

# Napajanje satelita u niskoj orbiti pomoću specijalno dizajniranih laserskih snopova svjetlosti

---

**Lozinski, Teodor**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:005796>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-03**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Teodor Lozinski

Napajanje satelita u niskoj orbiti pomoću  
specijalno dizajniranih laserskih snopova svjetlosti

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER: NASTAVNIČKI

**Teodor Lozinski**

Diplomski rad

**Napajanje satelita u niskoj orbiti pomoću  
specijalno dizajniranih laserskih snopova  
svjetlosti**

Voditelj diplomskog rada: Prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. Prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

2. Prof. dr. sc. Matko Milin

3. V. pred. dr. sc. Karolina  
Matejak Cvenić

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2024.



## Sažetak

Sateliti koji lete u niskoj orbiti (eng. Low Earth Orbit = LEO) jednim se dijelom svoje orbite često nalaze u sjeni Zemlje, odnosno nisu izravno izloženi sunčevoj svjetlosti te se tada ne mogu napajati koristeći sunčeve ćelije. Stoga moraju nositi baterije kako bi bili funkcionalni i u tom dijelu orbite. Međutim, baterija predstavlja teret koji je potrebno lansirati zajedno sa satelitom u orbitu. Postoji ideja da bi se teret mogao smanjiti kad bi se ti sateliti mogli napajati čak i kada su u sjeni, ukoliko bi se na njih usmjerio snop laserske svjetlosti s drugog satelita koji je osvijetljen sunčevom svjetlošću. Nezaobilazan element takvog sustava napajanja je laser koji može usmjeriti svjetlost sa satelita koji odašilje energiju na satelit koji ju prima. U okviru ovog rada bavimo se različitim vrstama snopova laserske svjetlosti odnosno analizom snopova radi utvrđivanja onog s najučinkovitijim transferom snage radi napajanja satelita na velikim udaljenostima kroz slobodan prostor/medij. Ocjenjivat ćemo i usporediti efikasnost različitih izvedbi Gaussovog snopa s Besselovim snopom i Optical Pin Beam snopom, specijalnim snopom svjetlosti koji se dizajnira pomoću Airyevih funkcija radi minimizacije difrakcije. Pitanje na koje želimo odgovoriti jest mogu li dobit nastale zbog minimizacije difrakcije nadoknaditi gubitke koji nastaju kreiranjem odgovarajućeg snopa s odgovarajućom faznom maskom.

Ključne riječi: napajanje satelita, orbita, solarne ćelije, laser, Gaussov snop svjetlosti, Besselov snop svjetlosti, baterija, teret

# **Powering low Earth orbit satellites using specially designed laser beams of light**

## **Abstract**

Satellites orbiting closest to Earth or low Earth orbit satellites often find themselves in Earth's shadow, i.e. they aren't exposed to sunlight so they cannot utilize solar cells during that period. In order to be operational while traveling through the shadow they're equipped with batteries. However, batteries are an extra payload that has to be launched with a satellite in orbit. There is an idea that the satellites could be powered even when they are in part of the orbit in which direct sunlight is obstructed by Earth if another satellite in higher orbit illuminates their solar cells by a beam of laser light, which would consequently reduce payload. Essential element of this charging system is a laser that's able to direct its light beam from a satellite emitting energy to a satellite receiving it. Within the scope of this thesis, we deal with different kinds of laser beams, that is, analysis of beams so that we could determine which one would be the most efficient for charging up the satellite over long distances (through empty space). We will evaluate and compare efficacy of different implementations of Gaussian beams with Bessel beams, and Optical Pin beam, which is a special type of light beam, and it's designed with Airy's functions for minimization of diffraction. The question that we'd like to answer is whether the gains from minimization of diffraction can compensate for the losses that occur when creating needed beams with appropriate phase masks.

Keywords: satellite charging/powering, orbit, solar cells, laser, Gauss beam, Bessel beam, battery, payload

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b> .....	1
<b>2. Sateliti u Zemljinoj niskoj orbiti</b> .....	3
<b>3. Napajanje satelita</b> .....	5
<b>4. Problem koji nastojimo riješiti</b> .....	7
<b>5. Teorijski koncepti za opis propagacije svjetlosti – paraksijalna aproksimacija</b> .....	9
<i>5.1 U geometrijskoj optici</i> .....	9
<i>5.2 U valnoj optici</i> .....	9
<b>6. Odabrani profili snopova svjetlosti</b> .....	11
<i>6.1 Gaussijan</i> .....	11
<i>6.2 Besselova zraka</i> .....	14
<i>6.3 OPB (Optical Pin Beam)</i> .....	17
<b>7. Detaljna analiza propagacije i učinkovitosti za Gaussove zrake</b> .....	22
<b>8. Diskusija i zaključak</b> .....	27
Literatura .....	28

## 1. Uvod

Kada govorimo o satelitima, mislimo na mjesece, planete ili uređaje koji orbitiraju oko nekog nebeskog tijela. Kao satelit, mjesec orbitira oko planeta, planet oko zvijezde, a uređaji koji su ljudska tvorevina mogu orbitirati oko bilo kojeg od spomenutih tijela. Možemo ih klasificirati kao prirodne i umjetne, gdje se prirodni odnose na nebeska tijela, a umjetni na uređaje lansirane sa Zemlje s ciljem kruženja oko npr. nekog planeta radi njegovog proučavanja.

U današnje vrijeme, doba jako velikog i brzog tehnološkog napretka, sateliti su iznimno značajni za ljude. Sastavljeni su s namjerom izvršavanja specifičnih zadaća pa tako razlikujemo komunikacijske, navigacijske, špijunske (promatračke) i satelite za znanstvena istraživanja.

Bez komunikacijskih satelita, ne bismo mogli prenositi televizijske signale na velike udaljenosti zbog prirodnih prepreka poput zakrivljenosti Zemlje, različitih oblika reljefa poput planina, šuma ili visokih zgrada. Osim toga, suočili bismo se s velikim poteškoćama u izgradnji telekomunikacijske mreže, jer bi postavljanje telefonskih kablova na velike udaljenosti ili ispod vode, kao što je slučaj s međukontinentalnim telefonskim linijama, bio izuzetno težak i skup proces.

Prije nekoliko desetljeća ljudi su na putovanja nosili karte i planove grada, no danas je život bez GPS sustava, koji se sastoji od mreže navigacijskih satelita, gotovo nezamisliv. Svaki mobilni uređaj sadrži GPS prijemnik koji nam u aplikaciji za pozicioniranje na zaslonu prikazuje našu lokaciju s prilično visokom točnošću. Precizni satovi, razvijeni od strane fizičara i inženjera uz *korekcije* temeljene na Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti, ključni su sastojak tih sustava za precizno pozicioniranje na Zemlji.

Promatrački sateliti služe obavještajnim agencijama i vojsci za prikupljanje informacija od interesa jer su, između ostalog, opremljeni kamerama visoke rezolucije, radarima, infra-crvenim detektorima te mogu snimati radarsku i radio transmisiju.

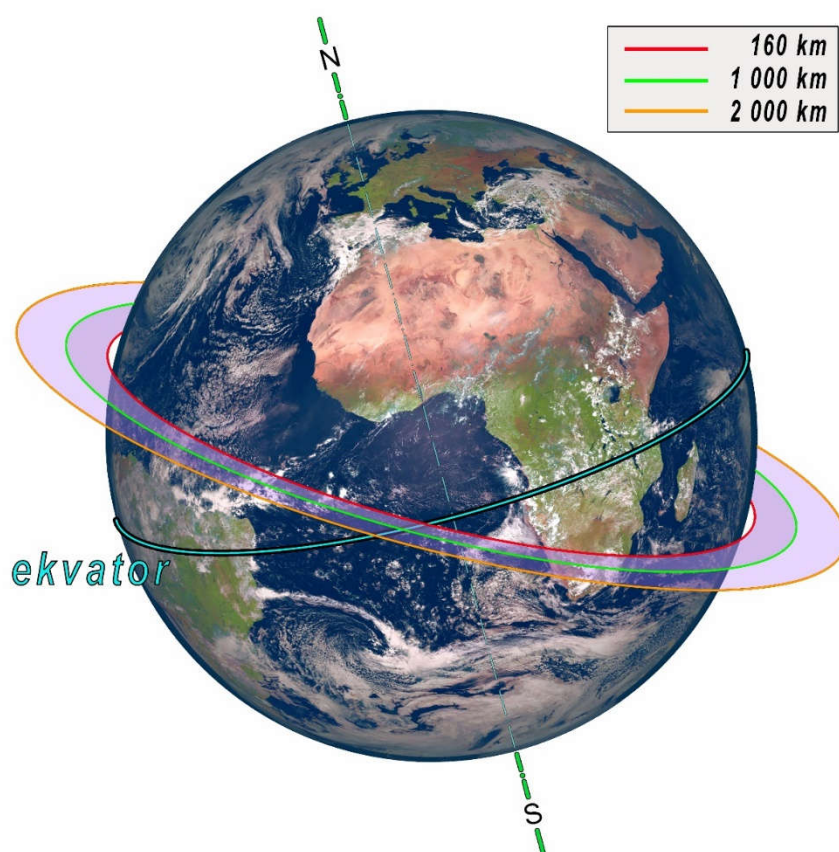
Satelite za znanstvena istraživanja možemo podijeliti prema namjeni. Meteorološki sateliti omogućuju znanstvenicima (meteorolozima) bolje predviđanje vremenskih prilika, kao i bilježenje atmosferskih uvjeta što u kombinaciji s velikom količinom podataka koji bilježe oceanografski sateliti daje najbolji izvor za istraživanje klimatskih promjena. Oceanografski



sateliti također služe za promatranje života u moru, analizu morskih struja, praćenje temperature mora, dobivanje potpune sinoptičke karte oceana. Sateliti za snimanje, odnosno "promatranje Zemlje" (eng. Earth Observation), omogućuju nam bilježenje promjena u površini ledenjaka, dugoročne obrasce padalina, stanje biljnog pokrova, emisiju stakleničkih plinova, zagađenje zraka, svjetlosno zagađenje, razmjor šumskih požara te izlivanje nafte. Ukratko rečeno, primarna uloga znanstvenih satelita je *remote sensing* odnosno promatranje i provođenje mjerenja u našem okolišu s udaljenosti.<sup>[1][2]</sup>

## 2. Sateliti u Zemljinoj niskoj orbiti

Sateliti koji kruže oko Zemlje u niskoj orbiti nazivamo LEO (Low Earth Orbit) satelitima. Niskom orbitom se smatraju udaljenosti od 160 km do 1000 km<sup>[3]</sup> iznad površine Zemlje, iako neki izvori spominju da LEO može ići i do 1600 km<sup>[4]</sup> pa čak i do visine od 2000 km<sup>[5]</sup>. Za razliku od geostacionarne orbite (GEO – Geostationary Orbit ili Geosynchronous Equatorial Orbit) koja se nalazi na približno 36000 km iznad površine Zemlje te prati rotaciju Zemlje, LEO orbita nije vezana za kruženje oko ekvatora. To također znači da ti sateliti ne moraju imati istu putanju oko Zemlje što omogućuje puno više putanja u niskoj orbiti.



Slika 1. Prikaz Zemljine niske orbite LEO u proporcijama s njenim dimenzijama (radijus na ekvatoru zemlje  $\approx 6378$  km)

Jedan od najpoznatijih primjera satelita u niskoj orbiti je Međunarodna svemirska postaja (ISS), koja kruži na udaljenosti od 400 km oko Zemlje te se pritom kreće brzinom od 7,8 km/s. Stoga joj je za jedan puni krug potrebno oko 90 minuta.

Pojedinačni LEO satelit ne može se koristiti za telekomunikaciju zbog svoje velike brzine i kontinuirane promjene položaja, zbog čega ga je teško pratiti s tla (površine Zemlje). Kako bi se tome doskočilo kreira se mreža međusobno povezanih LEO satelita koji rade zajedno kako bi se pokrila veća Zemljina površina.

LEO sateliti su ekonomičniji za lansiranje, ali zbog svoje relativno niske putanje prolaze kroz gušću atmosferu, gdje su izloženi trenju s plinovima u termosferi i egzosferi. To zahtijeva značajan izvor energije za eventualnu korekciju putanje.

Prednosti LEO satelita je njihova udaljenost od Zemlje koja omogućuje manju potrošnju energije za komunikaciju (komunikacijski signali mogu biti manje snage) i manju latenciju signala u usporedbi s višim orbitama<sup>[6]</sup>. Osim već spomenutih, jedan od nedostataka je i popularizacija niske orbite u komercijalne svrhe, što rezultira sve većim brojem krhotina u svemiru (eng. space debris), čime se otežava poslovanje svemirskim agencijama zbog dodatnih ulaganja u sigurnost i zaštitu tijekom putovanja kroz nisku orbitu.

### 3. Napajanje satelita

Nakon što ih lansiraju u njihovu orbitu, satelitima je potreban izvor napajanja kako bi mogli funkcionirati.

Glavni izvor napajanja satelita su solarni paneli koji pretvaraju sunčevu energiju (elektromagnetsko zračenje) u električnu energiju koja se potom koristi ili skladišti u baterijama. Količina potrebne energije varira ovisno o namjeni i dimenzijama satelita. Tehnološkim napretkom u području elektronike smanjuju se dimenzije i masa satelita što je ključno za smanjenje troškova lansiranja.

Prema masi, satelite možemo klasificirati na male (do 500 kg), srednje (do 1000 kg) i velike (preko 1000 kg)<sup>[7]</sup>. Male satelite dodatno možemo podijeliti u potkategorije, kao što su mini-sateliti (100 – 500 kg), mikro-sateliti (10 – 100 kg), nano-sateliti (1 – 10 kg), itd. Dok većina srednjih i velikih satelita zauzima GEO orbitu, brojni mini-sateliti se nalaze u LEO, dok su ostale potkategorije malih satelita gotovo isključivo u LEO orbiti.

Dimenzije solarnih panela određuju se prema energetske potrebama satelita. Stoga je razumljivo da energetski zahtjevniji sateliti imaju panele veće površine kako bi prikupili više sunčeve energije. Prilikom lansiranja, ovisno o tipu satelita, ovi paneli mogu biti sklopljeni uz satelit. Nakon što satelit dosegne svoju orbitu, paneli se otvaraju ili su integrirani u tijelo satelita duž njegovih stranica.

Količina energije koju solarni paneli mogu generirati ovisi o orbiti, ponašanju satelita i njegovom očekivanom trajanju. Važno je osigurati minimum potrebnog napona bez obzira na visinu orbite i atmosferske uvjete. Također, treba uzeti u obzir degradaciju materijala, posebice koroziju koja se javlja zbog jednoatomnog kisika (ATOX) prisutnog u LEO orbiti.<sup>[8]</sup>

Kada se nalaze u Zemljinoj sjeni, prilikom kruženja u pojasu LEO, sateliti crpe energiju uskladištenu u baterijama kako bi vršili svoju funkciju. Ako bismo htjeli povećati funkcionalnost, pojačati operativnu snagu satelita ili smanjiti kapacitet baterija na samom satelitu, čime bi se znatno smanjila njegova masa, bio bi potreban veći i snažniji ili kontinuirani izvor energije. To bi se postiglo lansiranjem satelitske stanice u višu orbitu MEO (eng. medium

Earth orbit) ili GEO koja bi napajala satelite u pojasu LEO za vrijeme prolaska kroz pomrčinu odnosno Zemljinu sjenu. U tom periodu ta bi satelitska stanica laserima obasjavala solarne panele LEO satelita, tj. služila kao pomoćni izvor energije.

#### 4. Problem koji nastojimo riješiti

Različiti tipovi satelita u LEO pojasu, kao što su nano-sateliti, imaju različite izvedbe ovisno o korištenom standardu. Primjerice, možemo spomenuti CubeSats, PocketQubes, TubeSats, ThinSats i neke nestandardizirane varijante.<sup>[7]</sup> Najpoznatiji među njima su CubeSats, razvijeni suradnjom California Polytechnic State University i Stanford University 1999. godine. CubeSats imaju standardne dimenzije u obliku kocke, pri čemu je mjerna jedinica CubeSata 1 U ("one unit"), koja odgovara dimenzijama od 10 cm x 10 cm x 10 cm<sup>[9]</sup> ili 10 cm x 10 cm x 11,35 cm<sup>[7]</sup>.

Budući da se u okviru ovog rada bavimo pitanjem o tome koji snop svjetlosti je najbolji za prijenos snage sa satelitske stanice na satelit u LEO, važno je obratiti pažnju na dimenzije snopa svjetlosti, koje su uvjetovane dimenzijama solarnih panela na ciljnom satelitu. S obzirom na to da većina LEO satelita pripada kategoriji malih satelita, optimalno bi bilo napraviti izračun za najmanju standardiziranu površinu CubeSata od 1 U.

Specificirajmo detaljno problem. Na satelitskoj stanici nalazi se laser koji na svom izlazu ima valnu frontu tj. oblik električnog i magnetskog polja prema tipu odnosno dizajnu lasera. Pretpostavit ćemo da je snop linearno polariziran (polarizacija vala ne utječe na rezultat pa time ne gubimo na općenitosti), te da je kompleksna amplituda električnog polja na izlazu iz lasera dana funkcijom  $\psi(x, y, z = 0)$ . Geometrija sustava je takva da z-os spaja satelitsku stanicu i satelit u pojasu LEO koji želimo napajati. Iz početnog uvjeta  $\psi(x, y, z = 0)$  može se izračunati  $\psi(x, y, z)$  budući da je propagacija elektromagnetskog polja dana Maxwellovim jednadžbama (svemir tretiramo kao vakuum). Konkretno, ovdje ćemo koristiti paraksijalnu aproksimaciju koja je prikladna za dani problem te rješavati dvodimenzionalnu Schrödingerovu jednadžbu koja se u nekoliko koraka može dobiti iz Maxwellovih jednadžbi. Na poziciji satelita u pojasu LEO, označimo je sa  $z_p$ , zanima nas koliko svjetlosti je došlo na solarni panel satelita, a koliko se svjetlosti izgubilo zbog divergencije i/ili difrakcije zrake. Koji je optimalan oblik zrake tj. oblik valne funkcije  $\psi(x, y, z)$  koji će dati maksimalan transfer energije, a da pri tome uređaji koji su potrebni za dobivanje tog oblika nisu velik teret (eng. *payload*) na satelitskoj stanici za slanje u orbitu. Konkretno, isprobat ćemo profil Gaussijana, jedan od najčešćih profila koji dobivamo na

izlazu iz lasera, a koji ovisi o dizajnu lasera. Svjetlost koju ćemo pri tome koristiti je u infracrvenom spektru (valna duljina 1500 nm) koji je optimalan za ovaj problem.

Nakon toga ćemo usporediti taj profil sa snopom koji se temelji na Besselovim ili Airyevim funkcijama kod kojih je difrakcija minimalna. Iako se na prvi pogled čine kao bolji odabir, oni zahtijevaju sustav na satelitskoj stanici koji će kreirati odgovarajući profil zrake. Taj sustav ima određenu težinu te predstavlja dodatni teret koji je potrebno lansirati u orbitu na satelitskoj stanici. Nadalje, pri formiranju takvog snopa gubi se dio svjetlosti na optičkim elementima koji stvaraju odgovarajući Besselov ili Airyev profil.

Stoga je potrebno analizirati gubitke koji nastaju difrakcijom kod Gaussijana te odvagati jesu li ti gubitci dovoljno mali tj. je li potrebno lansirati optičke elemente za stvaranje Besselovog ili Airyevog profila na satelitsku stanicu.

## 5. Teorijski koncepti za opis propagacije svjetlosti – paraksijalna aproksimacija

### 5.1 U geometrijskoj optici

Pri opisivanju pravocrtnog širenja svjetlosti, paraksijalna aproksimacija označava slučaj kada je neki kut  $\theta$  između zrake i neke referentne optičke osi jako malen, npr. puno manje od 1 radijana te tada možemo pretpostaviti da  $\text{tg}(\theta) \approx \sin(\theta) \approx \theta$ .

### 5.2 U valnoj optici

Kada promatramo valnu prirodu svjetlosti, da bi paraksijalna aproksimacija bila zadovoljena smjer propagacije električnog polja, koji je okomit na smjer širenja elektromagnetskog vala, mora biti približno jednak nekoj referentnoj osi. Tada valnu jednadžbu koja je diferencijalna jednadžba drugog reda možemo zamijeniti jednostavnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda.<sup>[10]</sup>

Valnu jednadžbu:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad (1)$$

pod pretpostavkom da je separabilna, separacijom varijabli razdvojimo na funkcije ovisne o prostornim i vremenskim koordinatama. *Helmholtzova jednadžba* predstavlja vremenski neovisnu valnu jednadžbu:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2)$$

Kada jednadžbu raspišemo za neku danu valnu funkciju  $\psi = \psi(x, y, z) \cdot e^{ikt}$ , gdje nam je os  $z$  smjer propagacije vala, dobivamo:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$



Uvjet paraksijalne aproksimacije<sup>[11]</sup>:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \quad (4)$$

Drugim riječima kut  $\theta$  između valnog vektora  $k$  i optičke osi  $z$  je jako malen:  $\theta \ll 1$ .

Helmholtzova se jednačba u paraksijalnoj aproksimaciji svede na:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Rješavajući gornju jednačbu, iz početnog uvjeta  $\psi(x, y, z = 0)$  može se izračunati  $\psi(x, y, z)$ .

## 6. Odabrani profili snopova svjetlosti

### 6.1 Gaussijan

U današnje vrijeme uporaba lasera je neizostavan dio naše svakodnevice, bili mi toga svjesni ili ne. Primjenjuju se u znanstvene svrhe, npr. kod spektroskopske analize ili u medicini, između ostalog, za precizno uništavanje stanica raka. U tehnologiji se koristi primjerice za mjerenje udaljenosti, dok ih u svakodnevnoj uporabi nalazimo u čitačima bar kodova.

Karakteristika laserske zrake je uzak raspon valnih duljina, što ih golom oku čini monokromatskim. Uz to, ima i strogo usmjeren, uzak snop svjetlosti koji se jako sporo proširuje s udaljenošću kojom zraka putuje, što ih razlikuje od običnih žarulja.

Najčešće korišteni laseri emitiraju zraku svjetlosti koju nazivamo *Gaussova zraka* ili *Gaussijan*. Taj naziv nosi zbog specifičnog oblika uzorka transverzalnog intenziteta koji podsjeća na Gaussovu ili normalnu raspodjelu.

Omotnica valne funkcije Gaussijana izgleda:

$$\psi(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \quad (6)$$

gdje nam  $w$  govori o širini raspodjele.

Kako bi dobili bolji uvid u ponašanje Gaussove zrake uzet ćemo valnu funkciju:

$$\Psi = \psi(x, y, z) \cdot e^{ikz} \quad (7)$$

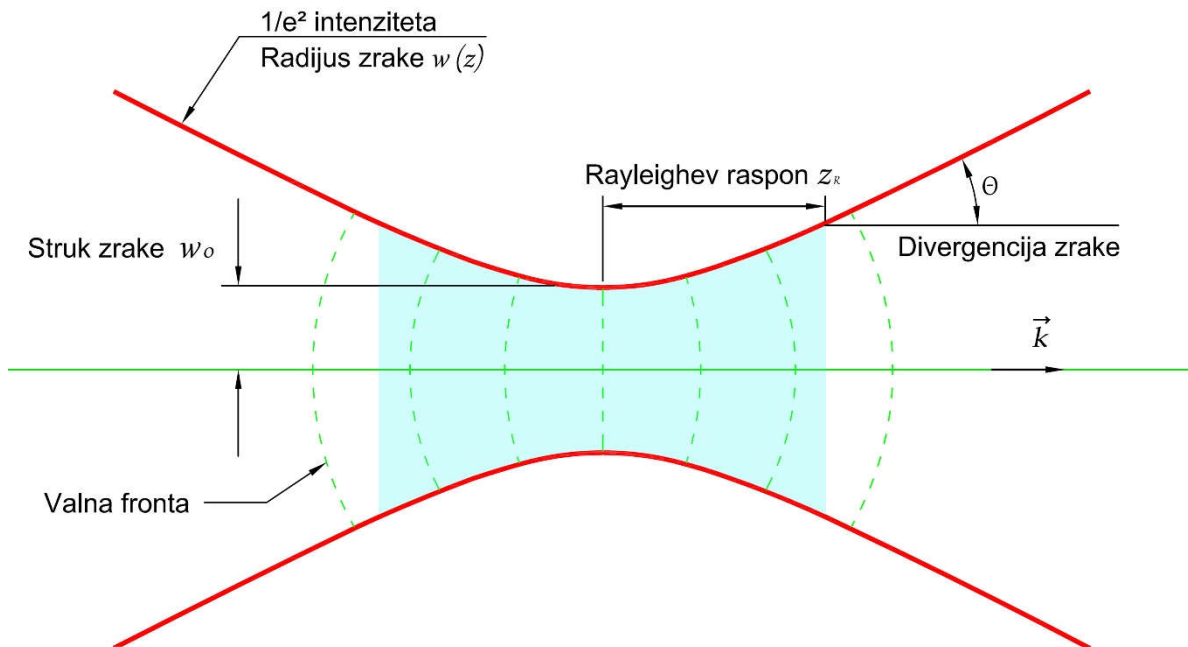
te ćemo pretpostaviti rješenje valne jednačbe<sup>[12]</sup>:

$$\psi(x, y, z) = e^{i\left[p(z) + \frac{k(x^2+y^2)}{2q(z)}\right]} \quad (8)$$

Uvrstimo li pretpostavljeno (probno) rješenje u Helmholtzovu jednačbu u paraksijalnoj aproksimaciji dobivamo rješenje:

$$\psi(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{ikz} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-i\phi(z)} \quad (9)$$

gdje nam prva dva člana predstavljaju amplitudu, a potonja tri fazu vala.



Slika 2. Prikaz propagacije kolimiranog Gaussijanskog snopa, s lijeva na desno, gdje je u struku zrake radijus  $w(z = 0) = w_0$  te se zraka u rasponu od  $z = 0 \pm z_R$  smatra kolimiranom. Promjena radijusa zrake s udaljenošću propagacije je prenaplašena radi zornosti.

Radijus zrake nam govori o udaljenosti od osi propagacije gdje intenzitet zrake opada na  $\frac{1}{e^2}$  maksimalne vrijednosti, označavamo ga sa:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (10)$$

gdje je  $w_0$  *struk zrake*, koji predstavlja radijus u točki propagacije gdje je zraka najuža,  $z_R$  je *Rayleighev raspon*:

$$z_R = \frac{w_0^2 \pi}{\lambda} \quad (11)$$

a on nam označava udaljenost od  $z = 0$  do neke udaljenosti  $z_R$  do koje smatramo da zraka ima gotovo konstantnu širinu ili kažemo da je *kolimirana*. Drugim riječima, to je točka u kojoj vrijedi

$w(z) = \sqrt{2w_0}$ . Tu točku smatramo prijelomnom točkom u propagaciji jer je prije nje presjek zrake bio konstantne širine, dok nakon nje imamo aproksimativno linearan porast u širini zrake.

Taj porast u širini se naziva divergencija zrake<sup>[13]</sup> i u *far fieldu* (gdje je  $z \gg z_R$ ) iznosi:

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (12)$$

gdje je  $\lambda$  valna duljina svjetlosti. Iz izraza je vidljivo što imamo manji struk zrake, zraka će imati veću divergenciju, kada se nalazimo daleko od  $z = 0$ .

$R(z)$  je *radijus zakrivljenosti* (valne fronte)

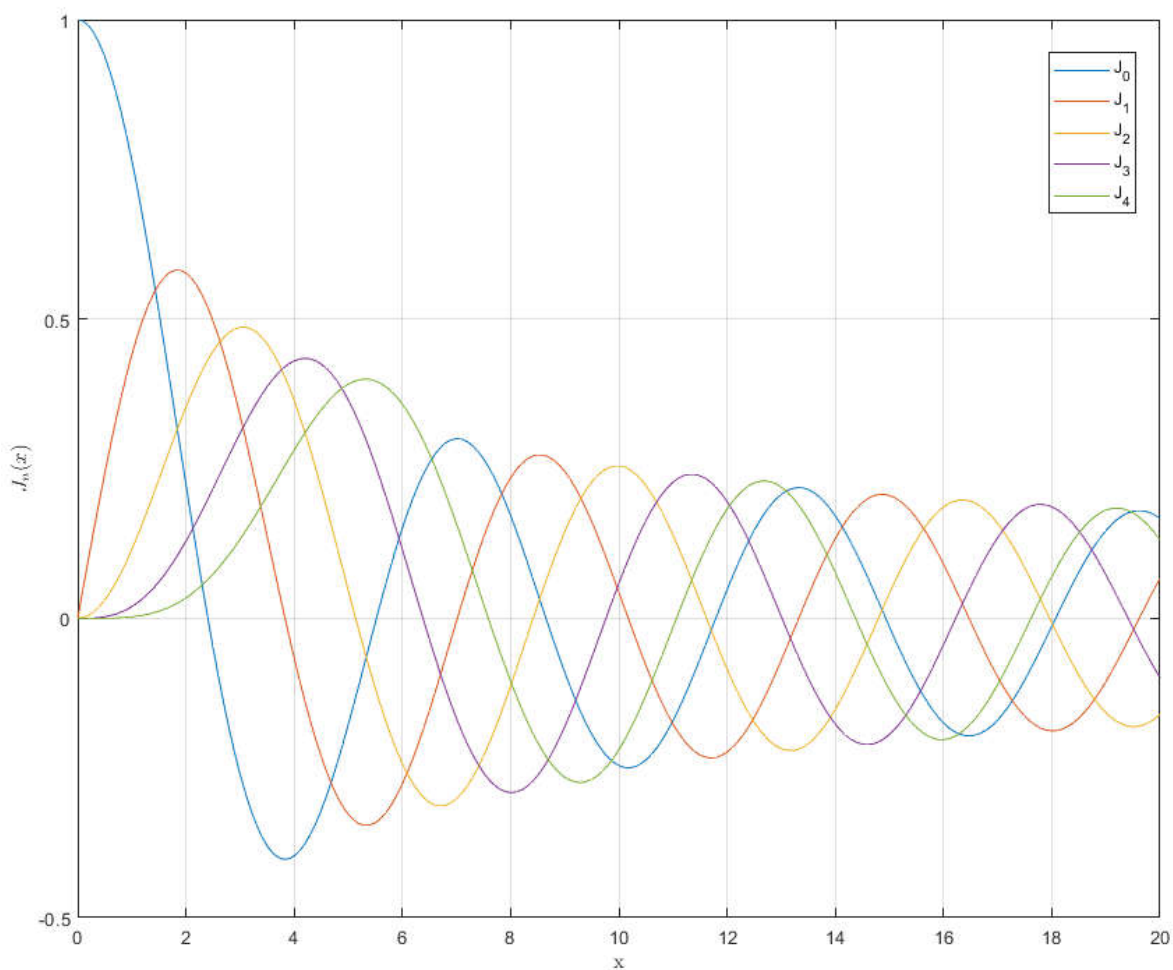
$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (13)$$

$\phi(z)$  je *Gouyeva faza*<sup>[14]</sup>

$$\phi(z) = \arctg \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (14)$$

## 6.2 Besselova zraka

Porast u širini zrake tijekom njene propagacije u valnom opisu svjetlosti naziva se difrakcija, a javlja se kada val naiđe na neki oblik prepreke, što onda utječe na amplitudu i/ili fazu vala. Dijelovi svjetlosti koja je prošla prepreku potom međusobno interferiraju te čine difrakcijski uzorak. Durnin je 1987.<sup>[15]</sup> predstavio rješenja valne jednačbe koja nisu podložna širenju po transverzalnim koordinatama uzduž osi propagacije, odnosno moglo bi se reći da su „imuna“ na difrakciju. Ove valne funkcije nisu jedinstvene, a pripadaju podskupu rješenja Besselove valne jednačbe točnije skupu Besselovih funkcija prve vrste.



Slika 3. Grafički prikaz Besselove funkcije prve vrste gdje je n broj reda funkcije (prikaz dobiven u Matlabu kodom sa: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/besselj.html>)

Otud i ime ove specijalne vrste zrake, budući da njen uzorak transverzalnog intenziteta izgleda kao Besselova funkcija prve vrste:

$$J_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n}} \frac{1}{k! \Gamma(k+n+1)} x^{2k} \quad (15)$$

gdje je  $n$  red Besselove funkcije.

Iz tog razloga isprva nije privukla previše pažnje, jer matematički gledano Besselova funkcija ima beskonačno lokalnih maksimuma. Kada bismo tu funkciju preveli u zraku cilindričnog oblika dobili bismo beskonačno mnogo prstenova (maksimuma), od kojih bi svaki nosio energije koliko i centralni maksimum. A kad bismo taj uzorak projicirali preko beskonačne površine, dobili bismo zraku beskonačne snage. Kako takvu zraku nije moguće stvoriti, današnja rješenja kojima se znanstvenici bave su Bessel-Gaussijani konačne energije koji dijele neka svojstva s idealnim Besselovim zrakama kao npr. samozacjeljivanje (eng. *self-healing*).

Da bismo došli do rješenja za idealnu Besselovu zraku pretpostavka će nam biti oblika

$$\psi(\rho, z) = f(\rho) e^{ik_z z} \quad (16)$$

gdje nam je  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  i uvrštavanjem u Helmholtzovu jednadžbu, dobijemo linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda koja oblikom podsjeća na Besselovu jednadžbu, odakle zaključujemo da je rješenje:

$$\psi(\rho, z) = J_p(k_\rho \rho) e^{ik_z z} e^{\pm ip\phi} \quad (17)$$

gdje je  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  odnosno  $k = \sqrt{k_\rho^2 + k_z^2}$

Kada bismo kao rješenje izabrali Besselovu funkciju prve vrste nultog reda imali bismo rješenje oblika:

$$\psi(\rho, z) = J_0(k_\rho \rho) e^{ik_z z} \quad (18)$$

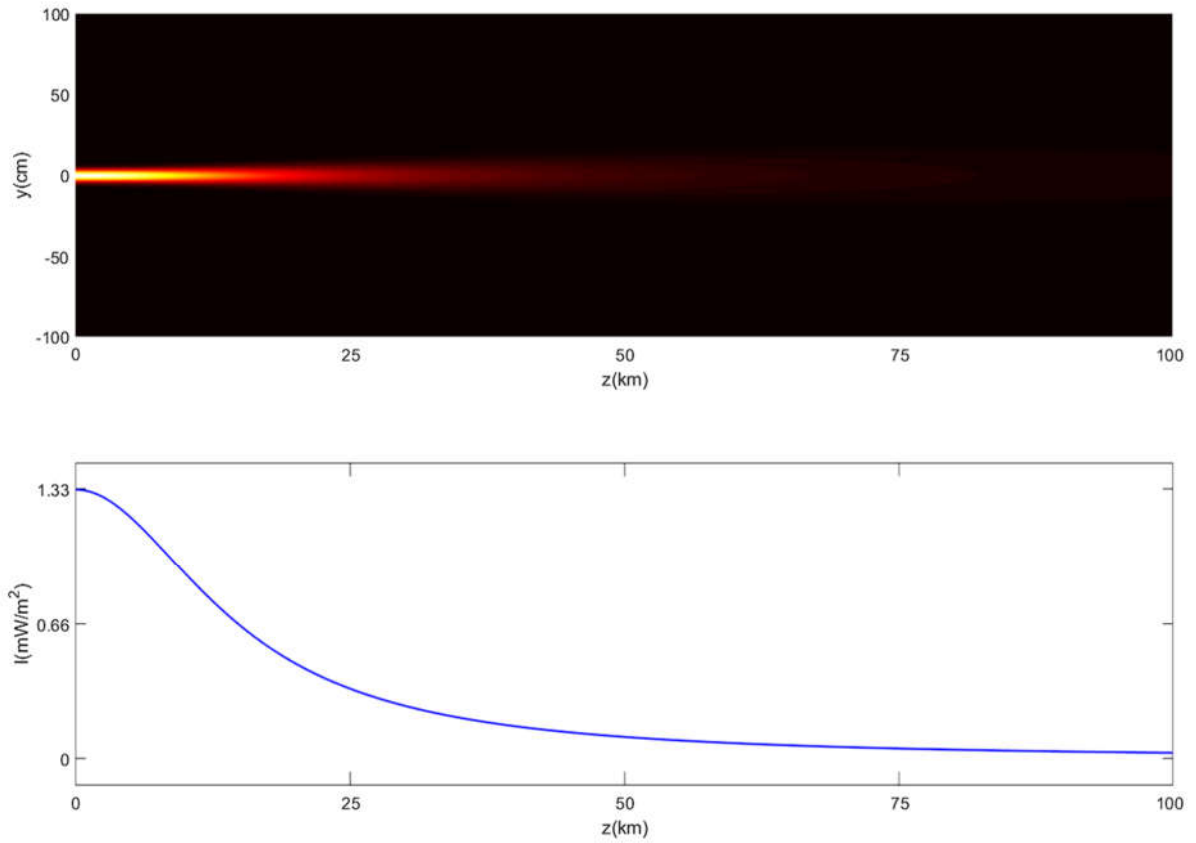
Besselove zrake, ovisno o načinu izvedbe i redu veličine Besselovih funkcija, mogu se kreirati na različite načine. Jedan od prvih načina njene izvedbe bila je primjena kružne aperture, koja se smješta u fokalnu ravninu konvergentne leće, a kao izvor svjetlosti koristio se ravni val. Nakon prolaska svjetlosti kroz navedene optičke elemente ona bi dobila oblik Besselove zrake, no imala bi limitirani doseg (udaljenost propagacije) kojeg se može izračunati iz geometrije sustava. Štoviše, takva zraka bila bi jako neefikasna, jer bi većina izvorišne svjetlosti bila blokirana na kružnoj aperturi.<sup>[16][17]</sup> Efikasniji način tvorbe Besselove zrake je primjerice uporaba aksikona, leće s konusnom površinom, pri čemu se za izvor koristi Gaussijan, jer se iskorištava cijela zraka, ako ne računamo unutarnje refleksije svjetlosti na optičkom elementu. Također se, za razliku od kružnih apertura, umanjuje oscilacija intenziteta uzduž osi propagacije.

### 6.3 OPB (*Optical Pin Beam*)

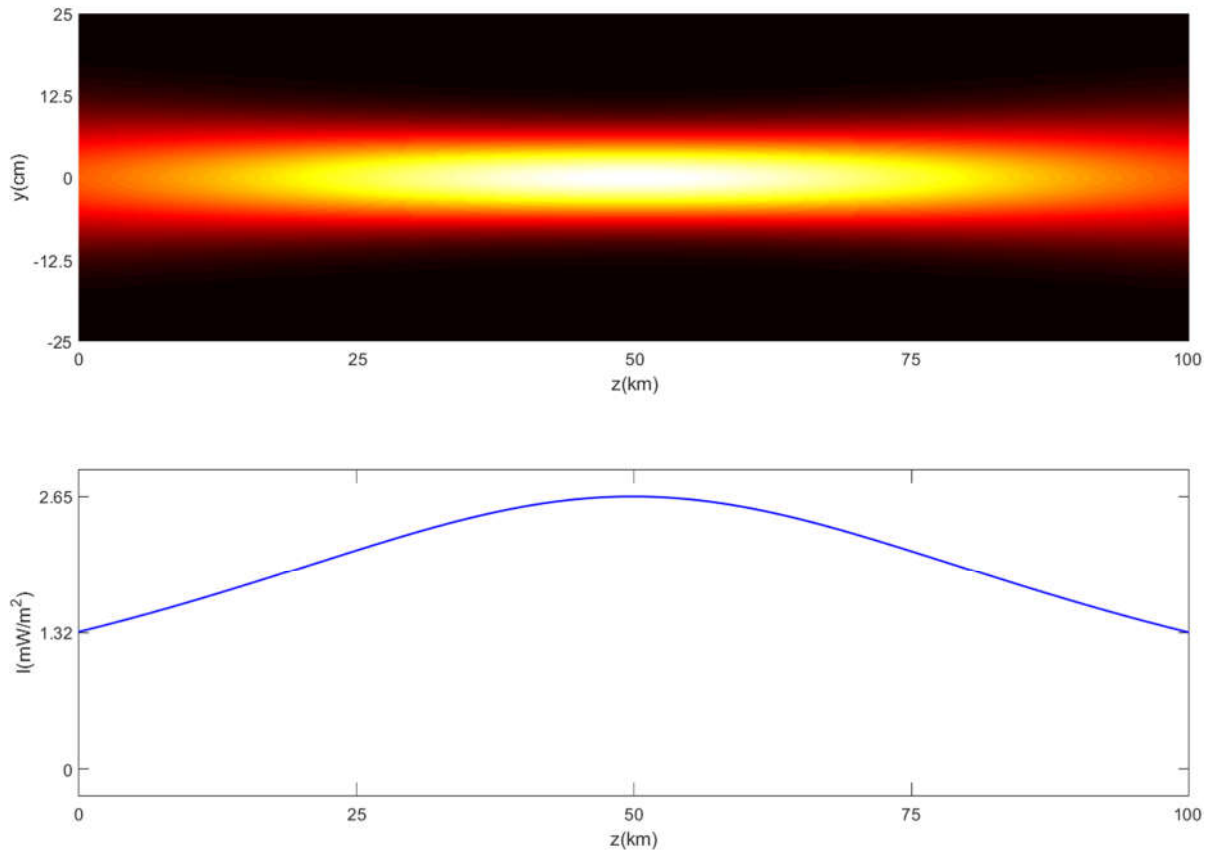
Zahvaljujući potencijalu koji su pokazale specijalne zrake svjetlosti poput Besselove i Airyve zrake, posljednjih nekoliko desetljeća znatno se populariziralo područje optički oblikovanih zraka (eng. *optical beam shaping*) ponajviše zbog mogućnosti njihove raznovrsne primjene, npr. u *atmospheric sensing*, optičkoj komunikaciji, lidarima, *solar sails propulsion*, *particle trapping*, *biomedical imaging* itd. Veliki nedostatak korištenja standardnih zraka svjetlosti kao što je Gaussijan je propagacija kroz turbulentan medij, gdje dolazi do značajnih gubitaka zbog raspršenja svjetlosti i deformacije valnih fronti. Taj problem može se prevladati pomoću AO (eng. *adaptive optics*) sustava, no zbog svoje kompleksnosti kao i visoke cijene proizvodnje ne predstavljaju optimalno rješenje. Idealne Besselove i Airyve zrake<sup>[18]</sup> predstavljaju linearne zrake koje su imune na difrakciju, čak i kroz atmosferske turbulencije zbog svojih samozacjeljujućih svojstava, to jest, propagacijom se zraka ponovno rekonstruira u originalan oblik. Iako u teoriji one predstavljaju zrake beskonačne energije imune na difrakciju, eksperimentalno je uspješno izvedena propagacija do svega nekoliko metara<sup>[19]</sup> koristeći prostorno svjetlosnu modulaciju SLM (eng. *spatial light modulation*), a njihova svojstva duž propagacije na velike udaljenosti još nisu ispitana (npr. deformacija valnih fronti uzrokovana turbulentnim medijem).

Slika 4. prikazuje propagaciju Gaussijanskog snopa na udaljenosti od 100 km. Konkretno, prikazana je kontura intenziteta te maksimum intenziteta kao funkcija propagacijske udaljenosti. Vidimo da se zbog difrakcije snop širi te da mu opada maksimalna vrijednost intenziteta. Za usporedbu, koristimo prikaz Slika 5. i Slika 6., gdje Slika 5. odnosno Slika 6. prikazuje isto što i Slika 4. ali za fokusirani Gaussijanski snop svjetlosti odnosno Besselov snop svjetlosti. Kod fokusiranog Gaussijanskog snopa Slika 5. vidljivo je širenje snopa s udaljavanjem od struka zrake te kako je u struku intenzitet maksimalan, dok je kod Besselovog snopa vizualno razvidno da nema difrakcije, a maksimalna vrijednost intenziteta se praktički ne mijenja.

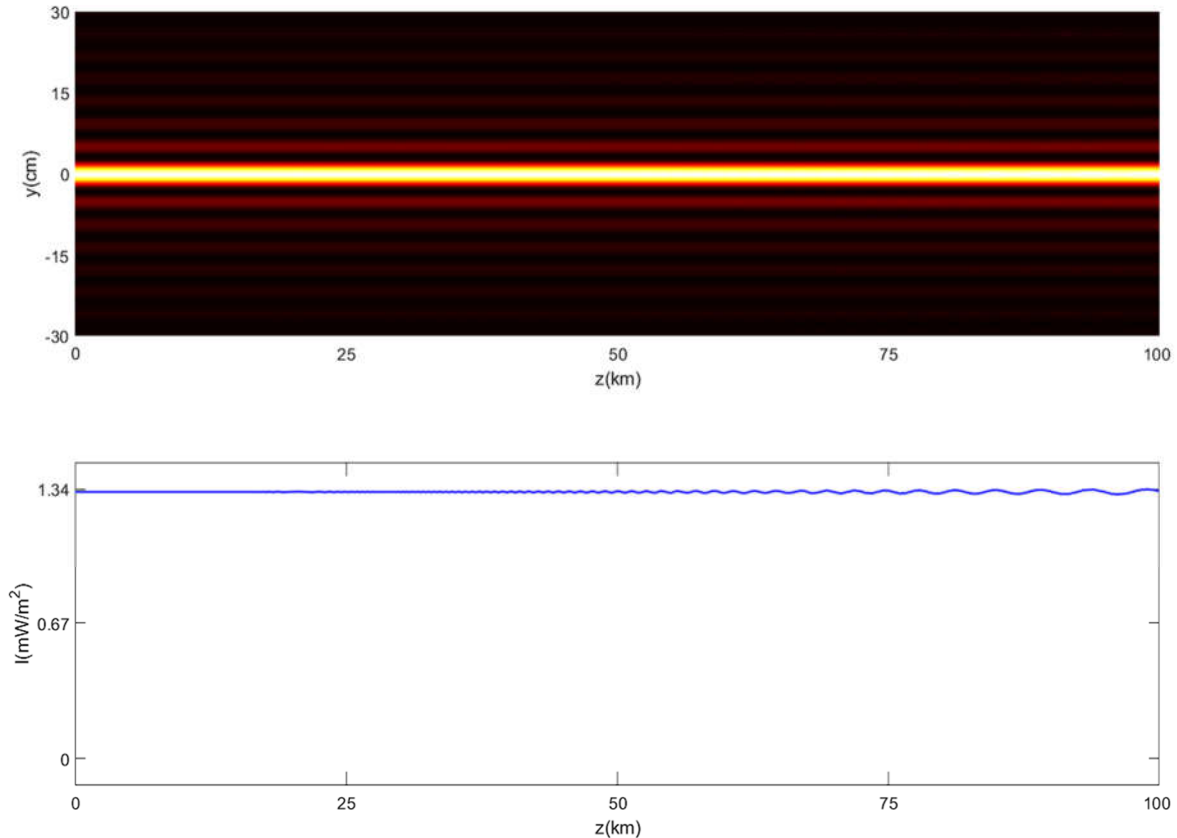




Slika 4. Propagacija Gaussijanskog snopa do udaljenosti od 100 km. Prikazana je kontura intenziteta (gornja slika) te maksimum intenziteta (donja slika) kao funkcija propagacijske udaljenosti  $z$ . Vidimo da se zbog difrakcije snop širi te da mu opada maksimalna vrijednost intenziteta. (prikaz dobiven u Matlabu kodom ustupljenom od strane Domenica Bongiovannia)



Slika 5. Propagacija fokusiranog Gaussijanskog snopa do udaljenosti od 100 km. Prikazana je kontura intenziteta (gornja slika) te maksimum intenziteta (donja slika) kao funkcija propagacijske udaljenosti  $z$ . Vidimo da se zbog difrakcije snop širi te da mu opada maksimalna vrijednost intenziteta s udaljenosti od struka zrake koji se nalazi na 50 km. (prikaz dobiven u Matlabu kodom ustupljenom od strane Domenica Bongiovannia)



Slika 6. Propagacija Besselovog snopa do udaljenosti od 100 km. Prikazana je kontura intenziteta (gornja slika) te maksimum intenziteta (donja slika) kao funkcija propagacijske udaljenosti  $z$ . Vidimo da se zbog difrakcije snop praktički uopće ne širi te da mu ne opada maksimalna vrijednost intenziteta. (prikaz dobiven u Matlabu kodom ustupljenom od strane Domenica Bongiovannia)

OPB predstavlja novu generaciju svjetlosnih zraka vrijednu pažnje i daljnjeg istraživanja zahvaljujući održavanju svog izvornog oblika na većim udaljenostima bez značajnijih deformacija u valnim frontama.

Kreirana je superpozicijom “usmjerenih komadića zrake *Airy* tipa” generiranih na način da se suprotni valni vektori, odnosno transverzalni valni vektori suprotnih komadića zrake poništavaju. Koristeći radijalnu simetriju, takva usmjereno raskomadana zraka omogućava da se sve komponente zrake uvijaju prema centru odnosno osi propagacije. *Airy* zraka ima paraboličnu putanju, što daje stabilan čeonu režanj, odnosno centralni maksimum. Još jedna osobitost ove zrake je njena širina koja se smanjuje s udaljenošću njene putanje. Točnije, njena širina je obrnuto proporcionalna udaljenosti propagacije.

Generiranje ove zrake postiže se faznom maskom koja je načinjena fotolitografijom radi finog urezivanja, nanometarske točnosti na kvarcnoj ploči. Kvarcna ploča kružnog oblika nakon obrade izgleda kao niz koncentričnih prstenova pri čemu je razlika u visini susjednih prstenova nekoliko desetaka nanometara, dok je raspon širina prstenova od nekoliko mikrometara do par milimetara. Točne specifikacije su odabrane tako da za bilo koji radijalan smjer dobijemo kubnu fazu (kao kod 1D Airy zrake).

Iako koristi Airy faznu modulaciju, baš zbog navedenog usmjerenog komadanja OPB se ubrzo uzduž propagacije “stopi” u zraku koja ima uzorak transverznog intenziteta kao Besselova zraka. Ponašanje ove zrake možemo teorijski opisati gledajući slučaj kada broj usmjerenih komadića teži u beskonačnost te je tada rješenje u paraksijalnoj aproksimaciji dano kao Fresnelov integral:

$$\psi(r, z) = \frac{ke^{\frac{ikr^2}{2z}}}{iz} \int_0^\infty \psi_0(\rho) J_0\left(\frac{kr\rho}{z}\right) e^{\frac{ikr^2}{2z}} d\rho \quad (19)$$

gdje je  $\psi_0(\rho)$  zraka na  $z = 0$  odnosno u ravnini fazne maske,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  je valni broj,  $J_0$  je Besselova funkcija prve vrste nultog reda,

također pretpostavka početnog uvjeta je:

$$\psi_0(\rho) = A(\rho) e^{-i\frac{4}{3}k\beta^2\rho^2} \quad (20)$$

gdje je  $\beta$  parameter koji predstavlja lokalnu frekvenciju fazne oscilacije vala, mjerna jedinica mu je  $m^{-1}$ . Rješenje je dano kao:

$$\psi(r, z) = 8(\pi k \beta^2 z^3)^{\frac{1}{2}} A(4\beta z^2) J_0(4k\beta\rho z) e^{i\Phi} \quad (21)$$

gdje je  $\Phi = \frac{kr^2}{2z} - \frac{8}{3}k\beta^2 z^3 - \frac{\pi}{4}$

te za širinu zrake dobivamo <sup>[19]</sup>:

$$w(z) = \frac{1}{4k\beta z} \quad (22)$$

## 7. Detaljna analiza propagacije i učinkovitosti za Gaussove zrake

Za Gaussovu zraku možemo dobiti analitičko rješenje koje opisuje njenu propagaciju. Sada je potrebno analizirati učinkovitost transfera energije za taj profil. Konkretno, početni uvjet je:

$$\psi(x, y, z = 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (23)$$

Zanima nas kako se širi taj snop svjetlosti. Propagacijska jednadžba je paraksijalna valna jednadžba:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

Valna duljina svjetlosti i valni vektor su povezani relacijom  $k = 2\pi/\lambda$ . Rješenje možemo konstruirati koristeći Fourierov transformat:

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \tilde{\psi}(k_x, k_y) \exp(i(k_x x + k_y y - \omega(k_x, k_y)z)) \quad (25)$$

Disperzijska relacija dobije se uvrštavanjem:

$$\omega(k_x, k_y) = \frac{1}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \quad (26)$$

Kompleksna amplituda u  $k$ -prostoru  $\tilde{\psi}(k_x, k_y)$  dana je Fourierovim transformatom početnog uvjeta:

$$\tilde{\psi}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \psi(x, y, z = 0) \exp(-i(k_x x + k_y y)) \quad (27)$$

Rješavajući gore navedene integrale, može se dobiti rješenje za propagaciju gaussijanskog profila svjetlosti:

$$\psi(x, y, z) = \frac{k\sigma^2}{iz + k\sigma^2} \exp\left(-\frac{k(x^2 + y^2)}{2iz + 2k\sigma^2}\right) \quad (28)$$

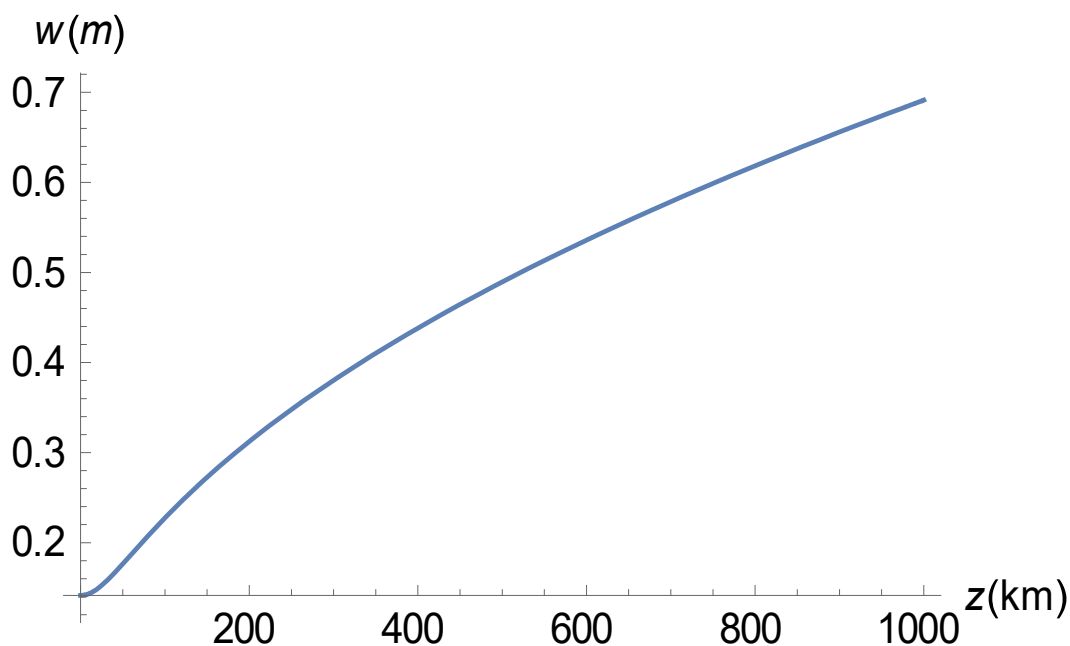
Da je rješenje točno može se provjeriti izravnim uvrštavanjem u paraksijalnu jednadžbu te provjeravajući početni uvjet.

Širinu Gaussijanskog snopa na nekoj udaljenosti od lasera  $z$  možemo definirati kao:

$$w(z, k, \sigma) = \sqrt{\left| \frac{2iz + 2k\sigma^2}{k} \right|} \quad (29)$$

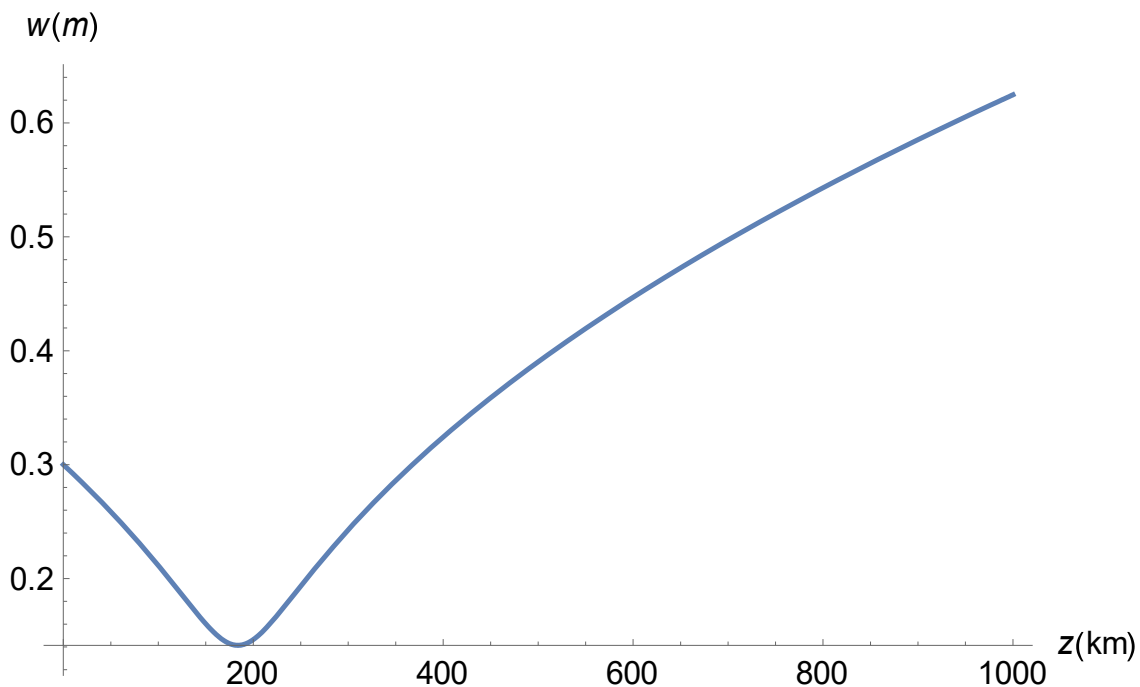
Sada možemo analizirati kolika će biti širina snopa na satelitu u LEO, ako je širina na satelitskoj stanici definirana optičkim sustavom. Nadalje, možemo pretpostaviti da je na satelitskoj stanici sustav takav da može fokusirati svjetlost prema nekoj točki, tako da najuži dio gaussijanskog snopa, tzv. struk zrake, bude na nekoj udaljenosti od lasera. Optimalno bi bilo da je struk točno na polovici puta od lasera do satelita u pojasu LEO.

Na slici 7. prikazana je ovisnost širine gaussijanskog snopa o udaljenosti od lasera. Početni snop nije fokusiran. Na početku je širina 0,1 m, dok je nakon 1000 km 0,65 m. Razvidno je kako bi ovaj sustav dobro funkcionirao kad bi solarni panel na satelitu u pojasu LEO bio dimenzija barem  $1 \text{ m}^2$ , dok bi gubitci za *CubeSat* satelit bili značajni.



Slika 7. Slika prikazuje ovisnost širine gaussijanskog snopa o udaljenosti od lasera. Početni snop nije fokusiran. Na početku je širina 0,1 m, dok je nakon 1000 km 0,65 m odnosno 65 centimetara. (prikaz dobiven u Wolfram Mathematica-i kodom ustupljenom od strane prof. dr. sc. Hrvoja Buljana)

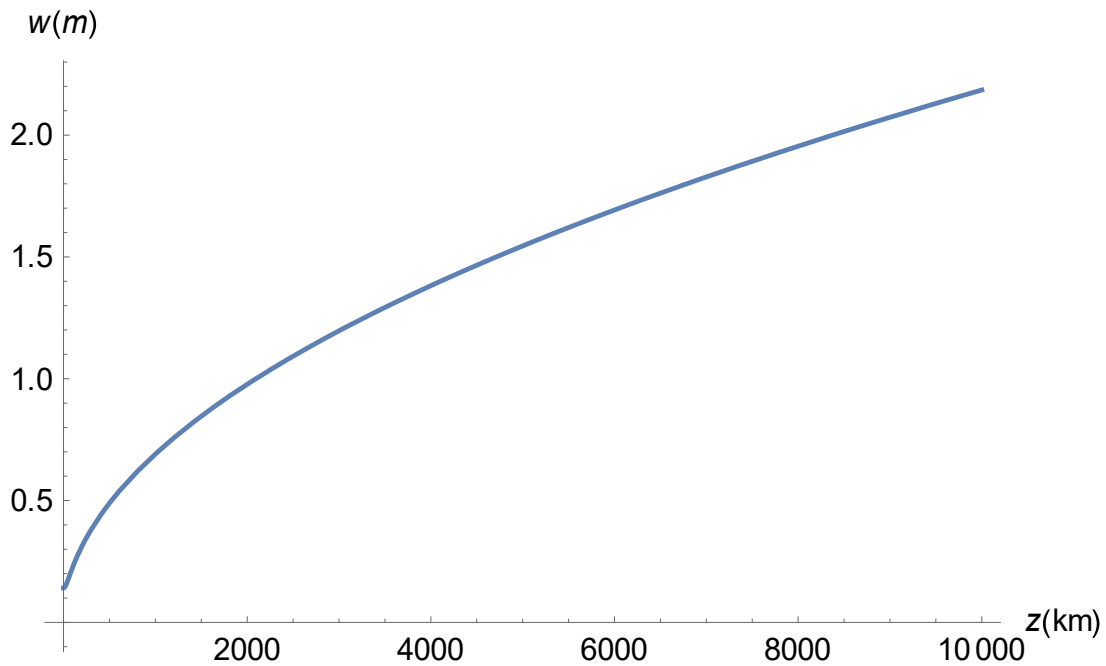
Efikasnost transfera možemo malo povećati na način da snop na početku fokusiramo u neku točku. Na slici 8. prikazujemo rezultat s većom aperturom na samom satelitu stanici (0,3 m). Poboljšanje nije značajno.



Slika 8. Slika prikazuje ovisnost širine gaussijanskog snopa o udaljenosti od lasera. Početni snop je fokusiran tako da je fokus 183 km od samog lasera. Apertura na satelitskoj stanici je 30 cm, tj. na početku je širina snopa 0,3 m, dok je nakon 1000 km 0,6 m odnosno 60 centimetara. (prikaz dobiven u Wolfram Mathematici kodom ustupljenom od strane prof. dr. sc. Hrvoja Buljana)



Na slici 9. prikazana je ovisnost širine Gaussijanskog snopa o udaljenosti od lasera. Početni snop nije fokusiran. Na početku je širina 0,1 m, dok je nakon 10000 km širina snopa preko 2 m. Razvidno je kako su na ovim udaljenostima gubitci uzrokovani difrakcijom značajni.



Slika 9. Slika prikazuje ovisnost širine gaussijanskog snopa o udaljenosti od lasera. Početni snop nije fokusiran. Na početku je širina snopa 0,1 m, dok je nakon 10000 km širina preko 2 m. (prikaz dobiven u Wolfram Mathematici kodom ustupljenom od strane prof. dr. sc. Hrvoja Buljana)

## 8. Diskusija i zaključak

Kao što smo vidjeli, optički snopovi poput Besselovog snopa i OPB mogu se propagirati bez da značajno mijenjaju svoj profil. Međutim, da bismo konstruirali takve snopove u eksperimentima, potrebno je koristiti niz optičkih elemenata poput faznih maski koje kreiraju adekvatan profil snopa u  $z = 0$ . Te bi snopove bilo idealno koristiti kad bi teret tj. oprema potrebna za njihovo kreiranje bila lagana, robusna i nekvarljiva te otporna na svemirske uvjete kao što su zračenje i hladnoća. Nadalje, optički gubitci zbog apsorpcije bi u tim optičkim elementima trebali biti minimalni. To je ujedno i najveći nedostatak korištenja ovih snopova. Zaključno, kod njih je gubitak pri difrakciji minimalan, međutim nedostatak im je dodatan teret za satelitsku stanicu i gubitak zbog optičkih elemenata.

S druge strane, Gaussijanski snopovi ne zahtijevaju optičke elemente za kreiranje specijalnog profila na satelitskoj stanici, ali oni imaju gubitke zbog difrakcije. Analiza pokazuje da se Gaussijan konstruiran s valnom duljinom 1500 nm (infracrvena svjetlost), a koji je na početku širok 10 cm raširi do dimenzija 60 cm tijekom propagacije na 1000 km. Udaljenost satelitske stanice i satelita u pojasu LEO može biti i znatno veća, stoga ovi gubitci nisu zanemarivi, što smo vidjeli u prikazu Slika 9. Prednost djelomičnom rasapu zbog difrakcije može biti i činjenica da je tako lakše pogoditi i pratiti satelit u LEO s laserom. Kod satelita sa malim solarnim panelima 10 cm x 10 cm gubitci su dakle značajni. Kod satelita koji imaju panele s većom površinom tipa 1 m x 1 m oni su znatno manji. Solarni paneli na satelitima su uglavnom standardiziranih veličina.

Na temelju ovog istraživanja, ne možemo sa sigurnošću zaključiti koji bi profil snopa bio bolji. Prednosti i nedostatke imaju i jedni i drugi. No, ukoliko se razvojem optičkih elemenata uspije dobiti lagan i pouzdan sustav koji može stvoriti OPB, a koji je otporan na svemirske uvjete, tada bi takav laserski/optički uređaj mogao biti okosnica za implementaciju ove ideje za napajanje satelita.

## Literatura

- [1] <https://www.nasa.gov/audience/forstudents/5-8>, 08.09.2023.
- [2] What are the importance and uses of Satellites in our life? (05.06.2015.)  
<https://www.online-sciences.com/technology/what-are-the-importance-and-uses-of-satellites-in-our-life/>, 08.09.2023.
- [3] Low Earth Orbit (02.03.2020.)  
[https://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Images/2020/03/Low\\_Earth\\_orbit](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2020/03/Low_Earth_orbit), 08.09.2023.
- [4] low Earth orbit <https://www.britannica.com/technology/low-Earth-orbit>, 08.09.2023.
- [5] Low Earth Orbit [https://en.wikipedia.org/wiki/Low\\_Earth\\_orbit](https://en.wikipedia.org/wiki/Low_Earth_orbit), 08.09.2023.
- [6] Applications of a LEO satellite (19.04.2022.) <https://dragonflyaerospace.com/what-are-some-applications-of-a-leo-satellite/>, 08.09.2023.
- [7] What is a CubeSat & other picosatellites <https://www.nanosats.eu/cubesat>, 08.09.2023.
- [8] Sparkwing Satellite Solar Panels <https://sparkwing.space/satellite-solar-panels/>, 08.09.2023.
- [9] What are SmallSats and CubeSats? <https://www.nasa.gov/content/what-are-smallsats-and-cubesats>, 08.09.2023.
- [10] Paraxial Approximation [https://www.rp-photonics.com/paraxial\\_approximation.html](https://www.rp-photonics.com/paraxial_approximation.html), 08.09.2023.
- [11] Helmholtz equation [https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_equation), 08.09.2023.
- [12] Lasers & Optoelectronics Lecture 8: Gaussian Beams (Cornell ECE4300 Fall 2016)  
<https://www.youtube.com/watch?v=OLczG3zUULQ&list=PLyWzPf87clvEb8T3Xf30tMaUqdbVchrNY>, 15.03.2024.
- [13] Gaussian Beams [https://www.rp-photonics.com/gaussian\\_beams.html](https://www.rp-photonics.com/gaussian_beams.html), 08.09.2023.
- [14] Gaussian Beams, Enrique J. Galvez, Department of Physics and Astronomy Colgate University, 2014. <https://www.colgate.edu/media/5371/download>, 15.03.2024.
- [15] Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory, J. Durnin, 1987.  
<https://opg.optica.org/josaa/fulltext.cfm?uri=josaa-4-4-651&id=2714>, 28.04.2024.
- [16] Bessel Beams: diffraction in a new light, D. McGloin and K. Dholakia, 12.07.2004.  
<https://www.phys.ksu.edu/reu2014/joshuanelson/BesselBeam1.pdf>, 28.04.2024.
- [17] A tale of two beams: Gaussian beams and Bessel beams, Robert L. Nowack, (Siječanj 2009.)  
[https://www.researchgate.net/publication/259910998\\_A\\_Tale\\_of\\_Two\\_Beams\\_Gaussian\\_Beams\\_and\\_Bessel\\_Beams](https://www.researchgate.net/publication/259910998_A_Tale_of_Two_Beams_Gaussian_Beams_and_Bessel_Beams), 28.04.2024.
- [18] Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances, Efremidis, Chen, Segev, Christodoulides (2019) <https://opg.optica.org/optica/fulltext.cfm?uri=optica-6-5-686&id=412689>, 28.04.2024.
- [19] Robust propagation of pin-like optical beam through atmospheric turbulence, APL Photonics 4, 076103 (2019) <https://pubs.aip.org/aip/app/article/4/7/076103/123193/Robust-propagation-of-pin-like-optical-beam>, 28.04.2024.