $p_{\leq}(x)$ ima tip $n+1+\delta$.

Teorem 1.56. Neka je $\leq$ dobar uređaj, $x_0 \in dom(\leq)$ i $p_{\leq}(x_0)$ njegov početni komad.

1. Tada je $(\leq) \not\simeq p_{\leq}(x_0)$.
2. Za bilo koji $x_1 \in dom(\leq)$, $p_{\leq}(x_0) \simeq p_{\leq}(x_1)$ ako i samo ako $x_0 = x_1$.

Dokaz. Isti kao u ZF, a može se pronaći u [39]. ■

Ovo poglavlje završavamo teoremom o usporedivosti dobro uređenih skupova.

Teorem 1.57. Neka su $\leq$ i $\preceq$ dobri uređaji.
Tada vrijedi točno jedna od sljedećih tvrdnji:

1. $(\leq) \simeq (\preceq)$;
2. Postoji $y_0 \in dom(\preceq)$ takav da vrijedi $p_{\preceq}(y_0) \simeq (\leq)$;
3. Postoji $x_0 \in dom(\leq)$ takav da vrijedi $p_{\leq}(x_0) \simeq (\preceq)$.

Dokaz. Formula $x^1 \in dom(\leq)^2 \wedge y^1 \in dom(\preceq)^2 \wedge p_{\leq}^{2+\delta}(x^1) \simeq^{3+2\delta} p_{\preceq}^{2+\delta}(y^1)$ je stratificirana, stoga po teoremu 1.28 definiramo relaciju f između skupova $dom(\leq)$ i $dom(\preceq)$ tako da vrijedi $x\ f\ y \Leftrightarrow p_{\leq}(x) \simeq p_{\preceq}(y)$. Nastavak dokaza je identičan kao u teoriji ZF i može ga se pronaći u [39]. ■

1.3. AKSIOM IZBORA

U ovom poglavlju u našu teoriju uvodimo aksiom izbora, i dokazujemo neke njemu ekvivalentne tvrdnje. Aksiom izbora ćemo koristiti za dokazivanje mnogih tvrdnji o kardinalnim brojevima.

***Aksiom izbora*:**

$$\forall x\big(set(x) \wedge \emptyset \notin x \wedge (\forall y \in x)set(y) \wedge (\forall y \in x)(\forall z \in x)(y \neq z \to y \cap z = \emptyset) \\ \to \exists u(\forall w \in x)\exists! v(v \in w \cap u)\big)$$

Neformalno možemo aksiom izbora iskazati na sljedeći način: za svaki skup x koji sadrži samo neprazne, u parovima disjunktne skupove, postoji **izborni skup** u takav da je $u \cap w$ jednočlan za svaki $w \in X$. Formulu $(\forall w \in x)\exists! v(v \in w \cap u)$ označavat ćemo kraće s $choice(u,x)$, što znači da je u izborni skup od x. Aksiom izbora kao općenitu (metajezičnu) tvrdnju, ali i kao formulu označavamo s AC. Ako se $choice(u,x)$ pojavljuje u stratificiranoj formuli, i ako x ima tip n, onda u ima tip $n-1$.

Mnogo češće ćemo koristiti sljedeće ekvivalentne formulacije aksioma izbora.

***Zornova lema*:** Neka je $\leq$ parcijalni uređaj na nepraznom skupu X. Ako svaki neprazni lanac u $\leq$ ima gornju među, onda X ima barem jedan maksimalni element s obzirom na $\leq$.

***Zermelov teorem*:** Svaki skup se može dobro urediti.

Teorem 1.58. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. aksiom izbora,
2. Zornova lema,
3. Zermelov teorem.

Dokazi ekvivalencija analogni su dokazima u teoriji ZF, uz provjeru stratificiranosti određenih formula i korištenje izbornog skupa umjesto izborne funkcije. Dokazi se mogu pronaći u [35].

2. KARDINALNI BROJEVI TEORIJE NFU

Poglavlje o kardinalnim brojevima započinjemo definicijom prirodnih brojeva. Dokazujemo osnovne tvrdnje o prirodnim brojevima te kao najvažniji teorem ističemo teorem o primitivnoj rekurziji. Zatim definiramo kardinalne brojeve teorije NFU. Uvodimo aksiom beskonačnosti i dokazujemo neke njemu ekvivalentne tvrdnje, poput četvrtog Peanovog aksioma ili tvrdnje da su svi prirodni brojevi zapravo kardinalni brojevi. Uvodimo uređaj na kardinalnim brojevima i dokazujemo da je to dobar uređaj. Uz to, dokazujemo teorem da svaki beskonačni skup ima prebrojiv podskup, pomoću kojeg onda dokazujemo ekvivalentnost pojmova beskonačnosti i Dedekind-beskonačnosti. Nadalje, uvodimo zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva i precizno dokazujemo razne tvrdnje o njima. Kao najvažniji rezultat ističemo tzv. princip kardinalnog kvadriranja, pomoću kojeg uvodimo **princip kardinalnog kvadriranja univerzuma**, koji će nam poslužiti za uvođenje alternativne aksiomatizacije u idućem poglavlju.

2.1. PRIRODNI BROJEVI

U ovoj točki uvodimo prirodne brojeve[1] i promatramo odnos između Peanovih aksioma i aksioma teorije NFU.

Teorem 2.1. Formula $(\exists z \in y)(y \setminus \{z\} \in x)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $(\exists z^1 \in y^2)(y^2 \setminus \{z^1\}^2 \in x^3)$. ■

Skup $0 := \{\emptyset\}$ nazivamo **nula**, a za skup x definiramo skup $Sc(x) := \big\{y \mid (\exists z \in y)(y \setminus \{z\} \in x)\big\}$, koji nazivamo **sljedbenik** od x.

Teorem 2.2. Ako x ima tip n, onda $Sc(x)$ također ima tip n.

[1] Kasnije ćemo pomoću aksioma beskonačnosti dokazati da su prirodni brojevi zapravo konačni kardinalni brojevi.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $y^2 \in Sc(x)^3 \leftrightarrow \big(\exists z^1 \in y^2\big)\big(y^2 \setminus \{z^1\}^2 \in x^3\big)$. ■

Ponekad će biti jednostavnije koristiti alternativnu, ekvivalentnu definiciju sljedbenika nekog skupa.

Teorem 2.3. Za svaki skup x vrijedi $Sc(x) = \big\{y \cup \{z\} \mid y \in x \wedge z \notin y\big\}$.

Dokaz. Neka je $t \in \big\{y \cup \{z\} \mid y \in x \wedge z \notin y\big\}$. Tada je $t = y \cup \{z\}$ za neki $y \in x$ i $z \notin y$. Trebamo dokazati da postoji neki $u \in t$ takav da je $t \setminus \{u\} \in x$. No takav u je upravo z. Naime, vrijedi $z \in t$ i $t \setminus \{z\} = y \in x$.

Neka je $t \in Sc(x)$. Tada postoji $z \in t$ takav da je $t \setminus \{z\} \in x$. No tada vrijedi $t = (t \setminus \{z\}) \cup \{z\}$ te je $t \setminus \{z\} \in x$ i $z \notin t \setminus \{z\}$, odnosno t je traženog oblika. ■

Induktivni skup se definira slično kao u teoriji ZFC.

Definicija 2.4. Za skup x kažemo da je **induktivan** ako vrijedi
$0 \in x \wedge (\forall y \in x)\big(Sc(y) \in x\big)$, što pišemo $Ind(x)$.

Primijetimo da je skup *SET* induktivan.
Sada skup prirodnih brojeva možemo definirati kao najmanji induktivni skup.

Teorem 2.5. Formula $Ind(x)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $0^1 \in x^2 \wedge (\forall y^1 \in x^2)\big(Sc(y)^1 \in x^2\big)$. ■

Skup $\mathbb{N} := \bigcap\{x \mid Ind(x)\}$ nazivamo **skup prirodnih brojeva**.

Primijetimo, iz $Ind(SET)$ slijedi $\mathbb{N} \subseteq SET$, odnosno svi prirodni brojevi su skupovi. Za neki skup x kažemo da je **prirodni broj** ako je $x \in \mathbb{N}$. Broj 0 je skup koji se sastoji od onih skupova (ne atoma) koji nemaju elemenata, dakle samo od praznog skupa. Broj 1 se sastoji od svih skupova koji imaju po jedan element, dakle $1 := Sc(0) = \mathscr{P}_1(V)$, broj $2 := Sc(1)$ od svih skupova s dva elementa, i tako dalje. Općenito se broj n sastoji od svih skupova koji imaju n elemenata. Odmah iz definicije induktivnosti slijedi da je sljedbenik prirodnog broja ponovno prirodni broj. Ovako definirani prirodni brojevi se još ponekad nazivaju *Russell–Whiteheadovi* brojevi.

Važno je proučiti odnos između aksioma teorije NFU i Peanove aritmetike. Peanova aritmetika je zadana s četiri aksioma i jednom shemom aksioma.

(P1) $0 \in \mathbb{N}$.

(P2) $(\forall n \in \mathbb{N})\big(Sc(n) \in \mathbb{N}\big)$.

(P3) $(\forall n \in \mathbb{N})\big(0 \neq Sc(n)\big)$.

(P4) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\big(Sc(n) = Sc(m) \to n = m\big)$.

(P5) Neka je $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ formula. Tada vrijedi sljedeće:

$$\big(\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\big(\varphi(n, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(Sc(n), x_1 \ldots, x_n)\big)\big) \to \\ \to (\forall n \in \mathbb{N})\big(\varphi(n, x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Aksiomi (P1) i (P2), shvaćeni kao formule teorije NFU slijede jednostavno iz definicije, a (P3) se lako dokaže u NFU (teorem 2.6). Aksiom matematičke indukcije (P5) ne vrijedi u punoj općenitosti i moramo ga prilagoditi činjenici da se u teoriji uglavnom služimo stratificiranim formulama. O aksiomu (P4) će više riječi biti kasnije.

Teorem 2.6. Aksiom (P3) vrijedi u NFU.

Dokaz. Kada bi postojao prirodni broj x takav da vrijedi $Sc(x) = 0$, onda bi vrijedilo $y \in Sc(x) \leftrightarrow (\exists w \in y)(z \setminus \{w\} \in x)$. No to je nemoguće: $y = \emptyset$ je jedini skup koji zadovoljava lijevu stranu, ali tada ne zadovoljava desnu jer ne postoji $w \in \emptyset$. ■

Matematičku indukciju ne možemo direktno primijeniti na proizvoljne formule, jer kod dokaza promatramo apstrakcijski term $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)\}$, a ne znamo denotira li taj term skup, budući da φ nije stratificirana.

Teorem 2.7. Neka je $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ stratificirana formula. Tada u NFU vrijedi sljedeća formula:

$$\big(\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall x \in \mathbb{N})\big(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(Sc(x), x_1, \ldots, x_n)\big)\big) \to \\ \to (\forall x \in \mathbb{N})\big(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall x \in \mathbb{N})\big(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(Sc(x), x_1, \ldots, x_n)\big)$. Budući da je $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ stratificirana, stratificirana je i $x \in \mathbb{N} \wedge \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ (konstantskom simbolu $\mathbb{N}$ dodijelimo tip za jedan veći od tipa varijable x), stoga postoji skup $X := \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \mathbb{N}$. Dokažimo da je skup X induktivan.

Po pretpostavci je $0 \in X$. Pretpostavimo da je $x \in X$. Tada vrijedi $x \in \mathbb{N}$ i $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Po pretpostavci sada imamo $\varphi\big(Sc(x), x_1, \ldots, x_n\big)$, a po (P2) je $Sc(x) \in \mathbb{N}$, pa je $Sc(x) \in X$. To dvoje povlači $Ind(X)$, iz čega slijedi $\mathbb{N} \subseteq X$. Iz toga sada slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$. ■

Dakle, u teoriji NFU možemo dokazivati indukcijom, ali samo stratificirane formule.

Definicija 2.8. $FIN := \bigcup \mathbb{N}$ nazivamo skup **konačnih** skupova.

Vrijede uobičajene tvrdnje o konačnim skupovima, a dokazujemo sljedeće dvije.

Teorem 2.9. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako je X konačan skup i $Y \subseteq X$, onda je Y konačan.

2. Ako su X i Y konačni, onda je $X \cup Y$ konačan.

Dokaz. 1. Neka je X proizvoljni konačni skup, tj. $X \in FIN$. To znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $X \in n$. Dovoljno je dokazati sljedeću tvrdnju: $(\forall n^2 \in \mathbb{N}^3)(X^1 \in n^2 \wedge Y^1 \subseteq X^1 \rightarrow Y^1 \in FIN^2)$, a budući da je ta formula stratificirana, možemo je dokazati indukcijom po n.

Za $n = 0$ imamo $X \in 0$, što znači da je $X = \emptyset$. Sada za $Y \subseteq \emptyset$ imamo da je $Y = \emptyset \in 0 \subseteq FIN$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n i dokažimo tvrdnju za $Sc(n)$.

Neka je $X \in Sc(n)$ i $Y \subseteq X$. To znači da je $X = x \cup \{z\}$, pri čemu je $x \in n$ i $z \notin x$. Imamo dva slučaja. Ako je $z \notin Y$, onda vrijedi $Y \subseteq x \in n$, a iz pretpostavke indukcije sada imamo $Y \in FIN$. Ako je $z \in Y$, onda imamo $Y \setminus \{z\} \subseteq x$, pa iz pretpostavke indukcije dobivamo da je $Y \setminus \{z\} \in FIN$, tj. postoji neki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $Y \setminus \{z\} \in k$. Budući da očito $z \notin Y \setminus \{z\}$, po definiciji sljedbenika imamo $Y = Y \setminus \{z\} \cup \{z\} \in Sc(k) \subseteq FIN$.

2. Dovoljno je dokazati $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(X \in n \wedge Y \in m \rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(X \cup Y \in k)$. Uzmimo proizvoljni, ali fiksni $n \in \mathbb{N}$.
Formula $(\forall m^2 \in \mathbb{N}^3)\big(X^1 \in n^2 \wedge Y^1 \in m^2 \rightarrow (\exists k^2 \in \mathbb{N}^3)\big((X \cup Y)^1 \in k^2\big)\big)$ je stratificirana, stoga možemo tvrdnju dokazati indukcijom po m.

Ako je $m = 0$, onda $Y \in m$ znači $Y \in 0$, iz čega dobivamo $Y = \emptyset$. Dakle, za $k = n \in \mathbb{N}$ vrijedi $X \cup Y = X \in k$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$. Dokažimo tvrdnju za $Sc(m)$. Ako je $Y \in Sc(m)$, onda je $Y = a \cup \{b\}$, gdje je $a \in m$ i $b \notin a$. Po pretpostavci indukcije, postoji

$k \in \mathbb{N}$ takav da je $X \cup a \in k$. Sada imamo dva slučaja. Ako je $b \in X$, onda imamo $X \cup (a \cup \{b\}) = (X \cup \{b\})a \in k$. Ako je $b \notin X$, onda imamo $X \cup (a \cup \{b\}) = (X \cup a) \cup \{b\}$. Budući da je $X \cup a \in k$ i $b \notin X \cup a$ (zbog $b \notin X$ i $b \notin a$), po definiciji sljedbenika imamo $X \cup Y = (X \cup a) \cup \{b\} \in Sc(k)$. ■

Definicija 2.10. Za skup x kažemo da je **beskonačan** ako je $x \notin FIN$.

Navodimo još neka svojstva prirodnih brojeva.

Teorem 2.11. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Za svaki prirodni broj $x \neq 0$ postoji prirodni broj y takav da je $x = Sc(y)$.
2. Za svaki prirodni broj x takav da je $\emptyset \in x$ vrijedi $x = 0$.
3. Za svaki prirodni broj x, ako je $y \in x$, onda je y skup. Odnosno, $FIN \subseteq SET$.

Dokaz. 1. Dokažimo tvrdnju tako da dokažemo da je $S := \big\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \big(x \neq 0 \rightarrow (\exists y \in \mathbb{N})(x = Sc(y))\big\}$ induktivan skup. Budući da je $x^1 \in \mathbb{N}^2 \wedge \big(x^1 \neq 0^1 \rightarrow (\exists y^1 \in \mathbb{N}^2)\big(x^1 = Sc(y^1)^1\big)\big)$ stratificirana formula, S je zaista skup i očito vrijedi $S \subseteq \mathbb{N}$.

   Nadalje, očito je $0 \in S$ jer je $0 \in \mathbb{N}$ i $0 \neq 0$ je laž. Uzmimo proizvoljni $y \in S$. Tada je očito $Sc(y) \in S$, budući da je $y \in \mathbb{N}$ i vrijedi $Sc(y) = Sc(y)$. Sada iz induktivnosti i definicije skupa prirodnih brojeva dobivamo $\mathbb{N} \subseteq S$, što zajedno sa $S \subseteq \mathbb{N}$ daje $S = \mathbb{N}$.

2. Uzmimo proizvoljan prirodan broj x i pretpostavimo da vrijedi $x \neq 0$. Tada po tvrdnji 1 postoji neki prirodni broj y takav da je $x = Sc(y)$. Kada bi bilo $\emptyset \in x$, onda bi vrijedilo i $\emptyset \in Sc(y)$, što je kontradikcija s teoremom 2.3.

3. Dokažimo tvrdnju indukcijom po x u formuli $\forall y(y \in x \rightarrow set(y))$.

   Za $x = 0$ tvrdnja očito vrijedi jer je tada $y = \emptyset$, što je skup.

   Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $x \in \mathbb{N}$.

   Dokažimo tvrdnju za $Sc(x)$. Budući da je $y \in Sc(x)$, slijedi da postoji $z \in y$ takav da je $y \setminus \{z\} \in x$. Sada aksiomu skupovnosti $z \in y$ povlači $set(y)$. ■

U dokazima prethodnih tvrdnji raspisivali smo dokaze indukcijom detaljnije nego što je uobičajeno, ali ubuduće ćemo indukciju koristiti kao i u teoriji ZF, uz potvrdu da je formula koju dokazujemo stratificirana.

Primijetimo da iz teorema 2.11 slijedi da indukciju ne moramo nužno provoditi tako da počnemo od $n = 0$, već možemo početi od proizvoljnog prirodnog broja n_0 promatrajući formulu $\psi(x, x_1, \ldots, x_n) := x = 0 \vee \ldots \vee x = n_1 \vee \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$, gdje je n_1 prirodni broj takav da je $Sc(n_1) = n_0$ (koji postoji po teoremu 2.11). Drugim riječima, u NFU vrijedi sljedeća formula:

$$\big(\psi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall x \in \mathbb{N})\big(\psi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \psi(Sc(x), x_1, \ldots, x_n)\big)\big) \to \\ \to (\forall x \in \mathbb{N})\big(\psi(x, x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Definicija 2.12. Za skup x kažemo da je **Dedekind-beskonačan**, ako postoji $y \subset x$ i bijekcija $f : x \to y$.

Općenito vrijedi tvrdnja da se dvije navedene definicije beskonačnosti podudaraju, odnosno da je skup Dedekind-beskonačan ako i samo ako je beskonačan. Međutim, bez aksioma izbora možemo samo dokazati da iz Dedekind-beskonačnosti slijedi beskonačnost.

Teorem 2.13. Ako je skup Dedekind-beskonačan, onda je beskonačan.

Dokaz. Teorem dokazujemo obratom po kontrapoziciji.
Formula $(\forall n^2 \in \mathbb{N}^3)(\forall x^1 \in n^2)\forall y^1\big(y^1 \subset x^1 \to \neg\exists f^{2+\delta} bij(f^{2+\delta}, x^1, y^1)\big)$ je stratificirana, stoga možemo provoditi indukciju po n.

Neka je $n = 0$ i $x \in n$ proizvoljan. Tada je $x = \emptyset$ pa tvrdnja vrijedi jer $\emptyset$ nema pravih podskupova. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n. Dokažimo sada tvrdnju za $Sc(n)$.

Neka je $x \in Sc(n)$ proizvoljan. Tada je $x = y \cup \{z\}$, za $y \in n$ i $z \notin y$. Pretpostavimo da postoji $u \subset x$ i bijekcija $f : x \to u$. Imamo dva slučaja.

Ako vrijedi $z \notin u$, onda vrijedi $u \subseteq y$ iz čega slijedi $u \setminus \{f(z)\} \subset y$. Međutim, tada vrijedi $bij\big(f \setminus \{(z, f(z))\}, y, u \setminus \{f(z)\}\big)$, što je kontradikcija s pretpostavkom indukcije.

Ako vrijedi $z \in u$, onda postoji $w \in x$ takav da je $f(w) = z$. Definirajmo $h := (id \restriction x \setminus \{w, z\}) \cup \{(z, w), (w, z)\}$. Očito vrijedi $bij(h, x, x)$, stoga imamo $bij(f \circ h, x, u)$. Budući da je $(f \circ h)(z) = f(w) = z$, imamo $bij\big((f \circ h) \setminus \{(z, z)\}, y, u \setminus \{z\}\big)$. Međutim, vrijedi $u \setminus \{z\} \subset y$, što je kontradikcija s pretpostavkom indukcije. ∎

Za kraj točke iskazujemo i dokazujemo Dedekindov teorem (primitivne) rekurzije.

Teorem 2.14. Neka je X skup, $x_0 \in X$ i $f : X \to X$ funkcija. Tada postoji jedinstvena funkcija $g : \mathbb{N} \to X$ takva da vrijedi $g(0) = x_0$ i $g\big(Sc(n)\big) = f\big(g(n)\big)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka su X, x_0 i f kao u pretpostavci teorema. Formula

$$\varphi(t) := \big((0^1, x_0^1)^{1+\delta} \in t^{2+\delta} \wedge (\forall n^1 \in \mathbb{N}^2)(\forall y^1 \in X^2)$$
$$\big((n^1, y^1)^{1+\delta} \in t^{2+\delta} \to (Sc(n^1)^1, f^{2+\delta}(y^1)^1)^{1+\delta} \in t^{2+\delta}\big)\big)$$

je stratificirana, stoga definiramo skup $S := \big\{t \mid \varphi(t)\big\}$. Očito je $\mathbb{N} \times X \in S$. Naime, $(0, x_0) \in \mathbb{N} \times X$, a ako je $(n, y) \in \mathbb{N} \times X$, onda zbog $Sc(n) \in \mathbb{N}$ i $f(y) \in X$ slijedi $\big(Sc(n), f(y)\big) \in \mathbb{N} \times X$. Iz toga slijedi da je S neprazan skup pa vrijedi $g := \bigcap S \subseteq \mathbb{N} \times X$. Dakle, vrijedi $rel(g, \mathbb{N}, X)$.

Dokažimo prvo $\varphi(g)$. Za svaki $t \in S$ imamo $\varphi(t)$, stoga je $0\ t\ x_0$, iz čega slijedi $0\ g\ x_0$. Slično, ako vrijedi $n \in \mathbb{N}$, $y \in X$ i $n\ g\ y$, onda za svaki $t \in S$ imamo $n\ t\ y$. Zbog $\varphi(t)$, dobivamo $Sc(n)\ t\ f(y)$ za svaki $t \in S$, iz čega slijedi $Sc(n)\ g\ f(y)$. Dakle, $g \in S$.

Formula $\psi(n) := (\exists! y^1 \in X^2)(n^1 g^{2+\delta} y^1)$ je stratificirana, stoga možemo dokazati $(\forall n \in \mathbb{N})\psi(n)$ indukcijom po n. Ako je $n = 0$, onda zbog $\varphi(g)$ imamo $0\ g\ x_0$. Pretpostavimo da postoji $x' \neq x_0$ takav da vrijedi $0\ g\ x'$ i definirajmo $g' := g \setminus \{(0, x')\} \subset g$. Tvrdimo da vrijedi $\varphi(g')$. Naime, iz $(0, x_0) \neq (0, x')$ slijedi $(0, x_0) \in g'$. Dalje, ako vrijedi $(n, y) \in g'$, onda vrijedi $(n, y) \in g$, iz čega slijedi $\big(Sc(n), f(y)\big) \in g$. Po Peanovom aksiomu (P3) imamo $Sc(n) \neq 0$. Iz toga dobivamo $(0, x') \neq \big(Sc(n), f(y)\big)$, iz čega slijedi $\big(Sc(n), f(y)\big) \in g'$, odnosno $\varphi(g')$. No to je kontradikcija s činjenicom da je g najmanji skup koji zadovoljava φ.

Pretpostavimo da za neki prirodni broj k postoji jedinstveni $y \in X$ takav da je $k\ g\ y$ i dokažimo tvrdnju za $Sc(k)$.

Budući da vrijedi $\varphi(g)$, imamo $Sc(k)\ g\ f(y)$, stoga preostaje još dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji $u \neq f(y)$ takav da vrijedi $Sc(k)\ g\ u$ i definirajmo $g'' := g \setminus \{(Sc(k), u)\} \subset g$. Tvrdimo da vrijedi $\varphi(g'')$. Po aksiomu (P3) vrijedi $Sc(k) \neq 0$, iz čega slijedi $(0, x_0) \in g''$. Dalje, ako vrijedi $(m, z) \in g''$, onda vrijedi $(m, z) \in g$, iz čega dobivamo $\big(Sc(m), f(z)\big) \in g$. Kada bi vrijedilo $\big(Sc(m), f(z)\big) = \big(Sc(k), u\big)$, onda bi imali $m = k$ po aksiomu (P4) i $u = f(z)$. Međutim, iz $u \neq f(y)$ dobivamo $y \neq z$, što znači da vrijedi $k\ g\ y$ i $k\ g\ z$, što je kontradikcija s pretpostavkom indukcije da je y jedinstven. Dakle, vrijedi $\varphi(g'')$, što je ponovno u kontradikciji s minimalnošću of g u S.

Dakle, vrijedi $func(g, \mathbb{N}, X)$. Već smo dokazali da vrijedi $g(0) = x_0$, a ako za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n\ g\ g(n)$, onda zbog $\varphi(g)$ također vrijedi $Sc(n)\ g\ f\big(g(n)\big)$. Dakle, $g\big(Sc(n)\big) = f\big(g(n)\big)$.

Još preostaje dokazati da je g jedinstvena. Pretpostavimo da postoji $h\colon \mathbb{N} \to X$ takva da je $h \neq g$, $h(0) = x_0$, i za sve $n \in \mathbb{N}$, $h\big(Sc(n)\big) = f\big(h(n)\big)$. Formula $(\forall n^1 \in \mathbb{N}^2)\big(h^{2+\delta}(n^1)^1 = g^{2+\delta}(n^1)^1\big)$ je stratificirana, stoga je možemo dokazati indukcijom po n. Ako je $n = 0$, onda imamo $h(0) = x_0 = g(0)$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo ju za $Sc(n)$.

Imamo $h\big(Sc(n)\big) = f\big(h(n)\big) = f\big(g(n)\big) = g\big(Sc(n)\big)$. Dakle, vrijedi $h = g$, što je kontradikcija.

$\blacksquare$

2.2. KARDINALNI BROJEVI

Teorem 2.15. Formula $set(x) \land set(y) \land \exists f bij(f,x,y)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $set(x^1) \land set(y^1) \land \exists f^{1+\delta} bij(f^{1+\delta}, x^1, y^1)$ ∎

Definiramo relaciju **ekvipotentnosti** dvaju skupova pomoću teorema 1.28 na skupu SET kao $x \sim y \Leftrightarrow \exists f bij(f,x,y)$. Ako za dva skupa x i y vrijedi $(x,y) \in (\sim)$, onda kažemo da su oni **ekvipotentni**.

Definicija 2.16. Definiramo skup **kardinalnih brojeva**
$Card := SET/(\sim) = \{[x]_\sim \mid x \in SET\}$.

Elemente skupa $Card$ nazivamo **kardinalni brojevi**, a klasu ekvivalencije $[x]_\sim$ nazivamo **kardinalni broj skupa** x i često je označavamo s $|x|$. Kažemo da je kardinalni broj $\kappa = [x]_\sim$ **beskonačni kardinalni broj** ako je x beskonačan. Ako x ima tip n onda $|x|$ ima tip $n+1$. Primijetimo da za svaki $\kappa \in Card$ vrijedi $\kappa = \{z \mid (\exists x \in \kappa)(x \sim z)\}$, što je jednako skupu $\{z \mid z \sim x\}$, gdje je $x \in \kappa$ neki fiksni reprezentant. Također, svaki kardinalni broj je neprazan skup jer iz $\kappa \in Card$ slijedi $\kappa = [x]_\sim$ za neki skup x, a uvijek vrijedi $x \sim x$. Oboje vrijedi sasvim općenito za klase ekvivalencija s obzirom na bilo koju relaciju ekvivalencije.

Teorem 2.17. Vrijedi sljedeće: $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall y \in n)\forall z(z \in n \leftrightarrow y \sim z)$.

Dokaz. Formula $(\forall n^2 \in \mathbb{N}^3)(\forall y^1 \in n^2)\forall z^1(z^1 \in n^2 \leftrightarrow y^1 \sim^{2+\delta} z^1)$ je stratificirana, stoga ju dokazujemo indukcijom po n.

Neka je $n = 0$. Za svaki $y \in n$ vrijedi $y = \emptyset$. Uzmimo proizvoljni z. Ako vrijedi $z \in n$, onda je $z = \emptyset = y$ iz čega očito slijedi $y \sim z$. S druge strane, ako je $y \sim z$, onda postoji bijekcija $f\colon y \to z$. Budući da je $y = \emptyset$, mora vrijediti $z = rng(f) = rng(\emptyset) = \emptyset \in 0 = n$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n i dokažimo ju za $Sc(n)$.

Neka su $y \in Sc(n)$ i z proizvoljni. Tada imamo $y = a \cup \{b\}$, gdje je $a \in n$ i $b \notin a$.

Ako vrijedi $z \in Sc(n)$, onda je $z = u \cup \{v\}$, gdje je $u \in n$ i $v \notin u$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $a \sim u$, što znači da postoji bijekcija $f\colon a \to u$. Definiramo funkciju $g := f \cup \{(b,v)\}$, koja je očito bijekcija između y i z.

Ako vrijedi $y \sim z$, onda postoji bijekcija $f\colon y \to z$. Definiramo $u := f[a]$ i $v := f(b)$ za koje vrijedi $z = u \cup \{v\}$. Očito vrijedi $u \sim a \in n$, stoga po pretpostavci indukcije imamo $u \in n$. Također, očito je $v \notin x$, stoga imamo $z = u \cup \{v\} \in Sc(n)$. ∎

Teorem 2.17 je vrlo važan za dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 2.18. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. $V \notin FIN$;

2. $\emptyset \notin \mathbb{N}$;

3. $\mathbb{N} \subseteq Card$;

4. Vrijedi (P4), odnosno $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\big(Sc(n) = Sc(m) \to n = m\big)$.

Dokaz.

1. $\Rightarrow$ *2.* Pretpostavimo da je V beskonačan. Formula $(\forall n^1 \in \mathbb{N}^2)(n^1 \neq \emptyset^1)$ je stratificirana, stoga ju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 0$ imamo $0 = \{\emptyset\} \neq \emptyset$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo tvrdnju za $Sc(n)$.

Pretpostavimo da vrijedi $Sc(n) = \emptyset$. Znamo da vrijedi $Sc(n) = \big\{y \cup \{z\} \mid y \in n \wedge z \notin y\big\} = \big\{t \mid (\exists y \in n)(\exists z \notin y)\big(t = y \cup \{z\}\big)\big\}$. Sada iz $Sc(n) = \emptyset$ slijedi $(\forall y \in n)\forall z(z \in y)$, a iz aksioma ekstenzionalnosti i činjenice da je V univerzalni skup dobivamo $\forall y(y \in n \to V = y)$. Iz toga sada slijedi da je $n = \emptyset$ ili $n = \{V\}$. Jednakost $n = \emptyset$ je nemoguća zbog pretpostavke indukcije, a iz $n = \{V\}$ dobivamo da je $V \in FIN$, suprotno pretpostavci.

2. $\Rightarrow$ *3.* Pretpostavimo da vrijedi $\emptyset \notin \mathbb{N}$. Formula $(\forall n^1 \in \mathbb{N}^2)(n^1 \in Card^2)$ je stratificirana, stoga ju dokazujemo indukcijom po n.

Za $n = 0$ imamo $0 = |\emptyset| = \{z \mid z \sim \emptyset\} \in Card$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo ju za $Sc(n)$.

Po pretpostavci imamo $Sc(n) \neq \emptyset$, stoga postoji $y \in Sc(n)$. Po teoremu 2.17 imamo da je $z \in Sc(n) \leftrightarrow z \in |y|$. Dakle, $Sc(n) = |y| \in Card$.

3. $\Rightarrow$ *4.* Pretpostavimo da vrijedi $N \subseteq Card$. Neka su $n, m \in \mathbb{N} \subseteq Card$ takvi da vrijedi $Sc(n) = Sc(m) = |z|$ za neki z. Tada vrijedi $z = a \cup \{b\} = c \cup \{d\}$, gdje su $a \in n$, $c \in m$, $b \notin a$ i $d \notin c$.

Ako vrijedi $b = d$, onda vrijedi $a = c$. Naime, ako je $w \in a \subseteq z = c \cup \{d\}$, onda je $w \in c \cup \{d\}$. Budući da je $w \neq d$, vrijedi $w \in c$. Obratna inkluzija se dokazuje analogno.

Ako vrijedi $b \neq d$, onda je $d \in a$ i $b \in c$. Definiramo funkciju $g := \big(id \restriction (z \setminus \{b,d\})\big) \cup \{(b,d)\}$ koja je očito bijekcija između a i c. Dakle, u oba slučaja vrijedi $a \sim c$, odnosno $n = m$.

4. $\Rightarrow$ *1.* Dokažimo tvrdnju obratom po kontrapoziciji. Pretpostavimo da vrijedi $V \in FIN$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $V \in n$. Tvrdimo da vrijedi $n = \{V\}$. Pretpostavimo da postoji $x \in n$ takav da je $x \neq V$. Tada mora vrijediti $x \subset V$, a budući da je $x, V \in n$, po teoremu 2.17 slijedi da je $x \sim V$. To znači da je V Dedekind beskonačan, a teorem 2.13 povlači da je V beskonačan, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, vrijedi $n = \{V\}$. Sada po karakterizaciji sljedbenika imamo $Sc(n) = \{y \cup \{z\} \mid y \in n \wedge z \notin y\} = \{y \cup \{z\} \mid z \notin V\} = \emptyset \in \mathbb{N}$ i $Sc(\emptyset) = \emptyset$. Sada imamo $Sc(n) = Sc(\emptyset)$, ali $n \neq \emptyset$. Dakle, ne vrijedi (P4). ■

Iako pojmove konačnosti i beskonačnosti možemo definirati pomoću prirodnih brojeva, u NFU nismo u mogućnosti dokazati postojanje beskonačnih skupova. Drugim riječima, aksiom beskonačnosti ($V \notin FIN$) je nezavisan od teorije NFU [40]. Budući da iz teorema 2.18 slijedi da je Peanov aksiom (P4) ekvivalentan aksiomu beskonačnosti, ne možemo dokazati ni njega u NFU. Srećom, aksiom beskonačnosti je relativno konzistentan s NFU [40] pa ga možemo uvesti kao novi aksiom. Zbog teorema 2.18, bilo koje od četiri u njemu spomenute tvrdnje mogu poslužiti kao aksiom beskonačnosti.

***Aksiom beskonačnosti*:**

$$V \notin FIN.$$

Iz teorema 2.18(3) slijedi da je svaki prirodni broj kardinalni broj. Također slijedi da je svaki konačni kardinalni broj zapravo prirodni broj. Naime, ako je $\kappa = |X|$ konačni kardinalni broj, onda je $X \in FIN$, što znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $X \in n$. Sada iz teorema 2.17 slijedi $\kappa = n$. Primijetimo da u ovom trenutku još uvijek ne znamo je li skup prirodnih brojeva beskonačan ili nije, ali to možemo dokazati pomoću teorema 2.13 i ekvivalencije aksioma (P4) s aksiomom beskonačnosti.

Teorem 2.19. Skup $\mathbb{N}$ je Dedekind-beskonačan.

Dokaz. Po teoremu 1.34 postoji funkcija s takva da je $s(n) = Sc(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Očito je s funkcija u $\mathbb{N}$. Zbog aksioma (P2), (P3) i teorema 2.11(1), slika funkcije s jednaka je skupu $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, a zbog aksioma (P4) je s injekcija. Dakle, imamo $bij(s, \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{0\})$, a budući da je $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N}$, imamo da je $\mathbb{N}$ Dedekind-beskonačan. ■

Sada je beskonačnost skupa prirodnih brojeva jednostavni korolar teorema 2.13.

Teorem 2.20. Skup $\mathbb{N}$ je beskonačan.

Dokaz. Slijedi iz teorema 2.19 i 2.13. ■

Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva označavamo s $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$. Za *beskonačni* skup X kažemo da je **prebrojiv** ako vrijedi $|X| = \aleph_0$, te da je **neprebrojiv** ako vrijedi $\aleph_0 \neq |X|$.

Sada smo u mogućnosti pomoću aksioma beskonačnosti, teorema 2.18 i teorema 2.14 definirati zbrajanje prirodnih brojeva. Primijetimo da je operacija Sc funkcija na skupu prirodnih brojeva. Za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$ po teoremu 2.14 postoji funkcija Ad_m takva da vrijedi $Ad_m(0) = m$ i $Ad_m\big(Sc(n)\big) = Sc\big(Ad_m(n)\big)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Definiramo **zbrajanje prirodnih brojeva** $n, m \in \mathbb{N}$ kao $m + n := Ad_m(n)$. Očito je $Sc = Ad_1$.

Množenje definiramo na sličan način: za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$ po teoremu 2.14 postoji funkcija Ml_m takva da vrijedi $Ml_m(0) = 0$ i $Ml_m\big(Sc(n)\big) = Ad_m\big(Ml_m(n)\big)$. Definiramo **množenje prirodnih brojeva** $n, m \in \mathbb{N}$ kao $m \cdot n := Ml_m(n)$.

Jednostavno se indukcijom dokazuju osnovna svojstva zbrajanja i množenja (asocijativnost, komutativnost i distributivnost). Također jednostavno iz definicije slijedi da ako n i m imaju tip k, onda $n + m$ i $n \cdot m$ imaju tip k.

Teorem 2.21. Formula $\kappa \in Card \wedge \lambda \in Card \wedge (\forall X \in \kappa)(\forall Y \in \lambda)\big(\exists f\, inj(f, X, Y)\big)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$\kappa^2 \in Card^3 \wedge \lambda^2 \in Card^3 \wedge (\forall X^1 \in \kappa^2)(\forall Y^1 \in \lambda^2)\exists f\, inj(f^{1+\delta}, X^1, Y^1).$$ ■

Sada pomoću teorema 1.28 definiramo uređaj $\leq_{Card}$ na skupu $Card$ kao

$$\kappa \leq_{Card} \lambda \Leftrightarrow (\forall X \in \kappa)(\forall Y \in \lambda)\exists f\, inj(f, X, Y).$$

Primijetimo da iz teorema 2.18(3) i definicije relacije $\leq_{Card}$ imamo da je skup $\mathbb{N}$ uređen s $\leq_{Card}$ na uobičajen način.

Relaciju $(\leq_{Card})$ moguće je definirati na još dva, ekvivalentna načina, ovisno o kvantifikatorima koje upotrebljavamo. Umjesto $(\forall X \in \kappa)(\forall Y \in \lambda)$ moguće je promatrati $(\forall X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)$ ili čak $(\exists X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)$.

Teorem 2.22. Neka su κ i λ kardinalni brojevi. Tada vrijedi

$$\kappa \leq_{Card} \lambda \Leftrightarrow (\forall X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)\exists f\, inj(f, X, Y) \Leftrightarrow (\exists X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)\exists f inj(f, X, Y)$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\kappa \leq_{Card} \lambda$ i dokažimo $(\forall X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)\exists f\, inj(f,X,Y)$. Neka je $X \in \kappa$ proizvoljan. Budući da je $\lambda \neq \emptyset$, slijedi da postoji $Y \in \lambda$. Sada iz $\kappa \leq_{Card} \lambda$ slijedi da postoji injekcija $f\colon X \to Y$.

Pretpostavimo da vrijedi $(\forall X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)\exists f\, inj(f,X,Y)$ i dokažimo $(\exists X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)\exists f\, inj(f,X,Y)$. Budući da su $\kappa, \lambda \neq \emptyset$, postoji $X_0 \in \kappa$ i za taj X_0 iz pretpostavke slijedi da postoji $Y_0 \in \lambda$. Sada iz pretpostavke slijedi da postoji injekcija $f\colon X_0 \to Y_0$.

Pretpostavimo da vrijedi $(\exists X \in \kappa)(\exists Y \in \lambda)\exists f\, inj(f,X,Y)$ i dokažimo $\kappa \leq_{Card} \lambda$. Neka su $X \in \kappa$ i $Y \in \lambda$ proizvoljni. Po pretpostavci postoje $X_0 \in \kappa$ i $Y_0 \in \lambda$ i injekcija $f\colon X_0 \to Y_0$. Iz definicije kardinalnih brojeva dobivamo $X \sim X_0$ i $Y \sim Y_0$, što znači da postoje bijekcija $g_1\colon X \to X_0$ i $g_2\colon Y_0 \to Y$. Tada je funkcija $g_2 \circ f \circ g_1\colon X \to Y$ injekcija. ■

U nastavku nećemo praviti razliku između ekvivalentnih definicija uređaja na kardinalnim brojevima iz teorema 2.22, odnosno koristit ćemo bilo koju od njih prema potrebi.

Lema 2.23. Neka su A,B,C,D skupovi takvi da vrijedi $A \cap B = C \cap D = \emptyset$. Ako vrijedi $A \sim C$ i $B \sim D$, onda vrijedi $A \cup B \sim C \cup D$.

Dokaz. Neka su $f\colon A \to C$ i $g\colon B \to D$ bijekcije. Definiramo $h := f \cup g$, koja je očito funkcija s $A \cup B$ u $C \cup D$. Funkcija h je surjekcija jer vrijedi $rng(h) = rng(f) \cup rng(g) = C \cup D$, a također je i injekcija. Naime, pretpostavimo da vrijedi $h(x_1) = h(x_2)$. Ako su $x_1, x_2 \in A$ ili $x_1, x_2 \in B$, onda iz $h(x_1) = h(x_2)$ dobivamo $f(x_1) = f(x_2)$ ili $g(x_1) = g(x_2)$. Budući da su f i g injekcije, u oba slučaja dobivamo $x_1 = x_2$. Ako je $x_1 \in A$ i $x_2 \in B$, onda iz $h(x_1) = h(x_2)$ dobivamo $C \ni f(x_1) = g(x_2) \in D$, što je kontradikcija s $C \cap D = \emptyset$. ■

Teorem 2.24. Za sve $\alpha, \beta \in Card$ vrijedi $\alpha \leq_{Card} \beta$ ili $\beta \leq_{Card} \alpha$.

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta \in Card$ proizvoljni te $A \in \alpha$ i $B \in \beta$. Po Zermelovu teoremu, skupove A i B možemo dobro urediti. Fiksirajmo dobre uređaje na A i B te ih označimo redom s $\preceq$ i $\sqsubseteq$. Sada po teoremu 1.57 imamo tri slučaja.

Ako vrijedi $(\preceq) \simeq (\sqsubseteq)$, onda je $A = dom(\preceq) \sim dom(\sqsubseteq) = B$, iz čega slijedi $\alpha = |A| = |B| = \beta$. Ako postoji $b \in B$ takav da je $p_{\sqsubseteq}(b) \simeq (\preceq)$, onda je $A \sim P_{\sqsubseteq}(b) \subseteq B$, iz čega slijedi $\alpha = |A| \leq_{Card} |B| = \beta$. Analogno se dokazuje kada postoji $a \in A$ takav da je $p_{\preceq}(a) \simeq (\sqsubseteq)$. ■

Teorem 2.25. Relacija $\leq_{Card}$ na skupu $Card$ je dobar uređaj.

Dokaz. Refleksivnost: Neka je κ proizvoljni kardinalni broj. Tada za proizvoljne $X, Y \in \kappa$ vrijedi $X \sim Y$, a jer bijektivnost povlači injektivnost, to znači $\kappa \leq_{Card} \kappa$.

Antisimetričnost: Neka su $\kappa = |X|$ i $\lambda = |Y|$ kardinalni brojevi. Pretpostavimo da vrijedi $\kappa \leq_{Card} \lambda$ i $\lambda \leq_{Card} \kappa$, odnosno da postoje injekcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$. Za početak dokažimo da postoji skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi $g\big[Y \setminus f[S]\big] = X \setminus S$.

Formula $x^1 = X^1 \setminus g^2\big[Y^1 \setminus f^2[x^1]^1\big]^1$ je stratificirana, stoga po teoremu 1.34 postoji funkcija zadana s $F(x) = X \setminus g\big[Y \setminus f[x]\big]$, za svaki $x \in \mathscr{P}(X)$. Dokažimo da je F monotona. Neka su $x, y \subseteq X$ proizvoljni takvi da vrijedi $x \subseteq y$. Tada imamo $f[x] \subseteq f[y]$, iz čega slijedi $Y \setminus f[y] \subseteq Y \setminus f[x]$, što pak daje $g\big[Y \setminus f[y]\big] \subseteq g\big[Y \setminus f[x]\big]$, a iz toga pak dobivamo $X \setminus g\big[Y \setminus f[x]\big] \subseteq X \setminus g\big[Y \setminus f[y]\big]$, što znači da vrijedi $F(x) \subseteq F(y)$. Formula $x^1 \subseteq X^1 \wedge x^1 \subseteq F(x)^1$ je stratificirana pa postoji skup $M := \{x \mid x \subseteq X \wedge x \subseteq F(x)\}$, a onda i skup $S := \bigcup M$. Tvrdimo da je S fiksna točka funkcije F, odnosno da je $F(S) = S$. Ako je $z \in S$, onda postoji $x \in M$ takav da je $z \in x$. Iz $x \in M$ slijedi $z \in x \subseteq F(x) \subseteq F(S)$, odnosno $z \in F(S)$. Dakle, $S \subseteq F(S)$, iz čega dobivamo $F(S) \subseteq F\big(F(S)\big)$, iz čega $F(S) \in M$, pa dobivamo $F(S) \subseteq S$. Dakle, $F(S) = S$. Sada dobivamo da je $g \restriction (Y \setminus f[S])\colon Y \setminus f[S] \to X \setminus S$ bijekcija. Imamo $X \setminus S \sim Y \setminus f[S]$, $S \sim f[S]$ i $(X \setminus S) \cap S = \emptyset = (Y \setminus f[S]) \cap f[S]$. Stoga iz leme 2.23 slijedi $X = (X \setminus S) \cup S \sim (Y \setminus f[S]) \cup f[S] = Y$.

Tranzitivnost: Neka su κ, λ i μ kardinalni brojevi takvi da vrijedi $\kappa \leq_{Card} \lambda$ i $\lambda \leq_{Card} \mu$. Uzmimo proizvoljne $X \in \kappa$ i $Z \in \mu$. Tada postoji $Y \in \lambda$ te za njega postoje injekcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Budući da je kompozicija injekcija ponovno injekcija, slijedi da je $g \circ f : X \to Z$ također injekcija, a iz toga po definiciji vrijedi $\kappa \leq_{Card} \mu$.

Dobra uređenost: Neka je K neprazni skup kardinalnih brojeva. Uzmimo proizvoljni $\kappa \in K$ i $X \in \kappa$. Po Zermelovu teoremu postoji dobar uređaj na X, koji označimo s $\preceq$. Formula $x^1 \in X^2 \wedge (\exists \lambda^3 \in K^4)\big(\lambda^3 \leq_{Card}^{4+\delta} |P_{\preceq}(x^1)^2|^3\big)$ je stratificirana pa definiramo skup $M := \{x \mid x \in X \wedge (\exists \lambda \in K)(\lambda \leq_{Card} |P_{\preceq}(x)|)\}$. Formula $x^1 \in X^2 \wedge (\forall y^1 \in M^2)(x^1 \prec^{2+\delta} y^1)$ je također stratificirana, pa definiramo skup $S := \{x \in X \mid (\forall y \in M)(x \prec y)\}$.

Tvrdnja 1. Ne postoji $\lambda \in K$ takav da je $\lambda <_{Card} |S|$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\lambda \in K$ takav da je $\lambda <_{Card} |S|$. Neka je $A \in \lambda$. Tada postoji injekcija $f\colon A \to S$ te vrijedi $A \sim rng(f) \subseteq S$ i $A \not\sim S$. Označimo $(\sqsubseteq) := (\preceq) \cap (S \times S)$ i $(\trianglelefteq) := (\preceq) \cap (rng(f) \times rng(f))$. Tada po teoremu 1.57 imamo tri slučaja.

Ako vrijedi $(\sqsubseteq) \simeq (\trianglelefteq)$, onda vrijedi $S \sim rng(f)$, što je kontradikcija.

Ako postoji $y \in rng(f)$ takav da je $(\sqsubseteq) \simeq p_{\trianglelefteq}(y)$, onda je $S \sim P_{\trianglelefteq}(y)$. Budući da vrijedi $P_{\trianglelefteq}(y) \subseteq rng(f)$, imamo $|S| \leq_{Card} |rng(f)|$. Sada iz antisimetričnosti relacije $\leq_{Card}$ dobivamo $S \sim rng(f)$, što je kontradikcija.

Ako postoji $x \in S$ takav da je $(\trianglelefteq) \simeq p_{\sqsubseteq}(x)$, onda vrijedi $rng(f) \sim P_{\sqsubseteq}(x) = P_{\preceq}(x)$, pa imamo

$A \sim rng(f) \sim P_{\preceq}(x)$. Iz toga slijedi $\lambda = |A| = |P_{\preceq}(x)| \leq_{Card} |P_{\preceq}(x)|$, što znači da je $x \in M$. Budući da je $x \in S$, vrijedi $x \prec x$, što je kontradikcija. □

Tvrdnja 2. $|S| \in K$.

Dokaz. Ako je $M = \emptyset$, onda je $S = X$, iz čega slijedi $|S| = |X| = \kappa \in K$.

Ako je $M \neq \emptyset$, onda je $S = P_{\preceq}(x_0)$, gdje smo s x_0 označili $\preceq$-najmanji element od M. Tada za taj x_0, po definiciji skupa M, postoji $\lambda_0 \in K$ takav da je $\lambda_0 \leq_{Card} |P_{\preceq}(x_0)| = |S|$. Prema tvrdnji 1 ne može biti $\lambda_0 < |S|$, stoga je $|S| = \lambda_0 \in K$. □

Iz tvrdnje 1 i tvrdnje 2 slijedi da je $|S|$ minimalni element od K, a onda iz teorema 2.24 slijedi da je $|S|$ zapravo najmanji element od K. ■

Svojstvo antisimetričnosti relacije $\leq_{Card}$ još nazivamo **Cantor–Bernsteinov teorem**.

Teorem 2.26. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Za svaki prirodni broj n, ako je $x \in Sc(n)$ i $y \in x$, onda je $x \setminus \{y\} \in n$.
2. Ne postoji prirodni broj n takav da je $n <_{Card} 0$.
3. Za svaki prirodni broj n vrijedi $n <_{Card} Sc(n)$.
4. Za sve prirodne brojeve n i m vrijedi, $m \leq_{Card} n$ ako i samo ako $m <_{Card} Sc(n)$.
5. Svaki neprazni konačni parcijalno uređeni skup ima maksimalni element.
6. Za svaki prirodni broj n vrijedi $n <_{Card} \aleph_0$.
7. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Ako je $n <_{Card} m$, onda je $Sc(n) <_{Card} Sc(m)$.
8. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Ako je $n <_{Card} m$, onda za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $n + x <_{Card} m + x$.
9. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Ako je $n <_{Card} m$, onda za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \cdot x \leq_{Card} m \cdot x$.

Dokaz.

1. Uzmimo proizvoljne $n \in \mathbb{N}$, $x \in Sc(n)$ i $y \in x$. Iz $x \in Sc(n)$ slijedi da postoji $z \in x$ takav da je $x \setminus \{z\} \in n$. Jedna bijekcija između $x \setminus \{y\}$ i $x \setminus \{z\}$ je $id \restriction (x \setminus \{y\})$, ako je $y = z$, te $\big(id \restriction (x \setminus \{y, z\})\big) \cup \{(z, y)\}$ inače.
2. Pretpostavimo suprotno, da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \leq_{Card} 0 \wedge n \neq 0$. Uzmimo proizvoljne $A \in n$ i $B \in 0$. Po definiciji relacije $\leq_{Card}$, postoji injekcija s A u B. Međutim, $B \in 0$ znači da je $B = \emptyset$. Dakle, injekcija mora biti prazna, što znači da je $A = \emptyset$. To je u kontradikciji s $n \neq 0$.

3. Uzmimo proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljni $A \in n$. Tada je $A \neq V$, stoga postoji $x \in V$ takav da je $x \notin A$. Iz karakterizacije sljedbenika dobivamo $A \cup \{x\} \in Sc(n)$. Očito je $inj(id_A, A, A \cup \{x\})$, pa imamo $n \leq_{Card} Sc(n)$. Pretpostavimo da vrijedi $n = Sc(n)$. To znači da postoji bijekcija $f\colon A \to A \cup \{x\}$. Očito je $A \subset A \cup \{x\}$, a po teoremu 2.13 imamo da je $A \cup \{x\}$ beskonačan. Dakle, $A \cup \{x\} \notin FIN$, što je kontradikcija s $A \cup \{x\} \in Sc(n) \subseteq FIN$. Dakle, $n <_{Card} Sc(n)$.

4. Uzmimo proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da vrijedi $m \leq_{Card} n$. Iz (3) slijedi $n \leq_{Card} Sc(n)$ i $n \neq Sc(n)$. Iz tranzitivnosti relacije $\leq_{Card}$ dobivamo $m \leq_{Card} Sc(n)$. Pretpostavimo da vrijedi $m = Sc(n)$. Tada imamo $Sc(n) \leq_{Card} n$ i $n \leq_{Card} Sc(n)$, što daje $n = Sc(n)$. To je kontradikcija s $n \neq Sc(n)$, stoga imamo $m \leq_{Card} Sc(n)$ i $m \neq Sc(n)$, odnosno $m <_{Card} Sc(n)$.

   Pretpostavimo da vrijedi $m <_{Card} Sc(n)$. Neka su $A \in m$ i $B \in Sc(n)$ proizvoljni. Po pretpostavci postoji injekcija $f\colon A \to B$, koja nije bijekcija. To znači da postoji $b \in B$ takav da je $b \notin rng(f)$. Iz toga slijedi da je f također injekcija s A u $B \setminus \{b\}$. Sada (1) povlači $B \setminus \{b\} \in n$, iz čega slijedi $m \leq_{Card} n$.

5. Trebamo dokazati

$$(\forall X \in FIN \setminus \{\emptyset\}) \forall R \big(Po(R, X) \to (\exists x_0 \in X)(\forall y \in X \setminus \{x_0\})(x_0 \not R\, y) \big),$$

   što slijedi iz stratificirane formule

$$(\forall n^3 \in \mathbb{N}^4 \setminus \{0^3\}^4)(\forall X^2 \in n^3) \forall R^{2+\delta} \big(Po(R^{2+\delta}, X^2) \to$$
$$\to (\exists x_0^1 \in X^2)(\forall y^1 \in X^2 \setminus \{x_0^1\}^2)(x_0^1 \not R^{2+\delta} y^1) \big),$$

   koju dokazujemo indukcijom po n (počevši od 1).

   Neka je $n = 1$. Uzmimo proizvoljni $X \in 1$ i parcijalni uređaj R na X. Iz $X \in 1 = Sc(0)$ dobivamo da postoji z_0 takav da je $X = \{z_0\}$. To znači da je $R = \{(z_0, z_0)\}$, stoga je z_0 maksimalni element od X po relaciji R. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n \geq 1$ i dokažimo ju za $Sc(n)$.

   Neka je $X \in Sc(n)$ proizvoljan i R parcijalni uređaj na X. Iz karakterizacije sljedbenika dobivamo $X = x \cup \{y\}$, gdje je $x \in n$ i $y \notin x$. Budući da je R parcijalni uređaj na X, $R' := R \cap (x \times x)$ je parcijalni uređaj na x. Iz pretpostavke indukcije slijedi da postoji maksimalni element z_0 od x po relaciji R'. Ako je $z_0\, R\, y$, onda je y maksimalni element od X po R. Naime, kada bi postojao $w_0 \neq y$ takav da je $y \, R \, w_0$, onda bi iz $z_0 \, R \, y$ i tranzitivnosti od R imali $z_0 \, R \, w_0$. Budući da je $w_0 \neq y$, slijedi $w_0 \in x$, što je kontradikcija s maksimalnošću od z_0. Ako je $y \, R \, z_0$ ili z_0 i y nisu usporedivi, onda je z_0 maksimalni element od X po relaciji R.

6. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo da vrijedi $n \geq_{Card} \aleph_0$. Po definiciji relacije $\leq_{Card}$, postoji injekcija $f \colon \mathbb{N} \to A$, gdje je $A \in n$. to znači da vrijedi $\mathbb{N} \sim rng(f)$, gdje je $rng(f) \subseteq A$. Budući da je A konačan, po teoremu 2.9(1) je $rng(f)$ konačan. To znači da je $\mathbb{N}$ konačan, što je kontradikcija. Dakle, $n <_{Card} \aleph_0$.

7. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $n <_{Card} m$. Pretpostavimo da vrijedi $Sc(m) \leq_{Card} Sc(n)$. Iz (3) dobivamo $m <_{Card} Sc(m) \leq_{Card} Sc(n)$, a iz (4) dobivamo $m \leq_{Card} n$, što je kontradikcija.

8. Uzmimo proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$. Formula $(\forall x^1 \in \mathbb{N}^2)(n^1 <^{2+\delta}_{Card} m^1 \to (n^1 + x^1)^1 <^{2+\delta}_{Card} (m^1 + x^1)^1)$ je stratificirana, pa je dokazujemo indukcijom po x. Neka je $x = 0$. Iz $n <_{Card} m$ dobivamo $n + x = n + 0 = n <_{Card} m = m + x$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $x \in \mathbb{N}$ i dokažimo ju za $Sc(x)$. Ako je $n <_{Card} m$, onda pomoću asocijativnosti dobivamo $n + Sc(x) = Sc(n + x)$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $n + x <_{Card} m + x$. Sada iz (7) dobivamo $Sc(n + x) <_{Card} Sc(m + x)$. Dakle, $n + Sc(x) \leq_{Card} Sc(m + x) = m + Sc(x)$.

9. Uzmimo proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$. Formula $(\forall x^1 \in \mathbb{N}^2)\big(n^1 <^{2+\delta}_{Card} m^1 \to (n^1 \cdot x^1)^1 \leq^{2+\delta}_{Card} (m^1 \cdot x^1)^1\big)$ je stratificirana, pa je dokazujemo indukcijom po x. Za $x = 0$ tvrdnja slijedi trivijalno (jer je za svaki $y \in \mathbb{N}$, $y \cdot 0 = 0 \cdot y = Ml_y(0) = 0$). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $x \in \mathbb{N}$ i dokažimo ju za $Sc(x)$. Ako je $n <_{Card} m$, onda po pretpostavci indukcije, tvrdnji (8) i komutativnosti zbrajanja dobivamo $n \cdot Sc(x) = n \cdot x + n \leq_{Card} m \cdot x + m = m \cdot Sc(x)$. ∎

Ako je uređaj u 2.26(5) dobar, onda je maksimalni element ujedno i najveći. Primijetimo da iz teorema 2.26(5) i teorema 2.25 slijedi da svaki konačni skup prirodnih brojeva s obzirom na relaciju $\leq_{Card}$ ima najveći element.

Početni komad prirodnog broja $n \in \mathbb{N}$ s obzirom na $\leq_{Card}$ označavamo $A_n := P_{\leq_{Card}}(n)$. Iz definicije početnog komada slijedi da ako n ima tip k, onda A_n ima tip $k+1$. Budući da je svaki konačni kardinalni broj ujedno i prirodni broj, slijedi da je $A_n \subseteq \mathbb{N}$. Još kažemo da je A_n **početni komad prirodnih brojeva**.

Teorem 2.27. 1. Svaki početni komad prirodnih brojeva je konačan.

2. Neka je X skup početnih komada prirodnih brojeva takav da vrijedi $\bigcup X \subset \mathbb{N}$. Tada je $\bigcup X$ početni komad prirodnih brojeva.

Dokaz. 1. Formula $(\forall n^1 \in \mathbb{N}^2)(A_n^2 \in FIN^3)$ je stratificirana, stoga ju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 0$ imamo $A_0 = \{m \in \mathbb{N} \mid m <_{Card} 0\} = \emptyset \in 0 \subseteq FIN$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo je za $Sc(n)$.

Budući da je $A_n \in FIN$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A_n \in k$. Iz definicije početnog komada prirodnih brojeva slijedi $n \notin A_n$. Sada imamo $A_{Sc(n)} = A_n \cup \{n\} \in Sc(k)$.

2. Pretpostavimo da je X skup početnih komada prirodnih brojeva takvih da vrijedi $\bigcup X \subset \mathbb{N}$. Ako je $X = \emptyset$ ili $X = \{A_0\}$, onda je očito $\bigcup X = A_0$. Dokažimo tvrdnju za ostale X. Skup $\bigcup X$ je pravi podskup od $\mathbb{N}$, stoga postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m >_{Card} n$ za sve $n \in \bigcup X$. Tvrdimo da je $\bigcup X \subseteq A_m$. Neka je $w \in \bigcup X$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $w \in A_n$. Budući da vrijedi $n <_{Card} m$, imamo $A_n \subseteq A_m$, što daje $w \in A_m$. Sada iz (1) i teorema 2.9(1) slijedi da je $\bigcup X$ neprazni konačni podskup od $\mathbb{N}$. Budući da je $\leq_{Card}$ dobar uređaj, postoji najveći element od $\bigcup X$, koji označimo s r. Tada za svaki $x \in \bigcup X$ vrijedi $x \leq_{Card} r$, odnosno $x <_{Card} Sc(r)$. Dakle, $\bigcup X \subseteq A_{Sc(r)}$. Dokažimo obrnutu inkluziju. Pretpostavimo da je $x \in A_{Sc(r)}$, odnosno $x \leq_{Card} r$. Budući da je $r \in \bigcup X$, postoji $A_i \in X$ takav da je $r \in A_i$. Tada $x \leq_{Card} r <_{Card} i$ povlači $x \in A_i \subseteq \bigcup X$. ■

Teorem 2.28. Svaki beskonačni skup ima prebrojiv podskup.

Dokaz. Neka je X beskonačan skup. Dokazujemo da postoji injekcija s $\mathbb{N}$ u X.

Formula $(\exists n^1 \in \mathbb{N}^2) inj(f^{2+\delta}, A_{n^1}^2, X^2) \vee inj(f^{2+\delta}, \mathbb{N}^2, X^2)$ je stratificirana, stoga definiramo skup $K := \big\{f \mid (\exists n \in \mathbb{N}) inj(f, A_n, X) \vee inj(f, \mathbb{N}, X)\big\}$. Skup K je neprazan jer je $\emptyset \in K$. Naime, za $n = 0$ iz teorema 2.26(2) imamo $A_0 = \emptyset$, iz čega slijedi $inj(\emptyset, A_0, X)$. Uredimo K inkluzijom i dokažimo da zadovoljava uvjete Zornove leme.

Neka je $C \subseteq K$ proizvoljni neprazni lanac. Trebamo dokazati $\bigcup C \in K$. Iz teorema 1.49 dobivamo da je $\bigcup C$ injekcija, $rng\big(\bigcup C\big) \subseteq X$, i $dom\big(\bigcup C\big) \subseteq \mathbb{N}$. Ako vrijedi $dom\big(\bigcup C\big) = \mathbb{N}$, onda je očito $\bigcup C \in K$. Ako je $dom\big(\bigcup C\big) \neq \mathbb{N}$, budući da je domena svakog elementa od C početni komad prirodnih brojeva, iz teorema 1.49 i teorema 2.27(2) slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $dom\big(\bigcup C\big) = A_{n_0}$, što povlači $\bigcup C \in K$. Sada koristeći Zornovu lemu dobivamo da postoji maksimalni element od K. Jedan maksimalni element označimo s f_0.

Ako je $dom(f_0) \neq \mathbb{N}$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $dom(f_0) = A_n$. Ako vrijedi $rng(f_0) = X$, onda imamo $bij(f_0, A_n, X)$, što je kontradikcija jer je A_n konačan po teoremu 2.27(1), a X je beskonačan po pretpostavci. Ako vrijedi $rng(f_0) \neq X$, onda postoji $x \in X \setminus rng(f_0)$. Definiramo funkciju $f_1 := f_0 \cup \{(n,x)\}$. Očito vrijedi $inj(f_1, A_{Sc(n)}, X)$, dakle $f_0 \subset f_1 \in K$, što je kontradikcija s maksimalnošću od f_0. Dakle, $dom(f_0) = \mathbb{N}$.

Sada imamo $inj(f_0, \mathbb{N}, X)$ i $rng(f_0) \sim \mathbb{N}$ je traženi prebrojiv podskup od X. ∎

Jednostavna posljedica teorema 2.28 je sljedeći rezultat.

Teorem 2.29. Neka je $X \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan skup. Tada je $|X| = \aleph_0$.

Dokaz. Iz $X \subseteq \mathbb{N}$ slijedi da je $|X| \leq_{Card} \aleph_0$. S druge strane, X je beskonačan skup pa po teoremu 2.28 postoji $X_0 \subseteq X$ takav da je $|X_0| = \aleph_0$. No tada imamo $\aleph_0 = |X_0| \leq_{Card} |X|$, a onda iz antisimetričnosti relacije $\leq_{Card}$ slijedi $|X| = \aleph_0$. ∎

Iz teorema 2.29 možemo zaključiti da je kardinalni broj skupa prirodnih brojeva najmanji beskonačni kardinalni broj. Naime, kada bi postojao beskonačni kardinalni broj $\kappa = |X| \neq \aleph_0$ takav da je $\kappa \leq_{Card} \aleph_0$, onda bi postojala injekcija $f\colon X \to \mathbb{N}$. Budući da je X beskonačan i vrijedi $X \sim rng(f)$, slijedi da je $rng(f) \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan. Sada iz teorema 2.29 dobivamo $rng(f) \sim \mathbb{N}$, iz čega slijedi $\kappa = |X| = |rng(f)| = \aleph_0$, što je kontradikcija.

Teorem 2.30. Skup je beskonačan ako i samo je Dedekind-beskonačan.

Dokaz. Jedan smjer smo dokazali u teoremu 2.13. Dokažimo drugi smjer.

Neka je X beskonačni skup. Po teoremu 2.28 postoji $S \subseteq X$ takav da je $S \sim \mathbb{N}$, odnosno postoji bijekcija $f\colon S \to \mathbb{N}$. Kao i u teoremu 2.19, funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definirana s $g(n) := Sc(n)$ je bijekcija. Definiramo funkciju $h := f^{-1} \circ g \circ f \cup \big(id \restriction (X \setminus S)\big)$. Dokažimo da je h injekcija i da vrijedi $rng(h) \subset X$.

Ako su $x, y \in S$, onda $h(x) = h(y)$ znači $(f^{-1} \circ g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ g \circ f)(y)$. No, $f^{-1} \circ g \circ f$ je injekcija kao kompozicija injekcija, iz čega slijedi $x = y$.

Ako je $x \in S$ i $y \in X \setminus S$, imamo $h(x) \in S$ i $h(y) = y \in X \setminus S$. Dakle, tada je $h(x) \neq h(y)$.

Ako su $x, y \in X \setminus S$, onda iz $h(x) = h(y)$ slijedi $x = h(x) = h(y) = y$.

Očito je $rng(h) \subseteq X$. Pretpostavimo da vrijedi jednakost. Zbog $0 \in \mathbb{N}$ postoji $y \in S$ takav da je $f(y) = 0$. Zbog surjektivnosti, za taj y postoji $x \in X$ takav da je $h(x) = y$. Mora vrijediti $x \in S$, jer kada bi vrijedilo $x \in X \setminus S$, onda bismo imali $y = h(x) = x \in X \setminus S$, što je kontradikcija. Tada imamo $f^{-1}\big(g(f(x))\big) = y$, iz čega slijedi $g\big(f(x)\big) = f(y) = 0$. No to je kontradikcija s $0 \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$. To znači da je $rng(h) \neq X$.

Dakle, h je bijekcija između X i njegova pravog podskupa $rng(h)$. ∎

2.2.1. Zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva

U ovoj točki uvodimo zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva. Znamo iz teorema 2.18 da su prirodni brojevi zapravo kardinalni brojevi, ali zbrajanje i množenje (konačnih) kardinalnih brojeva te zbrajanje i množenje prirodnih brojeva neće se podudarati. Te operacije će se moći podudarati tek u trenutku kada budemo imali tipski ujednačene uređene parove. Iz tog razloga ćemo operacije zbrajanja i množenja na kardinalnim brojevima zasad označavati i nazivati drugačije od već definiranih operacija na prirodnim brojevima.

Važno je napomenuti kako nije nužno potrebno razviti cijelu transfinitnu aritmetiku, već samo dokazati *princip kvadriranja beskonačnih kardinalnih brojeva* kako bismo bili u mogućnosti definirati tipski ujednačene uređene parove.

Teorem 2.31. Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Formula $(\exists x \in \kappa)(\exists y \in \lambda)(z \sim x \times \{0\} \cup y \times \{1\})$ je stratificirana.

2. Formula $(\exists x \in \kappa)(\exists y \in \lambda)(z \sim x \times y)$ je stratificirana.

Dokaz. 1. Tvrdnja slijedi iz zapisa
$(\exists x^2 \in \kappa^3)(\exists y^2 \in \lambda^3)\big(z^{2+\delta} \sim (x \times \{0\})^{2+\delta} \cup (y \times \{1\})^{2+\delta}\big)$.

2. Tvrdnja slijedi iz zapisa $(\exists x^2 \in \kappa^3)(\exists y^2 \in \lambda^3)\big(z^{2+\delta} \sim (x \times y)^{2+\delta}\big)$. ■

Za kardinalne brojeve κ i λ definiramo **vanjski zbroj**

$$\kappa \oplus \lambda := \big\{z \,\big|\, (\exists x \in \kappa)(\exists y \in \lambda)\big(z \sim x \times \{0\} \cup y \times \{1\}\big)\big\}$$

i **vanjski umnožak**

$$\kappa \odot \lambda := \big\{z \,\big|\, (\exists x \in \kappa)(\exists y \in \lambda)(z \sim x \times y)\big\}.$$

Teorem 2.32. Ako κ i λ imaju tip n, onda i $\kappa \oplus \lambda$ i $\kappa \odot \lambda$ imaju tip $n+\delta$.

Dokaz. Tvrdnje slijede iz sljedećih zapisa:

$$z^{2+\delta} \in (\kappa \oplus \lambda)^{3+\delta} \leftrightarrow (\exists x^2 \in \kappa^3)(\exists y^2 \in \lambda^3)\big(z^{2+\delta} \sim (x \times \{0\})^{2+\delta} \cup (y \times \{1\})^{2+\delta}\big)$$

$$z^{2+\delta} \in (\kappa \odot \lambda)^{3+\delta} \leftrightarrow (\exists x^2 \in \kappa^3)(\exists y^2 \in \lambda^3)\big(z^{2+\delta} \sim (x \times y)^{2+\delta}\big).$$ ■

Primijetimo da su za bilo koje kardinalne brojeve njihov vanjski zbroj i umnožak uvijek neprazni, iz čega slijedi da su oni kardinalni brojevi.

Teorem 2.33. Neka su κ i λ kardinalni brojevi. Vrijede sljedeće jednakosti:

1. $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$,
2. $\kappa \odot \lambda = \lambda \odot \kappa$.

Dokaz.

1. Neka su $A \in \kappa$ i $B \in \lambda$ proizvoljni. Dovoljno je dokazati $A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \sim A \times \{1\} \cup B \times \{0\}$. Definiramo pomoću teorema 1.35 funkcije f_1 i f_2 takve da vrijedi $f_1(a,0) = (a,1)$ i $f_2(b,1) = (b,0)$ za sve $a \in A$ i sve $b \in B$. Očito je $f := f_1 \cup f_2$ bijekcija između $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ i $A \times \{1\} \cup B \times \{0\}$.
2. Neka su $A \in \kappa$ i $B \in \lambda$ proizvoljni. Dovoljno je dokazati $A \times B \sim B \times A$. Pomoću teorema 1.35 definiramo funkciju f takvu da vrijedi $f(a,b) = (b,a)$ za sve $a \in A$ i sve $b \in B$. Očito je f bijekcija između $A \times B$ i $B \times A$. ∎

Za skup x označimo operaciju $\iota(x) := \{x\}$. Primjenu operacije ι na skup x uzastopno k puta označavamo s $\iota^k(x)$. Nadalje, uvodimo konvenciju $\iota^0(x) = x$. Primijetimo da ako x ima tip n, onda $\iota^k(x)$ ima tip $n+k$. Također vrijedi $\iota^k(x) = \iota^k(y)$ (za bilo koji k) ako i samo ako $x = y$.

Definicija 2.34. Neka je $\kappa = |X|$ kardinalni broj. Definiramo operaciju **podizanja tipova** na kardinalnom broju κ kao $T(\kappa) := |\mathscr{P}_1(X)|$.

Jednostavno slijedi da ako κ ima tip n, onda $T(\kappa)$ ima tip $n+1$. Primjenu operacije T uzastopno k puta na kardinalni broj κ označavamo $T^k(\kappa)$. Također uvodimo konvenciju $T^0(\kappa) = \kappa$. Zbog teorema 1.21(1), ako κ ima tip n, onda $T^k(\kappa)$ ima tip $n+k$. Nadalje, sličnu konvenciju uvodimo za $\mathscr{P}_1$ i $\bigcup$; uzastopne primjene operacija $\mathscr{P}_1$ i $\bigcup$ k puta označavamo redom $\mathscr{P}_1^k$ i $\bigcup^k$.

Teorem 2.35. Neka su $\kappa = |X|$ i $\lambda = |Y|$ kardinalni brojevi. Tada vrijedi $\kappa = \lambda$ ako i samo ako $T(\kappa) = T(\lambda)$.

Dokaz. Vrijedi $\kappa = \lambda$ ako i samo ako je $X \sim Y$, što vrijedi ako i samo ako je $\mathscr{P}_1(X) \sim \mathscr{P}_1(Y)$, odnosno $T(\kappa) = T(\lambda)$. ∎

Teorem 2.36. Ako je X skup i $A \subseteq X$, onda je $T^\delta(|X|) = |X \setminus A| \oplus |A|$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da vrijedi $\mathscr{P}_1^\delta(X) \sim (X \setminus A) \times \{0\} \cup A \times \{1\}$. Po teoremu 1.35 postoje funkcije f_1 i f_2 takve da vrijedi $f_1(x,0) = \iota^\delta(x)$ i $f_2(a,1) = \iota^\delta(a)$ za sve $x \in X \setminus A$ i sve $a \in A$. Očito je $f_1 \cup f_2$ bijekcija između $(X \setminus A) \times \{0\} \cup A \times \{1\}$ i $\mathscr{P}_1^\delta(X)$. ∎

Teorem 2.37. Za svaki beskonačni kardinalni broj κ i svaki prirodni broj n vrijedi $\kappa \oplus n = T^\delta(\kappa)$.

Dokaz. Neka je $\kappa = |X|$ i $A \in n$. Dovoljno je dokazati $X \times \{0\} \cup A \times \{1\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(X)$. Imamo dva slučaja. Ako je $n = 0$, onda je $A = \emptyset$ pa je i $A \times \{1\} = \emptyset$. Po teoremu 1.35 postoji funkcija f takva da je $f(x,0) = \iota^\delta(x)$ za svaki $x \in X$. Očito je f bijekcija između $\mathscr{P}_1^\delta(X)$ i $X \times \{0\}$. Dakle, vrijedi $X \times \{0\} \cup A \times \{1\} = X \times \{0\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(X)$.

Neka je $n \neq 0$. Tada po teoremu 2.28 postoji injekcija $f\colon \mathbb{N} \to X$ te po teoremu 2.26(6) postoji injekcija $g\colon A \to \mathbb{N}$. Po pretpostavci je A konačan skup, stoga je $rng(g)$ konačan, i neprazan zbog $A \neq \emptyset$, pa ima najveći element koji označimo s a_0.

Pomoću teorema 1.35 možemo definirati funkcije h_1, h_2 i h_3 na sljedeći način:

$$h_1(x,0) := \iota^\delta\big(f\big(f^{-1}(x) + a_0 + 1\big)\big),\ x \in rng(f);$$
$$h_2(x,0) := \iota^\delta(x),\ x \in X \setminus rng(f);$$
$$h_3(x,1) := \iota^\delta\big(f(g(x))\big),\ x \in A.$$

Budući da su im domene disjunktne, njihova unija $h := h_1 \cup h_2 \cup h_3$ je funkcija; dokažimo da je injekcija. Neka su $z_1, z_2 \in dom(h)$ takvi da je $z_1 \neq z_2$ i pretpostavimo $h(z_1) = h(z_2)$.

Ako je $z_1 = (x_1, 0)$ i $z_2 = (x_2, 0)$, onda iz $z_1 \neq z_2$ dobivamo $x_1 \neq x_2$, te tada imamo tri slučaja. Ako su $x_1, x_2 \in rng(f)$, onda iz pretpostavke dobivamo $h(z_1) = \iota^\delta\big(f\big(f^{-1}(x_1) + a_0 + 1\big)\big) = \iota^\delta\big(f\big(f^{-1}(x_2) + a_0 + 1\big)\big) = h(z_2)$, a zbog injektivnosti od f slijedi $x_1 = x_2$, što je kontradikcija. Ako su $x_1, x_2 \in X \setminus rng(f)$, onda imamo $h(z_1) = \iota^\delta(x_1) = \iota^\delta(x_2) = h(z_2)$, iz čega slijedi $x_1 = x_2$, što je kontradikcija. Ako je $x_1 \in rng(f)$ i $x_2 \in X \setminus rng(f)$, onda imamo $\iota^\delta\big(f\big(f^{-1}(x_1) + a_0 + 1\big)\big) = \iota^\delta(x_2)$, što daje $f\big(f^{-1}(x_1) + a_0 + 1\big) = x_2 \in rng(f)$, što je kontradikcija.

Ako je $z_1 = (x_1, 0)$ i $z_2 = (x_2, 1)$, onda imamo dva slučaja. Ako je $x_1 \in rng(f)$ i $x_2 \in A$, onda imamo $\iota^\delta\big(f\big(f^{-1}(x_1) + a_0 + 1\big)\big) = \iota^\delta\big(f\big(g(x_2)\big)\big)$ iz čega slijedi $f\big(f^{-1}(x_1) + a_0 + 1\big) = f\big(g(x_2)\big)$, odnosno $f^{-1}(x_1) + a_0 + 1 = g(a)$. Budući da je a_0 najveći element od $rng(g)$ i $g(x_2) \in rng(g)$, imamo $g(x_2) \leq_{Card} a_0 <_{Card} f^{-1}(x_1) + a_0 + 1$, odnosno $f^{-1}(x_1) + a_0 + 1 \neq g(x_2)$, što je kontradikcija. Ako su $x_1 \in X \setminus rng(f)$ i $x_2 \in A$, onda imamo $\iota^\delta(x_1) = \iota^\delta\big(f\big(g(x_2)\big)\big)$, iz čega slijedi $x_1 = f\big(g(x_2)\big) \in rng(f)$, što je kontradikcija.

Ako je $z_1 = (x_1, 1)$ i $z_2 = (x_2, 1)$, onda iz $z_1 \neq z_2$ dobivamo $x_1 \neq x_2$. Tada imamo $h(z_1) = \iota^\delta\big(f(g(x_1))\big) = \iota^\delta\big(f(g(x_2))\big) = h(z_2)$. Iz toga slijedi $f\big(g(x_1)\big) = f\big(g(x_2)\big)$, a onda zbog injektivnosti od f i g dobivamo $x_1 = x_2$, što je kontradikcija.

Dakle, postoji injekcija s $X \times \{0\} \cup A \times \{1\}$ u $\mathscr{P}_1^\delta(X)$, što znači da vrijedi $\kappa \oplus n \leq_{Card} T^\delta(\kappa)$. Formula $(\exists x^1 \in X^2)\big(u^{1+\delta} = \iota^\delta(x^1)^{1+\delta} \wedge w^{1+\delta} = (x^1, 0^1)^{1+\delta}\big)$ je stratificirana pa pomoću teorema 1.28 definiramo relaciju $k := \big\{\big(\iota^\delta(x), (x,0)\big) \mid x \in X\big\}$. Očito je k funkcija s $\mathscr{P}_1^\delta(X)$ u $X \times \{0\} \cup A \times \{1\}$, a očito je i injekcija. Dakle, vrijedi $T^\delta(\kappa) \leq_{Card} \kappa \oplus n$. Sada iz Cantor–Bernsteinova teorema dobivamo $\kappa \oplus n = T^\delta(\kappa)$. ■

Disjunktna unija dvaju prebrojivih skupova također je prebrojiv skup.

Teorem 2.38. Vrijedi $\aleph_0 \oplus \aleph_0 = T^\delta(\aleph_0)$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati $\mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\} = \mathbb{N} \times \{0,1\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(\mathbb{N})$.

Po teoremu 1.35 postoji funkcija $h\colon \mathbb{N} \times \{0,1\} \to \mathscr{P}_1^\delta(\mathbb{N})$ takva da vrijedi $h(a_1, b_1) = \iota^\delta(2 \cdot a_1 + b_1)$. Dokažimo da je h injekcija. Neka su $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{N} \times \{0,1\}$ različiti.

Ako je $b_1 \neq b_2$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $b_1 = 0$ i $b_2 = 1$. Tada imamo dva slučaja. Ako je $a_1 \leq_{Card} a_2$, onda imamo $2 \cdot a_1 + b_1 = 2 \cdot a_1 \leq 2 \cdot a_2 <_{Card} 2 \cdot a_2 + b_2$, iz čega slijedi $h(a_1,b_1) \neq h(a_2,b_2)$. Ako je $a_2 <_{Card} a_1$, onda imamo $a_2 + 1 \leq_{Card} a_1$, pa je $2 \cdot a_2 + b_2 = 2 \cdot a_2 + 1 <_{Card} 2 \cdot a_2 + 2 = 2 \cdot (a_2 + 1) \leq_{Card} 2 \cdot a_1 = 2 \cdot a_1 + b_1$, iz čega slijedi $h(a_1,b_1) \neq h(a_2,b_2)$.

Ako je $b_1 = b_2$, onda mora vrijediti $a_1 \neq a_2$ pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a_1 <_{Card} a_2$. Tada imamo $2 \cdot a_1 + b_1 = 2 \cdot a_1 + b_2 <_{Card} 2 \cdot a_2 + b_2$, iz čega slijedi $h(a_1,b_1) \neq h(a_2,b_2)$.

Formula $(\exists n^1 \in \mathbb{N})\big(a^{1+\delta} = \iota^\delta(n)^{1+\delta} \wedge b^{1+\delta} = (n,0)^{1+\delta} \wedge t = (a^{1+\delta}, b^{1+\delta})^{1+2\delta}\big)$ je stratificirana, pa definiramo $g := \big\{\big(\iota^\delta(n), (n,0)\big) \mid n \in \mathbb{N}\big\}$. Očito je $g\colon \mathscr{P}_1^\delta \to \mathbb{N} \times \{0,1\}$ injekcija. Sada iz Cantor–Bernsteinova teorema slijedi $\mathbb{N} \times \{0,1\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(\mathbb{N})$. ■

Svojstvo iz teorema 2.38 vrijedi ne samo za prebrojive, već i općenito za beskonačne kardinalne brojeve.

Teorem 2.39. Za svaki skup $X \subseteq \mathscr{P}_1(V)$ vrijedi $\mathscr{P}_1\big(\bigcup X\big) = X$.

Dokaz. Neka je $x \in X \subseteq \mathscr{P}_1(V)$. Tada postoji skup u takav da je $x = \{u\}$. Budući da je $\{u\} \in X$, slijedi da je $\{u\} \subseteq \bigcup X$, odnosno $u \in \bigcup X$. Iz toga slijedi $\{u\} = x \in \mathscr{P}_1\big(\bigcup X\big)$. Neka je $x \in \mathscr{P}_1\big(\bigcup X\big)$. Tada postoji $u \in \bigcup X$ takav da je $x = \{u\}$. Za taj u postoji $t \in X$ takav da je $u \in t$. Budući da je $X \subseteq \mathscr{P}_1(V)$, slijedi da postoji skup w takav da je $t = \{w\}$. Sada iz $u \in t = \{w\}$ dobivamo $u = w$, što daje $x = \{u\} = \{w\} = t \in X$. ■

Iz teorema 2.39 slijedi da za svaki $X \subseteq \mathscr{P}_1(V)$ i prirodni broj k vrijedi $\mathscr{P}_1^k\big(\bigcup^k X\big) = X$.

Teorem 2.40. Za svaki beskonačni kardinalni broj κ vrijedi $\kappa \oplus \kappa = T^\delta(\kappa)$.

Dokaz. Neka je $\kappa = |X|$. Dovoljno je dokazati $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} = X \times \{0,1\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(X)$. Formula $\exists Y^2\big(Y^2 \subseteq X^2 \wedge Y^2 \notin FIN^3 \wedge bij(f^{2+2\delta}, (Y \times \{0\})^{2+\delta} \cup (Y \times \{1\})^{2+\delta}, \mathscr{P}_1^\delta(Y)^{2+\delta})\big)$ je stratificirana pa definiramo $K := \big\{f \mid \exists Y\big(Y \subseteq X \wedge Y \notin FIN \wedge bij\big(f, Y \times \{0,1\}, \mathscr{P}_1^\delta(Y)\big)\big)\big\}$ i uredimo ga inkluzijom. Budući da je X beskonačan, po teoremu 2.28 postoji prebrojiv skup $X_0 \subseteq X$. Iz teorema 2.38 slijedi $X_0 \times \{0,1\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(X_0)$, što znači da postoji bijekcija $f_0 \colon X_0 \cup \{0\} \times X_0 \times \{1\} \to \mathscr{P}_1^\delta(X_0)$. Iz toga odmah imamo $f_0 \in K$, odnosno K je neprazan. Neka je C proizvoljni lanac u K. Dokažimo da vrijedi $\bigcup C \in K$.

Iz teorema 1.49(5) slijedi da je $\bigcup C$ injekcija. Jer je $(\exists f^{2\delta+1} \in C^{2\delta+2})\big(\bigcup^\delta rng(f^{2\delta+1})^1 = z^1\big)$ stratificirana, možemo definirati skup $S := \big\{\bigcup^\delta rng(f) \bigm| f \in C\big\}$. Tvrdimo da vrijedi $\bigcup S \subseteq X$, da je $\bigcup S$ beskonačan te da je $rng\big(\bigcup C\big) = \mathscr{P}_1^\delta\big(\bigcup S\big)$.

Dokažimo da je $\bigcup S \subseteq X$. Neka je $z \in \bigcup S$. Tada postoji $t \in S$ takav da je $z \in t$, odnosno postoji $f \in C$ taka da je $z \in t = \bigcup^\delta rng(f)$ te postoji beskonačni $A \subseteq X$ takav da je $rng(f) = \mathscr{P}_1^\delta(A)$. No tada po teoremu 2.39 imamo $\mathscr{P}_1^\delta(t) = \mathscr{P}_1^\delta\big(\bigcup^\delta rng(f)\big) = rng(f)$. Dakle, $t \subseteq X$, iz čega slijedi $z \in X$.

Dokažimo da je $\bigcup S$ beskonačan. Pretpostavimo suprotno, da je konačan. Neka je $f \in C$ proizvoljna, ali fiksna. Tada je $rng(f) = \mathscr{P}_1^\delta(A)$ za neki beskonačni $A \subseteq X$. Sada imamo $A = \bigcup^\delta \mathscr{P}_1^\delta(A) = \bigcup^\delta rng(f) \subseteq \bigcup S$. Iz teorema 2.9 slijedi da je A konačan, što je kontradikcija.

Dokažimo $rng\big(\bigcup C\big) = \mathscr{P}_1^\delta\big(\bigcup S\big)$. Ako je $z \in rng\big(\bigcup C\big)$, onda postoji $f \in C$ tako da je $z \in rng(f)$. To znači da postoji $A \subseteq X$ beskonačan takav da je $z \in rng(f) = \mathscr{P}_1^\delta(A)$. Iz toga slijedi da postoji $a \in A$ takav da je $z = \iota^\delta(a)$. No to znači da je $a \in \bigcup S$, iz čega dobivamo $z = \iota^\delta(a) \in \mathscr{P}_1^\delta\big(\bigcup S\big)$. Ako je $z \in \mathscr{P}_1^\delta\big(\bigcup S\big)$, onda za neki $b \in \bigcup S$ je $z = \iota^\delta(b)$. To znači da postoji $B \in S$ takav da je $b \in B$. To povlači da postoji $f \in C$ takva da je $\bigcup^\delta rng(f) = B$ i $b \in B$. Znamo da vrijedi $rng(f) = \mathscr{P}_1^\delta(A)$ za neki beskonačni $A \subseteq X$. Iz toga dobivamo $z = \iota^\delta(b) \in \mathscr{P}_1^\delta(B) = \mathscr{P}_1^\delta\big(\bigcup^\delta rng(f)\big) = \mathscr{P}_1^\delta\big(\bigcup^\delta \mathscr{P}_1^\delta(A)\big) = \mathscr{P}_1^\delta(A) = rng(f) \subseteq rng\big(\bigcup C\big)$. Dakle, postoji beskonačni skup $Z := \bigcup S \subseteq X$ takav da je $rng\big(\bigcup C\big) = \mathscr{P}_1^\delta(Z)$.

Preostaje još dokazati $dom\big(\bigcup C\big) = Z \times \{0,1\}$. Neka je $z \in dom\big(\bigcup C\big)$, tada postoji $f \in C$ takva da je $z \in dom(f) = T \times \{0,1\}$, za beskonačni $T \subseteq X$. Budući da je $f \subseteq \bigcup C$, imamo $\mathscr{P}_1^\delta(T) = rng(f) \subseteq rng\big(\bigcup C\big) = \mathscr{P}_1^\delta(Z)$, iz čega slijedi $T \subseteq Z$, odnosno $T \times \{0,1\} \subseteq Z \times \{0,1\}$. Dakle, $z \in Z \times \{0,1\}$. Ako je $z \in Z \times \{0,1\}$, onda je $z = (a,s)$, gdje je $a \in Z$ i $s \in \{0,1\}$. Tada je $\iota^\delta(a) \in \mathscr{P}_1^\delta(Z) = rng\big(\bigcup C\big)$, što znači da postoji $f \in C$ takva da je $\iota^\delta(a) \in rng(f) = \mathscr{P}_1^\delta(U)$ za neki beskonačni $U \subseteq Z$. Tada imamo $a \in U$, iz čega slijedi $z = (a,s) \in U \times \{0,1\} = dom(f) \subseteq dom\big(\bigcup C\big)$.

Iz svega zajedno dobivamo $\bigcup C \in K$, a onda po Zornovoj lemi postoji maksimalni element od K. Označimo ga s $f_0 \colon A_0 \times \{0,1\} \to \mathscr{P}_1^\delta(A_0)$, pri čemu je $A_0 \subseteq X$ beskonačan. Želimo dokazati da vrijedi $|X| = |A_0|$.

Po teoremu 2.36 imamo $T^\delta(|X|) = |X \setminus A_0| \oplus |A_0|$. Tvrdimo da je $X \setminus A_0$ konačan. Pretpostavimo suprotno, da je beskonačan. Tada postoji prebrojiv podskup $B \subseteq X \setminus A_0$, iz čega slijedi $A_0 \subseteq A_0 \cup B \subseteq X$. Budući da je B prebrojiv, po teoremu 2.38 vrijedi $B \times \{0,1\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(B)$, stoga postoji bijekcija $g_0 \colon B \times \{0,1\} \to \mathscr{P}_1^\delta(B)$. Očito vrijedi $bij\big(f_0 \cup g_0, (A_0 \cup B) \times \{0,1\}, \mathscr{P}_1^\delta(A_0 \cup B)\big)$ te je $A_0 \cup B \subseteq X$ beskonačan, stoga je $f_0 \cup g_0 \in K$. No sada imamo $f_0 \subset f_0 \cup g_0$, što je kontradikcija s maksimalnošću od f_0. Dakle, $X \setminus A_0$ je konačan. Sada po teoremu 2.37 dobivamo $T^\delta(|X|) = |X \setminus A_0| \oplus |A_0| = T^\delta(|A_0|)$, iz čega slijedi $|X| = |A_0|$. ■

Zbroj dva beskonačna kardinalna broja uvijek je jednak onom većem, do na odgovarajuću primjenu operacije T.

Teorem 2.41. Neka je κ beskonačni kardinalni broj i $\lambda \leq_{Card} \kappa$. Tada vrijedi

$$\kappa \oplus \lambda = T^\delta(\kappa).$$

Dokaz. Neka su $A \in \kappa$ i $B \in \lambda$. Dovoljno je dokazati $A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \sim \mathscr{P}_1^\delta(A)$. Iz $\lambda \leq_{Card} \kappa$ slijedi da postoji injekcija $f \colon B \to A$. Označimo $X := rng(f)$, koji je očito ekvipotentan s B. Po teoremu 2.40 vrijedi $\mathscr{P}_1^\delta(X) \sim X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \sim X \times \{0\} \cup B \times \{1\}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} A \times \{0\} \cup B \times \{1\} &\sim (A \setminus X \cup X) \times \{0\} \cup B \times \{1\} \\ &\sim (A \setminus X) \times \{0\} \cup (X \times \{0\} \cup B \times \{1\}) \\ &\sim \mathscr{P}_1^\delta(A \setminus X) \cup \mathscr{P}_1^\delta(X) \\ &\sim \mathscr{P}_1^\delta(A \setminus X \cup X) = \mathscr{P}_1^\delta(A). \end{aligned}$$ ■

Zbog komutativnosti zbrajanja kardinalnih brojeva (2.33(1)) vrijedi također i $\lambda \oplus \kappa = T^\delta(\kappa)$ kada je $\lambda \leq_{Card} \kappa$.

Teorem 2.42. Vrijedi $\aleph_0 \odot \aleph_0 = T^\delta(\aleph_0)$.

Dokaz. Dokažimo da vrijedi $\mathscr{P}_1^\delta(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Budući da je formula $(\exists n^1 \in \mathbb{N}^2)\big(a^{1+\delta} = \iota^\delta(n^1)^{1+\delta} \wedge b^{1+\delta} = (n^1, n^1)^{1+\delta}\big)$ stratificirana, definiramo $f := \big\{(a,b) \mid$

$(\exists n \in \mathbb{N})\big(a = \iota^{\delta}(n) \land b = (n,n)\big)\big\}$. Očito je f injektivna funkcija, što povlači $T^{\delta}(\aleph_0) \leq_{Card} \aleph_0 \odot \aleph_0$.

Pomoću teorema 1.35 definiramo funkciju $f(n,m) := \iota^{\delta}\big((n+m)\cdot(n+m)+n\big)$ za svaki $n,m \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je f injekcija. Neka su $n,m,a,b \in \mathbb{N}$ proizvoljni takvi da je $(n,m) \neq (a,b)$. Tada imamo dva slučaja.

Ako je $m+n \neq a+b$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $m+n <_{Card} a+b$. Tada je $m+n+1 = Sc(m+n) \leq_{Card} a+b$. Dalje imamo, koristeći uobičajene zakone aritmetike prirodnih brojeva, kao što su distributivnost i asocijativnost:

$$
\begin{aligned}
(m+n)\cdot(m+n)+m \leq_{Card} (m+n)\cdot(m+n)+m+n+m+n <_{Card}& \\
<_{Card} Sc\big((m+n)\cdot(m+n+2)\big) = (m+n+1)\cdot(m+n+1) \leq_{Card}& \\
\leq_{Card} (a+b)\cdot(m+n+1) \leq_{Card} (a+b)\cdot(a+b) \leq_{Card} (a+b)\cdot(a+b)+a,&
\end{aligned}
$$

što povlači $f(m,n) \neq f(a,b)$.

Ako je $m+n = a+b$, onda vrijedi $n \neq a$. Naime, kada bi bilo $n = a$, zbog $(n,m) \neq (a,b)$ bi moralo biti $m \neq b$, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $m <_{Card} b$. No tada imamo $n+m <_{Card} n+b = a+b = n+m$, što je kontradikcija. Dakle, mora biti $n \neq a$, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $n <_{Card} a$. Tada imamo $(m+n)\cdot(m+n)+m = (a+b)\cdot(a+b)+m <_{Card} (a+b)\cdot(a+b)+a$, iz čega slijedi $f(n,m) \neq f(a,b)$. ■

Prije glavnog teorema ove točke dokazujemo jednu tehničku, ali korisnu tvrdnju.

Teorem 2.43. Ako je X konačan skup takav da za svaka dva $x,y \in X$ vrijedi $x \sim y$, onda za svaki $x \in X$ vrijedi $x \sim \bigcup X$.

Dokaz. Formula

$$(\forall n^3 \in \mathbb{N}^4)\big(X^2 \in n^3 \land (\forall x^1 \in X^2)(\forall y^1 \in X^2)(x^1 \sim^{\delta+2} y^1) \to (\forall x^1 \in X^1)(x^1 \sim^{\delta+2} (\bigcup X)^1)\big)$$

je stratificirana, stoga je možemo dokazati indukcijom po n.

Za $n = 0$ i $n = 1$ je tvrdnja trivijalna. Dokažimo je za $n = 2$. Neka je $X = \{x,y\}$. Tada je $x \sim y$. Dovoljno je dokazati $x \sim \bigcup X$. Definirajmo $z := x \setminus y$. Tada je $z \subseteq x$, što znači da vrijedi $|z| \leq_{Card} |x|$. Po teoremu 2.41 imamo $|x| \oplus |z| = T^{\delta}(|x|)$. S druge strane, za $u := x \cup y = z \cup y$ imamo $u \setminus z = y$. Po teoremu 2.36 imamo $|x| \oplus |z| = |y| \oplus |z| = |u \setminus z| \oplus |z| = T^{\delta}(|u|)$. Iz svega zajedno dobivamo $T^{\delta}(|x|) = T^{\delta}(|u|)$, odnosno $|x| = |u| = |x \cup y| = |\bigcup X|$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq_{Card} 2$ i dokažimo je za $Sc(n)$.

Neka je $X \in Sc(n)$ takav da za sve $x, y \in X$ vrijedi $x \sim y$. Uzmimo $z \in X$ proizvoljan. Zbog $X \in Sc(n)$ vrijedi $X = A \cup \{B\}$, gdje je $A \in n$ i $B \notin A$. Tada je $\bigcup X = \left(\bigcup A\right) \cup B = \bigcup Y$, gdje je $Y := \left\{\bigcup A, B\right\} \in 2$. Zbog $n \geq_{Card} 2$ postoji $z \in A$. Sada je po pretpostavci indukcije $z \sim \bigcup A$, no isto tako i $z \sim B$ jer su svaka dva elementa od X ekvipotentna. Prema tvrdnji za $n = 2$ primijenjenoj na Y, imamo $\bigcup X = \bigcup Y \sim B \sim z$, a onda po tranzitivnosti i sa svim ostalim elementima od A. ■

Teorem 2.44. Za svaki beskonačni kardinalni broj κ vrijedi $\kappa \odot \kappa = T^{\delta}(\kappa)$.

Dokaz. Neka je $\kappa = |X|$. Dovoljno je dokazati $X \times X \sim \mathscr{P}_1^{\delta}(X)$. Formula $\exists Y^1 \big(Y^1 \subseteq X^1 \wedge Y^1 \notin FIN^2 \wedge bij(f^{3+\delta}, (Y \times Y)^3, \mathscr{P}_1^{\delta}(Y)^3)\big)$ je stratificirana pa definiramo skup $K := \big\{f \mid \exists Y \big(Y \subseteq X \wedge Y \notin FIN \wedge bij\big(f, Y \times Y, \mathscr{P}_1^2(Y)\big)\big)\big\}$. Po teoremu 2.28 slijedi da postoji prebrojiv skup $X_0 \subseteq X$. Po teoremu 2.42 je $X_0 \times X_0 \sim \mathscr{P}_1^{\delta}(X_0)$, odnosno da postoji bijekcija $f_0 \colon X_0 \times X_0 \to \mathscr{P}_1^{\delta}(X_0)$, što znači $f_0 \in K$. Dakle, skup K je neprazan. Uredimo skup K inkluzijom i dokažimo da za proizvoljni lanac C vrijedi $\bigcup C \in K$.

Po teoremu 1.49, $\bigcup C$ je injekcija. Analogno kao u teoremu 2.40 dokazujemo da postoji beskonačni $Z \subseteq X$ takav da je $rng\big(\bigcup C\big) = \mathscr{P}_1^{\delta}(Z)$, gdje je $Z \subseteq X$ beskonačan.

Preostaje još dokazati $dom\big(\bigcup C\big) = Z \times Z$. Ako je $x \in dom\big(\bigcup C\big)$, onda postoji $f \in C$ takav da je $x \in dom(f) = T \times T$ za neki beskonačni $T \subseteq X$. Budući da je $f \subseteq \bigcup C$, vrijedi $\mathscr{P}_1^{\delta}(T) = rng(f) \subseteq rng\big(\bigcup C\big) = \mathscr{P}_1^{\delta}(Z)$. Iz toga slijedi $T \subseteq Z$, što povlači $x \in T \times T \subseteq Z \times Z$. Ako je $x \in Z \times Z$, onda je $x = (u, w) \in Z \times Z$. Iz toga slijedi $\iota^{\delta}(u), \iota^{\delta}(w) \in \mathscr{P}_1^{\delta}(Z) = rng\big(\bigcup C\big)$. To znači da postoje $f_1, f_2 \in C$ takve da je $\iota^{\delta}(u) \in rng(f_1)$ i $\iota^{\delta}(w) \in rng(f_2)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f_1 \subseteq f_2$, iz čega slijedi $\iota^{\delta}(u), \iota^{\delta}(w) \in rng(f_2)$. To znači da postoji beskonačni $U \subseteq X$ takav da su $\iota^{\delta}(u), \iota^{\delta}(w) \in \mathscr{P}_1^{\delta}(U)$. To pak daje $u, w \in U$, iz čega slijedi $x = (u, w) \in U \times U = dom(f_2) \subseteq dom\big(\bigcup C\big)$. Dakle, $\bigcup C$ je bijekcija između $Z \times Z$ i $\mathscr{P}_1^{\delta}(Z)$, odnosno $\bigcup C \in K$.

Sada po Zornovoj lemi postoji maksimalni element od K jedan od kojih označimo s $f_0 \colon A_0 \times A_0 \to \mathscr{P}_1^{\delta}(A_0)$, gdje je $A_0 \subseteq X$ beskonačan; također označimo $\lambda := |A_0|$. Po definiciji imamo $A_0 \times A_0 \sim \mathscr{P}_1^{\delta}(A_0)$, stoga vrijedi $\lambda \odot \lambda = T^{\delta}(\lambda)$. Želimo dokazati $A_0 \sim X$, jer će iz toga slijediti $\lambda = \kappa$.

Iz $A_0 \subseteq X$ dobivamo $|A_0| \leq_{Card} |X|$. Pretpostavimo da vrijedi $|A_0| <_{Card} |X|$. Budući da je $\leq_{Card}$ dobar uređaj, vrijedi ili $|X \setminus A_0| \leq_{Card} |A_0|$ ili $|A_0| <_{Card} |X \setminus A_0|$. Ako vrijedi $|X \setminus A_0| \leq_{Card} |A_0|$, po teoremima 2.36 i 2.41 imamo $T^{\delta}(|X|) = |X \setminus A_0| \oplus |A_0| = T^{\delta}(|A_0|)$, iz čega slijedi $|X| = |A_0|$, što je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti $|A_0| <_{Card} |X \setminus A_0|$. To znači da postoji injekcija s A_0 u $X \setminus A_0$ koja nije bijekcija. Drugim riječima, postoji $Z \subset X \setminus A_0$ takav da je $|Z| = |A_0| = \lambda$.

Po distributivnosti Kartezijevog produkta prema uniji imamo $(A_0 \cup Z) \times (A_0 \cup Z) = (A_0 \times A_0) \cup (A_0 \times Z) \cup (Z \times A_0) \cup (Z \times Z)$. Sada iz $A_0 \sim Z$ dobivamo $A_0 \times Z \sim Z \times A_0 \sim Z \times Z$, a iz teorema 2.43 dobivamo

$$(A_0 \times Z) \cup (Z \times A_0) \cup (Z \times Z) \sim Z \times Z \sim \mathscr{P}_1^\delta(Z).$$

Dakle, postoji bijekcija $g\colon (A_0 \times Z) \cup (Z \times A_0) \cup (Z \times Z) \to \mathscr{P}_1^\delta(Z)$.

Definirajmo $h := (f_0 \cup g) : (A_0 \cup Z) \times (A_0 \cup Z) \to \mathscr{P}_1^\delta(A_0 \cup Z)$. Budući da je $A_0 \cap Z = \emptyset$, h je bijekcija takva da vrijedi $f_0 \subseteq h$ i $h \in K$, jer je $A_0 \cup Z$ beskonačni podskup od X. Također vrijedi $f_0 \neq h$ jer za bilo koji $z \in Z \neq \emptyset$, vrijedi $\big((z,z), \iota^\delta(z)\big) \in h \setminus f_0$, jer je $Z \subseteq X \setminus A_0$. Sada imamo $f_0 \subset h \in K$, što je kontradikcija s maksimalnošću od f_0.

Dakle, vrijedi $|X| \leq_{Card} |A_0|$, iz čega slijedi $\lambda = |A_0| = |X| = \kappa$. Konačno, $\kappa \odot \kappa = \lambda \odot \lambda = T^\delta(\lambda) = T^\delta(\kappa)$, iz čega slijedi $\lambda = \kappa$. ■

Direktna posljedica teorema 2.44 za $\delta = 2$ je tvrdnja

$$V \notin FIN \to \exists F\, bij\big(F, V \times V, \mathscr{P}_1^2(V)\big),$$

koju nazivamo **princip kardinalnog kvadriranja univerzuma** (VCSP[2]).

[2] V dolazi od oznake za univerzalni skup, a CSP od engleskog *cardinal squaring principle*.

3. Alternativna aksiomatizacija i daljnji razvoj teorije

Postoji nekoliko načina kako pristupiti problemu uređenih parova u teoriji NFU. Svaki od njih ima svoje prednosti i mane, ali smatramo da postoji postoji jedan koji treba preferirati.

Prvi, konceptualno najjednostavniji, možemo nazvati **neutralni pristup**. Po njemu odbacujemo nužnost korištenja tipski ujednačenih uređenih parova i teoriju nastavljamo razvijati pomoću uređenih parova Kuratowskog. Iako je takav pristup valjan, ipak je problematičan. Naime, teško je raditi s takvim parovima jer vrlo brzo u teoriji dolazi do *eksplozije tipova*, što značajno komplicira teoriju. Primjerice, u prethodnom poglavlju smo zbog tipske neujednačenosti parova morali definirali kardinalnu aritmetiku na neprirodni način, a zbog istog razloga su i dokazi izrazito komplicirani. Nadalje, definicija funkcija s dva ili više argumenata je bitno drugačija od definicije funkcije s jednim argumentom. Stoga smatramo da neutralni pristup nije zadovoljavajući.

Drugi pristup prvi je izložio Holmes [35] i njegova glavna značajka je dodavanje *aksioma uređenih parova* (OP) aksiomima teorije NFU. Taj aksiom uvodi uređene parove kao primitivne objekte i na taj način omogućava postojanje tipski ujednačenih uređenih parova bilo koja dva entiteta. Pomoću tog aksioma može se riješiti većina naših problema. Također, njegovo uvođenje može se opravdati činjenicom da se unutar teorije $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}$ može konstruirati model teorije $\mathsf{NFU}+\mathsf{OP}$ [34]. Međutim, postoji nekoliko problema s novouvedenim aksiomom. Prvo, njegova motivacija je u potpunosti pragmatična; zamišljen je kao aksiom koji rješava jedan u potpunosti tehnički problem. Drugo, zbog uvođenja uređenih parova kao primitivnih entiteta u teoriju, nužno je proširiti jezik s barem jednim (najčešće tri) funkcijskim simbolom, koji nema unaprijed zadana pravila za dodjeljivanje tipova. Takvo proširenje mijenja pojam atomarne formule i komplicira pojam stratifikacije (tada više ni u osnovnom jeziku ne možemo pretpostaviti da su termi samo varijable). Treće, iako OP rješava tehnički problem, njegova ontološka obaveza je ogromna. Naime, iz aksioma OP slijedi aksiom beskonačnosti [35], a dokaz toga nije nimalo očit.

Treći pristup je **alternativna aksiomatska ekstenzija** teorije NFU, koju predlažemo. Već smo napomenuli da se u teoriji $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}$ može konstruirati model teorije $\mathsf{NFU}+\mathsf{OP}$. Međutim, time je moguće samo interpretirati OP u signaturi koja je ciljano proširena na način da OP ima željeno značenje. S druge strane, teoriji $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}$ nije potrebno umjetno i proizvoljno proširenje signature jer u njoj možemo dokazati VCSP, a pomoću njega postojanje tipski ujednačenih uređenih parova (teorem 3.1). Dakle, možemo opravdati uvođenje nove aksiomatizacije $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}+\mathsf{VCSP}$, koja je aksiomatsko proširenje teorije $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}$. Glavna prednost tog pristupa je što su njime tipski ujednačeni uređeni parovi dostupni gotovo od samog početka, predložena aksiomatizacija je dobro motivirana, jezik nije potrebno proširivati i ne postoji velika ontološka obaveza. Međutim, kako bismo bili u mogućnosti iskazati VCSP, potrebno je ipak uvesti neke pojmove pomoću uređenih parova Kuratowskog. Srećom, broj takvih pojmova ovisnih o Kuratowskijevim parovima je izrazito malen. Također je važno naglasiti da teorija $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{VCSP}$ ne dokazuje AC (teorem 3.5), što znači da ona ne može poslužiti kao zadovoljavajuća aksiomatizacija. Zbog svega rečenog smatramo da je alternativna aksiomatizacija $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}+\mathsf{VCSP}$ najbolji pristup za razvoj teorije skupova u Quineovom stilu.

U dosadašnjem smo razvoju u svim pojmovima, teoremima i dokazima, u kojima se pojavljuju uređeni parovi, koristili varijabilni tip, odnosno δ-oznake. Već smo naglasili da stratificiranost formule ostaje sačuvana, bez obzira koju vrijednost δ koristimo. Slično vrijedi i za teoreme; njihova istinitost je sačuvana bez obzira na vrijednost δ. U nastavku ćemo varijabilni tip zamijeniti konkretnim brojem ($\delta = 2$ ili $\delta = 0$).

3.1. Tipski ujednačeni uređeni parovi

Teorem 3.1. U teoriji $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}$ postoje tipski ujednačeni uređeni parovi.

Dokaz. Označimo $\kappa := |V|$. Znamo iz aksioma beskonačnosti da je V beskonačan skup, stoga je κ beskonačni kardinalni broj. Iz teorema 2.44 slijedi $\kappa \odot \kappa = T^2(\kappa)$, što znači da postoji bijekcija $F\colon V \times V \to \mathscr{P}_1^2(V)$.

Formula $F^6\big((x^1,y^1)^3\big)^3 = \iota^2(w^1)^3$ je stratificirana, stoga možemo definirati skup $S_{xy} := \{w \mid F\big((x,y)\big) = \iota^2(w)\}$. Primijetimo da je S_{xy} jednočlan: za bilo koje $z_1, z_2 \in S_{xy}$, vrijedi $\iota^2(z_1) =$

$F\big((x,y)\big) = \iota^2(z_2)$, iz čega slijedi $z_1 = z_2$.

Za $x,y \in V$ definiramo novi uređeni par $\langle x,y\rangle := \bigcup S_{xy}$. Dokažimo da zadovoljava osnovno pravilo uređenog para i da je tipski ujednačen.

Dokažimo prvo osnovno pravilo. Neka su $x,y,a,b \in V$ takvi da je $\langle x,y\rangle = \langle a,b\rangle$. Po definiciji imamo $F\big((x,y)\big) = \iota^2(\langle x,y\rangle)$ i $F\big((a,b)\big) = \iota^2(\langle a,b\rangle)$, stoga $F\big((x,y)\big) = F\big((a,b)\big)$, a budući da je F injekcija, imamo $(x,y) = (a,b)$, što povlači $x = a$ i $y = b$. Ako je $x = a$ i $y = b$, onda je $\iota^2(\langle x,y\rangle) = F\big((x,y)\big) = F\big((a,b)\big) = \iota^2(\langle a,b\rangle)$, što povlači $\langle x,y\rangle = \langle a,b\rangle$.

Dokažimo da su novi uređeni parovi tipski ujednačeni. Neka su $x,y \in V$ proizvoljni. Imamo

$$z^1 \in \langle x,y\rangle^2 \leftrightarrow \exists w^2\big(F^7\big((x^2,y^2)^4\big)^4 = \iota^2(w^2)^4 \wedge z^1 \in w^2\big).$$

Time smo dokazali da ako x i y imaju tip n, onda $\langle x,y\rangle$ ima tip n. Dakle, dokazali smo postojanje tipski ujednačenih uređenih parova. ■

Primijetimo da teoremom 3.1 nismo zapravo *definirali* tipski ujednačene uređene parove, iako to možemo napraviti. Naime, koristeći *egzistencijalnu instancijaciju* [17], iz teorema 2.44 slijedi tvrdnja $\exists F\, bij\big(F, V \times V, \mathscr{P}_1^2(V)\big)$, stoga fiksiramo jednu takvu bijekciju i pomoću nje definiramo parove kao u teoremu 3.1. Preciznije, proširimo signaturu novim konstantskim simbolom F i uvodimo aksiom $bij\big(F, V \times V, \mathscr{P}_1^2(V)\big)$, što je onda konzervativno proširenje naše teorije. Zatim taj konstantski simbol možemo iskoristiti za definiranje dvomjesnog funkcijskog terma koji određuje tipski ujednačene uređene parove.

Uređene parove Kuratowskog, zajedno sa ostalim pojmovima koji su uz njih vezani, označavat ćemo s indeksom K, a tipski ujednačene parove kao standardne uređene parove $(\cdot,\cdot)$.

U nastavku ukratko prikazujemo odnos između postojanja tipski ujednačenih uređenih parova, aksioma beskonačnosti, aksioma izbora i principa kardinalnog kvadriranja univerzuma. Tvrdnju „postoje tipski ujednačeni parovi” označavamo s OP_0.

Teorem 3.2. Teorija $\mathsf{NFU} + \mathsf{OP}_0$ dokazuje Inf.

Dokaz. Neka su $x,y \in V$ proizvoljni. Tada za Kartezijev produkt s tipski ujednačenim parovima vrijedi da ako X i Y imaju tip k, onda $X \times Y$ ima tip k.

Formula $(\forall n^3 \in \mathbb{N}^4)\big(X^2 \in n^3 \to (X^2 \times \{0^1\}^2)^2 \in n^3\big)$ je stratificirana, stoga ju dokazujemo indukcijom. Za $n = 0$ imamo $X \in 0$, odnosno $X = \emptyset$, iz čega slijedi $X \times \{0\} = \emptyset = X \in 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo je za $Sc(n)$.

Ako je $X \in Sc(n)$, onda imamo $X = a \cup \{b\}$, pri čemu je $a \in n$ i $b \notin a$. Tada je $X \times \{0\} = (a \cup \{b\}) \times \{0\} = (a \times \{0\}) \cup \{(b,0)\}$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $a \times \{0\} \in n$, a očito vrijedi $(b,0) \notin a \times \{0\}$. To znači da vrijedi $X \times \{0\} \in Sc(n)$.

Formula $(\forall n^1 \in \mathbb{N}^2)(n^1 \neq \emptyset^1)$ je stratificirana, stoga ju dokazujemo indukcijom. Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo ju za $Sc(n)$.

Po pretpostavci indukcije vrijedi $n \neq \emptyset$, stoga postoji $X \in n$. Iz prethodno dokazane tvrdnje slijedi $X \times \{0\} \in n$. Nadalje, očito vrijedi $(0,1) \notin X \times \{0\}$, iz čega slijedi $(X \times \{0\}) \cup \{(0,1)\} \in Sc(n)$. Dakle, $Sc(n) \neq \emptyset$.

Iz upravo dokazanog prema teoremu 2.18 slijedi aksiom beskonačnosti. ■

U izvjesnom smislu vrijedi i obrat prethodne tvrdnje. Naime, u teoriji $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$ možemo interpretirati teoriju $\mathsf{NFU} + \mathsf{OP}_0$.

Teorem 3.3. Ako je M model teorije $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$, onda postoji model $M' \subseteq M$ teorije $\mathsf{NFU} + \mathsf{OP}_0$.

Dokaz teorema može se pronaći u [34].

Teorem 3.4. Teorija $\mathsf{NFU} + \mathsf{OP}_0$ dokazuje VCSP.

Dokaz. Prema teoremu 3.2, $V \notin FIN$. Budući da $(x,y)_K$ i $\iota^2\big((x,y)\big)$ imaju isti tip, po teoremu 1.35 možemo definirati funkciju $f\big((x,y)_K\big) = \iota^2\big((x,y)\big)$ za sve $x, y \in V$. Funkcija f je očito injekcija s $V \times_K V$ u $\mathscr{P}_1^2(V)$. S druge strane, funkcija $\iota^2(x) \mapsto (x,x)_K$ je očito injekcija s $\mathscr{P}_1^2(V)$ u $V \times_K V$. Sada po Cantor–Bernsteinovom teoremu 2.25 dobivamo da postoji bijekcija između $V \times_K V$ i $\mathscr{P}_1^2(V)$. Dakle, vrijedi princip kardinalnog kvadriranja univerzuma. ■

Iznenađujuća činjenica je da aksiom izbora i VCSP nisu ekvivalentne tvrdnje.

Teorem 3.5. Teorija $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf} + \mathsf{VCSP}$ ne dokazuje AC.

Dokaz. Iz teorema 3.3 dobivamo da za model M od $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$ možemo pronaći model $M' \subseteq M$ od $\mathsf{NFU} + \mathsf{OP}_0$. Iz toga slijedi da je istinitost Zermelovog teorema, a onda i AC, ekvivalentna u M i M'.

Znamo da u teoriji $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$ ne možemo dokazati AC [40]: to znači da postoji model M od $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$ u kojem ne vrijedi AC. Iz teorema 3.3 slijedi da postoji model $M' \subseteq M$ teorije $\mathsf{NFU} + \mathsf{OP}_0$, a iz teorema 3.2 dobivamo da vrijedi $M' \models \mathsf{Inf}$.
Dakle, $M' \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$ i po prethodnom odlomku vrijedi $M' \not\models \mathsf{AC}$. Iz teorema 3.4 pak dobivamo $M' \models \mathsf{VCSP}$, odnosno $M' \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf} + \mathsf{VCSP}$, ali $M' \not\models \mathsf{AC}$. ■

3.2. Alternativna aksiomatizacija

U ovoj točki ukratko prikazujemo kako započeti razvoj teorije koristeći alternativnu aksiomatizaciju uvođenjem minimalnog broja potrebnih pojmova. Broj pojmova se može dodatno smanjiti, ali time žrtvujemo čitljivost.

***Aksiom ekstenzionalnosti*:**

$$\forall x \forall y \big(set(x) \wedge set(y) \wedge \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \big).$$

***Aksiom skupovnosti*:**

$$\forall x \forall y \big(y \in x \rightarrow set(x) \big).$$

***Stratificirana komprehenzija*:** za stratificiranu formulu $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$,

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \big(set(y) \wedge \forall z \big(z \in y \leftrightarrow \varphi(z, x_1, \ldots, x_n) \big) \big).$$

Da bismo mogli iskazati aksiom izbora, potrebno je uvesti

- prazan skup $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$;
- uniju skupova $x \cup y := \{z \mid z \in x \vee z \in y\}$;
- presjek skupova $x \cap y := \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$.

***Aksiom izbora*:**

$$\forall x \big(set(x) \wedge \emptyset \notin x \wedge (\forall y \in x) set(y) \wedge (\forall y \in x)(\forall z \in x)(y \neq z \rightarrow y \cap z = \emptyset) \\ \rightarrow \exists u (\forall w \in x) \exists ! v (v \in w \cap u) \big)$$

Za aksiom beskonačnosti nužno je uvesti sljedeće pojmove:

- univerzalni skup $V := \{x \mid x = x\}$;
- uniju skupa $\bigcup x := \{z \mid (\exists t \in x)(z \in t)\}$
- presjek skupa $\bigcap x := \{z \mid (\forall t \in x)(z \in t)\}$
- broj $0 := \{\emptyset\}$;

- sljedbenik skupa $Sc(x) := \big\{y \mid (\exists z \in y)(y \setminus \{z\} \in x)\big\}$;
- svojstvo induktivnosti $Ind(x) :\Leftrightarrow 0 \in x \wedge (\forall y \in x)(Sc(y) \in x)$;
- skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} := \bigcap\{x \mid Ind(x)\}$;
- skup konačnih skupova $FIN := \bigcup \mathbb{N}$.

***Aksiom beskonačnosti*:**

$$V \notin FIN.$$

Preostaje još uvesti

- skup svih skupova $SET := \{x \mid set(x)\}$;
- operaciju singleton $\iota(x) := \{x\}$;
- singleton partitivni skup $\mathscr{P}_1(x) := \big\{\{t\} \mid t \in x\big\}$.

i nekoliko pojmova ovisnih o uređenim parovima Kuratowskog.

Definicija 3.6. 1. Za $x, y \in V$ definiramo **uređeni par Kuratowskog**

$$(x,y)_K := \big\{\{x\},\{x,y\}\big\}.$$

2. Za $X, Y \in SET$ definiramo njihov **Kartezijev produkt Kuratowskog**

$$X \times_K Y := \{(x,y)_K \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

3. Za X i Y definiramo **bijekciju Kuratowskog** između njih

$$bij_K(f, X, Y) :\Leftrightarrow$$
$$f \subseteq X \times_K Y \wedge (\forall x \in X)(\exists! y \in Y)\big((x,y)_K \in f\big) \wedge (\forall y \in Y)(\exists! x \in X)\big((x,y)_K \in f\big)$$

***Aksiom kvadriranja univerzalnog skupa*:**

$$V \notin FIN \rightarrow \exists f bij_K\big(f, V \times_K V, \mathscr{P}_1^2(V)\big).$$

Skup V je beskonačan po aksiomu beskonačnosti, a onda iz aksioma o kvadriranju univerzalnog skupa slijedi da postoji bijekcija $f\colon V \times_K V \to \mathscr{P}_1^2(V)$. Fiksirajmo jednu takvu bijekciju i označimo ju s F.

Definicija 3.7. Za $x, y \in V$ definiramo njihov **uređeni par**

$$(x, y) := \bigcup \{w \mid F\big((x, y)_K\big) = \iota^2(w)\}.$$

Iz teorema 3.1 sada slijedi da je (x, y) tipski ujednačen uređeni par.

Sada možemo uvesti sve preostale pojmove koje smo uveli u poglavljima 1 i 2, s razlikom da svi pojmovi koji ovise o uređenim parovima koriste tipski ujednačene uređene parove.

Nadalje, svi teoremi koji ovise o uređenim parovima su iskazani i/ili dokazani pomoću varijabilnog tipa δ, a budući da su sve napisane formule bile stratificirane za svaku vrijednost od δ, promjenom vrijednosti parametra δ iz 2 u 0 dobivamo odgovarajuće tvrdnje s tipski ujednačenim uređenim parovima.

3.3. Ordinalni brojevi

Ordinalni brojevi definiraju se kao klase ekvivalencije na skupu dobro uređenih skupova. Zato se u teoriji NFU kardinalni i ordinalni brojevi ne mogu poistovjetiti kao što je to slučaj u teoriji ZFC.

Definicija 3.8. Definiramo **skup svih dobrih uređaja** $DU := \{\leq \mid Wo(\leq)\}$ i **skup svih dobro uredivih skupova** $W := \{dom(\leq) \mid Wo(\leq))\}$.

Definiramo skup **ordinalnih brojeva** $Ord := DU/(\simeq) = \{[\leq]_{\simeq} \mid Wo(\leq)\}$.

Elemente skupa Ord nazivamo **ordinalni brojevi**, a klasu ekvivalencije $[\leq]_{\simeq}$ nazivamo **ordinalni tip** dobrog uređaja $\leq$ i označavamo ga s $ot(\leq)$. Kažemo da je $\alpha = [\leq]_{\simeq}$ beskonačni ordinalni broj ako je $dom(\leq)$ beskonačni skup. Ako $\leq$ ima tip n, onda $ot(\leq)$ ima tip $n+1$. Kao i kod kardinalnih brojeva, zbog $(\leq) \simeq (\leq)$ imamo da je svaki ordinalni broj neprazan.

Teorem 3.9. Formula $\alpha \in Ord \wedge \beta \in Ord \wedge \big(\forall (\leq) \in \alpha\big)\big(\forall (\preceq) \in \beta\big)\big(\exists x \in dom(\preceq)\big)\big(p_{\preceq}(x) \simeq (\leq)\big)$ je stratificirana.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$\alpha^4 \in Ord^5 \wedge \beta^4 \in Ord^5 \wedge \big(\forall (\leq)^3 \in \alpha^4\big)\big(\forall (\preceq)^3 \in \beta^4\big)\big(\exists x^1 \in dom(\preceq^3)^2\big)\big(p_{\preceq}(x)^3 \simeq^4 (\leq)^3\big). \blacksquare$$

Pomoću teorema 1.28 definiramo uređaj $<_{Ord}$ na ordinalnim brojevima kao

$$\alpha <_{Ord} \beta \Leftrightarrow (\forall \leq \in \alpha)(\forall \preceq \in \beta)\big(\exists x \in dom(\preceq)\big)\big(p_{\preceq}(x) \simeq (\leq)\big).$$

Jednostavno sada definiramo $\leq_{Ord}$ na sljedeći način: $\alpha \leq_{Ord} \beta :\Leftrightarrow \alpha <_{Ord} \beta \vee \alpha = \beta$. Kao i kod kardinalnih brojeva 2.22, i ovdje možemo koristiti alternativne karakterizacije uređaja.

Teorem 3.10. Za sve $\alpha, \beta \in Ord$ vrijedi $\alpha \leq_{Ord} \beta$ ili $\beta \leq_{Ord} \alpha$.

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta \in Ord$ proizvoljni te $(\preceq) \in \alpha$ i $(\sqsubseteq) \in \beta$. Po teoremu 1.57 imamo tri slučaja. Ako je $(\preceq) \simeq (\sqsubseteq)$, onda je $\alpha = \beta$. Ako postoji $x \in dom(\preceq)$ takav da je $p_{\preceq}(x) \simeq (\sqsubseteq)$, onda je $\alpha <_{Ord} \beta$, a ako postoji $y \in dom(\sqsubseteq)$ takav da je $p_{\sqsubseteq}(y) \simeq (\preceq)$, onda je $\beta <_{Ord} \alpha$. $\blacksquare$

Teorem 3.11. Relacija $\leq_{Ord}$ na skupu Ord je dobar uređaj.

Dokaz. Dokažimo da je $\leq_{Ord}$ parcijalni uređaj. Zbog napomene 1.44, dovoljno je dokazati da je $<_{Ord}$ irefleksivna i tranzitivna.

Irefleksivnost: Neka je $\alpha \in Ord$ proizvoljni te $(\preceq) \in \alpha$. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha <_{Ord} \alpha$. Tada postoji $x \in dom(\preceq)$ takav da je $p_{\preceq}(x) \simeq (\preceq)$, no to je kontradikcija s teoremom 1.56.

Tranzitivnost: Neka su $\alpha = ot(\leq)$, $\beta = ot(\preceq)$ i $\gamma = ot(\sqsubseteq)$ ordinalni brojevi. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha <_{Ord} \beta$ i $\beta <_{Ord} \gamma$. Tada postoje $x \in dom(\preceq)$ i $y \in dom(\sqsubseteq)$ takvi da vrijedi $p_{\preceq}(x) \simeq (\leq)$ i $p_{\sqsubseteq}(y) \simeq (\preceq)$. To znači da postoji sličnost f između $(\preceq)$ i $p_{\sqsubseteq}(y)$. Očito je $f \restriction P_{\preceq}(x)$ sličnost između $p_{\preceq}(x)$ i $p_{\sqsubseteq}(y_0)$, gdje je $y_0 = f(x) \in P_{\sqsubseteq}(y)$. Sada imamo $(\leq) \simeq p_{\preceq}(x) \simeq p_{\sqsubseteq}(y_0)$, odnosno $(\leq) \simeq p_{\sqsubseteq}(y_0)$, iz čega slijedi $\alpha <_{Ord} \gamma$.

Još preostaje dokazati da je $\leq_{Ord}$ dobar uređaj, odnosno da svaki neprazni podskup od Ord ima najmanji element.

Dobra uređenost: Neka je K neprazni skup ordinalnih brojeva. Uzmimo proizvoljni $\alpha \in K$ i $(\preceq) \in \alpha$. Formula $a^1 \in dom(\preceq^2)^2 \wedge p_{\preceq}(a^1)^2 \in (\bigcup K^4)^3$ je stratificirana, stoga definiramo skup $M := \{a \mid a \in dom(\preceq) \wedge p_{\preceq}(a) \in \bigcup K\}$.

Promotrimo slučaj kada je $M = \emptyset$. Tvrdimo da je α minimalni element skupa K. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\gamma \in K$ takav da je $\gamma <_{Ord} \alpha$. Zbog $\gamma \in K \subseteq Ord$ slijedi $\gamma \neq \emptyset$, pa uzmimo neki $(\sqsubseteq) \in \gamma$. Tada postoji $x \in dom(\preceq)$ takav da je $(\sqsubseteq) \simeq p_{\preceq}(x)$. Iz toga slijedi $x \in M$, što je kontradikcija. Sada iz teorema 3.10 dobivamo da je α najmanji element u K.

Promotrimo sada slučaj kada je $M \neq \emptyset$. Budući da je $M \subseteq dom(\preceq)$ i $(\preceq)$ je dobar uređaj, postoji $\preceq$-najmanji element u M, koji označimo s a_0. Tvrdimo da je $ot\big(p_{\preceq}(a_0)\big)$ minimalni element skupa K. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\gamma \in K$ takav da je $\gamma <_{Ord} ot\big(p_{\preceq}(a_0)\big)$. Tada za svaki $(\sqsubseteq) \in \gamma$ postoji $x \in P_{\preceq}(a_0) \subseteq dom(\preceq)$ takav da je $p_{p_{\preceq}(a_0)}(x) = p_{\preceq}(x) \simeq (\sqsubseteq)$. Iz toga slijedi $x \in M$, a iz $x \in P_{\preceq}(a_0)$ slijedi $x \prec a_0$, što je kontradikcija s činjenicom da je a_0 $\preceq$-najmanji element iz M. Budući da je $a_0 \in M$, slijedi da je $p_{\preceq}(a_0) \in \bigcup K$, što znači da postoji $\beta \in K$ takav da je $\beta = ot\big(p_{\preceq}(a_0)\big)$. Dakle, $ot\big(p_{\preceq}(a_0)\big) \in K$ je minimalni element od K, a onda iz teorema 3.10 slijedi da je to i najmanji element od K. ■

Ordinalni broj koji je određen dobrim uređajem $\leq_{Ord}$ označavamo s Ω. Preciznije, $\Omega := ot(\leq_{Ord}) \in Ord$. Napomenimo da Ω nije najveći ordinalni broj.

Neka je $\leq$ proizvoljna relacija. Formula $\big(\exists a^1 \in ext(\leq^2)^2\big)\big(\exists b^1 \in ext(\leq^2)^2\big)\big(x^2 = \{a^1\}^2 \wedge y^1 = \{b^1\}^2 \wedge a^1 \leq^2 b^1\big)$ je stratificirana, stoga definiramo **singleton relaciju** relacije $(\leq)$ kao

$$\mathscr{S}(\leq) := \big\{(\{a\},\{b\}) \;\big|\; \big(a \in ext(\leq)\big)\big(b \in ext(\leq)\big)\big\}.$$

Dakle, za relaciju $(\leq)$ i $x, y \in ext(\leq)$ vrijedi $\{x\}\ \mathscr{S}(\leq)\ \{y\}$ ako i samo ako vrijedi $x \leq y$.

Definicija 3.12. Neka je $\alpha = ot(\leq)$ ordinalni broj. Definiramo operaciju **podizanja tipova** na ordinalnom broju α kao $T(\alpha) := ot\big(\mathscr{S}(\leq)\big)$.

Lako vidimo da to ne ovisi o reprezentantu, jer iz $(\preceq) \simeq (\sqsubseteq)$ slijedi $\mathscr{S}(\preceq) \simeq \mathscr{S}(\sqsubseteq)$.

Jednostavno se pokazuje da ako α ima tip n, onda $T(\alpha)$ ima tip $n+1$. Primjenu operacije T uzastopno k puta na ordinalni broj α označavamo $T^k(\alpha)$ (uz konvenciju $T^0(\alpha) = \alpha$).

Teorem 3.13. Za svaki ordinalni broj α vrijedi $ot\big(p_{\leq_{Ord}}(\alpha)\big) = T^2(\alpha)$.

Dokaz. Neka je $\alpha \in Ord$ proizvoljan i uzmimo $(\preceq) \in \alpha$. Tada je $T^2(\alpha) = ot(\mathscr{S}^2(\preceq))$. Dovoljno je dokazati da postoji sličnost između $p_{\leq_{Ord}}(\alpha)$ i $\mathscr{S}^2(\preceq)$, odnosno da postoji bijekcija $f\colon P_{\leq_{Ord}}(\alpha) \to \mathscr{P}_1^2\big(dom(\preceq)\big)$ takva da f i f^{-1} čuvaju uređaj.

Formula $\beta^3 <^4_{Ord} \alpha^3 \wedge x^1 \in dom(\preceq^2)^2 \wedge (\forall (\sqsubseteq)^2 \in \beta^3)\big(p_{\preceq}(x^1)^2 \simeq^3 (\sqsubseteq)^2\big) \wedge t^3 = \{\{x^1\}\}^3$ je stratificirana i u njoj β i t imaju isti tip, stoga možemo definirati

$$f := \big\{(\beta, t) \bigm| \beta <_{Ord} \alpha \wedge x \in dom(\preceq) \wedge (\forall (\sqsubseteq) \in \beta)\big(p_{\preceq}(x) \simeq (\sqsubseteq)\big) \wedge t = \{\{x\}\}\big\}.$$

Tvrdimo da je f sličnost. Dokažimo prvo da je f funkcija. Pretpostavimo obrnuto, da postoji β takav da je $(\beta, \{\{x_1\}\}) \in f$ i $(\beta, \{\{x_2\}\}) \in f$, gdje su $x_1 \neq x_2$. Tada za svaki $(\sqsubseteq) \in \beta$ vrijedi $p_{\preceq}(x_1) \simeq (\sqsubseteq) \simeq p_{\preceq}(x_2)$, iz čega slijedi $p_{\preceq}(x_1) \simeq p_{\preceq}(x_2)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x_1 \prec x_2$, stoga je $p_{\preceq}(x_1) \simeq p_{p_{\preceq}(x_2)}(x_1)$. Sada iz teorema 1.56 dobivamo kontradikciju.

Dokažimo da je f injekcija. Pretpostavimo da vrijedi $f(\beta_1) = f(\beta_2)$, odnosno $\{\{x_1\}\} = \{\{x_2\}\}$. Tada je $x_1 = x_2$. Uzmimo proizvoljne $(\sqsubseteq_1) \in \beta_1$ i $(\sqsubseteq_2) \in \beta_2$. Iz definicije funkcije f dobivamo da je $p_{\preceq}(x_1) \simeq (\sqsubseteq_1)$ i $p_{\preceq}(x_2) \simeq (\sqsubseteq_2)$. Budući da je $x_1 = x_2$, imamo $(\sqsubseteq_1) \simeq p_{\preceq}(x_1) \simeq p_{\preceq}(x_2) \simeq (\sqsubseteq_2)$, iz čega slijedi $\beta_1 = \beta_2$.

Funkcija f je očito surjekcija. Naime, neka je $\{\{x\}\} \in \mathscr{P}_1^2(dom(\preceq))$ proizvoljan. Tada je $x \in dom(\preceq)$. Očito je $ot\big(p_{\preceq}(x)\big) <_{Ord} \alpha$ i za svaki $(\sqsubseteq) \in ot(p_{\preceq}(x))$ je $p_{\preceq}(x) \simeq (\sqsubseteq)$.

Dokažimo da f čuva uređaj. Pretpostavimo da vrijedi $\beta_1 <_{Ord} \beta_2$. Tada imamo $f(\beta_1) = \{\{x_1\}\}$ i $f(\beta_2) = \{\{x_2\}\}$, za neke $x_1, x_2 \in dom(\preceq)$. Dovoljno je dokazati $x_1 \prec x_2$. Budući da vrijedi $\beta_1 <_{Ord} \beta_2$, specijalno za $p_{\preceq}(x_1) \in \beta_1$ i $p_{\preceq}(x_2) \in \beta_2$ postoji $w \in P_{\preceq}(x_2)$ takav da je $p_{\preceq}(x_1) \simeq p_{p_{\preceq}(x_2)}(w) = p_{\preceq}(w)$. Iz teorema 1.56 slijedi $x_1 = w \in P_{\preceq}(x_2)$, što daje $x_1 \prec x_2$.

Funkcija zadana s $f^{-1}(\{\{x\}\}) = ot(p_{\preceq}(x))$ je inverz funkcije f. Preostaje još dokazati da f^{-1} čuva uređaj. Neka je $\{\{x_1\}\}\ \mathscr{S}^2(\preceq)\ \{\{x_2\}\}$. Iz toga slijedi $x_1 \preceq x_2$. Ako je $x_1 = x_2$, onda imamo $p_{\preceq}(x_1) = p_{\preceq}(x_2)$, iz čega slijedi $ot(p_{\preceq}(x_1)) = ot(p_{\preceq}(x_2))$. Neka je $x_1 \prec x_2$. Tvrdimo

$ot(p_{\preceq}(x_1)) <_{Ord} ot(p_{\preceq}(x_2))$. Za to je dovoljno pokazati da postoji $w \in P_{\preceq}(x_2)$ takav da je $p_{\preceq}(x_1) \simeq p_{p_{\preceq}(x_2)}(w)$. Zbog $x_1 \prec x_2$ imamo $P_{\preceq}(x_1) \subset P_{\preceq}(x_2)$, iz čega slijedi da za $x_1 \in P_{\preceq}(x_2)$ vrijedi $p_{\preceq}(x_1) \simeq p_{\preceq}(x_1) = p_{p_{\preceq}(x_2)}(x)$. ■

Sljedeći teorem, zajedno s teoremom 3.13, je razlog zašto Burali-Fortijev paradoks nije moguće na standardni način reproducirati u teoriji NFU.

Teorem 3.14. Vrijedi $T^2(\Omega) <_{Ord} \Omega$.

Dokaz. Iz teorema 3.13 slijedi da je dovoljno dokazati $ot\big(p_{\leq_{Ord}}(\Omega)\big) <_{Ord} \Omega = ot(\leq_{Ord})$. Za uređaje $p_{\leq_{Ord}}(\Omega)$ i $\leq_{Ord}$ očito vrijedi $\Omega \in dom(\leq_{Ord}) = Ord$ i $p_{\leq_{Ord}}(\Omega) \simeq p_{\leq_{Ord}}(\Omega)$. Sada iz definicije uređaja na ordinalnim brojevima dobivamo tvrdnju. ■

U literaturi se navodi da se teorem 3.13 dokazuje transfinitnom indukcijom, iako je samo prikazan ilustrativni dokaz indukcijom po nestratificiranoj formuli [35,44]. Ipak, za kraj prikaza ordinalnih brojeva navodimo teorem transfinitne indukcije.

Teorem 3.15. Neka je $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ stratificirana formula. Tada u NFU vrijedi formula:

$$(\forall\alpha \in Ord)\big((\forall\beta \in Ord)\big(\beta <_{Ord} \alpha \to \varphi(\beta, x_1, \ldots, x_n)\big) \to \varphi(\alpha, x_1, \ldots, x_n)\big) \to \\ \to (\forall\alpha \in Ord)\varphi(\alpha, x_1, \ldots, x_n).$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi
$(\forall\alpha \in Ord)\big((\forall\beta \in Ord)\big(\beta <_{Ord} \alpha \to \varphi(\beta, x_1, \ldots, x_n)\big) \to \varphi(\alpha, x_1, \ldots, x_n)\big)$, ali da postoji $\alpha_0 \in Ord$ takav da ne vrijedi $\varphi(\alpha_0, x_1, \ldots, x_n)$. Budući da je φ stratificirana, onda je također i formula $\gamma \in Ord \wedge \neg\varphi(\gamma, x_1, \ldots, x_n)$ stratificirana, stoga definiramo skup $X := \{\gamma \mid \gamma \in Ord \wedge \neg\varphi(\gamma, x_1, \ldots, x_n)\}$. Iz pretpostavke slijedi $\alpha_0 \in X$, odnosno X je neprazan. Budući da je $\leq_{Ord}$ dobar uređaj na skupu ordinalnih brojeva, postoji najmanji element skupa X, koji označimo s γ_0. Tada za sve $\beta <_{Ord} \gamma_0$ vrijedi $\varphi(\beta, x_1, \ldots, x_n)$ jer kada to ne bi vrijedilo, γ_0 ne bi bio najmanji element u X. Sada iz pretpostavke dobivamo da vrijedi $\varphi(\gamma_0, x_1, \ldots, x_n)$, odnosno $\gamma_0 \notin X$, što je kontradikcija. ■

3.4. KARDINALNI BROJEVI (NASTAVAK)

U ovoj točki nastavljamo izlaganje o kardinalnim brojevima. Zaokružit ćemo prikaz uvođenjem potenciranja kardinalnih brojeva i dokazom neke vrste Cantorova teorema, jer uobičajeni Cantorov teorem $|X| <_{Card} |\mathscr{P}(X)|$ ne možemo dokazati.

Teorem 3.16. Za svaki skup X vrijedi $|\mathscr{P}_1(X)| <_{Card} |\mathscr{P}(X)|$.

Dokaz. Očito je $id_{\mathscr{P}_1(X)}$ jedna injekcija s $\mathscr{P}_1(X)$ u $\mathscr{P}(X)$, što znači da vrijedi $|\mathscr{P}_1(X)| \leq_{Card} |\mathscr{P}(X)|$. Pretpostavimo da vrijedi $|\mathscr{P}_1(X)| = |\mathscr{P}(X)|$.

Tada postoji bijekcija $f\colon \mathscr{P}_1(X) \to \mathscr{P}(X)$. Formula $x^1 \in X^2 \land x^1 \notin f(\{x^1\}^2)^2$ je stratificirana, stoga možemo definirati skup $K := \{x \mid x \in X \land x \notin f(\{x\})\}$. Očito je $K \subseteq \mathscr{P}(X)$, a f je bijekcija, stoga postoji $k \in X$ takav da je $f(\{k\}) = K$. Sada imamo $k \in K$ ako i samo ako $k \in f(\{k\})$ ako i samo ako $k \notin K$, što je kontradikcija. ∎

Iz teorema 3.16 slijedi da za $X := V$ imamo $|\mathscr{P}_1(V)| <_{Card} |\mathscr{P}(V)| \leq_{Card} |V|$, odnosno $|\mathscr{P}_1(V)| <_{Card} |V|$.

Zahvaljujući tipski ujednačenim parovima, možemo dokazati da se zbrajanje i množenje prirodnih brojeva podudara s vanjskim zbrajanjem i množenjem prirodnih brojeva.

Teorem 3.17. Za svaka dva prirodna broja n i m vrijedi $n + m = n \oplus m$ i $n \cdot m = n \odot m$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za zbrajanje, slično se dokazuje tvrdnja za množenje. Uzmimo proizvoljni $n \in \mathbb{N}$. Formula $(\forall m^1 \in \mathbb{N}^2)\big((n+m)^1 = (n \oplus m)^1\big)$ je stratificirana, stoga ju možemo dokazati indukcijom po m.

Za $m = 0$ imamo $n + 0 = n$ i $n \oplus 0 = \{z \mid (\exists x \in n)(\exists y \in 0)(z \sim x \times \{0\} \cup y \times \{1\})\} = \{z \mid (\exists x \in n)(z \sim x \times \{0\})\} = \{z \mid (\exists x \in n)(z \sim x)\} = n$, jer je s $f(x) = (x, 0)$ zadana jedna bijekcija između x i $x \times \{0\}$. Dakle, $n + 0 = n \oplus 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$ i dokažimo tvrdnju za $Sc(m)$.

Budući da vrijedi $n + Sc(m) = Sc(n+m) = Sc(n \oplus m)$, dovoljno je dokazati $Sc(n \oplus m) = n \oplus Sc(m)$. Uzmimo $x \in n$ i $y \in m$ te proizvoljne $A \in Sc(n \oplus m)$ i $C \in n \oplus Sc(m)$. Tada imamo $A = a \cup \{b\}$, gdje je $a \in n \oplus m$ i $b \notin a$. Iz ovog prvog slijedi $a \sim x \times \{0\} \cup y \times \{1\}$. Nadalje, imamo $C \sim x \times \{0\} \cup (y \cup \{z\}) \times \{1\} = x \times \{0\} \cup y \times \{1\} \cup \{(z,1)\}$, gdje je $z \notin y$. Iz $a \sim x \times \{0\} \cup y \times \{1\}$ slijedi da postoji bijekcija $f\colon a \to x \times \{0\} \cup y \times \{1\}$. Definirajmo $h := f \cup \big\{\big(b, (z,1)\big)\big\}$. Očito je h funkcija s A u $x \times \{0\} \cup y \times \{1\} \cup \{(z,1)\}$.

Dokažimo da je h injekcija. Neka su $s_1, s_2 \in A$ takvi da vrijedi $h(s_1) = h(s_2)$. Tada imamo tri slučaja. Ako su $s_1, s_2 \in a$, onda je $f(s_1) = h(s_1) = h(s_2) = f(s_2)$, iz čega slijedi $s_1 = s_2$. Ako je $s_1 \in a$ i $s_2 = b$, onda imamo $f(s_1) = h(s_1) = h(s_2) = (z, 1)$. Sada iz $f(s_1) \in x \times \{0\} \cup y \times \{1\}$ i $(z, 1) \notin x \times \{0\} \cup y \times \{1\}$ (zbog $z \notin y$) dobivamo kontradikciju. Ako je $s_1 = s_2 = b$, tvrdnja je trivijalna. Dokažimo da je f surjekcija. Neka je $w \in x \times \{0\} \cup y \times \{1\} \cup \{(z, 1)\}$ proizvoljan. Ako je $w \in x \times \{0\} \cup y \times \{1\}$, onda postoji $s \in a$ takav da je $h(s) = f(s) = w$. Ako je $w = (z, 1)$, onda je $h(b) = w$.

Iz $C \sim x \times \{0\} \cup y \times \{1\} \cup \{(z, 1)\}$ slijedi da postoji bijekcija $g\colon x \times \{0\} \cup y \times \{1\} \cup \{(z, 1)\} \to C$. Sada je $g \circ h$ bijekcija (kao kompozicija bijekcija) sa skupa A na skup C. Dakle, $Sc(n \oplus m) = n \oplus Sc(m)$. ■

Zbog teorema 3.17 i tipske ujednačenosti vanjskih operacija, oznake $\oplus$ i $\odot$ možemo zamijeniti s $+$ i $\cdot$.

Teorem 3.18. Neka su $\kappa = |X|$ i $\lambda = |Y|$ kardinalni brojevi. U teoriji NFU vrijede sljedeće tvrdnje.

1. $\kappa <_{Card} \lambda$ ako i samo ako $T(\kappa) <_{Card} T(\lambda)$.

2. $T(\kappa + \lambda) = T(\kappa) + T(\lambda)$.

3. $T(\kappa \cdot \lambda) = T(\kappa) \cdot T(\lambda)$.

Dokaz.

1. Vrijedi $\kappa \leq_{Card} \lambda$ ako i samo ako postoji $Z \subseteq Y$ takav da je $X \sim Z$. To vrijedi ako i samo ako je $\mathscr{P}_1(X) \sim \mathscr{P}_1(Z) \subseteq \mathscr{P}_1(Y)$, što vrijedi ako i samo ako je $T(\kappa) = |\mathscr{P}_1(X)| = |\mathscr{P}_1(Z)| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(Y)| = T(\lambda)$. Sada iz teorema 2.35 slijedi tvrdnja.

2. Vrijedi $\kappa + \lambda = |X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}|$, iz čega slijedi $T(\kappa + \lambda) = |\mathscr{P}_1(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\})| = |\mathscr{P}_1(X \times \{0\}) \cup \mathscr{P}_1(Y \times \{1\})|$. Nadalje, budući da vrijedi $T(\kappa) = |\mathscr{P}_1(X)|$ i $T(\lambda) = |\mathscr{P}_1(Y)|$, dobivamo $T(\kappa) + T(\lambda) = |\mathscr{P}_1(X) \times \{0\} \cup \mathscr{P}_1(Y) \times \{1\}|$.

   Lako se pokaže da vrijedi $\mathscr{P}_1(X) \times \{0\} \sim \mathscr{P}_1(X) \times \{2\} \sim \mathscr{P}_1(X \times \{0\})$,[1] a onda analogno vrijedi i $\mathscr{P}_1(Y) \times \{1\} \sim \mathscr{P}_1(Y \times \{1\})$. Prema lemi 2.23 sada dobivamo

$$\mathscr{P}_1(X) \times \{0\} \cup \mathscr{P}_1(Y) \times \{1\} \sim \mathscr{P}_1(X \times \{0\}) \cup \mathscr{P}_1(Y \times \{1\}),$$

   iz čega slijedi tvrdnja.

[1] Ovako zaobilazni put je potreban jer nije moguće direktno definirati bijekciju stratificiranom formulom.

3. Vrijedi $\kappa \cdot \lambda = |X \times Y|$, iz čega slijedi $T(\kappa \cdot \lambda) = |\mathscr{P}_1(X \times Y)|$. Nadalje, iz $T(\kappa) = |\mathscr{P}_1(X)|$ i $T(\lambda) = |\mathscr{P}_1(Y)|$, dobivamo $T(\kappa) \cdot T(\lambda) = |\mathscr{P}_1(X) \times \mathscr{P}_1(Y)|$.
   Formula $(\exists x^1 \in X^2)(\exists y^1 \in Y^2)\big(t^2 = \big(\{(x^1, y^1)^1\}^2, (\{x^1\}^2, \{y^1\}^2)^2\big)\big)$ je stratificirana, stoga definiramo $f := \big\{\big(\{(x,y)\}, (\{x\}, \{y\})\big) \mid x \in X \wedge y \in Y\big\}$. Očito je f bijekcija između $\mathscr{P}_1(X \times Y)$ i $\mathscr{P}_1(X) \times \mathscr{P}_1(Y)$. Dakle, $T(\kappa \cdot \lambda) = T(\kappa) \cdot T(\lambda)$. ■

Teorem 3.19. Za svaki skup X vrijedi $|\mathscr{P}_1(X)| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$.

Dokaz. Neka je X proizvoljni skup. Tada je $X \subseteq V$, iz čega slijedi $\mathscr{P}_1(X) \subseteq \mathscr{P}_1(V)$. Tada imamo $|\mathscr{P}_1(X)| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$. ■

Teorem 3.20. Neka je X skup. Tada je $|X| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$ ako i samo ako postoji skup Y takav da je $|X| = |\mathscr{P}_1(Y)|$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $|X| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$. Tada postoji $Z \subseteq \mathscr{P}_1(V)$ takav da je $X \sim Z$. Iz teorema 2.39 dobivamo $Z = \mathscr{P}_1\big(\bigcup Z\big)$, iz čega slijedi $X \sim \mathscr{P}_1\big(\bigcup Z\big)$. Dakle, $|X| = \big|\mathscr{P}_1\big(\bigcup Z\big)\big|$. Pretpostavimo da postoji skup Y takav da je $|X| = |\mathscr{P}_1(Y)|$. Tada vrijedi
$|X| = |\mathscr{P}_1(Y)| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$. ■

Očito je $T(\kappa)$ definirano za svaki kardinalni broj. Međutim, ukoliko želimo definirati „inverznu” operaciju, po teoremu 3.20 to možemo napraviti samo za kardinalne brojeve koji nisu „preveliki”.

Definicija 3.21. Neka je $\kappa = |X| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$ kardinalni broj. Definiramo operaciju **spuštanja tipova** kardinalnog broja κ kao kardinalni broj $T^{-1}(\kappa) := \lambda$, takav da je $T(\lambda) = \kappa$.

Jednostavno imamo da ako κ ima tip n, onda $T^{-1}(\kappa)$ ima tip $n-1$. Za $\kappa \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$ vrijedi $T(T^{-1}(\kappa)) = \kappa$, a $T^{-1}(T(\kappa)) = \kappa$ vrijedi za sve κ. Naime, $T^{-1}(\kappa) = \lambda$ znači $T(\lambda) = \kappa$, iz čega slijedi $T(T^{-1}(\kappa)) = T(\lambda) = \kappa$. S druge strane, iz $T^{-1}(T(\kappa)) = \lambda$ slijedi $T(\lambda) = T(\kappa)$, iz čega pak slijedi $\lambda = \kappa$.

Definicija 3.22. Neka su $\kappa = |X|$ i $\lambda = |Y|$ kardinalni brojevi takvi da vrijedi $\left|X^Y\right| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$. Definiramo **potenciranje kardinalnih brojeva** kao $\kappa^\lambda := T^{-1}\big(\left|X^Y\right|\big)$.

Primijetimo da potenciranje kardinalnih brojeva ne ovisi o izboru reprezentanata (dokaz je isti kao u ZF). Sada iz teorema 3.20 slijedi da je potenciranje kardinalnih brojeva dobro definirano.

Teorem 3.23. Ako κ i λ imaju tip n, onda κ^λ ima tip n.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa

$$z^1 \in (\kappa^\lambda)^2 \leftrightarrow (\exists x^1 \in \kappa^2)(\exists y^1 \in \lambda^2)\exists w^1\big(z^1 \sim^2 w^1 \wedge |x^y|^3 = \big|\mathscr{P}_1(w^1)^2\big|^3\big). \qquad \blacksquare$$

Teorem 3.24. Za svaki skup X vrijedi $\big|\{0,1\}^X\big| = |\mathscr{P}(X)|$.

Dokaz. Formula $f^2(x^1)^1 = 1^1$ je stratificirana pa zadajemo apstrakcijski term $\mathfrak{t} := \{x \mid f(x) = 1\}$. Ako f ima tip $n+1$ i x ima tip n, onda $\mathfrak{t}$ ima tip $n+1$, što znači da po teoremu 1.34 postoji funkcija F takva da je $F(f) = \{x \mid f(x) = 1\}$, za $f \in \{0,1\}^X$. Dokažimo da je F injekcija. Neka su $f, g \colon X \to \{0,1\}$ funkcije takve da vrijedi $F(f) = F(g)$ i pretpostavimo da vrijedi $f \neq g$. To znači da postoji $x_0 \in X$ takav da je $f(x_0) \neq g(x_0)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $f(x_0) = 1$ i $g(x_0) = 0$. Iz $F(f) = F(g)$ imamo $\{x \mid f(x) = 1\} = \{x \mid g(x) = 1\}$. To znači da je $x_0 \in F(f)$, ali $x_0 \notin F(g)$, što je kontradikcija. Dakle, $f = g$, odnosno F je injekcija.

Ako Y ima tip n, onda term $\mathfrak{s} := (Y \times \{1\}) \cup \big((X \setminus Y) \times \{0\}\big)$ ima tip n pa po teoremu 1.34 postoji funkcija G takva da je $G(Y) = Y \times \{1\} \cup (X \setminus Y) \times \{0\}$ za svaki $Y \in \mathscr{P}(X)$. Dokažimo da je G injekcija. Neka su $a, b \subseteq X$ takvi da je $G(a) = G(b)$. Ako je $z \in a$, onda je $(z,1) \in a \times \{1\} \subseteq G(a) = G(b)$. Znači, $(z,1) \in b \times \{1\}$, pa je $z \in b$. Analogno se dokazuje druga inkluzija. Dakle, $a = b$.

Sada iz Cantor–Bernsteinova teorema slijedi $\big|\{0,1\}^X\big| = |\mathscr{P}(X)|$. $\blacksquare$

Iz teorema 3.24 slijedi da je $T^{-1}\big(\big|\{0,1\}^X\big|\big)$ definirano ako i samo ako je $T^{-1}(|\mathscr{P}(X)|)$ definirano, a u tom slučaju je $2^{|X|} = T^{-1}\big(\big|\{0,1\}^X\big|\big) = T^{-1}(|\mathscr{P}(X)|)$.

Teorem 3.25. Za svaki skup X vrijedi $\big|\mathscr{P}_1\big(\mathscr{P}(X)\big)\big| = \big|\mathscr{P}\big(\mathscr{P}_1(X)\big)\big|$.

Dokaz. Formula $\exists y\big(y^1 \subseteq X^1 \wedge a^2 = \{y^1\}^2 \wedge b^2 = \mathscr{P}_1(y^1)^2 \wedge t^2 = (a^2, b^2)^2\big)$ je stratificirana, stoga definiramo $f := \big\{\big(\{y\}, \mathscr{P}_1(y)\big) \bigm| y \subseteq X\big\}$. Očito je f funkcija s $\mathscr{P}_1\big(\mathscr{P}(X)\big)$ u $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}_1(X)\big)$. Funkcija f je surjekcija jer za svaki $z \subseteq \mathscr{P}_1(X)$ vrijedi $\bigcup z \subseteq X$ i po teoremu 2.39 imamo $z = \mathscr{P}_1\big(\bigcup z\big)$, a to znači da je $f(\{\bigcup z\}) = z$. Također je f i injekcija, jer iz $\{y_1\} \neq \{y_2\}$ slijedi $y_1 \neq y_2$, a iz toga onda dobivamo $f(\{y_1\}) = \mathscr{P}_1(y_1) \neq \mathscr{P}_1(y_2) = f(\{y_2\})$. $\blacksquare$

Teorem 3.26. Za svaki skup X takav da je $|X| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$, vrijedi $|\mathscr{P}(X)| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da za neki X vrijedi $|X| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$ i $|\mathscr{P}(X)| >_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$. Po teoremu 3.20 postoji skup Y takav da je $|\mathscr{P}_1(Y)| = |X|$. Iz teorema 3.19 dobivamo $\big|\mathscr{P}_1\big(\mathscr{P}(Y)\big)\big| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$. Sada imamo

$$|\mathscr{P}_1(V)| <_{Card} |\mathscr{P}(X)| = \big|\mathscr{P}\big(\mathscr{P}_1(Y)\big)\big| = \big|\mathscr{P}_1\big(\mathscr{P}(Y)\big)\big| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|,$$

što je kontradikcija. ■

Iz teorema 3.26 slijedi da je kardinalni broj $2^{|X|}$ definiran ako je $|X| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$.

Teorem 3.27. Za svaki skup X takav da je $|X| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$ vrijedi $T\left(2^{|X|}\right) = 2^{T(|X|)}$.

Dokaz. Iz uvjeta teorema slijedi da je $2^{|X|}$ definirano, a budući da za svaki skup X vrijedi $\mathscr{P}_1(X) \leq_{Card} \mathscr{P}_1(V)$, $2^{T(|X|)}$ je također definirano. Tada imamo $T\left(2^{|X|}\right) = T\left(T^{-1}(|\mathscr{P}(X)|)\right) = |\mathscr{P}(X)|$ i $2^{T(|X|)} = 2^{|\mathscr{P}_1(X)|} = T^{-1}\left(\left|\mathscr{P}\left(\mathscr{P}_1(X)\right)\right|\right)$. Iz toga dobivamo

$$\begin{aligned} T\left(2^{|X|}\right) = 2^{T(|X|)} &\Leftrightarrow |\mathscr{P}(X)| = T^{-1}\left(\left|\mathscr{P}\left(\mathscr{P}_1(X)\right)\right|\right) \\ &\Leftrightarrow T\left(|\mathscr{P}(X)|\right) = \left|\mathscr{P}\left(\mathscr{P}_1(X)\right)\right| \\ &\Leftrightarrow \left|\mathscr{P}_1\left(\mathscr{P}(X)\right)\right| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}_1(X))|, \end{aligned}$$

što je istina po teoremu 3.25. ■

Upravo iz nemogućnosti dokaza standardnog Cantorova teorema, u teoriji NFU ne možemo reproducirati Cantorov paradoks. Međutim, koristeći potenciranje kardinalnih brojeva možemo dokazati NFU-oblik Cantorova teorema, koji ne dovodi do paradoksa.

Teorem 3.28. Za svaki kardinalni broj $\kappa \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$ vrijedi $\kappa <_{Card} 2^{\kappa}$.

Dokaz. Neka je $\kappa = |X|$. Dokažimo $T(\kappa) <_{Card} 2^{T(\kappa)}$, jer će tada po teoremu 3.27 vrijediti $\kappa <_{Card} 2^{\kappa}$. Imamo

$$T(\kappa) = |\mathscr{P}_1(X)| <_{Card} |\mathscr{P}(X)| = T(T^{-1}(|\mathscr{P}(X)|)) = T\left(2^{|X|}\right) = 2^{T(|X|)} = 2^{T(\kappa)}. \qquad ■$$

Iz aksioma beskonačnosti slijedi $\aleph_0 \leq |V|$, no ne znamo nužno da vrijedi stroga nejednakost. Drugim riječima, ne znamo postoji li „više vrsta” beskonačnosti. Srećom, taj problem možemo riješiti pomoću sljedećeg teorema.

Teorem 3.29. U teoriji NFU vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Za svaki prirodni broj n je $T(n)$ prirodni broj.

2. Za svaki prirodni broj n je $T^{-1}(n)$ definirano i prirodni je broj.

3. $T(\aleph_0) = \aleph_0$.

Dokaz. 1. Formula $(\forall n \in \mathbb{N})\big(T(n) \in \mathbb{N}\big)$ nije stratificirana (jer konstantskom simbolu $\mathbb{N}$ ne možemo konzistentno pridružiti tip), ali je ekvivalentna stratificiranoj formuli $(\forall n^1 \in \mathbb{N}^2)(T(n^1)^2 \in N'^3)$, gdje je N' samo drugi konstantski simbol za skup prirodnih brojeva, recimo $N' := \bigcap\{y \mid Ind(y)\}$. Tu formulu možemo dokazati indukcijom po n.

Za $n = 0$ imamo $T(n) = T(0) = |\mathscr{P}_1(\emptyset)| = |\emptyset| = 0 \in N'$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo ju za $Sc(n)$.

Neka je $Sc(n) = |a \cup \{b\}|$, gdje je $a \in n$ i $b \notin a$. Tada imamo
$T\big(Sc(n)\big) = |\mathscr{P}_1(a \cup \{b\})| = \big|\mathscr{P}_1(a) \cup \big\{\{b\}\big\}\big|$. Iz $b \notin a$ slijedi $\{b\} \notin \mathscr{P}_1(a)$, a po pretpostavci indukcije je $T(n) = |\mathscr{P}_1(a)| =: m \in N'$. Sada imamo

$$\big|\mathscr{P}_1(a) \cup \big\{\{b\}\big\}\big| = Sc(|\mathscr{P}_1(a)|) = Sc(m) \in N'.$$

2. Formula $(\forall n^3 \in \mathbb{N}^4)(\exists x^1 \in FIN^2)(\mathscr{P}_1(x)^2 \in n^3)$ je stratificirana, stoga je možemo dokazati indukcijom po n. Za $n = 0$ je očito $n = |\mathscr{P}_1(\emptyset)|$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo ju za $Sc(n)$.

   Iz pretpostavke indukcije slijedi da postoji konačni skup x takav da je $\mathscr{P}_1(x) \in n$. Budući da je x konačan, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in m$, a po aksiomu beskonačnosti postoji $y \in x^c$. Tada je $x \cup \{y\} \in Sc(m) \subseteq FIN$. Iz $y \in x^c$ dobivamo $\{y\} \notin \mathscr{P}_1(x)$, dakle

$$\mathscr{P}_1(x \cup \{y\}) = \mathscr{P}_1(x) \cup \{\{y\}\} \in Sc(n).$$

   Uzmimo proizvoljni $n \in \mathbb{N}$. Po prethodno dokazanome postoji $x \in FIN$ takav da je $n = |\mathscr{P}_1(x)|$. Budući da je $x \in FIN$, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m = |x|$. Dakle, $T(m) = n$, iz čega slijedi $T^{-1}(n) = m \in \mathbb{N}$.

3. Formule $(\exists n^1 \in \mathbb{N}^2)(t^2 = T(n^1)^2)$ i $(\exists n^2 \in \mathbb{N}^3)(t^1 = T^{-1}(n^2)^1)$ su stratificirane pa definiramo skupove $X_1 := \{T(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $X_2 := \{T^{-1}(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Iz tvrdnje (1) dobivamo $X_1 \subseteq \mathbb{N}$, a iz tvrdnje (2) dobivamo $X_2 \subseteq \mathbb{N}$, odnosno $\mathscr{P}_1(X_2) \subseteq \mathscr{P}_1(\mathbb{N})$. Dakle, $|X_1| \leq_{Card} \aleph_0$ i $|\mathscr{P}_1(X_2)| \leq_{Card} T(\aleph_0)$.

   Formula $(\exists n^1 \in \mathbb{N}^2)(a^2 = \{n^1\}^2 \wedge b^2 = T(n^1)^2 \wedge t^2 = (a^2, b^2)^2)$ je stratificirana, stoga definiramo funkciju $f := \{(\{n\}, T(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Očito je f bijekcija između $\mathscr{P}_1(\mathbb{N})$ i X_1. Dakle, imamo $T(\aleph_0) = |X_1| \leq_{Card} \aleph_0$.

   Nadalje, formula $(\exists n^2 \in \mathbb{N}^3)(a^2 = n^2 \wedge b^2 = \{T^{-1}(n^2)^1\}^2 \wedge t^2 = (a^2, b^2)^2)$ je stratificirana, stoga definiramo $g := \{(n, \{T^{-1}(n)\}) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Očito je g funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathscr{P}_1(X_2)$.

Funckija g je surjekcija jer za $\{T^{-1}(n)\} \in \mathscr{P}_1(X_2)$ očito vrijedi $g(n) = \{T^{-1}(n)\}$. Također je i injekcija jer ako vrijedi $\{T^{-1}(n)\} = \{T^{-1}(m)\}$, onda je $T^{-1}(n) = T^{-1}(m)$, iz čega slijedi $n = m$. Dakle, g je bijekcija, što znači da imamo $\aleph_0 = |\mathscr{P}_1(X_2)| \leq_{Card} T(\aleph_0)$.

Sada iz Cantor–Bernsteinova teorema dobivamo $T(\aleph_0) = \aleph_0$. ■

Sada iz teorema 3.29 dobivamo $\aleph_0 = T(\aleph_0) = |\mathscr{P}_1(\mathbb{N})| \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)|$, a onda iz Cantorova teorema 3.28 dobivamo $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Dakle, postoje beskonačni skupovi koji nisu prebrojivi.

Budući da je skup *Card* dobro uređen relacijom $\leq_{Card}$, a dokazali smo da $\aleph_0$ nije jedini beskonačni kardinalni broj, slijedi da postoji najmanji beskonačni broj veći od $\aleph_0$, koji označavamo s $\aleph_1$. Postavlja se pitanje vrijedi li $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

***Hipoteza kontinuuma*:** $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

***Generalizirana hipoteza kontinuuma*:**

$$(\forall \kappa \in Card \setminus FIN)\big(\kappa \leq_{Card} |\mathscr{P}_1(V)| \rightarrow (\forall \lambda \in Card)(\kappa \geq_{Card} \lambda \vee \lambda \geq_{Card} 2^{\kappa})\big)$$

Pitanje dokazivosti (generalizirane) hipoteze kontinuuma u teoriji NFU nije u potpunosti riješeno. Nije jasno može li se nešto zaključiti detaljnijim proučavanjem Jensenovog dokaza konzistentnosti teorije NFU. Nadalje, autor u [37] tvrdi da se nedokazivost hipoteze kontinuuma dokazuje pomoću metode forcinga na jednak način kao i u teoriji ZF. Međutim, ta tvrdnja je iznesena, ne samo bez dokaza, već i bez skice ili načina na koji se tom problemu treba pristupiti.

4. MODELI TEORIJE NFU

Postoji nekoliko načina konstruiranja modela teorije NFU i njezinih proširenja. Povijesno prva bila je Jensenova konstrukcija [40]. Jensen svoju konstrukciju započinje s modelom jednostavne teorije tipova te pomoću njega dobiva model za NFU. Njegov dokaz je vrlo teško pratiti, ali ga je Boffa u [6] značajno pojednostavio. Nadalje, Boffa u [7] predstavlja novu konstrukciju, koja započinje s modelom teorije ZF, pomoću kojeg se onda definira model za NFU.[1] U ovom poglavlju predstavit ćemo detaljno osnovnu Boffinu konstrukciju, s preciznim prikazom svakog koraka u dokazu. Nadalje, dokazat ćemo da, uz neke dodatne pretpostavke na model teorije ZF, dobivamo modele za $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}$ i $\mathsf{NFU}+\mathsf{AC}$.

Prije same konstrukcije, potrebno je uvesti određene pojmove teorije ZF.[2]

4.1. TEORIJE ZF I ZFC

Teorija ZFC, poput teorije NFU, je teorija skupova formalizirana u logici prvog reda. Signatura teorije ZFC jednaka je signaturi teorije NFU. To je u određenom smislu neobično, jer u ZFC nema smisla govoriti o ne-skupovima, stoga je $set(x)$ uvijek istina u ZFC. Međutim, time si olakšavamo „prelaske" iz struktura jedne u strukture druge teorije.

***Aksiom ekstenzionalnosti*:**

$$\forall x \forall y \big(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\big).$$

***Aksiom praznog skupa*:**

$$\exists y \forall x (x \notin y).$$

[1]Za konstrukciju modela teorije NFU dovoljno je uzeti početni model mnogo slabije teorije od ZF. Najslabija moguća teorija koja omogućava tu konstrukciju je MacLaneova teorija skupova [42].

[2]Aksiomi su preuzeti iz [12].

***Aksiom para*:**

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

***Aksiom partitivnog skupa*:**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

***Aksiom unije*:**

$$\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow (\exists t \in x)(z \in t)\big).$$

***Aksiom dobre utemeljenosti*:**

$$\forall x \big(x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \emptyset)\big).$$

***Aksiom beskonačnosti*:**

$$\exists x \big(\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)\big).$$

***Shema aksioma zamjene*:** za svaku formulu $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ imamo

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \big(\forall x \exists! y \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow (\exists t \in x) \varphi(t, z, x_1, \ldots, x_n)\big)\big).$$

***Shema aksioma separacije*:** za svaku formulu $\varphi(z, x_1 \ldots, x_n)$ imamo

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, x_1 \ldots, x_n)\big).$$

Do sada uvedeni aksiomi čine teoriju ZF.

Apstrakcijski term u teoriji ZF definiramo slično kao u NFU, samo bez uvjeta stratificiranosti formule kojom je zadan. Svaki apstrakcijski term stoga ne denotira skup — reći ćemo da denotira **klasu**. Svaki skup je klasa, a klasu koja nije skup nazivamo **pravom klasom**. Kažemo da skup y pripada klasi $\mathbf{C}$ koju denotira apstrakcijski term $\mathfrak{t}(x_1, \ldots, x_n) = \{z \mid \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$, i pišemo $y \in \mathbf{C}$, ako vrijedi $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$. Govor o klasama formalno nije dio teorije ZF, ali se izuzetno često koristi pri izlaganju te teorije, jer mnogi njeni principi vrijede za skupove i prave klase podjednako.

***Aksiom izbora*:**

$$\forall x \big(\emptyset \notin x \wedge (\forall y \in x)(\forall z \in x)(y \neq z \rightarrow y \cap z = \emptyset) \rightarrow \exists u (\forall w \in x) \exists! v (v \in w \cap u)\big).$$

Ekvivalentne (s obzirom na ZF) tvrdnje aksiomu izbora su postojanje funkcije izbora, Zornova lema, Zermelov teorem, ... [16]

Teoriju koja nastaje dodavanjem aksioma izbora teoriji ZF označavamo sa ZFC.

Napomena 4.1. Sve pojmove u ovoj točki (ordinalni brojevi, kardinalni brojevi, ...) definiramo kao što ih inače definiramo u ZFC, dakle s uređenim parovima Kuratowskog. Istaknimo da to najčešće nisu „isti" skupovi (nemaju iste elemente) kao njihovi analogoni u teoriji NFU.

Definicija 4.2. Kažemo da je x **ordinalni broj** ako vrijedi
$(\forall y \in x)(y \subseteq x) \wedge (\forall y \in x)(\forall z \in x)(y \vee z \vee y = z \vee z \in y)$.

Očito je $0 := \emptyset$ ordinalni broj te ako je α ordinalni broj, onda je njegov **sljedbenik** $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ također ordinalni broj. Ordinalni broj koji nije 0 niti sljedbenik nekog drugog ordinalnog broja nazivamo **granični** ordinalni broj.

Definicija 4.3. Kažemo da je ordinalni broj λ **kardinalni broj** ako ni za koji $\alpha \in \lambda$ ne postoji bijekcija između α i λ.

Klasu svih ordinalnih brojeva označavamo s **On**, a klasu svih kardinalnih brojeva označavamo s **Cn**, i to su prave klase [12].

Definicija 4.4. Definiramo **skup prirodnih brojeva** kao:

$$\mathbb{N} := \bigcap \big\{ x \bigm| \emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x) \big\}.$$

Skup prirodnih brojeva (čije postojanje slijedi iz aksioma beskonačnosti) je ordinalni broj, a kada to želimo posebno naglasiti, označavamo ga s ω. Elemente tog skupa nazivamo **prirodnim brojevima**.

Definicija 4.5. Kažemo da je skup x **konačan** ako postoji $n \in \omega$ i bijekcija $f : x \to n$.
Inače kažemo da je x **beskonačan**.

Dokaz sljedećeg teorema može se pronaći u [12].

Teorem 4.6. Skup ω je beskonačan.

Dedekind-beskonačnost definira se kao u definiciji 2.12. Nadalje, u ZFC vrijedi analogni teorem teoremu 2.30.

Teorem 4.7. Skup x je Dedekind-beskonačan ako i samo ako je beskonačan.

Dokaz se može pronaći u [16].

U teoriji ZF možemo koristiti transfinitnu indukciju i transfinitnu rekurziju [12].

Definicija 4.8. Transfinitnom rekurzijom definiramo **kumulativnu hijerarhiju**:

- $V_0 := \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} := \mathscr{P}(V_\alpha)$;
- $V_\lambda = \bigcup_{\beta \in \lambda} V_\beta$, ako je λ granični ordinal;
- $\mathbf{V} := \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$.

4.2. Boffina konstrukcija

U prvom dijelu ove točke prikazujemo osnovnu Boffinu konstrukciju i definiramo strukturu za koju pokazujemo da je model teorije NFU. U drugom dijelu konstruiramo model za teorije $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}$ i $\mathsf{NFU}+\mathsf{AC}$, i pokazujemo kako jednostavno dobiti model za teoriju $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}$, što je ujedno i model za alternativnu aksiomatizaciju $\mathsf{NFU}+\mathsf{Inf}+\mathsf{AC}+\mathsf{VCSP}$.

4.2.1. Osnovna konstrukcija

Konstrukciju započinjemo proširenjem signature teorije ZF specijalnim funkcijskim simbolom [7].

Definicija 4.9. Proširujemo signaturu teorije skupova novim funkcijskim simbolom j i definiramo teoriju ZFJ kao teoriju ZF kojoj dodajemo sljedeća tri aksioma:

1. $\forall x \forall y \big(x = y \leftrightarrow j(x) = j(y)\big)$;
2. $\forall x \forall y \big(x \in y \leftrightarrow j(x) \in j(y)\big)$;
3. $\forall y \exists x \big(j(x) = y\big)$.

Napomenimo da proširenjem teorije ZF do teorije ZFJ ne mijenjamo sheme aksioma separacije i zamjene; formule koje dolaze u obzir pri izgradnji instanci tih shema, uvijek su formule teorije ZF.

Vidimo da ta tri novododana aksioma iskazuju da interpretacija simbola j u nekom modelu teorije ZFJ predstavlja automorfizam tog modela. Funkcijski simbol j možemo interpretirati bilo kojom funkcijom koja zadovoljava aksiome iz definicije 4.9, odnosno bilo kojim automorfizmom. Ako je M model teorije ZF, očito je $j^M := id_M$ funkcija koja zadovoljava te aksiome, no potrebno nam je postojanje netrivijalnog automorfizma. To je posljedica sljedećeg teorema za teorije prvog reda, a onda specijalno i za teoriju ZF.

Za bijekciju $f\colon X \to X$, gdje je X linearno uređen skup, kažemo da je **sličnost** ako f i f^{-1} čuvaju uređaj.

Teorem 4.10. (Ehrenfeucht–Mostowski) Neka je T teorija prvog reda koja ima beskonačni model i neka je X beskonačni linearno uređen skup. Tada postoji struktura $\mathfrak{M}$ takva da vrijedi $\mathfrak{M} \models T$, $X \subseteq M$ i svaka sličnost na X proširuje se do automorfizma na M.

Teorem 4.10 preuzet je iz [43], a slijedi iz teorema 5.7. koji se nalazi u [15].

Teorem 4.11. Neka je T prebrojiva teorija koja ima beskonačni model. Tada postoji struktura $\mathfrak{M}$ takva da vrijedi $\mathfrak{M} \models T$ i postoji netrivijalni automorfizam na M.

Dokaz. Neka je T prebrojiva teorija. Promotrimo skup $\mathbb{Z}$, koji je uređen standardnim linearnim uređajem $<$, i funkciju $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiranu s $f(x) = x+1$. Očito je f sličnost na $\mathbb{Z}$. Tada po teoremu 4.10 postoji struktura $\mathfrak{M}$ takva da je $\mathfrak{M} \models T$, $\mathbb{Z} \subseteq M$ i f se može proširiti do automorfizma F na M. Vrijedi $F(0) = f(0) = 1 \neq 0$, stoga je očito F netrivijalni automorfizam. ■

Konstrukciju Boffine strukture započinjemo modelom teorije ZF. Osim samog modela, ključno je i postojanje vanjskog automorfizma tog modela.

Definicija 4.12. Neka je M model teorije ZF. Kažemo da je preslikavanje $j\colon M \to M$ **automorfizam** na M, ako je j bijekcija i za sve $a, b \in M$ vrijedi

$$M \models a \in b \text{ ako i samo ako } M \models j(a) \in j(b).$$

U nastavku ćemo umjesto „ako i samo ako" pisati $\iff$. Napominjemo da taj simbol koristimo u meta-logičkom smislu, dakle između izjava poput $M \models \varphi$.

Teorem 4.13. Neka je M model teorije ZFJ, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula teorije ZFJ i $\mathfrak{t}(x_1, \ldots, x_n)$ apstrakcijski term zadan formulom teorije ZFJ. Tada za bilo koje $a_1, \ldots, a_n \in M$ vrijedi

1. $j^M(\mathfrak{t}[a_1, \ldots, a_n]) = \mathfrak{t}[j^M(a_1), \ldots, j^M(a_n)]$;
2. $M \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff M \models \varphi[j^M(a_1), \ldots, j^M(a_n)]$.

Teorem 4.13 je specijalni slučaj teorema *Homomorphism theorem* u [17].

Teorem 4.14. Neka je M model teorije ZF. Ako je h netrivijalni automorfizam na M, onda postoji ordinalni broj α takav da vrijedi $h(\alpha) \neq \alpha$.

Dokaz. Neka je h netrivijalni automorfizam; to znači da postoji $t \in M$ takav da je $h(t) \neq t$. Pretpostavimo da za svaki ordinalni broj vrijedi $h(\alpha) = \alpha$. Znamo da vrijedi ZF $\models \forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$ [12], pa za svaki skup $x \in M$ možemo definirati njegov **rang** $rk(x) := \bigcap\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\} \in \mathbf{On}$ (presjek bilo koje neprazne klase ordinalnih brojeva je ordinalni broj). Budući da je $rk(x)$ term teorije ZF s jednom slobodnom varijablom x, onda iz teorema 4.13 slijedi $h\big(rk(x)\big) = rk\big(h(x)\big)$.

Definirajmo ordinalni broj $\beta := \bigcap\{rk(u) \mid h(u) \neq u\}$. Tada postoji $u \in V_{\beta+1} = \mathscr{P}(V_\beta)$ takav da je $h(u) \neq u$ i za svaki $v \in V_\beta$ vrijedi $v = h(v)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji w takav da je $w \in u$ i $w \notin h(u)$. Iz $w \in u \subseteq V_\beta$ slijedi $w \in V_\beta$, odnosno vrijedi $h(w) = w$, a iz definicije automorfizma imamo $h(w) \in h(u)$, što je kontradikcija s $h(w) = w \notin h(u)$. ■

Neka je M model teorije ZF. Tada po teoremu 4.11 postoji netrivijalni automorfizam na M, te njime možemo interpretirati funkcijski simbol j. Nadalje, zbog teorema 4.14, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji neki ordinalni broj $\alpha \in M$, takav da vrijedi $j^M(\alpha) < \alpha$. Naime, kada bi vrijedilo $\alpha < j^M(\alpha)$, umjesto j^M mogli bismo promatrati $(j^M)^{-1}$.

U nastavku fiksiramo model M teorije ZFJ i ordinalni broj α takav da je $j^M(\alpha) < \alpha$. Također nećemo praviti razliku između funkcijske oznake j i njene interpretacije j^M. Ako relacije $\in$, $=$ i *set* pišemo bez oznake modela, pretpostavljamo da se one interpretiraju u M. Također, bilo kakve formule za koje napišemo da vrijede bez eksplicitnog spominjanja modela, podrazumijevamo da vrijede u M.

Definicija 4.15. Definiramo strukturu nad signaturom teorije NFU (što je isto kao nad signaturom teorije ZF) s nosačem $B = \{x \in M \mid M \models x \in V_\alpha\}$ te relacijama $\in^B$, $=^B$ i set^B tako da za sve $a, b \in B$ vrijedi

1. $a \in^B b \iff j(a) \in b \wedge b \in V_{j(\alpha)+1}$;
2. $a =^B b \iff a = b$;
3. $set^B(a) \iff a \in V_{j(\alpha)+1}$.

Budući da je a skup u B ako i samo ako vrijedi $a \in V_{j(\alpha)+1}$, slijedi da je a atom u B ako i samo ako vrijedi $a \in V_\alpha \setminus V_{j(\alpha)+1}$.

Definicija 4.16. Rekurzivno definiramo transformaciju rw_0 formula teorije ZF oblika $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ u formule teorije ZFJ oblika $\varphi'(x_1, \ldots, x_n, s, u)$, gdje su s i u međusobno različite varijable koje se ne pojavljuju u $Var\ \varphi$, na sljedeći način:

1. ako je $\varphi = (x \in y)$, onda je $rw_0(\varphi) = \big(j(x) \in y \wedge y \in s\big)$;
2. ako je $\varphi = (x = y)$, onda je $rw_0(\varphi) = (x = y)$;
3. ako je $\varphi = set(x)$, onda je $rw_0(\varphi) = (x \in s)$;
4. ako je $\varphi = \neg\psi$, onda je $rw_0(\varphi) = \neg rw_0(\psi)$;

5. ako je $\varphi = (\psi \to \chi)$, onda je $rw(\varphi) = \big(rw_0(\psi) \to rw_0(\chi)\big)$;

6. ako je $\varphi = \exists x \psi$, onda je $rw_0(\varphi) = (\exists x \in u) rw_0(\psi)$.

Umjesto $rw_0(\varphi)$ pisat ćemo φ'.

Teorem 4.17. Neka je φ formula teorije ZF. Tada za svaku valuaciju v vrijedi

$$B \models_v \varphi \Longleftrightarrow M \models_{v'} \varphi',$$

gdje je $v' := v \cup \{(s, V_{j(\alpha)+1}), (u, V_\alpha)\}$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Neka su x i y proizvoljne varijable.

Neka je $\varphi = (x = y)$ i uzmimo proizvoljnu valuaciju v. Tada je $\varphi' = (x = y)$ i vrijedi

$$B \models_v x = y \Longleftrightarrow v(x) =^B v(y) \Longleftrightarrow v'(x) = v'(y) \Longleftrightarrow M \models_{v'} x = y.$$

Neka je $\varphi = (x \in y)$ i uzmimo proizvoljnu valuaciju v.
Tada je $\varphi' = \big(j(x) \in y \wedge y \in s\big)$ i vrijedi

$$\begin{aligned} B \models_v x \in y &\Longleftrightarrow v(x) \in^B v(y) \\ &\Longleftrightarrow j(v(x)) \in v(y) \wedge v(y) \in V_{j(\alpha)+1} \\ &\Longleftrightarrow v'(j(x)) \in v'(y) \wedge v'(y) \in v'(s) \Longleftrightarrow M \models_{v'} \varphi'. \end{aligned}$$

Neka je $\varphi = set(x)$ i uzmimo proizvoljnu valuaciju v. Tada je $\varphi' = (x \in s)$ i vrijedi

$$B \models_v set(x) \Longleftrightarrow set^B\big(v(x)\big) \Longleftrightarrow v(x) \in V_{j(\alpha)+1} \Longleftrightarrow v'(x) \in v'(s) \Longleftrightarrow M \models_{v'} x \in s.$$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n, za svaku formulu složenosti manje od n i za svaku valuaciju v vrijedi $B \models_v \varphi \Longleftrightarrow M \models_{v'} \varphi'$. Dokažimo tvrdnju za formule složenosti n.

Tvrdnja je trivijalna za formule oblika $\neg\psi$ i $\psi \to \chi$. Dokažimo tvrdnju za formulu φ oblika $\exists x \psi$. Tada je $\varphi' = (\exists x \in u)\psi'$. Neka je v proizvoljna valuacija.

Pretpostavimo da vrijedi $B \models_v \varphi$. Tada postoji valuacija v_x koja se podudara s v na svim varijablama različitima od x, takva da vrijedi $B \models_{v_x} \psi$. Po pretpostavci indukcije dobivamo da vrijedi $M \models_{(v_x)'} \psi'$. Dokažimo da se $(v_x)'$ podudara s v' na svim varijablama, osim na x. Ako je $y \in dom(v) \setminus \{x\}$, onda je $(v_x)'(y) = v_x(y) = v(y) = v'(y)$. Za varijablu s vrijedi $(v_x)'(s) = V_{j(\alpha)+1} = v'(s)$, a za varijablu u vrijedi $(v_x)'(u) = V_\alpha = v'(u)$. Nadalje, budući da vrijedi $(v_x)'(x) = v_x(x) \in B$, vrijedi i $M \models_{(v_x)'} x \in u$. Dakle, $M \models_{v'} (\exists x \in u)\psi'$. ∎

Teorem 4.18. Vrijedi $B \models \forall x (x \in y)[V_{j(\alpha)}]$.

Dokaz. Neka je $a \in B$ proizvoljan i definirajmo valuaciju w takvu da je $w(x) = a$ i $w(y) = V_{j(\alpha)}$. Tada vrijedi

$$B \models_w x \in y \iff j\big(w(x)\big) \in w(y) \wedge w(y) \in V_{j(\alpha)+1} \iff j(a) \in j(V_\alpha) \wedge j(V_\alpha) \in V_{j(\alpha)+1}.$$

Iz $j(a) \in j(V_\alpha)$ slijedi $a \in V_\alpha$, što je istina jer je $a \in B$. Nadalje, iz $j(V_\alpha) \in V_{j(\alpha)+1} = j(V_{\alpha+1})$ slijedi $V_\alpha \in V_{\alpha+1}$, što je također istina zbog $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$. ■

Iz teorema 4.18 slijedi da je skup $V_{j(\alpha)}$ univerzalni skup u B.

Teorem 4.19. Vrijedi $B \models \mathsf{NFU}$.

Dokaz. **Aksiom ekstenzionalnosti.** Neka su $a, b \in B$ proizvoljni i pretpostavimo da vrijedi $set^B(a) \wedge set^B(b) \wedge (\forall z \in B)(z \in^B a \leftrightarrow z \in^B b)$ i $a \neq^B b$. Drugim riječima, $a, b \in V_{j(\alpha)+1}$, za svaki $c \in V_\alpha$ vrijedi $j(c) \in a \leftrightarrow j(c) \in b$ i $a \neq b$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji $u \in a$ takav da je $u \notin b$. Budući da je j automorfizam, postoji $u' := j^{-1}(u)$. Zbog $j(u') \in a \in V_{j(\alpha)+1}$ dobivamo $j(u') \in V_{j(\alpha)}$, iz čega slijedi $u' \in V_\alpha$. Sada iz pretpostavke dobivamo $j(u') = u \in b$, što je kontradikcija.

Aksiom skupovnosti. Neka su $a, b \in B$ proizvoljni i pretpostavimo da vrijedi $b \in^B a$. Po definiciji 4.15(1) imamo $j(b) \in a \wedge a \in V_{j(\alpha)+1}$, iz čega slijedi $a \in V_{j(\alpha)+1}$, odnosno prema definiciji 4.15(3), $set^B(a)$.

Aksiom stratificirane komprehenzije. Neka je $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ stratificirana formula u jeziku teorije NFU. Označimo $\varphi' = rw_0(\varphi)$. Iz teorema 4.17 slijedi da za svaku valuaciju v vrijedi $B \models_v \varphi \iff M \models_{v'} \varphi'$. Budući da je φ stratificirana formula, uzmimo njenu najmanju tipizaciju tp (koja postoji po teoremu 1.7) i definirajmo $N := \max\{tp(x) \mid x \in Var\ \varphi\} + 1$. U formulama teorije ZFJ, $j^i(x)$ je pokrata za term $j(\ldots j(x) \ldots)$.

Rekurzivno definiramo transformaciju rw_1 na svim potformulama od φ' na sljedeći način:

1. ako je $\xi' = (x = y)$, onda je $rw_1(\xi') = \big(j^{N-tp(x)}(x) = j^{N-tp(y)}(y)\big)$;
2. ako je $\xi' = \big(j(x) \in y\big)$, onda je $rw_1(\xi') = \big(j^{N-tp(x)}(x) \in j^{N-tp(y)}(y)\big)$;
3. ako je $\xi' = (x \in s)$, onda je $rw_1(\xi') = \big(j^{N-tp(x)}(x) \in j^{N-tp(x)}(s)\big)$;
4. ako je $\xi' = \neg\psi'$, onda je $rw_1(\xi') = \neg rw_1(\psi')$;
5. ako je $\xi' = (\psi' \to \chi')$, onda je $rw_1(\xi') = \big(rw_1(\psi') \to rw_1(\chi')\big)$;

6. ako je $\xi' = (\exists y \in u)\psi'$, onda je $rw_1(\xi') = (\exists y \in u)rw_1(\psi')$.

Označimo $\varphi'' := rw_1(\varphi')$. Dokažimo $M \models_{v'} \xi' \Longleftrightarrow M \models_{v'} rw_1(\xi')$ za svaku valuaciju v i potformulu ξ' od φ', indukcijom po složenosti formule ξ'.

Ako je $\xi' = (x = y)$, koja je nastala od potformule $(x = y)$ od φ, onda je $rw_1(\xi') = \big(j^{N-tp(x)}(x) = j^{N-tp(y)}(y)\big)$. Uzmimo proizvoljnu valuaciju v. Tada imamo

$$\begin{aligned} M \models_{v'} x = y &\Longleftrightarrow v'(x) = v'(y) \\ &\Longleftrightarrow j^{N-tp(x)}\big(v'(x)\big) = j^{N-tp(x)}\big(v'(y)\big) \\ &\Longleftrightarrow v'\big(j^{N-tp(x)}(x)\big) = v'\big(j^{N-tp(x)}(y)\big). \end{aligned}$$

Budući da je φ stratificirana formula, vrijedi $tp(x) = tp(y)$, stoga imamo

$$v'\big(j^{N-tp(x)}(x)\big) = v'\big(j^{N-tp(x)}(y)\big) \Longleftrightarrow v'\big(j^{N-tp(x)}(x)\big) = v'\big(j^{N-tp(y)}(y)\big) \Longleftrightarrow M \models_{v'} rw_1(\xi').$$

Dakle, $M \models_{v'} x = y \Longleftrightarrow M \models_{v'} rw_1(\xi')$.

Ako je $\xi' = \big(j(x) \in y\big)$, koja je nastala od potformule $x \in y$ od φ, onda je $rw_1(\xi') = \big(j^{N-tp(x)}(x) \in j^{N-tp(y)}(y)\big)$. Uzmimo proizvoljnu valuaciju v. Tada imamo

$$\begin{aligned} M \models_{v'} j(x) \in y &\Longleftrightarrow v'\big(j(x)\big) \in v'(y) \\ &\Longleftrightarrow j^{N-tp(x)}\big(v'(x)\big) \in j^{N-tp(x)-1}\big(v'(y)\big) \\ &\Longleftrightarrow v'\big(j^{N-tp(x)}(x)\big) \in v'\big(j^{N-tp(x)-1}(y)\big). \end{aligned}$$

Budući da je φ stratificirana formula, vrijedi $tp(y) = tp(x) + 1$, stoga imamo

$$v'\big(j^{N-tp(x)}(x)\big) \in v'\big(j^{N-tp(x)-1}(y)\big) \Longleftrightarrow v'\big(j^{N-tp(x)}(x)\big) \in v'\big(j^{N-tp(y)}(y)\big) \Longleftrightarrow M \models_{v'} rw_1(\xi').$$

Dakle, $M \models_{v'} j(x) \in y \Longleftrightarrow M \models_{v'} rw_1(\xi')$.

Ako je $\xi' = (x \in s)$, onda je $rw_1(\xi') = \big(j^{N-tp(x)}(x) \in j^{N-tp(x)}(s)\big)$. Uzmimo proizvoljnu valuaciju v. Tada imamo

$$\begin{aligned} M \models_{v'} x \in s &\Longleftrightarrow v'(x) \in v'(s) \\ &\Longleftrightarrow j^{N-tp(x)}\big(v'(x)\big) \in j^{N-tp(x)}\big(v'(s)\big) \\ &\Longleftrightarrow v'\big(j^{N-tp(x)}(x)\big) \in v'\big(j^{N-tp(x)}(s)\big) \\ &\Longleftrightarrow M \models_{v'} rw_1(\xi'). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n tvrdnja vrijedi za sve formule složenosti manje od n. Korak indukcije jednostavno slijedi iz pretpostavke indukcije.

Kako je φ' i sama potformula od φ', iz teorema 4.17 slijedi da za svaku valuaciju v vrijedi

$$B \models_v \varphi \Longleftrightarrow M \models_{v'} \varphi' \Longleftrightarrow M \models_{v'} \varphi''.$$

Svaka varijabla t u φ'', osim u i s, se pojavljuje u termu oblika $j^{N-tp(t)}(t)$. Varijabla u se pojavljuje samo u kvantifikatoru oblika $(\exists y \in u)$, a varijabla s se može pojavljivati u termima oblika $j^i(s)$, gdje je $i = 1, \dots, N-1$.

Definirajmo transformaciju rw_2 na termima formule φ''.

1. $rw_2\big(j^{N-tp(z)}(z)\big) := z$;
2. $rw_2\big(j^{N-tp(x_i)}(x_i)\big) := j^{N-tp(x_i)}(x_i)$, za sve $i = 1, \dots, n$;
3. $rw_2(u) := u$;
4. $rw_2\big(j^i(s)\big) = j^i(s)$, za svaki $i = 1, \dots, N-1$;
5. $rw_2\big(j^{N-tp(y)}(y)\big) := y$, za sve ostale (vezane) varijable y.

Definirajmo transformaciju rw_3 na potformulama formule φ''.
Označimo proizvoljne terme formule φ'' s $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{t}$.

1. $rw_3(\mathfrak{r} = \mathfrak{t}) := \big(rw_2(\mathfrak{r}) = rw_2(\mathfrak{t})\big)$;
2. $rw_3(\mathfrak{r} \in \mathfrak{t}) := \big(rw_2(\mathfrak{r}) \in rw_2(\mathfrak{t})\big)$;
3. $rw_3(\neg\psi'') := \neg rw_3(\psi'')$;
4. $rw_3(\psi'' \to \chi'') := \big(rw_3(\psi'') \to rw_3(\chi'')\big)$;
5. $rw_3\big((\exists y \in u)\psi''\big) := \big(\exists y \in j^{N-tp(y)}(u)\big) rw_3(\psi'')$.

Označimo $\varphi''' := rw_3(\varphi'')$.

Dokažimo da za svaku valuaciju v i za svaku potformulu ξ'' formule φ'' vrijedi

$$M \models_{v'} \xi'' \Longleftrightarrow M \models_{(v')_0} rw_3(\xi''),$$

gdje je $(v')_0$ valuacija definirana na sljedeći način:

$$(v')_0(t) := \begin{cases} v'\big(j^{N-tp(t)}(t)\big), & \text{ako je } t \text{ varijabla } z \text{ ili vezana,} \\ v'(t), & \text{inače.} \end{cases}$$

Direktno iz definicije transformacije rw_2 i valuacije $(v')_0$ dobivamo $v'(\mathfrak{t}) = (v')_0\big(rw_2(\mathfrak{t})\big)$, za sve terme formule φ''. Sada tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule ξ''.

Ako je $\xi'' = (\mathfrak{r} = \mathfrak{t})$, onda imamo

$$\begin{aligned} M \models_{v'} \xi'' &\Longleftrightarrow v'(\mathfrak{r}) = v'(\mathfrak{t}) \\ &\Longleftrightarrow (v')_0\big(rw_2(\mathfrak{r})\big) = (v')_0\big(rw_2(\mathfrak{t})\big) \\ &\Longleftrightarrow M \models_{(v')_0} \big(rw_2(\mathfrak{r}) = rw_2(\mathfrak{t})\big) \\ &\Longleftrightarrow M \models_{(v')_0} rw_3(\mathfrak{r} = \mathfrak{t}) \Longleftrightarrow M \models_{(v')_0} rw_3(\xi''). \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje slučaj kada je $\xi'' = (\mathfrak{r} \in \mathfrak{t})$.

Pretpostavimo da za neki n tvrdnja vrijedi za sve formule složenosti manje od n. Ako je $\xi'' = \neg\psi''$ ili $\xi'' = (\psi'' \to \chi'')$, tvrdnja očito vrijedi. Dokažimo tvrdnju za $\xi'' = (\exists y \in u)\psi''$. Tada je $rw_3(\xi'') = \big(\exists y \in j^{N-tp(y)}(u)\big) rw_3(\psi'')$.

Uzmimo proizvoljnu valuaciju v. Pretpostavimo da vrijedi $M \models_{v'} (\exists y \in u)\psi''$. Tada postoji valuacija $(v')_y$ koja se podudara s v' na svim varijablama različitima od y i vrijedi $M \models_{(v')_y} y \in u \wedge \psi''$, odnosno $M \models_{(v')_y} y \in u$ i $M \models_{(v')_y} \psi''$. Primijetimo da vrijedi $(v')_y = (v_y)'$ za neku valuaciju v_y (ubuduće možemo pisati v'_y bez opasnosti od zabune), stoga po pretpostavci indukcije dobivamo $M \models_{(v'_y)_0} rw_3(\psi'')$. Nadalje, imamo

$$M \models_{v'_y} y \in u \Longleftrightarrow v'_y(y) \in V_\alpha \Longleftrightarrow j^{N-tp(y)}\big(v'_y(y)\big) \in j^{N-tp(y)}(V_\alpha) \Longleftrightarrow M \models_{(v'_y)_0} y \in j^{N-tp(y)}(u).$$

Preostaje još dokazati $(v'_y)_0(t) = (v')_0(t)$ za svaku varijablu t različitu od y. Ako je t varijabla z ili neka vezana varijabla, onda imamo

$$(v'_y)_0(t) = v'_y\big(j^{N-tp(t)}(t)\big) = j^{N-tp(t)}\big(v'_y(t)\big) = j^{N-tp(t)}\big(v'(t)\big) = (v')_0(t).$$

Ako je t varijabla $x_1, \ldots, x_n$, u ili s, onda imamo

$$(v'_y)_0(t) = (v_y)'(t) = v'(y) = (v')_0(y).$$

Trebamo još dokazati $M \models_{(v'_y)_0} y \in j^{N-tp(y)}(u)$. To je ekvivalentno s tvrdnjama

$$\begin{aligned} (v'_y)_0(y) \in (v'_y)_0\big(j^{N-tp(y)}(u)\big) &\Longleftrightarrow j^{N-tp(y)}\big(v'_y(y)\big) \in j^{N-tp(y)}\big(v'_y(u)\big) \\ &\Longleftrightarrow j^{N-tp(y)}\big(v'_y(y)\big) \in j^{N-tp(y)}\big(V_\alpha\big) \\ &\Longleftrightarrow v'_y(y) \in V_\alpha, \end{aligned}$$

zadnja od kojih vrijedi zbog pretpostavke $M \models_{v'_y} y \in u$ i $v'_y(u) = v'(u) = V_\alpha$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $M \models_{(v')_0} \big(\exists y \in j^{N-tp(y)}(u)\big) rw_3(\psi'')$, tada postoji valuacija $\big((v')_0\big)_y$ za koju vrijedi $M \models_{((v')_0)_y} y \in j^{N-tp(y)}(u) \wedge rw_3(\psi'')$, odnosno $M \models_{((v')_0)_y} y \in j^{N-tp(y)}(u)$ i $M \models_{((v')_0)_y} rw_3(\psi'')$. Analogno prethodnom dokazu se dokaže da vrijedi $\big((v')_0\big)_y = (v'_y)_0$ za neku valuaciju v_y pa iz pretpostavke indukcije slijedi $M \models_{v'_y} \psi''$. Preostaje još dokazati $M \models_{v'_y} y \in u$. To je ekvivalentno s tvrdnjama

$$\begin{aligned} v'_y(y) \in V_\alpha &\iff j^{N-tp(y)}\big(v'_y(y)\big) \in j^{N-tp(y)}(V_\alpha) \\ &\iff (v'_y)_0(y) \in j^{N-tp(y)}\big(v'_y(u)\big) \\ &\iff (v'_y)_0(y) \in j^{N-tp(y)}\big((v'_y)_0(u)\big) \\ &\iff (v'_y)_0(y) \in (v'_y)_0\big(j^{N-tp(y)}(u)\big), \end{aligned}$$

zadnja od kojih vrijedi zbog $M \models_{((v')_0)_y} y \in j^{N-tp(y)}(u)$.

Dakle, vrijedi $B \models_v \varphi \iff M \models_{(v')_0} \varphi'''$.

Definiramo posljednju transformaciju rw_4 na termima formule φ''', pri čemu su $u^{(i)}$ i $s^{(i)}$ nove varijable različite od vezanih i od svih varijabli $x_1, \ldots, x_n, z$.

1. $rw_4\big(j^{N-tp(x_i)}(x_i)\big) = x_i$;

2. $rw_4(z) = z$;

3. $rw_4(y) = y$, za svaku vezanu varijablu y;

4. $rw_4\big(j^i(u)\big) = u^{(i)}$, za $i = 1, \ldots, N-1$;

5. $rw_4\big(j^i(s)\big) = s^{(i)}$, za $i = 1, \ldots, N-1$.

Označimo s $\varphi^{\mathsf{iv}}(z, x_1, \ldots, x_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(N-1)}, s^{(1)}, \ldots, s^{(N-1)})$ formulu dobivenu iz φ''' u kojoj su svi termi zamijenjeni transformacijom rw_4.

Za svaku valuaciju v definirajmo valuaciju $(v')_1$ na sljedeći način:

$$(v')_1(t) := \begin{cases} (v')_0(t), & \text{ako je } t \text{ varijabla } z \text{ ili vezana,} \\ (v')_0\big(j^{N-tp(t)}(t)\big), & \text{ako je } t = x_i, \\ (v')_0\big(j^i(t)\big), & \text{ako je } t \text{ varijabla } u^{(i)} \text{ ili } s^{(i)}. \end{cases}$$

Iz definicije transformacije rw_4 dobivamo da za svaki term $\mathfrak{t}$ formule φ''' vrijedi $(v')_0(\mathfrak{t}) = (v')_1\big(rw_4(\mathfrak{t})\big)$. Indukcijom, analogno kao i prije, možemo dokazati da vrijedi $M \models_{(v')_0} \varphi''' \iff M \models_{(v')_1} \varphi^{\mathsf{iv}}$.

Primijetimo da se u formuli φ^{iv} ne pojavljuje funkcijski simbol j, odnosno φ^{iv} je formula teorije ZF. Stoga možemo primijeniti aksiom separacije.

Neka su $a_1, \ldots, a_n \in B$ proizvoljni i označimo s $\vec{j}(X)$ niz $j(X), \ldots, j^{N-1}(X)$, za proizvoljni $X \subseteq B$. Definirajmo

$$A_0 := \left\{ r \in j^{N-tp(z)}(V_\alpha) \mid \varphi^{\mathsf{iv}}\left[r, a_1, \ldots, a_n, \vec{j}(V_\alpha), \vec{j}(V_{j(\alpha)+1})\right] \right\},$$

zatim $A := j^{tp(z)-N}(A_0) \subseteq V_\alpha$ i u konačnici $A' := j(A) \subseteq j(V_\alpha) \in B$. Definirajmo $w_y(y) = A'$. Budući da vrijedi $A' \subseteq V_{j(\alpha)}$, imamo $A' \in V_{j(\alpha)+1}$, iz čega slijedi $B \models_{w_y} set(y)$. Označimo s w_{yz} proizvoljnu valuaciju koja se podudara s w_y na svim varijablama različitima od z i označimo $w_{yz}(z) = c$. Preostalo je još samo dokazati

$$B \models_{w_{yz}} z \in y \Longleftrightarrow B \models_{w_{yz}} \varphi.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
B \models_{w_{yz}} z \in y &\Longleftrightarrow j(c) \in A' \wedge A' \in V_{j(\alpha)+1} \\
&\Longleftrightarrow c \in A \\
&\Longleftrightarrow j^{N-tp(z)}(c) \in A_0 \\
&\Longleftrightarrow c \in V_\alpha \wedge \varphi^{\mathsf{iv}}[j^{N-tp(z)}(c), a_1, \ldots, a_n, \vec{j}(V_\alpha), \vec{j}(V_{j(\alpha)+1})] \\
&\Longleftrightarrow \varphi^{\mathsf{iv}}[j^{N-tp(z)}(c), a_1, \ldots, a_n, \vec{j}(V_\alpha), \vec{j}(V_{j(\alpha)+1})] \\
&\Longleftrightarrow M \models_{(w'_{yz})_1} \varphi^{\mathsf{iv}} \\
&\Longleftrightarrow B \models_{w_{yz}} \varphi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dokaz da stratificirana komprehenzija vrijedi u B inspiriran je skicom tog dokaza koji se nalazi u [36].

4.2.2. Modeli proširene teorije NFU

Tvrdnju da odgovarajuća struktura zadovoljava aksiom beskonačnosti ne dokazujemo „direktno”, već pomoću Dedekind-beskonačnosti, za što nam je potreban aksiom izbora teorije ZFC. Prije toga, moramo interpretirati odgovarajuće formule i apstrakcijske terme u B. Točnije, nije toliko korisna interpretacija terma i formula u B, koliko je važan odnos između istinitosti formula u B i u M.

Lema 4.20. Za svaki prirodni broj $p \geq 1$ vrijedi $j^p(\alpha) + p \leq j(\alpha) + 1$.

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po p. Za $p=1$ očito imamo $j^p(\alpha)+p=j(\alpha)+1$. Pretpostavimo da za neki prirodni broj p vrijedi $j^p(\alpha)+p\leq j(\alpha)+1$ i dokažimo tvrdnju za $p+1$. Vrijedi $j^{p+1}(\alpha)<j^p(\alpha)$, iz čega dobivamo $j^{p+1}(\alpha)+p<j^p(\alpha)+p$. Iz pretpostavke indukcije dobivamo $j^p(\alpha)+p\leq j(\alpha)+1$, iz čega slijedi $j^{p+1}(\alpha)+p<j(\alpha)+1$, a onda iz toga dobivamo $j^{p+1}(\alpha)+p+1\leq j(\alpha)+1$. ■

Teorem 4.21. Za sve $x,y,t\in V_\alpha$ vrijedi

$$(t=\{x,y\})^B \iff t=\{j(x),j(y)\}.$$

Dokaz. Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}(t=\{x,y\})^B &\iff t\in V_{j(\alpha)+1}\wedge(\forall z\in V_\alpha)\big(j(z)\in t\leftrightarrow z=x\vee z=y\big)\\ &\iff t\in V_{j(\alpha)+1}\wedge(\forall z\in V_\alpha)\big(j(z)\in t\leftrightarrow j(z)=j(x)\vee j(z)=j(y)\big).\end{aligned}$$

Trebamo dokazati

$$t\in V_{j(\alpha)+1}\wedge(\forall z\in V_\alpha)\big(j(z)\in t\leftrightarrow j(z)=j(x)\vee j(z)=j(y)\big)\iff t=\{j(x),j(y)\}.$$

Pretpostavimo da vrijedi $t\in V_{j(\alpha)+1}\wedge(\forall z\in V_\alpha)\big(j(z)\in t\leftrightarrow j(z)=j(x)\vee j(z)=j(y)\big)$ i neka je z proizvoljan. Tada postoji z' takav da je $j(z')=z$.

Ako je $z\in t$, budući da vrijedi $t\in V_{j(\alpha)+1}$, imamo $j(z')=z\in V_{j(\alpha)}$. To povlači $z'\in V_\alpha$. Sada iz pretpostavke i $j(z')\in t$ dobivamo $z=j(z')=j(x)\vee z=j(z')=j(y)$.

Ako je $z=j(x)\vee z=j(y)$, iz $x,y\in V_\alpha$ dobivamo $j(x),j(y)\in V_{j(\alpha)}$, što povlači $j(z')\in V_{j(\alpha)}$, odnosno $z'\in V_\alpha$. Sada iz pretpostavke dobivamo $j(z')=z\in t$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $t=\{j(x),j(y)\}$. Budući da su $x,y\in V_\alpha$, imamo $j(x),j(y)\in V_{j(\alpha)}$, a to daje $t=\{j(x),j(y)\}\in V_{j(\alpha)+1}$. Neka je $z\in V_\alpha$ proizvoljan. Tada po aksiomu para dobivamo $j(z)\in t\leftrightarrow j(z)=j(x)\vee j(z)=j(y)$. ■

Teorem 4.22. Za sve $x,y,t\in V_\alpha$ vrijedi

$$\big(t=(x,y)\big)^B \iff t=\big(j^2(x),j^2(y)\big).$$

Dokaz. Vrijede sljedeće ekvivalencije

$$\begin{aligned}\big(t=(x,y)\big)^B &\iff set^B(t)\wedge(\forall z\in B)\big(z\in^B t\leftrightarrow(z=\{x\})^B\vee(z=\{x,y\})^B\big)\\ &\iff t\in V_{j(\alpha)+1}\wedge(\forall z\in V_\alpha)\big(j(z)\in t\leftrightarrow z=\{j(x)\}\vee z=\{j(x),j(y)\}\big)\\ &\iff t\in V_{j(\alpha)+1}\wedge(\forall z\in V_\alpha)\big(j(z)\in t\leftrightarrow j(z)=\{j^2(x)\}\vee j(z)=\{j^2(x),j^2(y)\}\big).\end{aligned}$$

Trebamo dokazati

$$t \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in t \leftrightarrow j(z) = \{j^2(x)\} \vee j(z) = \{j^2(x), j^2(y)\}\big)$$
$$\Longleftrightarrow \forall z\big(z \in t \leftrightarrow z = \{j^2(x)\} \vee z = \{j^2(x), j^2(y)\}\big).$$

Pretpostavimo da vrijedi

$$t \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in t \leftrightarrow j(z) = \{j^2(x)\} \vee j(z) = \{j^2(x), j^2(y)\}\big).$$

Neka je z proizvoljan. Tada postoji z' takav da je $j(z') = z$.

Ako je $z \in t$, tada iz $t \in V_{j(\alpha)+1}$ dobivamo $j(z') = z \in V_{j(\alpha)}$, što povlači $z' \in V_\alpha$. Iz pretpostavke i $j(z') \in t$ dobivamo $j(z') = \{j^2(x)\} \vee j(z') = \{j^2(x), j^2(y)\}$.

Ako je $z = \{j^2(x)\} \vee z = \{j^2(y)\}$, tada iz $x, y \in V_\alpha$ dobivamo $j^2(x), j^2(y) \in V_{j^2(\alpha)} \subseteq V_{j(\alpha)+1}$, što povlači $j(z') \in V_{j(\alpha)}$, odnosno $z' \in V_\alpha$. Sada iz pretpostavke dobivamo $j(z') = z \in t$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $\forall z\big(z \in t \leftrightarrow z = \{j^2(x)\} \vee z = \{j^2(x), j^2(y)\}\big)$. Budući da su $x, y \in V_\alpha$, imamo $j^2(x), j^2(y) \in V_{j^2(\alpha)}$, što povlači $\big(j^2(x), j^2(y)\big) \in V_{j^2(\alpha)+2}$. Sada iz leme 4.20 dobivamo $V_{j^2(\alpha)+2} \subseteq V_{j(\alpha)+1}$, iz čega dobivamo $t \in V_{j(\alpha)+1}$. Za proizvoljni $z \in V_\alpha$ tada imamo $j(z) \in t \leftrightarrow j(z) = \{j^2(x)\} \vee j(z) = \{j^2(x), j^2(y)\}$. ■

Teorem 4.23. Za sve $x, y \in V_\alpha$ i $R \in V_{j(\alpha)+1}$, vrijedi

$$\big(j^3(x), j^3(y)\big) \in R \Longleftrightarrow \big((x,y) \in R\big)^B.$$

Dokaz. Neka su $x, y \in V_\alpha$ i $R \in V_{j(\alpha)+1}$. Pretpostavimo da vrijedi $(j^3(x), j^3(y)) \in R$. Dovoljno je dokazati $(\exists t \in V_\alpha)(t = (j^2(x), j^2(y)) \wedge j(t) \in R)$. Tvrdimo da je $t = \big(j^2(x), j^2(y)\big)$ traženi skup. Iz $x, y \in V_\alpha$ dobivamo $j^2(x), j^2(y) \in V_{j^2(\alpha)}$, a iz leme 4.20 slijedi $t \in V_{j^2(\alpha)+2} \subseteq V_{j(\alpha)+1} \subseteq V_\alpha$. Očito vrijedi $j(t) = \big(j^3(x), j^3(y)\big) \in R$.

Pretpostavimo da vrijedi $\big((x,y) \in R\big)^B$. Tada imamo

$$\big((x,y) \in R\big)^B \Longleftrightarrow (\exists t \in V_\alpha)\big(t = (j^2(x), j^2(y)) \wedge (j^3(x), j^3(y)) \in R\big),$$

iz čega očito slijedi $\big(j^3(x), j^3(y)\big) \in R$. ■

Teorem 4.24. Za sve $t \in V_\alpha$ i $X, Y \in V_{j(\alpha)+1}$, ako vrijedi $t = j^2(X) \times j^2(Y)$, onda vrijedi $\big(t = (X \times Y)\big)^B$.

Dokaz. Neka su $t \in V_\alpha$ i $X, Y \in V_{j(\alpha)+1}$ proizvoljni i pretpostavimo da vrijedi $t = j^2(X) \times j^2(Y)$. Trebamo dokazati $\big(t = (X \times Y)\big)^B$, za što je dovoljno dokazati

$$t \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in t \leftrightarrow (\exists x \in V_\alpha)(\exists y \in V_\alpha)$$
$$(j(x) \in X \wedge j(y) \in Y \wedge z = (j^2(x), j^2(y)))\big).$$

Budući da je $X,Y \in V_\alpha$, slijedi $j^2(X), j^2(Y) \in V_{j^2(\alpha)}$, pa iz leme 4.20 dobivamo $t = j^2(X) \times j^2(Y) \in V_{j^2(\alpha)+2} \subseteq V_{j(\alpha)+1}$. Neka je $z \in V_\alpha$ proizvoljan.

Ako je $j(z) \in t$, onda postoje $j^3(x) \in j^2(X)$ i $j^3(y) \in j^2(Y)$ takvi da vrijedi $j(z) = \big(j^3(x), j^3(y)\big)$. Budući da je $j(x) \in X \in V_{j(\alpha)+1} = \mathscr{P}(V_{j(\alpha)})$, slijedi $j(x) \in V_{j(\alpha)}$, odnosno $x \in V_\alpha$. Analogno dobivamo $y \in V_\alpha$, iz čega slijedi tvrdnja.

Ako vrijedi $(\exists x \in V_\alpha)(\exists y \in V_\alpha)\big(j(x) \in X \wedge j(y) \in Y \wedge z = (j^2(x), j^2(y))\big)$, onda je $j^3(x) \in j^2(X)$, $j^3(y) \in Y$ i $j(z) = (j^3(x), j^3(y))$. Dakle, $j(z) \in t$. ∎

Teorem 4.25. Za sve $x, y \in V_\alpha$ vrijedi

$$(x \subseteq y)^B \iff x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge x \subseteq y.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati

$$x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in x \to j(z) \in y\big) \iff x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge x \subseteq y.$$

Pretpostavimo da vrijedi $x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in x \to j(z) \in y\big)$. Očito vrijedi $x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1}$. Neka je $z \in x$ proizvoljan. Tada postoji z' takav da je $j(z') = z$. Budući da je $x \in V_{j(\alpha)+1}$, slijedi $j(z') \in V_{j(\alpha)}$, odnosno $z' \in V_\alpha$. Sada iz pretpostavke dobivamo $j(z') = z \in y$.

Pretpostavimo da vrijedi $x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge x \subseteq y$. Očito vrijedi $x, y \in V_{j(\alpha)+1}$. Neka je $z \in V_\alpha$ proizvoljan. Sada jednostavno iz pretpostavke dobivamo da ako vrijedi $j(z) \in x$, onda vrijedi $j(z) \in y$. ∎

Teorem 4.26. Za sve $Z \in V_\alpha$ i $X, Y \in V_{j(\alpha)+1}$, ako vrijedi $Z \subseteq j^2(X) \times j^2(Y)$, onda vrijedi $(Z \subseteq X \times Y)^B$.

Dokaz. Neka su $Z \in V_\alpha$ i $X, Y \in V_{j(\alpha)+1}$ proizvoljni te pretpostavimo da vrijedi $Z \subseteq j^2(X) \times j^2(Y)$. Formula $(Z \subseteq X \times Y)$ je ekvivalentna formuli $\exists t(Z \subseteq t \wedge t = X \times Y)$, stoga je dovoljno dokazati $\exists t\big(Z \subseteq t \wedge t = X \times Y\big)^B$, odnosno $(\exists t \in V_\alpha)((Z \subseteq t)^B \wedge (t = X \times Y)^B)$.

Tvrdimo da je $t = j^2(X) \times j^2(Y)$ traženi skup. Iz $X, Y \in V_\alpha$ dobivamo $j^2(X), j^2(Y) \in V_{j^2(\alpha)}$, a onda iz leme 4.20 dobivamo $t \in V_{j^2(\alpha)+2} \subseteq V_{j(\alpha)+1}$. Iz $Z \subseteq j^2(X) \times j^2(Y)$ slijedi $Z \in V_{j(\alpha)+1}$. Sada iz teorema 4.25 dobivamo $(Z \subseteq t)^B$. Nadalje, iz teorema 4.24 dobivamo da vrijedi $\big(t = (X \times Y)\big)^B$. ∎

Teorem 4.27. Za sve $f \in V_\alpha$ i $X, Y \in V_{j(\alpha)+1}$, ako vrijedi $\mathit{func}\big(f, j^2(X), j^2(Y)\big)$, onda vrijedi $\mathit{func}\big(f, X, Y\big)^B$.

Dokaz. Neka su $f \in V_\alpha$ i $X,Y \in V_{j(\alpha)+1}$ proizvoljni te pretpostavimo da vrijedi $\mathit{func}(f, j^2(X), j^2(Y))$. Dovoljno je dokazati

$$(f \subseteq X \times Y)^B \wedge (\forall x \in V_\alpha)\big(j(x) \in X \rightarrow (\exists! y \in V_\alpha)(j(y) \in Y \wedge ((x,y) \in f)^B)\big).$$

Dokažimo da vrijede oba konjunkta. Iz pretpostavke teorema i teorema 4.26 slijedi $(f \subseteq X \times Y)^B$. Uzmimo proizvoljni $x \in V_\alpha$ takav da vrijedi $j(x) \in X$. Iz toga dobivamo $j^3(x) \in j^2(X)$, a iz pretpostavke teorema slijedi da postoji jedinstveni y takav da je $j^3(y) \in j^2(Y)$ i $(j^3(x), j^3(y)) \in f$. Očito je $j(y) \in Y$, a budući da vrijedi $Y \in V_{j(\alpha)+1}$, dobivamo $j(y) \in V_{j(\alpha)}$. Dakle, postoji jedinstveni $y \in V_\alpha$ takav da je $j(y) \in Y$. Budući da vrijedi $f \subseteq j^2(X) \times j^2(Y) \in V_{j(\alpha)+1}$, iz teorema 4.23 slijedi $((x,y) \in f)^B$. ■

Teorem 4.28. Za sve $f \in V_\alpha$ i $X,Y \in V_{j(\alpha)+1}$, ako vrijedi $\mathit{surj}\big(f, j^2(X), j^2(Y)\big)$, onda vrijedi $\mathit{surj}(f,X,Y)^B$.

Dokaz. Neka su $f \in V_\alpha$ i $X,Y \in V_{j(\alpha)+1}$ proizvoljni te pretpostavimo da vrijedi $\mathit{surj}\big(f, j^2(X), j^2(Y)\big)$. Trebamo dokazati $\mathit{surj}(f,X,Y)^B$, a za to je dovoljno dokazati

$$\mathit{func}(f,X,Y)^B \wedge (\forall y \in V_\alpha)\big(j(y) \in Y \rightarrow (\exists x \in V_\alpha)\big(j(x) \in X \wedge ((x,y) \in f)^B\big)\big).$$

Iz pretpostavke teorema i teorema 4.27 dobivamo da vrijedi $\mathit{func}(f,X,Y)^B$. Dokažimo drugi konjunkt. Neka je $y \in V_\alpha$ proizvoljan takav da vrijedi $j(y) \in Y$. Tada je $j^3(y) \in j^2(Y)$. Iz pretpostavke teorema slijedi da postoji $j^3(x) \in j^2(X)$ takav da je $(j^3(x), j^3(y)) \in f$. Iz toga dobivamo $j(x) \in X$. Budući da vrijedi $f \subseteq j^2(X) \times j^2(Y) \in V_{j^2(\alpha)+1} \subseteq V_{j(\alpha)+1}$, iz teorema 4.23 slijedi $((x,y) \in f)^B$. ■

Teorem 4.29. Za sve $f \in V_\alpha$ i $X,Y \in V_{j(\alpha)+1}$, ako vrijedi $\mathit{inj}\big(f, j^2(X), j^2(Y)\big)$, onda vrijedi $\mathit{inj}(f,X,Y)^B$.

Dokaz. Neka su $f \in V_\alpha$ i $X,Y \in V_{j(\alpha)+1}$ proizvoljni te pretpostavimo da vrijedi $\mathit{inj}\big(f, j^2(X), j^2(Y)\big)$. Trebamo dokazati $\mathit{inj}(f,X,Y)^B$, a za to je dovoljno dokazati

$$(\forall x_1 \in V_\alpha)(\forall x_2 \in V_\alpha)\big(j(x_1) \in X \wedge j(x_2) \in X \wedge$$
$$(\exists y \in V_\alpha)\big(j(y) \in Y \wedge (j^3(x_1), j^3(y)) \in f \wedge (j^3(x_2), j^3(y)) \in f \rightarrow x_1 = x_2\big)$$

Neka su $x_1, x_2 \in V_\alpha$ proizvoljni takvi da vrijedi $j(x_1) \in X$, $j(x_2) \in X$ i pretpostavimo da postoji $y \in V_\alpha$ takav da je $j(y) \in Y$, $(j^3(x_1), j^3(y)) \in f$ i $(j^3(x_2), j^3(y)) \in f$. Tada imamo $j^3(x_1), j^3(x_2) \in j^2(X)$ i $j^3(y) \in j^2(Y)$, a onda iz pretpostavke teorema dobivamo $j^3(x_1) = j^3(x_2)$, odnosno $x_1 = x_2$. ■

Teorem 4.30. Za sve $f \in V_\alpha$ i $X, Y \in V_{j(\alpha)+1}$, ako vrijedi $bij\big(f, j^2(X), j^2(Y)\big)$, onda vrijedi $bij(f, X, Y)^B$.

Dokaz. Slijedi direktno iz teorema 4.29 i 4.28. ■

Označimo formulu $\exists y \exists f\big(y \subset x \wedge bij(f, x, y)\big)$ koja govori da je skup x Dedekind-beskonačan s $D(x)$. Prisjetimo se, $y \subset x$ je pokrata za $y \subseteq x \wedge y \neq x$, stoga vrijedi $(y \subset x)^B \iff y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \subset x$.

Teorem 4.31. Za sve $X \in V_\alpha$, ako vrijedi $X \in V_{j(\alpha)+1} \wedge D\big(j^2(X)\big)$, onda vrijedi $D(X)^B$.

Dokaz. Neka je $X \in V_\alpha$ i pretpostavimo da vrijedi $X \in V_{j(\alpha)+1} \wedge D\big(j^2(X)\big)$. Imamo

$$D(X)^B \iff (\exists Y \in V_\alpha)(\exists f \in V_\alpha)(Y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge Y \subset X \wedge bij(f, X, Y)^B).$$

Iz pretpostavke teorema postoje Y i f takvi da vrijedi $Y \subset j^2(X) \wedge bij\big(f, j^2(X), Y\big)$. Tada postoji Y' takav da je $j^2(Y') = Y$. Budući da je $X \in V_{j(\alpha)+1}$, odnosno $j^2(X) \in j^2\big(V_{j(\alpha)+1}\big)$, i $j^2(Y') \subseteq j^2(X)$, slijedi da je $j^2(Y') \in j^2(V_{j(\alpha)+1})$, odnosno $Y' \in V_{j(\alpha)+1}$. Iz $j^2(Y') \subseteq j^2(X)$ dobivamo $Y' \subseteq X$. Budući da vrijedi $X \in V_{j(\alpha)+1} \wedge Y' \in V_{j(\alpha)+1} \wedge bij(f, j^2(Y') j^2(X))$, iz teorema 4.30 dobivamo $bij(f, X, Y')$, što znači da vrijedi $D\big(j^2(X)\big)$. ■

Sada možemo dokazati, pod pretpostavkom da je α beskonačni ordinalni broj, da postoji model za $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$.

Teorem 4.32. Pretpostavimo da vrijedi $M \models \mathsf{AC}$. Ako je α beskonačan u M, onda vrijedi $B \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$.

Dokaz. Znamo da vrijedi $B \models \mathsf{NFU}$. Pretpostavimo da je α beskonačan u M. Budući da je α beskonačni ordinalni broj, slijedi $\alpha \geq \omega$, a iz toga slijedi da je $V_\alpha \supseteq V_\omega$ beskonačan u M. Nadalje, iz $M \models \mathsf{AC}$, slijedi $D(V_\alpha)$, a onda iz teorema 4.13 slijedi $D\big(j^3(V_\alpha)\big)$. Budući da vrijedi $j^3(V_\alpha) \in V_{j^2(\alpha)} \subseteq V_{j(\alpha)+1}$, iz teorema 4.31 dobivamo $D(V_{j(\alpha)})^B$. Nadalje, iz $B \models \mathsf{NFU}$ i teorema 2.13 sada slijedi $B \models \mathsf{Inf}$. ■

Teorem 4.33. Za sve $t, x, y \in V_\alpha$ vrijedi

$$\big(t = x \cap y\big)^B \iff x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge t = x \cap y.$$

Dokaz. Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}\big(t = x \cap y\big)^B &\iff set^B(t) \wedge set^B(x) \wedge set^B(y) \wedge \forall z(z \in t \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y)^B \\ &\iff t \in V_{j(\alpha)+1} \wedge x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge \\ &\quad \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in t \leftrightarrow j(z) \in x \wedge j(z) \in y\big).\end{aligned}$$

Trebamo dokazati

$$\begin{aligned}&t \in V_{j(\alpha)+1} \wedge x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in t \leftrightarrow j(z) \in x \wedge j(z) \in y\big) \\ &\iff x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge t = x \cap y.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da vrijedi

$$t \in V_{j(\alpha)+1} \wedge x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in t \leftrightarrow j(z) \in x \wedge j(z) \in y\big).$$

Očito je $x, y \in V_{j(\alpha)+1}$, stoga preostaje dokazati $t = x \cap y$. Neka je z proizvoljan. Tada postoji z' takav da je $j(z') = z$. Ako je $z \in t$, budući da vrijedi $t \in V_{j(\alpha)+1}$, slijedi $j(z') = z \in V_{j(\alpha)}$, iz čega slijedi $z' \in V_\alpha$. Sada iz pretpostavke dobivamo $j(z') \in x \wedge j(z') \in y$. Ako je $z \in x \wedge z \in y$, onda iz $j(z') \in x \wedge j(z') \in y$, $z' \in V_\alpha$ i pretpostavke dobivamo $z = j(z') \in t$.

Pretpostavimo da vrijedi $x \in V_{j(\alpha)+1} \wedge y \in V_{j(\alpha)+1} \wedge t = x \cap y$. Očito su $x, y \in V_{j(\alpha)+1}$, stoga preostaje dokazati $t \in V_{j(\alpha)+1} \wedge (\forall z \in V_\alpha)\big(j(z) \in t \leftrightarrow j(z) \in x \wedge j(z) \in y\big)$. Iz pretpostavke i iz $t = x \cap y \subseteq x$ slijedi $t \in V_{j(\alpha)+1}$. Uzmimo proizvoljan $z \in V_\alpha$. Tada iz pretpostavke imamo $j(z) \in t \leftrightarrow j(z) \in x \wedge j(z) \in y$. ■

Postojanje modela za teoriju $\mathsf{NFU} + \mathsf{AC}$ dokazujemo primjenom aksioma izbora teorije ZFC.

Teorem 4.34. Ako vrijedi $M \models \mathsf{AC}$, onda vrijedi $B \models \mathsf{NFU} + \mathsf{AC}$.

Dokaz. Trebamo dokazati da vrijedi

$$\begin{aligned}B \models \forall x\big(&set(x) \wedge \emptyset \notin x \wedge (\forall y \in x)set(y) \wedge (\forall y \in x)(\forall z \in x)(y \neq z \to y \cap z = \emptyset) \\ &\to \exists u(\forall w \in x)\exists! v(v \in w \cap u)\big)\end{aligned}$$

Neka je $x \in V_\alpha$ proizvoljan takav da vrijedi $set^B(c)$, $\emptyset \notin^B c$, $(\forall y \in V_\alpha)(y \in^B c \to set^B(y))$ i $(\forall y \in V_\alpha)(\forall z \in V_\alpha)(y \in^B c \wedge z \in^B c \wedge y \neq^B z \to ((y \cap z) = \emptyset)^B)$. Tada vrijedi

(i) $x \in V_{j(\alpha)+1}$;

(ii) $\emptyset \notin x$;

(iii) $(\forall y \in V_\alpha)(j(y) \in x \to y \in V_{j(\alpha)+1})$ i

(iv) $(\forall y \in V_\alpha)(\forall z \in V_\alpha)(j(y) \in x \wedge j(z) \in x \wedge y \neq z \to y \cap z = \emptyset)$.

Dokažimo da x zadovoljava uvjete aksioma izbora u M. Očito vrijedi $set(x)$, iz uvjeta (ii) dobivamo $\emptyset \notin x$, a očito vrijedi $set(y)$ za svaki $y \in x$. Neka su $y, z \in x$ proizvoljni i različiti. Tada postoje y', z' takvi da vrijedi $j(y') = y$ i $j(z') = z$. Iz $j(y') = y \neq z = j(z')$, zbog injektivnosti od j, slijedi $y' \neq z'$, iz čega bi slijedilo $y = z$. Nadalje, iz $j(y) \in x \in V_{j(\alpha)+1}$ dobivamo $j(y) \in V_{j(\alpha)}$, iz čega slijedi $y \in V_\alpha$. Analogno dobivamo $z \in V_\alpha$. Sada iz uvjeta (iv) dobivamo $y' \cap z' = \emptyset$, iz čega slijedi $y \cap z = j(y' \cap z') = \emptyset$. Dakle, x zadovoljava uvjete aksioma izbora u M.

Trebamo dokazati da vrijedi $\exists u \forall w \big(w \in x \to \exists! v(v \in w \cap u)\big)^B$. To je ekvivalentno s

$$(\exists u \in V_\alpha)(\forall w \in V_\alpha)\big(j(w) \in x \to (\exists! v \in V_\alpha)(j(v) \in w \cap u \wedge w \in V_{j(\alpha)+1} \wedge u \in V_{j(\alpha)+1})\big).$$

Neka je u' izborni skup za x u M. Tada je i $u'' := u' \cap \bigcup x$ također izborni skup za x u M. Naime, neka je $w \in x$ proizvoljan. Tada postoji v takav da je $w \cap u' = \{v\}$. Iz $v \in w \in x$ slijedi $v \in \bigcup x$. Dakle, imamo $w \cap u'' = w \cap u' \cap \bigcup x = \{v\} \cap \bigcup x = \{v\}$.

Tvrdimo da je $u := j^{-1}(u'')$ traženi izborni skup za x u B. Za svaki $t \in x$ postoji t' takav da je $j(t') = t \in x$. Iz uvjeta (iii) slijedi da je $t' \in V_{j(\alpha)+1}$, iz čega slijedi $t = j(t') \in V_{j^2(\alpha)+1}$. Dakle, $x \subseteq V_{j^2(\alpha)+1}$, odnosno $x \in V_{j^2(\alpha)+2}$. Tada imamo $\bigcup x \in V_{j^2(\alpha)+1}$, iz čega slijedi $j(u) = u'' = u' \cap \bigcup x \subseteq \bigcup x \in V_{j^2(\alpha)+1}$. Iz toga dobivamo $u \in V_{j(\alpha)+1} \subseteq V_\alpha$.

Uzmimo proizvoljan $w \in V_\alpha$ takav da vrijedi $j(w) \in x$. Budući da je u'' izborni skup za x u M, postoji jedinstveni v takav da je $v \in j(w) \cap u''$. Tada postoji jedinstveni v' takav da je $j^2(v') = v$. Sada imamo $j^2(v') \in j(w) \cap u'' \subseteq u'' \in V_{j^2(\alpha)+1}$, iz čega slijedi $v' \in V_\alpha$. Nadalje, imamo $j^2(v') \in j(w) \cap u'' = j(w) \cap j(u)$, iz čega slijedi $v' \in w \cap u$. Znamo da je $u \in V_{j(\alpha)+1}$, a iz $j(w) \in x$ i uvjeta (iii) dobivamo $w \in V_{j(\alpha)+1}$. Dakle, vrijedi aksiom izbora u B. ■

Sada jednostavno dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 4.35. Neka je M model teorije ZFC, j automorfizam i α ordinalni broj takav da je $j(\alpha) < \alpha$. Ako je α beskonačan u M, onda vrijedi $B \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf} + \mathsf{AC}$.

Dokaz. Iz teorema 4.19 slijedi $B \models \mathsf{NFU}$. Iz teorema 4.32 pak slijedi $B \models \mathsf{Inf}$, a iz teorema 4.34 slijedi $B \models \mathsf{AC}$. Dakle, $B \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf} + \mathsf{AC}$. ■

Iz teorema 2.44 dobivamo sljedeće.

Teorem 4.36. Neka je M model teorije ZFC, j automorfizam i α ordinalni broj takav da je $j(\alpha) < \alpha$. Ako je α beskonačan u M, onda vrijedi $B \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf} + \mathsf{AC} + \mathsf{VCSP}$.

Dokaz. Iz teorema 4.35 dobivamo $B \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf} + \mathsf{AC}$, a iz teorema 2.44 onda dobivamo $B \models \mathsf{VCSP}$. Dakle, $B \models \mathsf{NFU} + \mathsf{Inf} + \mathsf{AC} + \mathsf{VCSP}$. ■

Zaključak

Istraživanje teorije NFU vrlo je izazovan proces. Iako naizgled postoji mnogo literature, ona je često zastarjela ili nije prevelike kvalitete. Nadamo se da će ova disertacija približiti teoriju NFU općoj matematičkoj zajednici i biti od koristi svima onima koji žele saznati nešto o njoj.

Rekapitulirajmo ukratko znanstvene doprinose disertacije.

1. Poboljšavanje sintakse teorije NFU dokazivanjem mnogih korisnih svojstava. Dobiveni rezultati mogu se koristiti i u teoriji tipova.

2. Postavljanje teorije NFU na stabilne temelje i uspješno argumentiranje u korist njezinog korištenja kao temelja matematike, odnosno valjane filozofsko-matematičke alternative teoriji ZFC.

3. Prijedlog alternativne aksiomatizacije teorije NFU u svrhu lakše ekspozicije i lakšeg korištenja navedene teorije.

4. Dokaz konzistentnosti alternativne aksiomatizacije te posljedično opravdanje njezinog uvođenja. Jasniji i detaljniji prikaz konstrukcije modela teorije NFU.

Budući rad

Teoriju NFU možemo nastaviti istraživati u raznim smjerovima, a za kraj navodimo tri problema za koja smatramo da ih je moguće riješiti pomoću teorije uvedene u ovoj disertaciji.

- *Metoda forcinga*: istraživanje metode forcinga u teoriji NFU već je napravljeno u [37] pomoću Boolean-valued modela. Međutim, u tom tekstu Boolean-valued konstrukcija nije prikazana u punoj općenitosti. Nadalje, nije prikazano kako se pomoću nje kontruiraju odgovarajući modeli u kojima vrijedi (negacija) hipoteze kontinuuma ili (negacija) aksioma izbora. Također je pretpostavka na početnu Booleovu algebru nepotrebno jaka.

Smatramo da je izrazito korisno za teoriju NFU i daljnje istraživanje njenih modela da se metoda forcinga dodatno istraži, produbi i učini preciznom.

- *Model za teoriju* $NFU + Inf + \neg OP_0$: relativno jednostavnom prilagodbom Boffine konstrukcije u tzv. permutacijsku metodu možemo dokazati postojanje modela teorije $\mathsf{NFU} + \mathsf{Inf}$ u kojoj ne vrijedi aksiom tipski ujednačenih uređenih parova. Naime, počinjemo s modelom $M = (M_1, M_2, \ldots)$ jednostavne teorije tipova s atomima (TTU) i zatim konstruiramo pomoću permutacijske metode novu strukturu $(M_1', M_2', \ldots)$. Pri tome je $M_1' = M_1$, a M_{i+1}' je dobiven iz M_i' dodavanjem skupa $\mathscr{P}(B)$, gdje je B beskonačan Dedekind-konačan skup atoma, s kardinalnošću neusporedivom sa svakim $X \subseteq M_i'$ za koji je simetrična razlika $X \triangle B$ beskonačna.

- *Formalizacija u Coqu*: teorija NFU kao vrsta teorije tipova manje je zahtjevna za formalizaciju u dokazivaču teorema od primjerice teorije ZF. Formalizacijom u Coqu dodatno osnažujemo uvjerenje u ispravnost određenih rezultata teorije NFU i omogućavamo brže provjeravanje stratificiranosti određenih formula.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Adlešić, T.: *Prošireni modeli teorije skupova*. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu. Prirodoslovno–matematički fakultet: Matematički odsjek, 2018. ↑ 140.

[2] Adlešić, T i Čačić, V.: *A Modern Rigorous Approach to Stratification in NF/NFU*. Logica Universalis, 16(3):451–468, 2022. ↑ 2.

[3] Adlešić, T. i Čačić, V.: *The Cardinal Squaring Principle and an Alternative Axiomatization of NFU*. Bulletin of the Section of Logic, 52(4):551–581, 2023. ↑ 17.

[4] Banakh, T.: *Classical Set Theory: Theory of Sets and Classes*. `https://arxiv.org/pdf/2006.01613.pdf`, 2023. ↑ 138.

[5] Beth, E.: *Une démonstration de la non-contradiction de la logique des types au point de vue fini*. Nieuw archief voor wiskunde, 19:59–62, 1936. ↑ 136.

[6] Boffa, M.: *The consistency problem for NF*. The Journal of Symbolic Logic, 42(2):215–220, 1977. ↑ 75.

[7] Boffa, M.: *ZFJ and the consistency problem for NF*. Jahrbuch der Kurt Gödel Gesellschaft, 1:102–106, 1988. ↑ 75, 79.

[8] Cantor, G.: *Gesammelte Abhandlungen: mathematischen und philosophischen Inhalts*. Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim, 1962. ↑ 113, 114.

[9] Cantor, G.: *Foundation of a general theory of manifolds: a mathematico-philosophical investigation into the theory of transfinite*. U Ewald (urednik): *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics*, svezak 2, stranice 878–920. Oxford University Press, 1996. ↑ 117.

[10] Chang, C. i Keisler, J.: *Model theory*. North–Holland, 1990. ↑ 3.

[11] Cohen, P.: *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Dover Publications, 2008. ↑ 140.

[12] Čačić, V.: *Teorija skupova*. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/Predavanja_iz_Teorije_skupova.pdf, 2020. ↑ 75, 77, 78, 80.

[13] Dauben, J.: *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press, 1990. ↑ 113.

[14] Dedekind, R.: *Was sind und was sollen die Zahlen*. U Ewald (urednik): *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics*, svezak 2, stranice 787–833. Oxford University Press, 1996. ↑ 118.

[15] Ehrenfeucht, A. i Mostowski, A.: *Models of axiomatic theories admitting automorphisms*. Fundamenta Mathematicae, 43:50—68, 1956. ↑ 80.

[16] Enderton, H.: *Elements of set theory*. Academic press, 1977. ↑ 23, 26, 77, 78.

[17] Enderton, H.: *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 2001. ↑ 3, 59, 80.

[18] Ewald, W.: *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford University Press, 1996. ↑ 110, 112, 114, 121.

[19] Ferreirós, J.: *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser Verlag AG, 2007. ↑ 108, 132, 133, 134, 140.

[20] Fitch, F.: *The Consistency of the Ramified Principia*. The Journal of Symbolic Logic, 3:140–149, 1938. ↑ 136.

[21] Forster, T.: *Set theory with a universal set. Exploring an untyped universe*. Oxford University Press, 1995. ↑ 9.

[22] Fraenkel, A.: *Zu den Grundlagen der Cantor–Zermeloschen Mengenlehre*. Mathematische Annalen, 86:230–237, 1922. ↑ 137.

[23] Fraenkel, A.: *The notion „definite" and the independence of the axiom of choice*. U van Heijenoort (urednik): *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic 1897–1931*, stranice 284–289. Harvard University Press, 1967. ↑ 137.

[24] Frege, G.: *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic*. U van Heijenoort (urednik): *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic 1897–1931*, stranice 1–82. Harvard University Press, 1967. ↑ 119, 134.

[25] Frege, G.: *Osnove aritmetike i drugi spisi*. Kruzak, 1995. ↑ 120.

[26] Gabbay, J.: *Consistency of Quine's New Foundations*, 2014. `https://arxiv.org/abs/1406.4060`. ↑ 10.

[27] Gentzen, G.: *Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik*. Mathematische Zeitschrift, 41:357–366, 1936. ↑ 136.

[28] Giaquinto, M.: *The Search for Certainty: A Philosophical Account of Foundations of Mathematics*. Oxford University Press, 2005. ↑ 126.

[29] Gödel, K.: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*. U al, Feferman et (urednik): *Collected Works*, svezak 2, stranice 33–65. Oxford University Press, 1986. ↑ 140.

[30] Gödel, K.: *Consistency proof for the generalized continuum hypothesis*. U al, Feferman et (urednik): *Collected Works*, svezak 2, stranice 28–32. Oxford University Press, 1986. ↑ 140.

[31] Gödel, K.: *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I*. U al, Feferman et (urednik): *Collected Works*, svezak 2, stranice 145–195. Oxford University Press, 1986. ↑ 136, 140.

[32] Goldfarb, W.: *Logic in the Twenties: the Nature of the Quantifier*. The Journal of Symbolic Logic, 44:351–368, 1979. ↑ 133.

[33] Hailperin, T.: *A set of axioms for logic*. The Journal of Symbolic Logic, 1944. ↑ 9.

[34] Holmes, R.: *Systems of combinatory logic related to Quine's 'New Foundations'*. Annals of Pure and Applied Logic, 53(2):103–133, 1991. ↑ 57, 60.

[35] Holmes, R.: *Elementary set theory with a universal set*. `https://randall-holmes.github.io/head.pdf`, 1998. ↑ 9, 17, 28, 57, 58, 67.

[36] Holmes, R.: *The Usual Model Construction for NFU Preserves Information*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 53(4), 2012. ↑ 88.

[37] Holmes, R.: *Forcing in NFU and NF*. `https://randall-holmes.github.io/Papers/forcing2.pdf`, 2019. ↑ 74, 97.

[38] Holmes, R.: *A new pass at the NF consistency proof*. `https://randall-holmes.github.io/Nfproof/newattempt.pdf`, 2020. ↑ 10.

[39] Jech, T.: *Set theory*. Springer Science & Business Media, 2013. ↑ 27.

[40] Jensen, R.: *On the consistency of a slight (?) modification of Quine's New Foundations*. In Hintikka (ed.), Words and objections: Essays on the Work of W. V. Quine, 1969. ↑ 10, 39, 60, 75.

[41] Lojkić, G.: *Razgranata teorija tipova kao intenzionalna logika*. Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu. Hrvatski studiji, 2018. ↑ 126.

[42] Mathias, A.: *The strength of Mac Lane set theory*. Annals of Pure and Applied Logic, 110(1–3):107–234, 2001. ↑ 75.

[43] Morley, M.: *Homogenous Sets*. U Barwise (urednik): *Handbook of Mathematical Logic*, stranice 181–196. North-Holland, 1977. ↑ 80.

[44] Morris, S.: *Quine, New Foundations, and the Philosophy of Set Theory*. Cambridge University Press, 2018. ↑ 9, 67.

[45] Neumann, J. von: *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengelehre*. U Taub (urednik): *Collected Works: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics*, svezak 1, stranice 320–338. Pergamon Press, 1961. ↑ 138.

[46] Neumann, J. von: *An Axiomatization of set theory*. U Ewald (urednik): *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics*, svezak 2, stranice 393–413. Oxford University Press, 1996. ↑ 138.

[47] Neumann, J. von: *On the introduction of transfinite number*. U Ewald (urednik): *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics*, svezak 2, stranice 393–413. Oxford University Press, 1996. ↑ 138.

[48] Quine, W.: *New foundations for mathematical logic*. The American Mathematical Monthly, 1937. ↑ 9, 140.

[49] Ramsey, F.: *The Foundations of Mathematics*. Proceedings of the London Mathematical Society, s2-25(1):338–384, 1926. ↑ 128, 135.

[50] Rosser, J.: *Logic for mathematicians*. McGraw-Hill, 1953. ↑ 9.

[51] Russell, B.: *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*. Proceedings of the London Mathematical Society, s2-4(1):29–53, 1907. ↑ 126.

[52] Russell, B.: *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*. American Journal of Mathematics, 30(3):222–262, 1908. ↑ 126.

[53] Russell, B.: *Principles of mathematics*. Routledge, 2010. ↑ 126.

[54] Skolem, T.: *Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem*. U van Heijenoort (urednik): *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic 1897–1931*, stranice 252–263. Harvard University Press, 1967. ↑ 134.

[55] Specker, E.: *The axiom of choice in Quine's new foundations for mathematical logic*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 1953. ↑ 10.

[56] Tarski, A.: *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollstdndigkeit*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 40:97–112, 1933. ↑ 136.

[57] Tarski, A.: *The Concept of Truth in Formalized Languages*. U Corcoran (urednik): *Logic, Semantics, Metamathematics*, stranice 152–278. Hackett Publishing Company, 1983. ↑ 136.

[58] Vuković, M.: *Matematička logika*. Element, 2009. ↑ 3.

[59] Whitehead, A. i Russell, B.: *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913. ↑ 9.

[60] Zermelo, E.: *Investigation in the foundation of set theory I*. U van Heijenoort (urednik): *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic 1897–1931*, stranice 199–215. Harvard University Press, 1967. ↑ 129, 130, 131.

[61] Zermelo, E.: *A new proof of the possibility of a well-ordering*. U van Heijenoort (urednik): *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic 1897–1931*, stranice 183–198. Harvard University Press, 1967. ↑ 129.

[62] Zermelo, E.: *Proof that every set can be well-ordered*. U van Heijenoort (urednik): *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic 1897–1931*. Harvard University Press, 1967. ↑ 128.

[63] Zermelo, E.: *Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*. U Ewald (urednik): *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundation of Mathematics*, svezak 2, stranice 1219–1233. Oxford University Press, 1996. ↑ 139.

A. Dodatak - Povijest teorije skupova

Praćenjem početaka bilo koje matematičke i znanstvene discipline uvijek se suočavamo s određenim poteškoćama. Naizgled to nije slučaj s teorijom skupova, za koju se često tvrdi da je u potpunosti otkrivena od strane Georga Cantora. Neupitan je Cantorov doprinos njenom razvoju i uzdizanju do samostalne matematičke discipline, ali ističući samo njega zanemaruju se ključni doprinosi drugih matematičara, posebice Dedekinda.

Ovaj povijesni prikaz podijeljen je na tri dijela. Prvi dio opisuje kako je nastala teorija skupova te njezin razvoj u drugoj polovici 19. stoljeća. Drugi dio prikazuje krizu nastalu logičkim paradoksima i dva pokušaja njezina prevladavanja; teoriju tipova Whiteheada i Russella, te Zermelovu aksiomatizaciju. Treći dio je otklon od standardne prezentacije povijesti teorije skupova i opisuje smjer razvoja Quineove teorije skupova do sredine dvadesetog stoljeća.

A.1. Početak teorije skupova (1850.–1879.)

Teorija skupova nastala je na njemačkom kulturnom području sredinom 19. stoljeća. Razloge za takvo vrijeme i mjesto možemo tražiti u intelektualnim, filozofskim i matematičkim okolnostima. Reforme njemačkih sveučilišta poslije poraza od Napoleona, a posebice osnivanje Berlinskog sveučilišta[1] 1810. godine, označile su promjene u načinu bavljenja znanošću. Obrazovanje nije bilo usmjereno samo na „korisne” primjene, kao što je to bio slučaj u Francuskoj nakon građanske revolucije, već na cjelokupnu izgradnju osobe, izgledom više nalik na renesansni ideal. Za posljedicu imamo približavanje humanističkih disciplina i filozofije prirodnim znanostima i matematici.

U filozofiji pretežito prevladava Kantov utjecaj, koji se u većini slučajeva pokušava prilago-

[1] Danas Humboldtovo sveučilište u Berlinu.

diti novim tendencijama. Često se određene postavke Kantove filozofije odbacuju i zamjenjuju drugima, a neke se dodatno naglašavaju. U takvim filozofskim okolnostima nastaje konceptualni pristup u matematici, čiji su pioniri Carl Friedrich Gauss, Carl Gustav Jacobi i Gustav Lejeune Dirichlet. Konceptualni pristup određeno područje matematike svodi na jedan jedinstveni koncept pomoću kojeg se općenitije iskazuju i dokazuju određene tvrdnje. Prvo korištenje konceptualnog pristupa u punom sjaju pojavljuje se kod Bernharda Riemanna i njegovog pojma mnogostrukosti, a kroz njegov utjecaj i kod Richarda Dedekinda u pojmu sistema, odnosno skupa.

Riemannov pojam mnogostrukosti

Centralni pojam Riemannovog matematičkog rada je pojam mnogostrukosti. Definiciju tog pojma Riemann uvodi u svom habilitacijskom radu iz 1854. godine, a začeci te ideje sežu nekoliko godina ranije (1851.) te se nalaze u njegovoj doktorskoj disertaciji. Glavni Riemannov cilj u disertaciji je postaviti teoriju analitičkih funkcija na sigurnije temelje i sistematičnije prikazati dotadašnje rezultate. Za razliku od Weierstrassa, koji je isto nastojao postići strogim i preciznim dokazima, Riemann je želio teoriju zasnovati na općenitijim i apstraktnijim pojmovima. Tako je došao, pokušavajući pronaći nužne i dovoljne uvjete koji određuju analitičke funkcije, do pojma plohe kojeg će kasnije poopćiti u pojam mnogostrukosti.

Riemannove ideje o apstraktnijem i općenitijem prikazu teorije, premda prisutne u doktorskoj disertaciji, svoj pravi oblik dobivaju u habilitacijskom radu. Kao što smo već spomenuli, pojam plohe iz disertacije je sada poopćen u pojam mnogostrukosti te mu cilj nije više samo podariti stabilne temelje teoriji anlitičkih funkcija, već mnogo ambiciozniji. Uvedeni pojam mnogostrukosti trebao bi poslužiti kao temelj cijeloj teoriji magnituda[2], što znači cijeloj tadašnjoj teorijskoj matematici. Mnogostrukosti su za Riemanna usko povezane s tradicionalnom logičkom teorijom klasa; one se sastoje od elemenata koji potpadaju pod određeni koncept. Drugim riječima, mnogostrukosti su ekstenzije koncepata, a to znači da predstavljaju (logičke) klase. Između ostalog, mnogostrukostima je postignuto da se geometrija u potpunosti oslobodila pozivanja na prostorni zor te je postala apstraktna teorija. Također su značajne i s aritmetičke strane jer potiču ideju da bi mogle poslužiti kao sredstvo za preciznije definiranje pojma broja;

[2]U drugoj polovici 19. stoljeća vladala je velika zbrka u terminologiji. Teorija magnituda nije ništa drugo nego teorija o realnim brojevima. Danas bi bilo uobičajeno nazivati ju analizom, ali tada su je nazivali raznim imenima poput algebre, teorije brojeva, teorije kontinuuma, aritmetike i slično.

ideje koju će na određeni način od Riemanna preuzeti Dedekind. Nažalost, Riemannove ideje iz habilitacijske teze nisu bile poznate velikom broju matematičara, već maloj grupi njegovih suradnika, uključujući Dedekinda, i možda nekolicini talijanskih matematičara. Šira javnost je s njima upoznata tek 1868. godine Dedekindovim objavljivanjem Riemannove habilitacijske teze, zajedno s jednim Riemannovim člankom o trigonometrijskim redovima.

Riemannovi najvažniji doprinosi su u analizi i teoriji brojeva, no uvođenje pojma mnogostrukosti doprinijelo je stvaranju povoljnog ozračja za daljnji konceptualni i apstraktni razvoj baziran na njima. Upravo je Riemann prvi iznio ideju o zasnivanju cjelokupne matematike na jedinstvenom apstraktnom principu. Nemoguće je precijeniti utjecaj Riemannovih temeljnih ideja na Dedekinda i Cantora, što najbolje oslikava činjenica da je Cantor ono što danas nazivamo teorijom skupova nazivao teorijom mnogostrukosti.

Rani Dedekindovi doprinosi

Prvu polovicu Dedekindovog znanstvenog djelovanja karakterizira nekoliko značajki: pokazuje veliku posvećenost sistematiziranju postojećeg znanja, oslanja se na stroge i precizne dokaze (utjecaj Dirichleta), te značajno koristi skupovnu terminologiju. Habilitacijski rad iz 1854. godine ne pokazuje još uvijek punu raskoš Dedekindovog talenta i ne može se naslutiti njegovo kasnije područje istraživanja. Ipak se u njemu naziru ideje koje će s vremenom doći do izražaja; već spomenuta strogost u dokazima i razvoju teorije, posebno naglašavanje povijesnog razvoja matematičkih ideja, te ideja o postupnom razvoju aritmetike, počevši s prirodnim brojevima, definicijskom nadogradnjom koja završava s kompleksnim brojevima. Ipak, u habilitacijskom radu još nema naznaka skupovnog jezika.

Od 1855. godine glavno Dedekindovo područje rada je algebra. Veći dio vremena između 1855. i 1858. godine posvetio je reformulaciji i sistematizaciji dotadašnjeg znanja. Rezultate do kojih je tada došao nije odmah objavio, što je karakteristično za njegovo znanstveno djelovanje. To ne znači da je općenito rijetko objavljivao, već da je određeni materijal dugo i detaljno analizirao prije negoli se odlučio na objavu. Zbog toga imamo situaciju da je nekoliko ideja iz njegovog ranijeg perioda sadržano u skicama sve do njihovog konačnog objavljivanja tek nekoliko desetljeća kasnije. Ono što se u tom periodu može jasno vidjeti, i u neobjavljenim i u objavljenim radovima, je korištenje skupovne terminologije. Budući da Dedekindov habilitacijski rad ne sadrži naznake te terminologije, može se zaključiti kako je Riemann izvršio veliki utjecaj na njega svojim habilitacijskim radom. U svojim radovima Dedekind za skupove koristi pojmove poput domene i kompleksa, a u jednom članku iz 1857. godine pojmove klase i sistema. S vremenom će se u njegovoj terminologiji pojam sistema ustaliti kao standardni naziv za skupove. Jedan od glavnih problema koji je zaokupljao Dedekindovu pažnju najranije od 1856. godine je faktorizacija na proste ideale. Navedeni problem u početku je pokušavao riješiti tada uobičajenim sredstvima, što znači bez korištenja skupovnog jezika. Iako je postigao određene uspjehe, nije uspio svoj naum u potpunosti ostvariti. Godine 1862. odustaje od navedenog problema i posvećuje se uređivanju i izdavanju neobjavljenih radova Gaussa, Dirichleta i Riemanna, a najviše vremena ulaže u pripremanje Dirichletovih predavanja o teoriji brojeva. Pripremajući drugo izdanje Dirichletovih predavanja 1869. godine, ponovno se vraća na problem faktorizacije. Ovaj put koristi skupovni jezik i zaključuje kako se jedino pomoću njega problem može riješiti na odgovarajući način. Svoju teoriju ideala, zajedno s rješenjem problema faktorizacije, objavljuje 1871. godine kao deseti dodatak Dirichletovim predavanjima. U tom dodatku uvodi mnoge nove pojmove poput polja kompleksnih brojeva, algebarskog broja, modula i ideala. No, za nas najvažnije, nedvosmisleno koristi jezik skupova, gotovo na jednak način na koji se i danas koristi u algebri. Primjerice, polje definira kao „svaki skup beskonačno mnogo realnih ili kompleksnih brojeva, koji su zatvoreni i potpuni u sebi tako da je zbroj, razlika, umnožak i kvocijent bilo koja dva broja ponovno broj istog skupa.”[3] Koristi pojmove najveće zajedničke mjere dvaju polja, što odgovara presjeku dvaju polja, te najmanjeg zajedničkog višekratnika dvaju polja, što pak odgovara uniji dvaju polja. Sličnu terminologiju upotrebljava i za module te ideale. Vrijedi naglasiti kako je Dedekindovu terminologiju presjeka i unije u potpunosti preuzeo Cantor u svojoj seriji članaka između 1879. i 1884. godine.

Najvažniji Dedekindov rad u ovom periodu je *Statigkeit und irrationale Zahlen*[4] iz 1872. godine u kojem prezentira definiciju realnih brojeva pomoću rezova. Gotovo u isto vrijeme su definiciju realnih brojeva ponudili Wierstrass i Cantor, no Dedekind se od njih izdvaja po specifičnom pristupu samom problemu. Weierstrass i Cantor definiraju realne brojeve na način da budu pogodni za korištenje u matematičkoj analizi, a to nastoje postići pomoću njezinih metoda; prvi pomoću sumacija redova, a potonji pomoću Cauchyjevih nizova. S druge strane, Dedekind smatra nužnim (najkasnije od 1858. godine) strogo zasnivanje aritmetike same po sebi, kako bi se u budućnosti izbjeglo tada uobičajeno pozivanje na geometrijski zor ili intuiciju. Posebno naglašava pojam neprekidnosti, ili u današnjoj terminologiji potpunosti realnih brojeva. Realni brojevi su definirani kao rezovi kolekcije racionalnih brojeva, a pomoću rezova su također de-

[3]Citat je preuzet iz [19].

[4]Hrv. Neprekidnost i iracionalni brojevi.

finirane njihove operacije i uređaj na njima. Najvažniji dokaz u radu je da kolekcija realnih brojeva ima svojstvo potpunosti.

Očito je da skupovi kod Dedekinda igraju puno značajniju ulogu nego kod Riemanna, no oni ipak nisu dio samostalne teorije, već samo prikladno sredstvo za postizanje određenih ciljeva. Dedekind je uvelike doprinio izdvajanju teorije skupova u samostalnu matematičku disciplinu, a ključni korak u tom procesu će napraviti Georg Cantor.

Točkasti skupovi

Problem definicije pojma funkcije javlja se od samog početka, odnosno od otkrivanja matematičke analize u 17. stoljeću. Razni autori su koristili razne definicije, što je samo dodatno doprinosilo konfuziji. Godine 1822. Joseph Fourier pokazuje da se svaka funkcija može prikazati kao suma trigonometrijskih redova (može se razviti u Fourierov red), stoga trigonometrijski redovi postaju glavno sredstvo za proučavanje funkcija. Takve reprezentacije funkcija se u određenim slučajevima pokazuju problematičnima jer neki redovi ne moraju nužno konvergirati. Godine 1829. Dirichlet je prvi pokazao pod kojim uvjetima Fourierov red konvergira, a njegov rezultat otvorio je mnoga nova područja istraživanja. Posebno se ističe detaljnije objašnjenje pojma integrala od strane Riemanna 1854. godine, pomoću kojeg su se dodatno razjasnili i Fourierovi redovi. To je za posljedicu također imalo da su se polako počele prihvaćati proizvoljne, općenite funkcije, koje nisu zadane nekim globalnim pravilom. Daljnjim proučavanjem Riemannovog integrala, zajedno s pojmom općenite funkcije, dolazi do potrebe za uvođenjem tzv. *točkastih skupova*, odnosno dijela matematike koji će kasnije biti poznat kao topologija. Pojavu točkastih skupova možemo u određenom smislu pronaći u radovima Rudolfa Lipschitza iz 1864. godine, a prvi autor koji je uveo dva osnovna pojma teorije točkastih skupova (guste i nigdje guste kolekcije) u svome radu iz 1870. godine bio je Hermann Hankel. Njegov rad izvršio je veliki utjecaj na mnoge matematičare koji su se bavili realnom analizom, a posebice na Cantora.

Cantor svoju matematičku karijeru započinje u teoriji brojeva, a oko 1869. godine potpada pod utjecaj Eduarda Heinea. Heine se pretežito bavio realnom analizom, a posebno trigonometrijskim redovima, stoga to postaje glavno područje Cantorova interesa. Glavni problem koji je zaokupljao i Cantora i Heinea bio je pronaći odgovarajuće uvjete tako da funkcija bude jedinstveno reprezentirana trigonometrijskim redom. Heine je 1870. godine pronašao odgovarajuće uvjete za neprekidne funkcije, a Cantorova ideja je da se rezultat pokuša poopćiti na funkcije koje nisu nužno neprekidne. Za takvu generalizaciju su Cantoru potrebni tzv. *derivirani sku-*

povi. Za beskonačni skup točaka P definira se njegov derivirani skup P' kao skup svih graničnih točaka skupa P. Jednostavno se onda može definirati drugi derivirani skup P'' (derivirani skup od P'), treći derivirani skup P''' itd. Točkasti skupovi se zatim pomoću deriviranih skupova svrstavaju u dvije zasebne klase: *skupove prve vrste* i *skupove druge vrste*. Skupovi prve vrste su oni čiji je n-ti derivirani skup prazan (za neki n), a skupovi druge vrste su oni koji nisu prve vrste. Upravo je pomoću skupova prve vrste Cantor došao do rješenja problema generalizirane reprezentacije u radu iz 1872. godine: funkcija $f(x)$ je jedinstveno reprezentirana trigonometrijskim redom ako taj red konvergira za sve x funkciji $f(x)$, osim možda za one x koji pripadaju nekom skupu prve vrste.

Teorija točkastih skupova nastavila se razvijati velikom brzinom i do kraja 19. stoljeća se sve jasnije počelo nazirati njezino razdvajanje na dva velika područja: topologiju i teoriju mjere. Cantor je nastavio objavljivati radove iz tog područja, a u njima pokazuje sve veću tendenciju postavljanja pitanja koja nemaju nužno direktnu primjenu. Promatranjem točkastih skupova kao zasebne matematičke discipline, koja nije samo alat, Cantor će doprinijeti stvaranju velikog dijela onoga što danas nazivamo naivnom teorijom skupova.

A.1.1. Cantorova teorija skupova

Dedekind i Cantor upoznali su se 1872. godine i od tada, uz povremene pauze, traje korespondencija i razmjena ideja između njih. Bez obzira na relativno dobro dokumentiranu razmjenu pisama,[5] ipak je teško procijeniti koliki je zapravo bio Dedekindov utjecaj na Cantora. Uspoređujući Cantorove ranije i kasnije radove, možemo zaključiti kako je Dedekindov sistematski pristup s vremenom oblikovao Cantorov način razmišljanja i pristupa problemima, ali nije jasno u kojoj mjeri je pojam skupa preuzet od Dedekinda, a u kojoj mjeri je on plod Cantorovog samostalnog promišljanja pod utjecajem Riemannovih ideja.

Neprebrojivost kontinuuma

Događaji koji prethode dokazu neprebrojivosti kontinuuma[6] započinju Cantorovim pismom Dedekindu 29. 11. 1873. godine. U tom pismu Cantor postavlja pitanje je li moguće bijektivno

[5]Prepiska Cantora i Dedekinda o problemu neprebrojivosti kontinuuma je posvjedočena Cantorovim pismima i kasnijim Dedekindovim zapisima. Originalna Dedekindova pisma su izgubljena u Drugom svjetskom ratu. Njihova korespondencija o navedenom i ostalim problemima može se pronaći u [18, str. 843–878].

[6]Kontinuum je drugi naziv za kolekciju realnih brojeva.

preslikati kolekciju (*Inbegriff*) prirodnih brojeva u kolekciju realnih brojeva i moli Dedekinda za pomoć. Cantor smatra da je nemoguće pronaći traženu bijekciju, ali za to nije pronašao odgovarajući dokaz. Dedekind u svom odgovoru navodi da Cantorovo pitanje nije za njega od prevelikog praktičnog interesa, te da ne zna kako riješiti Cantorov problem. Međutim, Dedekind je iskazao i dokazao postojanje bijekcije između kolekcije prirodnih brojeva i kolekcije algebarskih brojeva. U pismu 2. 12. 1873. Cantor se slaže sa Dedekindovim stavom da problem prebrojivosti kontinuuma nije od prevelikog praktičnog interesa, ali navodi da bi negativni odgovor omogućio alternativni dokaz Liouvilleovog teorema o postojanju transcendentnih brojeva. Vrlo brzo, 7. 12. 1873. Cantor ponovno piše Dedekindu da je uspio riješiti problem; nije moguće bijektivno preslikati kolekciju prirodnih u kolekciju realnih brojeva. Cantor navedeni problem nije riješio pomoću dijagonalnog argumenta (prvi puta ga je koristio 1891. godine), već primjenom Bolzano-Weierstrassovog teorema srednje vrijednosti. Dedekind na to pismo odgovara dan kasnije i u njemu čestita Cantoru na uspjehu te pojednostavljuje Cantorov dokaz. Cantor šalje Dedekindu pismo 9. 12. 1873. u kojemu navodi da je pronašao pojednostavljeni dokaz svoje tvrdnje, no ne spominje Dedekindovo pojednostavljenje. Nije jasno je li to zato što je Dedekindovo pismo stiglo prekasno ili zato što ga je Cantor jednostavno ignorirao. Po svemu sudeći, Cantor je Dedekindovo pojednostavljenje iskoristio, ali namjerno ga nije spomenuo. Argument u prilog tome nalazi se u činjenici da je Cantor poslao Dedekindu pismo 10. 12. u kojem spominje pismo iz 8. 12., ali ne spominje Dedekindovu pomoć.

Cantor 25. 12. 1873. obavještava Dedekinda da je napisao i poslao na recenziju članak pod nazivom *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraische Zahlen*,[7] koji je objavljen iduće godine. Članak je podijeljen u dva dijela. U prvom dijelu je dokazano neodređeno svojstvo koje se spominje u naslovu (algebarskih brojeva ima prebrojivo mnogo), a u drugom dijelu je prezentiran dokaz neprebrojivosti skupa realnih brojeva i primjena tog rezultata (zajedno s onim iz prvog dijela) na dokaz postojanja transcendentnih brojeva. Odmah upada u oči da je glavni Cantorov rezultat zapravo Dedekindov, uz Cantorovo ograničenje na realne algebarske brojeve. Dedekind je otvoreno bio protiv takvog ograničenja i savjetovao je Cantoru da ukloni pridjev „realni” iz naslova, ali bezuspješno. Samo po sebi nije problematično Cantorovo korištenje tuđih rezultata, ali on nigdje ne navodi Dedekinda kao originalnog autora. Sigurno Cantor nije posjedovao dokaz o prebrojivosti algebarskih brojeva ranije, a malo je vjerojatno da je navedenu tvrdnju uopće razmatrao ili ju postavio kao hipotezu. Istina je da se

[7] Hrv. O jednom svojstvu kolekcije svih realnih algebarskih brojeva.

Cantorov dokaz u članku donekle razlikuje od Dedekindovog i možda je upravo zato Cantor mislio da nije dužan citirati originalnog autora, ali te razlike su minimalne i nipošto ga ne odrješuju krivnje. U drugom dijelu Cantor je iskoristio još neke Dedekindove sugestije, pri čemu ga ni na tom mjestu nije spomenuo. Nije potrebno posebno naglasiti da su navedeni Cantorovi postupci uvelike narušili njihov odnos.

Bez obzira kakvi bili Cantorovi postupci, članak iz 1874. možemo shvatiti kao važan povijesni moment. Njime je u matematiku uvedeno jedno sasvim novo, specifično pitanje, a to je za posljedicu imalo otvaranje mnogih srodnih pitanja. Postoje li kolekcije koje su brojnije od kolekcija prirodnih i realnih brojeva? Koliko u razlici brojnosti ta dva skupa doprinose iracionalni brojevi? I možda najvažnije pitanje: postoje li kolekcije veličine između veličina tih dviju kolekcija? Cantor je jedini imao dovoljno hrabrosti i dalekovidnosti postavljati navedena i slična pitanja.

Jednakobrojnost realnog pravca i prostora proizvoljne dimenzije

Već 5. 1. 1874. Cantor u pismu Dedekindu postavlja novo pitanje: „Može li se ploha (recimo kvadrat), korelirati 1-1 s krivuljom (recimo ravnom linijom s uključenim rubovima) tako da svakoj točki plohe korespondira točka na krivulji, i obrnuto, da svakoj točki na krivulji korespondira točka na plohi?” Ovdje se još jednom ogleda Cantorova sposobnost postavljanja naizgled trivijalnih, ali dubokih pitanja. Cantor taj problem smatra vrlo teškim. Na prvu se čini da je odgovor trivijalno negativan te da dokaz uopće nije potreban. Dedekind na ovo i nekoliko idućih pisama nije odgovorio iz razloga navedenih u prethodnoj točki.

Odnos Cantora i Dedekinda ponovno se uspostavlja razmjenom nekoliko pisama tek u svibnju 1877. godine. U pismu 20. 6. 1877. godine Cantor moli Dedekinda da prouči njegov dokaz jednakobrojnosti kolekcija $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ te da iznese svoje mišljenje o tome je li dokaz dovoljno „aritmetički rigorozan”. U tom pismu Cantor, kako bi izrazio broj elemenata skupova, prvi puta koristi pojam „moć”[8] skupa. Dedekind u dokazu nije pronašao nijednu bitnu grešku, osim problema nejedinstvenosti decimalnog zapisa. U pismu 25. 6. 1877. Cantor prezentira Dedekindu drugačiji dokaz, koji izbjegava prijašnji Dedekindov prigovor te njime „uvjerava [Dedekinda] u točnost [svog] teorema” [18, str. 856].

Cantor je dokaz jednakobrojnosti kolekcija objavio u članku 1878. godine pod naslovom *Ein*

[8]Njem. *Mächtigkeit*. Danas prevodimo kao kardinalitet ili potencija (skupa)

Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre[9]. Kao najvažniji pojam u članku pojavljuje se već spomenuti pojam moći skupa (mnogostrukosti), pomoću kojeg je Cantor iskazao svoj glavni rezultat: „dvije neprekidne mnogostrukosti, jedna dimenzije n, a druga dimenzije m, imaju istu moć." Cantor u članku daje primjere različitih skupova i njihovih moći. Moći konačnih skupova su brojevi elemenata tih skupova u uobičajenom smislu. Kao najmanju beskonačnu moć Cantor navodi moć skupa prirodnih brojeva te navodi neke prebrojive skupove različite od skupa prirodnih brojeva, primjerice skup algebarskih brojeva. Glavni rezultat dobiva dokazivanjem nekoliko povezanih teorema. Zanemarivši neke strogo tehničke teoreme u tom nizu, posebno se ističu njih tri. Navodimo ih u modernoj terminologiji, a izvorni iskazi mogu se pronaći u [8] i [13].

Teorem A. Segment $[0,1]$ je ekvipotentan s $[0,1]^n$.

Teorem C. Segment $[0,1] \cap \mathbb{P}$ je ekvipotentan $[0,1]^n \cap \mathbb{P}^n$.

Teorem D. Segment $[0,1] \cap \mathbb{P}$ je ekvipotentan s $[0,1]$.

Simbolom $\mathbb{P}$ označava se kolekcija iracionalnih brojeva. Sada iz teorema D i C slijedi tvrdnja teorema A. Cantor članak završava neformalnim iskazom hipoteze kontinuuma i uvjerenjem u njezinu istinitost: „čini se vjerojatnim teorem da je broj klasa linearnih mnogostrukosti konačan, točno jednak dva", pri čemu su linearne mnogostrukosti beskonačni podskupovi od $\mathbb{R}$. Dokaz hipoteze kontinuuma postaje glavna preokupacija u njegovom daljnjem radu.

[9] Hrv. Doprinos teoriji mnogostrukosti.

A.2. Naivna teorija skupova (1879.–1900.)

Kao početak naivne teorije skupova gotovo jednoglasno se uzima godina 1874. u kojoj Cantor izdaje rad u kojem dokazuje neprebrojivost skupa realnih brojeva.[10] Nije u potpunosti jasno zašto je baš taj trenutak izabran kao početak novog razdoblja jer Dedekind do tada već godinama koristi skupovnu terminologiju, a čak ju koristi i Cantor u svojim radovima o točkastim skupovima nekoliko godina ranije. Godina 1874. nije nipošto toliko značajna da bi bila referentna točka za „prije i poslije”.

Postoji nekoliko drugih mogućih godina koje bi se mogle uzeti kao početak naivne teorije skupova, no svaka od njih je suočena s određenim poteškoćama. Prva moguća godina je 1854. u kojoj je objavljena Riemannova habilitacijska teza. Problem s tom godinom je što, kao što smo već spomenuli, javnost nije bila pretjerano upoznata s Riemannovim idejama koje se nalaze u tezi te ona sasvim sigurno nije mogla izvršiti odgovarajući utjecaj na matematičku javnost. Nadalje, sama ideja mnogostrukosti, odnosno skupa, nije primijenjena na nekom novom i inovativnom problemu, već je poslužila za razvoj postojećih matematičkih disciplina. Druga godina koja dolazi u obzir je mnogo bolji izbor od prethodne, a to je 1872. godina u kojoj Cantor i Dedekind objavljuju radove u kojima definiraju realne brojeve. Izbor te godine je problematičan jer je vrlo upitno koristi li uopće Cantor skupove za definiciju realnih brojeva. Treća mogućnost je 1879. godina u kojoj Cantor počinje objavljivati svoju poznatu seriju od šest članaka (o kojima će kasnije biti više riječi). Smatramo da je upravo ta godina najbolja kao odrednica početka naivne teorije skupova. Ne samo da Cantor u tim radovima uvelike koristi skupovnu terminologiju, već teoriju skupova promatra kao zasebnu matematičku disciplinu. U tom trenutku je Cantor napredniji od Dedekinda, koji u potpunosti prihvaća skupove kao samostalne matematičke objekte tek 1888. godine.

A.2.1. Cantorova serija članaka

Od 1879. do 1884. godine Cantor izdaje seriju od šest članaka pod zajedničkim nazivom *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*[11]. Ta serija članaka vrlo je važna ne samo zbog toga što Cantor u njima izlaže osnove transfinitne teorije skupova, već i zato što teoriju skupova promatra kao samostalnu matematičku disciplinu. Najvažniji od šest članaka je peti članak iz

[10] Cantorovi izvorni radovi mogu se pronaći u [8], a neki od njih su prevedeni na engleski jezik i nalaze se u [18].

[11] Hrv. O beskonačnim linearnim točkastim mnogostrukostima.

1883. godine, koji je tiskan pod zasebnim nazivom *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.*[12]

Prvi članak u seriji objavljen je 1879. godine i ponajviše je služio kao uvod u prijašnji Cantorov rad. U njemu Cantor opisuje svojstva deriviranih skupova za koje smatra da mogu ispravno i jednostavno okarakterizirati kontinuum, što obećaje dokazati. Cantor se u dokazu koristi dvjema klasifikacijama skupova: s obzirom na njihove derivirane skupove i s obzirom na njihovu moć. Posebno definira slučaj kada dva skupa imaju istu moć te naglašava dvije vrste beskonačnih skupova: prebrojive skupove (skupovi moći jednake moći skupa prirodnih brojeva) i neprebrojive skupove (skupovi moći jednake moći skupa realnih brojeva). Osim ponešto drugačije terminologije, Cantorov prvi članak ne donosi mnogo novih rezultata.

Drugi članak objavljen 1880. godine nastavlja ono što je započeto prvim. Radi lakšeg proučavanja deriviranih skupova, Cantor uvodi osnovne skupovne pojmove poput unije, presjeka i inkluzije. Ta terminologija slaže se s Dedekindovom iz njegove monografije o idealima iz 1871. godine. Ono što je inovativno u ovom članku je Cantorovo korištenje unije beskonačno mnogo skupova. Tako on za neki skup P definira njegov derivirani skup beskonačnog reda kao $P^\infty := \bigcup_n P^{(n)}$. Simbol ∞ ovdje igra samo ulogu oznake, bez konkretnog sadržaja. Cantor tu ne staje, već dalje promatra derivirane skupove od P^∞ pa tako dobiva $P^{\infty+1}$, $P^{\infty+2}$ i tako dalje. Zapravo, Cantor već na ovom mjestu ulazi u svijet transfinitnosti.

Treći članak objavljen je 1882. godine i u njemu Cantor prikazuje prijašnje rezultate (derivirani skupovi, moć, svugdje gusti skupovi, ...), ali u višim prostornim dimenzijama. Glavni cilj je proširiti pojam moći skupa na proizvoljne „dobro definirane" kolekcije. Međutim, Cantor ne može adekvatno definirati što znači dobro definirana kolekcija. Određivanje moći skupa također nosi određene, možda i veće, poteškoće. Ipak, Cantor pojam moći smatra svojstvenim svakom skupu. Štoviše, smatra ga objedinjujućim faktorom teorije skupova. Iz toga možemo zaključiti kako Cantor nije imao na umu samo korisne primjene teorije skupova, već je polako postajala jasnija ideja o teoriji skupova kao osnovi cjelokupne matematike. Cantor zatim dokazuje da je svaki beskonačni podskup prebrojivog skupa ponovno prebrojiv i tako dokazuje da je prebrojivost najmanja beskonačna moć. Također navodi rezultat da je konačna ili prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiva. Nakon toga izlaže jedan vrlo važan teorem: „Neka je u n-dimenzionalnom neprekidnom prostoru definirana beskonačna kolekcija n-dimenzionalnih, neprekidnih poddomena takva da za svake dvije poddomene vrijedi da nemaju zajedničkih ele-

[12]Hrv. Osnove opće teorije mnogostrukosti.

menata, osim možda na rubovima. Tada je ta kolekcija prebrojiva." Iz tog općenitog teorema Cantor izvlači posljedice za prostor u dvije i tri dimenzije te po prvi puta nastoji svoje rezultate primijeniti izvan područja matematike. Dolazi do zaključka da je kontinuiranost prostora samo mentalna i intuitivna konstrukcija te da zbog toga matematiku treba zasnovati na strogim aritmetičkim temeljima.

Četvrti članak objavljen je 1883. godine i ponajviše je posvećen primjeni prijašnjih rezultata na funkcionalnu analizu. Cantor uvodi nove, jasnije oznake za uniju i presjek te uvodi izolirane skupove kao najvažniji novi pojam. Pomoću njih nastoji još detaljnije odrediti odnos između diskretnih (prebrojivih) skupova i kontinuuma (neprebrojivih skupova). Pokazuje da je svaki izolirani skup prebrojiv, iz čega jednostavno dobiva rezultat da ako je derivirani skup P' skupa P prebrojiv, onda je i P prebrojiv. Cantor taj rezultat koristi kako bi dokazao još nekoliko tvrdnji o moćima određenih skupova. Najvažnije primjene odnose se na analizu te su upotpunjavanja rezultata du Bois Reymonda i Harnacka.

Cantorov peti članak izdan je 1883. godine pod zasebnim naslovom *Grundlagen einer allgemeine Mannigfaltigkeitslehre*. Taj članak, skraćenog naziva Grundlagen, predstavlja najvažniji rani doprinos teoriji skupova. Glavna ideja rada je uvođenje transfinitnih (ordinalnih) brojeva. U prvoj polovici članka Cantor daje opći prikaz rezultata koje će u drugoj polovici dokazati. Uvodi potrebne definicije i izlaže filozofsko-matematičke argumente u korist transfinitnih brojeva. Na samom početku posebno naglašava kako je za njega napredak u teoriji mnogostrukosti gotovo nemoguć bez uvođenja novih, transfinitnih brojeva. Za potrebe jasnijeg određenja novih brojeva, Cantor razlaže beskonačnost na dva dijela: pravu (aktualnu) beskonačnost i nepravu (potencijalnu) beskonačnost. Novi brojevi pripadaju sferi aktualne beskonačnosti, a većina dotadašnje matematičke tradicije u sferi je potencijalne beskonačnosti. Ulaskom u svijet aktualne beskonačnosti Cantor je bio svjestan problema njezinog uobičajenog shvaćanja kao nečega nedostižnog, apsolutnog. Međutim, novi brojevi nisu apsolutno beskonačni, već se nalaze samo „preko" konačnih brojeva. Slična terminologija se primjenjuje i na aktualno beskonačne skupove; ti skupovi su transfinitni, nalaze se „preko" konačnih skupova, ali nisu apsolutno beskonačni. Na taj način Cantor ne dovodi u pitanje uobičajeni filozofski stav o nemogućnosti spoznaje Apsoluta, a omogućeno mu je govoriti o aktualno beskonačnim brojevima. Takvo poimanje beskonačnosti kasnije će poslužiti Cantoru (i njegovim nasljednicima) da se vrlo lako obračuna s paradoksima. Paradoksi se pojavljuju samo onda kada se apsolutno beskonačni skupovi tretiraju kao transfinitni, odnosno kada se pokuša opisati Apsolut.

U nastavku Cantor ukratko skicira način generiranja novih brojeva pomoću tri nova principa: *prvog principa generiranja*, *drugog principa generiranja* i *principa limitacije*. Principima generiranja se dobivaju novi brojevi, a principom limitacije dobivamo „prirodnu segmentaciju u apsolutnom beskonačnom nizu cijelih brojeva. Te segmente nazivamo brojevne klase." Prvim principom generiranja dobivaju se novi brojevi uvećavanjem za jedan. Drugim principom generiranja dobivamo tzv. granične ordinalne brojeve: iz dane kolekcije brojeva definiramo najmanji broj veći od svih prethodnih. Primjeri takvih brojeva su ω (najmanji broj veći od svih konačnih), $\omega \cdot 2$, i tako dalje. Principom limitacije iz neke kolekcije dobivamo novi broj najmanje moći veće od moći svih brojeva iz dane kolekcije. Princip limitacije se koristi za klasifikaciju transfinitnih brojeva u *brojevne klase*. *Prva brojevna klasa (I)* je kolekcija svih konačnih cijelih brojeva. Poslije prve brojevne klase slijedi *druga brojevna klasa (II)* koja sadrži sve prebrojive ordinale (ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ...), a nakon nje slijedi *treća brojevna klasa*, pa *četvrta brojevna klasa* i tako dalje. Cantor smatra da uvođenje transfinitnih brojeva može pomoći detaljnijem i preciznijem određenju pojma moći skupa. Uvodi novi pojam *rednog broja* dobro uređenog skupa[13] te pomoću tog pojma objašnjava možda najvažniju razliku između konačnih i beskonačnih skupova. Kod konačnih skupova se njihov redni broj i njihova moć podudaraju, dok to nije slučaj kod beskonačnih skupova; skupovi iste moći mogu imati različite redne brojeve. Iskazuje tvrdnju da je najmanja moć beskonačnih skupova jednaka moći prve brojevne klase. Nadalje, druga brojevna klasa ima moć neposredno veću od moći prve brojevne klase. U modernoj terminologiji, to znači da je moć prve brojevne klase $\aleph_0$, moć druge brojevne klase je $\aleph_1$, moć treće brojevne klase je $\aleph_2$ i tako dalje. Uočavanjem veze između moći i brojevnih klasa Cantor je napravio veliki napredak u proučavanju hipoteze kontinuuma. Sada se ona može iskazati na sljedeći način: kontinuum je ekvipotentan s drugom brojevnom klasom.

Nadalje, Cantor karakterizira kontinuum kao savršeni povezani skup i dokazuje prethodno spomenute rezultate o brojevnim klasama. Unatoč tome, nije uspio dokazati hipotezu kontinuuma. Zbog toga je iduće godine (1884.) objavio šesti, posljednji članak u seriji, koji se može smatrati nastavkom *Grundlagena*. U njemu podrobnije razmatra svojstva savršenih skupova i njihovu moguću primjenu. Detaljnije razrađuje korištenje transfinitnih brojeva pri proučavanju točkastih skupova pri čemu ponešto mijenja dotadašnju terminologiju; uniju skupova promatra za proizvoljne skupove, a ne samo za disjunktne i uvodi pojam gustog skupa u sebi. Pomoću

[13] Cantor pretpostavlja da se svaki skup može dobro urediti: „Koncept dobre uređenosti je fundamentalan za cijelu teoriju mnogostrukosti. ... uvijek je moguće svaki dobro definirani skup pretvoriti u dobro uređeni skup." [9]

pojma gustog skupa prezentira *teoriju sadržaja*; svakom skupu je moguće pridružiti odgovarajući broj koji reprezentira njegov *volumen* ili *sadržaj*. Drugim riječima, ulazi u područje koje je danas poznato kao *teorija mjere*. Napominje da teorija sadržaja ima dalekosežne i duboke posljedice, no nije ju na ovom mjestu, a ni kasnije, detaljnije razrađivao. Na kraju, dokazao je da su svi savršeni skupovi međusobno ekvipotentni te se time još više približio rješavanju hipoteze kontinuuma. Drugim riječima, za dokaz hipoteze kontinuuma dovoljno je dokazati da neki savršeni skup ima moć druge brojevne klase. Nažalost, nije uspio dokazati željeni rezultat o savršenim skupovima, a posljedično ni hipotezu kontinuuma.

Prihvaćanje Cantorovih ideja

Cantorovi rezultati iz serije članaka primljeni su od strane matematičke zajednice više pozitivno, nego negativno. Međutim, pogodile su ga reakcije određenih osoba koje je smatrao vrlo važnima za ocjenu svoga rada. Weierstrass i Dedekind nisu pokazivali veliku zainteresiranost, Schwarz ga je kritizirao, a do otvorenog sukoba došlo je s Kroneckerom. Nadalje, Mittag-Leffler, urednik časopisa u kojem je Cantor planirao objaviti idući članak (1885. godine), s kojim je Cantor imao prijateljski odnos, savjetovao ga je na suzdržanost i izbjegavanje preuranjenog objavljivanja članka. Cantor je taj savjet shvatio kao direktno odbijanje, što je drastično pogoršalo odnos s Mittag-Lefflerom. Kao posljedicu svega, osjećao se odbačenim od njemačke matematičke zajednice i nekoliko je godina izbjegavao objavljivati radove u matematičkim časopisima. U tom periodu nije prestao objavljivati radove filozofsko-teološke tematike, no ti radovi nemaju većeg značaja. Matematičkom objavljivanju vratio se tek 1892. godine.

A.2.2. Dedekindovo utemeljenje aritmetike

Dedekindov program utemeljenja aritmetike možemo pratiti najranije od 1858. godine. To nije program u strogom smislu jer Dedekind ni u jednom trenutku ne navodi njegove smjernice i glavne ciljeve, ali moguće ga je promatrati i rekonstruirati retrospektivno. Nakon članka iz 1872. godine, u kojem je definirao realne brojeve, Dedekind počinje iste godine pisati skicu iz koje će 1888. godine nastati njegovo najpoznatije i najvažnije djelo: *Was sind und was sollen die Zahlen?*[14] U njemu Dedekind izlaže revolucionaran pristup temeljima aritmetike. Do tada je bilo uvriježeno promatrati prirodne brojeve kao primitivne, već postojeće entitete, te pomoću njih definirati ostale brojeve. Međutim, Dedekind ide korak dalje i ne postulira unaprijed pos-

[14]Hrv. Što su i što bi trebali biti brojevi? [14]

tojanje prirodnih brojeva, već ih nastoji definirati koristeći kao primitivne pojmove skupove i preslikavanja. Te pojmove je smatrao čisto logičkima, pa njegov program možemo u određenom smislu smatrati logicističkim.[15] Dedekindov logicizam razlikuje se od Fregeovog, no ta dva logicizma su u svojoj srži zapravo jednaka. Za Dedekinda skupovi nastaju apstrahiranjem ideje grupiranja, a Frege se oslanja na koncepte i njihove ekstenzije. Drugim riječima, Dedekindovi skupovi proizlaze iz „stvarnog svijeta", a Fregeove klase iz idealnog, platonističkog. Nadalje, Dedekind koristi ekstenzionalni pojam preslikavanja kao logički, a Frege inzistira na intencionalnom obliku (relaciji). Obojica zapravo koriste ekvivalentne pojmove, a njihovi pristupi se više razlikuju u terminologiji, a ne toliko u sadržaju.

Glavne Dedekindove motivacijske ideje su da brojevi ne ovise o intuiciji, prostoru i vremenu, te da su kreacija ljudskog uma. U navedenom članku, u poglavlju §1 uvodi pojam sistema (skupa) koji nastaje grupiranjem određenih objekata mišljenja, a objekte mišljenja naziva stvarima.[16] Sistem je u potpunosti određen svojim elementima i jednakost dvaju sistema je definirana pomoću ekstenzionalnosti; ako i samo ako imaju iste elemente. U nastavku definira podskup, strogi podskup, uniju i presjek te dokazuje teoreme koji govore o odnosu uvedenih pojmova. U §2 i §3 uvodi općeniti pojam preslikavanja, te pojmove injektivnog i bijektivnog preslikavanja. Također napominje kako se pomoću bijektivnih preslikavanja može sve sisteme razdvojiti na klase (ekvivalencije) s određenim reprezentantima. Korisno je napomenuti da, iako je Dedekind preslikavanje smatrao logičkim pojmom, ipak ga je definirao, što donekle oslabljuje njegovu logicističku poziciju.

U §4 uvodi originalnu i inovativnu ideju lanca[17]: „neka je zadano preslikavanje $\phi\colon S \to S$ i neka je $K \subseteq S$. Kažemo da je K lanac ako vrijedi $\phi[K] \subseteq K$". Definira i lanac skupa $A \subseteq S$ kao presjek svih lanaca $K \subseteq S$ koji sadrže A i označava ga s A_0. Drugim riječima, lanac skupa A je najmanji lanac koji sadrži A. Pojam lanca Dedekindu je poslužio za formuliranje teorema o potpunoj indukciji, koji je formulirao za općeniti lanac. U §5 uvodi poznatu definiciju beskonačnih sistema te pokušava dokazati da postoji beskonačni sistem, odnosno da je totalitet svih stvari koje mogu biti objekti mišljenja beskonačan. Dokaz tog teorema je ukratko sljedeći: promatramo moj svijet misli i svakoj misli s pridružujemo misao „s je objekt mog mišljenja". Tada imamo bijektivno preslikavanje, a onda iz toga i definicije beskonačnosti slijedi da je

[15]Logicizam je filozofski pogled koji smatra da su sve matematičke istine zapravo logičke istine. Postoje razne inačice logicizma, a prvu je iznio Gottlob Frege [24].

[16]Njem. *Ding*.

[17]Njem. *Kette*.

svijet mojih misli beskonačan sistem. Iz priloženog se vidi da je taj dokaz matematički vrlo slab i njime se u teoriju uvodi nepotrebni i opasni psihologizam.[18] U §6 Dedekind definira *jednostavno beskonačne sisteme*. Sistem N je jednostavno beskonačan ako je N lanac s obzirom na neku injekciju ϕ i najmanji je lanac koji sadrži neki element izvan $\phi[N]$. Zatim navodi četiri uvjeta koja zadovoljavaju svi jednostavno beskonačni sistemi, a to su zapravo aksiomi nepravedno nazvani po Peanu:

α. $\phi[N] \subseteq N$;

β. $N = 1_0$

γ. 1 nije u $\phi[N]$.

δ. ϕ je injekcija.

Prirodne brojeve definira kao elemente nekog jednostavno beskonačnog sistema, pri čemu su zanemarena sva posebna svojstva objekata sistema i u obzir se uzimaju samo njihovi međusobni odnosi i redoslijed. Kraće, prirodni brojevi su apstraktni elementi proizvoljnog jednostavno beskonačnog sistema.

Od §7 do §13 Dedekind definira osnovne pojmove na prirodnim brojevima poput nejednakosti, zbrajanja, množenja i potenciranja. Vrlo važno je ovdje istaknuti dvije tvrdnje. U §9 iskazuje teorem o definiciji pomoću indukcije (rekurzije). Taj teorem je iskazan isključivo za skup prirodnih brojeva, a ključno svojstvo je da prirodni brojevi imaju najmanji element. Dedekind je zapravo ovdje bio u mogućnosti definirati transfinitnu rekurziju da je promatrao općenite dobro uređene skupove. U §10 opravdava definiciju prirodnih brojeva tako što dokazuje da su svi jednostavno beskonačni sistemi međusobno ekvivalentni. Dedekindovo cijelo izlaganje bazira se na radoslijedu i rasporedu prirodnih brojeva, odnosno na njihovom ordinalnom karakteru. U posljednjem dijelu, §14, definira pojam kardinalnog broja konačnog sistema i za kraj demonstrira da se pojmovi kardinalnog i ordinalnog broja podudaraju na konačnim sistemima.

Dedekindova teorija izvršila je veliki utjecaj na tadašnju, a pogotovo na noviju generaciju matematičara. Općenito se može zaključiti kako je teorija bila pozitivno prihvaćena od strane

[18]Psihologizam u matematici je filozofski pogled po kojemu su sve logičke i matematičke istine posljedice psiholoških procesa. Psihologizam u matematici je opasan jer objektivnu narav matematike zamjenjuje čisto subjektivnim doživljajima, a da pri tome ne odgovara na pitanje kako se dolazi do matematičkih istina. Jedan od prvih napada na psihologizam može se pronaći kod Fregea [25].

znanstvene zajednice. Peanu je poslužila kao potvrda njegovih sličnih rezultata, a Zermelo je inspiraciju za nekoliko svojih aksioma dobio upravo iz nje. Naime, Zermelo je aksiom beskonačnosti nazivao Dedekindovim aksiomom. Možda najpozitivnija ocjena došla je od strane Fregea koji Dedekindovu teoriju naziva „najpotpunijim radom o temeljima matematike”.

Ipak, ona nije nipošto bez mana. Dedekindovo iznošenje određenih (filozofskih) ideja nedovoljno je dobro razrađeno, ne naglašava skup kao ključno sredstvo pomoću kojeg razvija cijelu teoriju, ne obrazlaže posebno jasno logicističku poziciju, te svjesno izostavlja neke važne rezultate koji se nalaze u prijašnjim skicama. Primjerice, Cantor-Bernsteinov teorem i činjenicu da se svaki skup može zadati konceptom (aksiom komprehenzije). Uz to, djelo sadrži i određene tehničke pogreške koje posebno kritizira Frege; nerazlikovanje između pojmova „biti element” i podskupa, nejasna razlika između jednočlanog skupa i njegovog elementa, te izostanak definicije praznog skupa.

Na kraju možemo zaključiti kako je Dedekindov doprinos temeljima matematike nenadmašan i usporediv jedino s onim Fregea. Nažalost, Dedekind je ostao u sjeni drugih matematičara, napose Cantora. Hilbert iznosi hrabru i kontroverznu tvrdnju da je upravo on među prvima iz novije generacije matematičara „stao na Cantorovu stranu” [18, str. 943–946] te ga tako uzdignuo iznad Dedekinda. Vrijedilo bi dublje istražiti koliki je zapravo Hilbertov utjecaj u „zaboravljanju Dedekinda”, a koliko je zapravo sve splet (nesretnih) povijesnih okolnosti.

A.2.3. Cantorov povratak i ostali doprinosi

Prvi Cantorov matematički članak nakon serije šest članaka objavljen je 1892. godine pod imenom *Über eine elementare Frage der Mannigfalitgkeitslehre*,[19] a prezentiran je godinu ranije na kongresu Njemačkog matematičkog udruženja. U njemu Cantor ponovno dokazuje neprebrojivost skupa realnih brojeva, ali ovaj put teorem dokazuje pomoću dijagonalnog argumenta. Naglašava kako je dokaz tom metodom ne samo jednostavniji od prijašnjeg, već da ga se može poopćiti za dokaz općenitijih teorema. Koristeći tu metodu, Cantor dokazuje tvrdnju koja će postati poznata kao Cantorov teorem. Ona nije iskazana u današnjem obliku, kao tvrdnja da je kardinalitet skupa X manji od kardinaliteta skupa koji sadrži sve podskupove od X, već u terminima skupa i funkcije. Cantor je s L označio linearni kontinuum (interval $[0,1]$), a s M je označio „totalitet” svih funkcija s L u $\{0,1\}$. Na kraju je dokazao da je kardinalni broj od M veći od kardinalnog broja skupa L.

[19] Hrv. O osnovnom pitanju teorije mnogostrukosti.

Idući rad, pod imenom *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre*[20] objavljen je u dva dijela; prvi dio 1895. godine, a drugi 1897. godine. Cantorova namjera je prikazati svoja dotadašnja otkrića na precizan i sistematičan način. Uvelike je doprinio upoznavanju šireg kruga matematičara sa svojim idejama i možda najvažnije, dodatno je učvrstio teoriju skupova kao samostalnu matematičku disciplinu. Također je vrijedno naglasiti kako prvi puta u naslovu koristi riječ „Mengelehre" koja se u njemačkom jeziku ustalila kao naziv za teoriju skupova.

Prvi dio započinje definicijom pojma skupa i nastavlja raspravom o kardinalnim brojevima. Definira zbroj kardinalnih brojeva dvaju skupova kao kardinalni broj disjunktne unije ta dva skupa, a umnožak kardinalnih brojeva dvaju skupova kao kardinalni broj Kartezijevog produkta ta dva skupa. Definicija umnoška je značajna jer se po prvi puta u teoriji skupova pojavljuje operacija Kartezijevog produkta. Zatim proširuje aritmetiku kardinalnih brojeva definirajući njihovo potenciranje. Važan moment u prikazu teorije je Cantorovo eksplicitno navođenje otvorenih problema koje je potrebno riješiti. Naglašava problem trihotomije za kardinalne brojeve i Cantor-Bernsteinov teorem. U ovom dijelu Cantor po prvi puta za kardinalne brojeve počinje koristi hebrejsko slovo $\aleph$.

U drugom dijelu izlaže teoriju linearno i dobro uređenih skupova, transfinitne brojeve i brojeve druge brojevne klase. Nakon temeljitog prikaza dobro uređenih skupova, dokazuje teorem koji će mu poslužiti kao temelj za dokazivanje usporedivosti ordinalnih brojeva. Ono što nedostaje u drugom dijelu, a čega je Cantor bio svjestan, je dokaz teorema o dobrom uređaju, odnosno da se svaki skup može dobro urediti. Taj teorem je dokazao Zermelo tek 1904. godine, a bez njega je Cantoru teško bilo na zadovoljavajući način prikazati vezu između ordinalnih i kardinalnih brojeva, stoga Cantorov prikaz nije zaokružena cjelina. Taj problem je trebao biti riješen u trećem dijelu, ali se on nažalost nikada nije pojavio u tisku.

Važnost Cantorovog *Baiträgea* je ponajviše u detaljnom prikazivanju rezultata. Teorija je „očišćena" od stranih primjesa, a kompozicija rada je logična i jasna. No nedostataka svakako ima. Nedostaje spomenuti dokaz teorema o dobrom uređaju, ne spominju se rezultati iz prethodnog članka te nedostaje valjana definicija konačnih skupova. Bez obzira na sve to, *Baiträge* je korak naprijed u daljnjem razumijevanju i istraživanju teorije skupova.

[20]Hrv. Doprinosi temeljima transfinitne teorije skupova.

Širenje i prihvaćanje teorije skupova

Period počevši od 1890. godine do otprilike početka dvadesetog stoljeća je period konsolidacije teorije skupova, bez većih originalnih doprinosa. U Italiji Peano izdaje 1895. godine djelo *Formulaire de mathematiques* u kojem pokušava svu dotadašnju matematiku strogo izraziti u jasnom simboličkom jeziku, a glavnu ulogu igra pojam klase (skupa). U Francuskoj Jordan 1893. godine izdaje *Course d'analyse* u kojem koristi skupovnu terminologiju i naglašava njezinu korisnost za razvoj analize. U Njemačkoj Cantor izdaje svoj spomenuti *Baiträge*, a Schoenflies 1900. godine detaljno prikazuje razvoj teorije točkastih skupova. Slično Shoenfliesu radi i Young u Engleskoj.

Međutim, najznačajniji trenutak za teoriju skupova dogodio se 1897. godine na Prvom međunarodnom kongresu matematičara, gdje su Hadamar i Hurwitz posebno naglasili korisnost skupovne terminologije i mogućnosti njezine primjene. Velike zasluge za širenje ideja teorije skupova također ima Hilbert i njegov krug. Hilbert je otvoreno poticao svoje studente da se njome bave, a možda najznačajniji od njih je Ernst Zermelo. Na Drugom međunarodnom kongresu matematičara 1900. godine Hilbert iznosi svoja 23 problema, a na prvo mjesto stavlja problem hipoteze kontinuuma. Važno je također napomenuti da Hilbert svoj aksiomatski sustav u *Grundlagen der Geometrie* uvelike temelji na skupovima.

Fregeov logicistički program, iako temeljen na intencionalnom shvaćanju entiteta (koncepti i relacije), nužno počiva na ekstenziji koncepata, odnosno na klasama (skupovima). Proširenje Booleovog algebarskog pristupa logici od strane Schrödera također počiva na mnogostrukostima (skupovima). Nadalje, Russell je posebno naglasio Cantorov teorem kao glavni rezultat teorije skupova, i prvi ga je u potpunosti iskazao u terminima skupova. Upravo će ga proučavanje Cantorovog teorema dovesti do slavnog Russellovog paradoksa.

A.3. Teorija tipova i aksiomatizacija (1900.–1920.)

Gledano s vremenskim odmakom, Zermelova aksiomatizacija i Russellova teorija tipova izgledaju kao dva pristupa s jednakim ciljem: spriječiti pojavu paradoksa u teoriji skupova. Iako njihove motivacije imaju isto ishodište i obje su uspjele u svom naumu, one se epistemološki uvelike razlikuju. Zermelo svojom aksiomatizacijom želi formalizirati i postaviti na sigurne temelje Cantorovu teoriju skupova, dok Russell teorijom tipova nastoji reformulirati cjelokupnu logiku.

Paradoksi

Kronologija otkrivanja paradoksa vrlo je zamršena i nejasna. Godine 1897. Cantor u pismu Hilbertu izlaže jednu verziju Cantorovog paradoksa, a iste godine Burali-Forti objavljuje članak s argumentacijom koja dovodi do paradoksa poznatog danas pod njegovim imenom. Na Russellov paradoks prvi je naišao Zermelo oko 1900. godine. Problem s ovom kronologijom je što autori u tom trenutku ne uočavaju potencijalni problem. Zato je vrlo teško opravdati zaključak da su oni otkrivači nečega čega nisu bili ni svjesni.

Bez obzira na rečeno, matematička javnost je bila svjesna postojanja paradoksa. Hilbert je javno formulirao Cantorov paradoks 1900. godine, ali nije došlo do velike nelagodnosti. Pogrešno bi bilo shvaćanje da uopće nije bilo nikakve reakcije, ali ona je bila vrlo slaba i većina matematičara se oslanjala na optimističnu ideju kako će se problemi riješiti detaljnijim istraživanjem transfinitnosti.

Prva osoba koja je ukazala na ozbiljne probleme koje uzrokuju paradoksi bio je Bertrand Russell u svome djelu *Principles of mathematics* iz 1903. godine. Russell je paradoks nazvan po njemu otkrio 1901. godine proučavajući Cantorov teorem. Nije na prvu shvatio njegov značaj, već je smatrao da je moguće pronaći grešku u dokazu Cantorovog teorema. Nakon što se uvjerio da je s dokazom Cantorovog teorema sve u redu, 1902. godine šalje pisma Fregeu i Peanu u kojima obrazlaže otkriveni paradoks. Frege odmah uočava da Russellov paradoks za posljedicu ima inkonzistentnost njegovog logičkog sustava. Svi Fregeovi pokušaji otklanjanja paradoksa bili su uzaludni, stoga je morao zaključiti kako je njegov logicistički program nemoguće ostvariti. Od tog trenutka počinju se jasnije shvaćati problemi. Ne samo da je Russellov paradoks onemogućio svođenje matematike na logiku u Fregeovom smislu, već je opće-logički karakter Russellovog paradoksa doveo u pitanje samo poimanje logike.

Reakcija na probleme paradoksa išla je u tri smjera. Prvim smjerom krenuo je Frege koji Russellov paradoks smatra toliko razarajućim za njegov logički sustav da zaključuje da svođenje matematike na logiku nije moguće. Drugim smjerom krenuo je Russell, koji smatra da je logici potrebna sveobuhvatna reformulacija i reogranizacija. Trećim smjerom krenula je Hilbertova škola, zalažući se za odvojeni paralelni razvoj logike i teorije skupova. Drugim riječima, logika bi trebala biti metateorija za razvoj osnova matematike.

A.3.1. Teorija tipova

Prvi prikaz teorije tipova iznio je Russell u *Dodatku B* svog djela *Principles of mathematics*. U njemu posebno naglašava da prezentirana teorija predstavlja samo skicu te da su potrebne određene nadopune i poboljšanja. *Tip* je definiran kao „klasa svih objekata u kojoj svaki element ima jednak doseg značajnosti", a doseg značajnosti nekog objekta kao kolekcija svih onih objekata za koje dana propozicija ima smisla, tj. može se odrediti je li istinita ili neistinita. Drugim riječima, dva objekta imaju jednak tip ako „tvore" iste smislene propozicije. Russell razlikuje četiri vrste objekata u svojoj teoriji: *individualne objekte*, *uređene parove*, *propozicije* i *brojeve*. Svaki od tih objekata tvori najmanji mogući tip, stoga imamo tip individualnih objekata, tip uređenih parova, tip propozicija i tip brojeva. Iz početnih tipova moguće je razviti četiri paralelne hijerarhije tipova. Primjerice, počevši od tipa individualnih objekata, možemo dobiti tip klasa individualnih objekata, zatim tip klasa klasa individualnih objekata itd. Kada se sve to uzme u obzir, očita postaje kompleksnost Russellove rane teorije. Opća hijerarhija tipova nije linearna, već više nalikuje razgranatom stablu. Osim same kompleksnosti, problematična je i definicija tipa kao klase jer time Russell dozvoljava postojanje „totaliteta svih logičkih objekata", odnosno tipa svih tipova, što dovodi do novih paradoksa.

Russell uskoro napušta prvotnu ideju teorije te u radu *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types* iz 1907. godine ponovno analizira tri glavna matematička paradoksa. Postojanje određenih problematičnih klasa dovodi do paradoksa, što znači da je potrebno formulirati teoriju koja na neki način zabranjuje postojanje tih problematičnih klasa. Drugim riječima, potrebno je postaviti određena ograničenja na propozicijske funkcije i uvjete pod kojima one definiraju klasu. U tu svrhu Russell je ponudio tri nove teorije: *zigzag teoriju*, *teoriju ograničenja veličine* i *ne-klasnu teoriju*. U zigzag teoriji propozicijska funkcija definira klasu samo ako je (u nekom smislu) jednostavna, teorija ograničenja veličina ograničava postojanje „prevelikih" klasa, a u ne-klasnoj teoriji suzdržavamo se od tvrdnji da klase postoje. Najviše nade Russell polaže u ne-klasnu teoriju te naknadno dodaje napomenu kako „nema ni malo sumnje da ne-klasna teorija pruža potpuno rješenje svih poteškoća iznesenih u prvom dijelu članka." Russell se teoriji tipova ponovno vraća u radu *Mathematical Logic as based on the Theory of Types* iz 1908. godine, a veliki dio ideja tog rada završit će u *Principiji Mathematici*.

Principia Mathematica

Principia Mathematica rezultat je kolaboracije između Alfreda Northa Whiteheada i Bertranda Russella, objavljena u tri dijela 1910., 1912. i 1913. godine. Glavni cilj *Principie* je razviti logički sistem sa što manjim brojem osnovnih pojmova i aksioma te pomoću njih izvesti cjelokupnu matematiku. Osnovni pojmovi i aksiomi u tom kontekstu moraju biti logičke prirode, stoga je *Principia* zapravo pokušaj svođenja matematike na logiku.

Ontologija *Principie* sastoji se od individualnih objekata i propozicijskih funkcija. Iako je klasama posvećeno cijelo jedno poglavlje, Whitehead i Russell se suzdržavaju od postuliranja njihova postojanja.[21] Teorija tipova direktno je preuzeta iz [51] te je poboljšana verzija teorije prezentirane u Dodatku B [53]. Tipovi se dodjeljuju individualnim objektima i propozicijskim funkcijama. Svaki individualni objekt ima tip 0, a propozicijska funkcija ima tip $n+1$, ako sve njezine slobodne varijable imaju tip n. Tip klase je zapravo tip propozicijske funkcije koja definira tu klasu. Osim ograničenja u vidu tipova, Whitehead i Russell također svrstavaju propozicijske funkcije u redove. Propozicijske funkcije koje sadrže samo individualne objekte (kao varijable) su prvog reda, a reda $n+1$ su ako sadrže barem jednu varijablu reda n i ne sadrže ni jednu varijablu reda većeg od n. Takvu teoriju tipova nazivamo ramificirana teorija tipova[22] kako bismo ju razlikovali od jednostavne teorije tipova u kojoj ne postoji hijerarhija redova. Uvođenje hijerarhije redova nije najspretnije odrađeno i vrlo je nejasna veza s hijerarhijom tipova. Ono što se može zaključiti je da red propozicijske funkcije nikada nije manji od njezinog tipa [28].

Razloge za uvođenje hijerarhije redova Russell je izložio već u [52]. Došao je do zaključka da uzrok svih paradoksa treba tražiti u samoreferenciranju, a samoreferenciranje se može spriječiti uvođenjem *principa poročne cirkularnosti*: „nijedan totalitet ne može sadržavati objekte

[21] Stav je preuzet iz Russellove ne-klasne teorije.

[22] Autor u [41] riječ „ramificirano" prevodi kao „razgranato".

definirane pomoću njega samog." Upravo ramificirana teorija tipova iz *Principie* zadovoljava navedeni princip. Nažalost, vrlo brzo se pokazuje kako ramificirana teorija tipova nije dovoljna za adekvatni razvoj matematike. U njoj nije moguće definirati neke osnovne pojmove matematičke analize (poput supremuma), a nije moguća ni zadovoljavajuća formulacija matematičke indukcije. Zbog toga je uveden *aksiom reducibilnosti*: „svaka propozicijska funkcija ekvivalentna je nekoj predikativnoj propozicijskoj funkciji s istim argumenata." Propozicijska funkcija je predikativna ako je njen red točno za jedan veći od reda vezane varijable najvećeg reda.

Uvođenjem aksioma reducibilnosti autori su gotovo u potpunosti negirali prethodno izgrađenu hijerarhiju redova. Ramificirana teorija tipova s aksiomom reducibilnosti nije ništa drugo nego jednostavna teorija tipova. Kao motivaciju za uvođenje tog aksioma autori navode induktivne razloge, odnosno opravdavaju ga time da se „mnogo propozicija koje su gotovo nesumnjivo istinite mogu iz njega izvesti". Navode da takva motivacija nije ništa drugačija od uvođenja bilo kojeg drugog aksioma. Međutim, takvo opravdanje je teško uskladiti s ciljevima *Principie*. Naime, aksiom reducibilnosti nije nimalo intuitivan, sasvim sigurno nije logički aksiom, a upitna je i njegova istinitost. Iako je pomoću njega moguće uvesti neke nužne nove pojmove, zbog navedenih problema autori odustaju od njega u drugom izdanju *Principie*.

Osim aksioma reducibilnosti, autori još uvode aksiom multiplikativnosti i aksiom beskonačnosti. *Aksiom multiplikativnosti*[23] kaže da je Kartezijev produkt nepraznih klasa neprazan, a *aksiom beskonačnosti* da je skup individualnih objekata beskonačan. Iako su po prirodi ti aksiomi dosta različiti, motivacija za njihovo uvođenje i korištenje je gotovo ista. Oba aksioma koriste se samo kada su potrebni u dokazu nekog teorema i to u obliku kondicionala „ako vrijedi aksiom, onda vrijedi teorem". Drugim riječima, ti aksiomi nisu ništa više od hipoteza. Vrlo je teško opravdati njihovo uvođenje, a još teže objasniti zašto bi trebali biti istiniti. Problematičniji je aksiom beskonačnosti jer je nužan za razvoj aritmetike prirodnih brojeva. U većini slučajeva možemo odbaciti pretpostavku aksioma izbora, a onda posljedično i teoreme koji o njemu ovise, bez teških posljedica, ali isto nije moguće napraviti s aksiomom beskonačnosti.

Zaključak

Principia Mathematica nesumnjivo je jedan od najvažnijih i najambicioznijih radova iz područja matematičke logike. Djelo je značajno utjecalo na mnoge tadašnje i buduće logičare poput

[23]Ekvivalentan je standardnom aksiomu izbora.

Hilberta, Quinea i Tarskog. S pravom se može tvrditi kako je to djelo označilo i oblikovalo matematičko razmišljanje u prvoj polovici 20. stoljeća.

Ipak, kao što smo već spomenuli, djelu ne nedostaje problema. Jedan od njih svakako je suprotnost između motivacije samog projekta i načina njegova izvođenja, posebice kod uvođenja određenih aksioma. Veliki izvor problema također čini nerazlikovanje sintakse i semantike. Kao posljedicu toga, autori tretiraju sve paradokse unutar same teorije. Zato teorija mora nužno zadovoljavati princip poročne cirkularnosti, što znači da je potrebna ramificirana teorija tipova. Budući da ramificirana teorija tipova nije dovoljno jaka za izvođenje cjelokupne matematike, potrebno je „urušavanje" hijerarhije redova, odnosno uvođenje nelogičkog aksioma reducibilnosti. Ukratko, možemo zaključiti da je nerazlikovanje sintakse i semantike jedan od najvećih problema Whitehead-Russellove teorije. Naime, ispravnim razlikovanjem sintakse i semantike u jednostavnoj teoriji tipova može se razviti teorija koja sprječava glavne skupovne paradokse, a općenitiji paradoksi su onemogućeni time što se nalaze izvan jezika same teorije. [49] Na taj način se izbjegava uvođenje principa poročne cirkularnosti, hijerarhije redova, a posljedično i aksioma reducibilnosti. Na kraju ipak ostaje problem aksioma beskonačnosti jer nije moguće razviti adekvatnu teoriju tipova koja opisuje cjelokupnu matematiku bez tog aksioma.

Na kraju, čini se da *Principia* ipak nije uspjela ostvariti glavni Russellov cilj: utemeljiti cjelokupnu matematiku na logičkim principima. To je uspjela samo uvjetno, pod pretpostavkom nelogičkih aksioma (izbora i beskonačnosti) i potpuno neintuitivnog aksioma reducibilnosti.

A.3.2. Zermelova aksiomatizacija

Paralelno s razvojem teorije tipova odvija se razvoj teorije skupova u drugom smjeru. Centralna figura tog razvoja je njemački matematičar Ernst Zermelo. Zermelo svoju znanstvenu karijeru započinje na Sveučilištu u Göttingenu 1897. godine kao teorijski fizičar, a Cantorovu teoriju skupova počinje proučavati tri godine kasnije pod utjecajem Hilberta. Zermelo je već oko 1900. naišao na Russellov paradoks, ali nije ga smatrao problematičnim. Stoga se postavlja pitanje je li Zermelo bio svjestan da je zaista otkrio nešto paradoksalno ili ne. On svoja saznanja nije objavio, već je paradoks ostao skriven u njegovim nastavnim materijalima o teoriji skupova.

Prvi važan Zermelov doprinos teoriji skupova je dokaz teorema o dobrom uređaju, koji će kasnije postati poznat pod njegovim imenom: svaki skup se može dobro urediti. Zermelo je teorem dokazao u radu *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*[24] koristeći aksiom

[24] Hrv. Dokaz da se svaki skup može dobro urediti. Engleski prijevod u [62].

izbora. To je prva eksplicitna pojava tog aksioma u matematici, a njegovo korištenje isprva nije dočekano s odobravanjem. Upravo je aksiom izbora razlog zašto Zermelov dokaz nije pozitivno prihvaćen u matematičkoj zajednici. Nepovjerenje u Cantorovu teoriju skupova, prividno nova pretpostavka te strah od novih paradoksa zasigurno nisu bile povoljne okolnosti za prihvaćanje novih hipoteza. Kako bi opravdao svoj dokaz, Zermelo nastoji zadati odgovarajući aksiomatski sustav pomoću kojeg bi bio u mogućnosti izvesti Cantorovu teoriju skupova i svoj teorem. Svoj sustav želi dodatno osnažiti time da pokaže da se u njemu ne pojavljuju paradoksi, što sigurno nije bila glavna motivacija aksiomatizacije. U početku se Zermelo bavi proučavanjem isključivo Cantorovih radova, no 1905. godine otkriva Dedekindove radove o teoriji skupova. Dva rada u kojima će se uvelike ogledati Dedekindov utjecaj na Zermela su *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wholordnung*[25] i *Untersuchung über die Grundlagen der Mengelehre I*[26], oba objavljena 1908. godine.

Rad *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wholordnung* sastoji se od dva dijela. U prvom dijelu Zermelo prezentira novi dokaz teorema o dobrom uređaju. U novom dokazu ponovno koristi aksiom izbora, no sada s manje pretpostavki na pojmove dobrog uređaja i ordinalnih brojeva te koristi Dedekindov pojam lanca. Tako prezentirani dokaz je nešto općenitiji od prvog, a korištenje Dedekindovih precizno definiranih pojmova za posljedicu ima formalniji dokaz. U drugom dijelu Zermelo se bavi primjedbama iznesenima protiv njegovog prvog dokaza te uspješno odgovara na upućene kritike. Na taj način je pokazao da aksiom izbora nije problematična pretpostavka. Vrlo brzo nakon 1908. godine aksiom izbora je prihvaćen kao razumna pretpostavka u matematici. To je za posljedicu imalo uvid da vrlo veliki dio matematike ovisi o njemu.

Aksiomatski sustav

Zermelo je svoj aksiomatski sustav predstavio u radu *Untersuchung über die Grundlagen der Mengelehre I*. Vrlo jasno na samom početku naglašava da je za njega teorija skupova matematička teorija koja za cilj ima „matematički istražiti osnovne pojmove 'broja', 'uređaja' i 'funkcije'" [60], a onda pomoću njih razviti ostalu matematiku. Očito se Zermelov pristup značajno razlikuje od Russellovog koji teoriju skupova smatra dijelom sveobuhvatne opće logičke teorije. Također se razlikuju u pristupu prema klasnoj komprehenziji. Russell želi očuvati neo-

[25] Hrv. Novi dokaz mogućnosti dobrog uređenja. Engleski prijevod u [61].

[26] Hrv. Istraživanja o osnovama teorije skupova I. Engleski prijevod u [60].

graničenu komprehenziju (svaka klasa je definirana nekim svojstvom) kako god je moguće, a Zermelo smatra da bi ju trebalo primjenjivati ograničeno. Zermelo polazi od postojeće Cantorove teorije skupova, a aksiomima ju nastoji što je moguće bolje opisati i sačuvati, a da pri tome onemogući pojavljivanje paradoksa. Glavni cilj aksiomatizacije je stoga pokazati da se „cjelokupna teorija stvorena od strane Cantora i Dedekinda može svesti na nekoliko definicija i sedam principa, ili aksioma, koji su međusobno nezavisni." [60]

Zermelo kolekciju objekata kojom se bavi teorija skupova naziva „domenom individualnih objekata", a ona se sastoji od skupova i atoma. Zadatak aksioma je na odgovarajući način opisati tu domenu. Navodimo sedam Zermelovih aksioma, uz ponešto moderniziraniju terminologiju:

I. *Aksiom ekstenzionalnosti*: dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente.

II. *Aksiom praznog skupa*: postoji skup koji nema elemenata.

III. *Aksiom separacije*: ako je $\mathscr{F}(x)$ definitna propozicijska funkcija za sve elemente skupa M, onda postoji $M_{\mathscr{F}}$, podskup od M, koji sadrži sve elemente iz M za koje je $\mathscr{F}$ istinito.

IV. *Aksiom partitivnog skupa*: za svaki skup T, postoji skup $\mathscr{U}T$ koji se naziva partitivni skup od T i sadrži sve podskupove od T.

V. *Aksiom unije*: za svaki skup T postoji skup $\mathscr{C}T$ koji se naziva unija od T i sadrži one elemente koji se nalaze u nekom elementu od T.

VI. *Aksiom izbora*: ako je T skup nepraznih skupova koji su međusobno disjunktni, onda njihova unija sadrži barem jedan podskup S_1 koji ima točno jedan zajednički element sa svakim elementom od T.

VII. *Aksiom beskonačnosti*: postoji skup Z koji sadrži prazni skup i ako sadrži a, onda sadrži $a \cup \{a\}$.

U prvom dijelu rada Zermelo pomoću do tada uvedenih aksioma dokazuje odgovarajuće tvrdnje teorije skupova, a u drugom dijelu razvija cijelu teoriju ekvivalencija skupova, odnosno kardinalnost. Zbog nedostatka uređenih parova nije u mogućnosti definirati na zadovoljavajući način pojmove preslikavanja i kardinalnog broja. Od pojma kardinalnog broja u potpunosti odustaje i koristi općenite skupove, ali dokazuje neke važne teoreme poput Schröder-Bernsteinovog i Cantorovog.

Na kraju uvoda Zermelo napominje da ima u planu objaviti nastavak rada u kojem bi pomoću svojih aksioma razvio teoriju dobro uređenih skupova s primjenom na konačne skupove i aritmetiku. Međutim, idući rad objavljen 1909. godine ne spominje dobro uređene skupove, već samo dio o konačnim skupovima i aritmetici.

Prihvaćanje aksiomatizacije

Većina aksioma prihvaćena je od strane matematičke zajednice gotovo odmah kao neproblematična. Potencijalno problematični aksiomi su aksiom izbora, aksiom beskonačnosti i aksiom separacije. Već smo spomenuli da se Zermelo na zadovoljavajući način obračunao s kritikama na račun aksiom izbora. Aksiom beskonačnosti svoje opravdanje nalazi u činjenici da se bez njega ne može razviti zadovoljavajuća aritmetika. Ovdje vrijedi naglasiti da iako je Zermelov aksiom beskonačnosti epistemološki jednak Russelovom, ontološki se oni uvelike razlikuju. Zermelo aksiom beskonačnosti uvodi u strogo matematičkom kontekstu, kao dio formalne matematičke teorije, što je svakako opravdano. S druge strane, Russell aksiom beskonačnosti uvodi u svijet općih logičkih principa, a tamo mu sasvim sigurno nije mjesto. Kod aksioma separacije jedino pitanje je može li ga se koristiti bez bojazni od pojave paradoksa. Zermelo je pokazao da je to istina zbog toga što se pomoću njega „separiraju” objekti iz već postojećih skupova pa se na taj način ne mogu definirati problematični skupovi poput skupa svih skupova, skupa svih ordinalnih brojeva i skupa svih kardinalnih brojeva. U izvjesnom smislu je Zermelova aksiomatizacija slična Russellovoj teoriji ograničenja veličina, no nije joj istovjetna, što se često pogrešno tumači. Skupovni paradoksi se tako onemogućuju separacijom, a ostali paradoksi nekom vrstom rudimentarne distinkcije između sintakse i semantike, koja se pojavljuje u pojmu definitnosti propozicijske funkcije. Definicija definitnosti je pomalo nejasna. Svojstvo je definitno ako „[relacija ‘biti element’], zajedno s aksiomima i univerzalnim zakonima logike, određuju bez proizvoljnosti vrijedi li [svojstvo] ili ne” [60]. Glavna nepreciznost je u tome što Zermelo nije precizirao što su to „univerzalni valjani zakoni logike” koji stoje u pozadini definicije. Ipak, ona se lako može razumjeti bez velikih poteškoća jednostavno kao izraz koji je dobiven pojmovima logike, zajedno s dvomjesnim relacijskim simbolom „biti element”. Kasniji autori će puno preciznije i bolje objasniti Zermelovu definitnost.

Zermelo je teoriji skupova aksiomatizacijom u duhu Hilbertove škole podario snažne, iako skromnije temelje od Whitehead–Russellovih. Već će se od 1920.-ih godina Zermelova aksiomatizacija početi smatrati standardnom, dok u konačnici nije odnijela premoćnu pobjedu

1960.-ih godina (u nešto izmijenjenom obliku). Iako na trenutke izgleda proizvoljna, što na neki način i je istina, aksiomatizacija je rezultat duboke i detaljne analize Cantorovog i Dedekindovog matematičkog djelovanja. Njome je, zajedno s dokazom teorema dobrog uređaja, postignuto jedinstvo teorije skupova.

A.3.3. Ostali doprinosi

Paralelno istraživanjima Whiteheada, Russella i Zermela, nastavila su se istraživanja točkastih i transfinitnih skupova, a sve više pažnje dobivao je aksiom izbora. Dotadašnje rezultate u teoriji točkastih skupova nastojalo se dodatno poopćiti. U tim nastojanjima najdalje je došla *Francuska škola* predvođenja Émileom Borelom, René-Louisom Baireom i Henriem Lebesgueom. Francuska škola ponajviše se bavila teorijom mjere i teorijom integracije, a postavila je temelje *deskriptivnoj teoriji skupova*, koju će kasnije formulirati Nikolaj Luzin.

Istraživanja aksioma izbora najviše su bila usmjerena na proučavanje njegovih (patoloških) posljedica. Primjerice, postojanje *Vitalijevog skupa* (skupa koji nije Lebesgue izmjeriv) ili skupa realnih brojeva bez savršenih podskupova. U prethodnoj točki već smo vidjeli da je aksiom izbora odigrao veliku ulogu u Zermelovom dokazu teorema o dobrom uređaju i aksiomatizaciji.

Proučavanje transfinitnosti u Cantorovom duhu nastavio je Felix Hausdorff. Dodatno je razradio prijašnje Cantorove ideje i doprinio dubljem razumijevanju transfinitnosti. Uveo je nove pojmove poput *kofinalnosti* i *velikih kardinalnih brojeva*, a prvi je formulirao *opću hipotezu kontinuuma*. Njegov veliki doprinos je i u pedagoškom području jer 1914. godine izdaje utjecajni udžbenik *Grundzüge der Mengelehre*[27] u kojem uvodi osnove teorije skupova i topologije. Slično Dedekindu, Hausdorff nastoji matematičke koncepte svesti isključivo na skupove. U isto vrijeme kada i Wiener, definira uređene parove pomoću skupova. Uređeni par skupova x i y je definiran kao $(x,y) = \{\{x,1\},\{y,2\}\}$, gdje su 1 i 2 različiti od x i y. Pomoću uređenih parova je definirao funkcije kao skupove uređenih parova i time po prvi puta sveo koncept funkcije u potpunosti na skupove [19].

[27] Hrv. Osnove teorije skupova.

A.4. POSLIJERATNI PERIOD (1920. - 1930.)

Period poslije Prvog svjetskog rata obilježen je intenzivnom raspravom o osnovama matematike. Pojavljuju se razni sistemi, budući da dva glavna, *Principia* i Zermelova aksiomatika, nisu u potpunosti zadovoljili stroge potrebe za stabilnim temeljima. Međutim, zbog detaljnog i preciznog prikaza, teorija tipova *Principije* prihvaćala se u početku kao sigurniji okvir za formalizaciju matematičkih teorije. Što se tiče pristupa logičkom utemeljenju matematike, javljaju se četiri različita koncepta: logicistički, algebraistički, formalistički i intuicionistički [19].

Logicistički koncept prati tradiciju Fregea i u temeljima je logičke teorije *Principie*. Kao što smo već vidjeli, logicistički koncept ima za cilj formulirati sveobuhvatnu logičku teoriju, unutar koje će biti moguće razviti cjelokupnu matematiku. Logika djeluje u fiksno određenoj domeni,[28] s fiksno zadanim pravilima, a predmet proučavanja su joj najopćenitije moguće istine o toj domeni. Takva logika prirodno postaje ono što bismo danas nazivali logikom višeg reda. Nadalje, strogom formalizacijom nastoji se postići da svaki korak u dokazu bude jasno naznačen te da se istovremeno onemogući pojava „stranih” primjesa u sustav. Posljedica toga je da sve što se može reći, mora se moći reći isključivo unutar te unaprijed zadane domene. Zato nije moguće logički svijet sagledati „izvana”; ne postoji pojam metateorije.

Znatno drugačiji, algebraistički pristup, počinje s Booleom i nadograđen je radovima Schrödera. Za razliku od logicističkog pristupa, u algebraističkom ne postoji ni fiksna domena ni formalna pravila dokazivanja. Glavna metoda proučavanja je određivanje ponašanja neke tvrdnje u raznim domenama. Iako algebraistički pristup ima svoje prednosti, u znatno je slabijoj poziciji od logicističkog. Najvažniji rezultat je Löwenheimov dokaz iz 1915. godine da je svaka ispunjiva formula ispunjiva u prebrojivoj domeni. Nešto kasnije će taj teorem Skolem uobličiti u danas poznatiji Löwenheim–Skolemov teorem. Možda najbolji prikaz razlika između logicista i algebraista izložen je u [32]: za koncept metamatematike logicistima nedostaje „meta” dio, a algebraistima „matematika” dio.

Formalistički pristup zastupa Hilbert i njegova škola, a u duhu te škole Zermelo je predstavio svoju aksiomatizaciju. Formalisti se nalaze negdje na pola puta između logicista i algebraista, premda su puno bliži prvima. Njihov cilj je matematičke teorije opisati odgovarajućim formalnim sistemima. Ti formalni sistemi moraju imati strogo određen jezik, pravila izvoda i kolekcije aksioma. Jedini način opravdanja formalnog sistema može se postići dokazom njihove konzis-

[28]Za Fregea su to objekti i funkcije, a za Russella individualni objekti i propozicijske funkcije.

tentnosti, tj. dokazom da u njima nije moguće dokazati kontradikciju. Time su određene i glavne postavke Hilbertovog programa koji za cilj ima pokazati da su formalni sistemi za aritmetiku, analizu i teoriju skupova konzistentni. Formalisti se razlikuju od logicista po tome što za njih logička teorija ne sadrži samo jedan sveobuhvatni formalni sistem, već mnogo njih, ovisno o potrebi. Zanimljivo je da koriste iste ideje koje je pola stoljeća ranije iznio Frege u [24], iako se njihovi pristupi epistemološki razlikuju.

Uobličen u pravu filozofiju matematike tek 1920.-ih, intuicionizam je zapravo samo novi naziv za otprije poznata stajališta o matematici. Njegove ideje promovirali su Kronecker, Poincaré, Francuska škola, a dva najvažnija kasnija predstavnika su Weyl i Brouwer. Po intuicionističkoj filozofiji, matematika je kreacija ljudskog uma koja se nalazi isključivo u ljudskom umu. Ne postoji matematički objekt ako ga nije moguće konstruirati. Budući da nije moguće eksplicitno konstruirati beskonačno mnogo objekata, zaključuje se da nije moguće postojanje (aktualno) beskonačnih skupova. Dakle, intuicionizam odbacuje aktualnu beskonačnost, a uz to odbacuje i logičke principe isključenja trećega i dvostruke negacije.

Moderna logika proizašla je spajanjem logicističke, algebraističke i formalističke koncepcije logike, nadograđene metalogičkim pristupom. Logicisti su zaslužni za razvoj sintakse, algebraisti za razvoj semantike, formalisti objedinjuju i preciziraju koncepcije logicista i algebraista, a za metalogički pristup najzaslužniji su Skolem, Gödel i Hilbertova škola [19]. Ključnu ulogu je također igralo prihvaćanje logike prvog reda kao glavne logike.

Početkom 1920.-ih logika prvog reda daleko je od današnje općeprihvaćenosti. Ona se svakako pojavljuje u radovima mnogih matematičara, primjerice članova Hilbertove škole, ali ne promatra je se kao jedinu „pravu” logiku, već kao pogodni alat. Najvažnija osoba koja zastupa njezino korištenje je norveški matematičar Thoralf Skolem. U početku koristi Schröderovu notaciju, ali se ubrzo okreće izrazima logike prvog reda. Pomoću nje proširuje prijašnji Löwenheimov teorem [54] te dolazi do *Skolemovog paradoksa*.[29] Smatrao je da logika prvog reda prirodno proizlazi iz aksiomatizacija matematičkih teorija te je pomoću nje riješio problem definitnosti u Zermelovoj aksiomatizaciji: svojstvo je definitno ako se može prikazati formulom prvog reda u jeziku teorije skupova. U tom trenutku, Skolem je jedini koji ozbiljno razmatra mogućnost formalizacije matematičkih teorija isključivo koristeći logiku prvog reda.

[29] Iz Löwenheim–Skolemovog teorema slijedi da svaka konzistentna teorija ima prebrojivi model. To znači da ako je Zermelova aksiomatizacija konzistentna, onda i ona ima prebrojivi model. To je naizgled kontradikcija s činjenicom da se u Zermelovoj aksiomatizaciji može dokazati postojanje neprebrojivih skupova. Paradoks nestaje kada se pojmovi prebrojivosti i neprebrojivosti promatraju unutar samog modela, a ne općenito.

A.4.1. Teorija tipova kao osnova formalizacije matematičkih teorija

Uz sve svoje probleme, *Principia Mathematica* izvršila je veliki utjecaj na poimanje logike. Teorija tipova, ako se ne promatra kao temelj cjelokupne logike, zadovoljavajući je logički okvir za formalizacije matematičkih teorija. Međutim, zbog prevelike ambicioznosti Whiteheadovog i Russellovog projekta, teorija tipova *Principie* vrlo je komplicirana. Dakle, da bi postala korisno oruđe, potrebno ju je znatno pojednostaviti. *Jednostavna teorija tipova* u suvremenom smislu pojavljuje se početkom 1930.-ih godina u radovima Tarskoga i Gödela, ali moguće je sve teorije tipova koje nisu ramificirane nazivati „jednostavnima".

Ramsyeva teorija tipova

Prva dva pojednostavljenja ponudili su poljski matematičar Leon Chwistek i britanski matematičar Frank Ramsey. Chwistek je svoju teoriju tipova prvi puta predstavio 1921. godine, ali ona nije izvršila preveliki utjecaj. Puno važniji prikaz varijante jednostavne teorije tipova ponudio je Ramsey 1926. godine u članku *The Foundation of Mathematics* [49]. Analizirajući *Principiu*, Ramsey uočava tri glavna problema: uvođenje hijerarhije redova, interpretaciju aksioma beskonačnosti i formulaciju aksioma multiplikativnosti.

Uvođenjem hijerarhije redova u teoriju Whitehead i Russell nastoje zadovoljiti princip poročne cirkularnosti, koji je nužan za otklanjanje nekih paradoksa. Ramsey potrebu za principom poročne cirkularnosti, a samim time i za redovima, pokazuje nepotrebnom tako što razdvaja paradokse u dvije grupe. Prvu grupu paradoksa čine oni koji ovise o logičkoj i matematičkoj formulaciji teorije (Russellov, Burali-Fortijev i Cantorov), a drugu grupu paradoksa čine oni koji ovise o nekom „psihološkom" pojmu poput značenja, definiranja, imenovanja i slično. Kasnija terminologija paradokse prve grupe naziva *logičkim paradoksima*, a paradokse druge grupe *semantičkim paradoksima*. Logički paradoksi su spriječeni samom teorijom, a semantički paradoksi time što ih se u teoriji ne može ni iskazati. Ovdje vrijedi naglasiti da, iako postoje određene naznake takvog shvaćanja, Ramsey ipak još ne radi razliku između sintakse i semantike.

Sama Ramseyeva teorija tipova vrlo je slična teoriji tipova *Principie*, osim u dva vrlo bitna segmenta. Prvi smo već spomenuli, a to je izbacivanje komplicirane teorije redova, a drugi je zamjena intencionalnih objekata ekstenzionalnima. Prestaje promatrati propozicijske funkcije (kao intencionalne objekte), već promatra njihove ekstenzije. Time se značajno otklanja od logicističke tradicije, a na to je bio prisiljen kako bi riješio preostala dva problema *Principie* (s aksiomom beskonačnosti i multiplikativnosti). Time je Ramsey postavio temelje za približavanje teorije tipova teoriji skupova i donekle ju oslobodio nepotrebnih, i često pogubnih, strogih filozofskih uvjeta.

Konačni oblik teorije tipova

Uz već spomenuta, iznesena su mnoga razna poboljšanja teorije tipova, od kojih vrijedi spomenuti Carnapovo. No teorija tipova svoj konačni oblik dobiva radovima Kurta Gödela i Alfreda Tarskog početkom 1930.-ih. Tarski svoju verziju prezentira u radu o konceptu istine [57], a Gödel u svom slavnom radu o neodlučivim propozicijama [31]. Iako su njihove teorije tipova gotovo identične, Gödelova je nešto jednostavnija te ja postala standardni prikaz teorije tipova, uz poneke sitne promjene u notaciji.

Gödelov glavni rezultat rada je *prvi teorem nepotpunosti*, pri čemu je teorija tipova osnova formalnog sistema u kojem se teorem dokazuje. Jezik sistema se sastoji od logičkih veznika $\neg$ i $\vee$, univerzalnog kvantifikatora $\forall$, simbola 0, funkcije sljedbenik f te zagrada (i). Varijable su stratificirane hijerarhijom tipova pa tako x_1 označava varijablu x tipa 1, x_2 tipa 2, itd. Općenito, x_i označava varijablu x tipa i za svaki prirodni broj i. Formule se definiraju rekurzivno: atomarna formula je formula oblika $x_{i+1}(x_i)$, pri čemu to zapravo možemo u modernoj notaciji zapisati kao $x_i \in x_{i+1}$. Nadalje, ako su a i b formule, onda su $\neg a$, $a \vee b$ i $\forall xa$ također formule.

Aksiomi Gödelovog sistema raspoređeni su u pet grupa. Prvu grupu čine Peanovi aksiomi, a drugu i treću grupu čine općeniti logički aksiomi, koji rekapituliraju logiku *Principie*. Četvrtu grupu aksioma čini aksiom komprehenzije

$$\exists y_{i+1} \forall x_i (x_i \in y_{i+1} \leftrightarrow a),$$

za svaki tip i, gdje je a formula teorije. Petu grupu aksioma čini aksiom ekstenzionalnosti

$$\forall x_i (x_i \in x_{i+1} \leftrightarrow x_i \in y_{i+1}) \to x_{i+1} = y_{i+1},$$

također za svaki tip i. Uvođenjem aksioma Gödel završava prezentaciju formalnog sistema te nastavlja unutar njega razvijati potrebnu aparaturu za dokaz teorema nepotpunosti. Budući da mu nije potreban, ne uvodi aksiom beskonačnosti (za razliku od Tarskog), ali ni aksiom izbora.

Konzistentnost teorije tipova dokazali su nezavisno jedan od drugoga Tarski, Gentzen i Beth [5, 27, 56], a konzistentnost ramificirane teorije tipova dokazao je Fitch [20]. Paradoksalno, unatoč tome što su se dokazi konzistentnosti pojavili nešto kasnije, ubrzo nakon Gödelove (i Tarskijeve) formulacije teorije tipova započinje i njen odlazak na margine. Teško je točno odrediti razloge takvog preokreta, ali stavljanje težišta više na logiku prvog reda kao najboljeg okvira za formalne sisteme i odbacivanje teorije tipova od strane samog Gödela i Tarskog zasigurno su doprinijeli takvom ishodu.

A.4.2. Zermelo–Fraenkelova teorija skupova

Zermelova aksiomatizacija od svog nastanka promatrana je isključivo kao matematička teorija. Iako je uspješno riješila probleme paradoksa i sačuvala dovoljno Dedekindove i Cantorove teorije, nije bilo baš potpuno jasno da ona može poslužiti kao temeljna teorija matematike. Zbog toga je bila manje popularna od teorije tipova, ali i od naivne teorije skupova. Svoj dominantni status stekla je kombinacijom doprinosa Fraenkela, Von Neumanna i samog Zermela, ali i dodatnim razvojem matematičke logike te reformulacijom u logici prvog reda.

Abraham Fraenkel

Važnost Abrahama Fraenkela za teoriju skupova nije toliko u originalnim doprinosima, koliko u njenom širenju. Teoriju skupova počinje proučavati 1922. godine, kada objavljuje dva rada na tu temu. Proučavanjem Zermelove aksiomatizacije dolazi do spoznaje da se neki aksiomi mogu dodatno pojednostaviti, a predlaže i uvođenje novog: aksioma zamjene. Razlog za uvođenje aksioma zamjene nalazi u činjenici da se u originalnoj Zermelovoj teoriji ne može dokazati postojanje nekih važnih skupova, primjerice $\aleph_\omega$ [22].[30] Fraenkel aksiom zamjene preciznije formulira u svojim kasnijim radovima, ali smatra da je tvrdnja aksioma prejaka, stoga ga ne uvrštava u aksiome teorije skupova. Također predlaže da se iz Zermelove teorije izbace atomi i da se teorija ograniči isključivo na skupove [22].

Možda najvažniji Fraenkelov doprinos je dokaz nezavisnosti aksioma izbora od ostalih Zermelovih aksioma. Za potrebe tog dokaza, Fraenkel je precizirao i poboljšao shvaćanje pojma definitnosti [23]. Uvodi specijalnu vrstu funkcije, koja rekurzivno definira odgovarajuća svojstva: „objekt $\varphi(x)$ nastaje iz ('varijable') objekta x koji [denotira] element nekog skupa, ..., propisanom primjenom (samo konačno mnogo puta) aksioma II–VI." Iako je svojom novom funkcijom Fraenkel unaprijedio shvaćanje Zermelovog pojma svojstva, sama definicija nije naročito precizna. U kasnijim radovima nastoji svoju funkciju bolje definirati, a konačnu definiciju prezentira u radu iz 1926. godine. Ta definicija ipak se pokazuje manjkavom, što izlazi na vidjelo nešto kasnije, zbog Skolemovog dokaza da se svaka formula logike prvog reda u jeziku

[30] Paralelno Fraenkelu, isto je otkrio i Skolem.

teorije skupova ne može prikazati kao Fraenkelova funkcija.

John von Neumann

Rođen u Budimpešti kao Janos Lajos Neumann, ovaj mađarski matematičar jedan je od najbriljantnijih znanstvenika svih vremena. Vjerojatno posljednji *homo universalis*, ostavio je traga u svemu čime se bavio. Teoriju skupova počinje proučavati veoma rano, a na toj temi je i doktorirao. Za svoje potrebe uveo je vlastitu aksiomatizaciju [46].[31] Zaslužan je za moderne definicije ordinalnih[32] brojeva te razne rezultate vezane uz njih. Primjerice, pokazao je da se svakom dobro uređenom skupu može jednoznačno pridružiti neki ordinalni broj [47].

Ordinalne brojeve prvo je prikazao u naivnoj teoriji skupova, a zatim u svojoj aksiomatizaciji [45]. Kardinalni broj definira kao ordinalni broj koji nije ekvipotentan ni sa jednim svojim elementom. Za preciznu definiciju ordinalnih (i kardinalnih) brojeva potreban mu je aksiom zamjene, koji naziva Fraenkelovim aksiomom te ga, za razliku od Fraenkela, nije smatrao problematičnim. Aksiom zamjene iskazuje pomoću Fraenkelove funkcije, ali uočava da Fraenkelova definicija iz 1926. godine nije zadovoljavajuća. Naime, tada je moguće aksiom zamjene dokazati pomoću ostalih aksioma. Zbog toga je von Neumann napravio određene promjene kako bi aksiom zamjene bio neovisan od ostalih aksioma. Pomoću poboljšane Fraenkelove funkcije također je iskazao i dokazao teorem transfinitne rekurzije.

Od ostalih važnih doprinosa vrijedi naglasiti da je prvi formulirao aksiom dobre utemeljenosti, ali on mu je više služio kao pomoć u istraživanju metateorije njegove aksiomatizacije. Međutim, koristeći aksiom dobre utemeljenosti uvodi u teoriju skupova pojam koji je danas neraskidivo povezan s njome: kumulativnu hijerarhiju.

Doprinosi von Neumanna ipak se trebaju uzeti s određenom rezervom. Iako se gotovo svi rezultati mogu s lakoćom prenijeti u Zermelovu teoriju, veliku većinu von Neumannovih rezultata neovisno od njega otkrio je sam Zermelo.

Ernst Zermelo

Nakon kratke stanke, Zermelo počinje ponovno objavljivati kasnih 1920.-ih godina, a najvažniji rad u tom periodu je *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über*

[31] Von Neumannovu aksiomatizaciju dodatno su poboljšali Bernays i Gödel i postala je poznata pod akronimom NBG (von Neuman, Bernays, Gödel). Više o teoriji NBG može se pronaći u [4].

[32] Danas poznatih kao von Neumannovi ordinalni brojevi.

die Grundlagen der Mengenlehre[33] objavljen 1930. godine. U tom radu se bavi proučavanjem modela[34] „'općih' aksioma teorije skupova" [63] s još jednim dodatnim aksiomom. Zermelo te opće aksiome naziva *Zermelo-Fraenkelovi* aksiomi, koji nisu ništa drugo nego originalni Zermelovi aksiomi s Fraenkelovim aksiomom zamjene. Dodatni aksiom je aksiom dobre utemeljenosti. Time je Zermelo vrlo blizu moderne formulacije Zermelo-Fraenkelove teorije skupova. Razlika je u tome što je svoju teoriju formalizirao u logici drugog reda, a i dalje dopušta postojanje atoma.

Posljedica uvođenja aksioma dobre utemeljenosti je da se svaki model teorije može podijeliti u „slojeve", što znači da se svaki model može promatrati kao kumulativna hijerarhija. Svaki novi „sloj" sadrži sve skupove iz prijašnjeg „sloja". Zanimljivo je da Zermelo uvođenje aksioma ne opravdava nekom platonističkom vizijom skupova razlomljenih u slojeve (iterativni koncept skupa), već obrnuto, postojanje slojeva i kumulativne hijerarhije shvaća kao posljedicu aksioma.

Zermelo proučavanje modela teorije temelji na karakterizaciji svakog modela s dva broja: kardinalitetu „baze" i „karakteristike". Kardinalitet baze modela je kardinalitet „totaliteta svih [atoma modela]", a karakteristika modela je „ordinalni tip svih ordinalnih brojeva [modela]". Time se teorija skupova može prikazati kao beskonačni niz različitih modela. Na taj način se dobiva „zadovoljavajuće razjašnjenje" paradoksa, jer neki objekt ne mora biti skup u jednom modelu, ali je skup u nekom drugom.

Zermelo naglašava da postojanje modela slijedi iz pretpostavke konzistentnosti aksioma, što neće posebno dokazivati. Dakle, njegovi rezultati su valjani pod pretpostavkom konzistentnosti Zermelo–Fraenkelove teorije skupova. Za kraj spomenimo da Zermelo aksiomatizaciju teorije skupova ne temelji na ideji o *ograničenju veličina*. To postaje prevladavajuće shvaćanje tek kada se Zermelo–Fraenkelova teorija skupova formalizirala u logici prvog reda.

[33] Hrv. O graničnim brojevima i domeni skupova: nova istraživanja o osnovama teorije skupova. Engleski prijevod u [63].

[34] Zermelo ih naziva domenama.

A.5. Moderna Zermelo–Fraenkelova i Quineova teorija

Zermelo–Fraenkelova teorija skupova svoj konačni oblik dobiva ranih 1930.-ih godina, nakon što se logika prvog reda prihvaća kao dominatni logički temelj formalizacije matematičkih teorija. Uspjeh logike prvog reda možemo tražiti u utjecajnim radovima Hilbertove škole (u sklopu Hilbertovog programa), Gödela,[35] Bernaysa, Quinea i Tarskog. Potrebe aksiomatizacije, Hilbertovog programa i određeni metalogički rezultati nužni su preduvjeti za prihvaćanje logike prvog reda kao najpogodnije logike za formalizaciju matematike [19].

Ovime završavamo povijesni prikaz teorije skupova. Zermelo–Fraenkelova teorija nastavila se razvijati kao dominantna teorija skupova i nemoguće je ukratko prikazati sve njene važne rezultate. Ipak spomenimo da je problem hipoteze kontinuuma riješen na pomalo iznenađujući način. Gödel 1939. godine pokazuje da je moguće, pod pretpostavkom konzistentnosti Zermelo–Fraenkelove teorije skupova, konstruirati model u kojem je hipoteza kontinuuma istinita [29, 30]. S druge strane, Paul Cohen je otkrio potpuno novu metodu konstrukcije modela, poznatu pod nazivom *metoda forcinga* [1, 11], pomoću koje je dokazao da se može konstruirati model Zermelo–Fraenkelove teorije u kojem ne vrijedi hipoteza kontinuuma. To znači da se hipoteza kontinuuma ili njena negacija može dodati kao novi aksiom Zermelo–Fraenkelove teorije, a dobivena teorija je tada konzistentna ukoliko je konzistentna početna teorija.

Quine je svoju teoriju prikazao 1937. godine u [48], a njenu povijest nećemo prikazati na ovom mjestu jer je većina važnih povijesnih momenata dio matematičkog dijela ove disertacije.

[35] Veliku važnost ima Gödelov rezultat da je svaka logika reda višeg od logike prvog reda nužno nepotpuna [31].

ŽIVOTOPIS

Tin Adlešić rođen je u Karlovcu 24. 8. 1994. gdje završava osnovnu i srednju školu. Studij matematike upisao je 2013. godine i završio ga 2018. godine, obranivši diplomski rad *Prošireni modeli teorije skupova* pod mentorstvom doc. dr. sc. Vedrana Čačića. Godine 2019. zapošljava se kao programer u Ericsson Nikola Tesla, a 2020. godine izabran je za asistenta na Učiteljskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2024. zapošljava se kao asistent na Fakultetu kemijskog inženjerstva i tehnologije. Doktorski studij upisuje 2019. godine.

Održao je brojna konferencijska izlaganja i objavio nekoliko radova:

[1] Tin Adlešić, *Povijest teorije skupova u 19. stoljeću.* Poučak, Vol. 24, No. 95, 2023. 4-21

[2] Tin Adlešić, Vedran Čačić, *The Cardinal squaring principle and an alternative axiomatization of NFU.* Bulletin of the Section of Logic, 52(4):551–581, 2023.

[3] Tin Adlešić, Vedran Čačić, *A modern rigorous approach to stratification in NF/NFU.* Logica universalis, 16(3):451–468, 2022.

[4] Tin Adlešić, *Prošireni modeli teorije skupova.* 2018. diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odsjek, Zagreb

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, ______________________________, student/ica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi ____,OIB ____________________, JMBAG __________________________, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj završni/diplomski/doktorski rad pod naslovom: ____ ____ ____, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, ______________________

____

Potpis