Van Hiele model razvoja geometrijskog mišljenja i koncepti duljine i površine u osnovnoj i srednjoj školi

Matulj, Anđela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anđela Matulj

VAN HIELE MODEL RAZVOJA GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA I KONCEPTI DULJINE I POVRŠINE U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Voditeljica rada:

Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, svibanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____, predsjednik/ca
2. ____, član(ica)
3. ____, član(ica)

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____
2. ____
3. ____

Zahvaljujem mentorici, prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji na pomoći, strpljenju i svim savjetima tijekom pisanja i izrade ovog diplomskog rada.

Posebno hvala mojoj obitelji na kontinuiranoj i bezuvjetnoj podršci, ohrabrenju i razumijevanju tijekom cijelog mog akademskog putovanja.

Hvala ostalim dragim ljudima koji su mi obogatili dane studiranja svojim prisustvom, podrškom i prijateljstvom.

SADRŽAJ

UVOD

Geometrija je matematička disciplina koju su proučavale i implementirale prve civilizacije. Razvijala se praktičnom primjenom u svakodnevici, gdje je pružala odgovore na različita pitanja s kojima su se ljudi susretali. Poučavanje geometrije često je složenije od poučavanja drugih matematičkih disciplina, što je u prošlosti nerijetko rezultiralo nedovoljnom zastupljenošću geometrijskog sadržaja u nastavi. Galileo Galilei je rekao: „Tko razumije geometriju posjeduje moć razumijevanja svijeta.“, što ukazuje na njezinu iznimnu važnost. Danas je geometrija integralni dio obrazovanja već od prvog razreda osnovne škole. Kod učenika je potrebno razvijati dva koherentna načina geometrijskog razmišljanja. Prvi način je prostorno razmišljanje, odnosno promišljanje o obliku i prostoru, a drugi je razmišljanje o kvantitativnim, tj. mjerivim obilježjima oblika.

Nizozemski bračni par van Hiele bavio se razinama razvoja geometrijskog mišljenja i njihovim karakteristikama. Cilj ovog diplomskog rada je prikazati izgradnju koncepata duljine i površine tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja kroz prizmu van Hiele teorijskog modela razvoja geometrijskog mišljenja i ilustrirati je primjerima prikladnih učeničkih aktivnosti kojima se potiče njihov napredak iz niže u sljedeću višu van Hiele razinu.

U prvom poglavlju fokus je na formaliziranom matematičkom opisu koncepata duljine i površine. Drugo poglavlje posvećeno je detaljnoj analizi van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja. Ovaj teorijski okvir pruža uvid u proces razvoja geometrijskog mišljenja kod učenika. Treće poglavlje usredotočeno je na integraciju koncepata duljine i površine u nacionalnom matematičkom kurikulumu u Hrvatskoj. U četvrtom i petom poglavlju predstavljen je niz aktivnosti primjenjivih za poučavanje koncepata duljine i površine na različitim van Hiele razinama . Šesto poglavlje usmjereno je na analizu zadataka TIMSS i PISA istraživanja te natjecanja Matematički klokan vezanih uz koncepte duljine i površine, tj. analizu razine van Hiele modela koju zahtijeva pojedini zadatak.

1. MATEMATIČKI POJMOVI DULJINE I POVRŠINE

Pojmovi duljine, udaljenosti i površine koji se uobičajeno koriste u svakodnevnom životu i školskoj matematici, u matematičkim su teorijama formalizirani i generalizirani u apstraktne pojmove norme i metrike. U ovom ćemo poglavlju definirati ove pojmove i ilustrirati ih primjerima.

1.1. Pojam duljine

Započinjemo pojmovima norme i metrike na realnom vektorskom prostoru.

Definicija 1.1.1. Norma na realnom vektorskom prostoru X je preslikavanje

$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

(N1) $\|x\| \geq 0$, za svako $x \in X$, (nenegativnost)

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$, (pozitivna definitnost)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, za svaki izbor $x, y \in X$, (nejednakost trokuta)

(N4) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, za svaki izbor $x \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. (homogenost)

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ naziva se normirani prostor.

Primjer norme na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ je tzv. p-norma. Općenito, za svaki realni broj p, $p > 0$, definiramo $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, za $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Funkciju $\|\cdot\|_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazivamo p – normom na $\mathbb{R}^n$. Još jedan važan primjer norme na $\mathbb{R}^n$ je ∞ −norma, *max*-norma ili *Čebiševljeva*-norma definirana na sljedeći način:

$$\|x\|_\infty = max_{k\in\{1,\dots,n\}}|x_k|, x \in \mathbb{R}^n.$$

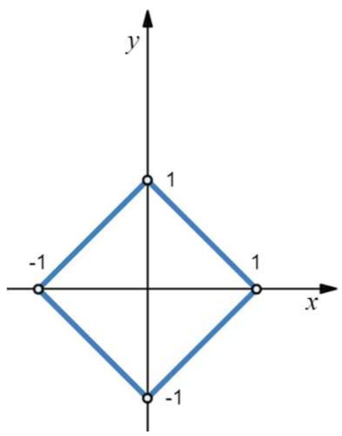
U primjeni su najvažniji slučajevi $p = 1$ i 2 spomenute p −norme na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$:

1. 1 −norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$,
2. 2 −norma $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

1−norma naziva se još i *Manhattan*-norma[1] ili *Taxicab*-norma, a 2 −norma poznata je i kao euklidska norma. ([1], [2])

Primjer 1.1.1. Kružnica u $\mathbb{R}^2$ (u ravnini) u različitim normama

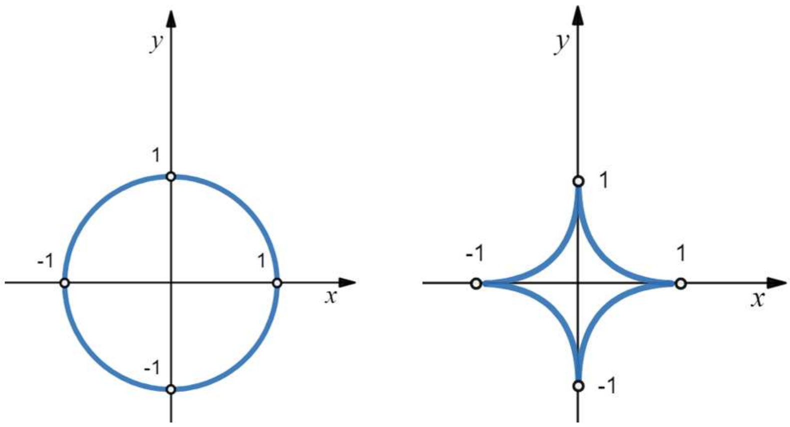
Euklidska norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ predstavlja duljinu dužine čije su krajnje točke $(0,0)$ i (x,y), tj. $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Znamo da je kružnica skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od neke čvrste točke (središta kružnice) te ravnine, no njen oblik ovisit će o normi u kojoj računamo. Primjerice, u 1 – normi, tj. $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$, graf relacije $|x| + |y| = 1$ je kvadrat sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, s vrhovima na koordinatnim osima te dijagonalom duljine 2. Drugim riječima, kružnica s obzirom na 1 – normu ima oblik kvadrata sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, i s vrhovima na koordinatnim osima (Slika 1.1.1.).



Slika 1.1. 1. Jedinična kružnica u 1-normi u ravnini

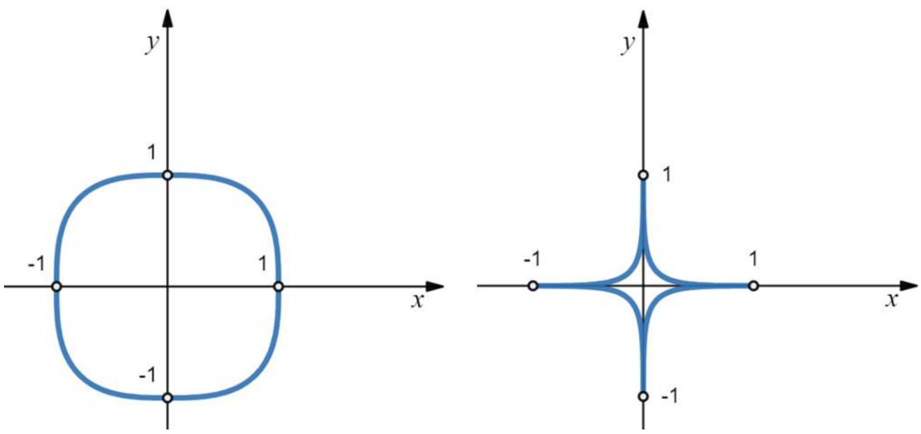
[1] Razlog tomu je organizacija prometa na Manhattanu. Naime, on je organiziran pravokutnom mrežom avenija i ulica, a ovom normom se opisuju udaljenosti u tako organiziranom prometnom sustavu.

Za razliku od 1 – norme u kojoj je veza linearna, u 2 – normi veza je kvadratna, tj. vrijedi sljedeća relacija $x^2 + y^2 = 1^2$. Kvadratna relacija je uzročnik zakrivljenosti, stoga je grafički prikaz ove relacije kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava radijusa 1 kao na *Slici 1.1.2.* (lijevo). Na *Slici 1.1.2.* (desno) je oblik kružnice u $\frac{1}{2}$ – normi, tj. za $|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} = |1|^{\frac{1}{2}}$.



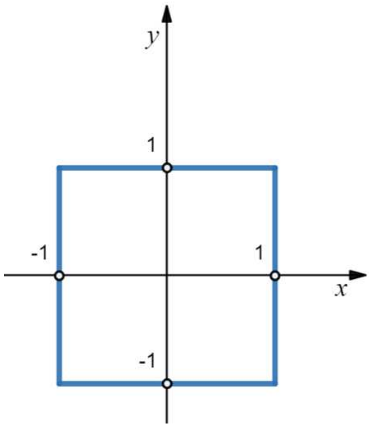
Slika 1.1. 2. Jedinična kružnica u 2 – normi (lijevo) i u $\frac{1}{2}$ - normi (desno) u ravnini

Kružnica s obzirom na 3 – normu ima oblik kao na *Slici 1.1.3.* (lijevo), tj. za $|x|^3 + |y|^3 = |1|^3$ poprima oblik „kvadrata“ sa zaobljenim vrhovima, a oblik koji poprima u $\frac{1}{3}$ – normi, tj. za $|x|^{\frac{1}{3}} + |y|^{\frac{1}{3}} = |1|^{\frac{1}{3}}$, nalazi se na *Slici 1.1.3.*(desno).



Slika 1.1. 3. Jedinična kružnica u 3 - normi (lijevo) i u $\frac{1}{3}$ - normi (desno) u ravnini

Kružnica s obzirom na $\infty -$ normu nalazi se na *Slici 1.1.4.*

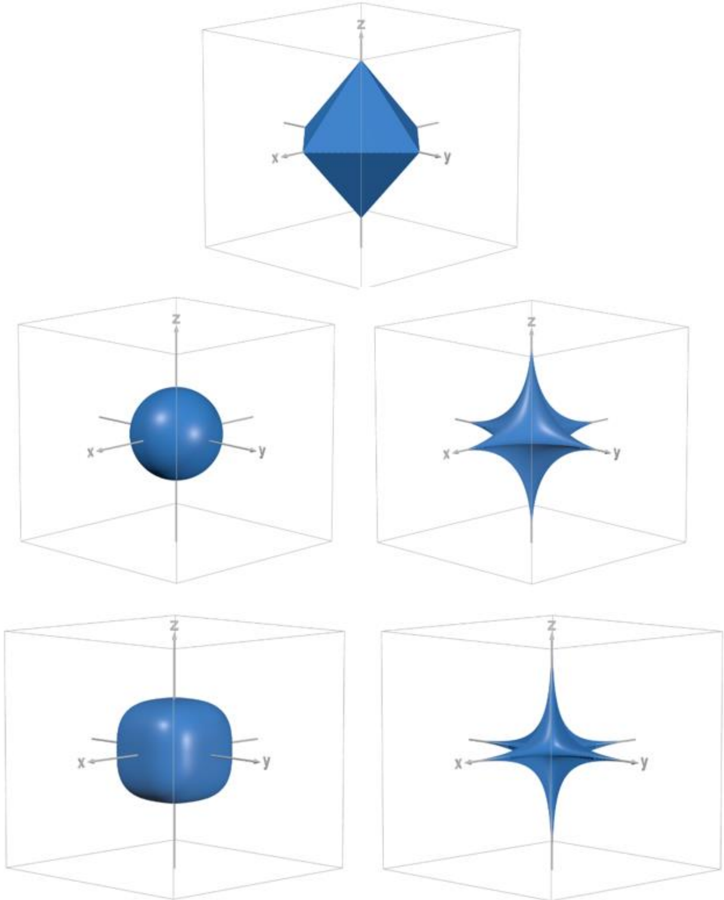


Slika 1.1. 4. Jedinična kružnica u ∞ - normi u ravnini

Primjer 1.1.2. Sfera u $\mathbb{R}^3$ (u prostoru) u različitim normama

Euklidska norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ predstavlja duljinu dužine čije su krajnje točke $(0, 0, 0)$ i (x, y, z), tj. $\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Znamo da je sfera skup svih točaka u prostoru jednako udaljenih od neke čvrste točke (središta sfere). Oblik jedinične sfere ovisi o normi u kojoj računamo. Na primjer, jedinične sfere u prostoru u 1 – normi, tj. za $|x| + |y| + |z| = 1$, 2 – normi, tj. za $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2$, $\frac{1}{2}$ – normi, tj. za $|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}} + |z|^{\frac{1}{2}} = |1|^{\frac{1}{2}}$, 3 – normi, tj. za $|x|^3 + |y|^3 + |z|^3 = |1|^3$, i $\frac{1}{3}$ – normi, tj. za $|x|^{\frac{1}{3}} + |y|^{\frac{1}{3}} + |z|^{\frac{1}{3}} = |1|^{\frac{1}{3}}$, nalaze se na *Slici 1.1.5.* redom, slijeva nadesno. Uočimo da su 1 – norma, 2 – norma, $\frac{1}{2} -$ norma, 3 – norma i $\frac{1}{3} -$ norma specijalni slučajevi p – norme za $p = 1$, $p = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $p = 3$ te $p = \frac{1}{3}$.



Slika 1.1. 5. Jedinična sfera u 1 - normi, 2 - normi, $\frac{1}{2}$ - normi,

3 – normi i $\frac{1}{3}$ - normi u prostoru

Uvođenje $p -$ normi omogućava računanje udaljenosti između dviju točaka na različite načine. Općenito, udaljenost između dviju točaka nekog skupa definira se na sljedeći način:

Definicija 1.1.2. Neka je $X \neq \emptyset$ neprazan skup i $d: X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje sa Kartezijevog produkta $X \times X$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ za koje vrijedi:

(M1) $d(x, y) \geq 0,$ (nenegativnost)

(M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y,$ (pozitivna definitnost)

(M3) $d(x, y) = d(y, x),$ (simetričnost)

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$ (nejednakost trokuta)

za svaki izbor $x, y, z \in X$. Kažemo da je d funkcija udaljenosti ili razdaljinska funkcija, odnosno metrika na skupu X. Tada uređeni par (X, d) nazivamo metrički prostor. ([9])

Uočimo da je norma definirana na vektorskom prostoru, a metrika na proizvoljnom nepraznom skupu. Također, svaki normirani prostor postaje na prirodan način metrički prostor, tj. vrijedi da norma inducira metriku. To nam govori sljedeći teorem:

Teorem 1.1.1. Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Tada je sa $d(x,y) = \|x-y\|$ dana metrika na X, za sve $x, y \in X$.

Dokaz.

Iz svojstava norme je očito da su za preslikavanje d ispunjena svojstva nenegativnosti, pozitivne definitnosti i simetričnosti. Naime, $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$. Nadalje, $d(x,y) = \|x-y\| = 0$ ako i samo ako je $x - y = \Theta$, tj. $x = y$. Iz svojstva homogenosti slijedi: $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(-x+y)\| = |-1| \cdot \|-x+y\| = \|y-x\| = d(y,x)$, tj. vrijedi simetričnost. Nejednakost trokuta se također lako dokaže:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(y,z).$$

■

1.2. Aksiomi euklidske geometrije

U školskoj matematici pojmovi norme i metrike pojavljuju se u euklidskoj geometriji ravnine i prostora. Euklidska ravnina (ili samo ravnina) je skup M čije elemente zovemo točkama, a neke istaknute podskupove pravcima. Slično, euklidski prostor (ili samo prostor) je skup M_3 čije elemente zovemo točkama, a neke istaknute podskupove pravcima i ravninama. Spomenuti objekti zadovoljavaju određene aksiome[2] koje ćemo navesti u ovom poglavlju. ([16], [17])

Aksiom 1.2.1. Aksiomi incidencije ili pripadanja

(I1) Za svake dvije različite točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac iz M kojemu one pripadaju, tj. koji prolazi tim točkama. Kaže se još da su točke A i B incidentne s tim pravcem, a oznaka toga pravca je AB.

(I2) Svakom pravcu pripadaju barem tri različite točke.

(I3) Postoje tri nekolinearne točke, tj. takve tri točke koje ne pripadaju jednom te istom pravcu. Točke koje pripadaju istom pravcu zovu se kolinearne točke.

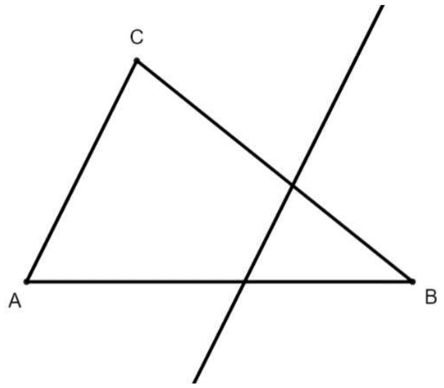
---

[2] Dolazi od grčke riječi *aksios*, što znači temeljno načelo čija se valjanost i istinitost prihvaća bez dokazivanja.

Aksiom 1.2.2. Aksiomi uređaja ili poretka

(U1) Na svakom pravcu ravnine postoje točno dva međusobno suprotna linearna uređaja.

(U2) (Paschov aksiom) Ako neki pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom toga trokuta, onda on siječe još barem jednu njegovu stranicu (Slika 1.2.1.).



Slika 1.2. 1. Paschov aksiom

Aksiom U1 omogućava definiciju relacije „biti između", a time i definiciju dužine. Naime, ako su A i B dvije različite točke ravnine, onda prema navedenom aksiomu slijedi postojanje jedinstvenog pravca kojemu one pripadaju. Za točku T toga pravca kažemo da se nalazi između točaka A i B ako vrijedi relacija $A \leq T \leq B$ ili relacija $A \geq T \geq B$. Skup svih točaka pravca AB koje se nalaze između točaka A i B nazivamo dužinom i označavamo sa $\overline{AB}$, a točke A i B krajevima te dužine.

Aksiomi metrike već su navedeni u Definiciji 1.1.2. Podsjetimo se, to su sljedeći aksiomi: nenegativnost, pozitivna definitnost, simetričnost te nejednakost trokuta.

Navedimo sada nekoliko primjera metrike. Broj $d(A,B)$ nazivamo duljinom dužine $\overline{AB}$ ili udaljenost točaka A i B, tj. duljina dužine je metrika. Nejednakost trokuta sada možemo izreći i ovako: Zbroj duljina dviju stranica trokuta uvijek je veći od duljine treće stranice. Za svaki polupravac (Ou) s vrhom u O i za svaki realni broj $x > 0$ postoji (jedinstvena) točka T na tom polupravcu takva da je $d(O,T) = x$.

Slijedi još jedan primjer metrike. Neka je $X \neq \emptyset$ neprazan skup. Na tom skupu definiramo udaljenost sa $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$. To je tzv. diskretna metrika. ([9], [16]) Nadalje, pojam udaljenosti otvara put definiranju izometrije ravnine:

Definicija 1.2.1. Preslikavanje $f: M \to M$ je izometrija ravnine M ako vrijedi

$d\big(f(A), f(B)\big) = d(A, B)$ za svaki izbor $A, B \in M$.

Aksiom 1.2.3. Aksiomi simetrije

(S1) Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p: M \longrightarrow M$ različita od identitete, za koju $s_p(T) = T$, za svako $T \in p$. Ta se izometrija zove osna simetrija obzirom na pravac p, a pravac p se zove os simetrije.

(S2) Za svaki par (O_x, O_y) polupravaca s vrhom u O postoji barem jedan pravac p takav da je $s_p(O_x) = O_y$.

U prostoru, točke i pravci, osim što zadovoljavaju ranije navedene aksiome planimetrije (geometrije ravnine), zadovoljavaju sljedeće:

Aksiom 1.2.4. Aksiomi stereometrije (geometrije prostora)

(A1) Za svaku ravninu $\pi \subset M_3$ postoje točke prostora koje joj pripadaju i koje joj ne pripadaju, stoga je π pravi podskup prostora M_3. Ako točke pripadaju ravnini π, onda kažemo da je π incidentna s tim točkama, a ako neka točka ne pripada ravnini π, onda kažemo da ta točka nije incidentna s ravninom π.

(A2) Ako dvije različite ravnine imaju zajedničku točku, onda one imaju zajednički i čitav pravac. Dakle, taj pravac je presječnica tih ravnina.

(A3) Ako dva različita pravca imaju zajedničku točku, onda postoji jedna i samo jedna ravnina koja sadrži te pravce. Tada je ta ravnina određena tim pravcima.

(A4) Postoji funkcija $d: M_3 \times M_3 \to \mathbb{R}$ takva da je:

1. $d(A, B) \geq 0$, za svaki izbor $A, B \in M_3$, $\mathrm{d}(A, B) = 0 \iff A = B$,
2. $d(A, B) = d(B, A)$, za svaki izbor $A, B \in M_3$
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, za svaki izbor $A, B, C \in M_3$ i pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $C \in \overline{AB}$.

Uočimo da je potrebno preformulirati prvi i treći aksiom incidencije. Naime, iz tvrdnje da kroz svake dvije različite točke ravnine prolazi jedinstven pravac ne slijedi istinitost za svake dvije različite točke prostora. Slično je i s trećim aksiomom, stoga te aksiome izričemo ovako:

(I1) Kroz svake dvije različite točke prostora prolazi jedan i samo jedan pravac.

(I3) Za svaki pravac postoje točke koje mu pripadaju i koje mu ne pripadaju. ([17])

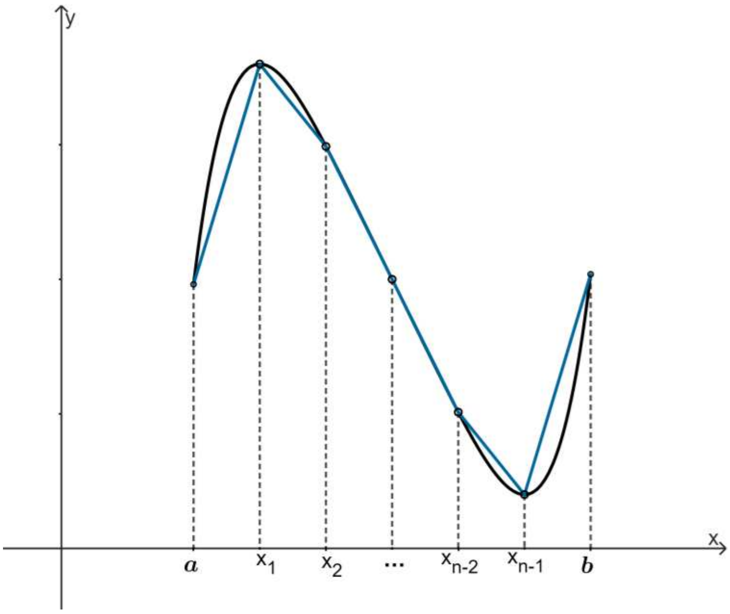
1.3. Duljina luka krivulje

U srednjoškolskoj matematici polazi se od intuitivno jasnih pojmova krivulje u ravnini te luka krivulje. U svrhu definiranja pojma krivulje prvo definirajmo pojam homeomorfizma.

Definicija 1.3.1. Neka je M ravnina. Kažemo da su skupovi $S, S' \subseteq M$ homeomorfni ako postoji bijekcija $f: S \to S'$ takva da su f i f^{-1} neprekidne. Funkciju f nazivamo homeomorfizam.

Jednostavna krivulja je homeomorfna slika segmenta. Općenito, krivulja je unija jednostavnih krivulja. Dio krivulje između njene dvije točke nazivamo lukom krivulje. U nastavku slijedi intuitivni, odnosno neformalni pristup duljini luka krivulje, tj. duljini grafa funkcije.

Promotrimo *Sliku 1.3.1.* Neka je $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b \rangle$. Tada je ona i ograničena na $[a, b]$ pa ima smisla promatrati duljinu njenog grafa, $d(\Gamma_f)$. Tu duljinu odredit ćemo tako da graf aproksimiramo poligonalnom linijom $T_0T_1T_2 \dots T_n$, pri čemu je $n \in \mathbb{N}, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ i $T_i(x_i, f(x_i)), i = 0,1,2, \dots, n$.



Slika 1.3. 1. Rektifikacija[3] luka krivulje

Što je više točaka T_i duž cijelog grafa, to poligonalna linija bolje aproksimira graf, a njena duljina duljinu grafa, $d(\Gamma_f)$. Dakle, za $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \to 0$ za $n \to \infty$ imamo:

$$
\begin{aligned}
d(\Gamma_f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |T_i T_{i+1}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\boxed{(x_{i+1}-x_i)}}_{dx} \sqrt{1 + \underbrace{\boxed{\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}}_{[f'(x)]^2}} \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.
\end{aligned}
$$

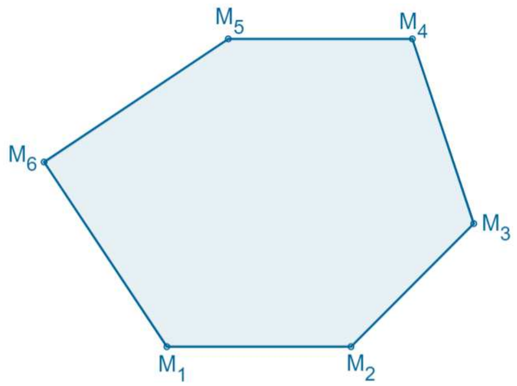
Dakle, duljinu krivulje aproksimiramo kao površinu ispod grafa druge funkcije, tj. funkcije zadane pravilom pridruživanja $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ na istom segmentu.

1.4. Pojam površine

U ovom ćemo odjeljku definirati pojam površine mnogokuta kao funkciju koja svakom mnogokutu pridružuje „mjeru površine“. U školi se mnogokut često definira kao dio ravnine omeđen konačnim brojem dužina koje se nadovezuju jedna na drugu (na kraj jedne dužine nadovezuje se početak druge dužine). Unija konačno mnogo takvih dužina

[3]Potječe od latinskog izraza *rectificatio*, koji dolazi od glagola *rectificare*, što znači „ispraviti“ ili „popraviti“. U kontekstu matematike, znači izračunavanje duljine krivulje ili njezina luka, tj. „ispravljanje“ ili „izravnavanje“ krivulje u svrhu lakšeg mjerenja i analiziranja.

naziva se poligonalna linija. Prema tome, mnogokut se još naziva poligon. Primjer poligona nalazi se na *Slici 1.4.1*.



Slika 1.4. 1. Primjer mnogokuta (poligona)

Definicija 1.4.1. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona u ravnini (uključujući $\emptyset$). Površina (ploština) p na skupu $\mathcal{P}$ je funkcija $p\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima (aksiomima):

(P1) $p(\Pi) \geq 0$, za svako $\Pi \in \mathcal{P}$, (aksiom pozitivnosti)

(P2) $p(\Pi_1 + \Pi_2) \geq p(\Pi_1) + p(\Pi_2)$, za svaki izbor $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$, (aksiom aditivnosti)

(P3) Ako je $\Pi_1 \cong \Pi_2$ onda je $\mathrm{p}(\Pi_1) = p(\Pi_2)$, za svaki izbor $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$, (aksiom invarijantnosti)

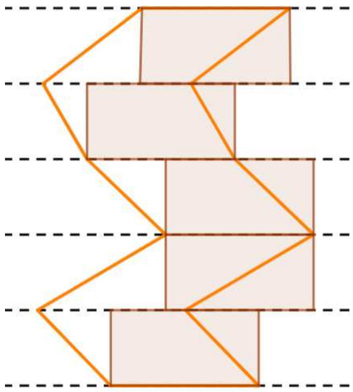
(P4) Postoji barem jedan kvadrat K sa stranicom 1 takav da je $p(K) = 1$. (aksiom normiranosti)

Broj $p(\Pi)$ zovemo površina poligona Π.

Definicija 1.4.2. Neka je M ravnina. Za skup točaka $S \subseteq M$ kažemo da je izmjeriv, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje poligoni Π i Π' takvi da vrijedi $\Pi \subseteq S \subseteq \Pi'$ i $p(\Pi') - \mathrm{p}(\Pi) < \varepsilon$.

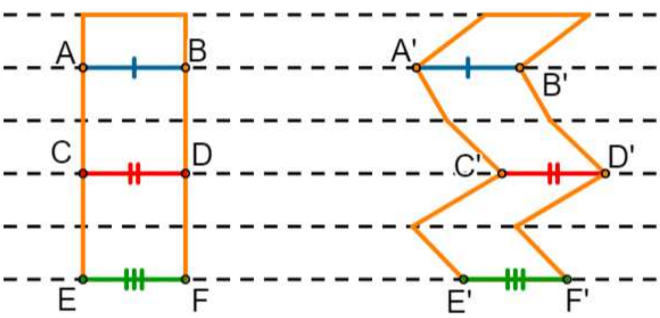
Poligon Π je upisan skupu S, a poligon Π' je opisan skupu S. Prema tome, prethodnu definiciju možemo izreći i ovako: Skup točaka je izmjeriv ako se razlika površina tom skupu opisanog i upisanog poligona može učiniti po volji malom. Nadalje, neka je $\mathcal{U}(S)$ skup svih poligona upisanih skupu S, a $\mathcal{O}(S)$ skup svih poligona opisanih skupu S. Tada je unutarnja površina od S $p_{\mathcal{U}}(S) = \sup\{p(\Pi) | \Pi \in \mathcal{U}(S)\}$, a vanjska površina od S je $p_{\mathcal{O}}(S) = \inf\{p(\Pi) | \Pi \in \mathcal{O}(S)\}$. Očito vrijedi $p_{\mathcal{U}}(S) \leq p_{\mathcal{O}}(S)$. Ako vrijedi jednakost $p_{\mathcal{U}}(S) = p_{\mathcal{O}}(S)$, onda kažemo da je skup S izmjeriv u Jordanovom smislu i da je njegova površina u Jordanovom smislu jednaka $p(S) = p_U(S) = p_O(S)$. Mjeru ili površinu definiramo na izmjerivim skupovima. ([16])

Za određivanje površine korisna je metoda tzv. Cavalierijev princip za ravninu. Naime, talijanski geometar Bonaventura Cavalieri otkrio je da ako dva izmjeriva skupa u ravnini S_1 i S_2 imaju svojstvo da postoji pravac p, takav da sve paralele sa p sijeku S_1 i S_2 u dvije jednake dužine, onda su im površine jednake. Intuitivno, ako figuru u ravnini zamislimo kao da je sastavljena od uskih pravokutnih traka male visine čije su baze dužine koje sijeku figuru i paralelne su, onda površina same figure približno odgovara zbroju površina tih pravokutnika (Slika 1.4.2.).



Slika 1.4. 2. Aproksimacija površine figure pravokutnicima

Ova aproksimacija postaje preciznija što su trake uže, odnosno što su visine pravokutnika manje. Primijenimo li ovaj koncept na dvije figure, primjećujemo da na svakoj razini imamo jednake pravokutnike, jer su im visine jednake po konstrukciji, a baze su jednake prema pretpostavci. U tom slučaju, površine „stepenastih“ figura su jednake, a one su približno jednake i površinama zadanih figura (Slika 1.4.3.).

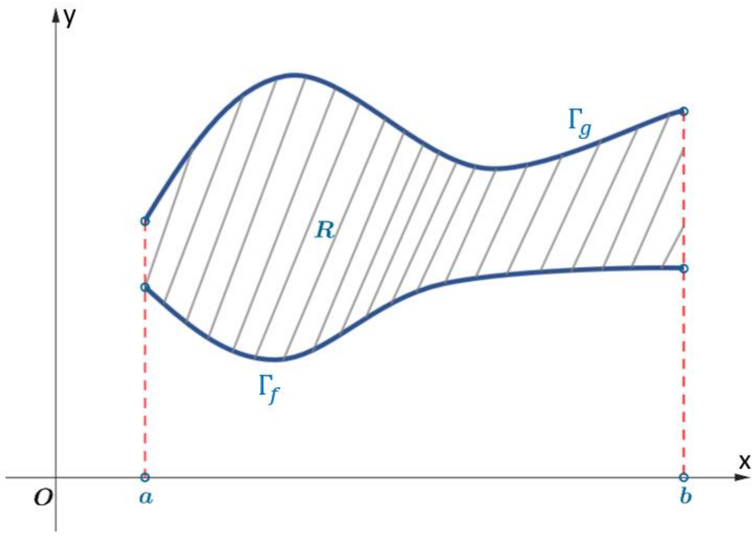


Slika 1.4. 3. Cavalierijev princip za ravninu

U početcima matematičke analize promatra se problem računanja površine područja R omeđenog grafovima dviju neprekidnih funkcija $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, pri čemu je $f(x) \leq g(x)$ za svako x iz segmenta $[a,b]$, tj. skupa

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Primjer takvog područja R vidimo na *Slici 1.4.4.*, a njegova površina dana je formulom s određenim integralom: $p(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$. Ovdje je nužno ukazati na Jordanovu mjeru da bi se dobio uvid na kakvu površinu se misli.

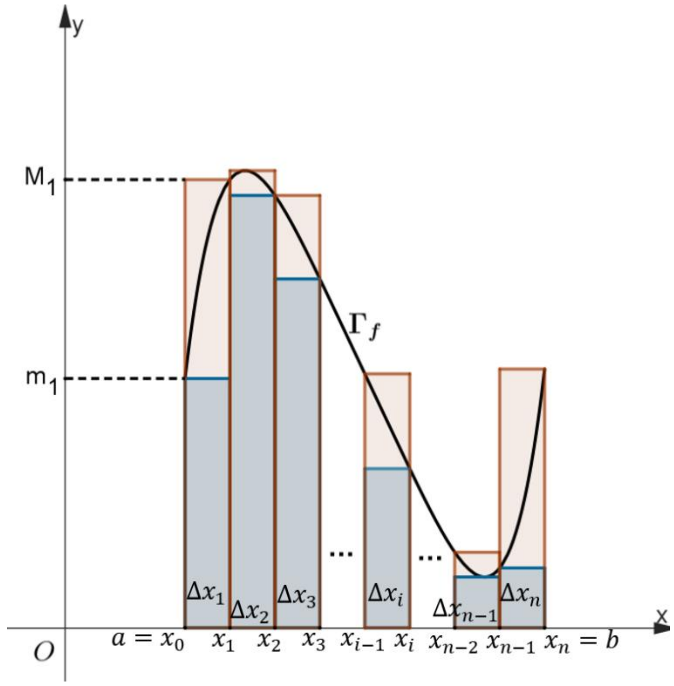


Slika 1.4. 4. Površina područja omeđenog grafovima dviju neprekidnih funkcija

Dokažimo slučaj kada je R područje omeđeno pravcima $x = a$, $x = b$, osi apscisa te grafom jedne neprekidne funkcije $f: [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ za svako x iz intervala $[a,b]$, tj. za $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Kažemo još da se područje R nalazi „ispod“ grafa funkcije f.

Dokaz.

Uzmimo niz točaka $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ kao u definiciji određenog integrala. Neka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ duljina i-tog podsegmenta, m_i najmanja vrijednost funkcije f za x iz segmenta $[x_{i-1},\ x_i]$ te M_i najveća vrijednost funkcije f za x na spomenutom segmentu.



Slika 1.4. 5. Površina „ispod“ grafa neprekidne funkcije

Tada je $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ zbroj površina „upisanih“ pravokutnika (plavih na *Slici 1.4.5.*), a $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ zbroj površina „opisanih“ pravokutnika (crvenih na *Slici 1.4.5.*). Nadalje, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Za neprekidnu funkciju f, razlika zbroja površina opisanih i upisanih pravokutnika može se učiniti proizvoljno malom za dovoljno male duljine podsegmenata Δx_i. Prema tome, za svako $\varepsilon > 0$ postoji niz $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ takav da je $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i < \varepsilon$. Prva suma je površina poligona Π' opisanog oko R, $p(\Pi')$, a druga suma je površina poligona Π upisanog u R, $p(\Pi)$. Zaključujemo da je R izmjeriv i da je $p_U(R) = p_O(R)$. Budući da je integral gornja međa za brojeve $p(\Pi)$, odnosno donja međa za brojeve $p(\Pi')$ vrijede relacije $p_U(R) \leq \int_a^b f(x)dx$ i $\int_a^b f(x)dx \leq p_O(R)$. Iz $p_U(R) = p_O(R) = p(R)$, slijedi da je $p(R) = \int_a^b f(x)dx$, što je i trebalo pokazati.

■

Slučaj kada je R omeđen grafovima dviju neprekidnih funkcija je jednostavno proširenje upravo opisanog slučaja. Treba obratiti pažnju na to da se površina nekog područja ne definira kao određeni integral jer ona ne ovisi o položaju s obzirom na koordinatne osi, nego isključivo o svojoj veličini i obliku. Matematički preciznije, površina mora biti invarijantna obzirom na izometrije ravnine, što nije nužno ispunjeno u „definiciji“ površine kao određenog integrala. Naime, neko se područje može na beskonačno mnogo načina opisati kao područje omeđeno grafovima neprekidnih funkcija pa bi unutar te teorije trebalo dokazati da taj integral ne ovisi o položaju područja obzirom na koordinatni sustav. Jordanova mjera ili površina se u smislu integrala definira kao $p(S) = \iint_{\Pi} \chi_S(x)\, dx\, dy$, gdje je χ_S karakteristična funkcija skupa S (tj. $\chi_S(x) = 1$ za $x \in S$, $\chi_S = 0$ za $x \notin S$), a $\Pi \supset S$ je pravokutnik, ako ovaj integral (u Riemannovom smislu) postoji. ([16])

Za računanje površine pomoću integralnog računa korisna je već spomenuta metoda Cavalierijev princip[4].

[4] Osim za likove, ova metoda je primjenjiva i za tijela. Ideja je zaključivanje o jednakosti ili odnosu volumena dvaju tijela na temelju jednakosti njihovih presjeka s paralelnim ravninama. Detaljnije o Cavalierijevom principu za volumen dostupno je u [16].

2. VAN HIELE MODEL RAZVOJA GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA

Iskustva nastavnika matematike u školama ukazuju na poteškoće u učenju geometrije. Učenici često znaju prepoznati o kojem se geometrijskom obliku radi, ali ga ne znaju precizno definirati. Primjerice, *Je li paralelogram istovremeno i trapez ili je obrnuto?*, *Jesu li geometrijski oblici slični ili sukladni?* - pitanja su koja zbunjuju učenike. U srednjim školama javljaju se problemi u izvođenju formalnih dokaza. U ovom ćemo poglavlju opisati uzroke ovakvih poteškoća te kako spriječiti njihov nastanak.

Nizozemski nastavnici Pierre van Hiele i njegova supruga Dina van Hiele-Geldof vjerovali su da srednja škola zahtijeva zaključivanje, odnosno mišljenje na relativno visokoj razini i da učenici nisu imali dovoljno iskustva u zaključivanju na prethodnoj, nižoj razini. Njihov istraživački rad usredotočio se na razine mišljenja u geometriji te na upute za pomoć učenicima da prijeđu s niže razine na višu. Godine 1957. bračni par van Hiele završio je doktorske disertacije o razinama mišljenja u učenju geometrije. Dina se bavila didaktičkim eksperimentom usmjerenim na podizanje razine mišljenja učenika, dok je Pierre formulirao strukturu razina mišljenja i načela osmišljenih kao pomoć učenicima da steknu bolji uvid u geometriju. Prema van Hieleovom modelu, učenik prolazi pet razina geometrijskog mišljenja, pri čemu svaka razina donosi nova znanja koja je nemoguće usvojiti bez znanja s prethodne razine. Te su razine neovisne o dobi učenika, tj. moguće je da se učenici četvrtog i šestog razreda osnovne škole nalaze na istoj razini geometrijskog mišljenja, ali i na različitim razinama. ([7])

Van Hieleovi su primijetili diskontinuiranost, tj. necjelovitost procesa učenja, odnosno postojanje skokova na krivulji učenja koji ukazuju na neusvojenost razina. Primijetili su da se u određenim dijelovima cjeline proces učenja zaustavlja, a kasnije nastavlja sam od sebe kao da su učenici dorasli tom sadržaju. Došli su do određenih opažanja o općoj prirodi razina mišljenja i njihovom odnosu prema poučavanju. Pierre van Hiele je primijetio da se na svakoj razini eksplicitno pojavljuje ono što je bilo implicitno na prethodnoj razini. Na razini 0, likovi su zapravo određeni svojim svojstvima, ali osoba na 0. razini nije svjesna tih svojstava. Pierre tvrdi da su razine karakterizirane divergentnošću u objektima mišljenja. Primjerice, na razini 0, objekt mišljenja su geometrijski oblici. Učenik identificira, imenuje, uspoređuje geometrijske oblike (npr. krugove, trokute, kutove, …) prema njihovom izgledu. Na razini 1, učenik analizira geometrijske oblike (iz razine 0) u pogledu njihovih komponenti i odnosa među komponentama te ih svrstava u razrede. Dakle, objekt mišljenja na prvoj razini su klase oblika. Potom učenik empirijski otkriva svojstva klase oblika (npr. preklapanjem, mjerenjem, upotrebom dijagrama i sl.), pa na razini 2, ta svojstva postaju objekt mišljenja. Učenik logički povezuje prethodno otkrivena svojstva davanjem neformalnih argumenata. Na razini 3, odnosi među svojstvima postaju objekt mišljenja. Učenik deduktivno dokazuje teoreme i uspostavlja međusobne odnose među mrežama teorema, a na razini 4, objekt mišljenja su deduktivni aksiomatski sustavi geometrije. Učenik uspostavlja teoreme u različitim aksiomatskim sustavima i uspoređuje te sustave. ([7]) Razine geometrijskog mišljenja prema van Hieleovoj teoriji nalaze se u *Tablici 2.1*.

Pierre van Hiele također ističe da svaka razina ima svoje jezične simbole i vlastiti sustav odnosa kojim su ti simboli povezani. Struktura jezika glavni je faktor u napredovanju van Hieleovim razinama, počevši od konkretnih struktura (razina 0), preko vizualnih geometrijskih struktura (razine 1 - 2), do apstraktnih struktura (razine 3 - 4). Naime, par van Hiele je primijetio da mnogi neuspjesi u poučavanju geometrije proizlaze iz jezične barijere, odnosno nastavnikove uporabe jezika više razine nego što ga učenik razumije. Prijelaz s niže razine na višu ovisniji je o iskustvu s poučavanjem nego o dobi ili biološkoj zrelosti. Moguće je da određene metode poučavanja ne dopuštaju postizanje viših razina, tj. da mišljenja na višim razinama ostaju nedostupna učeniku. Van Hieleovi ističu da je učenicima moguće predstaviti materijal iznad njihove stvarne razine. Na primjer, „serviraju“ im se svojstva geometrijskog oblika koja memoriraju umjesto da ih sami otkriju (razina 1), ili samo kopiraju dokaz umjesto da ga sami izvedu ili ga barem samostalno argumentiraju (razina 2). To rezultira nedostupnošću više razine. ([7])

Tablica 2. 1. Razine geometrijskog mišljenja prema van Hieleu ([6])

RAZINA		OBJEKT MIŠLJENJA	PROIZVOD MIŠLJENJA
0.	**VIZUALIZACIJA**	oblici i njihov izgled (čemu su nalik)	klase ili grupe oblika koji „izgledaju slično“
1.	**ANALIZA**	klase oblika (umjesto pojedinačnih oblika s razine 0)	svojstva geometrijskih oblika
2.	**NEFORMALNA DEDUKCIJA**	svojstva geometrijskih oblika	odnosi među svojstvima geometrijskih oblika
3.	**DEDUKCIJA**	odnosi među svojstvima geometrijskih oblika	deduktivni aksiomatski sustavi geometrije (ravnine i prostora)
4.	**STROGOST**	deduktivni aksiomatski sustavi geometrije	usporedba različitih aksiomatskih sustava geometrije (euklidske i neeuklidske geometrije)

Prema Pierre van Hieleu, napredak s niže razine na višu uključuje pet faza: informiranje, usmjereno vođenje, objašnjavanje, slobodno usmjeravanje i integriranje. Opis faza nalazi se u *Tablici 2.2*. ([7])

Tablica 2. 2. Faze za napredovanje razinama geometrijskog mišljenja prema van Hieleu

FAZA	OPIS FAZE
Informiranje	Učenik se upoznaje s materijalom putem dijaloga s nastavnikom (npr. analizira primjere i kontraprimjere).
Usmjereno vođenje	Učenik samostalno realizira radnju u svrhu otkrivanja svojstava i odnosa među objektima (npr. preklapa objekte, mjeri, traži simetrije, …).
Objašnjavanje	Učenik svojim riječima tumači ono do čega je samostalno došao, a nastavnik ga usmjerava da pomoću matematičkih terminima opisuje uočene odnose i svojstva (npr. izražava ideje o svojstvima „novog“ oblika).
Slobodno usmjeravanje	Učenik primjenjuje naučeno u rješavanju problema.
Integriranje	Učenik povezuje stečeno znanje s postojećim u mrežu znanja, tj. rezimira sve što je naučio o geometrijskom obliku.

2.1. Matematička učila u van Hieleovom modelu

Za učenike na razinama 0 i 1 važna je učinkovita uporaba konkretnih fizičkih materijala i učila poput geometrijskih pločica i geoploče, dok za one na višim razinama prednost imaju alati dinamične geometrije. Ovdje ćemo samo opisati neka učila, a u kasnijim poglavljima se nalaze aktivnosti u kojima se ona primjenjuju.

2.1.1. Geometrijske pločice

Geometrijske pločice su matematičko učilo koncipirano tijekom druge polovice dvadesetog stoljeća. Njihov idejni tvorac bio je Edward Prenowitz u organizaciji Education Development Center (EDC). Mogu biti izrađene od plastike ili drva. ([5]) Standardni set geometrijskih pločica (Slika 2.1.1.1.) uključuje sljedeće geometrijske oblike:

- zeleni jednakostranični trokut sa stranicom duljine 25 mm
- narančasti kvadrat sa stranicom duljine 25 mm
- crveni jednakokračni trapez s duljom osnovicom duljine 50 mm i kraćom osnovicom duljine 25 mm, krakovima duljine 25 mm te unutarnjim kutovima veličina 60° i 120°
- bež romb sa stranicom duljine 25 mm i unutarnjim kutovima veličina 30° i 150°
- plavi romb sa stranicom duljine 25 mm i unutarnjim kutovima veličina 60° i 120°
- žuti pravilni šesterokut sa stranicom duljine 25 mm.

Slika 2.1.1. 1. Standardni set geometrijskih pločica

Današnje inačice geometrijskih pločica često uključuju i povezane oblike, kao što su dva romba ili dva šesterokuta (Slika 2.1.1.2.).

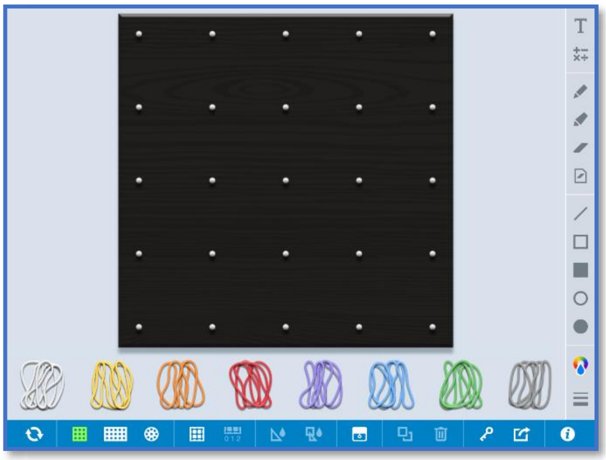
Slika 2.1.1. 2. Noviji oblici geometrijskih pločica

Geometrijske pločice potiču razvoj vizualno-motoričkih vještina, apstraktnog mišljenja te bolje razumijevanje i primjenu matematičkih koncepata geometrije kod učenika. Korištenjem pločica, učenici mogu generirati raznolike geometrijske uzorke, što doprinosi njihovom razumijevanju simetrije, kao i pojmova duljine, površine, obujma i drugih geometrijskih koncepata. Inačica pločica s povezanim oblicima dodatno proširuje mogućnosti učenja i istraživanja. Omogućuje učenicima da razvijaju kompleksnije vještine analize, sinteze i primjene geometrijskih koncepata u različitim kontekstima. Osim u istraživanju geometrije, geometrijske pločice su vrijedno sredstvo i u drugim matematičkim područjima, kao što je razvoj računskih vještina. Na primjer, mogu poslužiti za učenje osnovnih računskih operacija, gdje učenici slažu pločice u skupine kako bi izračunali ukupnu vrijednost.

2.1.2. Geoploča

Geoploča (Slika 2.1.2.1.) je matematičko učilo osmišljeno sredinom dvadesetog stoljeća od strane egipatskog matematičara Caleba Gattegna. Koristi se u proučavanju matematičkih koncepata jer omogućuje njihovu vizualnu reprezentaciju. Geoploče se proizvode u različitim dimenzijama, a njihovu osnovu čini niz razmaknutih igala ili čavlića raspoređenih u kvadratnu, kružnu ili izometričku mrežu. Razmak i raspored igala mogu varirati, a postavljanjem elastičnih traka (u različitim bojama) oko igala oblikuju se linije i oblici. Ovo čini geoploču važnim pomagalom u istraživanju geometrijskih koncepata poput opsega i površine, mjernih jedinica za duljinu i površinu te svojstava geometrijskih likova. Također, koristan su alat za istraživanje matematičkih koncepata vezanih uz brojeve i algebru, primjerice koncept razlomka, decimalnog broja i postotka. Osim fizičkih drvenih i plastičnih geoploča, danas postoje i virtualne (Slika 2.1.2.2.), koje pružaju interaktivno iskustvo istraživanja prostornih odnosa i geometrijskih pojmova, te tiskane (papirnate) verzije, u obliku mreža točaka. ([4], [8])

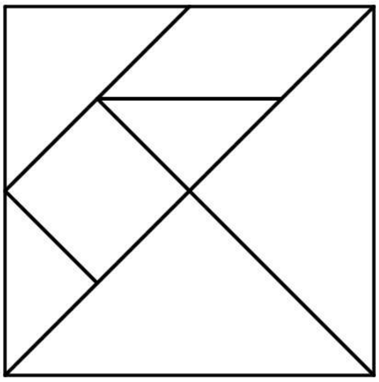
Slika 2.1.2. 1.[5] Geoploča



Slika 2.1.2. 2.[6] Virtualna geoploča

2.1.3. Tangram

Tangram, tradicionalna igra i slagalica koja potječe iz Kine, pruža raznorazne mogućnosti učenja matematike. Sastoji se od sedam dijelova koji zajedno tvore kvadrat. Uključuje pet jednakokračnih pravokutnih trokuta te dva četverokuta, paralelogram i kvadrat (Slika 2.1.3.1.). Cilj tangrama je sastaviti različite oblike koristeći dijelove slagalice, bez preklapanja. Godine 1942. dokazano je da se od dijelova tangrama može sastaviti trinaest različitih mnogokuta, uzimajući u obzir samo nesukladne oblike, bez gledanja njihove unutrašnje podjele na dijelove tangrama. ([6]) Prema tome, tangram nije samo obična igra, već sredstvo za razvoj matematičkih, prostornih i kreativnih vještina. Potiče razmišljanje izvan okvira, logičko razmišljanje, analitičke vještine, sposobnost rješavanja problema te razvoj različitih aspekata kognitivnih sposobnosti.



Slika 2.1.3. 1. Tangram

[5] https://www.eaieducation.com/

[6] https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

3. KONCEPTI DULJINE I POVRŠINE U NACIONALNOM MATEMATIČKOM KURIKULUMU U HRVATSKOJ

Nacionalni matematički kurikulum u Hrvatskoj obuhvaća osnovnoškolsko i srednjoškolsko gimnazijsko obrazovanje. U ovom poglavlju ćemo opisati strukturu kurikuluma i navesti ishode kojima se osigurava razvoj geometrijskog mišljenja u osnovnoj i srednjoj školi na konceptima duljine i površine.

3.1. Struktura kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj

Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj ([15]) ističe dvije dimenzije matematičkog obrazovanja – matematičke procese i matematičke domene. Te se dvije dimenzije prilikom učenja i poučavanja matematike isprepliću, a svrha dvodimenzionalnosti je stjecanje matematičkih kompetencija. Treća iznimno važna dimenzija matematičkog obrazovanja navedena je samo implicitno u odgojno-obrazovnim ciljevima nastavnog predmeta Matematika, a radi se o stavovima i odnosima prema matematici i učenju matematike.

Matematički procesi su generičke matematičke kompetencije. Prožimaju sve matematičke (sadržajne) domene i sistematizirani su u sljedećim skupinama:

1. Prikazivanje i komunikacija,
2. Povezivanje,
3. Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje,

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje,
5. Primjena tehnologije.

Domene predmeta Matematika su specifične matematičke kompetencije vezane uz matematičke sadržaje usustavljene oko velikih matematičkih ideja i elementarnih koncepata. U Kurikulumu je istaknuto pet međusobno povezanih matematičkih domena koje se tijekom godina učenja matematike neprekidno razvijaju, a to su: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost. Njima su redom pridružene slovne oznake A, B, C, D i E. Budući da je tema ovog rada geometrijska, za nju će ključne domene biti Oblik i prostor (C) te Mjerenje (D). U domeni Oblik i prostor neizostavan je pojam prostornog zora. Prostorni zor predstavlja intuitivni osjećaj za oblike i njihove međusobne odnose. Zajedno s geometrijskim rasuđivanjem učenicima treba razviti sposobnost stvaranja mentalnih predodžbi objekata i prostornih odnosa. Domena Oblik i prostor kao sastavnica geometrije usredotočena je na proučavanje oblika, njihovih položaja te međusobnih odnosa. „Rastavljanjem i sastavljanjem oblika uspoređuju se njihova svojstva i uspostavljaju veze među njima. Iz uočenih svojstava i odnosa izvode se pretpostavke i tvrdnje koje se dokazuju crtežima i algebarskim izrazima. Koristeći se geometrijskim priborom i tehnologijom, učenici će izvoditi geometrijske transformacije, istraživati i primjenjivati njihova svojstva te razviti koncepte sukladnosti i sličnosti. Interakcijom s ostalim domenama i matematičkim argumentiranjem prostornih veza, rabeći prostorni zor i modeliranje, učenici pronalaze primjenu matematičkih rješenja u različitim situacijama. Prepoznaju ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnome okružju te ih upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe.“ ([15])

Mjerenje je uspoređivanje neke veličine s istovrsnom veličinom koja je dogovorena (standardna) jedinica mjere. „U domeni Mjerenje usvajaju se standardne mjerne jedinice za novac, duljinu, površinu, volumen, masu, vrijeme, temperaturu, kut i brzinu te ih se mjeri odgovarajućim mjernim uređajima i kalendarom. Procjenjivanjem, mjerenjem, preračunavanjem i izračunavanjem veličina određuju se mjeriva obilježja oblika i pojava uz razložnu i učinkovitu upotrebu alata i tehnologije. Rezultati se interpretiraju i izražavaju u jedinici mjere koja odgovara situaciji. Učenici će mjerenjem povezati matematiku s drugim odgojno-obrazovnim područjima, s vlastitim iskustvom, svakodnevnim životom u kući i zajednici te na radnome mjestu, prepoznati mjeriva obilježja ravninskih i prostornih oblika u umjetnosti te ih upotrebljavati za opis i analizu svijeta oko sebe.“ ([15])

Osnovna sastavnica svakog kurikuluma su odgojno-obrazovni ishodi. Identificiraju se pomoću kratke oznake, primjerice MAT OŠ D.1.1., pri čemu MAT označava predmet Matematika, OŠ ukazuje na ostvarivanje ishoda u osnovnoj školi (u srednjoj školi (gimnaziji) oznaka SŠ), slovna oznaka upućuje o kojoj je sadržajnoj domeni riječ, prvi broj detektira razred u kojem se ishod ostvaruje, a drugi redni broj ishoda u specificiranoj domeni. Ishodi srednjoškolskih programa variraju ovisno o godišnjem broju nastavnih sati. Za prve i druge razrede gimnazije navedeni su ishodi programa sa 105, 140, 175 i 210 sati godišnje, za treće razrede gimnazije ishodi programa sa 105, 140, 175, 210 i 245 sati godišnje, a za četvrte razrede gimnazije ishodi programa sa 96, 128, 160, 192 i 224 sata godišnje. U ovom radu navodimo ishode programa s najvećim godišnjim fondom sati.

3.2. Ishodi kojima se ostvaruje razvoj geometrijskog mišljenja u osnovnoj i srednjoj školi na konceptu duljine

S pojmom duljine učenici se susreću već u nižim razredima osnovne škole. U prvom razredu osnovne škole prepoznaju odnose među objektima s obzirom na duljinu (dulji-kraći-jednako dug), u drugom i trećem razredu procjenjuju, mjere te crtaju dužine zadane duljine, a u četvrtom razredu razlikuju i opisuju trokute prema duljinama stranica. Tijekom izgradnje koncepta duljine poželjno je provoditi razne aktivnosti u kojima učenici procjenjuju duljine objekata, mjere neformalnim mjernim jedinicama, uočavaju greške pri mjerenju i potrebu za standardizacijom te uvođenjem formalnih mjernih jedinica. Duljina se pojavljuje u različitim kontekstima (duljina ravne crte, duljina otvorene i zatvorene razlomljene crte, duljina ruba lika, duljina luka krivulje, duljina vektora itd.). Nadalje, učenici otkrivaju pojam opsega kao duljine ruba geometrijskog oblika. Određuju opseg različitih geometrijskih likova kao što su pravokutnik, kvadrat, trokut, četverokut, krug i drugi. Opseg ima razne praktične primjene u stvarnom svijetu. Na primjer, koristi se za izračunavanje duljine ograde oko zemljišta, u građevinskoj industriji za izračunavanje potrebne količine materijala i slično. U srednjoj školi, koncept duljine proširuje se na udaljenost između točaka u koordinatnom sustavu. Uče se napredni koncepti kao što su duljina krivulje primjenom integralnog računa te primjene koncepta duljine u trigonometriji, analitičkoj geometriji i diferencijalnom računu.

Ishodi koji pridonose razvoju geometrijskog mišljenja na konceptu duljine u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju su:

Prvi razred:

- MAT OŠ D.1.1. Analizira i uspoređuje objekte iz okoline prema mjerivu svojstvu.

Drugi razred:

- MAT OŠ C.2.1. Opisuje i crta dužine.
- MAT OŠ C.2.2. Povezuje poznate geometrijske objekte.
- MAT OŠ D.2.2. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.

Treći razred:

- MAT OŠ C.3.3. Služi se šestarom u crtanju i konstruiranju.
- MAT OŠ D.3.1. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.
- MAT OŠ D.3.3. Određuje opseg likova.

Četvrti razred:

- MAT OŠ C.4.2. Razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut.

Peti razred:

- MAT OŠ C.5.1. Opisuje skupove točaka u ravnini te analizira i primjenjuje njihova svojstva i odnose.
- MAT OŠ C.5.2. Opisuje i crta/konstruira geometrijske likove te stvara motive koristeći se njima.
- MAT OŠ C.5.3. Osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava skupove točaka u ravnini.
- MAT OŠ D.5.2. Odabire i preračunava odgovarajuće mjerne jedinice.
- MAT OŠ D.5.3. Računa i primjenjuje opseg i površinu geometrijskih likova.

Šesti razred:

- MAT OŠ C.6.2. Konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose.
- MAT OŠ C.6.3. Konstruira četverokute, analizira njihova svojstva i odnose.
- MAT OŠ D.6.1. Odabire i preračunava odgovarajuće mjerne jedinice.
- MAT OŠ D.6.2. Računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta.

Sedmi razred:

- MAT OŠ C.7.1. Crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva.
- MAT OŠ C.7.2. Crta, zbraja i oduzima vektore.
- MAT OŠ C.7.3. Translatira skupove točaka u ravnini.
- MAT OŠ D.7.3. Odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.
- MAT OŠ D.7.4. Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.
- MAT OŠ D.7.5. Odabire i preračunava odgovarajuće mjerne jedinice.

Osmi razred:

- MAT OŠ C.8.3. Primjenjuje Talesov poučak.
- MAT OŠ C.8.4. Prikazuje međusobne odnose dviju kružnica u ravnini.
- MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak.
- MAT OŠ D.8.4. Odabire i preračunava odgovarajuće mjerne jedinice.

Prvi razred srednje škole (210 sati godišnje):

- MAT SŠ C.1.1. Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.
- MAT SŠ C.1.2., MAT SŠ D.1.2. Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta.
- MAT SŠ D.1.3. Primjenjuje trigonometrijske omjere.

Drugi razred srednje škole (210 sati godišnje):

- MAT SŠ C.2.3., MAT SŠ D.2.1. Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu.
- MAT SŠ C.2.4., MAT SŠ D.2.2. Primjenjuje znanja o kružnici i krugu.
- MAT SŠ C.2.5., MAT SŠ D.2.3. Analizira položaj pravaca i ravnina u prostoru te računa udaljenost i mjeru kuta.

Treći razred srednje škole (245 sati godišnje):

- MAT SŠ C.3.6., MAT SŠ D.3.1. Primjenjuje račun s vektorima.

3.3. Ishodi kojima se ostvaruje razvoj geometrijskog mišljenja u osnovnoj i srednjoj školi na konceptu površine

Pojam površine učenici otkrivaju u četvrtom razredu osnovne škole. Uspoređuju površine likova, mjere ih prebrojavanjem jediničnih kvadrata te usvajaju standardne mjerne jedinice za površinu. U višim razredima osnovne škole otkrivaju i primjenjuju formule za površinu kvadrata, pravokutnika, paralelograma, romba, trapeza, deltoida i pravilnog šesterokuta, površinu trokuta, površinu kruga i njegovih dijelova. U srednjoj školi, učenici stječu dublje razumijevanje geometrijskih koncepata i metoda za izračunavanje površina. Primjenjuju trigonometriju trokuta, u analitičkoj geometriji površine figura računaju pomoću algebarskih metoda, dok u četvrtom razredu srednje škole određuju površinu ispod grafa funkcije pomoću određenog integrala. Ishodi koji pridonose razvoju geometrijskog mišljenja na konceptu površine u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju su:

Četvrti razred:

- MAT OŠ D.4.2. Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima.

Peti razred:

- MAT OŠ D.5.3. Računa i primjenjuje opseg i površinu geometrijskih likova.

Šesti razred:

- MAT OŠ D.6.1. Odabire i preračunava odgovarajuće mjerne jedinice.
- MAT OŠ D.6.2. Računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta.

Sedmi razred:

- MAT OŠ D.7.3. Odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.
- MAT OŠ D.7.4. Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.
- MAT OŠ D.7.5. Odabire i preračunava odgovarajuće mjerne jedinice.

Osmi razred:

- MAT OŠ D.8.4. Odabire i preračunava odgovarajuće mjerne jedinice.

Prvi razred srednje škole (210 sati godišnje):

- MAT SŠ C.1.1. Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.

Drugi razred srednje škole (210 sati godišnje):

- MAT SŠ C.2.3., MAT SŠ D.2.1. Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu.
- MAT SŠ C.2.4., MAT SŠ D.2.2. Primjenjuje znanja o kružnici i krugu.

Četvrti razred srednje škole (224 sata godišnje):

- MAT SŠ B.4.11. Primjenjuje integral u problemskim zadatcima.

4. VAN HIELE MODEL I KONCEPT DULJINE

U ovom poglavlju usredotočit ćemo se na koncept duljine iz perspektive van Hiele razina. U njegovoj izgradnji, nužno je slijediti niz koraka za stjecanje sposobnosti mjerenja i određivanja duljina različitih oblika krivulja. Svaki korak igra ključnu ulogu u stvaranju strategije koja omogućava konzistentno i točno mjerenje. Slijedi pregled ključnih koraka u procesu.

Prvi korak u konceptualizaciji duljine uključuje procjenu duljine objekata. Ona nam pomaže u odabiru odgovarajućih metoda mjerenja i prilagođava se specifičnostima svake situacije. Nakon procjene, koristimo neformalne mjerne jedinice (stopa, uže, spajalica, bilježnica…) s ciljem razvijanja osjećaja za duljinu. Također, definiramo jediničnu duljinu koja će nam poslužiti kao referentna točka za daljnja mjerenja. Za mjerenje duljine zakrivljenih linija koristimo neformalne mjernice prilagođene njihovom obliku da dobijemo što precizniju procjenu duljine. Ova metoda omogućava mjerenje složenih geometrijskih oblika. Svjesni smo mogućih grešaka pri mjerenju, bilo da su uzrokovane ljudskim faktorom ili drugim vanjskim utjecajima, prema tome, uočavamo važnost standardizacije kako bi se osigurala dosljednost i usporedivost mjerenja. Standardi pomažu u održavanju preciznosti u različitim okolnostima. Radi postizanja veće preciznosti, uvodimo formalne mjerne jedinice koje su standardizirane i priznate u širem kontekstu te je ovo ključan korak prema objektivnosti u mjerenjima. Nakon toga, definiramo metode za mjerenje duljine ravne crte, koristeći standardne jedinice u svrhu osiguravanja točnosti rezultata. Zatim podešavamo mjerni sustav za mjerenje otvorenih razlomljenih crta, uvažavajući specifičnosti njihove geometrije. Također, razvijamo pristup mjerenju zatvorenih razlomljenih crta, uključujući metode koje osiguravaju točnost bez obzira na njihovu složenost. Isto tako, razmatramo kako mjeriti duljinu zakrivljenih crta, koristeći formalne mjernice koje su prilagođene zakrivljenom obliku. U kontekstu kvadratne mreže, razvijamo strategije za precizno mjerenje duljine, uzimajući u obzir razmak između čvorova mreže. Konačno, otkrivamo i usvajamo metode za mjerenje duljine luka krivulje, obuhvaćajući sve aspekte krivulje kako bismo dobili cjelovitu predstavu njezine duljine. Navedeni koraci čine temelj izgradnje koncepta duljine, osiguravaju točnost mjerenja, standardizaciju te primjenjivost na različite geometrijske oblike.

Sjetimo se da je i opseg duljina ruba ravninskog geometrijskog oblika. Na razini vizualizacije (van Hiele razina 0), učenici prepoznaju geometrijske oblike, ali razumiju ih samo putem vizualne percepcije. Na ovoj razini, učenici identificiraju opseg geometrijskih oblika, ali ga ne definiraju i ne bave se apstraktnijim konceptima vezanima uz opseg. Na razini analize (van Hiele razina 1), učenici počinju razumjeti koncept opsega i počinju razmišljati o duljinama i rubovima geometrijskih figura na nešto apstraktniji način. Razmišljaju o tome kako se duljine stranica povezuju oblikom i opsegom figura, ali još uvijek se fokusiraju na konkretne primjere. Na višim razinama mišljenja (van Hiele razine 2 - 4), učenici razvijaju dublje razumijevanje opsega i duljine u geometriji, tj. bave se apstraktnijim konceptima poput izvođenja matematičkih formula za izračunavanje opsega različitih oblika, primjenjuju teoreme i dokazuju tvrdnje vezane za duljinu krivulje i opseg.

U nastavku slijedi niz aktivnosti koje učenicima omogućuju istraživanje koncepta duljine na različitim razinama van Hiele modela.

4.1. Aktivnost *Dulji-kraći-jednak dug*

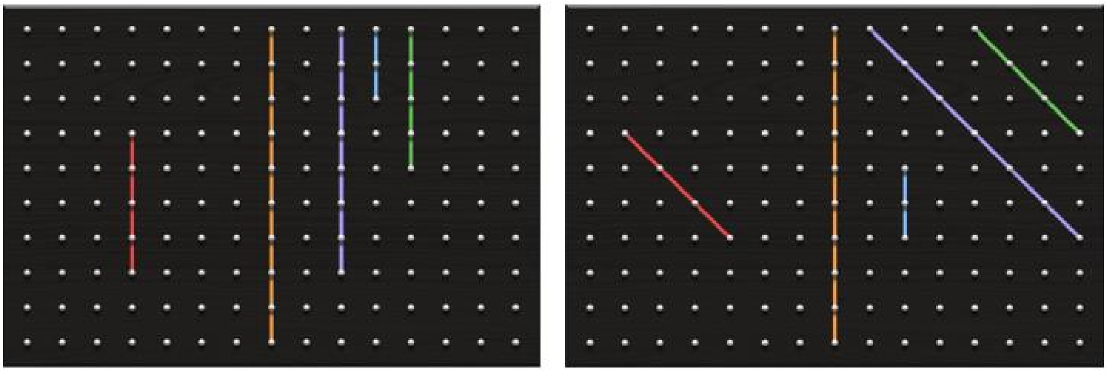
Aktivnost je primjerena učenicima nižih razreda osnovne škole i zahtijeva razinu vizualizacije. Cilj je da učenici uspoređuju predmete po duljini riječima „dulji“, „kraći“ te „jednako dug“ (MAT OŠ D.1.1.). Radeći u paru, promatraju objekte u razredu i uspoređuju primjerice rubove klupe, rubove ploče, rubove projekcijskog platna, rubove udžbenika i bilježnica, kazaljke sata... Potom dobiju set geometrijskih pločica, od svake po dva primjerka, te uspoređuju duljine stranica pločica prislanjanjem (Slika 4.1.1.).

Učenici putem ove aktivnosti osvješćuju značenja riječi „dulji“, „kraći“ te „jednako dug“, tj. koriste matematički jezik vezan uz koncept duljine.

Slika 4.1. 1. Primjer predmeta koje učenici uspoređuju po duljini

4.2. Aktivnost *Duljina na geoploči*

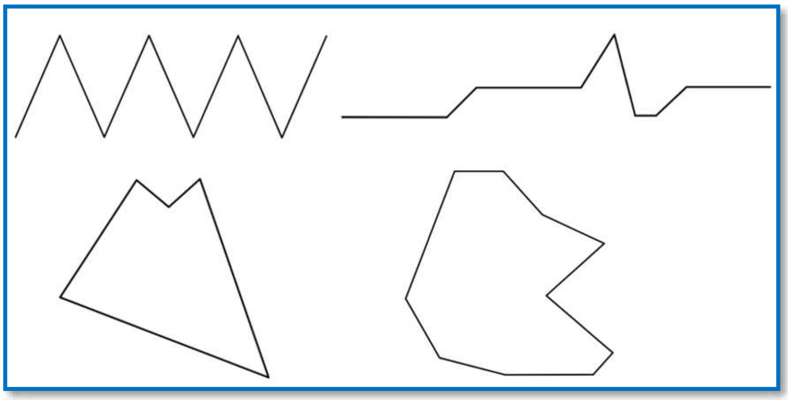
Ova aktivnost primjerena je nižim razredima osnovne škole, a zamišljena je za provedbu u paru. Cilj aktivnosti je da učenici pomoću učila osvijeste značenja riječi „dulji“, „kraći“ te „jednako dug“ (MAT OŠ D.1.1.). Svaki par učenika dobiva geoploču i set gumica. Učenici gumicom podijele geoploču na dva dijela. Jedan učenik na jednoj strani geoploče gumicom prikaže dužinu, a drugi učenik na drugoj strani treba prikazati od te dužine dulju, kraću te jednako dugu dužinu. Potom zamijene uloge i ponove aktivnost. Primjer rješenja jednog para učenika nalazi se na *Slici 4.2.1*. Kao u prethodnoj aktivnosti, učenici koriste matematički jezik vezan uz koncept duljine primjeren uzrastu. Aktivnost zahtijeva razinu 0 van Hiele modela.



Slika 4.2. 1. Primjer rješenja jednog učeničkog para

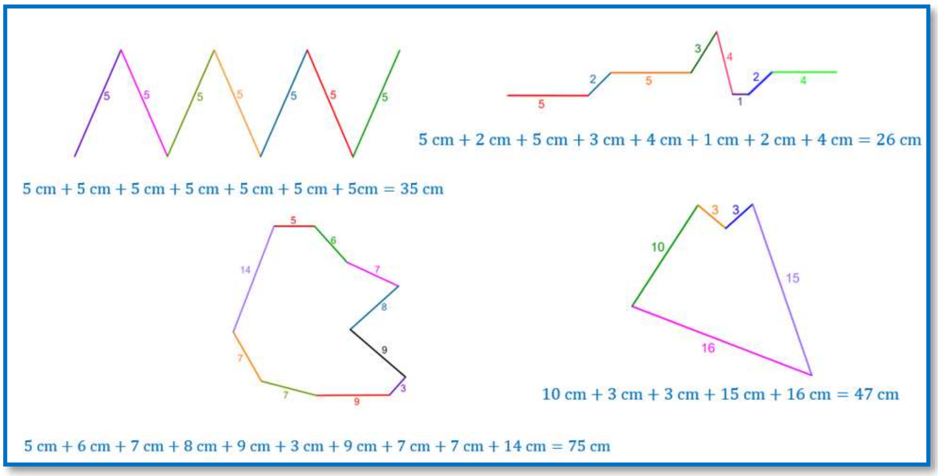
4.3. Aktivnost *Duljina poligonalne linije*

Cilj aktivnosti je da učenici drugog razreda osnovne škole mjere duljinu poligonalne linije (MAT OŠ D.2.2.). Učenici dobivaju nastavni listić i ravnalo. Primjeri poligonalnih linija danih na nastavnom listiću nalaze se na *Slici 4.3.1*.



Slika 4.3. 1. Primjeri poligonalnih linija na nastavnom listiću koje učenici mjere

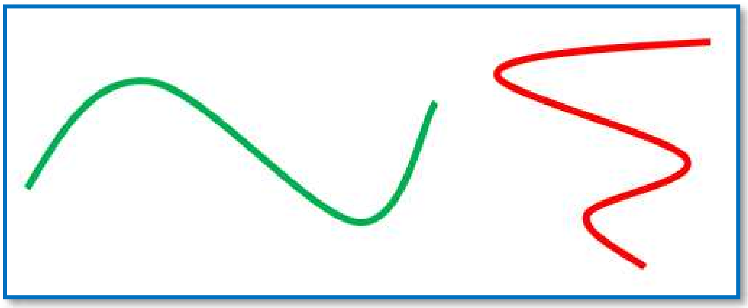
Svi dijelovi poligonalne linije moraju imati cjelobrojnu duljinu. Radeći u paru, učenici mjere dane duljine ravnalom. Zaključuju da trebaju izmjeriti svaku crtu zasebno, bilježe izmjerene duljine te ih zbrajaju kako bi dobili ukupnu duljinu linije (Slika 4.3.2.). Nakon mjerenja slijedi razredna diskusija u kojoj učenici objašnjavaju svoje postupke i razmišljanje tijekom mjerenja te kako su postavili ravnalo u svrhu dobivanja točnih rezultata. Ova aktivnost odvija se na razini vizualizacije, a putem diskusije se potiče prijelaz na sljedeću razinu, razinu analize.



Slika 4.3. 2. Primjer učeničkih mjerenja

4.4. Aktivnost *Koja je krivulja dulja?*

Cilj aktivnosti je da učenici mjere i uspoređuju duljine zakrivljenih crta (MAT OŠ D.3.1.). Aktivnost je primjerena učenicima trećeg razreda osnove škole na prvoj razini van Hiele modela. Zamišljena je za rad učenika u paru. Svaki par učenika dobije nastavni listić na kojem su razlomljene linije (Slika 4.4.1.) koje trebaju usporediti po duljini.



Slika 4.4. 1. Primjer razlomljenih crta na nastavnom listiću

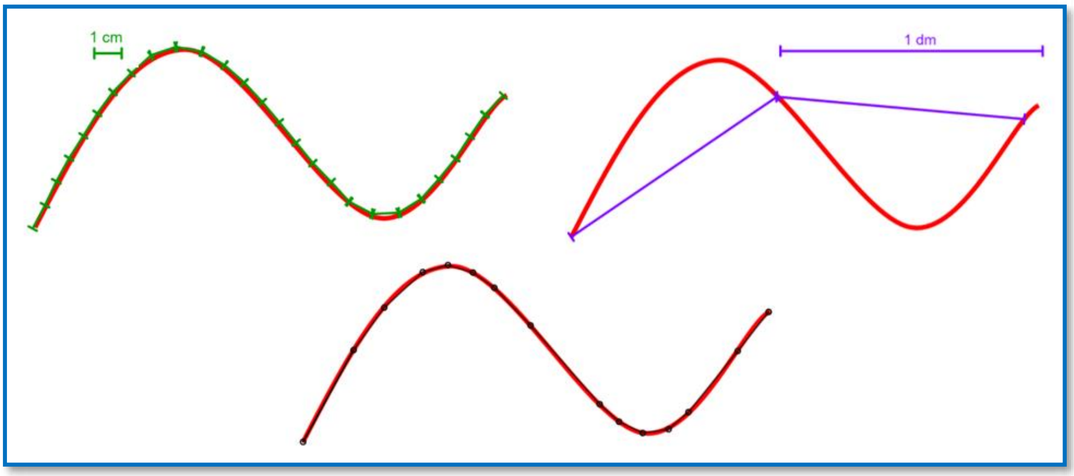
Učenici razvijaju ideje kako izmjeriti i usporediti zadane zakrivljene crte. Prvo koriste svoje vlastite mjere poput gumice i olovke, potom i ravnalo, no zaključuju da na taj način nisu mogli precizno izmjeriti linije te prepoznaju potrebu za drugim alatima ili metodama. Uočavaju da bi im bilo lakše izmjeriti linije kada bi ih mogli izravnati, odnosno izražavaju potrebu za fleksibilnim alatom poput trake ili konopca. Nastavnik stoga svakom paru učenika dodjeljuje konopac, koji koriste postavljajući ga duž zakrivljene linije te označavajući kraj konopca gdje se linija završava. Nakon toga, konopac prislone uz ravnalo kako bi utvrdili duljinu linije. Primjer učeničkog mjerenja prikazan je na *Slici 4.4.2*.

Slika 4.4. 2. Primjer učeničkog mjerenja krivulje

Nakon provedenih mjerenja slijedi razredna diskusija u kojoj učenici objašnjavaju kako su postavili konopac duž zakrivljene linije te kako su ga postavili na ravnalu. Njihova se razina mišljenja usmjerava na višu razinu pitanjima poput: *Koje su poteškoće u korištenju konopca za mjerenje zakrivljenih linija?, Možemo li svaku zakrivljenu liniju izmjeriti pomoću konopca, primjerice obalnu liniju ili stazu u prirodi?, Što ako nemamo konopac?*

4.5. Aktivnost *Kako izmjeriti duljinu krivulje?*

Cilj aktivnosti je da učenici procjenjuju i mjere duljinu zakrivljene crte (MAT OŠ D.3.1.). Aktivnost je primjerena učenicima trećeg razreda osnove škole na prvoj razini van Hiele modela. Usmjerena je na istraživanje različitih metoda mjerenja duljine zakrivljene linije te potiče učenike da promišljaju o preciznosti i primjeni različitih alata za mjerenje. U prvom dijelu aktivnosti učenici pojedinačno mjere duljinu zakrivljene linije nacrtane na tlu stopama. Nakon što nekoliko učenika izmjeri duljinu, uspoređuju rezultate i primjećuju razlike. Diskutiraju o razlozima zašto su rezultati različiti, uključujući varijaciju duljine stopala. U drugom dijelu aktivnosti, nastavnik dijeli učenike u tročlane skupine. Ideja je da aproksimiraju duljinu krivulje poligonalnom crtom. Svaka skupina dobiva tri nastavna listića na kojima je nacrtana krivulja te tri alata za mjerenje. Učenici unutar iste skupine imaju istu krivulju, a svaka skupina ima različitu sliku. Svaki član skupine dobio je zadatak da koristi različitu metodu mjerenja. Prvi učenik mjeri krivulju duljinom daščice od 1 cm, drugi učenik mjeri krivulju duljinom daščice od 1 dm, dok treći učenik samostalno bira točke na krivulji te mjeri udaljenost između njih ravnalom. Prva dva učenika procjenjuju koliko puta njihova daščica „stane“ u krivulju, a treći učenik treba primijetiti da je na ravnijim dijelovima krivulje potreban rjeđi raspored točaka, dok je na manje ravnim dijelovima potreban gušći raspored točaka kako bi se dobila preciznija mjerenja. Primjer mjerenja jedne skupine učenika nalazi se na *Slici 4.5.1*. Svaka skupina zapisuje i analizira dobivene rezultate te raspravlja o preciznosti i praktičnosti pojedine metode. U trećem dijelu aktivnosti, svaka skupina koristi špagu za mjerenje duljine krivulje kako bi provjerili kolika je greška nastala prilikom prethodnih mjerenja. Analiziraju dobivene rezultate i raspravljaju o optimalnosti i preciznosti pojedine metode. Na kraju slijedi razredna diskusija u kojoj svaka skupina dijeli svoje zaključke s ostalim učenicima. Raspravljaju o tome koja je metoda bila najpreciznija i zašto, te razmišljaju o primjeni naučenog u stvarnim situacijama.

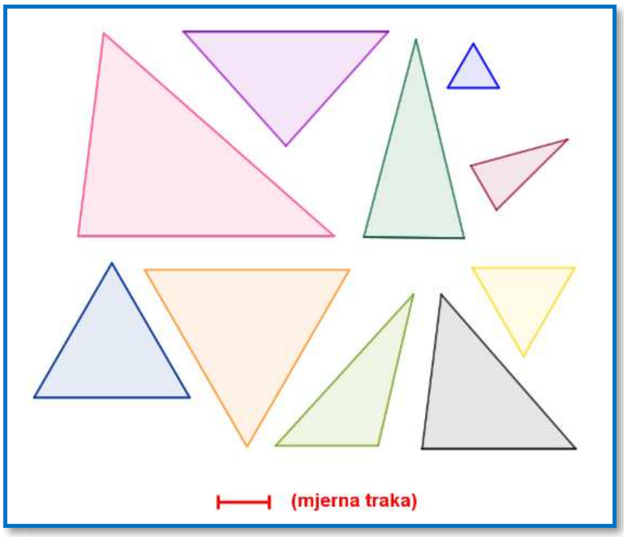


Slika 4.5. 1. Primjer učeničkog mjerenja krivulje ilustriran u alatu dinamične geometrije

Aktivnost je moguće prilagoditi u svrhu poticanja prijelaza na drugu, višu razinu van Hiele modela geometrijskog mišljenja. Budući da uključuje primjenu određenog integrala, takva aktivnost je namijenjena učenicima četvrtog razreda srednje škole. Cilj je aproksimirati duljinu luka krivulje na promatranom segmentu računajući određeni integral druge funkcije. Razrada aktivnosti je opisana pod nazivom *Aproksimacija duljine krivulje*.

4.6. Aktivnost *Sortiraj!*

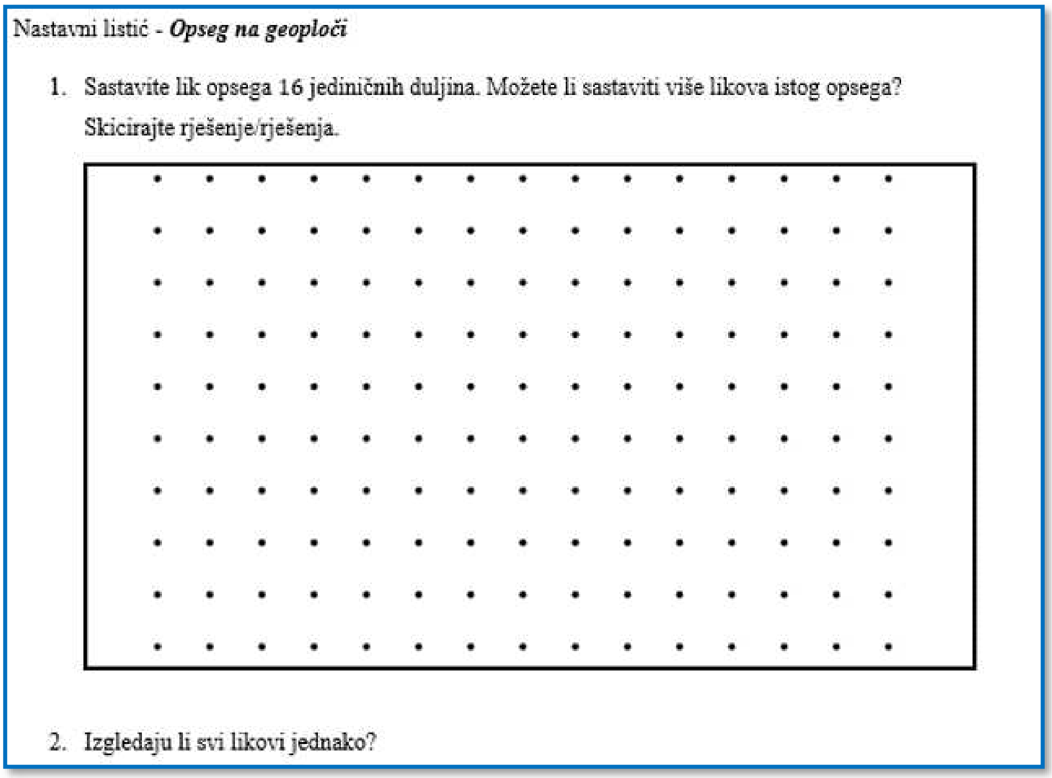
Aktivnost je namijenjena učenicima četvrtog razreda osnovne škole na van Hiele razini vizualizacije, za koju su prikladne aktivnosti sortiranja. Učenici rade u paru, a svaki par opremljen je mjernom trakom i plastificiranim karticama koje sadrže trokute (Slika 4.6.1.). Cilj je sortirati trokute s obzirom na duljine stranica (MAT OŠ C.4.2.), koristeći mjernu traku za precizno mjerenje. Svi trokuti uključeni u aktivnost moraju imati duljine stranica izmjerive pomoću trake. Nakon provedenog mjerenja, učenici zaključuju da neki trokuti imaju sve stranice jednakih duljina, neki samo dvije, a neki imaju sve tri stranice različitih duljina. Stoga, kartice s trokutima razvrstavaju u kategorije trokuta s tri, dvije ili jednom stranicom jednake duljine.



Slika 4.6. 1. Primjer kartica za aktivnost Sortiraj!

4.7. Aktivnost *Opseg na geoploči*

Cilj aktivnosti je da učenici određuju likove zadanog opsega koristeći geoploču (MAT OŠ D.5.3.). Aktivnost je namijenjena učenicima petog razreda osnovne škole na razini analize. Učenici su podijeljeni u parove i dobivaju set gumica, geoploču te nastavni listić sa zadacima (Slika 4.7.1.).


Nastavni listić - ***Opseg na geoploči***

1. Sastavite lik opsega 16 jediničnih duljina. Možete li sastaviti više likova istog opsega? Skicirajte rješenje/rješenja.

2. Izgledaju li svi likovi jednako?

3. Što zaključujete?

4. Proizvoljnom liku premjestite gumicu tako da novi lik ima isti opseg kao polazni lik.

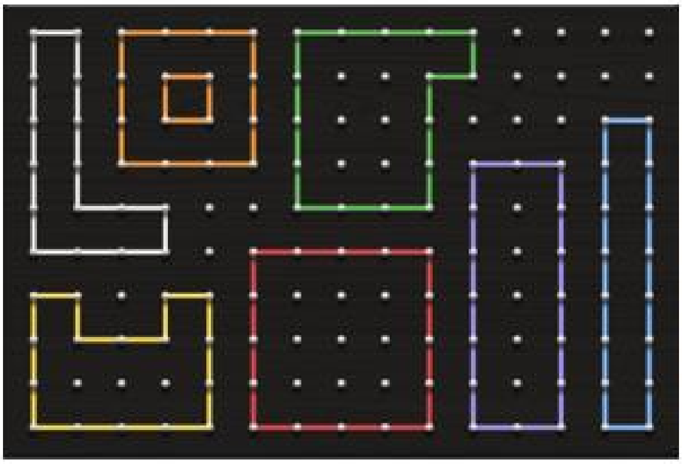
5. Je li moguće ispuniti zadatak 4. za sve likove opsega 16 jediničnih duljina?
Skicirajte primjer(e) ili protuprimjer(e).

Slika 4.7. 1. Nastavni listić za aktivnost Opseg na geoploči

Uz razmjenu ideja i mišljenja, slažu razne oblike i dolaze do zaključaka koje zapisuju na nastavni listić (Slika 4.7.2.).

Nastavni listić - ***Opseg na geoploči***

1. Sastavite lik opsega 16 jediničnih duljina. Možete li sastaviti više likova istog opsega? Skicirajte rješenje/rješenja.

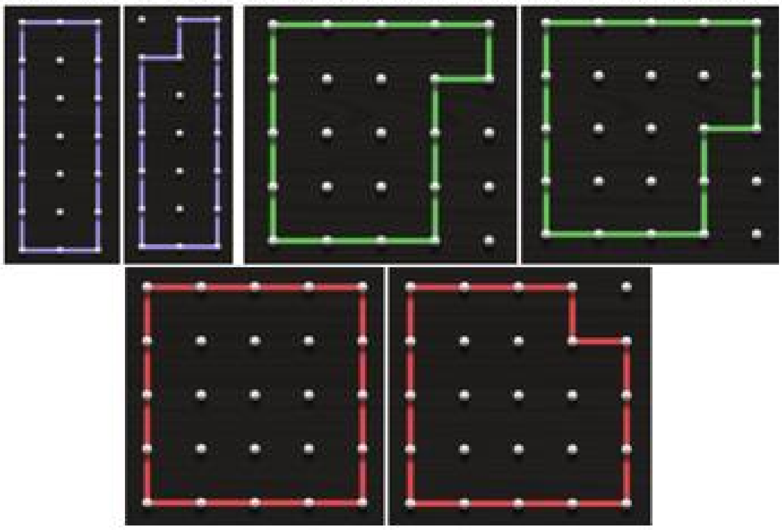


2. Izgledaju li svi likovi jednako?
Ne, postoje različiti likovi.

3. Što zaključujete?

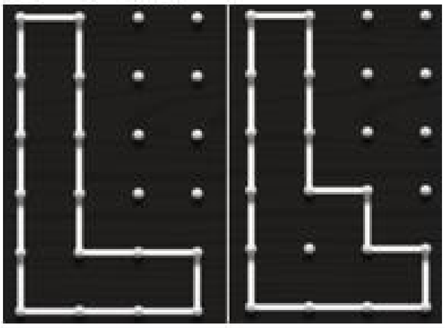
Različiti likovi mogu imati jednake opsege.

4. Proizvoljnom liku premjestite gumicu tako da novi lik ima isti opseg kao polazni lik.



5. Je li moguće ispuniti zadatak 4. za sve likove opsega 16 jediničnih duljina?

Skicirajte primjer(e) ili protuprimjer(e).



Slika 4.7. 2. Primjer učeničkog rješenja nastavnog listića Opseg na geoploči

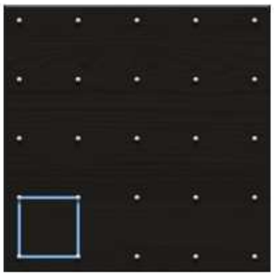
4.8. Aktivnost *Možeš li me promijeniti tako da ...?*

Cilj aktivnosti je da učenici primjenjuju opseg geometrijskih likova koristeći geoploču (MAT OŠ D.5.3.). Aktivnost je namijenjena učenicima petog razreda osnovne škole na razini analize. Učenici su podijeljeni u parove i dobivaju set gumica, geoploču te nastavni listić sa zadacima. Nastavni listić s primjerom učeničkih rješenja nalazi se na *Slici 4.8.1*.

Nastavni listić - ***Možeš li me promijeniti tako da …?***

1. Korištenjem kvadratne geoploče s 5x5 čavlića , u kvadratnoj mreži točaka odredite kvadrat najmanjeg mogućeg opsega. Koliko on iznosi?

   Najmanji mogući opseg kvadrata na geoploči s 5x5 čavlića iznosi 4 jedinične duljine.



2. Postoji li još neki lik jednakog opsega?

   Ne postoji.

3. Postoji li lik čiji je opseg veći za jednu jediničnu duljinu? Ako da, koliko različitih likova možete odrediti?

   Ne postoji.

4. Postoji li lik čiji je opseg veći za dvije jedinične duljinu? Ako da, koliko različitih likova možete odrediti?

   Postoji. Samo jedan lik.

Slika 4.8. 1. Primjer učeničkog rješenja nastavnog listića

Slijedi razredna diskusija u kojoj s učenicima raspravljamo zašto je opseg kvadrata na geoploči 5x5 čavlića četiri jedinične duljine, za koliko je jediničnih duljina moguće povećati njegov opseg, koje oblike dobijemo povećavanjem opsega polaznog kvadrata, kako bismo mogli kombinirati likove u svrhu stvaranja lika što većeg opsega te postoje li ograničenja našeg pristupa.

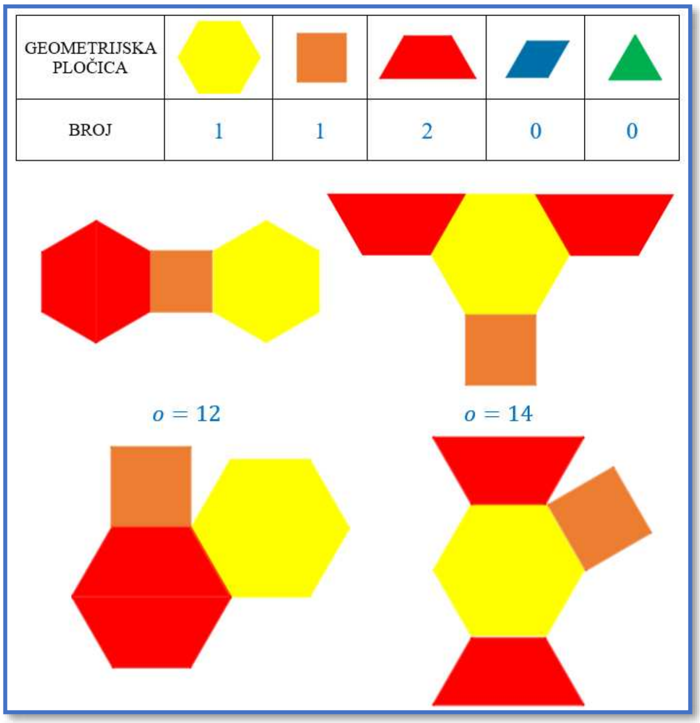
4.9. Aktivnost *Tko ima najdulji, a tko najkraći rub?*

Aktivnost je namijenjena učenicima petog razreda osnovne škole s ciljem da, radeći u paru, sastave likove najmanjeg i najvećeg opsega (MAT OŠ C.5.1.). Dobivaju set geometrijskih pločica s pet primjeraka svake pločice (osim bež romba), tablicu kao na *Slici 4.9.1.* i deset žetona na kojima su brojevi 0, 1 ili 2.

GEOMETRIJSKA PLOČICA					
BROJ					

Slika 4.9. 1. Tablica s brojem pločica potrebnih za sastavljanje lika

Učenici naizmjence izvlače žetone te redom popunjavaju tablicu brojevima s tih žetona. Zatim, koristeći pločice prema podatcima iz tablice, sastavljaju razne likove, računaju njihove opsege te crtaju otiske likova najmanjeg i najvećeg opsega (Slika 4.9.2.). Duljinu izražavaju pomoću jediničnih mjera, pri čemu je duljina stranice trokuta jedinična duljina.



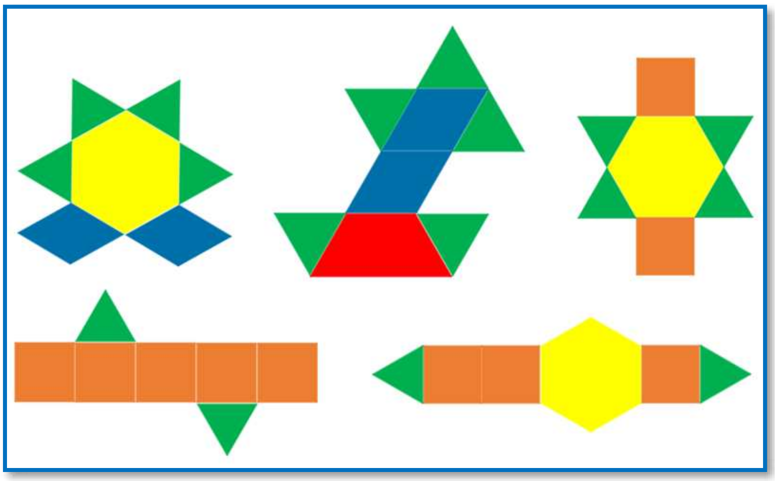
GEOMETRIJSKA PLOČICA					
BROJ	1	1	2	0	0

Slika 4.9. 2. Primjer učeničkog rješenja aktivnosti
Tko ima najdulji, a tko najkraći rub?

Potom pred razredom prezentiraju svoje likove najmanjeg i najvećeg opsega i komentiraju koje su pločice koristili prilikom njihovog sastavljanja. Zaključuju da lik najmanjeg opsega dobiju spajanjem pločica preko njihovih duljih stranica, a kraće stranice su rubovi lika i obrnuto. Aktivnost zahtijeva barem razinu analize van Hiele modela geometrijskog mišljenja.

4.10. Aktivnost *Različiti, a opet jednaki*

Cilj sljedeće aktivnosti je da učenici petog razreda osnovne škole uoče kako likovi različitog oblika (i površine) mogu imati isti opseg (MAT OŠ C.5.1.). Aktivnost se provodi u peteročlanim skupinama. Svaki učenik unutar skupine dobiva set geometrijskih pločica s pet primjeraka svake od njih (osim bež romba), pomoću kojih treba složiti lik zadanog opsega. Jedinična mjera opsega je duljina stranice kvadrata, a primjer mogućeg opsega je 14 jediničnih duljina. Rješenja jedne skupine učenika nalaze se na *Slici 4.10.1*.



Slika 4.10. 1. Primjeri likova opsega 14 jediničnih duljina

Uspoređujući rješenja unutar skupine, učenici uočavaju da unatoč jednakom opsegu njihovi likovi izgledaju različito. Budući da promatraju i analiziraju geometrijske oblike i njihove odnose, ova se aktivnost provodi barem na razini analize, tj. prvoj razini van Hiele modela.

Aktivnost se može proširiti i na koncept površine tako da učenici promatraju površine dobivenih likova, procjenjuju jesu li jednake te računski utvrđuju valjanost svoje procjene (van Hiele razina analize). Razrada aktivnosti je u sljedećem poglavlju pod nazivom *Različiti, a opet jednaki (2)*.

4.11. Aktivnost *Sastavi me!*

Cilj aktivnosti je da učenici sastave lik zadanog opsega koristeći geometrijske pločice. Učenici su podijeljeni u parove i dobivaju set geometrijskih pločica s pet primjeraka svake pločice (osim bež romba). Jedan učenik u paru sastavi lik od proizvoljnih geometrijskih pločica, a zadatak drugog učenika je sastaviti lik čiji je opseg jednak opsegu lika učenika u paru, ali izgledom različit od njegovoga. Nakon toga, učenici zamijene uloge i ponove aktivnost. Primjer rješenja jednog para učenika prikazan je na *Slici 4.11.1*. Aktivnost je primjerena učenicima petog razreda osnovne škole (MAT OŠ D.5.3.) i zahtijeva prvu razinu van Hiele modela.

PRVI UČENIK:	DRUGI UČENIK:
 $o = 2 \cdot 25\ mm + 2 \cdot 25\ mm = 100\ mm$	 $o = 4 \cdot 25\ mm = 100\ mm$
 $o = 12 \cdot 25\ mm = 300\ mm$	 $o = 50\ mm + 10 \cdot 25\ mm = 300\ mm$

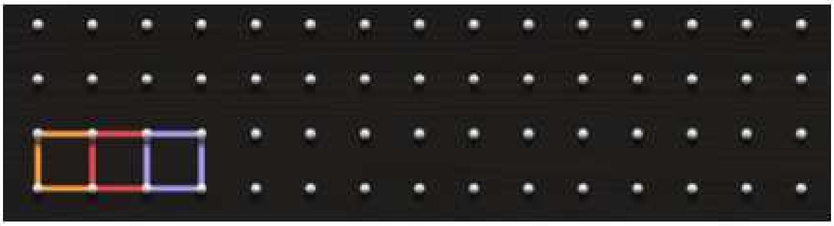
Slika 4.11. 1. Primjer učeničkog rješenja aktivnosti Sastavi me!

4.12. Aktivnost *Kvadratić po kvadratić*

Cilj aktivnosti je da učenici otkriju pravilnost za računanje opsega uzorka koristeći geoploču. Aktivnost je namijenjena učenicima šestog razreda osnovne škole koji su na prvoj van Hiele razini (MAT OŠ C.6.3.). Učenici su podijeljeni u parove i dobivaju set gumica, geoploču te nastavni listić sa zadacima (Slika 4.12.1.). Prema uputama s nastavnog listića slažu uzorak i dolaze do zaključaka koje zapisuju na nastavni listić (Slika 4.12.2.). Zaključke temelje na konačnom broju primjera, odnosno zaključuju pomoću nepotpune indukcije, argumentiraju svoje zaključke čime se postiže usmjeravanje na višu razinu razumijevanja i analize problema, odnosno na višu van Hiele razinu geometrijskog mišljenja na konceptu duljine.

Nastavni listić - **Kvadratić po kvadratić**

1. Nastavite niz kvadrata na geoploči i popunite tablicu.



Broj kvadrata u nizu	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
1	
2	
3	
4	
5	

2. Za koliko se povećava opseg iz retka u redak?

3. Za koliko se povećavao opseg lika koji se sastoji od 5 kvadrata u odnosu na opseg polaznog kvadrata?

4. Zapišite izraz za opseg lika kao zbroj kojemu je jedan pribrojnik rezultat zadatka 2., a drugi pribrojnik dvostruki broj kvadrata u nizu. Objasnite zašto vrijedi to pravilo.

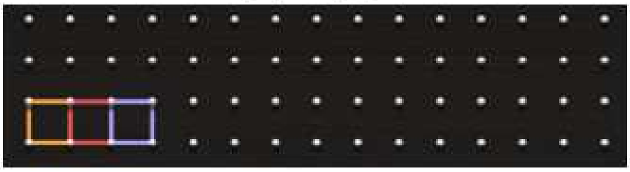
Broj kvadrata u nizu	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
1	
2	
3	
4	
5	
10	
15	
n	

5. Koliki bi bio opseg lika ako u niz složimo 67 kvadrata?

Slika 4.12. 1. Nastavni listić Kvadratić po kvadratić

Nastavni listić - **Kvadratić po kvadratić**

1. Nastavite niz kvadrata na geoploči i popunite tablicu.



Broj kvadrata u nizu	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
1	4 $+2$
2	6 $+2$
3	8 $+2 \cdot 4$
4	10
5	12

2. Za koliko se povećava opseg iz retka u redak?
   Za dvije jedinične duljine.
3. Za koliko se povećavao opseg lika koji se sastoji od 5 kvadrata u odnosu na opseg polaznog kvadrata?
   Za osam jediničnih duljina.
4. Zapišite izraz za opseg lika kao zbroj kojemu je jedan pribrojnik rezultat zadatka 2., a drugi pribrojnik dvostruki broj kvadrata u nizu. Objasnite zašto vrijedi to pravilo.

Broj kvadrata u nizu	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
1	$2 + 2 \cdot 1 = 4$
2	$2 + 2 \cdot 2 = 6$
3	$2 + 2 \cdot 3 = 8$
4	$2 + 2 \cdot 4 = 10$
5	$2 + 2 \cdot 5 = 12$
10	$2 + 2 \cdot 10 = 22$
15	$2 + 2 \cdot 15 = 32$
n	$2 + 2n$

Pravilo vrijedi jer je opseg duljina ruba lika. Kada polaznom kvadratu dodamo nove kvadrate dobijemo „novi" četverokut koji ima istu duljinu „lijevog" i „desnog" ruba, a to je $1 + 1 = 2$, dok se „gornji" i „donji" rub povećavaju za broj jediničnih duljina koje dodajemo. Na primjer, dodajući jedan kvadrat polaznom kvadratu produljujemo „gornji" i „donji" rub lika za po jednu jediničnu duljinu, odnosno ukupnu duljinu ruba za $2 \cdot 1$ jediničnu duljinu, dodajući tri kvadrata dodajemo po dvije jedinične duljine „gornjem" i „donjem" rubu, odnosno ukupno $2 \cdot 2$ itd. Ukupna duljina ruba je zbroj tih duljina.

5. Koliki bi bio opseg lika ako u niz složimo 67 kvadrata? $2 + 2n$ za $n = 67$ je $2 + 2 \cdot 67 = 136$.

Slika 4.12. 2. Primjer rješenja nastavnog listića Kvadratić po kvadratić

4.13. Aktivnost *Pločica po pločica*

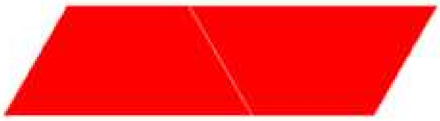
Cilj aktivnosti je da učenici otkriju pravilnost za računanje opsega uzorka koristeći geometrijske pločice. Aktivnost je primjerena učenicima sedmog razreda osnovne škole i zahtijeva razinu analize (MAT OŠ C.7.1., MAT OŠ D.7.3.). Učenici su podijeljeni u parove i dobivaju set geometrijskih pločica s pet primjeraka svake pločice (osim bež romba) te nastavni listić sa zadacima (Slika 4.13.1.).

Nastavni listić – **Pločica po pločica**

Uputa: Jedinična duljina je duljina stranice zelenog trokuta.

1. Koliki je opseg crvene geometrijske pločice (u jediničnim duljinama)?

2. Koristeći geometrijske pločice, složite uzorak kao na slici. Koliki je opseg složenog lika?



Slika 1. Uzorak A

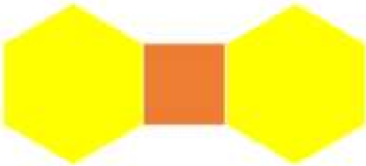
3. a. Nastavite slagati oblike po uzoru na *Sliku 1.* i popunite tablicu. Što uočavate?

Broj crvenih pločica	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
1	
2	
3	
4	
5	
10	
15	
n	

b. Izračunajte opseg lika složenog od 83 pločice.

4. Koliki su opsezi žute i narančaste pločice?

5. Koliki je opseg uzorka sa *Slike 2.*?



Slika 2. Uzorak B

6. a. Nastavite slagati uzorak prema *Slici 2.* i popunite tablicu. Što uočavate?

Broj žutih pločica	Broj narančastih pločica	Ukupan broj geometrijskih pločica	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
2	1		
2	2		
3	2		
3	3		
4	3		
4	4		
5	4		
5	5		

b. Izračunajte opsege likova složenih od 79 i od 80 pločica.

Slika 4.13. 1. Nastavni listić Pločica po pločica

Prema uputama s nastavnog listića slažu uzorak i dolaze do zaključaka koje zapisuju na nastavni listić (Slika 4.13.2.). Potom slijedi razredna diskusija u kojoj nastavnik pitanjima potiče prijelaz učenika na višu razinu van Hiele modela geometrijskog mišljenja. Neka od mogućih pitanja za razrednu diskusiju su:

1. Koja je razlika u računanju opsega prvog i drugog uzorka?
2. Koji su koraci u računanju opsega uzorka sastavljenog od tri različite geometrijske pločice?
3. Kako se opseg mijenja kada se mijenjaju dimenzije ili oblici pločica u uzorku?
4. Koje su strategije za efikasno računanje opsega složenih uzoraka?
5. Kako bismo primijenili znanje o računanju opsega na rješavanje stvarnih problema ili situacija?

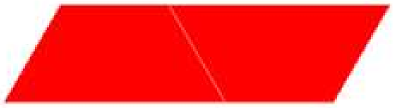
Nastavni listić – **Pločica po pločica**

Uputa: Jedinična duljina je duljina stranice zelenog trokuta.

1. Koliki je opseg crvene geometrijske pločice (u jediničnim duljinama)?

   5 jediničnih duljina.

2. Koristeći geometrijske pločice, složite uzorak kao na slici. Koliki je opseg složenog lika?



$o = 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1$

$o = 8$ jediničnih duljina

Slika 1. Uzorak A

3. a. Nastavite slagati oblike po uzoru na *Sliku 1.* i popunite tablicu. Što uočavate?

Broj crvenih pločica	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
1	5 $+3$
2	$+3$ 8
3	11 $+3$ $+9 \cdot 3$
4	$+3$ 14 $+(n-1) \cdot 3$
5	17 $+5 \cdot 3$
10	$+5 \cdot 3$ 32
15	47
n	$5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$

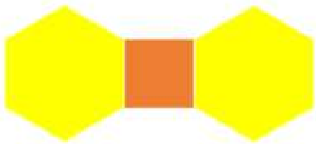
Dodavanjem jedne crvene pločice opseg lika se poveća za tri jedinične duljine.

   b. Izračunajte opseg lika složenog od 83 pločice. $3 \cdot 83 + 2 = 251$

4. Koliki su opsezi žute i narančaste pločice?

   Opseg žute pločice je 6 jediničnih duljina, a opseg narančaste pločice je 4 jedinične duljine.

5. Koliki je opseg uzorka sa *Slike 2.*?



$o = 5 + 2 + 5$

$o = 12$ jediničnih duljina

Slika 2. Uzorak B

6. a. Nastavite slagati uzorak prema *Slici 2.* i popunite tablicu. Što uočavate?

Broj žutih pločica	Broj narančastih pločica	Ukupan broj geometrijskih pločica	Opseg lika (u jediničnim duljinama)
2	1	3	12
2	2	4	14
3	2	5	18
3	3	6	20
4	3	7	24
4	4	8	26
5	4	9	30
5	5	10	32

Ako dodajemo jednu žutu pločicu, onda se opseg povećava za četiri jedinične duljine, a ako dodajemo jednu narančastu pločicu, onda se opseg povećava za dvije jedinične duljine.

b. Izračunajte opsege likova složenih od 79 i od 80 pločica.

Od 79 pločica svaka druga pločica je narančasta, tj. ukupno je 39 narančastih i $79 - 39 = 40$ žutih pločica. „Lijevi" i „desni" rub lika su duljine 1, pa opseg lika složenog od 79 pločica iznosi

$$o = 1 + 40 \cdot 4 + 39 \cdot 2 + 1, \text{ tj.}$$

$$o = 240 \text{ jediničnih duljina.}$$

Osamdeseta pločica će biti narančasta, tj. opseg će se povećati za dvije jedinične duljine u odnosu na opseg lika složenog od 79 pločica. Dakle, opseg lika složenog od 79 pločica iznosi $o = 240 + 2 = 242$ jedinične duljine.

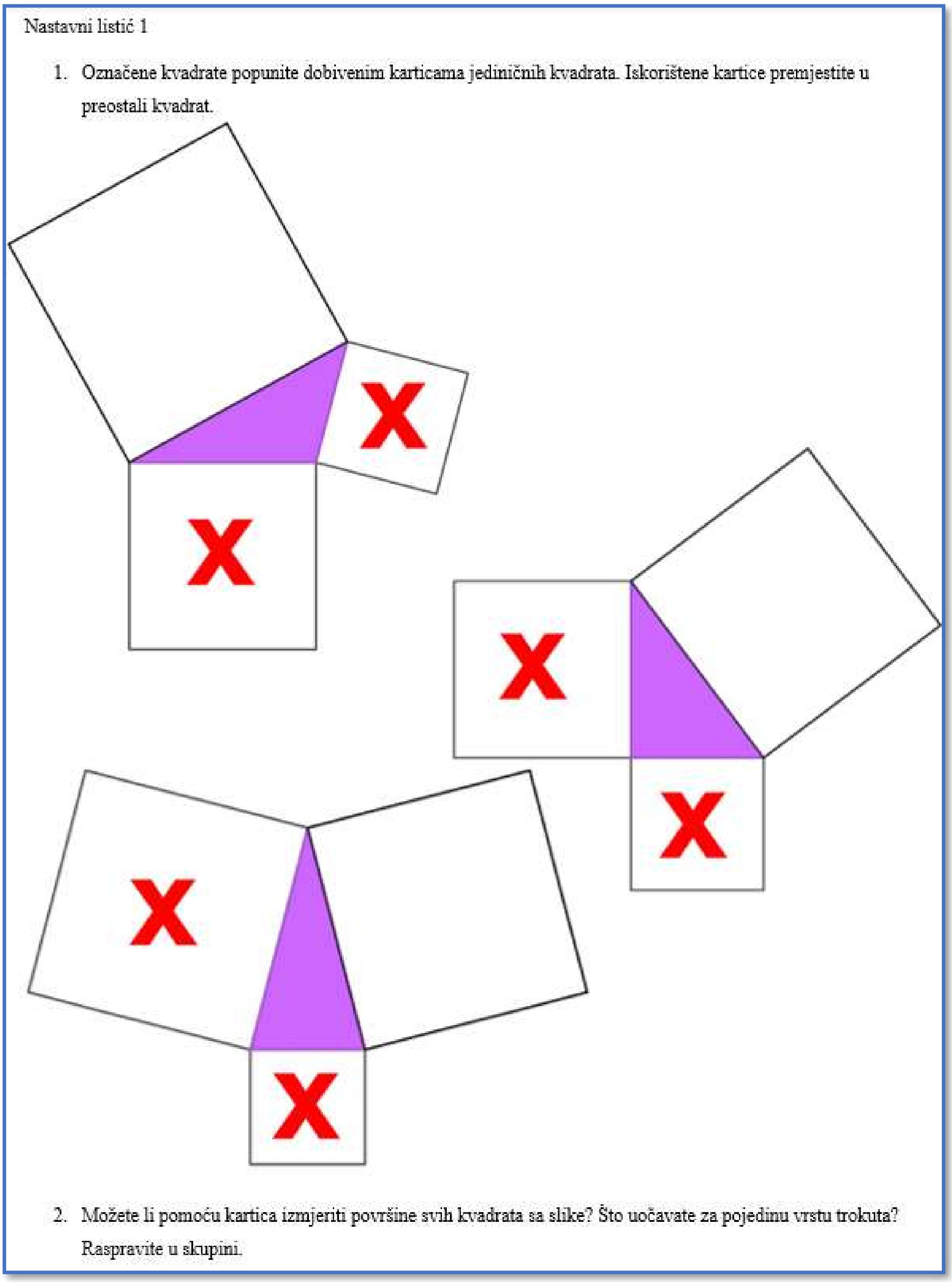
$$o = 1 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 1, \text{ tj.}$$

$$o = 242 \text{ jedinične duljine.}$$

Slika 4.13. 2. Primjer rješenja nastavnog listića Pločica po pločica

4.14. Aktivnost *Naslućivanje Pitagorinog poučka*

Ova aktivnost primjerena je učenicima osmog razreda osnovne škole na razini neformalne dedukcije. Cilj aktivnosti je da učenici, radeći u peteročlanim skupinama, naslute Pitagorin poučak (MAT OŠ D.8.1.). Svaki učenik dobiva nastavni listić s trokutima nad čijim su stranicama konstruirani kvadrati (Slika 4.14.1.) i plastificirane kartice jediničnih kvadrata, tj. kvadrata sa stranicom duljine 1. Svaki učenik dobije po jedan trokut svake vrste, tj. pravokutni, tupokutni i šiljastokutni trokut. Duljine stranica trokuta su cjelobrojne vrijednosti pa jedan učenik dobije primjerice pravokutni trokut sa stranicama duljina 3, 4 i 5, tupokutni trokut sa stranicama duljina 2, 3 i 5 te šiljastokutni trokut sa stranicama duljina 2, 4 i 4.

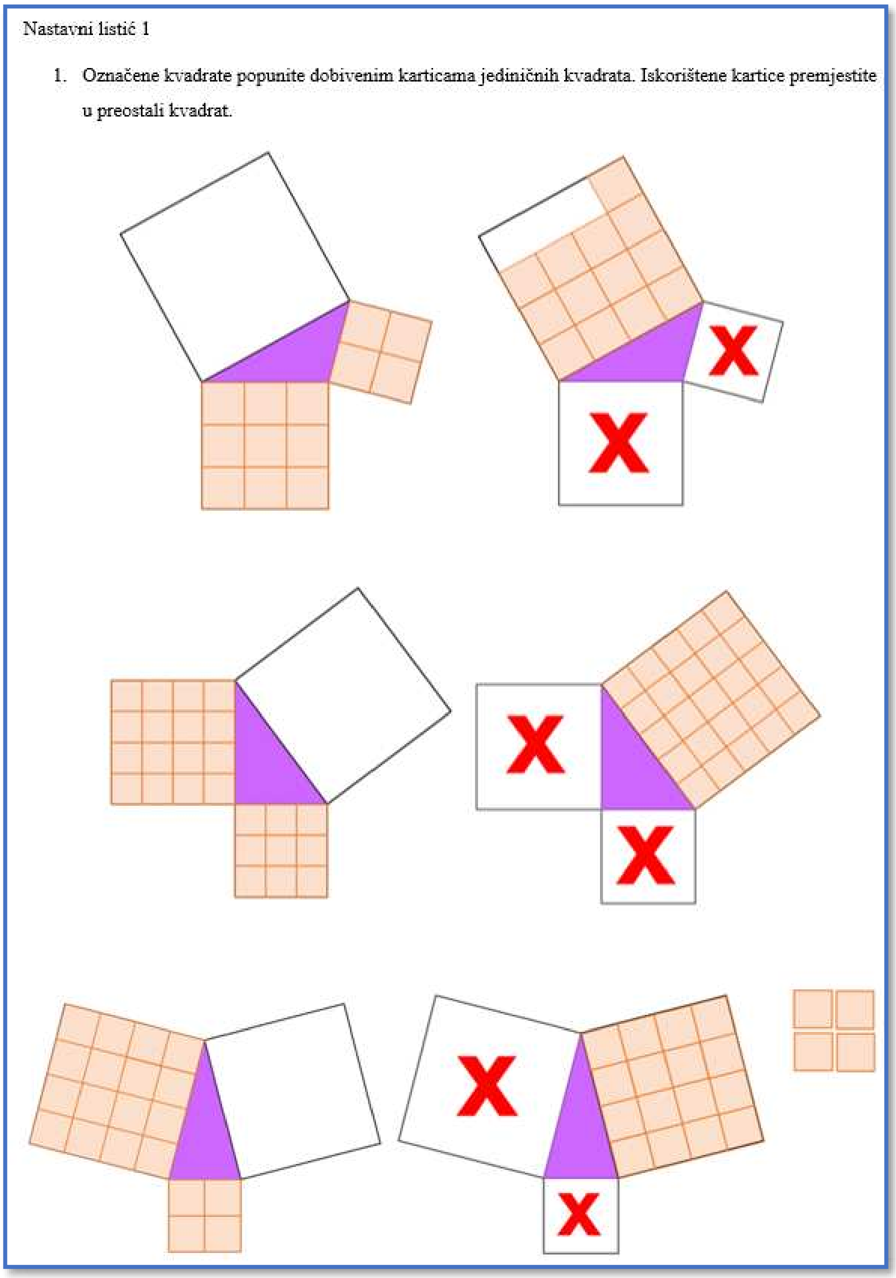

Nastavni listić 1

1. Označene kvadrate popunite dobivenim karticama jediničnih kvadrata. Iskorištene kartice premjestite u preostali kvadrat.

2. Možete li pomoću kartica izmjeriti površine svih kvadrata sa slike? Što uočavate za pojedinu vrstu trokuta? Raspravite u skupini.

Slika 4.14. 1. Nastavni listić Naslućivanje Pitagorinog poučka

Dobivenim karticama popunjavaju kvadrate označene crvenim križićem. Uočavaju da njima mogu izmjeriti površinu tih kvadrata. Nakon toga, iskorištene kartice premještaju u preostali kvadrat. Uz razmjenu i sučeljavanje ideja, učenici uočavaju da je kod pravokutnog trokuta površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama toga trokuta, dok za tupokutni i šiljastokutni trokut to ne vrijedi. Naime, kod pravokutnog trokuta iskorištene kartice premještene u kvadrat konstruiran nad trećom stranicom trokuta točno popunjavaju taj kvadrat, tj. prve dvije površine zajedno čine treću, kod tupokutnog trokuta je manjak kartica za popunjavanje kvadrata konstruiranog nad trećom stranicom trokuta, a kod šiljastokutnog trokuta ih ima viška (Slika 4.14.2.).



2. Možete li pomoću kartica izmjeriti površine svih kvadrata sa slike? Što uočavate za pojedinu vrstu trokuta? Raspravite u skupini.

Pomoću kartica možemo izmjeriti površine svih kvadrata sa slike. Kod pravokutnog trokuta uočavamo da iskorištene kartice premještene u kvadrat konstruiran nad trećom stranicom trokuta točno popunjavaju taj kvadrat, tj. prve dvije površine zajedno čine treću, kod tupokutnog trokuta je manjak kartica za popunjavanje kvadrata konstruiranog nad trećom stranicom trokuta, a kod šiljastokutnog trokuta ih ima viška.

Slika 4.14. 2. Učeničko rješenje nastavnog listića Naslućivanje Pitagorinog poučka

U odnosu na razine 0 i 1 gdje se od učenika očekuje da znaju crtati, svrstavati objekte te da znaju pravo ime lika i njegova svojstva, na razini 2 od učenika se očekuje istraživanje svojstava oblika. Dakle, važno je poticati stvaranje i provjeru hipoteza. Na razini neformalne dedukcije, u svrhu boljeg razumijevanja geometrije, važnu ulogu imaju alati dinamične geometrije. U prethodnoj aktivnosti učenici su primjenom koncepta površine naslutili Pitagorin teorem. Postavljamo pitanje mogu li ga dokazati. Budući da je jedan od važnijih poučaka u matematici, za njega postoje brojni dokazi, geometrijski i algebarski, no zadržat ćemo se na geometrijskima. U sljedećoj aktivnosti ilustrirat ćemo uporabu alata dinamične geometrije u svrhu dokazivanja tvrdnje.

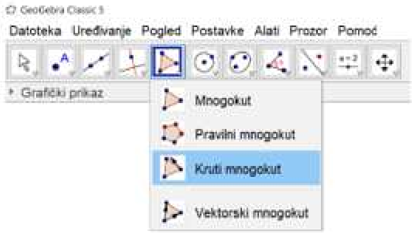
4.15. Aktivnost *Pitagorin poučak*

Cilj ove aktivnosti je da učenici osmog razreda osnovne škole dokažu Pitagorin poučak (MAT OŠ D.8.1.). Aktivnost zahtijeva razinu 3 van Hiele modela geometrijskog mišljenja. Učenici dobivaju nastavni listić s uputama za rad (Slika 4.15.1.). Potom u GeoGebri konstruiraju pravokutni trokut, nadopune ga do pravokutnika i dupliciraju taj pravokutnik. Polaznom trokutu crtaju visinu iz vrha pravog kuta. Na slici uočavaju tri pravokutna trokuta koje, prema uputama s nastavnog listića, preslikaju u „prazan“ pravokutnik. Primjer učeničkog rješenja je na *Slici 4.15.2.* Učenici uočavaju sličnost tih triju trokuta po K-K poučku o sličnosti (kutovi s okomitim kracima). Nastavnik ih navodi da koristeći oznake sa *Slike 4.15.2. (lijevo)* zapišu omjere koji vrijede za hipotenuze i dulje katete ljubičastog i narančastog, te ljubičastog i zelenog trokuta i potom ih zbroje (Slika 4.15.3.).

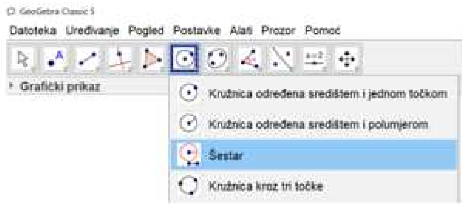
Nastavni listić

Upute za rad u alatu dinamične geometrije GeoGebra:

1. Nacrtajte pravokutni trokut ABC.
2. Trokut nadopunite do pravokutnika $ABDC$.
3. Koristeći opciju „Kruti mnogokut“ duplicirajte dobiveni pravokutnik kako biste dobili dva sukladna pravokutnika.

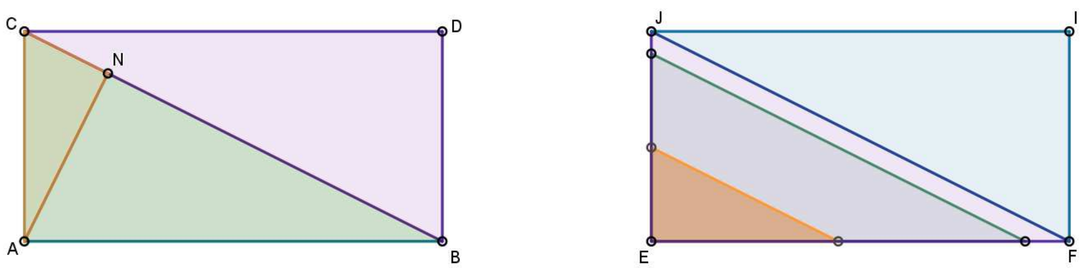


4. Polaznom trokutu nacrtajte visinu iz vrha pravog kuta trokuta sa nožištem N. Od koliko je pravokutnih trokuta sastavljen pravokutnik?
5. Koristeći opciju „Šestar“ uočene pravokutne trokute preslikajte u „prazan“ pravokutnik tako da pravi kut smjestite u donji lijevi kut „praznog“ pravokutnika, kraće katete trokuta prenesite na kraću stranicu pravokutnika koja sadrži spomenuti vrh, a dulje stranice trokuta na dulju stranicu pravokutnika koja sadrži isti vrh. Vrhove preslikanih trokuta označite koristeći opciju „Sjecište“ i klikom na kružnicu i željenu stranicu pravokutnika.



6. Desnim klikom na kružnicu te odabirom opcije „Pokaži objekt“ uklonite kružnice sa slike.
7. Opcijom „Mnogokut“ spojite vrhove najmanjeg trokuta.
8. Opcijom „Kruti mnogokut“ duplicirajte najmanji trokut kako biste ga mogli pomicati. Duplicirani trokut pomičite udesno/gore dok mu se vrh šiljastog kuta ne preklopi sa šiljastim vrhovima preostalih trokuta. U kakvom su odnosu preslikani trokuti? Obrazložite svoje zaključivanje.

Slika 4.15. 1.Nastavni listić s uputama za rad za aktivnost Pitagorin poučak



Slika 4.15. 2. Primjer učeničkog rješenja u GeoGebri

Za trokute BDC i CNA vrijedi $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|NC|}$. Budući da je $|AC| = |BD|$, vrijedi $\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|BD|}{|NC|}$, odnosno $|BD|^2 = |BC| \cdot |NC|$. Za trokute BDC i ANB vrijedi $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BN|}$, odnosno $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BN|}$ (jer je $|AB| = |CD|$), tj. $|CD|^2 = |BC| \cdot |BN|$. Nadalje,

$$\left.\begin{aligned} |BD|^2 &= |BC| \cdot |NC| \\ |CD|^2 &= |BC| \cdot |BN| \end{aligned}\right/ +$$

$$\begin{aligned} |BD|^2 + |CD|^2 &= |BC| \cdot |NC| + |BC| \cdot |BN| \\ &= |BC| \cdot (|NC| + |BN|) \end{aligned}$$

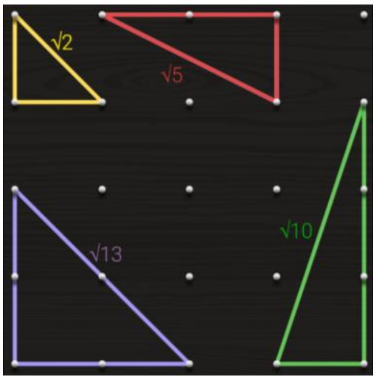
Zbog $|NC| + |BN| = |BC|$ vrijedi $|BD|^2 + |CD|^2 = |BC| \cdot |BC|$, tj. $|BD|^2 + |CD|^2 = |BC|^2$.

Slika 4.15. 3. Primjer učeničkog dokaza Pitagorinog poučka

Učenici deduktivno zaključuju da je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta. Budući da je polazni trokut bio proizvoljan, ovo vrijedi za svaki pravokutni trokut. Time su dokazali Pitagorin poučak.

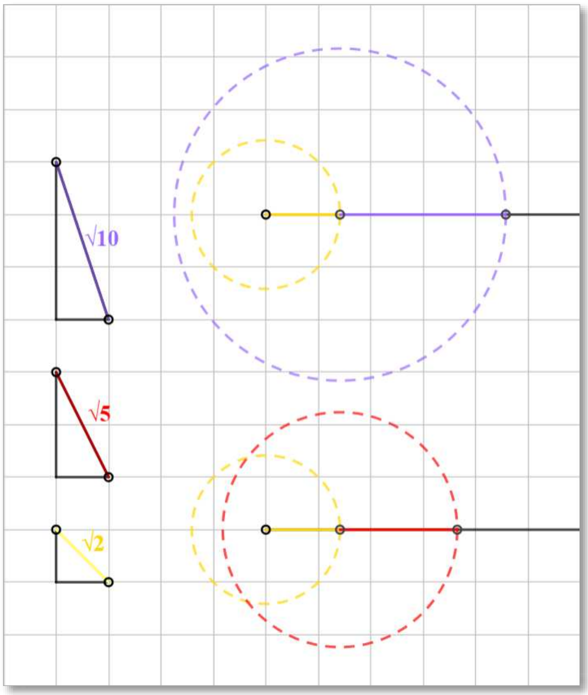
4.16. Aktivnost *Pitagorin trokut*

Cilj aktivnosti je da učenici osmog razreda osnovne škole primijene svoje znanje o Pitagorinom poučku (MAT OŠ D.8.1.). Aktivnost zahtijeva spremnost na barem prvoj van Hiele razini geometrijskog mišljenja na konceptu duljine. Učenici su podijeljeni u parove, dobivaju set gumica i geoploču. Zadatak prvog dijela aktivnosti je na geoploči složiti pravokutni trokut čija je duljina hipotenuze zadana u jediničnim duljinama $(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \dots)$. Korištenje geoploče omogućuje im vizualizaciju trokuta i eksperimentiranje s različitim rasporedima gumica kako bi „nacrtali“ zadane duljine stranica (Slika 4.16.1.).



Slika 4.16. 1. Pravokutni trokuti na geoploči sa zadanom duljinom hipotenuze

Nakon što slože trokut, prisjećaju se Pitagorinog poučka te njime provjeravaju svoje rješenje. Ako rješenje nije ispravno, pokušat će korigirati svoje postavke na geoploči dok ne postignu željeni rezultat. Uočavaju da neke duljine kao što su primjerice $\sqrt{3}$ i $\sqrt{6}$ ne mogu „nacrtati“ na geoploči. Drugi dio aktivnosti je konstruirati u bilježnicu razne duljine poput $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ jediničnih duljina, $\sqrt{2}+\sqrt{10}$ jediničnih duljina (Slika 4.16.2.) itd., gdje je jedinična duljina proizvoljna. Učenici u paru razmjenjuju ideje i raspravljaju o primjeni Pitagorinog poučka u ovom kontekstu. Na kraju aktivnosti slijedi razredna diskusija i refleksija. Učenici će raspravljati o svojim pristupima, izazovima s kojima su se susreli i strategijama koje su primijenili. Ovom se aktivnošću potiče učenikov razvoj kritičkog razmišljanja i analitičkih vještina. Također, promiče se suradnja i timski rad među učenicima, što je ključno za njihov akademski i socijalni razvoj.



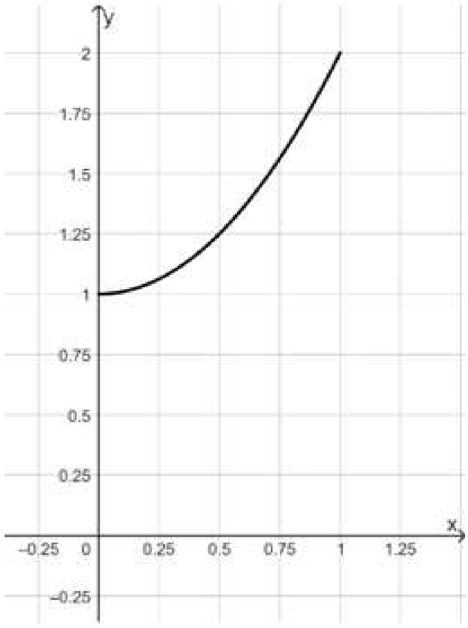
Slika 4.16. 2. Primjer učeničkih konstrukcija duljina $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ *te* $\sqrt{2}+\sqrt{10}$ *jediničnih duljina*

4.17. Aktivnost *Aproksimacija duljine krivulje*

Cilj aktivnosti je da učenici, radeći u četveročlanim skupinama, aproksimiraju duljinu krivulje na promatranom segmentu primjenom određenog integrala. Aktivnost je namijenjena učenicima četvrtog razreda srednje škole na barem drugoj razini van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja (MAT SŠ B.4.11.). Svaki učenik unutar skupine dobiva isti nastavni listić (Slika 4.17.1.), a svaka skupina dobiva različite nastavne listiće.

Nastavni listić – **Aproksimacija duljine krivulje**

Na slici je graf funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$ na segmentu $[0,1]$.



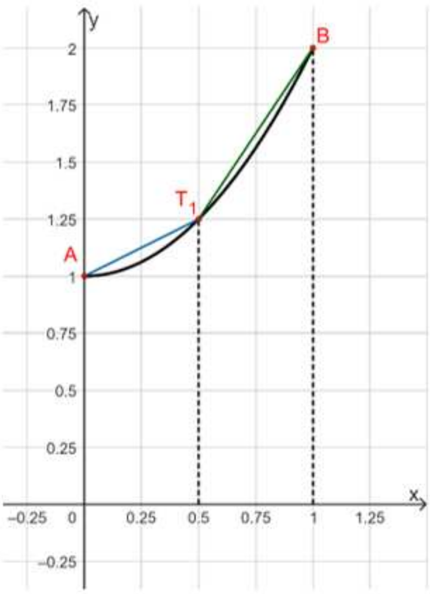
1. **(Sam/a!)** Podijelite interval $[0,1]$ na dva jednaka dijela (podsegmenta). Odredite vrijednost funkcije u svakoj od točaka koje određuju granice tih podsegmenata, svake dvije susjedne točke spojite dužinom i odredite njezinu duljinu. Aproksimirajte duljinu krivulje duljinama tih dužina.
2. **(Raspravite u skupini!)** Podijelite interval $[0,1]$ na četiri jednaka dijela (podsegmenta). Odredite vrijednost funkcije u svakoj od točaka koje određuju granice tih podsegmenata, svake dvije susjedne točke spojite dužinom i odredite njezinu duljinu. Aproksimirajte duljinu krivulje duljinama tih dužina.
3. **(Raspravite u skupini!)** Podijelite interval $[0,1]$ na osam jednakih dijelova (podsegmenata). Odredite vrijednost funkcije u svakoj od točaka koje određuju granice tih podsegmenata, svake dvije susjedne točke spojite dužinom i odredite njezinu duljinu. Aproksimirajte duljinu krivulje duljinama tih dužina.
4. **(Raspravite u skupini!)** Usporedite rješenja iz prethodnih zadataka. Što uočavate?
5. **(Raspravite u skupini!)** Podijelite interval $[0,1]$ na n jednakih dijelova. Odredite vrijednost funkcije u svakoj od točaka koje određuju granice tih podsegmenata, svake dvije susjedne točke spojite dužinom i odredite njezinu duljinu. Aproksimirajte duljinu krivulje duljinama tih dužina. Što uočavate?

Slika 4.17. 1. Nastavni listić Aproksimacija duljine krivulje

Na nastavnom listiću dan je graf polinoma. Učenici aproksimiraju duljinu luka krivulje poligonalnim crtama. Samostalno rješavaju prvi zadatak s nastavnog listića u kojem promatrani segment dijele na dva podsegmenta jednakih duljina, računaju duljine dužina čije su rubne točke na krivulji (apscise točaka su granice podsegmenata) i uspoređuju rezultate unutar skupine. U drugom zadatku, promatrani segment dijele na četiri podsegmenta jednakih duljina, a svaki učenik određuje vrijednost funkcije u rubovima jednog podsegmenta i duljinu dužine čije su krajnje točke granice tog podsegmenta. Nakon toga, u trećem zadatku promatrani segment dijele na osam podsegmenata jednakih duljina, a svaki učenik određuje vrijednost funkcije u rubovima dvaju podsegmenata i duljine dužina određene granicama tih podsegmenata. Uspoređujući rješenja iz prva tri zadatka zaključuju da povećanjem broja podsegmenata pripadajuće dužine sve bolje prijanjaju uz krivulju, tj. da dobivaju sve bolju aproksimaciju krivulje i njezine duljine. U skupini rješavaju posljednji zadatak s nastavnog listića tako da promatrani segment dijele na n podsegmenta jednakih duljina i primjenom određenog integrala druge funkcije aproksimiraju duljinu zadane krivulje. U nastavku je dan primjer rješenja nastavnog listića *Aproksimacija duljine krivulje* (Slika 4.17.2.).

Nastavni listić – **Aproksimacija duljine krivulje**

1.



$A = (0, f(0)) = (0,1)$

$B = (1, f(1)) = (1,2)$

$T_1 = (0.5, f(0.5)) = (0.5, 1.25)$

Udaljenost d točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u koordinatnom sustavu:

$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

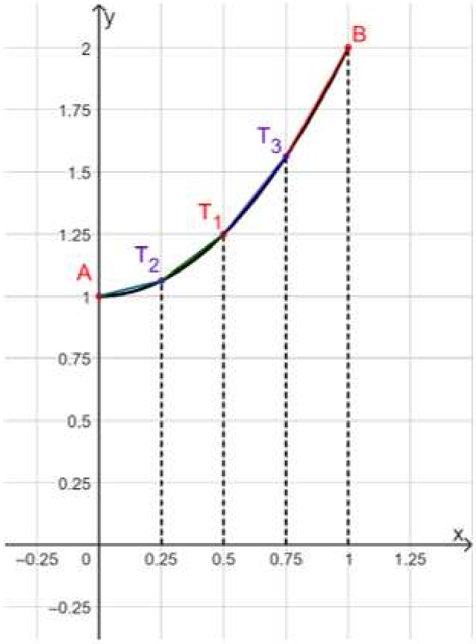
$d(A,T_1) = \sqrt{(0.5-0)^2 + (1.25-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ jediničnih dužina $\rightarrow$ duljina dužine $\overline{AT_1}$

$d(T_1,B) = \sqrt{(1-0.5)^2 + (2-1.25)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ jediničnih dužina $\rightarrow$ duljina dužine $\overline{T_1 B}$

Krivulju aproksimiramo poligonalnim crtama pa je približna vrijednost duljine krivulje

$\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{4} \approx 1.46$ jediničnih dužina.

2.



$A = (0, f(0)) = (0,1)$

$B = (1, f(1)) = (1,2)$

$T_1 = (0.5, f(0.5)) = (0.5, 1.25)$

$T_2 = (0.25, f(0.25)) = (0.25, 1.0625)$

$T_3 = (0.75, f(0.75)) = (0.75, 1.5625)$

$d(A, T_2) \approx \sqrt{(0.25-0)^2 + (1.0625-1)^2} \approx 0.26$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{AT_2}$

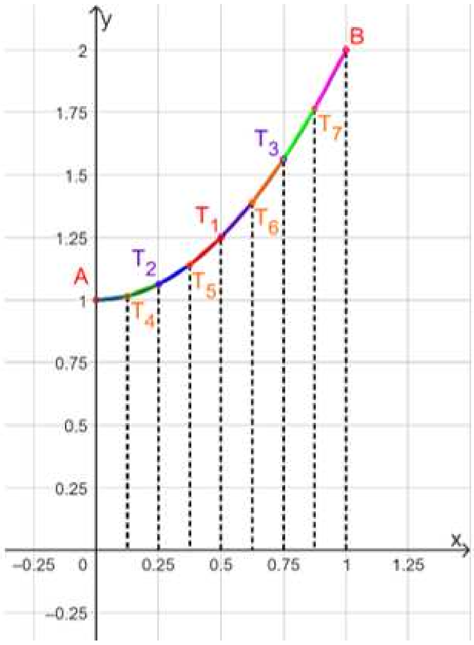
$d(T_2, T_1) \approx \sqrt{(0.5-0.25)^2 + (1.25-1.0625)^2} \approx 0.31$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_2T_1}$

$d(T_1, T_3) = \sqrt{(0.75-0.5)^2 + (1.5625-1.25)^2} \approx 0.4$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_1T_3}$

$d(T_3, B) \approx \sqrt{(1-0.75)^2 + (2-1.5625)^2} \approx 0.5$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_3B}$

Približna vrijednost duljine krivulje je $0.26 + 0.31 + 0.4 + 0.5 = 1.47$ jediničnih dužina.

3.



$A = (0, f(0)) = (0,1)$

$B = (1, f(1)) = (1,2)$

$T_1 = (0.5, f(0.5)) = (0.5, 1.25)$

$T_2 = (0.25, f(0.25)) = (0.25, 1.0625)$

$T_3 = (0.75, f(0.75)) = (0.75, 1.5625)$

$T_4 = (0.125, f(0.125)) \approx (0.125, 1.02)$

$T_5 = (0.375, f(0.375)) \approx (0.375, 1.14)$

$T_6 = (0.625, f(0.625)) \approx (0.625, 1.39)$

$T_7 = (0.875, f(0.875)) \approx (0.875, 1.77)$

$d(A,T_4) \approx \sqrt{(0.125-0)^2+(1.02-1)^2} \approx 0.13$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{AT_4}$

$d(T_4,T_2) \approx \sqrt{(0.25-0.125)^2+(1.0625-1.02)^2} \approx 0.13$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_4T_2}$

$d(T_2,T_5) \approx \sqrt{(0.375-0.25)^2+(1.14-1.0625)^2} \approx 0.15$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_2T_5}$

$d(T_5,T_1) \approx \sqrt{(0.5-0.375)^2+(1.25-1.14)^2} \approx 0.17$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_5T_1}$

$d(T_1,T_6) \approx \sqrt{(0.625-0.5)^2+(1.39-1.25)^2} \approx 0.19$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_1T_6}$

$d(T_6,T_3) \approx \sqrt{(0.75-0.625)^2+(1.5625-1.39)^2} \approx 0.21$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_6T_3}$

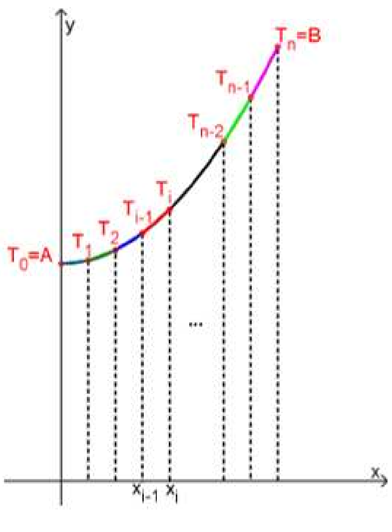
$d(T_3,T_7) \approx \sqrt{(0.875-0.75)^2+(1.77-1.5625)^2} \approx 0.24$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_3T_7}$

$d(T_7,B) \approx \sqrt{(1-0.875)^2+(2-1.77)^2} \approx 0.26$ jediničnih dužina $\longrightarrow$ duljina dužine $\overline{T_7B}$

Približna vrijednost duljine krivulje je $0.13+0.13+0.15+0.17+0.19+0.21+0.24+0.26=1.48$ jediničnih dužina.

4. Povećanjem broja podsegmenata, dužine na njima sve bolje prijanjaju uz krivulju, tj. dobivamo sve bolju aproksimaciju duljine zadane krivulje. Zbroj duljina dužina sve je bliže preciznoj duljini grafa funkcije na zadanom segmentu.

5.



Ako interval podijelimo na n jednakih dijelova, onda je svaki od intervala duljine $\frac{1}{n}$ jediničnih dužina. Uzmimo ekvidistantnu particiju $x_i=\frac{i}{n}, i=0,1,2,\dots,n$ i neka je $T_i=(x_i,f(x_i))=(x_i,\ {x_i}^2+1),\ i=0,1,2,\dots,n$. Označimo s l duljinu grafa funkcije f na segmentu $[0,1]$ (u jediničnim dužinama).

Tada redom imamo:

$$l = d(\Gamma_f) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + \left({x_{i+1}}^2 + 1 - ({x_i}^2 + 1)\right)^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + ({x_{i+1}}^2 + 1 - {x_i}^2 - 1)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + ({x_{i+1}}^2 - {x_i}^2)^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{{x_{i+1}}^2 - {x_i}^2}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2 \left[\left(\frac{i+1}{n}\right)^2 - \frac{i^2}{n^2}\right]^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^4} [(i+1)^2 - i^2]^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} (i^2 + 2i + 1 - i^2)^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} (2i+1)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{2i+1}{n}\right)^2}.$$

Uočimo da je $2 \cdot \frac{i}{n} < \frac{2i+1}{n} < 2 \cdot \frac{i+1}{n}$, odakle zbog strogog rasta funkcija kvadriranja i korjenovanja slijedi

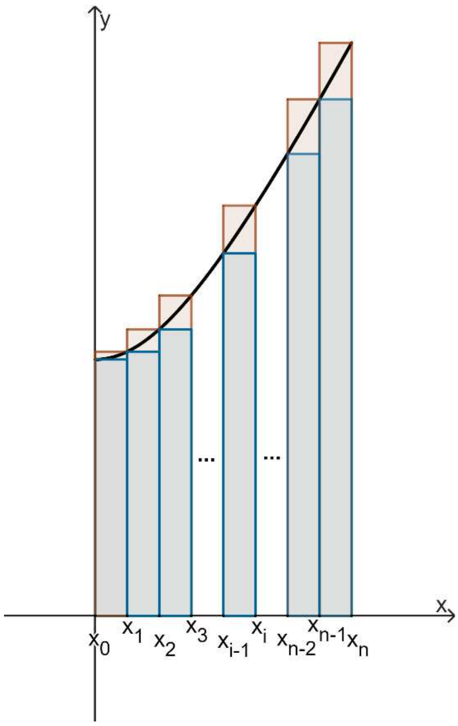
$$\sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{i}{n}\right)^2} < \sqrt{1 + \left(\frac{2i+1}{n}\right)^2} < \sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{i+1}{n}\right)^2},$$

a onda i

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{i}{n}\right)^2} < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{2i+1}{n}\right)^2} < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{i+1}{n}\right)^2}.$$

Promotrimo sada prvu i treću sumu iz posljednje nejednakosti i uočimo funkciju $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ zadanu pravilom pridruživanja $g(x) = \sqrt{1 + (2x)^2}$.

Izraz $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{i}{n}\right)^2}$ je površina upisanih pravokutnika, tj. donja Darbouxova suma za subdiviziju $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$, a izraz $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(2 \cdot \frac{i+1}{n}\right)^2}$ je površina opisanih pravokutnika, tj. gornja Darbouxova suma za površinu ispod grafa funkcije g na segmentu $[0,1]$.



Zato za $n \to \infty$ imamo da $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1+\left(\frac{2i+1}{n}\right)^2}$ teži u $\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$, tj. $d(\Gamma_f) = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$.

Koristeći simbolički kalkulator, dobivamo $d(\Gamma_f) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$. Prema tome, duljinu grafa funkcije *f* na segmentu $[0,\ 1]$ prepoznali smo kao površinu ispod grafa funkcije *g* na tom segmentu.

Slika 4.17. 2. Primjer rješenja nastavnog listića Aproksimacija duljine krivulje

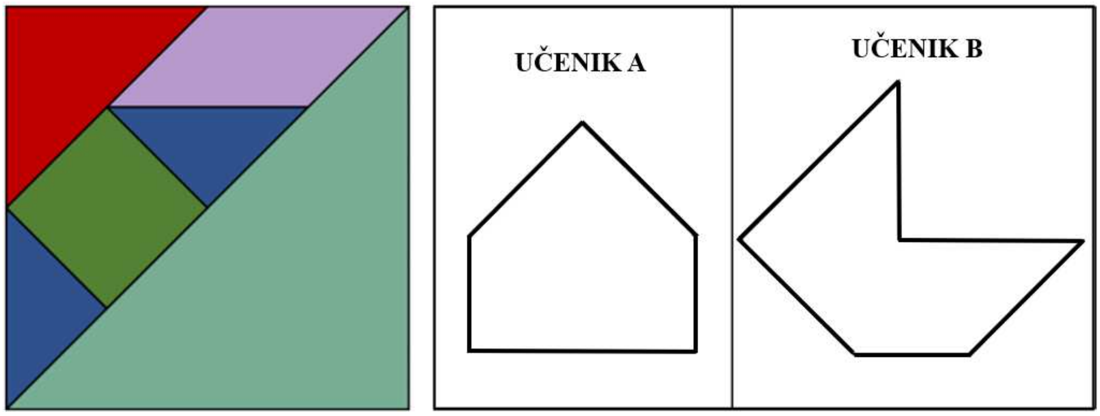
Konačno, učenici uočavaju da se duljina grafa jedne funkcije na segmentu $[a, b]$ povezuje s površinom ispod grafa druge funkcije na istom segmentu.

5. VAN HIELE MODEL I KONCEPT POVRŠINE

Putem niza aktivnosti koje se fokusiraju na razvrstavanje objekata, procjenu, mjerenje, analizu i dokazivanje učenici mogu razviti duboko razumijevanje koncepta površine. Na razini 0, prilikom određivanja površine oblika učenici koriste fizičke materijale. Na razini 1 otkrivaju postupke za pronalaženje površine koji se generaliziraju za oblike određenog tipa. Primjerice, površinu pravokutnih trokuta pronalaze oblikujući pravokutnik od dvaju sukladnih pravokutnih trokuta te računajući polovinu površine tog pravokutnika. Na razini 2, učenici daju neformalne argumente kako bi opravdali pravila za računanje površine (npr. objašnjavaju zašto dva sukladna pravokutna trokuta, kada se pravilno postave, tvore pravokutnik). Na razini 3, učenici deduktivno dokazuju otkrivene izraze za površinu, dok na razini 4 uspoređuju otkrivena pravila u različitim aksiomatskim sustavima geometrije. U ovom poglavlju su navedeni primjeri aktivnosti koje pomažu učenicima da istraže i razumiju koncept površine.

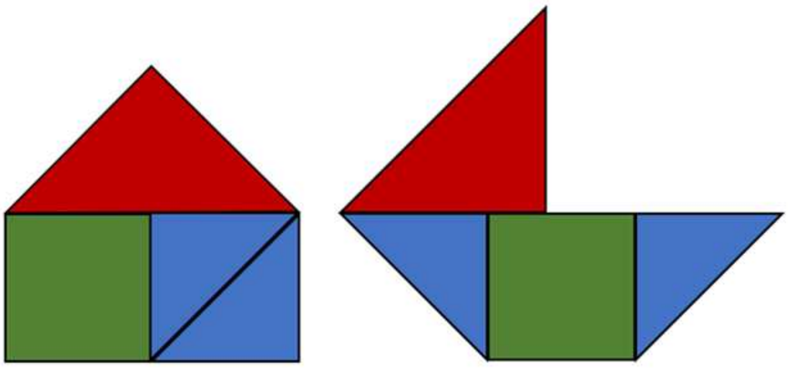
5.1. Aktivnost *Tangram*

Ovom se aktivnošću neformalno procjenjuje učenikovo razumijevanje koncepta površine u četvrtom razredu osnovne škole. Aktivnost zahtijeva razinu vizualizacije van Hiele modela, a njezin cilj je da učenici uspoređuju površine likova (MAT OŠ D.4.2.). Nastavnik dijeli učenike u parove. Svaki učenik dobiva tangram kao na *Slici 5.1.1. (lijevo)* i nastavni listić (Slika 5.1.1. (desno)). Učenici u paru procjenjuju i uspoređuju površine likova zadanih obrisom, izrezuju oblike od kojih se sastoji tangram te njima popunjavaju lik na nastavnom listiću.



Slika 5.1. 1. Tangram (lijevo) i nastavni listić s obrisima likova koje učenici popunjavaju dijelovima tangrama (desno)

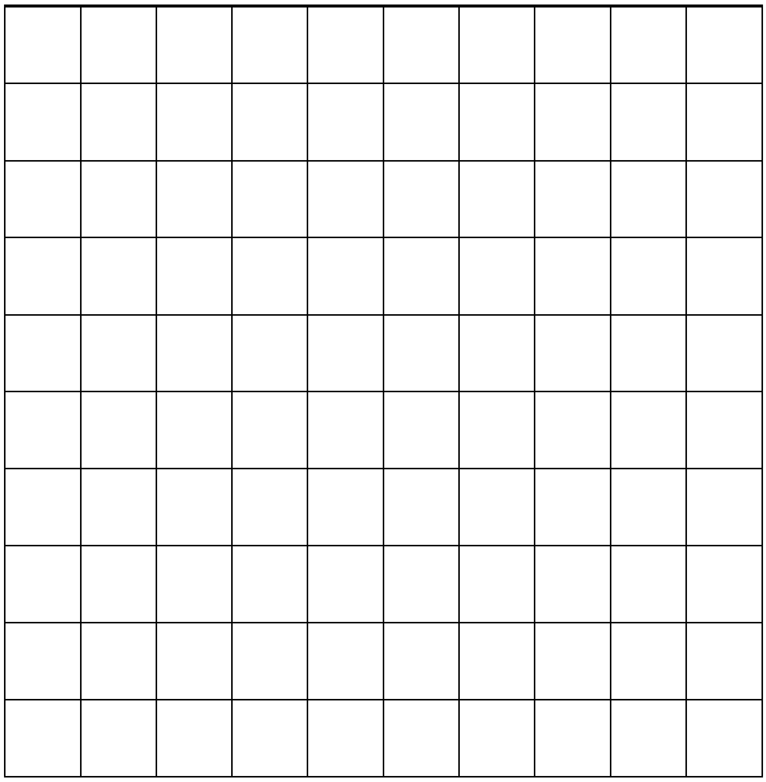
Jedan učenik sastavlja kućicu, a drugi brodić u svrhu uspoređivanja površina. Primjer rješenja prikazan je na *Slici 5.1.2*. Uspoređuju površine dijelova i cijelih likova te zaključuju da likovi različitog oblika mogu imati jednake površine. Naime, likovi su sastavljeni od istih dijelova slagalice.



Slika 5.1. 2. Primjer likova s nastavnog listića popunjenih dijelovima tangrama

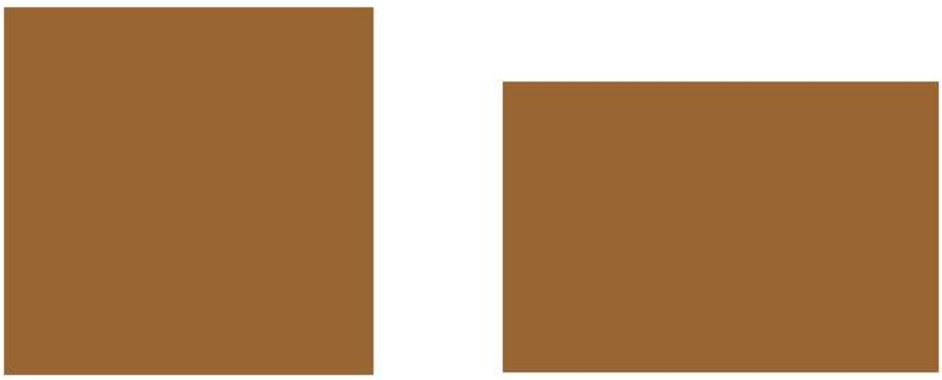
5.2. Aktivnost *Procijenimo i mjerimo!*

Cilj ove aktivnosti je učeničko procjenjivanje i mjerenje površine pravokutnika te nastavnikovo stjecanje uvida u učeničko razumijevanje pojma površine kao „prostora unutar lika“. Aktivnost je primjerena učenicima četvrtog razreda osnovne škole (MAT OŠ D.4.2.) i zahtijeva nultu razinu van Hiele modela. Učenici će, radeći u paru, mjeriti površine pravokutnika pomoću folije s mrežom kvadratića (Slika 5.2.1.).



Slika 5.2. 1. Folija s mrežom kvadratića

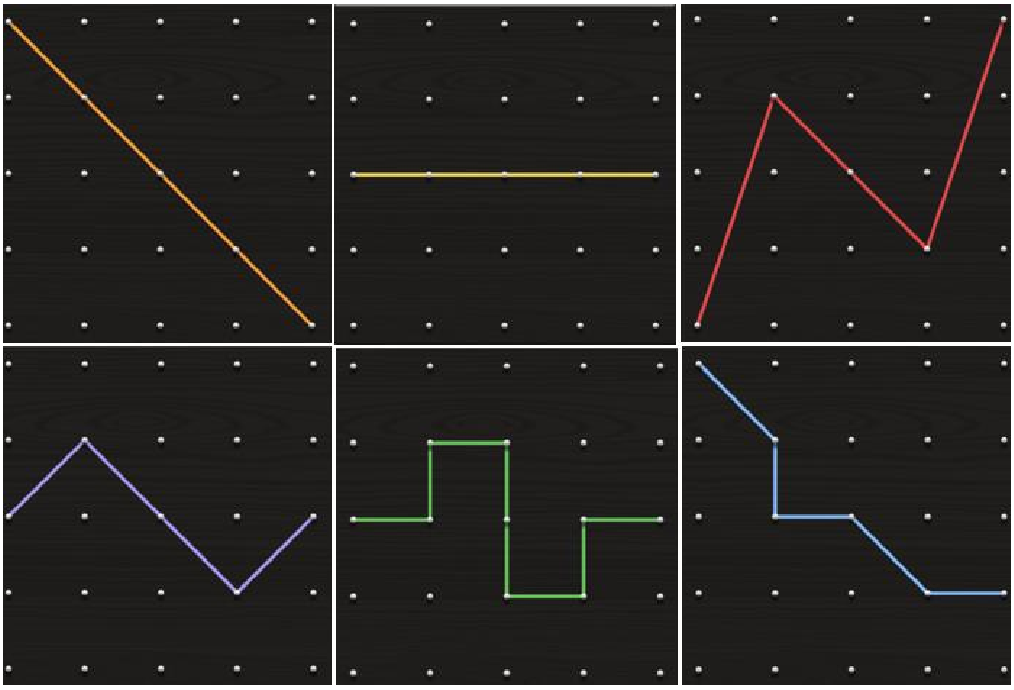
Nastavnik svakom paru učenika dodjeljuje po dva kartona dimenzija 5×5 i 6×4 (Slika 5.2.2.). Učenici zamišljaju da su to poklopci drvenih kutijica čije „gornje strane“ želimo obložiti tkaninom omiljene boje. Postavlja se pitanje za koju kutijicu treba više tkanine i kako to provjeriti? Očekuje se da će parovi zaključiti da za kutiju čija „gornja strana“ ima veću površinu treba više tkanine. Prvo procjenjuju, a potom i mjere površine dobivenih kartona koristeći foliju s mrežom kvadratića, tj. mjere prebrojavanjem jediničnih kvadratića.



Slika 5.2. 2. Kartonski predlošci koji predstavljaju gornju stranu kutije

5.3. Aktivnost *Prepolovi me!*

Cilj ove aktivnosti je da učenici, koristeći geoploču, prikazuju dva dijela jednakih površina na različite načine. Fizičkim manipuliranjem geopločom, učenici četvrtog razreda osnovne škole dobivaju osjećaj za odnose površina (MAT OŠ D.4.2.). „Dijeljenjem“ geoploče na dva dijela jednakih površina na različite načine učenici vizualno percipiraju što znači da dvije površine imaju jednaku veličinu, razvijaju svoje kritičko razmišljanje i sposobnost rješavanja problema. Učenici razmišljaju o različitim strategijama i pristupima, a neki od njih prikazani su na *Slici 5.3.1*. Ova aktivnost zahtijeva razinu analize van Hiele modela, a učenicima omogućuje dublje razumijevanje koncepta površine putem praktičnog iskustva i vizualne demonstracije.



Slika 5.3. 1. Primjer učeničkih rješenja aktivnosti Prepolovi me!

Aktivnost se može modificirati u svrhu uklanjanja učeničke miskoncepcije da likovi jednake površine nužno imaju jednake opsege. Svaki učenik dobiva kvadratnu mrežu (geoploču) dimenzija 5×5, podijeljenu na jedinične kvadratiće. Učenici rade u paru, a zadatak je podijeliti kvadrat dimenzija 5×5 na dva dijela jednake površine duž vertikalnih i horizontalnih crta kvadratne mreže (kako bi izbjegli iracionalne duljine crta). Istražuju koliko različitih načina postoji za tu podjelu. Određuju opseg dobivene polovine kvadrata u svakom dobivenom slučaju. Nakon identifikacije svih mogućnosti podjele, analiziraju opsege dobivenih polovica. Uočavaju da su površine obje polovice jednake, ali opsezi mogu varirati ovisno o načinu podjele. U konačnici, određuju podjelu s najmanjim i najvećim opsegom te argumentiraju svoje rješenje.

5.4. Aktivnost *Različiti, a opet jednaki (2)*

Cilj sljedeće aktivnosti je da učenici petog razreda osnovne škole uoče da likovi istog opsega mogu imati različite površine (MAT OŠ C.5.1.). Aktivnost se provodi u peteročlanim skupinama. Svaki učenik unutar skupine dobiva set geometrijskih pločica s pet primjeraka svake od njih (osim bež romba), pomoću kojih treba složiti lik zadanog opsega. Jedinična mjera opsega je duljina stranice kvadrata, a primjer mogućeg opsega je 14 jediničnih duljina. Svaki učenik računa površinu sastavljenog lika pomoću liste površina koju nastavnik zapisuje na ploču ili ju prikazuje na prezentaciji, a na kojoj se nalaze iznosi površina pojedine geometrijske pločice (učenici petog razreda još ne znaju računati površine svih likova na geometrijskim pločicama). Skicira svoj lik u bilježnicu te računa površinu zbrajanjem površina geometrijskih pločica od kojih je lik sastavljen. Primjer učeničkog rješenja nalazi se na *Slici 5.4.1*.

$$P = P_{\Delta} + P_{\Delta} + P_{\Delta} + P_{\Delta} + P_{\hexagon} + P_{\diamond} + P_{\diamond}$$

$$P = 4P_{\Delta} + P_{\hexagon} + 2P_{\diamond}$$

$$P = 4 \cdot 270.63\ \mathrm{mm}^2 + 1623.78\ \mathrm{mm}^2 + 2 \cdot 541.26\ \mathrm{mm}^2$$

$$P = 3247.56\ \mathrm{mm}^2$$

Slika 5.4. 1. Primjer učeničkog računanja površine sastavljenog lika

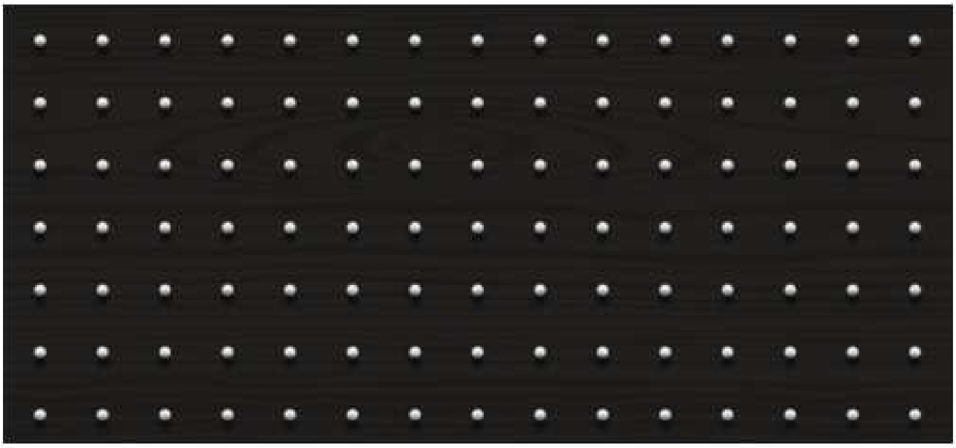
Usporedbom dobivenih rezultata, učenici uočavaju da površine mogu biti različite te zaključuju da iako likovi imaju jednake opsege ne moraju imati jednake površine.

5.5. Aktivnost *Znaš moj opseg, kolika mi je površina?*

Cilj ove aktivnosti je ukloniti učeničku miskoncepciju da likovi jednakog opsega imaju jednake površine. Aktivnost je namijenjena učenicima četvrtog razreda osnovne škole na razini analize (MAT OŠ D.4.2.). Učenici rade u paru i dobivaju nastavni listić kao na *Slici 5.5.1.*

Nastavni listić - ***Znaš moj opseg, kolika mi je površina?***

1. Pomoću geoploče odredite barem sedam nesukladnih likova opsega 12 jediničnih duljina. Skicirajte rješenja.



2. Odredite površinu svakog od tih likova u jediničnim kvadratima. Što uočavate?

lik	**površina (u jediničnim kvadratima)**

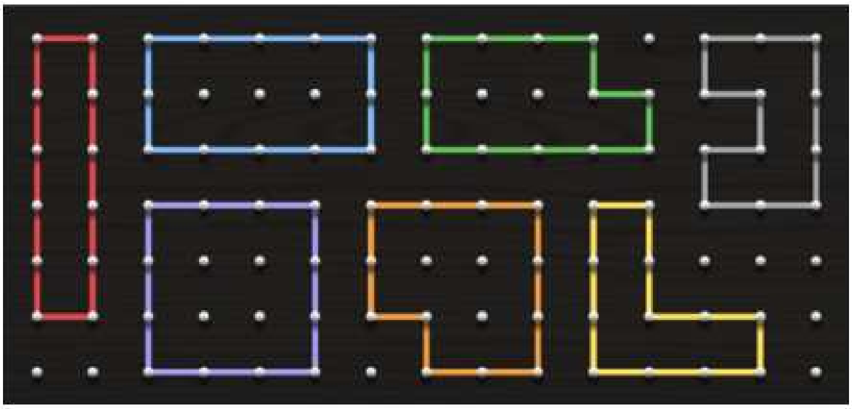
3. Na proizvoljnom liku pomakni elastičnu vrpcu tako da novi lik bude jednakog opsega kao polazni lik, ali manje površine.

Slika 5.5. 1. Nastavni listić Znaš moj opseg, kolika mi je površina?

Pomoću geoploče, učenici će istražiti različite oblike koji imaju isti opseg, mjeriti njihove površine (jediničnim kvadratima), analizirati iste te primijetiti da, unatoč konstantnom opsegu, površine se mogu razlikovati. Primjer rješenja jednog para učenika nalazi se na *Slici 5.5.2*.

Nastavni listić - ***Znaš moj opseg, kolika mi je površina?***

1. Pomoću geoploče odredite barem sedam nesukladnih likova opsega 12 jediničnih duljina. Skicirajte rješenja.

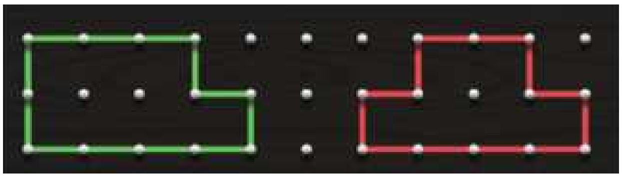


2. Odredite površinu svakog od tih likova u jediničnim kvadratima. Što uočavate?

lik	površina (u jediničnim kvadratima)
crveni	**5**
plavi	**8**
ljubičasti	**9**
zeleni	**7**
narančasti	**8**
sivi	**5**
žuti	**5**

Likovi jednakog opsega ne moraju imati jednake površine.

3. Na proizvoljnom liku pomakni elastičnu vrpcu tako da novi lik bude jednakog opsega kao polazni lik, ali manje površine.



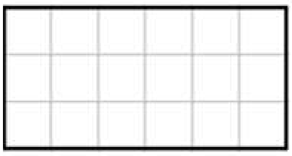
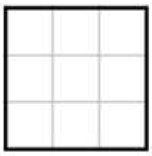
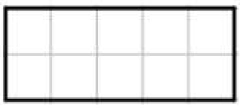
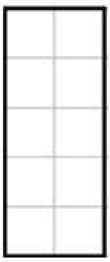
Slika 5.5. 2. Primjer učeničkog rješenja nastavnog listića Znaš moj opseg, kolika mi je površina?

5.6. Aktivnost *Površina pravokutnika*

Aktivnost započinje geometrijskim mišljenjem na razini vizualizacije. Cilj je da učenici petog razreda osnovne škole „otkriju“ pravilo za računanje površine pravokutnika (MAT OŠ D.5.3.). Aktivnost je zamišljena za rad učenika u četveročlanoj skupini metodom *Kolo naokolo*. Nastavnik dijeli po jedan nastavni listić (Slika 5.6.1.) za svakog učenika, i to četiri različita listića za svaku skupinu učenika (Nastavni listić 1, Nastavni listić 2, Nastavni listić 3 i Nastavni listić 4). Svi nastavni listići u razredu su različiti, ali se svaki pravokutnik iz tablice u prvom zadatku te dimenzije iz trećeg zadatka pojavljuju na barem dva listića u svrhu usporedbe i kontrole točnosti rezultata. Važno je obuhvatiti sve moguće slučajeve, uključujući kvadrate te iste pravokutnike koji su u „uspravnom“ i „polegnutom“ položaju.

Nastavni listić 1 – Kolo naokolo

1. **(Kolo naokolo!)** Tablicu popunite po stupcima, prema naznačenim koracima.

	Broj jediničnih kvadratića koji „prekrivaju“ pravokutnik	**Broj redaka jediničnih kvadratića**	**Broj jediničnih kvadratića u jednom retku**	**Umnožak brojeva iz 3. i 4. stupca**
				
				
				
				

2. **(Raspravite u skupini!)** Usporedite prvi i posljednji stupac tablice. Što uočavate? Zapišite riječima.

3. **(Sam/a!)** Primjenjujući uočeno pravilo, bez prebrojavanja jediničnih kvadratića koji prekrivaju pravokutnik odredite njihov broj ako je broj redaka jediničnih kvadratića **7**, a broj jediničnih kvadratića u jednom retku **3**.

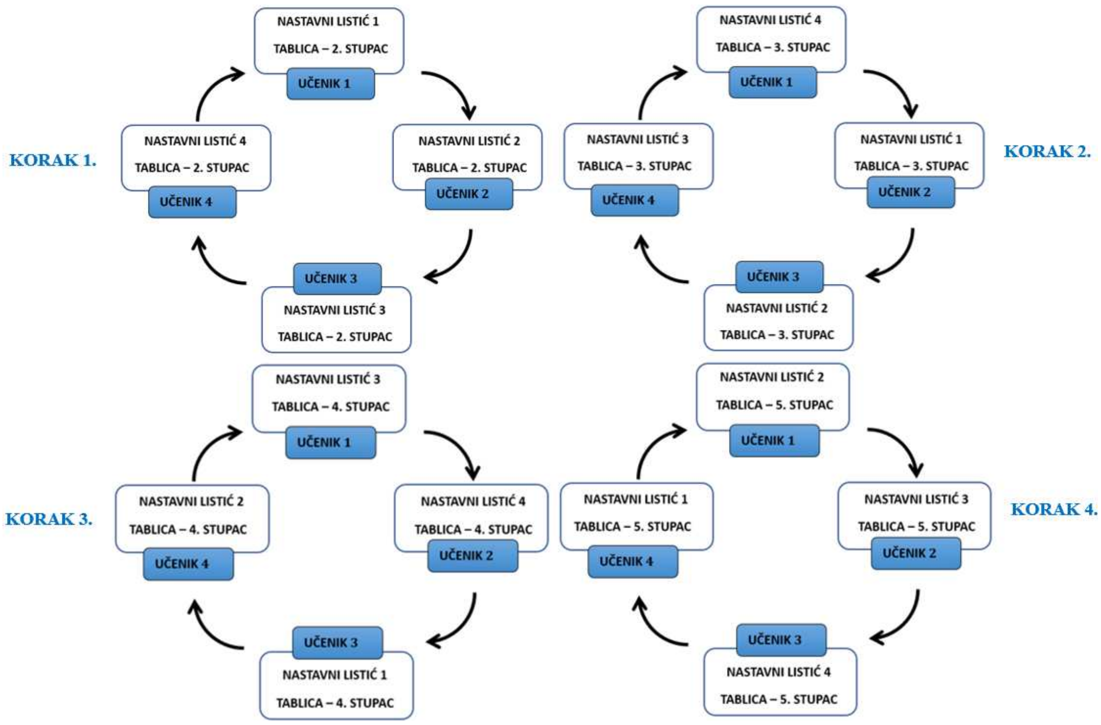
   Dobiveni rezultat provjerite prebrojavanjem!

4. **(Raspravite u skupini!)** Koju veličinu predstavlja broj jediničnih kvadratića koji „prekrivaju" pravokutnik?

5. **(Raspravite u skupini!)** Zapišite simbolima opće pravilo za veličinu iz 4. zadatka ako pravokutnik prekriva ***a*** redaka jediničnih kvadratića i ***b*** jediničnih kvadratića u pojedinom retku.

Slika 5.6. 1. Primjer nastavnog listića za otkrivanje površine pravokutnika metodom Kolo naokolo

Učenik na dobivenom listiću popunjava drugi stupac tablice brojem jediničnih kvadratića koji „prekrivaju" pravokutnik. Potom svoj listić prosljeđuje susjednom učeniku u smjeru kretanja kazaljke na satu, a od susjednog učenika s druge strane dobiva njegov listić. Na njemu kontrolira popunjeni drugi stupac i popunjava treći stupac tablice brojem redaka jediničnih kvadratića u pravokutniku. Potom listić prosljeđuje dalje na isti način, a na sljedećem listiću kontrolira popunjene stupce (drugi i treći) te popunjava četvrti stupac brojem jediničnih kvadratića u jednom retku. Analogno za peti stupac, u kojem zapisuje umnožak brojeva iz trećeg i četvrtog stupca. Kretanje nastavnih listića po koracima tijekom popunjavanja tablice prikazano je dijagramima na *Slici 5.6.2*.

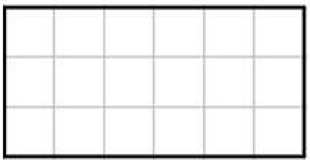
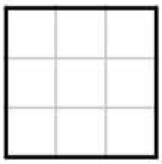
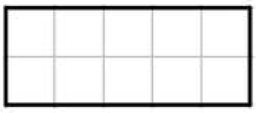
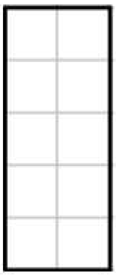


Slika 5.6. 2. Koraci u kruženju nastavnih listića u skupini

Potom na naznačeni način (suradnički u skupini, odnosno individualno) rješavaju preostala četiri zadatka na nastavnom listiću i dolaze do zajedničkog zaključka da je površina pravokutnika jednaka umnošku broja redaka i broja kvadratića u jednom retku (razina analize). Primjer učeničkog rješenja nastavnog listića je na *Slici 5.6.3*.

Nastavni listić 1 – Kolo naokolo

1. **(Kolo naokolo!)** Tablicu popunite po stupcima, prema naznačenim koracima.

	Broj jediničnih kvadratića koji „prekrivaju" pravokutnik	**Broj redaka jediničnih kvadratića**	**Broj jediničnih kvadratića u jednom retku**	**Umnožak brojeva iz 3. i 4. stupca**
	**18**	**3**	**6**	**18**
	**9**	**3**	**3**	**9**
	**10**	**5**	**2**	**10**
	**10**	**2**	**5**	**10**

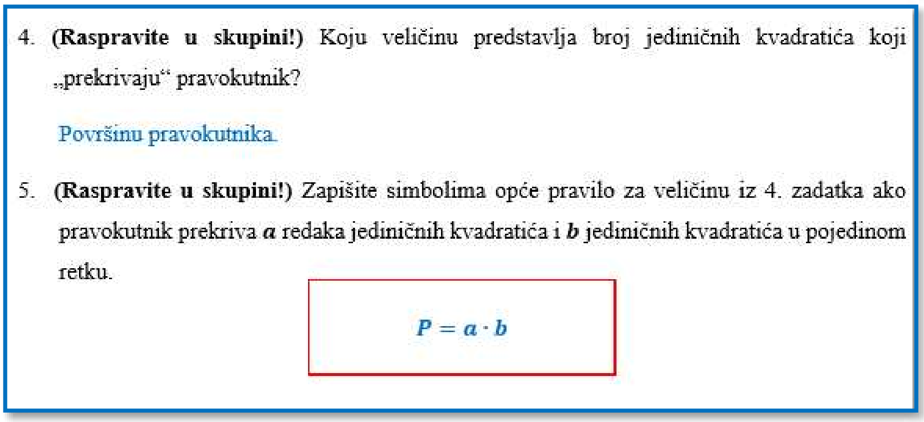
2. **(Raspravite u skupini!)** Usporedite prvi i posljednji stupac tablice. Što uočavate? Zapišite riječima.

   Jednaki su.

3. **(Sam/a!)** Primjenjujući uočeno pravilo, bez prebrojavanja jediničnih kvadratića koji prekrivaju pravokutnik odredite njihov broj ako je broj redaka jediničnih kvadratića **7**, a broj jediničnih kvadratića u jednom retku **3**.

   $\mathbf{7 \cdot 3 = 21}$

   Dobiveni rezultat provjerite prebrojavanjem! **21.**



4. **(Raspravite u skupini!)** Koju veličinu predstavlja broj jediničnih kvadratića koji „prekrivaju" pravokutnik?

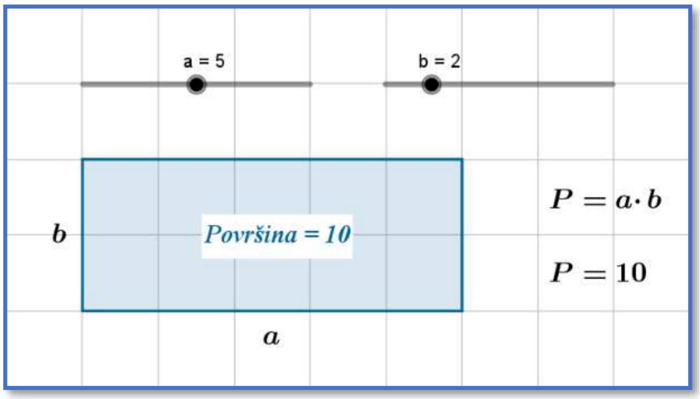
Površinu pravokutnika.

5. **(Raspravite u skupini!)** Zapišite simbolima opće pravilo za veličinu iz 4. zadatka ako pravokutnik prekriva a redaka jediničnih kvadratića i b jediničnih kvadratića u pojedinom retku.

$$\boxed{P = a \cdot b}$$

Slika 5.6. 3. Primjer učeničkog rješenja nastavnog listića za aktivnost Površina pravokutnika

Putem razredne diskusije zaključuju o površini pravokutnika kao umnošku njegove duljine (broja redaka) i širine (broja kvadratića u jednom retku). Također, raspravljaju o komutativnosti u ovom kontekstu. Generalizacija se ostvaruje radom u pripremljenom materijalu u alatu dinamične geometrije u kojem učenici mijenjaju duljine stranica pravokutnika. Prikazuje se iznos površine pravokutnika te umnožak njegove duljine i širine (Slika 5.6.4.).



Slika 5.6. 4. Radni materijal u alatu dinamične geometrije za generalizaciju pravila za određivanje površine pravokutnika

5.7. Aktivnost *Znaš moju površinu, koliki mi je opseg?*

Cilj aktivnosti je potaknuti učenike petog razreda osnovne škole da primijete kako se ista površina može obuhvatiti različitim opsezima, ovisno o obliku i dimenzijama lika. Drugim riječima, cilj je potaknuti učenike na zaključivanje da likovi jednake površine mogu imati različite opsege (MAT OŠ D.5.3). Provođenje ove aktivnosti zahtijeva barem razinu analize van Hiele modela geometrijskog mišljenja. Učenici rade u tročlanim skupinama. Svaki učenik dobiva set od dvanaest geometrijskih pločica oblika kvadrata i nastavni listić kao na *Slici 5.7.1*.

Nastavni listić – ***Znaš moju površinu, koliki mi je opseg?***

1. **(Raspravite u skupini!)** Kolika je površina lika sastavljenog od **12** jediničnih kvadratića?

2. **(Sam/a!)** Pomoću dobivenih pločica složite pravokutnike i ta rješenja skicirajte u prvom stupcu. Zapišite površinu i opseg svakog složenog pravokutnika, pri čemu je jedinična mjera za mjerenje površine jedna pločica (jedan kvadrat), a za opseg duljina jedne stranice kvadrata.

PRAVOKUTNIK	**POVRŠINA**	**OPSEG**

3. **(Raspravite u skupini!)** Što uočavate uspoređujući drugi i treći stupac tablice?

4. **(Raspravite u skupini!)** Od svih pravokutnika površine **12** odredite onaj najmanjeg i onaj najvećeg opsega.

Slika 5.7. 1. Nastavni listić Znaš moju površinu, koliki mi je opseg?

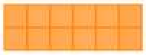
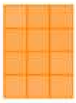
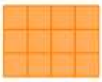
Učenici zajednički rješavaju prvi zadatak na nastavnom listiću. Utvrđuju da su svim likovima sastavljanima od 12 jediničnih (sukladnih) kvadrata površine jednake 12. Potom, individualno rješavaju drugi zadatak, tj. od dobivenih (jediničnih) pločica slažu različite pravokutnike i pritom u tablicu zapisuju njihove opsege i površine. Nakon toga, zajednički rješavaju preostale zadatke s nastavnog listića, razmjenjuju i sučeljavaju mišljenja unutar skupine i zaključuju da likovi jednake površine mogu imati različite opsege te određuju onaj s najmanjim i onaj s najvećim opsegom. Primjer jednog učeničkog rješenja nalazi se na *Slici 5.7.2*.

Nastavni listić – ***Znaš moju površinu, koliki mi je opseg?***

1. **(Raspravite u skupini!)** Kolika je površina lika sastavljenog od **12** jediničnih kvadratića?

Površina lika sastavljenog od **12** jediničnih kvadratića iznosi **12**.

2. **(Sam/a!)** Pomoću dobivenih pločica složite pravokutnike i ta rješenja skicirajte u prvom stupcu. Zapišite površinu i opseg svakog složenog pravokutnika, pri čemu je jedinična mjera za mjerenje površine jedna pločica (jedan kvadrat), a za opseg duljina jedne stranice kvadrata.

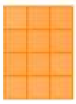
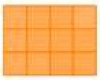
PRAVOKUTNIK	POVRŠINA	OPSEG
	12	26
	12	16
	12	14
	12	14

3. **(Raspravite u skupini!)** Što uočavate uspoređujući drugi i treći stupac tablice?

Uočavamo da različiti likovi mogu imati jednake površine, a opseg tih likova može i ne mora biti jednak.

4. **(Raspravite u skupini!)** Od svih pravokutnika površine **12** odredite onaj najmanjeg i onaj najvećeg opsega.

 ⟶ najvećeg opsega

  ⟶ najmanjeg opsega

Slika 5.7. 2. Primjer učeničkog rješenja nastavnog listića
Znaš moju površinu, koliki mi je opseg?

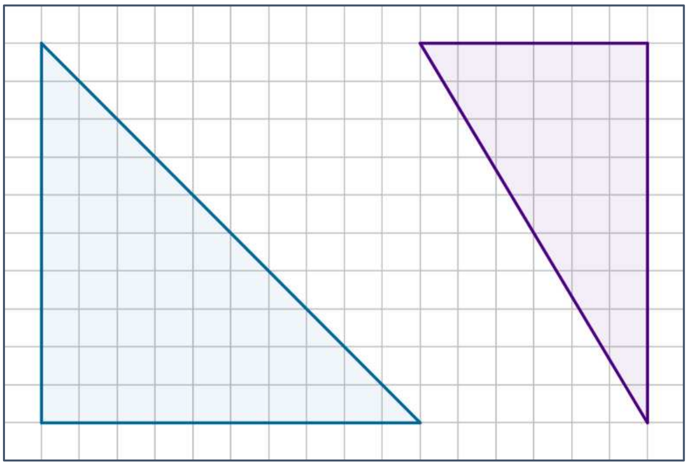
Na kraju aktivnosti slijedi razredna diskusija u kojoj nastavnik zajedno s učenicima rezimira „otkriveno" svojstvo i naglašava važnost razumijevanja odnosa između površina i opsega. Neka od pitanja za učenike mogu biti:

1. Kako biste objasnili promjenu opsega lika, ali konstantnost površine? O čemu ovisi ta promjena?

2. Bi li pravokutnici s većom površinom imali veći ili manji opseg od pravokutnika s manjom površinom? Obrazložite svoje razmišljanje.
3. Zašto je važno razumjeti odnos između opsega i površine u stvarnom životu? Možete li navesti primjere situacija u kojima je to znanje korisno?

5.8. Aktivnost *Površina pravokutnog trokuta*

Cilj ove aktivnosti je da učenici šestog razreda osnovne škole „otkriju“ pravilo za određivanje površine pravokutnog trokuta pomoću površine „povezanog“ pravokutnika (MAT OŠ D.6.2.). Svaki učenik dobiva predložak s dva pravokutna trokuta nacrtana u kvadratnoj mreži jediničnih kvadratića primjerene veličine (Slika 5.8.1.). Učenici mjere površine dobivenih trokuta prebrojavanjem jediničnih kvadratića (razina vizualizacije) i uočavaju da takav način nije optimalan.

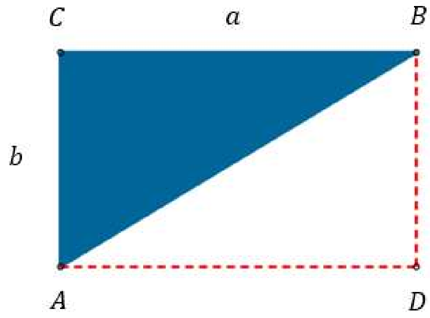


Slika 5.8. 1. Predložak pravokutnih trokuta u kvadratnoj mreži jediničnih kvadratića za jedan par učenika

Zajedno sa svojim parom u klupi, koji je dobio isti predložak, prisjeća se slagalice tangram. Iz dobivenih predložaka izrezuju trokute, uzimaju dva sukladna pravokutna trokuta te formiraju pravokutnik. Uočavaju da je površina jednog od trokuta jednaka polovini površine dobivenog pravokutnika, tj. površina dobivenog pravokutnika je dvostruko veća. Također, uočavaju da su katete trokuta dvije susjedne stranice pravokutnika. Budući da je polazni trokut polovina dobivenog pravokutnika, zaključuju da je površina polaznog pravokutnog trokuta jednaka polovini dobivenog pravokutnika (razina analize). Učenici pretpostavljaju da to vrijedi za bilo koji pravokutni trokut pa im se postavlja pitanje kako mogu biti sigurni da svaka dva sukladna pravokutna trokuta tvore pravokutnik, čime se njihova razina mišljenja usmjerava na razinu neformalne dedukcije. Razina dedukcije ostvaruje se dokazivanjem primjenom sukladnosti trokuta.

Dokaz.

Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Nadopunimo ga do pravokutnika $ADBC$ (Slika 5.8.2.).



Slika 5.8. 2. Skica za dokaz formule za izračunavanje površine pravokutnog trokuta

Uz oznake sa *Slike 5.8.2.* vrijedi:

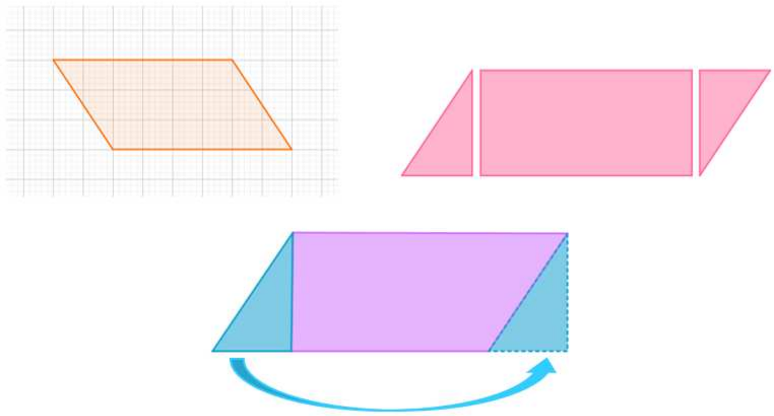
- kut u vrhu D sukladan je kutu u vrhu C (kutovi s okomitim kracima),
- $|BC| = |AD| = a$ (nasuprotne stranice pravokutnika),
- $|CA| = |DB| = b$ (nasuprotne stranice pravokutnika),

pa po SKS teoremu o sukladnosti trokuta zaključujemo da je trokut ABC sukladan trokutu BAD, odnosno da su njihove površine jednake. Ujedno, površina jednog pravokutnog trokuta jednaka je polovini površine dobivenog pravokutnika, tj. $P_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}$.

■

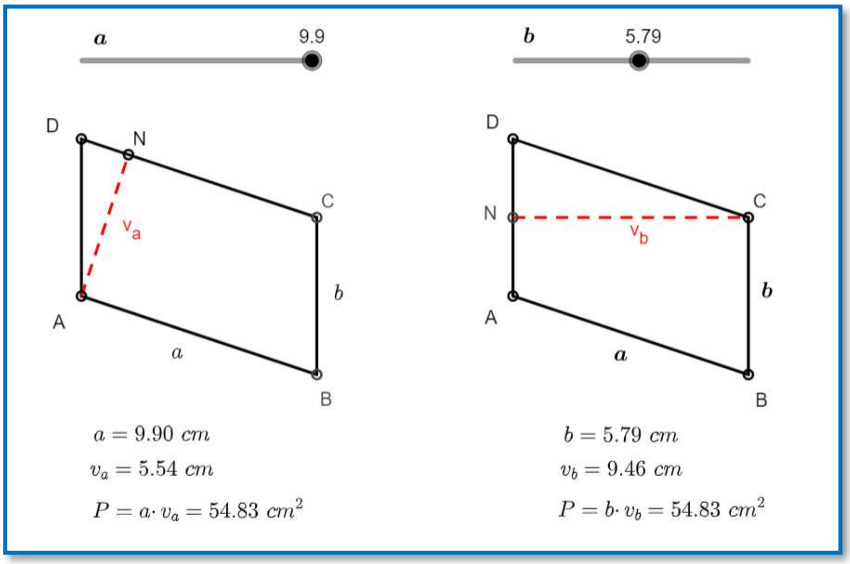
5.9. Aktivnost *Površina paralelograma*

U ovoj aktivnosti cilj je da učenici šestog razreda osnovne škole otkriju pravilo za računanje površine paralelograma (MAT OŠ D.6.2.). Tri su moguće metode. Prva uključuje prebrojavanje kvadratića unutar paralelograma nacrtanog u mreži kvadratića (razina vizualizacije), druga je „razbijanje“ paralelograma na dva pravokutna trokuta i pravokutnik (razina analize), a treća je „rezanje“ pravokutnog trokuta i premještanje u svrhu oblikovanja pravokutnika s istom bazom i visinom kao i paralelogram (Slika 5.9.1.).



Slika 5.9. 1. Metode otkrivanja pravila za računanje površine paralelograma

Učenici rade u paru. Uočavaju da prva metoda nije optimalna. Prebrojavanje svakog kvadratića unutar paralelograma zahtijeva puno vremena, a uz to je ova metoda podložna greškama (izostavljanje kvadratića ili pogrešno prebrojavanje). Putem diskusije, opažaju da ova metoda ne pruža razumijevanje geometrijskih koncepata koji stoje iza površine paralelograma, već samo mehaničko računanje. U provedbi druge metode, učenici analiziraju lik tako da ga „razbiju" na komponente čije površine znaju izračunati i potom ukupnu površinu računaju kao zbroj površina tih komponenti. U trećoj metodi povezuju pravilo za površinu paralelograma s pravilom za pravokutnik (razina neformalne dedukcije). Svaki par učenika dobiva model pravokutnika od kartona iz kojeg izrezuju pravokutan trokut i premještaju ga dok ne formiraju pravokutnik iste baze i visine kao kod polaznog paralelograma. U paru raspravljaju i zaključuju o jednakosti površina tih likova. Naime, stranice ovako dobivenog pravokutnika predstavljaju stranicu paralelograma i visinu na tu stranicu. Prema tome, površina paralelograma jednaka je umnošku duljine stranice paralelograma i duljine visine na tu stranicu. Na pitanje ovisi li površina o izboru visine paralelograma pronaći će u pripremljenom materijalu u alatu dinamične geometrije (Slika 5.9.2.).



Slika 5.9. 2. Radni materijal u alatu dinamične geometrije za aktivnost Površina paralelograma

Učenici na klizaču mijenjaju duljine stranica paralelograma i uočavaju da njegova površina ne ovisi o izboru visine.

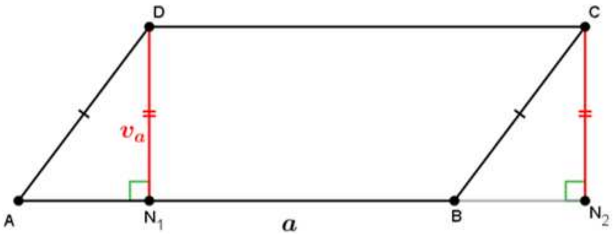
Istaknimo da je rijetko koji učenik osmog razreda osnovne škole, a još manje šestog razreda, sposoban primjenjivati geometrijsko razmišljanje na razini višoj od neformalne dedukcije. Viša razina, razina dedukcije doseže se dokazivanjem, primjenom matematičkih pojmova vezanih uz koncept površine paralelograma, sukladnosti i standardnih matematičkih oznaka.

Dokaz.

Neka je $ABCD$ paralelogram sa stranicom duljine a i pripadnom visinom duljine v_a. Označimo sa N_1 nožište visine iz vrha D, a sa N_2 nožište visine iz vrha C kao na *Slici 5.9.3*. Uz oznake sa slike, prema $SSK^>$ teoremu o sukladnosti trokuta vrijedi da su trokuti AN_1D i BN_2C sukladni, tj. $AN_1D \cong BN_2C$ ($|AD| = |BC|$, $|DN_1| = |CN_2|$, kutovi u vrhovima N_1 i N_2 su pravi kutovi), pa imaju jednake površine, tj. $P(AN_1D) = P(BN_2C)$. Dakle, vrijedi

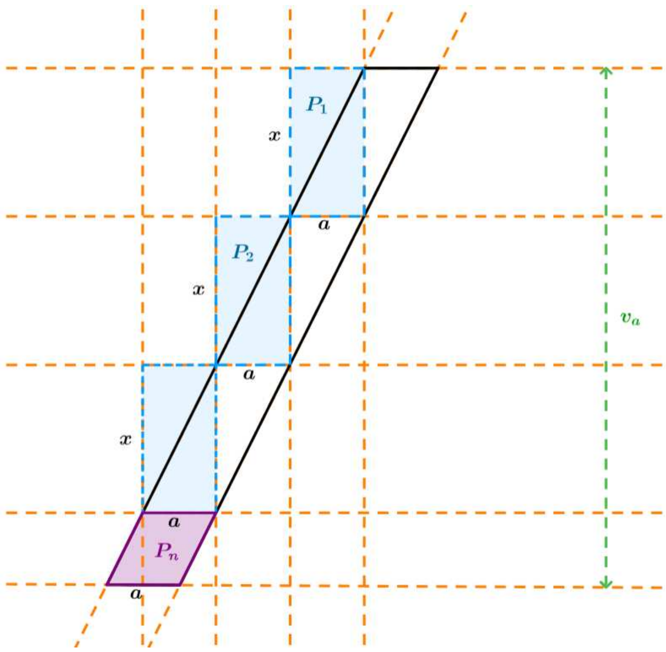
$$P(ABCD) = P(AN_1D) + P(N_1BCD) = P(BN_2C) + P(N_1BCD) = P(N_1N_2CD) = av_a,$$

jer je N_1N_2CD pravokutnik sa stranicama duljina a i v_a.



Slika 5.9. 3. Skica za dokaz formule za površinu paralelograma kojemu se nožište visine nalazi na stranici

Što ako se nožište visine paralelograma ne nalazi na njegovoj stranici? U tom slučaju, paralelogram „dijelimo“ na manje paralelograme koji se mogu „presložiti“ u pravokutnik pa će površina polaznog paralelograma biti jednaka zbroju površina manjih paralelograma. Prema Arhimedovom aksiomu, za svaka dva pozitivna realna broja α i β postoji prirodan broj p takav da vrijedi: $p\beta > \alpha$. Ovaj aksiom osigurava da ćemo u konačno mnogo koraka paralelogram s visinom duljine v_a „prekriti“ pravokutnicima s visinom duljine x. Dakle, nakon konačno mnogo koraka imamo situaciju kao na *Slici 5.9.4*.



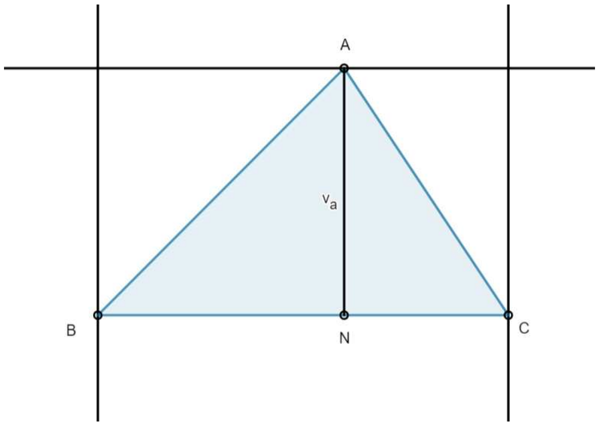
Slika 5.9. 4. Skica za dokaz formule za površinu paralelograma kojemu se nožište visine ne nalazi na stranici

Uočimo da su plavi pravokutnici sukladni. Neka je k broj sukladnih pravokutnika. Tada je površina paralelograma jednaka zbroju površina tih k sukladnih pravokutnika i površine "ostatka", tj. paralelograma s jednom stranicom duljine a i visinom na tu stranicu jednakom $v_a - k \cdot x$. Dakle, vrijedi $P = kx \cdot a + a \cdot (v_a - kx)$, odnosno $P = a \cdot v_a$.

■

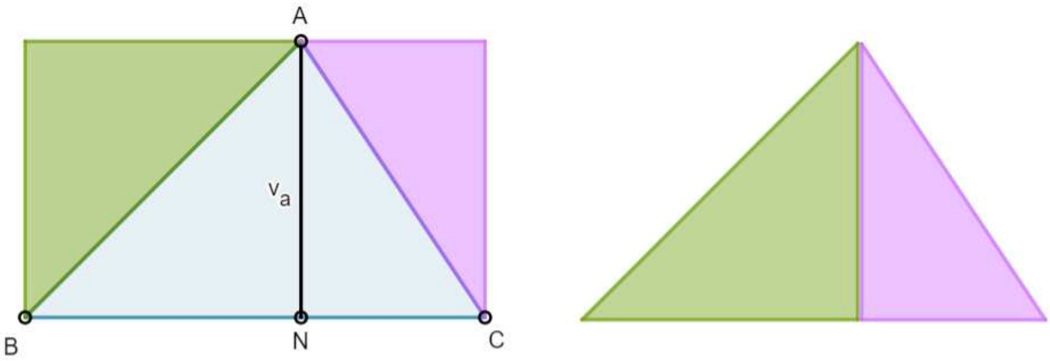
5.10. Aktivnost *Površina trokuta*

Cilj ove aktivnosti je da učenici šestog razreda osnovne škole otkriju pravilo za računanje površine bilo kojeg trokuta (MAT OŠ D.6.2.). Tri su moguće metode. Prva je nadopuniti trokut do pravokutnika, pri čemu je baza trokuta njegova najdulja stranica. Učenici crtaju paralelu s najduljom stranicom trokuta koja prolazi nasuprotnim vrhom te stranice, a potom crtaju okomice na tu paralelu iz preostalih vrhova polaznog trokuta (Slika 5.10.1.).



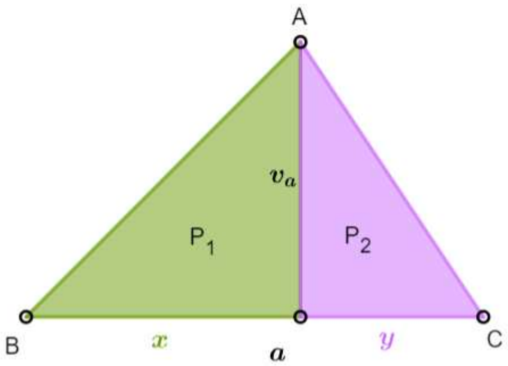
Slika 5.10. 1. Nadopunjavanje trokuta do pravokutnika

Putem diskusije komentiraju da su trokut nadopunili do pravokutnika pravokutnim trokutima te da se dobiveni pravokutnik sastoji od tri trokuta. Prema nastavnikovim uputama, učenici crtaju visinu polaznog trokuta te uspostavljaju odnos duljine visine i osnovice polaznog trokuta sa stranicama dobivenog pravokutnika. Nadalje, izrezuju pravokutne trokute, preslaguju ih i uočavaju da oni čine trokut sukladan polaznom trokutu, primjerice kao na *Slici 5.10.2.* (razina vizualizacije), te zaključuju da su komponente dobivenog pravokutnika dva polazna trokuta, odnosno da je površina polaznog trokuta jednaka polovini površine dobivenog pravokutnika (razina analize).



Slika 5.10. 2. Preslagivanje pravokutnih trokuta u polazni trokut

Širina dobivenog pravokutnika je duljina visine polaznog trokuta, a duljina pravokutnika je duljina osnovice polaznog trokuta. Dakle, površina trokuta jednaka je polovini umnoška duljine stranice trokuta i duljine visine na tu stranicu (razina neformalne dedukcije). Alternativne metode su „podijeliti“ trokut čija je baza najdulja stranica na dva pravokutna trokuta te zbrojiti njihove površine (Slika 5.10.3.) ili dopuniti trokut postavljen na najdulju stranicu kao bazu do paralelograma i izračunati polovicu njegove površine.



$$P = P_1 + P_2$$

$$P = \frac{xv_a}{2} + \frac{xv_a}{2}$$

$$P = \frac{v_a}{2}(x+y)$$

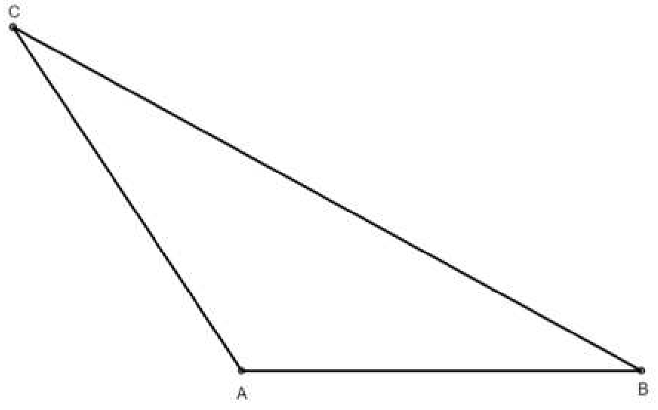
$$P = \frac{av_a}{2}$$

Slika 5.10. 3. Površina trokuta kao zbroj površina dvaju pripadnih pravokutnih trokuta

Što ako je baza najkraća stranica tupokutnog trokuta? Učenici dobivaju nastavni listić kao na *Slici 5.10.4*.

Nastavni listić – ***Površina trokuta***

1. Zadan je tupokutan trokut ABC.



a. Nacrtajte visinu v_c iz vrha C na pravac kojem pripada stranica $\overline{AB}$ s nožištem N i označite njezino polovište P.

b. Nacrtajte paralelu s pravcem kojem pripada stranica $\overline{AB}$ kroz točku P.

c. Nacrtajte okomicu iz točke A na paralelu iz b. i nožište označite s D.

2. Koji geometrijski likovi čine polazni trokut? Izrežite trokut ABC tako da dobijete uočene likove.

3. Presložite dijelove polaznog trokuta u geometrijski lik čiju površinu znate izračunati.

a. Koji je to lik? Kolike su duljine stranica toga lika? Odredite njegovu površinu i skicirajte rješenje.

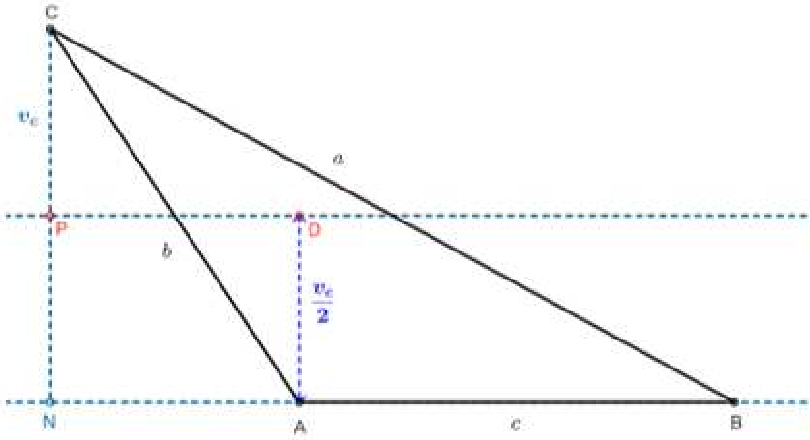
b. Što zaključujete o površini polaznog trokuta?

Slika 5.10. 4. Nastavni listić Površina trokuta

Radeći u paru rješavaju zadatke s nastavnog listića i „otkrivaju“ pravilo za izračunavanje površine tupokutnog trokuta kojemu je baza najkraća stranica. Uočavaju da se i u ovom slučaju površina računa kao polovina umnoška duljine stranice i duljine pripadne visine. Primjer učeničkog rješenja nastavnog listića prikazan je na *Slici 5.10.5*.

Nastavni listić – ***Površina trokuta***

1. Zadan je tupokutan trokut ABC.



a. Nacrtajte visinu v_c iz vrha C na pravac kojem pripada stranica $\overline{AB}$ s nožištem N i označite njezino polovište P.

b. Nacrtajte paralelu s pravcem kojem pripada stranica $\overline{AB}$ kroz točku P.

c. Nacrtajte okomicu iz točke A na paralelu iz b. i nožište označite s D.

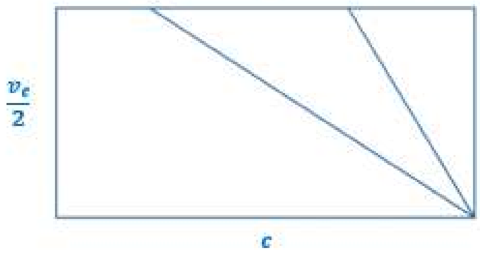
2. Koji geometrijski likovi čine polazni trokut? Izrežite trokut ABC tako da dobijete uočene likove.

Polazni trokut sastoji se od dva trokuta i trapeza.

3. Presložite dijelove polaznog trokuta u geometrijski lik čiju površinu znate izračunati.

a. Koji je to lik? Kolike su duljine stranica toga lika? Odredite njegovu površinu i skicirajte rješenje.

Pravokutnik sa stranicama duljine $|AB| = c$ i $\frac{v_c}{2}$.



$$P = c \cdot \frac{v_c}{2}$$

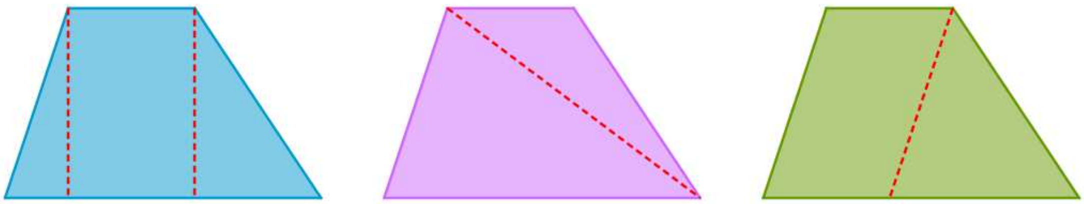
b. Što zaključujete o površini polaznog tupokutnog trokuta?

Površina tupokutnog trokuta je jednaka polovini umnoška duljine stranice i duljine pripadne visine.

Slika 5.10. 5. Učeničko rješenje nastavnog listića Površina trokuta

5.11. Aktivnost *Površina trapeza*

Cilj ove aktivnosti je da učenici šestog razreda osnovne škole otkriju pravilo za računanje površine trapeza (MAT OŠ D.6.2.). Na razini vizualizacije, učenici rade individualno. Dobivaju trapez nacrtan u mreži kvadratića te prebrojavaju broj jediničnih kvadratića unutar trapeza. Uočavaju da to nije optimalna metoda. Zatim, nastavnik dijeli učenike u tročlane skupine kako bi analizirali na koje geometrijske likove, čiju površinu znaju izračunati, mogu „razbiti“ polazni trapez. Neke od mogućnosti su podijeliti trapez na pravokutnik i dva pravokutna trokuta, podijeliti trapez na dva trokuta ili podijeliti trapez na paralelogram i trokut (Slika 5.11.1.).



Slika 5.11. 1. Primjeri „podjele“ trapeza u svrhu izračunavanja njegove površine

Učenici unutar skupine dolaze do neformalnih iskaza da je površina trapeza jednaka zbroju površina likova od kojih je sastavljen (razina analize). Treća faza aktivnosti također se odvija u tročlanim skupinama. U prve dvije etape aktivnost se oslanjala samo na prototipove trapeza, dok u ovoj fazi svaki učenik unutar skupine dobiva nastavni listić na kojemu su dva netipična trapeza (Slika 5.11.2.). Rješavaju zadatke s nastavnog listića kako je naznačeno (individualno ili zajednički) i na njega zapisuju svoje zaključke. Zaključuju da je površina trapeza jednaka umnošku duljine visine tog trapeza i polovičnog zbroja duljina osnovica. Jedno učeničko rješenje prikazano je na *Slici 5.11.3*. Slijedi razredna diskusija u kojoj svaka skupina argumentira svoje zaključivanje, a nastavnik učenike usmjerava na višu van Hiele razinu pitanjima poput *Koje svojstvo vrijedi za trokute?, Kako nam to svojstvo pomaže u istraživanju pravila za računanje površine trapeza?, Postoje li trapezi za koje „otkriveno“ pravilo ne vrijedi? Kako biste to istražili?, Možete li dokazati svoj zaključak?*.

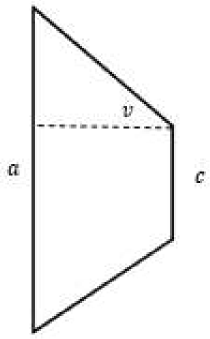
Nastavni listić - ***Površina trapeza***

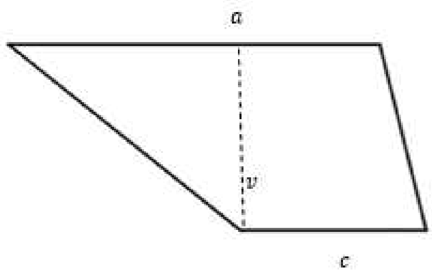
1. **(Sam/a!)**

a. Nacrtajte pravac koji prolazi vrhom trapeza i polovištem P nasuprotnog kraka trapeza.

b. Produžite osnovicu trapeza preko jednog vrha.

c. Označite sjecište tog produžetka s pravcem kroz polovište s M.





2. a. **(Raspravite u skupini!)** Promotrite dobivene trokute. Što možete reći o njima?

b. **(Sam/a!)** Izrežite jedan trokut i presložite dobivene dijelove u lik čiju površinu znamo odrediti. Skicirajte rješenja.

4. **(Raspravite u skupini!)** Napišite izraz za površinu trapeza s osnovicama duljine a i c i visinom duljine v.

5. **(Sam/a!)** Izračunajte površinu paralelograma s osnovicama duljine 5 dm i 2 dm i visinom duljine 4 dm.

Slika 5.11. 2. Nastavni listić Površina trapeza

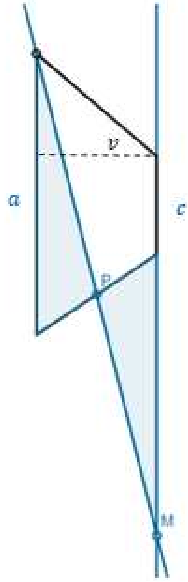
Nastavni listić - ***Površina trapeza***

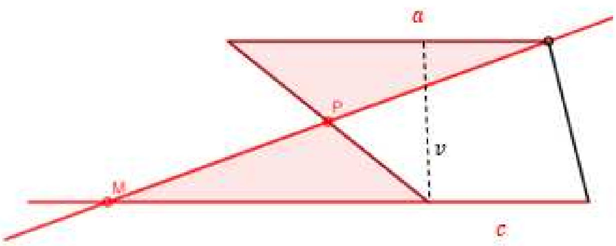
1. **(Sam/a!)**

a. Nacrtajte pravac koji prolazi vrhom trapeza i polovištem P nasuprotnog kraka trapeza.

b. Produžite osnovicu trapeza preko jednog vrha.

c. Označite sjecište tog produžetka s pravcem kroz polovište s M.

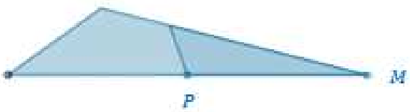


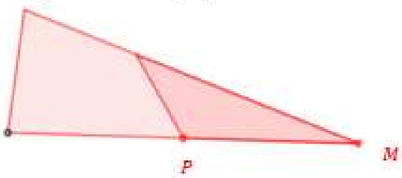


2. a. **(Raspravite u skupini!)** Promotrite dobivene trokute. Što možete reći o njima?

Dobiveni trokuti su sukladni.

b. **(Sam/a!)** Izrežite jedan trokut i presložite dobivene dijelove u lik čiju površinu znamo odrediti. Skicirajte rješenja.





4. **(Raspravite u skupini!)** Napišite izraz za površinu trapeza s osnovicama duljine a i c i visinom duljine v.

$$P = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

5. **(Sam/a!)** Izračunajte površinu paralelograma s osnovicama duljine 5 dm i 2 dm i visinom duljine 4 dm.

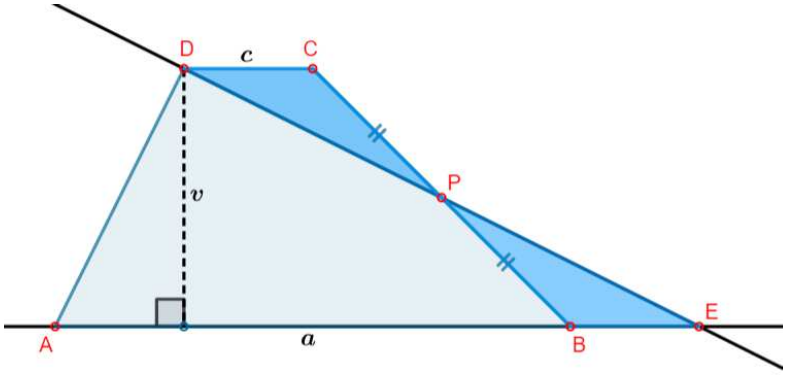
$$P = \frac{(5+2)\cdot 4}{2} = 14 \text{ dm}^2.$$

Slika 5.11. 3. Učeničko rješenje nastavnog listića Površina trapeza

Na razini dedukcije učenici bi trebali argumentirati i dokazati otkriveno pravilo, što je prezahtjevno za većinu učenika šestog razreda. Ovdje ćemo ipak navesti dokaz.

Dokaz.

Neka je $ABCD$ trapez s osnovicama duljina a i c i visinom duljine v, te neka je P polovište stranice $\overline{BC}$.



Slika 5.11. 4. Trapez ABCD

Uz oznake sa *Slike 5.11.4.*, vrijedi da je $|BP| = |PC|$ (P je polovište dužine $\overline{BC}$), $\sphericalangle DPC = \sphericalangle EPB$ (vršni kutovi) i $\sphericalangle DCP = \sphericalangle EBP$ (kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca) pa prema KSK teoremu o sukladnosti trokuta vrijedi da su trokuti DPC i EPB sukladni. Odavde slijedi jednakost njihovih površina i njihovih stranica, tj. $|BE| = |CD|$. Sada je

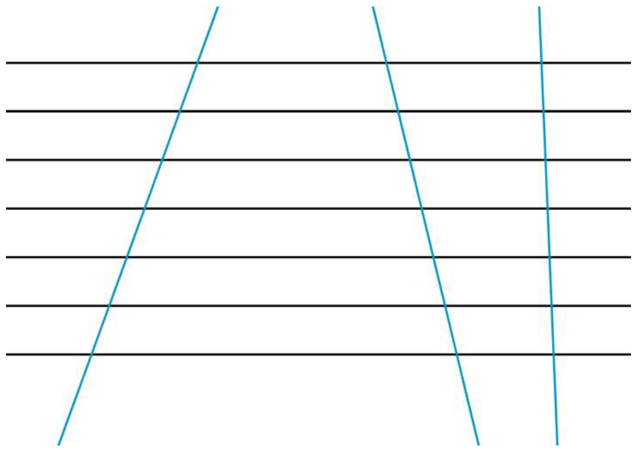
$$P(ABCD) = P(ABPD) + P(PCD) = P(ABPD) + P(PBE) = P(AED),$$

odnosno površina trapeza $ABCD$ jednaka je površini trokuta AED. Znamo da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine stranice i visine na tu stranicu. Budući da je duljina osnovice jednaka $a + c$ i duljina pripadne visine jednaka visini trapeza v, slijedi da je $P(ABCD) = P(AED) = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$.

■

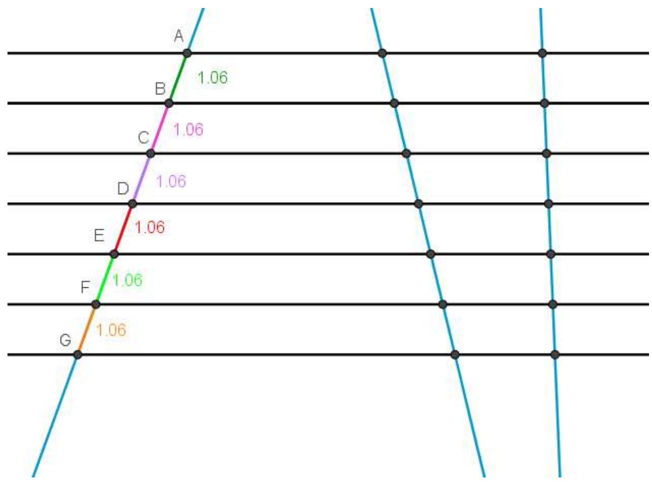
5.12. Aktivnost *Površina likova čiji vrhovi pripadaju dvama paralelnim pravcima*

Aktivnost je namijenjena učenicima prvog razreda srednje škole s ciljem da učenici otkriju opće načelo određivanja površine likova čiji vrhovi pripadaju dvama paralelnim pravcima (MAT SŠ C.1.2., MAT SŠ D.1.2.). Testira se sposobnost učenika da usvoji i primijeni koncepte sličnosti, omjera, srednjica likova i drugih, te da poveže pravila za računanje površine primjenjujući svojstva paralelnih pravaca i sličnost trokuta. Dakle, ova aktivnost pruža cjelovitu procjenu učenika na prvoj i drugoj razini geometrijskog mišljenja na konceptu površine. Učenik radi individualno. U alatu dinamične geometrije dobiva radni list s „mrežom“ jednako udaljenih paralelnih pravaca na koji potom crta još nekoliko pravaca u različitim položajima kao primjerice na *Slici 5.12.1*.



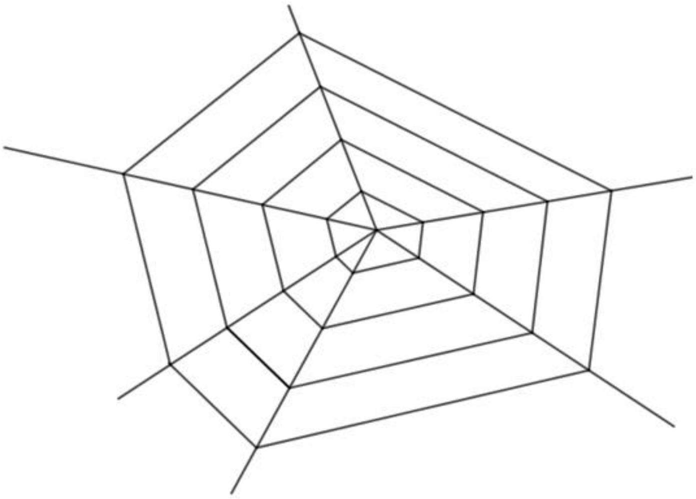
Slika 5.12. 1. Primjer učeničkog rješenja (plavo na slici)

Učenik proučava segmente nastale presijecanjem zadanih i nacrtanih pravaca. Zaključuje da ako su paralelni pravci jednako udaljeni, onda oni odsijecaju jednake duljine na bilo kojem pravcu koji ih presijeca (Slika 5.12.2.). Uočimo da učenik donosi neformalne zaključke na temelju konačnog broja analognih primjera (neformalna dedukcija).



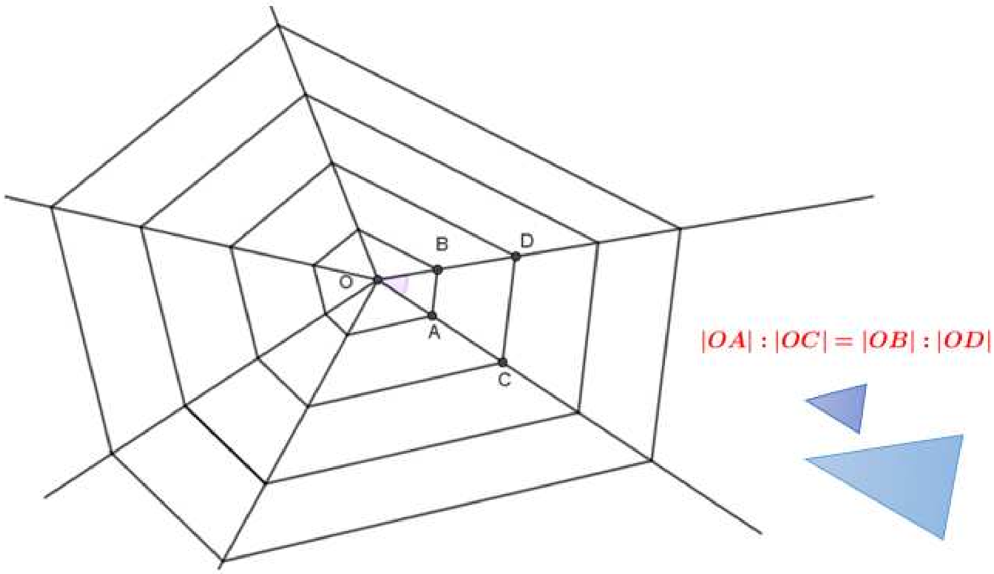
Slika 5.12. 2. Primjer učeničkog proučavanja segmenata nastalih presijecanjem zadanih i nacrtanih pravaca u alatu dinamične geometrije

Potom, učenik otvara drugi radni list na kojem proučava sliku mreže kao na *Slici 5.12.3*.



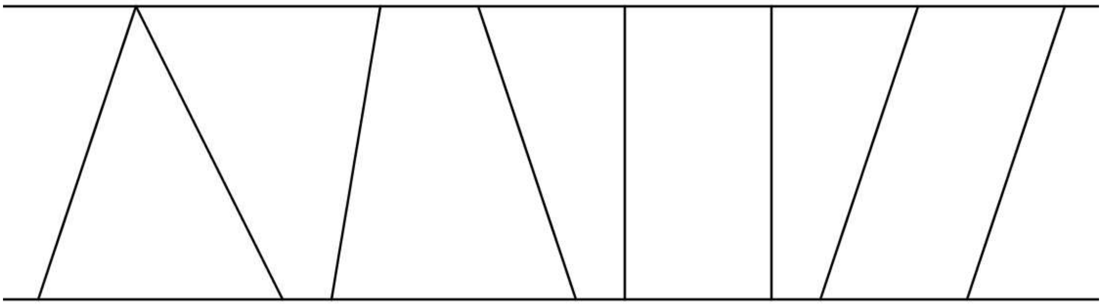
Slika 5.12. 3. Slika mreže

Uočava različite „skupine" trokuta koji se podudaraju u jednom kutu, a duljine stranica uz taj kut imaju isti omjer. Drugim riječima, prema SKS teoremu o sličnosti, uočava „skupine" sličnih trokuta. Primjer para sličnih trokuta vidimo na *Slici 5.12.4*.



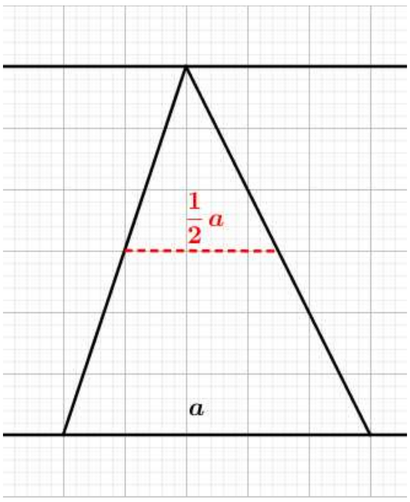
Slika 5.12. 4. Primjer para sličnih trokuta

Sada se učenika usmjerava da isto primijeni u istraživanju odnosa likova čiji vrhovi pripadaju dvama paralelnim pravcima, npr. trokut, trapez, pravokutnik i paralelogram kao na *Slici 5.12.5*.



Slika 5.12. 5. Likovi čiji su vrhovi elementi dvaju paralelnih pravaca

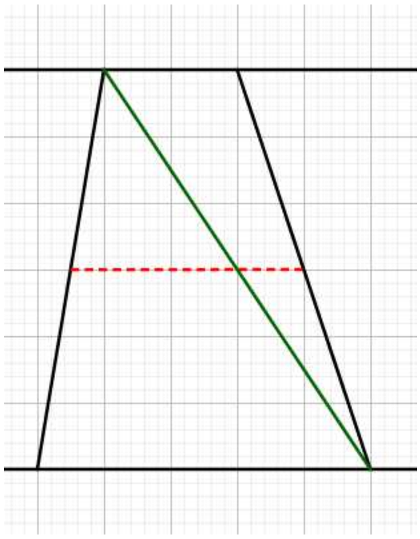
U ovom trenutku učenik se uz nastavnikovo navođenje prisjeća pojma srednjice, nakon čega, primjenjujući sličnost, deduktivno utvrđuje da je duljina srednjice trokuta jednaka polovini duljine njegove osnovice (Slika 5.12.6.). Također, argumentira vrijedi li ta tvrdnja za sve trokute i zašto.



Slika 5.12. 6. Srednjica trokuta

Povezivanjem postojeće mreže znanja i novog znanja, učenik zaključuje da se površina trokuta može izraziti koristeći srednjicu. Tada je površina trokuta jednaka umnošku duljine srednjice i duljine visine tog trokuta.

Nakon toga, učenik promatra lik trapeza. Dijeli ga na dva trokuta kao na *Slici 5.12.7.* i zaključuje da je duljina srednjice trapeza jednaka zbroju duljina srednjica trokuta na koje je trapez podijeljen, tj. da je duljina srednjice trapeza jednaka polovini zbroja duljina njegovih osnovica. Analogno kao kod trokuta, učenik zaključuje da se površina trapeza može izraziti kao umnožak duljine srednjice trapeza i duljine njegove visine.

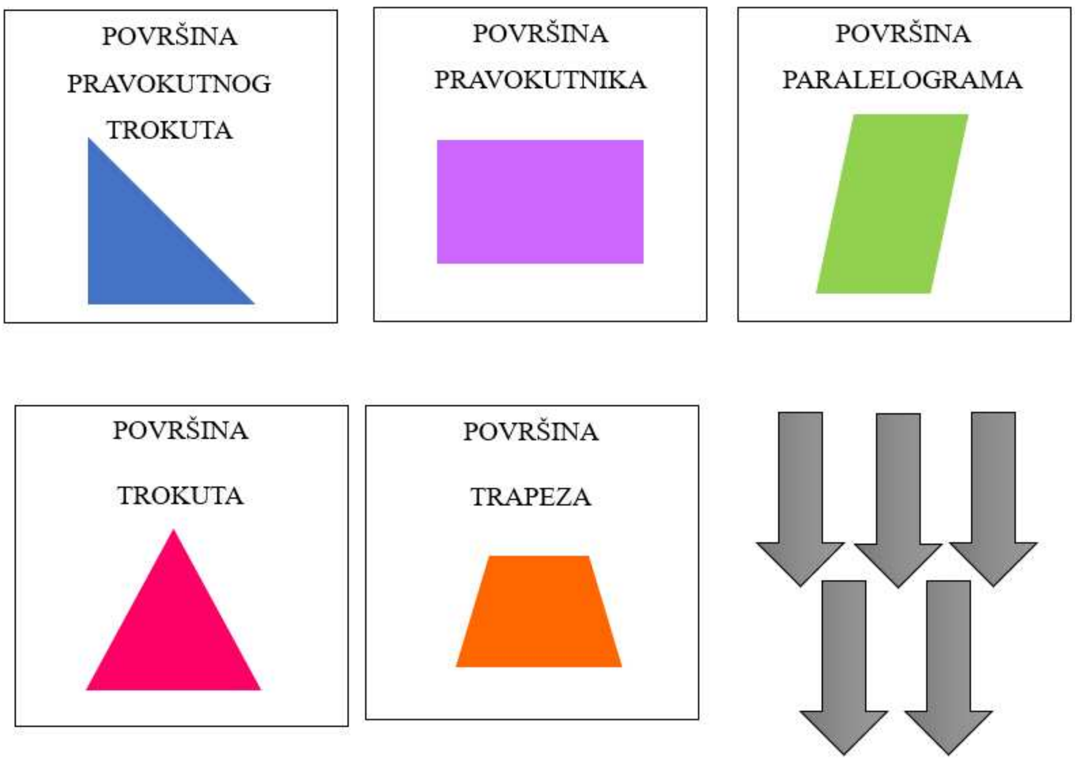


Slika 5.12. 7. Srednjica trapeza

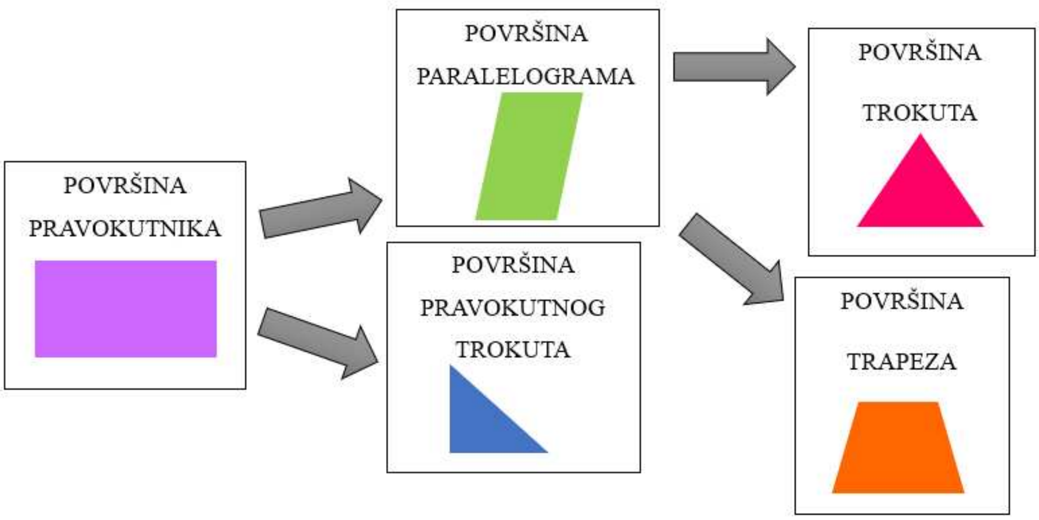
Nadalje, učenik analogno otkriva da se površine pravokutnika i paralelograma mogu izraziti na sličan način.

5.13. Aktivnost *Dijagram odnosa*

Cilj ove aktivnosti je da učenici prvog razreda srednje škole prepoznaju odnose među pravilima za računanje površina iz prethodnih aktivnosti (MAT SŠ C.1.2., MAT SŠ D.1.2.). Aktivnost je zamišljena za rad u paru. Učenici dobivaju kartice kao na *Slici 5.13.1.* i slažu ih u dijagram odnosa. Za uspostavljanje odnosa među geometrijskim likovima, učenici moraju biti na razini dedukcije u van Hiele modelu razvoja geometrijskog mišljenja. Argumentiraju svoje rješenje, tj. iskazuju koje odnose prepoznaju, koji pojmovi imaju „zajedničke korijene“ itd. Primjer rješenja para učenika nalazi se na *Slici 5.13.2*. Može se provesti diskusija o mogućnosti izrade dijagrama za druge grane matematike osim geometrije, primjerice aritmetike ili algebre, čime se razina geometrijskog mišljenja učenika usmjerava na najvišu razinu van Hiele modela, tj. razinu strogosti.



Slika 5.13. 1. Kartice za dijagram odnosa



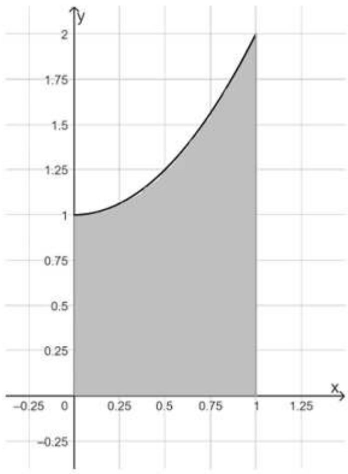
Slika 5.13. 2. Učeničko rješenje dijagrama odnosa

5.14. Aktivnost *Aproksimacija površine lika ispod krivulje*

Cilj aktivnosti je da učenici aproksimiraju površinu ispod grafa funkcije računajući sumu površina upisanih i opisanih pravokutnika. Zamišljena je za provedbu u paru za učenike četvrtog razreda srednje škole na barem drugoj van Hiele razini razvoja geometrijskog mišljenja (MAT SŠ B.4.11.). Svaki par dobiva nastavni listić na kojem je graf kvadratnog polinoma. Oba učenika u paru imaju istu funkciju, a na razini razreda po dva para imaju istu funkciju u svrhu usporedbe točnosti rezultata. Zadatke rješavaju kako je naznačeno, individualno ili zajednički. U svakom zadatku je zadano na koliko jednakih dijelova trebaju podijeliti interval. Za svaku od podjela u prva tri zadatka jedan učenik aproksimira površinu opisanim pravokutnicima, a drugi upisanim pravokutnicima. Pritom je važno da svaki učenik stekne oba iskustva. Primjer nastavnih listića za jedan par učenika je na *Slici 5.14.1*.

Nastavni listić - **Učenik A**

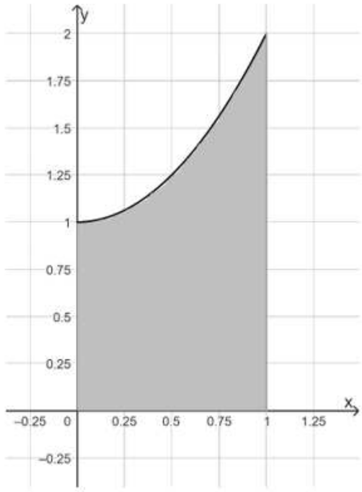
Na slici je lik omeđen grafom funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$, koordinatnim osima i pravcem $x = 1$.



1. **(Sam/a!)** Podijelite interval $[0,1]$ na dva jednaka dijela, zadanom liku upišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.
2. **(Sam/a!)** Podijelite interval $[0,1]$ na četiri jednaka dijela, dobivenim likovima opišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.
3. **(Sam/a!)** Podijelite interval $[0, 1]$ na osam jednakih dijelova, dobivenim likovima upišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.
4. **(Raspravite u paru!)** Usporedite rješenja! Što uočavate?
5. **(Raspravite u paru!)** Podijelite interval $[0, 1]$ na n jednakih dijelova, dobivenim likovima upišite i opišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.

Nastavni listić - **Učenik B**

Na slici je lik omeđen grafom funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$, koordinatnim osima i pravcem $x = 1$.



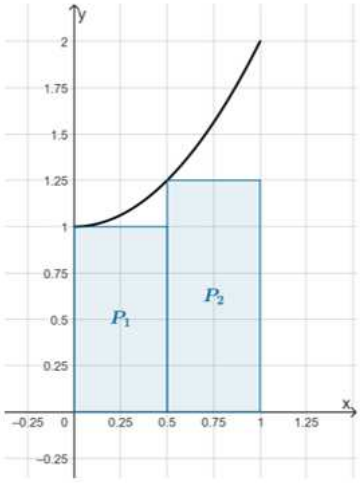
1. **(Sam/a!)** Podijelite interval $[0,1]$ na dva jednaka dijela, zadanom liku opišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.
2. **(Sam/a!)** Podijelite interval $[0,1]$ na četiri jednaka dijela, dobivenim likovima upišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.
3. **(Sam/a!)** Podijelite interval $[0,1]$ na osam jednakih dijelova, dobivenim likovima opišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.
4. **(Raspravite u paru!)** Usporedite rješenja! Što uočavate?
5. **(Raspravite u paru!)** Podijelite interval $[0,1]$ na n jednakih dijelova, dobivenim likovima upišite i opišite pravokutnike i izračunajte njihove površine. Dobivenim površinama aproksimirajte površinu lika ispod grafa funkcije.

Slika 5.14. 1. Nastavni listić Aproksimacija površine lika ispod krivulje

Učenici uočavaju da je stvarna površina ispod grafa funkcije f veća od zbroja površina upisanih pravokutnika i manja od zbroja površina opisanih pravokutnika. Također, uočavaju da povećanjem broja upisanih ili opisanih pravokutnika, tj. podjelom zadanog intervala na sve veći broj ekvidistantnih particija dobivamo sve bolju aproksimaciju površine polaznog lika. Na kraju aktivnosti slijedi razredna diskusija u kojoj se učenici prisjećaju primitivne funkcije i računaju razliku vrijednosti primitivne funkcije u lijevom i desnom rubu intervala, odnosno računaju određeni integral $\int_a^b f(x)dx$. U nastavku slijedi primjer rješenja nastavnih listića *Aproksimacija površine lika ispod krivulje* (Slika 5.14.2.).

Nastavni listić – **Učenik A**

1.



$P_1 = (0.5 - 0) \cdot f(0) = 0.5 \cdot 1$

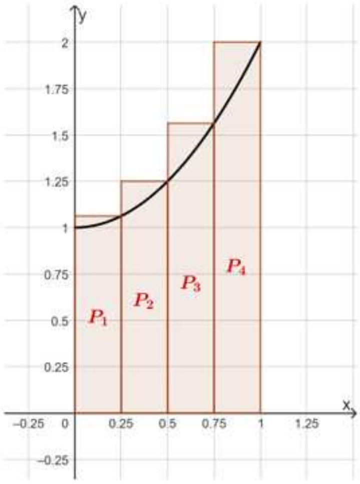
$P_1 = 0.5$ kvadratnih jedinica

$P_2 = (1 - 0.5) \cdot f(0.5) = 0.5 \cdot 1.25$

$P_2 = \frac{5}{8}$ kvadratnih jedinica

$P \approx P_1 + P_2 = \frac{9}{8} = 1.125$ kvadratnih jedinica

2.



$P_1 = 0.25 \cdot \frac{17}{16} = \frac{17}{64}$ kvadratnih jedinica

$P_2 = 0.25 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$ kvadratnih jedinica

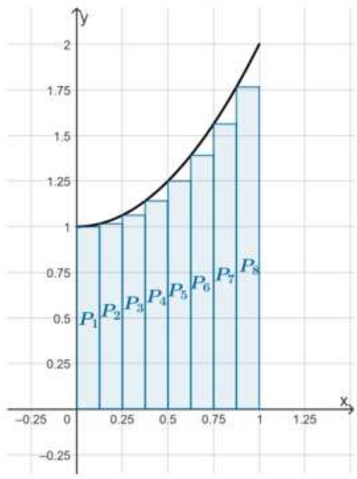
$P_3 = 0.25 \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{64}$ kvadratnih jedinica

$P_4 = 0.25 \cdot 2 = \frac{1}{2}$ kvadratnih jedinica

$P \approx P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

$P \approx \frac{47}{32} \approx 1.47$ kvadratnih jedinica

3.



$P_1 = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$ kvadratnih jedinica

$P_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{65}{64} = \frac{65}{512}$ kvadratnih jedinica

$P_3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{17}{16} = \frac{17}{128}$ kvadratnih jedinica

$P_4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{73}{64} = \frac{73}{512}$ kvadratnih jedinica

$P_5 = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{32}$ kvadratnih jedinica

$P_6 = \frac{1}{8} \cdot \frac{89}{64} = \frac{89}{512}$ kvadratnih jedinica

$P_7 = \frac{1}{8} \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{128}$ kvadratnih jedinica

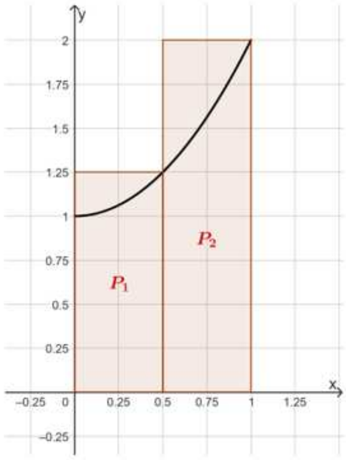
$P_8 = \frac{1}{8} \cdot \frac{113}{64} = \frac{113}{512}$ kvadratnih jedinica

$P \approx P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8$

$P \approx \frac{163}{128} \approx 1.27$ kvadratnih jedinica

Nastavni listić – **Učenik B**

1.



$P_1 = (0.5 - 0) \cdot f(0.5) = 0.5 \cdot 1.25$

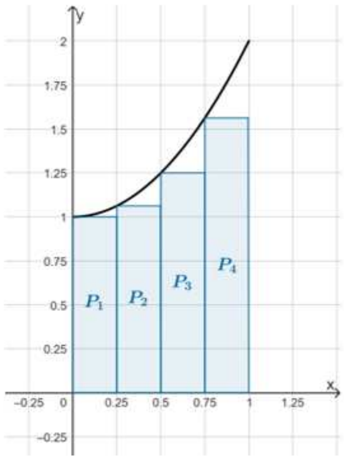
$P_1 = \frac{5}{8}$ kvadratnih jedinica

$P_2 = (1 - 0.5) \cdot f(1) = 0.5 \cdot 2$

$P_2 = 1$ kvadratna jedinica

$P \approx P_1 + P_2 = \frac{13}{8} = 1.625$ kvadratnih jedinica

2.



$P_1 = 0.25 \cdot 1 = \frac{1}{4}$ kvadratnih jedinica

$P_2 = 0.25 \cdot \frac{17}{16} = \frac{17}{64}$ kvadratnih jedinica

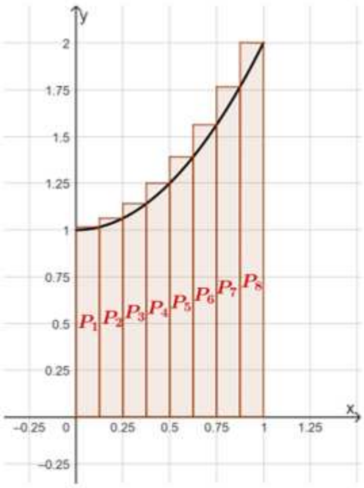
$P_3 = 0.25 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$ kvadratnih jedinica

$P_4 = 0.25 \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{64}$ kvadratnih jedinica

$P \approx P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

$P \approx \frac{39}{32} \approx 1.22$ kvadratnih jedinica

3.



$P_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{65}{64} = \frac{65}{512}$ kvadratnih jedinica

$P_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{17}{16} = \frac{17}{128}$ kvadratnih jedinica

$P_3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{73}{64} = \frac{73}{512}$ kvadratnih jedinica

$P_4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{32}$ kvadratnih jedinica

$P_5 = \frac{1}{8} \cdot \frac{89}{64} = \frac{89}{512}$ kvadratnih jedinica

$P_6 = \frac{1}{8} \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{128}$ kvadratnih jedinica

$P_7 = \frac{1}{8} \cdot \frac{113}{64} = \frac{113}{512}$ kvadratnih jedinica

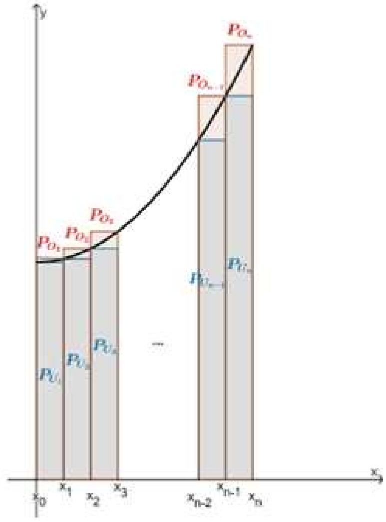
$P_8 = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$ kvadratnih jedinica

$P \approx P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8$

$P \approx \frac{179}{128} \approx 1.398$ kvadratnih jedinica

4. Dijeljenjem polaznog intervala na sve veći broj podintervala jednake duljine sume opisanih pravokutnika se smanjuju, a sume upisanih pravokutnika se povećavaju.

5. Podijelimo interval $[0,1]$ na n intervala jednakih duljina i označimo djelišne točke sa x_i, $i = 0,1,2,\dots,n$, tako da je $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$. Tada je $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0,1,2,\dots,n$.



Duljina jedne stranice upisanog pravokutnika jednaka je $\Delta x_i = \frac{|1-0|}{n} = \frac{1}{n}$, a duljina druge stranice minimumu m_i funkcije f na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, tj. $m_i = f(x_{i-1}) = x_{i-1}{}^2 + 1$. Prema tome, površina i −tog upisanog pravokutnika jednaka je $P_{U_i} = \frac{1}{n} \cdot m_i$, odnosno $P_{U_i} = \frac{1}{n} \cdot (x_{i-1}{}^2 + 1)$. Dakle, suma površina svih upisanih pravokutnika jednaka je

$$s_n = \frac{1}{n} \cdot (x_0{}^2 + 1) + \frac{1}{n} \cdot (x_1{}^2 + 1) + \cdots + \frac{1}{n} \cdot (x_{n-1}{}^2 + 1),$$

tj.

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1}{}^2 + 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i^2}{n^2} + 1\right) = \frac{8n^2 - 3n + 1}{6n^2}.$$

Analogno, duljina jedne stranice opisanog pravokutnika jednaka je $\Delta x_i = \frac{|1-0|}{n} = \frac{1}{n}$, a duljina druge stranice maksimumu M_i funkcije na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, tj. $M_i = f(x_i) = x_i{}^2 + 1$.Prema tome, površina i −tog opisanog pravokutnika jednaka je $P_{O_i} = \frac{1}{n} \cdot M_i$, odnosno $P_{O_i} = \frac{1}{n} \cdot (x_i{}^2 + 1)$.

Dakle, suma površina svih opisanih pravokutnika iznosi

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot (x_1{}^2 + 1) + \frac{1}{n} \cdot (x_2{}^2 + 1) + \cdots + \frac{1}{n} \cdot (x_n{}^2 + 1),$$

tj.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i{}^2 + 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{n^2} + 1\right) = \frac{8n^2 + 3n + 1}{6n^2}.$$

Vrijedi $s_n \leq P \leq S_n$. Izračunajmo limes zbroja površina pravokutnika ako broj dijelova na koje je podijeljen interval $[0,1]$ teži u beskonačnost. Dobivamo

$$\frac{4}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} s_n \leq P \leq \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{4}{3}$$

pa po teoremu o sendviču slijedi da je $P = \frac{4}{3}$.

Primjenom određenog integrala dobivamo $P = \int_0^1 (x^2 + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{0}{3} + 0\right) = \frac{4}{3}$.

Napomena: Učenici za izračunavanje suma s_n i S_n koriste simbolički kalkulator.

Slika 5.14. 2. Primjer rješenja nastavnog listića

Aproksimacija površine lika ispod krivulje

Neka od pitanja za razrednu diskusiju mogu biti:

1. Kolika je duljina baze pravokutnika u pojedinom zadatku?
2. Kako ste određivali duljine visina upisanih i opisanih pravokutnika?
3. Opišite odnos stvarne površine ispod grafa funkcije f i površina upisanih i opisanih pravokutnika.
4. Je li bitno koju primitivnu funkciju uzmemo? Zašto?

6. ZADACI VEZANI UZ KONCEPTE DULJINE I POVRŠINE

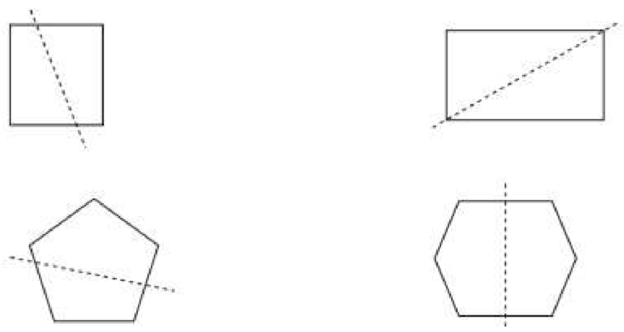
Učenička matematička postignuća mogu se istražiti vanjskim vrednovanjem i na matematičkim natjecanjima. Vanjskim vrednovanjem stječe se uvid u stanje obrazovanja u području matematike, što pridonosi oblikovanju obrazovne politike i poticanju reformi u svrhu poboljšanja kvalitete nastave matematike. S druge strane, natjecanja su jedan od načina popularizacije matematike među učenicima osnovnih i srednjih škola. Pridonose promicanju pozitivnog stava prema matematici, razvoju matematičke kulture te potiču razvoj matematičkih kompetencija kod mladih. U ovom poglavlju, fokusirat ćemo se na analizu TIMSS i PISA istraživanja te natjecanja Matematički klokan. Priložit ćemo konkretne primjere geometrijskih zadataka vezanih uz koncepte duljine i površine koji su se pojavljivali u okviru tih istraživanja, odnosno natjecanja. Nadalje, raspravit ćemo razinu mišljenja prema van Hiele modelu koju zahtijeva pojedini zadatak.

6.1. TIMSS istraživanje

Međunarodno udruženje za vrednovanje obrazovnih postignuća (engl. *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* - IEA) više od dva desetljeća provodi Međunarodno istraživanje trendova u znanju matematike i prirodoslovlja (engl. *Trends in International Mathematics and Science Study* - TIMSS) u četvrtome i osmome razredu osnovne škole te u četvrtome razredu srednje škole (TIMSS *Advanced*). Učenici se testiraju svake četiri godine, a 2011. godine testiranje je provedeno na reprezentativnom uzorku učenika četvrtog razreda osnovne škole i u Hrvatskoj. TIMSS zadaci kojima se ispituju matematičke kompetencije uključuju tri kognitivne razine – činjenično znanje, primjena znanja i zaključivanje te nekoliko sadržajnih domena. Obuhvaćaju sve tri kognitivne razine te sadržaj iz područja geometrije nulte i prve razine van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja. U nastavku su primjeri objavljenih zadataka koji obuhvaćaju koncepte duljine i površine iz ciklusa istraživanja u kojima je sudjelovala Republika Hrvatska. Sve informacije, zadaci i slike o ciklusima TIMSS istraživanja nalaze se na mrežnoj stranici Nacionalnoga centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja. ([14])

Zadatak 6.1.1. **(TIMSS, 2011., Šifra zadatka:M031093)**

Kojem je od sljedećih likova iscrtani pravac os simetrije?



Rješenje 6.1.1.

Zadatak je kategoriziran u kognitivnu domenu činjeničnog znanja. Od učenika se očekuje samo da prepoznaju lik na kojem je prikazana linija osne simetrije. Točan odgovor je posljednji lik, tj. šesterokut. Ovo je zadatak na nultoj razini van Hiele razvoja geometrijskog mišljenja.

Zadatak 6.1.2. **(TIMSS, 2011., Šifra zadatka: M041155)**

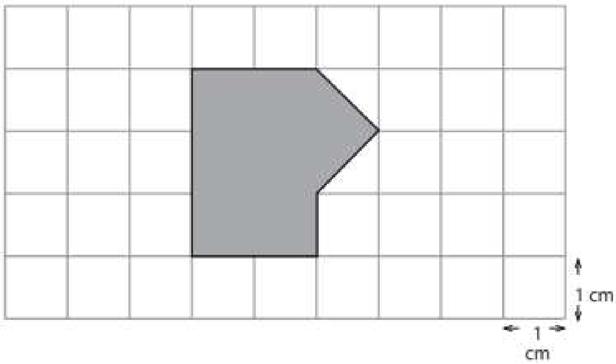
Školsko igralište je kvadratnog oblika. Duljina igrališta je 100 m. Hodajući uz njegov rub, Ruža je obišla cijelo igralište. Koliku je udaljenost prohodala?

A. 100 metara
B. 200 metara
C. 400 metara
D. 10 000 metara

Rješenje 6.1.2.

U navedenom zadatku iz kognitivne domene primjene znanja od učenika se očekuje da uoče da je potrebno odrediti opseg kvadrata s obzirom na duljinu jedne stranice. Budući da se zahtijeva poznavanje svojstava kvadrata, zadatak je na prvoj razini van Hiele razvoja geometrijskog mišljenja. Ako je duljina stranice kvadrata a, onda je opseg kvadrata o izražen formulom $o = 4a$, tj. za duljinu stranice kvadrata $a = 100$ m slijedi da je opseg kvadrata $4a = 400$ m. Dakle, Ruža je prohodala udaljenost od 400 metara.

Zadatak 6.1.3. **(TIMSS, 2011, Šifra zadatka: M031297)**



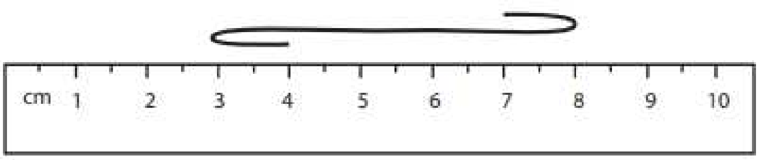
Duljina stranice jednoga kvadratića u kvadratnoj mreži je 1 cm. Kolika je površina osjenčanoga lika na slici izražena u kvadratnim centimetrima?

Odgovor: ______________________ kvadratnih centimetara

Rješenje 6.1.3.

I ovaj zadatak pripada kognitivnoj domeni primjene znanja. Učenici na kvadratnoj mreži trebaju odrediti površinu lika sastavljenog od geometrijskih likova čije površine znaju izračunati. Zadatak se može riješiti prebrojavanjem jediničnih kvadratića unutar osjenčanoga lika (razina vizualizacije) ili zbrajanjem površine pravokutnika sa stranicama duljine 2 cm i 3 cm i površine trokuta sa osnovicom duljine 2 cm i visinom na tu osnovicu 1 cm (razina analize). Površina osjenčanoga lika iznosi 7 kvadratnih centimetara.

Zadatak 6.1.4. **(TIMSS, 2011., Šifra zadatka: M031004)**



Izravnamo li uže na gornjem crtežu, koja je od navedenih duljina najbliža duljini tog užeta?

A. 5 cm

B. 7 cm

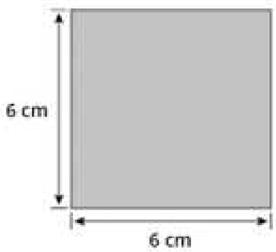
C. 8 cm

D. 9 cm

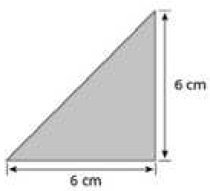
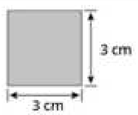
Rješenje 6.1.4.

Zadatak pripada kognitivnoj domeni primjene znanja. U matematici je jako važno poticati učenike na procjenu. Od učenika se zahtijeva misaono predočenje zadatka te procjena duljine zakrivljene linije u odnosu na sredinu ravnala za što trebaju biti na prvoj razini van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja. Uočimo da je duljina presavijenih rubova užeta 1 centimetar, a duljina ispruženog dijela užeta 5 centimetara pa je duljina najbliža duljini užeta sa slike 7 centimetara.

Zadatak 6.1.5. **(TIMSS, 2019. Šifra zadatka: ME71151)**



Prikazani kvadrat može se sastaviti od manjih likova. Za svaki lik nadopuni tablicu brojem koji je potreban da se prekrije cijeli kvadrat.

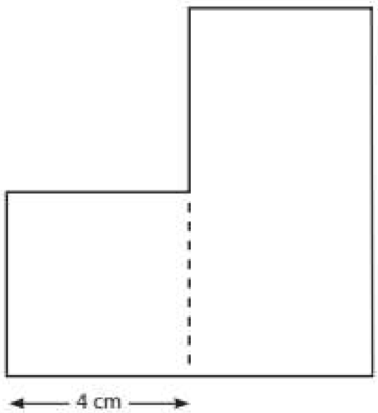
<table>
<tr><th>Lik</th><th>Broj koji je potreban da se prekrije prikazani kvadrat</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Rješenje 6.1.5.

Ovo je još jedan primjer zadatka iz kognitivne domene primjene znanja. Učenici primjenjuju znanje o duljini ruba i o površini četverokuta te uspostavljaju odnos među njima, stoga rješavanje ovog zadataka zahtijeva drugu razinu van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja. Uočimo da je prvi lik u tablici pravokutnik čija je duljina jednaka duljini stranice prikazanog kvadrata, ali tri puta manje širine. Iz toga zaključujemo da je potrebno tri takva pravokutnika da se prekrije prikazani kvadrat. Nadalje, drugi lik je jednakokračan pravokutan trokut s katetom duljine 6 centimetara. On predstavlja polovinu prikazanog kvadrata, što znači da su potrebna dva takva trokuta da bi se prekrio prikazani kvadrat. Posljednji lik je kvadrat s duljinom stranice koja je upola kraća od duljine stranice prikazanog kvadrata. Stoga zaključujemo da duž jedne stranice prikazanog kvadrata možemo smjestiti dva takva manja kvadrata. Dakle, za prekrivanje prikazanog kvadrata potrebno je četiri ovakva manja kvadrata.

Zadatak 6.1.6. (TIMSS, 2011.,2015., Šifra zadatka:M051093)

Prikazani lik sastoji se od kvadrata i pravokutnika. Širina pravokutnika jednaka je širini kvadrata. Duljina pravokutnika dvaput je veća od njegove širine. Odredi opseg prikazanog lika.

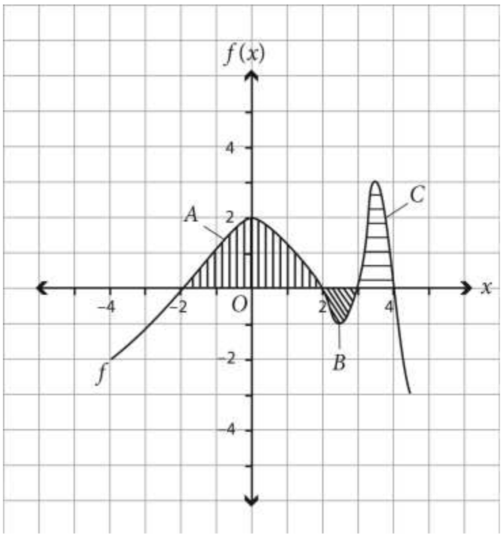


A. 28 cm
B. 32 cm
C. 36 cm
D. 40 cm

Rješenje 6.1.6.

Ovaj zadatak iz kognitivne domene zaključivanja ponovio se u dva ciklusa TIMSS istraživanja. Njegovo rješavanje zahtijeva spremnost na prvoj razini van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja. Uočavamo da je duljina ruba lika zbroj duljina tri stranice kvadrata, dvije širine pravokutnika, jedna njegova duljina i još polovina njegove duljine, što znači da opseg prikazanog lika iznosi $3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 8 + 4 = 32$ centimetra. Dakle, točan odgovor je pod B.

Zadatak 6.1.7. (TIMSS *Advanced,* 2015.)



Za područja između grafa funkcije $f(x)$ i x −osi prikazanih iznad vrijedi da je površina $A = 4.8$ jedinica, površina $B = 0.8$ jedinica i površina $C = 2$ jedinice. Kolika je vrijednost određenog integrala $\int_{-2}^{4} f(x)dx$? ([18])

A. 5.6
B. 6.0
C. 6.8
D. 7.6

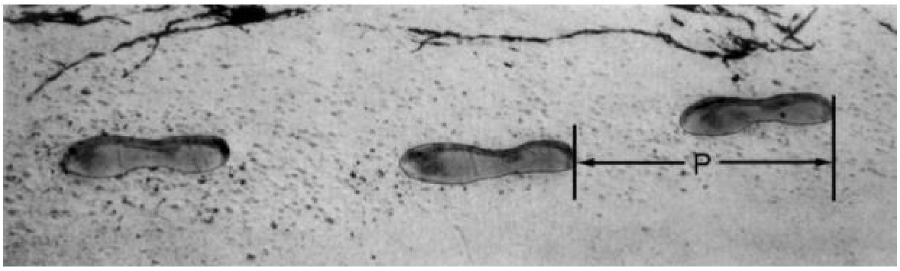
Rješenje 6.1.7.

Integral funkcije interpretira se kao površina ispod grafa te funkcije, ali nije doslovno površina. Integral funkciji pridružuje površinu ispod krivulje unutar zadanog intervala, ali nije identičan s površinom jer uzima u obzir i negativne dijelove funkcije. Dakle, integriranjem funkcije f od a do b dobivamo „cjelobrojnu površinu" između krivulje te funkcije i osi apscisa, ograničenu vertikalnim pravcima $x = a$ i $x = b$. Ako su vrijednosti funkcije f pozitivne na tom intervalu, onda će „površina" ispod grafa biti pozitivna, a ako su vrijednosti funkcije f negativne na tom intervalu, onda će i „površina" biti negativna. Prema tome, vrijedi $\int_{-2}^{4} f(x)dx = A - B + C = 4.8 - 0.8 + 2 = 6$ jedinica, tj. točan odgovor je pod B. Ovaj problem mogu riješiti učenici na razini analize jer zahtijeva poznavanje svojstava oblika.

6.2. PISA istraživanje

Istraživanje PISA (Programme for International Student Assessment) je inicijativa Organizacije za ekonomsku suradnju i razvoj (OECD) koja se provodi svake tri godine s ciljem procjene znanja i vještina petnaestogodišnjih učenika širom svijeta. Prvo istraživanje provedeno je 2000. godine. Republika Hrvatska priključila se trećem ciklusu PISA istraživanja (PISA 2006) i od tada je sudjelovala u svim ciklusima istraživanja. Ovo istraživanje pruža relevantne podatke o obrazovnim sustavima diljem svijeta te omogućuje usporedbu razina obrazovanja među državama i regijama. Glavni fokus istraživanja obuhvaća tri ključna područja, čitalačku, matematičku i prirodoslovnu pismenost, a bavi se i drugim inovativnim područjima poput kompetencija rješavanja problema, globalnih kompetencija, kreativnog mišljenja, financijske pismenosti i dr. Za razliku od definicije pismenosti u užem smislu, PISA definira „pismenost“ kao sposobnost učenika da primijene znanja i vještine iz ključnih predmetnih područja te da analiziraju, zaključuju i učinkovito komuniciraju prilikom postavljanja, tumačenja i rješavanja problema u različitim situacijama. Nadalje, testovi su koncipirani tako da ocjenjuju akademsko znanje i njegovu praktičnu primjenu u svakodnevnom životu. Također, prikuplja i podatke o socioekonomskom statusu učenika te o njihovim stavovima i percepcijama o obrazovanju. Ovi podaci pružaju važan uvid u učinkovitost obrazovnih sustava diljem svijeta i pridonose unaprjeđenju obrazovanja. ([13]) Evo nekoliko primjera zadataka iz PISA testova dostupnih u [12].

Zadatak 6.2.1. **KORACI**



Na slici su prikazani otisci stopala čovjeka koji hoda. Duljina koraka P je razmak između stražnjih dijelova dvaju uzastopnih otiska stopala.

Za muškarce, pomoću formule $\frac{n}{P} = 140$ može se prikazati približan odnos između n i P, gdje je n = broj koraka u minuti, a P = duljina koraka u metrima.

1. pitanje: Ako se ova formula primijeni na Hrvojevo hodanje, a Hrvoje napravi 70 koraka u minuti, koliko iznosi Hrvojeva duljina koraka? Prikaži postupak izračunavanja.

Rješenje 6.2.1.

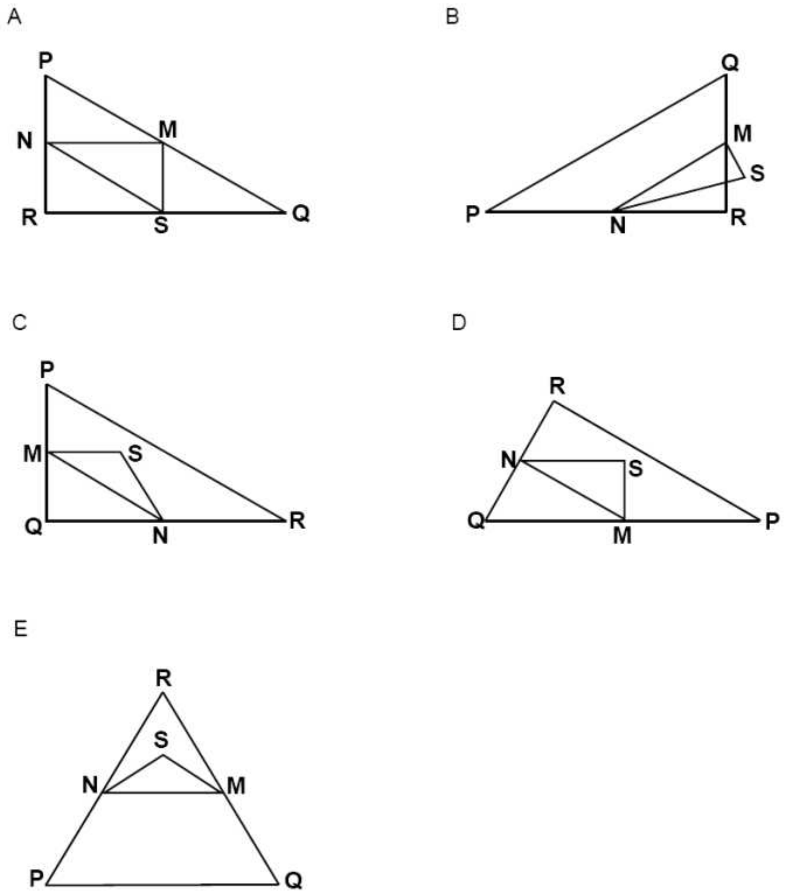
Za $n = 70$ vrijedi:

$$\frac{70}{P} = 140 \Leftrightarrow \frac{70}{P} - 140 = 0 \Leftrightarrow \frac{70-140P}{P} = 0 \Leftrightarrow 70 - 140P = 0 \Leftrightarrow 70 = 140P,$$

tj. $P = 0.5$ m. Dakle, Hrvojeva duljina koraka iznosi pola metra. Zadatak je vrlo jednostavan i zahtijeva razinu analize van Hiele modela.

Zadatak 6.2.2. **TROKUTI**

1. pitanje: Zaokruži jedan od donjih likova koji najbolje odgovara sljedećem opisu. Trokut PQR je pravokutni trokut s pravim kutom u točki R. Stranica $\overline{RQ}$ je kraća od stranice $\overline{PR}$. M je polovište stranice $\overline{PQ}$, a N je polovište stranice $\overline{QR}$. S je točka unutar trokuta. Stranica $\overline{MN}$ je dulja od stranice $\overline{MS}$.

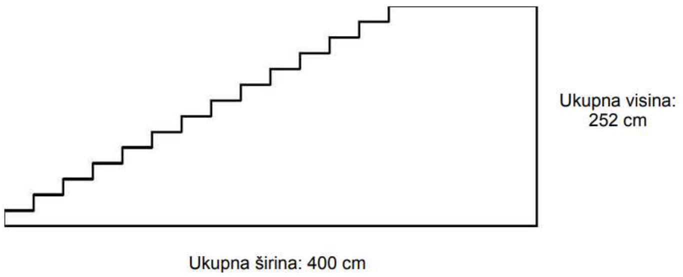


Rješenje 6.2.2.

Uočimo da trokuti pod A, B i D imaju pravi kut u vrhu R. Nadalje, trokutima pod A i D stranica $\overline{RQ}$ je kraća od stranice $\overline{PR}$, M je polovište stranice $\overline{PQ}$, ali N je polovište stranice $\overline{QR}$ samo trokutu pod D. Također, točka S se nalazi unutar trokuta pod D, a stranica $\overline{MN}$ je dulja od stranice $\overline{MS}$. Prema tome, lik koji najbolje odgovara danom opisu je D. Ovaj zadatak je prikladan učenicima koji su na razini analize van Hiele modela jer promatraju oblike i analiziraju njihova svojstva.

Zadatak 6.2.3. **STEPENICE**

Na donjoj slici prikazano je stepenište sa 14 stepenica i ukupnom visinom od 252 cm:



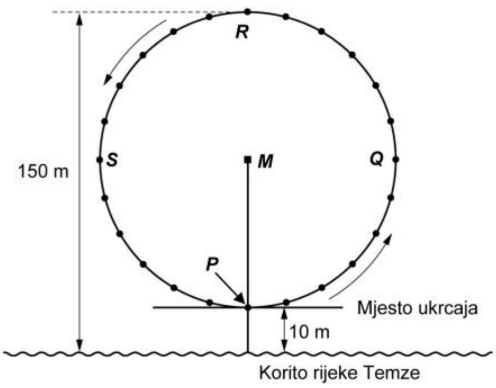
1. pitanje: Kolika je visina svake od 14 stepenica?

Rješenje 6.2.3.

Zadatak je obrazovnog i profesionalnog konteksta te zahtijeva proces reprodukcije na razini analize van Hiele modela. Ukupna širina je suvišna informacija, a visina svake stepenice je $252 : 14 = 18$ cm.

Zadatak 6.2.4. **LONDONSKO OKO**

Na obali rijeke Temze u Londonu nalazi se ogromni panoramski kotač nazvan Londonsko oko. Evo njegove fotografije i crteža:



Vanjski promjer panoramskog kotača iznosi 140 metara, a njegova najviša točka nalazi se 150 metara iznad korita, na obali rijeke Temze. Okreće se u smjeru prikazanom strelicama.

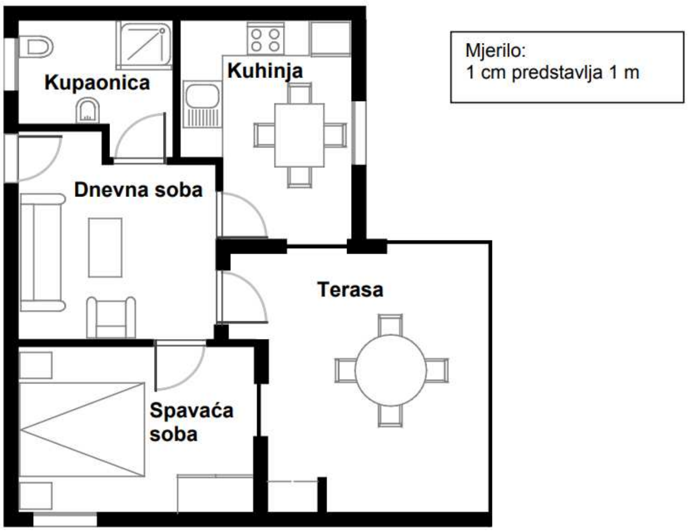
1. pitanje: Slovo M na crtežu označava središte kotača. Na koliko se metara (m) iznad korita rijeke nalazi točka M?

Rješenje 6.2.4.

Sa slike vidimo da je udaljenost od korita rijeke Temze do najniže točke panoramskog kotača P jednaka 10 metara, a udaljenost od najniže točke P do središta kotača M iznosi polovinu promjera kotača, tj. 70 metara. Dakle, točka M se nalazi $10 + 70 = 80$ metara iznad korita rijeke. Za rješavanje ovog zadatka s društvenim kontekstom, učenici koriste podatke iz dvodimenzionalnog crteža kako bi izračunali duljinu, što zahtijeva prvu razinu van Hiele modela.

Zadatak 6.2.5. **KUPNJA STANA**

Ovo je tlocrt stana koji Goranovi roditelji žele kupiti od jedne agencije za prodaju nekretnina.

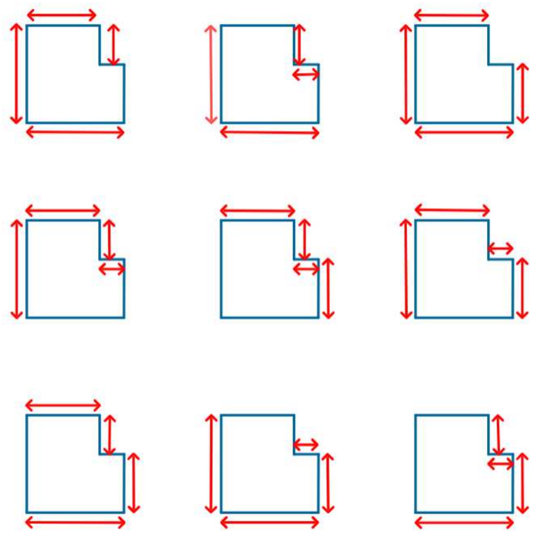


1. pitanje: Da bi procijenio/la ukupnu površinu stana (uključujući terasu i zidove), možeš izmjeriti veličinu svake prostorije, izračunati površinu svake od tih prostorija te zbrojiti sve površine.

Međutim, postoji mnogo učinkovitija metoda za procjenu ukupne površine kod koje moraš izmjeriti samo 4 dužine. Označi na gornjem tlocrtu četiri dužine koje su potrebne za procjenu ukupne površine ovoga stana.

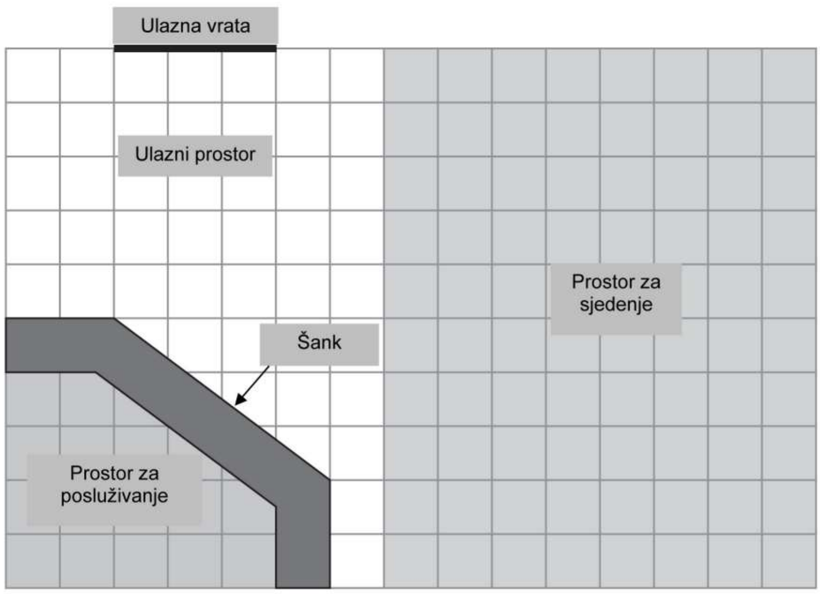
Rješenje 6.2.5.

Ovaj zadatak pripada osobnom kontekstu. Potrebno je služiti se prostornim mišljenjem radi prikazivanja na tlocrtu (ili nekom drugom metodom), a njegovo rješavanje zahtijeva barem razinu analize van Hiele modela. Na donjoj slici prikazano je devet različitih mogućnosti za četiri mjere koje je potrebno označiti kako bi procijenili površinu stana na tlocrtu.



Zadatak 6.2.6. **SLASTIČARNICA**

Ovo je tlocrt Marijine slastičarnice koju ona preuređuje. Prostor za posluživanje okružen je šankom.

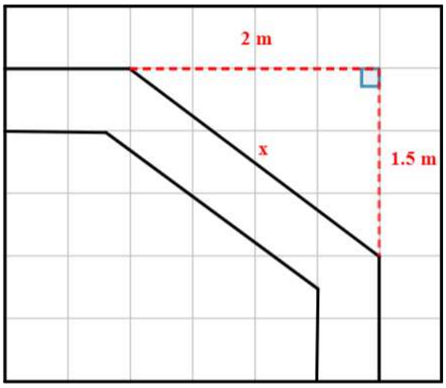


Napomena: Svaki kvadratić na tlocrtu predstavlja 0.5 metara × 0.5 metara.

1. pitanje: Marija želi staviti novi obrub duž vanjskog ruba šanka. Kolika je ukupna duljina obruba koja joj je potrebna? Prikaži postupak izračunavanja.

Rješenje 6.2.6. (1. pitanje)

Produžimo ravne dijelove vanjskog ruba šanka kao na slici dolje. Uočimo da dobivamo pravokutni trokut s katetama duljina 2 metra (četiri kvadratića sa stranicom duljine 0.5 metara) i 1.5 metara (tri kvadratića sa stranicom duljine 0.5 metara).



Prema Pitagorinom poučku, površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad njegovim katetama, odnosno vrijedi $x^2 = 2^2 + 1.5^2 = 6.25$ m^2, odakle slijedi da je $x = 2.5$ m. Prema tome ukupna duljina ruba potrebna Mariji iznosi $1 + x + 1 = 1 + 2.5 + 1 = 4.5$ m.

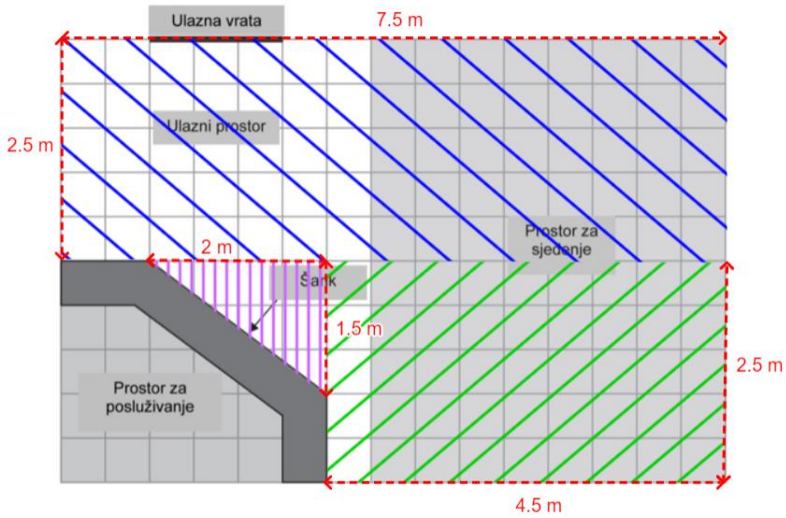
Zadatak je profesionalnog konteksta i ovakav pristup problemu zahtijeva barem razinu analize. Osim primjenom Pitagorinog poučka, zadatak se može riješiti i korištenjem omjera.

2. pitanje: Marija će u slastičarnicu staviti i novi parket. Koliko iznosi ukupna površina poda u slastičarnici bez uslužnog prostora i šanka? Prikaži postupak izračunavanja.

Rješenje 6.2.6. (2. pitanje)

Zadatak se ne može riješiti na razini vizualizacije prebrojavanjem jediničnih kvadratića, jer uz kosi dio šanka ne možemo precizno prebrojati sve kvadratiće. Uočimo da se ukupna površina poda u slastičarnici bez uslužnog prostora i šanka sastoji od nekoliko komponenti, odnosno geometrijskih likova (Slika 6.2.6.1.). Primjerice, traženu površinu možemo protumačiti kao zbroj površine pravokutnika duljine 7.5 m i širine 2.5 m (plavo na slici), površine pravokutnika duljine 4.5 m i širine 2.5 m (zeleno na slici) te površine pravokutnog trokuta s katetama duljina 2 m i 1.5 m (ljubičasto na slici). Prema tome, tražena površina je

$$P = 7.5 \cdot 2.5 + 4.5 \cdot 2.5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1.5 = 31.5 \text{ m}^2.$$



Slika 6.2.6. 1. Skica za rješenje SLASTIČATNICA (2. pitanje)

Ovakav pristup rješavanju problema zahtijeva razinu neformalne dedukcije jer treba uspostaviti odnos među površinama geometrijskih likova.

Zadatak 6.2.7. **POVRŠINA KONTINENTA**

Ovo je karta Antarktike:

1. pitanje: Procijeni površinu Antarktike uz pomoć mjerila na karti. Prikaži postupak izračunavanja i objasni kako si došao/la do procjene (možeš crtati po karti ako će ti to pomoći procjenjivanju).

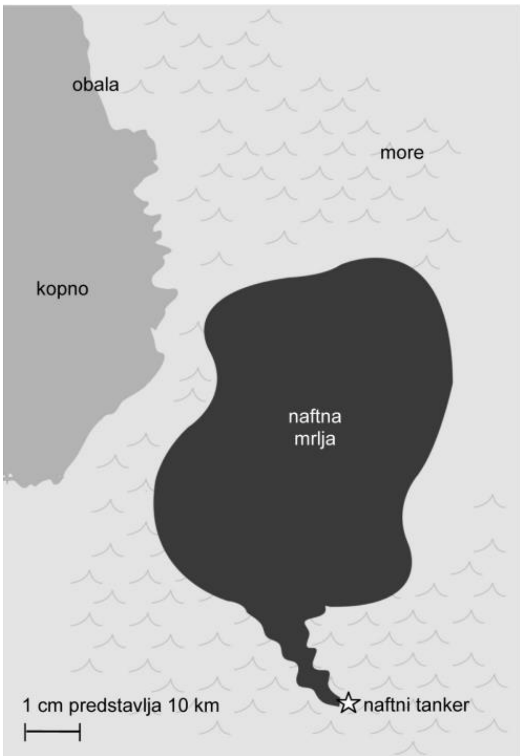
Rješenje 6.2.7.

Odgovor je moguće dobiti crtanjem četverokuta, crtanjem kruga te zbrajanjem površina jednostavnih geometrijskih likova. Točan odgovor su vrijednosti između 12 000 000 km² i 18 000 000 km².

Za uspješno rješavanje zadatka, učenik mora razumjeti sljedeće koncepte: korištenje mjerila na karti, pretvaranje mjernih jedinica, primjenu osnovnih matematičkih operacija za izračunavanje površine geometrijskih likova te formule za iste. Učenik samostalno odabire metodu rješavanja i donosi neformalne zaključke, stoga ovaj zadatak zahtijeva barem drugu razinu van Hiele modela.

Zadatak 6.2.8. **NAFTNA MRLJA**

Naftni tanker udario je u stijenu u moru, koja je načinila rupu u spremnicima s naftom. Tanker se nalazio otprilike 65 km od kopna. Nakon nekoliko dana nafta se proširila kao što je prikazano na donjoj karti:



1. pitanje: Služeći se mjerilom karte procijeni površinu naftne mrlje u kvadratnim kilometrima (km^2).

Rješenje 6.2.8.

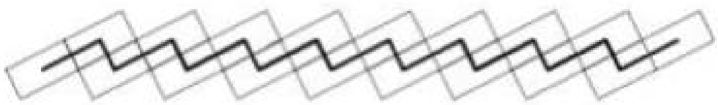
Zadatak je analogan zadatku POVRŠINA KONTINENTA (1. pitanje). Učenik samostalno odabire metodu rješavanja. Služeći se zadanim mjerilom treba procijeniti površinu nepravilnog oblika na karti, donosi neformalne zaključke pa ovaj zadatak znanstvenog konteksta zahtijeva barem drugu razinu van Hiele modela. Točni odgovori su u rasponu od 2200 km^2 do 3300 km^2.

6.3. Natjecanje *Matematički klokan*

Jedna od zadaća međunarodne udruge *Klokan bez granica* jest organizacija natjecanja *Matematički klokan*. Okupljajući predstavnike iz više desetaka država svijeta, cilj udruge je popularizirati matematiku, odnosno motivirati učenike da se bave matematikom izvan redovitih školskih programa. Natjecatelji su podijeljeni u sedam kategorija − Pčelice (drugi razred osnovne škole), Leptirići (treći razred osnovne škole), Ecolier (četvrti i peti razred osnovne škole), Benjamin (šesti i sedmi razred osnovne škole), Cadet (osmi razred osnovne škole i prvi razred srednje škole), Junior (drugi i treći razred srednje škole) i Student (četvrti razred srednje škole). ([10]) Više informacija o samom natjecanju dostupno je na stranicama Hrvatskoga matematičkog društva koje se bavi organizacijom natjecanja u Republici Hrvatskoj. Ilustrirajmo nekoliko zadataka provedenih u natjecanjima koji pridonose razvoju geometrijskog mišljenja s fokusom na konceptima duljine i površine. Tekstovi zadataka dostupni su u [3], [10] i [11].

Zadatak 6.3.1. **(Matematički klokan 2009., Ecolier)**

U svom vrtu Antonio je napravio uzorak kao na slici, koristeći 18 pravokutnika sa stranicama duljine 4 dm i 6 dm. Antonio je nacrtao crnu liniju spajajući središta tih pravokutnika. Koliko je duga crna linija?



A. 80 dm B. 86 dm C. 90 dm D. 96 dm E. 100 dm

Rješenje 6.3.1.

Komponente crne poligonalne linije čine kraće i dulje međusobno sukladne dužine, pri čemu je duljina kraće dužine jednaka duljini kraće stranice pravokutnika, a duljina dulje dužine jednaka duljini dulje stranica pravokutnika. Ukupno ima devet duljih dužina i osam kraćih pa je ukupna duljina crne poligonalne linije $9 \cdot 6 + 8 \cdot 4 = 86$ dm, tj. rješenje je odgovor pod B. Učenici samo trebaju uočiti od koliko se kraćih, a od koliko duljih sukladnih dužina sastoji poligonalna linija, pa je ovo zadatak na nultoj razini van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja na konceptu duljine.

Zadatak 6.3.2. **(Matematički klokan 2014., Benjamin)**

Katarina ima 38 šibica i od njih sastavlja trokut i kvadrat, te pritom iskoristi sve šibice. Svaka se stranica trokuta sastoji od 6 šibica. Koliko ima šibica u svakoj stranici kvadrata?

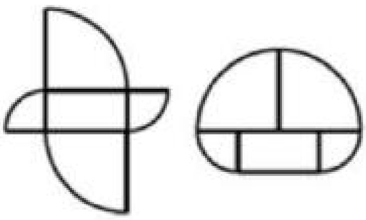
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 8

Rješenje 6.3.2.

Trokut ima tri stranice pa će Katarina za trokut iskoristiti $3 \cdot 6 = 18$ šibica. Dakle, za kvadrat joj ostaje $38 - 18 = 20$ šibica. Budući da su sve stranice kvadrata jednake duljine, jedna stranica kvadrata sastoji od $20 : 4 = 5$ šibica. U ovom zadatku potrebno je poznavati svojstva nekih geometrijskih likova, konkretno kvadrata i jednakostraničnog trokuta. Prema tome, rješavanje ovog zadatka zahtijeva barem prvu razinu van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja na konceptu duljine.

Zadatak 6.3.3. **(Matematički klokan 2012., Benjamin)**

Oba lika na slici sastavljena su od istih pet komada. Pravokutnik je dimenzija 5 cm x 10 cm, a ostali dijelovi su četvrtine dva različita kruga. Kolika je razlika između njihovih opsega?



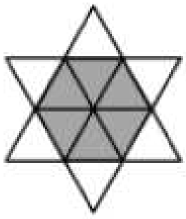
A. 2.5 cm B. 5 cm C.10 cm D. 20 cm E. 30 cm

Rješenje 6.3.3.

Rješavanje ovog problema zahtijeva barem prvu razinu van Hiele razvoja na konceptu duljine. Nije dovoljno samo prepoznati oblike na slici nego treba uočiti svojstva duljine rubova istih. Potom se može zaključiti da se opsezi danih likova razlikuju za jednu dulju i dvije kraće stranice pravokutnika, odnosno za $10 + 2 \cdot 5 = 20$ centimetara. Dakle, točan odgovor je pod D.

Zadatak 6.3.4. **(Matematički klokan 2009., Cadet)**

Zvijezda na slici sastoji se od 12 jednakih istostraničnih trokuta. Opseg zvijezde je 36 cm. Koliki je opseg zatamnjenoga šesterokuta?



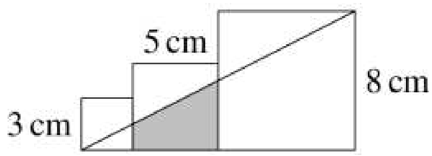
A. 6 cm B. 12 cm C. 18 cm D. 24 cm E. 30 cm

Rješenje 6.3.4.

U ovom zadatku potrebno je poznavanje svojstava jednakostraničnog trokuta. „Krakovi“ zvijezde su određeni dvjema stranicama jednakostraničnog trokuta, a rub šesterokuta je određen jednom stranicom istog trokuta. Duljine svih stranica toga trokuta su jednake pa je prema tome opseg šesterokuta upola manji od opsega zvijezde. Dakle, opseg zatamnjenoga šesterokuta iznosi $36 : 2 = 18$ centimetara, tj. odgovor pod C. Ovdje je također potrebna barem prva razina van Hiele razvoja geometrijskog mišljenja na konceptu duljine.

Zadatak 6.3.5. **(Matematički klokan 2023., Junior)**

Na slici su tri kvadrata stranica duljina 3 cm, 5 cm i 8 cm. Kolika je površina osjenčanog trapeza?



A. 13 cm^2 B. $\frac{55}{4}$ cm^2 C. $\frac{61}{4}$ cm^2 D. $\frac{65}{4}$ cm^2 E. $\frac{69}{4}$ cm^2

Rješenje 6.3.5.

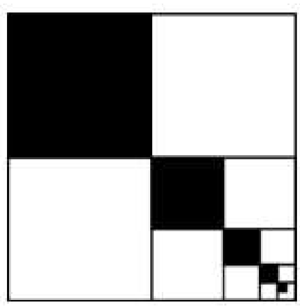
Uočimo da ovdje nije prototip trapeza, tj. trapez nije u uobičajenom položaju. Na slici možemo uočiti tri slična pravokutna trokuta, stoga je rješavanje ovog problema moguće primjenom sličnosti trokuta. Neka je a kraća i c dulja osnovica osjenčanog trapeza. Iz sličnosti trokuta slijedi:

$$3 : a = (3 + 5) : c = (3 + 5 + 8) : 8.$$

Odavde je $16a = 24$ cm i $16c = 64$ cm, odnosno $a = \frac{3}{2}$ cm i $c = 4$ cm. Visina trapeza v je 5 centimetara, pa površinu trapeza računamo prema formuli $P = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot v$. Površina osjenčanog trapeza iznosi $\frac{55}{4}$ cm^2. Prema tome, točan odgovor je pod B. Osim prepoznavanja geometrijskih oblika i poznavanja njihovih svojstava, potrebno je uspostaviti veze među tim geometrijskim oblicima i svojstvima. Prema tome, za rješavanje ovog problema učenici moraju biti barem na drugoj razini van Hiele razvoja geometrijskog mišljenja na konceptu površine.

Zadatak 6.3.6. **(Matematički klokan 2023., Student)**

Kvadrat površine 84 podijeljen je na četiri sukladna kvadrata. Gornji lijevi obojen je crno. Donji desni ponovno je podijeljen na četiri sukladna kvadrata. Gornji lijevi obojen je crno. Ovaj proces ponavlja se u beskonačnost. Kolika je ukupna površina obojena crno?



A. 24 B. 28 C. 31 D. 35 E. 42

Rješenje 6.3.6.

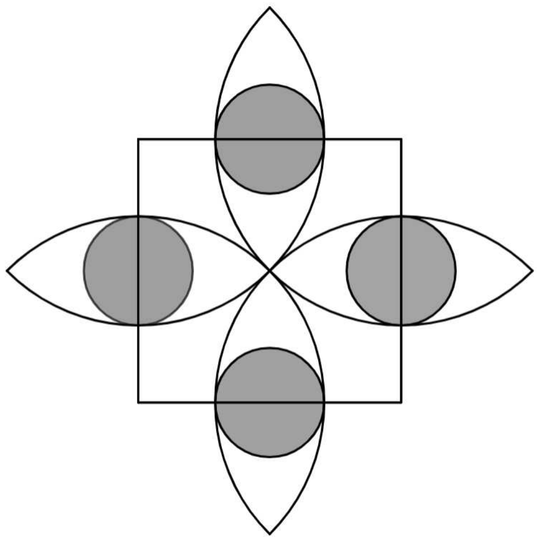
Površina najvećega crnog kvadrata iznosi četvrtinu površine polaznog kvadrata, dok se površina svakog sljedećeg crnog kvadrata dobije množenjem s $\frac{1}{4}$. Prema tome, ukupna površina obojena u crno je zbroj geometrijskog reda kojemu je prvi član

$a_1 = \frac{84}{4} = 21$ i kvocijent $q = \frac{1}{4}$. Iz formule $P = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ slijedi da tražena površina iznosi 28, odnosno da je točan odgovor pod B. Budući da je potrebno uspostaviti vezu među geometrijskim oblicima, rješavanje ovog problema zahtijeva barem drugu razinu van Hiele razvoja geometrijskog mišljenja na konceptu površine.

Slijedi još jedan primjer zadatka s natjecanja u kojem treba izračunati površinu ornamenta. Potrebno je poznavati dijelove kruga i njihova svojstva te uspostaviti veze među njima. Drugim riječima, za rješavanje sljedećeg problema potrebna je barem razina neformalne dedukcije u van Hiele modelu razvoja geometrijskog mišljenja na konceptu površine.

Zadatak 6.3.7. **(Matematički klokan 2010., Student)**

Duljina stranice kvadrata na slici iznosi 2, polukružnice prolaze središtem kvadrata i središte im je u njegovim vrhovima. Osjenčani krugovi imaju središta u polovištima stranica kvadrata i dodiruju polukružnice iznutra. Kolika je ukupna površina osjenčanih krugova?



A. $\frac{1}{4}\pi$ B. $\sqrt{2}\pi$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ D. π E. $4(3-2\sqrt{2})\pi$

Rješenje 7.3.7.

Uočimo odmah da su sve polukružnice sukladne (istog su radijusa R) i da su svi osjenčani krugovi sukladni (istog su radijusa r). Stoga odmah možemo zaključiti da je slika simetrična s obzirom na pravce koji prolaze središtem kvadrata i njegovim vrhovima te središtem kvadrata i središtem osjenčanih krugova, tj. ima četiri osi simetrije. Također, uočimo da je radijus polukružnice jednak polovini duljine dijagonale kvadrata, tj. $R = \sqrt{2}$. Jedan dio stranice kvadrata izvan kruga jednak je $2 - \sqrt{2}$ pa zbog simetrije možemo zaključiti da je radijus osjenčanog kruga $r = \frac{2-2\cdot(2-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} - 1$. Površina jednog osjenčanog kruga iznosi $(\sqrt{2}-1)^2\pi$, pa je ukupna površina svih osjenčanih krugova $P = 4 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \pi = 4 \cdot \left(2 - 2\sqrt{2} + 1\right)\pi = 4(3 - 2\sqrt{2})\pi$, tj. točan je odgovor pod E.

LITERATURA

1. Aglić Alinović, A., Horvat Dmitrović, L., Žgaljić Keko, A. Funkcije više varijabla, stranice 2 – 7, dostupno na: https://element.hr/wp-content/uploads/2020/06/unutra-13544.pdf
2. Bakić, D. (2017.) Normirani prostori, stranica 1, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/NP_17_18.pdf
3. Ćulav Markičević, M., Lukač, N., Marić, M., Varošanec, S., Varošanec, Z. (2015.) Matematičko natjecanje Klokan bez granica 2012. – 2014., Matkina biblioteka, Hrvatsko matematičko društvo
4. Čižmešija, A., Soucie, T., Svedrec, R., (2012.) Primjena geoploče u nastavi matematike, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 50, stranice 25 - 39
5. Čižmešija, A., Stilinović, S. (2021.) Šest veličanstvenih. Geometrijske pločice – jednostavno učilo s bezbroj mogućnosti. Miš, Vol. 111, No. 2, stranice 4 - 19
6. Čižmešija, A., Stilinović, S., i dr. Prezentacije i seminari iz kolegija Metodika nastave matematike 1, Metodika nastave matematike 2, Metodika nastave matematike 3, Metodika nastave matematike 4 (neobjavljeni materijali)
7. Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988.) The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents, Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 3, pages 1 – 196
8. Galić, M. (2023.) Geoploče i matematika, škole.hr, dostupno na: https://www.skole.hr/geoploce-i-matematika/ (prosinac, 2023.)
9. Guljaš, B. (2010.) Metrički prostori, stranice 1 - 8 https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/metprost.pdf (listopad, 2023.)
10. Hrvatsko matematičko društvo, Klokan, dostupno na: https://matematika.hr/klokan (listopad, 2023.)
11. Lukač, N., Marić, M., Varošanec, S., Varošanec, Z. (2012.) Matematičko natjecanje Klokan bez granica 2009. – 2011., Matkina biblioteka, Hrvatsko matematičko društvo
12. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, (2018.) Primjeri PISA zadataka iz matematičke pismenosti: testovi "papir-olovka"(PISA 2000, PISA 2003, PISA 2012), dostupno na:https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2018/05/Primjeri-PISA-zadataka_matemati%C4%8Dka-pismenost_papir-olovka.pdf (veljača, 2024.)

13. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, Što je PISA?, dostupno na: https://pisa.ncvvo.hr/sto-je-pisa/ (veljača, 2024.)
14. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, (2022.) TIMSS - Međunarodno istraživanje trendova u znanju matematike i prirodoslovlja, Ispitni zadatci iz ciklusa 2011., 2015. i 2019. godine, dostupno na: https://www.ncvvo.hr/wpcontent/uploads/2023/07/TIMSS_Medjunarodno-istrazivanje-ciklusi-2011-15-19_F.pdf (siječanj, 2024.)
15. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (2019.), Narodne novine, Odluka, NN 7/2019 - 146 https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
16. Pavković, B., Veljan, D. (1992.) Elementarna matematika 1, Školska knjiga
17. Pavković, B., Veljan, D. (1995.) Elementarna matematika 2, Školska knjiga
18. TIMSS & PIRLS International Study Center, TIMSS ADVANCED 2015 Example Advanced Mathematics Items, dostupno na: https://timssandpirls.bc.edu/timss2015advanced/downloads/TA15_FW_AppB.pdf (siječanj, 2024.)

SAŽETAK

U ovom diplomskom radu opisujemo van Hiele teorijski model razvoja geometrijskog mišljenja s naglaskom na konceptima duljine i površine. U uvodnom dijelu ukratko smo se osvrnuli na razvoj geometrije kao matematičke discipline i načine geometrijskog razmišljanja, nakon čega smo matematički definirali pojmove duljine i površine. Tomu slijedi detaljan opis pet razina van Hiele modela razvoja geometrijskog mišljenja, kao i pet faza za napredovanje tim razinama. Nadalje je dan pregled matematičkih učila, kasnije korištenih u aktivnostima, i ishoda iz Nacionalnog matematičkog kurikuluma vezanih uz koncepte duljine i površine za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. U daljnjem dijelu razradili smo niz aktivnosti primjerenih osnovnoškolcima i srednjoškolcima koje im pomažu u izgradnji koncepata duljine i površine kroz prizmu van Hiele teorijskog modela razvoja geometrijskog mišljenja. Učenici uspoređuju i sortiraju objekte po duljini ili površini, otkrivaju metode mjerenja i računanja duljina ravnih i zakriljenih linija, otkrivaju svojstva opsega i površina geometrijskih likova, računaju opsege i površine složenih likova, otkrivaju odnose površina i opsega, uklanjaju miskoncepciju da likovi jednakih opsega imaju jednake površine i obrnuto te otkrivaju i dokazuju formule za površinu geometrijskih likova. Za svaku aktivnost je razrađen oblik rada, tijek aktivnosti, dani su primjeri nastavnih listića i njihovih rješenja, pitanja za razrednu diskusiju i zaključci do kojih učenici trebaju doći. Na kraju rada donosimo primjere i rješenja zadataka TIMSS i PISA istraživanja te natjecanja Matematički klokan s komentarima o potrebnoj razini geometrijskog mišljenja prema van Hiele modelu za pojedini zadatak.

SUMMARY

The van Hiele Model of Geometric Thinking describes how students learn geometry. In this thesis focus is on the concepts of length and area. In the introductory section, we briefly discuss the development of geometry as a mathematical discipline, followed by a mathematical definition of the concepts of length and area. Furthermore, it is given detailed description of the five levels of van Hiele's model, as well as five phases for progressing through these levels. Additionally, we elaborate a series of activities suitable for elementary and high school students that help them build concepts of length and area through the prism of the van Hiele's theoretical model. Students compare and sort objects by length or area, discover methods for measuring and calculating lengths of straight and curved lines, explore the properties of perimeters and areas of geometric shapes, calculate perimeters and areas of complex shapes, discover relationships between areas and perimeters, dispel the misconception that figures with equal perimeters have equal areas, discover and prove formulas for the area of geometric shapes. Finally, we present examples and solutions of tasks from TIMSS and PISA research and the Math Kangaroo Competition with comments on the required level of geometric thinking according to the van Hiele's model for each task.

ŽIVOTOPIS

Rođena sam 14. prosinca 1997. godine u Zadru. Moje obrazovanje započelo je u Osnovnoj školi Privlaka u Privlaci, nakon čega sam pohađala Gimnaziju Jurja Barakovića u Zadru. Godine 2017. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. 2021. godine stekla sam zvanje univ. bacc. educ. math., a iste godine nastavila sam školovanje na diplomskom studiju istog smjera. Tijekom diplomskog studija, kao dio organizacije fakulteta, odradila sam metodičku praksu nastave matematike u osnovnoj školi Dobriše Cesarića i XV. gimnaziji u Zagrebu. Za vrijeme studija radila sam razne studentske poslove, a od rujna 2023. godine radim kao nastavnica matematike u Prirodoslovno-grafičkoj školi Zadar.