Takiffova verteks-algebra tipa $A_1^{(1)}$

Ćuže, Iva

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Ćuže

Takiffova verteks-algebra tipa $A_1^{(1)}$

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2024.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Ćuže

Takiffova verteks-algebra tipa $A_1^{(1)}$

DOKTORSKI RAD

Mentor:

doc.dr.sc. Gordan Radobolja

Zagreb, 2024.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Iva Ćuže

Takiff vertex algebra of type $A_1^{(1)}$

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

doc.dr.sc. Gordan Radobolja

Zagreb, 2024.

Zahvala

Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, profesoru Gordanu Radobolji. Hvala na darovanom dragocjenom vremenu, od dana kada ste mi bili asistent pa do danas. Osobito hvala što ste svoje znanje i ideje podijelili sa mnom te strpljivo me vodili, pomagali i savjetovali tijekom izrade ovog rada!

Od srca zahvaljujem profesoru Draženu Adamoviću. Hvala što ste mi omogućili biti članom Seminara za algebru te hvala za sve korisne savjete, lijepe riječi podrške i matematičke diskusije!

Hvala svim članovima Seminara, nastavnicima i profesorima koji su me podučavali matematici, a osobito hvala dragoj profesorici Anki Golemac.

Hvala prijateljici Dariji s kojom je moj period studiranja bio ljepši i brige lakše.

Veliko hvala mojim roditeljima, Venci i Mariji, na nesebičnoj ljubavi, velikoj pomoći te ukazivanju na prave životne vrijednosti i ustrajnost u vjeri. Hvala i mojoj braći, Stipi, Marku i Ivanu.

Na kraju, hvala mojim dečkima, mojim životnim stupovima! Suprugu Mariu na velikoj žrtvi i podršci tijekom izrade ovog rada i našem dječaku Mihaelu što već sedam godina upotpunjuje i uljepšava naš život.

Sažetak

U ovoj disertaciji proučavamo Takiffovu verteks-algebru tipa $A_1^{(1)}$. Na početku konstruiramo vakuum modul $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ za Takiffovu algebru afine Liejeve algebre tipa $A_1^{(1)}$, a zatim $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ opskrbljujemo strukturom verteks-algebre i algebre verteks operatora.

Motivirani rezultatima o bijektivnoj korespondenciji restringiranih modula za afine Liejeve algebre s modulima za univerzalnu afinu verteks-algebru, dokazujemo da su restringirani moduli za Takiffovu algebru afine Liejeve algebre tipa $A_1^{(1)}$ ujedno i moduli za verteks-algebru $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Dodatno, definiramo generalizirani težinski modul, težinski modul i modul najveće težine, kao važne primjere restringiranih modula za Takiffovu algebru afine Liejeve algebre tipa $A_1^{(1)}$.

Algebra verteks operatora $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ je centralnog naboja neovisnog o nivou. Takvo svojstvo imaju algebre verteks operatora pridružene Heisenbergovoj algebri te je dokazano da su sve one međusobno izomorfne za netrivijalne nivoe. U ovoj disertaciji dokazujemo da ista tvrdnja vrijedi za algebre verteks operatora $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ za netrivijalne $k,\bar{k}$.

Nakon konstrukcije neke nove verteks-algebre prirodno je ispitati prostotu. Središnji dio disertacije je posvećen ispitivanju ireducibilnosti vakuum modula $V^{k,k}\left(TA_1^{(1)}\right) := V^{k}\left(TA_1^{(1)}\right)$ iz čega izvodimo zaključak o prostoti. Dokaz se temelji na određivanju Kacove determinante odgovarajuće bilinearne forme, odnosno njenih korijena.

Prilikom detaljnijeg proučavanja verteks-algebre od osobite je važnosti poznavanje njezine Zhuove algebre. Stoga određujemo generatore i relacije te identificiramo Zhuovu algebru $A\left(V^{k}\left(TA_1^{(1)}\right)\right)$.

Na kraju, ispitujemo realizaciju $W(2,2)$ algebre (ili galilejske konformne algebre) u $V^{k}\left(TA_1^{(1)}\right)$.

Ključne riječi: Takiffova algebra, verteks-algebra, algebra verteks operatora, restringirani moduli, Kacova determinanta, Zhuova algebra.

SUMMARY

In this thesis, we study the Takiff vertex algebra of type $A_1^{(1)}$. In the first part of thesis, we construct a vacuum module $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ for the Takiff algebra of the affine Lie algebra of type $A_1^{(1)}$, and then we endow $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ with the structure of the vertex algebra and the vertex operator algebra.

Motivated by the one-to-one correspondence between the restricted modules for affine Lie algebras and modules for the universal affine vertex algebra, we prove that the restricted modules for the Takiff algebra of the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ are exactly modules for the vertex algebra $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. In addition, we define generalized weight module, weight module and highest weght module as important example of restricted modules for the Takiff algebra of the affine Lie algebra of type $A_1^{(1)}$.

The central charge of vertex operator algebra $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ is level-independent. Vertex operator algebras associated to Heisenberg algebra have this property and all of them are isomorphic for nonzero levels. In this thesis, we prove that this is also true for vertex operator algebras $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ for nonzero complex numbers $k, \bar{k}$.

After construction, it is natural to examine simplicity of vertex algebra. The central part of the dissertation is dedicated to studying the irreducibility of the vacuum module $V^{k}\left(TA_1^{(1)}\right)$ from which we derive the conclusion about simplicity. The proof is based on the calculating roots of the Kac determinant of the corresponding bilinear form.

For studying in detail some vertex algebra, it is important to know it's Zhu algebra. So, we define generators and relations and identify the Zhu algebra $A\left(V^{k}\left(TA_1^{(1)}\right)\right)$.

Finally, in the last part of thesis, we study realisation of $W(2,2)$ algebra (or Galilean conformal algebra) in $V^{k}\left(TA_1^{(1)}\right)$.

Key words: Takiff algebra, vertex algebra, vertex operator algebra, restricted modules, Kac determinant, Zhu algebra.

SADRŽAJ

UVOD

Takiffove algebre su algebarske strukture od posebnog interesa za matematičare i fizičare, osobito u zadnje vrijeme. U literaturi iz matematike i fizike nailazimo na različite konstrukcije i nazive istih.

Naziv vuče podrijetlo iz 1971. godine kada je S. J. Takiff, u članku [42], definirao proširenje konačnodimenzionalne Liejeve algebre L, s komutatorskim relacijama $[\cdot,\cdot]_L$, kao vektorski prostor

$$\overline{L} = L \oplus L.$$

Na $\overline{L}$ su relacije za komutator definirane na sljedeći način

$$[(l_1,l_2),(l_1',l_2')] = \left([l_1,l_2']_L + [l_2,l_1']_L, [l_2,l_2']_L\right),$$

za $l_1,l_2,l_1',l_2' \in L$. Dodatno, za bazu $\{x_1,\ldots,x_n\}$ od L, odgovarajuća baza od $\overline{L}$ je

$$\{(x_1,0),\ldots,(x_n,0),(0,x_1),\ldots,(0,x_n)\}.$$

Uočimo da su elementi $(x_1,0),\ldots,(x_n,0)$ međusobno komutativni te da preostali elementi baze djeluju na njih.

1992. M. Raïs and P. Tauvel poopćuje konstrukciju iz Takiffovog članka te tenzoriranjem konačnodimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s kvocijentnim polinomijalnim prstenom definiraju novu algebru

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]/t^{N+1}\mathbb{C}[t],$$

gdje su relacije za komutator definirane s

$$[X \otimes t^r, Y \otimes t^s] = [X,Y] \otimes t^{r+s}.$$

Štoviše, danas je u literaturi ova algebra poznata pod nazivom generalizirana ili N-ta Takiffova algebra ([36]).

2009. godine C. Dong i W. Zhang konstruiraju $W(2,2)$ algebru u članku [45]. Obzirom da je možemo definirati, po uzoru na [40], kao tenzorski produkt

$$Vir \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]/t^2\mathbb{C}[t],$$

no, kako polazna Virasorova algebra Vir nije konačnodimenzionalna, to ovu algebru možemo shvatiti kao beskonačnodimenzionalnu verziju Takiffove algebre pridružene Virasorovoj algebri. Štoviše, možemo reći da je $W(2,2)$ direktna suma Virasorove algebre Vir i njoj adjungirane reprezentacije, po [42]. Ovu algebru su kasnije proučavali i G. Radobolja u članku [38] te D. Adamović i G. Radobolja u člancima [5], [7], [8]. Par godina kasnije, u članku [44], B. J. Wilson proučava *truncated current Lie algebras*. Možemo reći da su te algebre dodatno poopćenje prethodno konstruiranih. Umjesto konačnodimenzionalne Liejeve algebre, kako je to slučaj u [40], definira se proširenje svih Liejevih algebri koje posjeduju trokutastu dekompoziciju, kao što su i afine Kac-Moodyeve algebre, Virasorova algebra i Heisenbergova algebra. A. Babichenko i D. Ridout u članku [14] te T. Quella u članku [37], koriste naziv Takiffova algebra za proširenje konačnodimenzionalnih, ali i beskonačnodimenzionalnih afinih Liejevih algebri te taj naziv preuzimamo i mi u nastavku.

Također je moguće konstruirati Takiffovu algebru metodom proširenja polugrupa čiji opis možemo pronaći u člancima [16], [28].

U člancima [41], [12], [39] se Takiffove algebre nazivaju galilejskim algebrama. Naziv galilejska algebra dolazi iz fizike i odnosi se na algebre koje nastaju metodom galilejske kontrakcije. Iako u konačnici imamo iste algebre, način konstrukcije ovom metodom je potpuno drugačiji od prethodno navedenih konstrukcija Takiffovih algebri. Ukratko, galilejske kontrakcije su metoda kojom počevši od tenzorskog produkta dviju kopija odgovarajuće algebre dobivamo novu algebru koju nazivamo galilejska algebra. Metodu možemo kratko opisati preslikavanjem, (po [41])

$$\mathscr{A} \otimes \overline{\mathscr{A}} \to \mathscr{A}_G, \quad A^{\pm}_{\varepsilon} \mapsto A^{\pm}$$

Procedura je analogna Inönü-Wignerovim kontrakcijama Liejevih algebri, [27].

Uz Takiffovu algebru, jedan od ključnih pojmova ovoga rada je verteks-algebra. Prvi je verteks-algebru precizno i aksiomatski definirao Richard E. Borcherds 1986. godine, u članku

[15]. Kao osnovni primjer verteks-algebre je naveo "moonshine modul" $V^{\natural}$ kojeg su prethodno definirali Igor Frenkel, James Lepowsky i Arne Meurman u članku [23]. Dvije godine kasnije, oni su preinakom Borcherdsove definicije aksiomatski uveli pojam algebre verteks operatora, ([21]). Kasnije su, zbog jednostavnije i lakše provjere aksioma, u literaturi iz teorije verteks-algebri uvedene nove definicije verteks-algebre. U članku [18] možemo pronaći pet ekvivalentnih definicija verteks-algebre, ali i zanimljivi citat I.M. Gelfanda o definiciji verteks-algebre

"I am an old man, and I know that a definition cannot be so complicated."

Navedene strukture imaju važnu ulogu u proučavanju reprezentacija beskonačnodimenzionalnih Liejevih algebri te su od posebnog interesa i za fizičare zbog povezanosti s konformnom teorijom polja i teorijom struna. Među najistaknutijim verteks-algebrama su verteks-algebre pridružene afinim Liejevim algebrama. U članku [24], I. Frenkel i Y.-C. Zhu su prvi konstruirali verteks-algebru pridruženu afinoj Liejevoj algebri $V^k(\mathfrak{g})$, odnosno algebru verteks operatora, te, između ostalog, odredili su i njoj pridruženu Zhuovu algebru. Verteks-algebra pridružena afinoj Liejevoj algebri je predmet proučavanja u mnogobrojnim matematičkim člancima, a posebno ističemo članak [25] u kojemu su dani uvjeti za prostota verteks-algebre $V^k(\mathfrak{g})$. Prethodno navedeni rezultati za verteks-algebru pridruženu afinoj Liejevoj algebri su glavna motivacija našeg rada. Stoga, osnovni ciljevi su nam konstrukcija nove verteks-algebre (i algebre verteks operatora) pridružene Takiffovoj algebri afine Liejeve algebre tipa $A_1^{(1)}$

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right),$$

ispitivanje prostote verteks-algebre te određivanje njoj pridružene Zhuove algebre. Uz to, proučavamo i međusoban odnos algebri verteks operatora $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ obzirom na netrivijalne kompleksne brojeve k i $\bar{k}$ te uvodimo neke $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$-module.

Također, od posebnog interesa za nas su verteks-algebre pridružene W-algebri $W(2,2)$. U članku [45] su W. Zhang i C. Dong prvi konstruirali W-algebru $W(2,2)$ i njoj pridruženu verteks-algebru $L^{W(2,2)}(c_L, c_W)$. Na kraju ispitujemo postojanje podalgebre $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ izomorfne s $L^{W(2,2)}(c_L, c_W)$. Ista je već konstruirana u članku [41], ali primjenom galilejskih kontrakcija. Mi pokazujemo da se postupak može provesti strogim matematičkim pristupom primjenom prethodno dobivenih rezultata u radu.

Spomenuto u nastavku navodimo po sljedećem redoslijedu.

Poglavlje 1: Osnovni pojmovi

U prvom poglavlju, prateći [31], [20], [33], nakon uvođenja formalnog reda potencija, dajemo osnovne definicije iz teorije verteks-algebri, definiramo verteks-algebru i algebru verteks operatora te popratne algebarske pojmove. Navodimo Rekonstrukcijski teorem kao važan alat za konstrukciju verteks-algebre. Zatim navodimo definiciju modula za verteks-algebru i algebru verteks operatora. Na kraju, kao važne motivacijske primjere, opisujemo afinu Liejevu algebru i njezine module, W-algebru $W(2,2)$ te njima pridružene verteks-algebre.

Poglavlje 2: Takiffova verteks-algebra tipa $A_1^{(1)}$

Takiffova algebra afine Liejeve algebre tipa $A_1^{(1)}$ je ključna algebarska struktura u disertaciji, no obzirom da u izvjesnim trenucima postoje odgovarajuće relacije s Takiffovom algebrom klasične Liejeve algebre tipa A_1, na početku dajemo definicije obiju algebri. Po [35], Takiffova $\mathfrak{sl}_2$ algebra je proširenje Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_2$

$$T(A_1) = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z],$$

a po [14], ili kao poseban slučaj algebre u [44], Takiffova algebra afine Liejeve algebre $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ je

$$TA_1^{(1)} = \widehat{\mathfrak{sl}_2} \otimes \mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z].$$

Struktura Liejeve algebre je dana komutatorskim relacijama

$$\left[a \otimes z^i, b \otimes z^j\right] = [a,b] \otimes z^{i+j},$$

gdje su $a,b \in \mathfrak{g}$, $i,j \in \{0,1\}$, a komutator zdesna je komutator na $\mathfrak{g}$, za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ili $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Zatim, motivirani konstrukcijom univerzalne afine verteks-algebre u [24], konstruiramo odgovarajući $TA_1^{(1)}$-modul

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right) = \mathscr{U}\left(TA_1^{(1)}\right) \otimes_{\mathscr{U}\left(TA_1^{(1)}\right)_{\geq 0}} \mathbb{C}_{k,\bar{k}},$$

opisujemo monome koji čine njegovu bazu te definiramo gradaciju na $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Sljedećim tvrdnjama dokazujemo da $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ možemo opskrbiti dodatnim strukturama, strukturom verteks-algebre i algebre verteks operatora.

Teorem (2.2.1)**.** Neka su $k,\bar{k}$ neki fiksni kompleksni brojevi. $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ je $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirana verteks-algebra.

Teorem (2.3.2)**.** Neka je k proizvoljan, a $\bar{k}$ nenula kompleksni broj. $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ je algebra verteks operatora uz konformni vektor dan s (2.7).

Egzistencija strukture algebre verteks operatora je očekivana obzirom na rezultat iz [14], gdje je eksplicitno određen konformni vektor za Takiffove algebre pridružene proizvoljnoj afinoj Liejevoj algebri. Nadalje, definiramo restringirane $TA_1^{(1)}$-module te, po uzoru na Teorem 6.2.12 u [33], dokazujemo sljedeću važnu tvrdnju

Teorem (2.4.3)**.** Neka su $k, \bar{k}$ proizvoljni kompleksni brojevi i R restringirani $TA_1^{(1)}$-modul nivoa $(k, \bar{k})$. Tada na R imamo strukturu $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$-modula, gdje $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ promatramo kao verteks-algebru.

Kao poseban slučaj restringiranih modula, po uzoru na [35], [46], [17] i [44], dajemo definiciju generaliziranog težinskog modula i težinskog modula. Definiramo i konstruiramo module najveće težine. Obzirom na prethodni teorem, navodimo ih kao istaknute primjere $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$-modula.

Na kraju, motivirani svojstvom algebre verteks operatora pridružene Heisenbergovoj algebri, iz Propozicije 6.3.10 u [33], dokazujemo sljedeću tvrdnju

Propozicija (2.5.1)**.** Neka su $k, \bar{k}$ nenula kompleksni brojevi. Tada postoji izomorfizam algebri verteks operatora između $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ i $V^{k,k}(TA_1^{(1)})$.

Zbog toga je umjesto $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ dovoljno proučavati $V^{k,k}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Zbog jednostavnosti, označavat ćemo je s V^k.

Poglavlje 3: Prostota verteks-algebre V^k

Važan problem u teoriji reprezentacija je određivanje kriterija ireducibilnosti. U [32] je dan kriterij ireducibilnosti Vermaovog modula pridruženog Virasorovoj algebri $V(c,h)$. Kriterij proizlazi iz proučavanja determinante D_n, $n \in \mathbb{N}$, matrica restrikcije odgovarajuće bilinearne forme na svojstvene $L(0)$-potprostore, poznate kao Kacova determinanta, te glasi:
ako je $D_n \neq 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, onda je $V(c,h)$ ireducibilan modul.
Cilj ovog poglavlja je dokazivanje prostote verteks-algebre V^k. B. J. Wilson daje opći kriterij reducibilnosti Vermaovih modula za *truncated current Lie algebras*, od kojih je Takiffova algebra poseban slučaj, za široku klasu Liejevih algebri (Kac-Moodyeve Liejeve algebre, Heisenbergova algebra i Virasorova algebra). Mi ćemo u ovom poglavlju promatrati kvocijent

Vermaovog modula, točnije vakuum modul $V^{k,k}\left(TA_1^{(1)}\right)$, kojeg ćemo označavati u nastavku s $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$ te dajemo dokaz u našem slučaju.

Dokaz provodimo po uzoru na prethodno spomenutu metodu u [32]. Na početku definiramo kontragredijentni modul adjungiranog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$ i bilinearnu formu

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V^k\left(TA_1^{(1)}\right)\times V^k\left(TA_1^{(1)}\right)\to\mathbb{C}$$

definiranu s

$$\langle \mathbf{1}\mid\mathbf{1}\rangle = 1,$$
$$\langle X\mathbf{1}\mid Y\mathbf{1}\rangle = \langle\mathbf{1}\mid X^*Y\mathbf{1}\rangle.$$

Posljedica invarijantnosti navedene forme je ortogonalnost homogenih komponenti $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)_{(r)}$ i $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)_{(s)}$, za $r\neq s$, zbog čega proučavamo restrikciju forme na $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)_{(s)}$, koju ćemo zbog jednostavnosti označavati s $V_{(s)}$. Zbog jednostavnijeg zapisa matrice forme uvodimo nove potprostore $V_{(s)}^i$ s bazom sačinjenom od baznih monoma potprostora $V_{(s)}$ čiji je stupanj komutativnog dijela monoma i. Uvodimo uređaj na odabranoj bazi obzirom na stupanj komutativnog dijela monoma i izvodimo zaključke o matrici forme $\langle V_{(s)}\mid V_{(s)}\rangle$. Dokazujemo tvrdnju

Lema (3.1.5)**.** Ako je $i+j>s$, onda je

$$\langle V_{(s)}^i\mid V_{(s)}^j\rangle = 0.$$

kojom pokazujemo da je $\langle V_{(s)}\mid V_{(s)}\rangle$ blok-gornjetrokutasta i njezina determinanta jednaka produktu determinanti matrica $\langle V_{(s)}^d\mid V_{(s)}^{s-d}\rangle$, za $d\in\{0,\dots,s\}$. No, matrica forme $\langle V_{(s)}^d\mid V_{(s)}^{s-d}\rangle$ se rastavlja na tenzorski produkt

$$\langle V_{(s)}^d\mid V_{(s)}^{s-d}\rangle = \langle V_{(s-d)}^0\mid V_{(s-d)}^{s-d}\rangle\otimes\langle V_{(d)}^0\mid V_{(d)}^d\rangle. \tag{1}$$

te nultočke determinante početne forme možemo razaznati proučavanjem determinante matrice $\langle V_{(s)}^0|V_{(s)}^s\rangle$. Sljedećom tvrdnjom dokazujemo da je matrica $\langle V_{(s)}^0|V_{(s)}^s\rangle$ blok-gornjetrokutasta, a dijagonalni elementi su višekratnici od k.

Korolar (3.1.8)**.** Matrica $\langle V_{(s)}^0\mid V_{(s)}^s\rangle$ je gornjetrokutasta, s dijagonalnim elementima oblika mk^r, za neke $m,r\in\mathbb{N}$.

Iz čega direktno slijedi teorem

Teorem (3.1.9)**.** Verteks-algebra V^k je prosta za svaki $k\neq 0$.

Poglavlje 4: Zhuova algebra $A\left(V^k\right)$

Asocijativnu algebru $A(V)$ pridruženu verteks-algebri V konstruirao je Yongchang Zhu 1996. godine, [47]. Zhuove algebre su važan dio teorije verteks-algebri i važan alat za proučavanje modula za verteks-algebru V. Proučavane su u brojnim člancima, neki od njih su [24], [43], [19], [1], [4], [3], [9].

Glavni cilj poglavlja je odrediti Zhuovu algebru verteks-algebre V^k. Na početku navodimo osnovne definicije i svojstva iz teorije Zhuovih algebri dane u [47]. Služeći se člankom [1] određujemo generatore Zhuove algebre, a zatim po uzoru na Teorem 3.1.1. članka [24], u kojem je dokazano da je Zhuova algebra univerzalne afine algebre verteks operatora nivoa k $A(V^k(\mathfrak{g}))$ izomorfna univerzalnoj omotačkoj algebri $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, iskazujemo i dokazujemo sljedeću važnu tvrdnju u našem slučaju

Teorem (4.2.1)**.** Zhuova algebra $A\left(V^k\right)$ je izomorfna $\mathscr{U}(TA_1)$.

Dokaz tvrdnje je jednostavno proširenje dokaza Teorema 3.1.1. u [24]. Zbog bijektivne korespondencije između klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija neke verteks-algebre V i klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija od $A(V)$, [47], po prethodnom teoremu, proučavanje ireducibilnih modula za verteks-algebru V^k možemo pojednostaviti proučavanjem ireducibilnih $\mathscr{U}(TA_1)$-modula.

Poglavlje 5: Verteks podalgebra od V^k

U članku [41], J. Rasmussen i C. Raymond počevši od tenzorskog produkta Virasorove algebre Vir centralnog naboja c, i njene kopije $\overline{Vir}$ centralnog naboja $\overline{c}$, primjenom galilejskih kontrakcija konstruiraju algebru generiranu s T^+ i T^- centralnih naboja c^+ i c^- takvu da za polja $T^\pm = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^\pm z^{-n-2}$ vrijede komutatorske relacije

$$[L_n^+, L_m^\pm] = (n-m)L_{n+m}^\pm + \frac{c^\pm}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0},\ [L_n^-, L_m^-] = 0.$$

Štoviše, u [41] su konstruirani generatori galilejske konformne algebre preko generatora galilejske afine algebre. Kao što vidimo iz definicije, galilejska konformna algebra je u matematičkoj literaturi poznata kao $W(2,2)$-algebra.

U ovom poglavlju strogo matematički određujemo, bez primjene galilejskih kontrakcija, podalgebru od V^k izomorfnu $L^{W(2,2)}(c_L, c_W)$. Iz rezultata prethodnih poglavlja ove disertacije proizlaze vektori

$$\omega = \frac{1}{2k}e(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}f(-1)\overline{e}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}\overline{e}(-1)f(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}\overline{f}(-1)e(-1)\mathbf{1}$$
$$+ \frac{1}{2k}\overline{h}(-1)h(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{k^2}\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{4k^2}\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1}$$

i

$$\overline{\omega} = \frac{1}{k}\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{4k}\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1}$$

centralnih naboja $c = 6$ i $\overline{c} = 0$, koji generiraju podalgebru od V^k izomorfnu $L^{W(2,2)}(6,0)$.

1. Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije iz teorije afinih Liejevih algebri kao i teorije verteks-algebri i algebri verteks operatora, prateći [31], [20], [33]. Nakon uvođenja formalnog reda potencija, dajemo osnovne definicije iz teorije verteks-algebri i teorije reprezentacija. Dodatno, navodimo primjere nekih beskonačnodimenzionalnih Liejevih algebri, afine Liejeve algebre i $W(2,2)$ algebre, te primjere verteks-algebri koji su od posebne važnosti u nastavku.

1.1. Formalni red potencija

Na početku odjeljka uvedimo pojam formalnog reda potencija i neke važne primjere istog, prateći [20], [33].

Definicija 1.1.1. Neka je R $\mathbb{C}$-algebra. Formalni red potencija (ili formalna distribucija) u varijablama $z_1,\dots,z_n$ je proizvoljni (konačni ili beskonačni) red

$$a(z_1,\dots,z_n)=\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\cdots\sum_{i_n\in\mathbb{Z}}a_{i_1,\dots,i_n}z_1^{i_1}\dots z_n^{i_n},$$

gdje je svaki $a_{i_1,\dots,i_n}\in R$.

Ovi redovi tvore vektorski prostor kojeg označavamo s $R[[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]]$. Produkt dva formalna reda potencije $p(z_1,\dots,z_n)\in R[[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]]$ i $q(w_1,\dots,w_m)\in R[[w_1^{\pm1},\dots,w_m^{\pm1}]]$ je dobro definirani element iz $R[[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1},w_1^{\pm1},\dots,w_m^{\pm1}]]$.
Općenito, produkt dva elementa od $R[[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]]$ nema smisla jer su koeficijenti u produktu beskonačne sume koeficijenta pribrojnika. No, produkt formalnih redova potencija $a(z_1,\dots,z_n)=\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\dots\sum_{i_n\in\mathbb{Z}}a_{i_1,\dots,i_n}z_1^{i_1}\dots z_n^{i_n}$, za koje je $a_{i_1,\dots,i_n}=0$ osim za konačno mnogo n-torki $(i_1,\dots,i_n)$ (tj. Laurentovi polinomi) je uvijek dobro definiran.
U nastavku koristimo vektorski prostor formalnih Laurentovih redova

$$R[[z^{\pm1}]]=\{\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_iz^i\mid a_i\in R\}$$

i njegove potprostore:

$$R[[z]] = \{ \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i z^i \mid a_i \in R \}$$

(prostor formalnih Taylorovih redova)

$$R[z] = \{ \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i z^i \mid a_i \in R, a_n = 0 \text{ za sve osim konačno mnogo } n \}$$

(prostor Taylorovih polinoma),

$$R[z^{\pm 1}] = \{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i \mid a_i \in R, a_n = 0 \text{ za sve osim konačno mnogo } n \}$$

(prostor Laurentovih polinoma),

$$R((z)) = \{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i \mid a_i \in R, a_n = 0 \text{ za } n \ll 0 \}$$

(prostor *krnjih formalnih Laurentovih redova*).

Definicija 1.1.2. Za dani formalni red potencija u jednoj varijabli, $a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i$, definiramo formalnu derivaciju

$$\frac{d}{dz} a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i a_i z^{i-1}$$

U nastavku ćemo umjesto $\frac{d}{dz} a(z)$ pisati $a'(z)$.

Definicija 1.1.3. Za dani formalni red potencija u jednoj varijabli, $a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i$, definiramo operator Res_z s $R[[z^{\pm 1}]]$ na R, na sljedeći način

$$\mathrm{Res}_z \, a(z) = a_{-1}.$$

Nazivamo ga formalni reziduum formalnog reda $a(z)$.

Po definiciji formalnog reziduuma formalnog reda $a(z)$ slijedi

$$\mathrm{Res}_z \, a'(z) = 0.$$

Prema tome, kada je produkt $a(z)b(z)$ definiran, tada vrijedi

$$\mathrm{Res}_z \left(a'(z) b(z) \right) = -\mathrm{Res}_z \left(a(z) b'(z) \right).$$

Neki važni primjeri formalnih redova potencija su binomni red i formalna delta funkcija. Definirajmo ih.

- Binomni red

$$(x+y)^n = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

gdje je $n \in \mathbb{Z}$ i $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Spomenimo, $(x+y)^n = (y+x)^n$, ako je $n \geq 0$, ali $(x+y)^n \neq (y+x)^n$,ako je $n < 0$.

- Formalna delta-funkcija

$$\delta(z-w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m w^{-m-1}.$$

Formalna delta-funkcija ima mnogo lijepih svojstava, ali istaknimo samo ono koje koristimo u nastavku

$$(z-w)^{n+1}\partial_w^n \delta(z-w) = 0, \text{ za } n \geq 0.$$

1.2. TEORIJA VERTEKS-ALGEBRI

U ovom odjeljku navodimo definiciju verteks-algebre, algebre verteks operatora, njima pridruženih modula i ostale algebarske pojmove koji se spominju u nastavku, prateći [33], [30].

1.2.1. Verteks-algebre i algebre verteks operatora

Definicija 1.2.1 ([33]). Verteks-algebra je uređena trojka $(V, Y, \mathbf{1})$, gdje je V vektorski prostor, $\mathbf{1} \in V$ istaknuti vektor (vakuum vektor) i Y linearno preslikavanje

$$Y(\cdot, z) \colon V \to (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]],$$

$$a \mapsto Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

tako da za $a, b \in V$ vrijede aksiomi:

- aksiom skraćenja ili anihilacije

$$a_n b = 0,$$

za n dovoljno velik, odnosno

$$Y(a, z)v \in V((z)),$$

- aksiom vakuuma

$$Y(\mathbf{1}, z) = \mathrm{Id}_V,$$

- aksiom stvaranja ili kreacije

$$Y(a, z)\mathbf{1} \in V[[z]] \text{ i } \lim_{z \to 0} Y(a, z)\mathbf{1} = a,$$

- Jacobijev identitet

$$z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(a, z_1) Y(b, z_2) - z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(b, z_2) Y(a, z_1)$$

$$= z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y\left(Y(a, z_0) b, z_2\right).$$

Red $Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ nazivamo verteks operatorom ili poljem pridruženim vektoru a.

Kada je iz konteksta jasno, verteks-algebru $(V, Y, \mathbf{1})$ ćemo označavati s V.

Kao posljedicu Jacobijevog identiteta imamo sljedeće važne formule:

- formula za komutator

$$[a_m, b_n] = \sum_{i\geq 0} \binom{m}{i} (a_i b)_{m+n-i},$$

za $m, n \in \mathbb{Z}$,

- formula za n - ti produkt

$$(a_m b)_n = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{m}{i} (a_{m-i} b_{n+i} - (-1)^m b_{m+n-i} a_i),$$

za $m, n \in \mathbb{Z}$.

Dodatno, ako vrijede aksiomi skraćenja, vakuuma i stvaranja, onda je Jacobijev identitet ekvivalentan sljedećim aksiomima:

- aksiom derivacije

$$[D, Y(a,z)] = Y(Da, z) = \frac{d}{dz} Y(a,z),$$

gdje je $D \in \operatorname{End} V$ operator derivacije definiran s $D(a) = a_{-2}$, za $a \in V$,

- lokalnost za sve $a, b \in V$ postoji $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takav da vrijedi

$$(z_1 - z_2)^k [Y(a, z_1), Y(b, z_2)] = 0.$$

Jedna važna posljedica definicije verteks algebre je

- kosa simetrija

$$Y(a,z)b = e^{zD} Y(b, -z)a,$$

gdje je $D \in \operatorname{End} V$ operator derivacije, a a i b elementi verteks-algebre V.

Definicija 1.2.2. Algebra verteks operatora je $\mathbb{Z}$-graduirani vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{(n)}$$

gdje za $v \in V_{(n)}$ kažemo da je vektor težine n, takav da je

$$\dim V_{(n)} < \infty, \text{ za } n \in \mathbb{Z},$$

$$V_{(n)} = 0, \text{ za } n \text{ dovoljno negativan}.$$

Nadalje, opskrbljen je strukturom verteks-algebre $(V,Y,\mathbf{1})$ i istaknutim homogenim vektorom ω (konformnim vektorom) težine 2 koji zadovoljava relacije Virasorove algebre

$$[L(m),L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c_V,$$

za $m,n \in \mathbb{Z}$, gdje je

$$Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2},$$

tj. $L(n) = \omega_{n+1}$, za $n \in \mathbb{Z}$ i $c_V \in \mathbb{C}$ (centralni naboj od V). Dodatno vrijedi

$$L(0)v = nv,$$

za $n \in \mathbb{Z}$ i $v \in V_{(n)}$ te

$$Y(L(-1)v,z) = \frac{d}{dz}Y(v,z).$$

Također, kada je iz konteksta jasno, algebru verteks operatora $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ ćemo označavati s V.

Definicija 1.2.3 ([20]). Vektor A iz algebre verteks operatora V nazivamo primarnim težine $\Delta \in \mathbb{Z}_+$ ako je

$$L(n)A = 0, \text{ za } n > 0, \text{ i } L(0)A = \Delta A. \tag{1.1}$$

Nadalje navodimo neke važne algebarske pojmove pridružene verteks-algebrama, koji se prirodno proširuju za algebre verteks operatora.

Definicija 1.2.4. Verteks podalgebra verteks-algebre $(V,Y,\mathbf{1})$ je vektorski potprostor U od V takav da je $\mathbf{1} \in U$ i $(U,Y,\mathbf{1})$ je verteks-algebra.

Od posebne su važnosti verteks-algebre generirane skupom. Neka je S podskup verteks-algebre V. Verteks podalgebra $\langle S\rangle$ generirana skupom S je najmanja verteks podalgebra od V koja sadrži S, tj. $\langle S\rangle$ je presjek svih verteks podalgebri od V koje sadrže S.

Propozicija 1.2.5. Neka je S podskup verteks-algebre V. Tada vrijedi

$$\langle S\rangle = \operatorname{span}\{a^1_{n_1}\dots a^r_{n_r}\mathbf{1} : r \geq 0, a^i \in S, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Definicija 1.2.6. Kažemo da je $\langle S\rangle$ jako generirana skupom S ako vrijedi

$$\langle S\rangle = \operatorname{span}\{a^1_{n_1}\dots a^r_{n_r}\mathbf{1} : r \geq 0, a^i \in S, n_i \in \mathbb{Z}_{<0}\}.$$

Ako je $\langle S\rangle = V$ kažemo da je V (jako) generiran skupom S.

Definicija 1.2.7. Ideal verteks-algebre V je potprostor I takav da za sve $a \in V$ i $b \in I$ vrijedi

$$Y(a,z)b \in I((z)) \text{ i } Y(b,z)a \in I((z)),$$

odnosno, $a_n b \in I$ i $b_n a \in I$, za $n \in \mathbb{Z}$.

Zbog svojstva kose simetrije uvjet $Y(a,z)b \in I((z))$ je ekvivalentan uvjetu $Y(b,z)a \in I((z))$. Ako je V netrivijalna verteks-algebra i V njezin jedini netrivijalni ideal, onda kažemo da je V prosta.

Definicija 1.2.8. Neka su $(V_1, Y, \mathbf{1})$ i $(V_2, Y, \mathbf{1})$ verteks-algebre. Homomorfizam verteks-algebri je linearno preslikavanja $f\colon V_1 \to V_2$ takvo da je

$$f(Y(a,z)b) = Y(f(a),z)f(b), \text{ za } a,b \in V_1,$$

odnosno $f(a_n b) = f(a)_n f(b),$ za $a,b \in V_1, n \in \mathbb{Z}$ i $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Definicija 1.2.9. Neka su $(V_1, Y_1, \mathbf{1}, \omega_1)$ i $(V_2, Y_2, \mathbf{1}, \omega_2)$ algebre verteks operatora. Homomorfizam algebri verteks operatora je homomorfizam verteks-algebri $f\colon V_1 \to V_2$ za kojeg vrijedi $f(\omega_1) = \omega_2$.

Konstrukcija verteks-algebri

Verteks-algebru možemo konstruirati na više načina, a jedan od njih je primjenom teorije lokalnih polja. Navedimo osnovni teorem koji nam omogućava konstrukciju verteks-algebre, tzv. teorem o generirajućim poljima. Teorem opisuje konstrukciju verteks-algebre u kojoj se od danog vektorskog prostora V opskrbljenog vektorom, koji će imati ulogu vakuum vektora, i skupom međusobno lokalnih verteks operatora, uz određena svojstva, dobiva struktura verteks-algebre. Detalji se mogu pronaći u [20] ili [31].

Teorem 1.2.10 (Rekonstrukcijski teorem - jaka forma)**.** [20] Neka je V vektorski prostor, $\mathbf{1}$ nenula vektor, $D \in \mathrm{End}(V)$. Neka je S prebrojivi uređeni skup i $\{a^\alpha\}_{\alpha \in S}$ kolekcija vektora iz V i neka su dana polja

$$a^\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^\alpha z^{-n-1}$$

za koja vrijede sljedeći uvjeti:

1. za svaki α, $a^\alpha(z)\mathbf{1} = a^\alpha + z(\cdots)$,
2. $D\mathbf{1} = 0$ i $[D, a^\alpha(z)] = \partial_z a^\alpha(z)$, za sve α,

3. sva polja $a^{\alpha}(z)$ su međusobno lokalna,

4. V je razapet vektorima
$$a^{\alpha_1}_{j_1}\cdots a^{\alpha_m}_{j_m}\mathbf{1},$$
za $j_i \in \mathbb{Z}_{<0}$.

Tada se ova struktura zajedno s verteks operatorom definiranim s
$$Y(a^{\alpha_1}_{j_1}\cdots a^{\alpha_m}_{j_m}\mathbf{1},z) = \frac{1}{(-j_1-1)!\cdots(-j_m-1)!} : \partial_z^{-j_1-1}a^{\alpha_1}(z)\cdots\partial_z^{-j_m-1}a^{\alpha_m}(z) :$$
proširuje do strukture verteks-algebre na V.

Napomena 1.2.11. Prethodni teorem je iskazan u jakoj formi. Tvrdnja vrijedi općenitije, za sve $j_i \in \mathbb{Z}$. U tom slučaju, familiju polja verteks-algebre V koji zadovoljavaju četvrti uvjet nazivamo generirajućim skupom polja od V. Inače, za $j_i < 0$, nazivamo ih jakim generirajućim skupom polja od V, [31].

1.2.2. Moduli za verteks-algebre i algebre verteks operatora

Navedimo sada definiciju modula za verteks-algebru i algebru verteks operatora.

Definicija 1.2.12 ([33]). Modul za verteks-algebru $(V,Y,\mathbf{1})$ je uređeni par (M,Y_M) gdje je M vektorski prostor, a Y_M linearno preslikavanje
$$Y_M(\cdot,z)\colon V \to (\operatorname{End} M)\left[\left[z,z^{-1}\right]\right],$$
određeno pridruživanjem
$$a \mapsto Y_M(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$
tako da za $a,b \in V$ i $m \in M$ vrijede sljedeći aksiomi

- (aksiom skraćenja ili anihilacije)
$$a_n m = 0,$$
za n dovoljno velik, ili ekvivalentno
$$Y(a,z)m \in M((z)),$$

- (aksiom vakuuma)
$$Y_M(\mathbf{1},z) = \mathrm{Id}_M,$$

- (Jacobijev identitet)

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y_M(a,z_1)Y_M(b,z_2)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y_M(b,z_2)Y_M(a,z_1)$$
$$=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y_M(Y(a,z_0)b,z_2).$$

Umjesto oznake (M,Y_M), ćemo u nastavku pisati samo V-modul M.

Verteks-algebra V je očigledno V-modul i kao takvu je nazivamo adjungiranim modulom.

Definicija 1.2.13 ([33]). Neka je $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ algebra verteks operatora. Kažemo da je (M,Y_M) modul za algebru verteks operatora V ako je (M,Y_M) modul za verteks algebru $(V,Y,\mathbf{1})$ te

$$M=\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}}M_{(\alpha)}$$

gdje je

$$M_{(\alpha)}=\{m\in M\mid L(0)m=\alpha m\},$$

potprostor od M sadržan od vektora težine α za kojeg vrijedi

- $\dim M_{(\alpha)}<\infty$, za sve $\alpha\in\mathbb{C}$,
- $M_{(\alpha)}=0$ za dovoljno malen $\mathrm{Re}\,\alpha$.

1.3. LIEJEVE ALGEBRE I MODULI

1.3.1. Afine Liejeve algebre i moduli

U ovom pododjeljku ćemo, prateći [30] i [33], dati kratki osvrt na afinu Liejevu algebru i njoj pridružene module koji su od posebne važnosti u nastavku.

Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta konačno-dimenzionalna Liejeva algebra s trokutastom dekompozicijom

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

te neka je na $\mathfrak{g}$ definirana nedegenerirana simetrična invarijantna bilinearna forma $(\cdot|\cdot)$, točnije normalizirana Killingova forma. Uređenom paru $(\mathfrak{g}, (\cdot|\cdot))$ pridružujemo afinu Liejevu algebru

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

Struktura Liejeve algebre na $\widehat{\mathfrak{g}}$ je dana relacijama

$$[a \otimes t^m, b \otimes t^n] = [a, b] \otimes t^{m+n} + m(a|b)\delta_{m+n,0}K, \tag{1.2}$$

$$[K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0, \tag{1.3}$$

za $a, b \in \mathfrak{g}$, i $m, n \in \mathbb{Z}$. Prirodnim proširenjem na $\widehat{\mathfrak{g}}$ definiramo afinu Kac-Moodyjevu algebru

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d$$

gdje je struktura Liejeve algebre dana komutacijskim relacijama (1.2) i (1.3) te dodatno vrijede relacije

$$[d, a \otimes t^m] = ma(m),$$

$$[d, K] = 0,$$

za $a \in \mathfrak{g}$ i $m \in \mathbb{Z}$.
Trokutasta dekompozicija od $\widehat{\mathfrak{g}}$ je

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{n}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_+ \tag{1.4}$$

gdje je

$$\widehat{\mathfrak{n}}_- = \left(t^{-1}\mathbb{C}\left[t^{-1}\right] \otimes (\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h})\right) + \mathbb{C}\left[t^{-1}\right] \otimes \mathfrak{n}_-,$$

$$\widehat{\mathfrak{n}}_+ = (t\mathbb{C}[t] \otimes (\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})) + \mathbb{C}[t] \otimes \mathfrak{n}_+$$

i

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K$$

Cartanova podalgebra od $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Afinoj Liejevoj algebri pridružuje se posebna klasa modula.

Definicija 1.3.1. $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul M nazivamo težinskim ako je djelovanje od $\widehat{\mathfrak{h}}$ na M poluprosto, tj. postoji dekompozicija

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} M_\lambda,$$

gdje je

$$M_\lambda = \{v \in M \mid h.v = \lambda(h)v, h \in \widehat{\mathfrak{h}}\}.$$

Skup $\{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^* \mid M_\lambda \neq 0\}$ nazivamo skupom težina modula M, a nenula vektor $v \in M_\lambda$ težinskim vektorom težine λ.

Definirajmo jednu važnu klasu težinskih modula.

Definicija 1.3.2. $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul M nazivamo modulom najveće težine s najvećom težinom $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ ako postoji nenula vektor $v_\Lambda \in M$ takav da vrijedi

1. $\widehat{\mathfrak{n}}_+.v_\Lambda = 0$,
2. $h.v_\Lambda = \Lambda(h)v_\Lambda$, $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$,
3. $\mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{n}}_-).v_\Lambda = M$.

Vektor v_Λ nazivamo vektorom najveće težine.

Za svaku težinu $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ postoji modul najveće težine čija je najveća težina Λ. Konstruiramo ga na sljedeći način.

Neka je $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ i $\mathbb{C}v_\Lambda$ jednodimenzionalni vektorski prostor razapet vektorom v_Λ. $\mathbb{C}v_\Lambda$ je $\widehat{\mathfrak{n}}_+ \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$-modul s djelovanjem definiranim na sljedeći način

$$\widehat{\mathfrak{n}}_+.v_\Lambda = 0 \text{ i } h.v_\Lambda = \Lambda(h)v_\Lambda,$$

za svaki $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$. Inducirani $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul

$$M(\Lambda) = \widehat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{n}}_+ \oplus \widehat{\mathfrak{h}})} \mathbb{C}v_\Lambda$$

nazivamo Vermaovim modulom najveće težine Λ. Moguće je konstruirati $M(\Lambda)$ preko generatora i relacija ([26]).

1.3.2. Klasične Liejeve algebre

U ovom pododjeljku dajemo definicije klasičnih (konačnih i afinih) Liejevih algebri.

Klasične konačne Liejeve algebre

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor dimenzije n i

$$\operatorname{End} V = \{\phi \mid \phi \colon V \to V \text{ linearni operator}\}$$

asocijativna algebra. Njoj pripadnu Liejevu algebru označavamo s $\mathfrak{gl}(V)$. Ako promatramo asocijativnu algebru svih kvadratinih matrica reda $n \times n$, u oznaci $M_n(\mathbb{C})$, njoj pripadnu Liejevu algebru označavamo s $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Odabirom odgovarajuće baze za V imamo izomorfizam Liejevih algebri $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Obje nazivamo općom linearnom Liejevom algebrom. Podalgebre opće linearne Liejeve algebre nazivamo linearnim Liejevim algebrama. Istaknimo sada neke posebne linearne Liejeve algebre, koje nazivamo klasičnim Liejevim algebrama.

- Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor dimenzije $n+1$. Definiramo

  $$\mathfrak{sl}(V) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \operatorname{Tr} x = 0\}.$$

  Analogno,

  $$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}) := \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} X = 0\}.$$

  Obje Liejeve algebre nazivamo Liejevom algebrom tipa A_n. U literaturi ih također nalazimo pod nazivom specijalna linearna Liejeva algebra.

- Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor dimenzije $2n$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ nedegenerirana antisimetrična bilinearna forma definirana matricom forme

  $$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

  Definiramo

  $$\mathfrak{sp}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \langle xv, w\rangle = -\langle v, xw\rangle, v, w \in V\}.$$

  Analogno,

  $$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid SX = -X^t S\}.$$

  Obje Liejeve algebre nazivamo Liejevom algebrom tipa C_n. U literaturi ih također nalazimo pod nazivom simplektička Liejeva algebra.

- Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor dimenzije $2n+1$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{C}$ nedegenerirana simetrična bilinearna forma definirana matricom forme

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_n\\ 0 & I_n & 0\end{pmatrix}.$$

  Definiramo

$$\mathfrak{o}(V)=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid\langle xv,w\rangle=-\langle v,xw\rangle,v,w\in V\}.$$

  Analogno,

$$\mathfrak{o}(2n+1,\mathbb{C}):=\{X\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})\mid SX=-X^tS\}.$$

  Obje Liejeve algebre nazivamo Liejevom algebrom tipa B_n. U literaturi ih također nalazimo pod nazivom ortogonalna Liejeva algebra.

- Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor dimenzije $2n$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{C}$ nedegenerirana simetrična bilinearna forma definirana matricom forme

$$S=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}.$$

  Definiramo

$$\mathfrak{o}(V)=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid\langle xv,w\rangle=-\langle v,xw\rangle,v,w\in V\}.$$

  Analogno,

$$\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C}):=\{X\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})\mid SX=-X^tS\}.$$

  Obje Liejeve algebre nazivamo Liejevom algebrom tipa D_n.

Postupkom afinizacije klasičnih konačnih Liejevih algebri tipa X_n, za $X\in\{A,B,C,D\}$, dobivamo klasične afine Liejeve algebre tipa $X_n^{(1)}$. Od posebnog interesa u nastavku će biti Liejeva algebra tipa A_1, odnosno, njoj pridružena afina Liejeva algebra tipa $A_1^{(1)}$. Bavit ćemo se proučavanjem posebnih verteks-algebri pridruženih afinoj Liejeva algebra tipa $A_1^{(1)}$. Glavna motivacija za veliki dio rada proizlazi iz svojstava univerzalne afine verteks-algebre, a u zadnjem dijelu rada koristimo verteks-algebru pridruženu W-algebri $W(2,2)$, stoga ćemo u sljedećem odjeljku ukratko opisati obje.

1.4. PRIMJERI VERTEKS-ALGEBRI

U ovom odjeljku navodimo primjere verteks-algebri koje su od posebne važnosti u nastavku disertacije, verteks-algebru pridruženu afinoj Liejevoj algebri i verteks-algebru pridruženu W-algebri $W(2,2)$.

1.4.1. Verteks-algebra pridružena afinoj Liejevoj algebri

Važna klasa verteks-algebri su afine verteks-algebre. U ovom pododjeljku opisujemo konstrukciju afine verteks-algebre, odnosno algebre verteks operatora pridružene afinoj Liejevoj algebri prateći [33] i [20]. Slično kao u prethodnom odjeljku konstruiramo inducirani $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul, ali definirajući drugačiju trokutastu dekompoziciju za $\widehat{\mathfrak{g}}$ od one koja je dana u (1.4). $\mathbb{Z}$-gradacija na afinoj Liejevoj algebri $\widehat{\mathfrak{g}}$ je definirana na sljedeći način

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{(n)},$$

gdje je

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K \text{ i } \widehat{\mathfrak{g}}_{(n)} = \mathfrak{g} \otimes t^n, \text{ za } n \neq 0.$$

Istaknimo posebne graduirane podalgebre od $\widehat{\mathfrak{g}}$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\pm} = \mathfrak{g} \otimes t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^{\pm 1}],$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0} = \widehat{\mathfrak{g}}_{+} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K.$$

U tom slučaju je

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}}_{-} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{+}.$$

Za element $a \in \mathfrak{g}$ definiramo formalni red potencija

$$a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a \otimes t^n) z^{-n-1} \in \widehat{\mathfrak{g}}\left[\left[z, z^{-1}\right]\right].$$

Za dani $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul, s $a(n)$ ćemo označavati operator $a \otimes t^n$. Također, za djelovanje izraza $a(z)$ na $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul M, ćemo koristiti istu notaciju.

$$a_M(z) = a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) z^{-n-1} \in (\operatorname{End} M)\left[\left[z, z^{-1}\right]\right].$$

Promotrimo sada posebnu klasu $\widehat{\mathfrak{g}}$-modula.

Definicija 1.4.1. Za $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul M kažemo da je restringiran ako za svaki $a \in \mathfrak{g}$ i $v \in M$ je $a(n)v = 0$, za n dovoljno velik.

Od posebnog su značaja restringirani moduli sa sljedećim svojstvom.

Definicija 1.4.2. $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul M na kojeg K djeluje skalarom $k \in \mathbb{C}$ nazivamo modulom nivoa k.

U nastavku opišimo konstrukciju važnog restringiranog $\widehat{\mathfrak{g}}$-modula, tzv. generaliziranog Vermaovog modula.

Neka je U $\widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$-modul na kojem je struktura modula definirana trivijalnim djelovanjem podalgebre $\widehat{\mathfrak{g}}_{+}$ te djelovanje centralnog elementa K operatorom $k\,\mathrm{Id}$. Tada je dobro definiran inducirani modul

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,U) = \mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0})} U$$

kojeg nazivamo generaliziranim Vermaovim modulom. Uočimo da je $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,U)$ restringirani $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul nivoa k. Istaknimo važan slučaj prethodne konstrukcije. Neka je $U = \mathbb{C}_k$ trivijalni $\mathfrak{g}$-modul. U tom slučaju koristimo sljedeću notaciju

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k) = \mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0})} \mathbb{C}_k.$$

Kao posljedicu Poincaré-Birkhoff-Wittovog teorema, imamo izomorfizam vektorskih prostora

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k) \cong U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-}).$$

Neka je $\{a^i \mid i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}\}$ uređena baza od $\mathfrak{g}$. Tada elementi $a^i(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, i K čine bazu za $\widehat{\mathfrak{g}}$. Označimo s $\mathbf{1}$ sliku od $1 \otimes 1$ u $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k)$. Iz Poincaré-Birkhoff-Wittovog teorema slijedi da bazu od $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k)$ čini $\mathbf{1}$ s monomima

$$a^{i_1}(n_1) \cdots a^{i_m}(n_m)\mathbf{1},$$

gdje je $n_1 \leq n_2 \cdots \leq n_m < 0$ i ako je $n_i = n_{i+1}$, onda je $i_j \leq i_{j+1}$.

Prostor $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k)$ je prirodno graduiran

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k)_n,$$

gdje je gradacija definirana po stupnju

$$\deg a^{i_1}(n_1) \cdots a^{i_m}(n_m)\mathbf{1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i \quad \text{i} \quad \deg \mathbf{1} = 0.$$

Primjenom rekonstrukcijskog teorema dokazuje se da je moguće $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k)$ opskrbiti strukturom verteks-algebre generirane poljima $a(z)$, za $a \in \mathfrak{g}$.

Teorem 1.4.3. Neka je k proizvoljni kompleksni broj. Uređena trojka $(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k), Y, \mathbf{1})$ je $\mathbb{Z}$-graduirana verteks-algebra koju nazivamo univerzalnom afinom verteks-algebrom i označavamo s $V^k(\mathfrak{g})$.

Nadalje, za restringirani $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul M nivoa k vrijedi sljedeća važna tvrdnja, [33]

Teorem 1.4.4. Neka je k proizvoljni kompleksni broj i M proizvoljni restringirani $\widehat{\mathfrak{g}}$-modul nivoa k. Tada na M postoji jedinstvena struktura modula za verteks-algebru $V^k(\mathfrak{g})$.

Univerzalna afina verteks-algebra $V^k(\mathfrak{g})$ sadrži konformni vektor kojeg nazivamo Segal-Sugawarin vektor kada je $k \neq h^\vee$, gdje $h^\vee$ dualni Coxeterov broj od $\mathfrak{g}$.
Postupak konstrukcije konformnog vektora se u literaturi obično naziva Sugawarinom konstrukcijom. Za odabranu bazu $\{a^i\}_{i=1,\dots,\dim\mathfrak{g}}$, definiramo dualnu bazu $\{a_i\}_{i=1,\dots,\dim\mathfrak{g}}$ obzirom na invarijantnu bilinearnu formu definiranu na $\mathfrak{g}$ i polja

$$a^i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^i(n)z^{-n-1} \quad \text{i} \quad a_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_i(n)z^{-n-1}.$$

Neka je

$$S = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}} a_i(-1)a^i(-1)\mathbf{1}.$$

Tada je, za $k \neq h^\vee$, S konformni vektor u $V^k(\mathfrak{g})$ centralnog naboja

$$c = \frac{k\dim\mathfrak{g}}{k+h^\vee}.$$

Odnosno, koeficijenti polja

$$Y(S,z) = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}} : a_i(z)a^i(z) :$$

generiraju djelovanje Virasorove algebre centralnog naboja c na $V^k(\mathfrak{g})$.
Dodatno vrijedi

$$[L(m), a^i(n)] = -na^i(m+n),$$

za $a^i \in \mathfrak{g}$ i $m,n \in \mathbb{Z}$.

Primjer 1.4.5. Kada je $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ i $k \neq -2$, tada je konformni vektor za $V^k(\mathfrak{sl}_2)$ jednak

$$\omega = \frac{1}{2(k+2)} \left(e(-1)f(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2}h(-1)h(-1)\mathbf{1} + f(-1)e(-1)\mathbf{1} \right)$$

i ima centralni naboj

$$c = \frac{3k}{k+2}.$$

1.4.2. Verteks-algebra pridružena W-algebri $W(2,2)$

W. Zhang i C. Dong su prvi konstruirali W-algebru $W(2,2)$, u članku [45], kao beskonačno-dimenzionalnu Liejevu algebru s generatorima L_m, W_m, C za $m \in \mathbb{Z}$ i relacijama

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C,$$

$$[L_m, W_n] = (m-n)W_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C,$$

$$[W_m, W_n] = 0,$$

za $m, n \in \mathbb{Z}$ i C centralni element.

Ova algebra ima trokutastu dekompoziciju

$$W(2,2) = W(2,2)_- \oplus W(2,2)_0 \oplus W(2,2)_+,$$

gdje je

$$W(2,2)_+ = \bigoplus_{n>0}(\mathbb{C}L_n + \mathbb{C}W_n),$$

$$W(2,2)_- = \bigoplus_{n<0}(\mathbb{C}L_n + \mathbb{C}W_n),$$

$$W(2,2)_0 = \mathbb{C}L_0 + \mathbb{C}W_0 + \mathbb{C}C.$$

Vermaov modul za $W(2,2)$ algebru je inducirani modul

$$V_{W(2,2)}(c,h,h_W) = \mathscr{U}(W(2,2)) \otimes_{\mathscr{U}(W(2,2)_+ \oplus W(2,2)_0)} \mathbb{C}v,$$

gdje je

$$W(2,2)_+ v = 0, Cv = cv, L_0 v = hv, W_0 v = h_w v.$$

Svaki Vermaov modul sadrži jedinstveni podmodul $J_{W(2,2)}(c,h,h_W)$ te je $L_{W(2,2)}(c,h,h_W) = V_{W(2,2)}(c,h,h_W)/J_{W(2,2)}(c,h,h_W)$ ireducibilni modul najveće težine. Dodatno, u [45] je pokazano da je $L_{W(2,2)}(c,0,0)$ jedini kvocijent od $V_{W(2,2)}(c,0,0)$ na kojemu je moguće definirati strukturu algebre verteks operatora.

Teorem 1.4.6. Neka je $c \neq 0$, tada postoji jedinstvena struktura algebre verteks operatora na $L_{W(2,2)}(c,0,0)$ s vakuum vektorom $\mathbf{1}$ i Virasorovim vektorom $\omega = L_{-2}\mathbf{1}$. Štoviše, $L_{W(2,2)}(c,0,0)$ je generirana s ω i $x = W_{-2}\mathbf{1}$ kojima su pridružena polja $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ i $Y(\omega,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$.

Neki od članaka u kojima je proučavana algebra $W(2,2)$ i njoj pridružena algebra verteks operatora su [29], [38], [6], [7]. Spomenimo da se u [29] poopćuje definicija dana u [45]. Tako imamo da je W-algebra $W(2,2)$ Liejeva algebra generirana s L_m, W_m, C_L, C_W za $m \in \mathbb{Z}$, a struktura Liejeve algebre dana relacijama

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C_L,$$

$$[L_m, W_n] = (m-n)W_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C_W,$$

$$[W_m, W_n] = 0,$$

za $m, n \in \mathbb{Z}$ te C_L i C_W centralnim elementima. Njoj pridruženu algebru verteks operatora ćemo označavati s $L^{W(2,2)}(c_L, c_W)$.

2. TAKIFFOVA VERTEKS-ALGEBRA TIPA $A_1^{(1)}$

U ovom poglavlju dajemo definiciju Takiffove algebre, točnije definiciju Takiffove algebre pridružene klasičnoj Liejevoj algebri tipa A_1 i Takiffove algebre pridružene afinoj Liejevoj algebri tipa $A_1^{(1)}$. Takiffova algebra pridružena klasičnoj Liejevoj algebri tipa A_1 je prvi put definirana u [35], a Takiffova algebra pridružena afinoj Liejevoj algebri tipa $A_1^{(1)}$ je poseban slučaj algebre definirane u [44]. U nastavku detaljnije proučavamo Takiffovu algebru pridruženu afinoj Liejevoj algebri tipa $A_1^{(1)}$, definiramo njoj pridruženu verteks-algebru i algebru verteks operatora. Dodatno, dajemo kratki osvrt na module za Takiffovu verteks-algebru tipa $A_1^{(1)}$. Na kraju dokazujemo postojanje izomorfizma između odgovarajućih Takiffovih algebri verteks operatora tipa $A_1^{(1)}$.

2.1. DEFINICIJA TAKIFFOVE ALGEBRE

Prateći [40], [35], [44] dajemo sljedeće definicije.

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Takiffova algebra pridružena $\mathfrak{g}$ je Liejeva algebra

$$T(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z],$$

s komutatorom

$$\left[a \otimes z^i, b \otimes z^j\right] = [a,b] \otimes z^{i+j},$$

gdje su $a,b \in \mathfrak{g}$, $i,j \in \{0,1\}$, a komutator zdesna je komutator na $\mathfrak{g}$.

Takiffovu algebru pridruženu $\mathfrak{g}$, kada je $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, nazivamo Takiffova algebra pridružena klasičnoj Liejevoj algebri tipa A_1 i označavamo s TA_1. Kada je $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$, tada pridruženu Takiffovu algebru nazivamo Takiffova algebra pridružena afinoj Liejevoj algebri tipa $A_1^{(1)}$ i označavamo s

$TA_1^{(1)}$. Dakle,

$$TA_1^{(1)} = \widehat{\mathfrak{sl}_2} \otimes \mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z],$$

s komutatorom

$$[a(m)\otimes z^p, b(n)\otimes z^q] = [a(m), b(n)]\otimes z^{p+q},$$
$$[K\otimes z^p, TA_1^{(1)}] = 0.$$

gdje je komutator zdesna određen komutatorom definiranim na $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, $a(m), b(n) \in \widehat{\mathfrak{sl}_2}$, za $m, n \in \mathbb{Z}$ i $p, q \in \{0, 1\}$.

U nastavku ćemo zbog jednostavnosti koristiti sljedeće oznake

$$\begin{aligned} a(m)\otimes z^0 &= a(m),\\ a(m)\otimes z^1 &= \overline{a}(m),\\ K\otimes z^0 &= K,\\ K\otimes z^1 &= \overline{K}, \end{aligned}$$

za $m \in \mathbb{Z}$. Sada komutatorske relacije možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} &[a(m), b(n)] = [a, b](m+n) + m(a|b)\delta_{m,n}K,\\ &[a(m), \overline{b}(n)] = [a, \overline{b}](m+n) + m(a|b)\delta_{m,n}\overline{K},\\ &[\overline{a}(m), \overline{b}(n)] = 0, \end{aligned}$$

gdje je $(\cdot|\cdot)$ normalizirana Killingova forma na $\mathfrak{sl}_2$.

Motivirani konstrukcijom vakuum modula za afine Liejeve algebre, na početku definiramo sljedeće podalgebre od $TA_1^{(1)}$.

$$\begin{aligned} \left(TA_1^{(1)}\right)_- &= \left(\mathfrak{sl}_2 \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\right) \otimes \mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z],\\ \left(TA_1^{(1)}\right)_0 &= \left(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}K\right) \otimes \mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z],\\ \left(TA_1^{(1)}\right)_+ &= \left(\mathfrak{sl}_2 \otimes t\mathbb{C}[t]\right) \otimes \mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z]. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$TA_1^{(1)} = \left(TA_1^{(1)}\right)_- \oplus \left(TA_1^{(1)}\right)_0 \oplus \left(TA_1^{(1)}\right)_+.$$

Podalgebru $\left(TA_1^{(1)}\right)_0 \oplus \left(TA_1^{(1)}\right)_+$ ćemo u nastavku označavati s $\left(TA_1^{(1)}\right)_{\geq 0}$.
Neka je $\mathbb{C}_{k,\overline{k}}$ jednodimenzionalni vektorski prostor generiran s 1. Neka $\left(TA_1^{(1)}\right)_{\geq 0}$ djeluje trivijalno na $\mathbb{C}_{k,\overline{k}}$, osim za centralne elemente K i $\overline{K}$ koji djeluju množenjem slijeva s k i $\overline{k}$ redom. Ovime je na $\mathbb{C}_{k,\overline{k}}$ definirana struktura $\left(TA_1^{(1)}\right)_{\geq 0}$-modula. Sada po definiciji induciranih modula za Liejeve algebre, [21], $TA_1^{(1)}$-modul induciran s $\mathbb{C}_{k,\overline{k}}$ je $TA_1^{(1)}$-modul koji odgovara

$\mathscr{U}(TA_1^{(1)})$-modulu

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right) = \mathscr{U}(TA_1^{(1)}) \otimes_{\mathscr{U}\left(TA_1^{(1)}\right)_{\geq 0}} \mathbb{C}_{k,\bar{k}}. \tag{2.1}$$

Po P-B-W teoremu, jer je

$$TA_1^{(1)} = \left(TA_1^{(1)}\right)_- \oplus \left(TA_1^{(1)}\right)_{\geq 0}$$

slijedi izomorfizam vektorskih prostora

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right) \cong \mathscr{U}\left(TA_1^{(1)}\right)_- . \tag{2.2}$$

Stoga, važno je detaljno proučiti bazu od $\left(TA_1^{(1)}\right)_-$.
Na bazi od $\left(TA_1^{(1)}\right)_-$, koju čini skup elemenata

$$\{a(-n) \otimes z^p \mid n > 0, p \in \{0,1\}, a \in \mathfrak{sl}_2\},$$

definiramo uređaj na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a(-n) \otimes z^p \prec b(-m) \otimes z^q \text{ ako je } & p > q \\ & \text{ili } (p = q \text{ i } n > m) \\ & \text{ili } (p = q = 0 \text{ i } n = m \text{ i } b \prec_{\mathfrak{sl}_2} a) \\ & \text{ili } (p = q = 1 \text{ i } n = m \text{ i } a \prec_{\mathfrak{sl}_2} b) \end{aligned} \tag{2.3}$$

za $a, b \in \mathfrak{sl}_2$, $p, q \in \{0,1\}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, a uređaj $\prec_{\mathfrak{sl}_2}$ je definiran na $\mathfrak{sl}_2$ s

$$e \prec_{\mathfrak{sl}_2} h \prec_{\mathfrak{sl}_2} f.$$

Označimo s $\mathbf{1}$ sliku od $1 \otimes 1 \in \mathscr{U}(TA_1^{(1)}) \otimes \mathbb{C}_{k,\bar{k}}$ u $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Zbog izomorfizma vektorskih prostora (2.2) i P-B-W teorema baza od $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ se sastoji od monoma

$$\overline{a_1}(-n_1) \cdots \overline{a_p}(-n_p) b_1(-m_1) \cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}, \tag{2.4}$$

za $a_k, b_l \in \mathfrak{sl}_2, k \in \{1, \ldots, p\}, l \in \{1, \ldots, q\}$, $n_k, m_l \in \mathbb{Z}$ takvi da $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p > 0$, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_q > 0$. Dodatno, ako je $n_k = n_{k+1}$, onda je $a_k \prec_{\mathfrak{sl}_2} a_{k+1}$ te ako je $m_l = m_{l+1}$, onda je $b_{l+1} \prec_{\mathfrak{sl}_2} b_l$.

Ako definiramo stupanj na $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ s

$$\deg \overline{a_1}(-n_1) \cdots \overline{a_p}(-n_p) b_1(-m_1) \cdots b_q(-m_q)\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{p} n_i + \sum_{j=1}^{q} m_j \text{ i } \deg \mathbf{1} = 0, \tag{2.5}$$

onda možemo definirati gradaciju po stupnju na $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$.

Pišemo

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right) = \bigoplus_{s\geq 0} V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(s)},$$

gdje su potprostori $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(s)}$ razapeti monomima

$$\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}$$

stupnja s.

Dodatno, možemo definirati stupanj komutativnog dijela monoma

$$\deg_c \overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{p} n_i \tag{2.6}$$

te stupanj nekomutativnog dijela monoma

$$\deg_{nc} \overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{q} m_i.$$

Napomena 2.1.1. Uočimo da je homogena komponenta stupnja jedan kao vektorski prostor izomorfna konačno-dimenzionalnoj Takiffovoj algebri TA_1.

Dodatno, $TA_1^{(1)}$-modul $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ je generiran s $\mathbf{1}$ uz slobodno djelovanje od $\left(TA_1^{(1)}\right)_-$ i relacijama $x(n)\mathbf{1} = 0$, za $x \in TA_1$ i $n \geq 0$, $K\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ i $\overline{K}\mathbf{1} = \bar{k}\mathbf{1}$.

2.2. TAKIFFOVA VERTEKS-ALGEBRA TIPA $A_1^{(1)}$

U [20] i [33] možemo pronaći detaljan opis konstrukcije verteks-algebre pridružene afinoj Liejevoj algebri i Virasorovoj algebri. Po uzoru na te osnovne primjere, mi ćemo u ovom odjeljku dokazati da $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ možemo opskrbiti strukturom verteks-algebre. Dokaz je jednostavno proširenje dokaza rekonstrukcijskog teorema u slučaju univerzalne afine verteks-algebre, [20].

Teorem 2.2.1. Neka su $k,\bar{k}$ proizvoljni kompleksni brojevi. Na $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ možemo definirati strukturu verteks-algebre.

Dokaz. Neka je vakuum vektor $\mathbf{1}$. Na početku definiramo operator D na sljedeći način

$$D\mathbf{1} = 0 \text{ i } [D, x(n)] = -nx(n-1),$$

za $x \in TA_1$. Zatim provjeravamo uvjete rekonstrukcijskog teorema.
Generirajući skup vektora čine vektori $x \in TA_1$. Svakom vektoru $x \in TA_1$ pridružujemo polje

$$x(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n-1}.$$

Za svaki $x \in TA_1$, vrijedi

Uvjet 1

$$x(z)\mathbf{1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\mathbf{1}z^{-n-1} = x(-1)\mathbf{1} + z(\cdots)$$

jer je

$$x(n)\mathbf{1} = 0, n \geq 0.$$

Uvjet 2 Po definiciji vrijedi $D\mathbf{1} = 0$. Preostaje dokazati $[D, x(z)] = \partial_z x(z)$, za svaki $x \in TA_1$.

$$\begin{aligned}
[D, x(z)] &= [D, \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n-1}] \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} [D, x(n)]z^{-n-1} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n)x(n-1)z^{-n-1} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n-1)x(n)z^{-n-2} \\
&= \partial_z x(z).
\end{aligned}$$

Uvjet 3 Neka su $x, y \in TA_1$. Ako su $x, y \in \mathfrak{sl}_2$, tvrdnja slijedi iz aksioma lokalnosti za univerzalnu afinu verteks-algebru tipa $A_1^{(1)}$. Ako je $x = \overline{a}$ i $y = \overline{b}$, za $a, b \in \mathfrak{sl}_2$, onda je $[x(m), y(n)] = [\overline{a}(m), \overline{b}(n)] = 0$, odnosno $[x(z), y(w)] = 0$. No, ako je $x = \overline{a}$ i $y = b$, za $a, b \in \mathfrak{sl}_2$, analogno dokazu lokalnosti univerzalne afine verteks-algebre tipa $A_1^{(1)}$, imamo

$$
\begin{aligned}
&[x(z), y(w)] = [\overline{a}(z), b(w)] \\
&= \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{a}(m) z^{-m-1}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n) w^{-n-1}\right] \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\overline{a}(m), b(n)] z^{-m-1} w^{-n-1} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\overline{a}, b](m+n) z^{-m-1} w^{-n-1} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} m(a, b) \delta_{m+n,0} \overline{K} z^{-m-1} w^{-n-1} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\overline{a}, b](m+n) z^{-m-1} w^{-n-1} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} m(a, b) \overline{K} z^{-m-1} w^{m-1} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\overline{a}, b](m+n) w^{-(m+n)-1} w^{m+n+1} z^{-m-1} w^{-n-1} + (a, b) \overline{K} \sum_{m\in\mathbb{Z}} m z^{-m-1} w^{m-1} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\overline{a}, b](m+n) w^{-(m+n)-1} z^{-m-1} w^{m} + (a, b) \overline{K} \sum_{m\in\mathbb{Z}} m z^{-m-1} w^{m-1} \\
&= [\overline{a}, b](w) \delta(z-w) - (a, b) \overline{K} \partial_z \delta(z-w)
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi

$$(z-w)^2 [\overline{a}(z), b(w)] = 0.$$

odnosno, $(z-w)^2 [x(z), y(w)] = 0$.

Uvjet 4 Slijedi iz definicije baze (2.4).

Sada, po rekonstrukcijskom teoremu imamo strukturu verteks-algebre. ■

Verteks-algebru ćemo također označavati s $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$.

2.3. TAKIFFOVA ALGEBRA VERTEKS OPERATORA TIPA $A_1^{(1)}$

Kako bismo nadogradili strukturu verteks-algebre $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ do algebre verteks operatora, na početku je potrebno odrediti konformni vektor. Formulu za konformni vektor Takiffove (super)algebre pridružene afinoj Kac-Moodyevoj (super)algebri su odredili S. Babichenko i D. Ridout u članku [14]. Zbog potpunosti, dajemo eksplicitni zapis u našem slučaju i dokazujemo da isti zadovoljava relacije Virasorove algebre. Dodatno ćemo pokazati da $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ možemo opskrbiti strukturom algebre verteks operatora.

Sljedeća lema je poseban slučaj Teorema 1 iz članka [14].

Lema 2.3.1. Neka je

$$\begin{aligned}\omega = {} & \frac{1}{2\bar{k}}e(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\bar{k}}f(-1)\bar{e}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\bar{k}}\bar{e}(-1)f(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\bar{k}}\bar{f}(-1)e(-1)\mathbf{1} \\ & + \frac{1}{2\bar{k}}\bar{h}(-1)h(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{\bar{k}^2}\bar{e}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{4\bar{k}^2}\bar{h}(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tada je ω konformni vektor u $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ centralnog naboja $c = 6$.

Dokaz. Zadanom vektoru $\omega \in V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(2)}$ pridružujemo polje

$$\begin{aligned}Y(\omega, z) = {} & Y(\frac{1}{2\bar{k}}e(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\bar{k}}f(-1)\bar{e}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\bar{k}}\bar{e}(-1)f(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\bar{k}}\bar{f}(-1)e(-1)\mathbf{1} \\ & + \frac{1}{2\bar{k}}\bar{h}(-1)h(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{\bar{k}^2}\bar{e}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{4\bar{k}^2}\bar{h}(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1}, z) \end{aligned} \tag{2.8}$$

i definiramo operatore $L(n)$, za $n \in \mathbb{Z}$ s

$$Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}L(n) = Res_z z^{n+1} Y(\omega, z) = &\frac{1}{2\bar{k}} \sum_{i\geq 0} e(-i-1)\overline{f}(n+i+1) + \overline{f}(n-i)e(i) \\ &+ \frac{1}{2\bar{k}} \sum_{i\geq 0} f(-i-1)\overline{e}(n+i+1) + \overline{e}(n-i)f(i) \\ &+ \frac{1}{2\bar{k}} \sum_{i\geq 0} \overline{e}(-i-1)f(n+i+1) + f(n-i)\overline{e}(i) \\ &+ \frac{1}{2\bar{k}} \sum_{i\geq 0} \overline{f}(-i-1)e(n+i+1) + e(n-i)\overline{f}(i) \\ &+ \frac{1}{2\bar{k}} \sum_{i\geq 0} \overline{h}(-i-1)h(n+i+1) + h(n-i)\overline{h}(i) \\ &- \frac{k+4}{\bar{k}^2} \sum_{i\geq 0} \overline{e}(-i-1)\overline{f}(n+i+1) + \overline{f}(n-i)\overline{e}(i) \\ &- \frac{k+4}{4\bar{k}^2} \sum_{i\geq 0} \overline{h}(-i-1)\overline{h}(n+i+1) + \overline{h}(n-i)\overline{h}(i). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pokažimo sada da definirani operatori zadovoljavaju relacije Virasorove algebre

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}C,$$

odnosno

$$\begin{aligned} &\omega_0\omega = L(-1)\omega = T\omega, \\ &\omega_1\omega = L(0)\omega = 2\omega, \\ &\omega_2\omega = L(1)\omega = 0, \\ &\omega_3\omega = L(2)\omega = \frac{1}{2}c\mathbf{1}, \\ &\omega_n\omega = 0, \text{ za } n \geq 4. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Za početak dokažimo da vrijedi

$$[L(m), x(n)] = -nx(m+n), \tag{2.11}$$

za svaki $x \in TA_1$.

Neka je $x = \overline{e}$. Dokažimo

$$[\overline{e}(n), L(m)] = n\overline{e}(m+n).$$

Analogno slučaju afine verteks-algebre, [33], primjenom komutatorske formule dobivamo

$$\begin{aligned}
[\overline{e}(n), L(m)] &= [\overline{e}(n), \omega(m+1)] \\
&= \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} \big(\overline{e}(i)\omega\big)_{n+m+1-i} \\
&= \big(\overline{e}(0)\omega\big)_{n+m+1} + n\big(\overline{e}(1)\omega\big)_{n+m} + \binom{n}{2}\big(\overline{e}(2)\omega\big)_{n+m-1} + \cdots
\end{aligned}$$

Kako je $\omega \in V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(2)}$, to je

$$\overline{e}(n)\omega = 0, \text{ za } n > 2.$$

Odredimo $\overline{e}(n)\omega$ za $0 \leq n \leq 2$

$$\begin{aligned}
\overline{e}(2)\omega &= \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(2), e(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1} + e(-1)[\overline{e}(2), \overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(2), f(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1} + f(-1)[\overline{e}(2), \overline{e}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(2), \overline{e}(-1)]f(-1)\mathbf{1} + \overline{e}(-1)[\overline{e}(2), f(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(2), \overline{f}(-1)]e(-1)\mathbf{1} + \overline{f}(-1)[\overline{e}(2), e(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(2), \overline{h}(-1)]h(-1)\mathbf{1} + \overline{h}(-1)[\overline{e}(2), h(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&- \frac{k+4}{\bar{k}^2}\big([\overline{e}(2), \overline{e}(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \overline{e}(-1)[\overline{e}(2), \overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&- \frac{k+4}{4\bar{k}^2}\big([\overline{e}(2), \overline{h}(-1)]\overline{h}(-1)\mathbf{1} + \overline{h}(-1)[\overline{e}(2), \overline{h}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{e}(1)\omega &= \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(1), e(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1} + e(-1)[\overline{e}(1), \overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(1), f(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1} + f(-1)[\overline{e}(1), \overline{e}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(1), \overline{e}(-1)]f(-1)\mathbf{1} + \overline{e}(-1)[\overline{e}(1), f(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(1), \overline{f}(-1)]e(-1)\mathbf{1} + \overline{f}(-1)[\overline{e}(1), e(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&+ \frac{1}{2\bar{k}}\big([\overline{e}(1), \overline{h}(-1)]h(-1)\mathbf{1} + \overline{h}(-1)[\overline{e}(1), h(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&- \frac{k+4}{2\bar{k}^2}\big([\overline{e}(1), \overline{e}(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \overline{e}(-1)[\overline{e}(1), \overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&- \frac{k+4}{\bar{k}^2}\big([\overline{e}(1), \overline{f}(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1} + \overline{f}(-1)[\overline{e}(1), \overline{e}(-1)]\mathbf{1}\big) \\
&= \overline{e}(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{e}(0)\omega =& \frac{1}{2\overline{k}}\big([\overline{e}(0),e(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+e(-1)[\overline{e}(0),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}([\overline{e}(0),f(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1}+f(-1)[\overline{e}(0),\overline{e}(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}([\overline{e}(0),\overline{e}(-1)]f(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[\overline{e}(0),f(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}\big([\overline{e}(0),\overline{f}(-1)]e(-1)\mathbf{1}+\overline{f}(-1)[\overline{e}(0),e(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}\big([\overline{e}(0),\overline{h}(-1)]h(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[\overline{e}(0),h(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{\overline{k}^2}\big([\overline{e}(0),\overline{e}(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[\overline{e}(0),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{4\overline{k}^2}\big([\overline{e}(0),\overline{h}(-1)]\overline{h}(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[\overline{e}(0),\overline{h}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&=0,
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi

$$[\overline{e}(n),L(m)] = n\overline{e}(m+n).$$

Analogno se pokaže da relacija vrijedi i za preostale elemente iz TA_1. Sada primjenom te relacije i komutatorske formule dobivamo

$$L(-1)\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1} =$$

$$D\big(\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}\big),$$

gdje je $\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}$ element baze definiran u (2.4). Prema tome, $L(-1) = D$, a onda vrijedi

$$\omega_0\omega = L(-1)\omega = D\omega.$$

Dodatno, kako bismo dokazali da je ω konformni vektor centralnog naboja $c = 6$, preostaje dokazati

$$
\begin{aligned}
&\omega_1\omega = L(0)\omega = 2\omega,\\
&\omega_2\omega = L(1)\omega = 0,\\
&\omega_3\omega = L(2)\omega = 3\mathbf{1},\\
&\omega_n\omega = 0,\ \text{za } n \geq 4. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
L(0)\omega &= \frac{1}{2\bar{k}}\big([L(0),e(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+e(-1)[L(0),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}([L(0),f(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1}+f(-1)[L(0),\overline{e}(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}([L(0),\overline{e}(-1)]f(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(0),f(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}\big([L(0),\overline{f}(-1)]e(-1)\mathbf{1}+\overline{f}(-1)[L(0),e(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}\big([L(0),\overline{h}(-1)]h(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(0),h(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{\bar{k}^2}\big([L(0),\overline{e}(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(0),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{4\bar{k}^2}\big([L(0),\overline{h}(-1)]\overline{h}(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(0),\overline{h}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&=2\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(1)\omega &= \frac{1}{2\bar{k}}\big([L(1),e(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+e(-1)[L(1),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}([L(1),f(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1}+f(-1)[L(1),\overline{e}(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}([L(1),\overline{e}(-1)]f(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(1),f(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}\big([L(1),\overline{f}(-1)]e(-1)\mathbf{1}+\overline{f}(-1)[L(1),e(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\bar{k}}\big([L(1),\overline{h}(-1)]h(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(1),h(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{\bar{k}^2}\big([L(1),\overline{e}(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(1),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{4\bar{k}^2}\big([L(1),\overline{h}(-1)]\overline{h}(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(1),\overline{h}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(2)\omega &= \frac{1}{2\overline{k}}\big([L(2),e(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+e(-1)[L(2),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}([L(2),f(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1}+f(-1)[L(2),\overline{e}(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}([L(2),\overline{e}(-1)]f(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(2),f(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}\big([L(2),\overline{f}(-1)]e(-1)\mathbf{1}+\overline{f}(-1)[L(2),e(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}\big([L(2),\overline{h}(-1)]h(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(2),h(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{\overline{k}^2}\big([L(2),\overline{e}(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(2),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{4\overline{k}^2}\big([L(2),\overline{h}(-1)]\overline{h}(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(2),\overline{h}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&=3\mathbf{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(3)\omega &= \frac{1}{2\overline{k}}\big([L(3),e(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+e(-1)[L(3),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}([L(3),f(-1)]\overline{e}(-1)\mathbf{1}+f(-1)[L(3),\overline{e}(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}([L(3),\overline{e}(-1)]f(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(3),f(-1)]\mathbf{1})\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}\big([L(3),\overline{f}(-1)]e(-1)\mathbf{1}+\overline{f}(-1)[L(3),e(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&+\frac{1}{2\overline{k}}\big([L(3),\overline{h}(-1)]h(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(3),h(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{\overline{k}^2}\big([L(3),\overline{e}(-1)]\overline{f}(-1)\mathbf{1}+\overline{e}(-1)[L(3),\overline{f}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&-\frac{k+4}{4\overline{k}^2}\big([L(3),\overline{h}(-1)]\overline{h}(-1)\mathbf{1}+\overline{h}(-1)[L(3),\overline{h}(-1)]\mathbf{1}\big)\\
&=0,
\end{aligned}$$

Nadalje vrijedi, $L(n)\omega = 0$, za $n \geq 4$. Ovime smo dokazali da vrijede sve relacije iz (2.12). ■

Teorem 2.3.2. Neka je k proizvoljan, a $\overline{k}$ nenula kompleksni broj. $V^{k,\overline{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ je algebra verteks operatora uz konformni vektor dan s (2.7).

Dokaz. U Lemi (2.3.1) smo dokazali neke aksiome algebre verteks operatora. Dokažimo i preostale. Na početku dokažimo da $L(0)$ djeluje poluprosto na $V^{k,\overline{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Primjenom relacije (2.11) slijedi

$$L(0)\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1} =$$

$$(n_1+\cdots+n_p+m_1+\cdots m_q)\big(\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}\big).$$

U (2.5) uočavamo da se gradacija po stupnju podudara s gradacijom po $L(0)$-potprostorima te za

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)=\bigoplus_{n\geq 0}V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(n)}$$

vrijedi

$$L(0)|_{V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(n)}}=n\,\mathrm{Id}_{V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(n)}}$$

i

$$\dim V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(n)}<\infty$$

Dodatno,

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)_{(n)}=\emptyset \text{ za } n<0\ .$$

Dakle, $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ je algebra verteks operatora. ■

2.4. MODULI ZA VERTEKS-ALGEBRU $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$

U ovom poglavlju ćemo definirati restringirane $TA_1^{(1)}$-module. Osnovni primjer je, prethodno definirani, $TA_1^{(1)}$-modul $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$, tzv. univerzalni restringirani $TA_1^{(1)}$-modul. Pokazali smo da na njemu možemo dobiti strukturu verteks-algebre i algebre verteks operatora, a sada ćemo dokazati da su restringirani $TA_1^{(1)}$-moduli ujedno moduli za verteks-algebru $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Analogna tvrdnja, u slučaju afinih Liejevih algebri i Virasorove algebre, je dokazana u [33]. Po uzoru na neke matematičke članake u kojima se proučavaju Takiffove algebre, dajemo definiciju težinskih modula, posebnu vrstu restringiranih modula, i to

- generaliziranog težinskog modula ([35], [17] i [46]),
- težinskog modula ([35], [46] i [44]).

Težinski moduli i moduli najveće težine nekih poznatih Liejevih algebri proučavani su u mnogobrojnim člancima, neki od njih su [32], [30], [33], a o težinskim modulima nekih Takiffovih algebri možemo čitati u člancima [35], [44], [11], [10], [39], [46], [17].

2.4.1. Restringirani $TA_1^{(1)}$-moduli

Definirajmo posebnu klasu $TA_1^{(1)}$-modula.

Definicija 2.4.1. Za $TA_1^{(1)}$-modul R kažemo da je restringiran ako za svaki $x \in TA_1$ i $v \in R$ je $x(n)v = 0$ za $n \gg 0$.

Od posebnog su značaja restringirani moduli sa sljedećim svojstvom.

Definicija 2.4.2. $TA_1^{(1)}$-modul R na kojeg K djeluje skalarom $k \in \mathbb{C}$, a $\overline{K}$ djeluje skalarom $\bar{k} \in \mathbb{C}$ nazivamo modulom nivoa $(k,\bar{k})$.

Sada primjenom teorije lokalnih polja, po uzoru na Teorem 6.2.12 u [33], imamo sljedeću tvrdnju i njezin dokaz.

Teorem 2.4.3. Neka su $k,\bar{k}$ proizvoljni kompleksni brojevi i R restringirani $TA_1^{(1)}$-modul nivoa $(k,\bar{k})$. Tada na R imamo strukturu $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$-modula, za verteks-algebru $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$.

Dokaz. Za svaki $x \in TA_1$ definirajmo

$$x_R(z) = x(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n-1} \in (\operatorname{End} R)[[z,z^{-1}]].$$

Kako je po pretpostavci R restringiran, to su $x_R(z)$ polja. Štoviše, to su međusobno lokalna polja (po Teoremu (2.2.1), 3. uvjet).

Označimo sa S skup lokalnih polja, tj. $S = \{x_R(z), 1_R\}$. Sada iz teorije lokalnih polja vrijedi da je S lokalni podskup od $\varepsilon(R)$, odnosno lokalni potprostor. Po Teoremu 5.5.18 iz [33], S generira verteks podalgebru od $\varepsilon(R)$, tj.

$$\langle S\rangle = \operatorname{span}\{x_R^{(1)}(z)_{n_1}\dots x_R^{(p)}(z)_{n_p}1_R \mid p\geq 0, x^{(i)}\in TA_1, n_i\in\mathbb{Z}\},$$

za koju je R vjeran modul s djelovanjem $Y_R(\alpha(z), z_0) = \alpha(z_0)$.

Dodatno, po Teoremu 6.2.7 iz [33], $\langle S\rangle$ je restringirani $TA_1^{(1)}$-modul nivoa $(k,\bar{k})$ na kojem $x(n)$ djeluje s $x_R(z)_n$, za $x\in TA_1$, $n\in\mathbb{Z}$, te je kao $TA_1^{(1)}$-modul generiran s 1_R i relacijama

$$x(n)1_R = x_R(z)_n 1_R = 0, n\geq 0, x\in TA_1.$$

Zbog svojstva univerzalnosti Vermaovog modula postoji jedinstveni homomorfizam $TA_1^{(1)}$-modula

$$\phi : V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right) \to \langle S\rangle,$$

zadan s $\phi(\mathbf{1}) = 1_R$. Iz zadanog pravila pridruživanja slijedi

$$\phi(x^{(1)}(n_1)\dots x^{(p)}(n_p)\mathbf{1}) = x_R^{(1)}(z)_{n_1}\dots x_R^{(p)}(z)_{n_p}1_R.$$

Sada iz Teorema 5.7.6 iz [33] za $T = \{x \mid x\in TA_1\}$ slijedi tvrdnja. ■

2.4.2. Primjeri nekih $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$-modula

Trokutasta dekompozicija afine Liejeve algebre $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ je

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \widehat{\mathfrak{n}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_+,$$

gdje je

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{n}}_- &= \left(t^{-1}\mathbb{C}\left[t^{-1}\right]\otimes(\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h})\right)\oplus\mathbb{C}\left[t^{-1}\right]\otimes\mathfrak{n}_-,\\
\widehat{\mathfrak{n}}_+ &= (t\mathbb{C}[t]\otimes(\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}))\oplus\mathbb{C}[t]\otimes\mathfrak{n}_+,\\
\widehat{\mathfrak{h}} &= (\mathbb{C}\otimes\mathfrak{h})\oplus\mathbb{C}K.
\end{aligned}$$

a $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{n}_+$ i $\mathfrak{h}$ su podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_2$ takve da je $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ standardna trokutasta dekompozicija od $\mathfrak{sl}_2$. Po [44] navedena trokutasta dekompozicija inducira dekompoziciju za $TA_1^{(1)}$, tj. za podalgebre $T\widehat{\mathfrak{n}}_- = \widehat{\mathfrak{n}}_-\otimes\mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z]$, $T\widehat{\mathfrak{n}}_+ = \widehat{\mathfrak{n}}_+\otimes\mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z]$ i $T\widehat{\mathfrak{h}} = \widehat{\mathfrak{h}}\otimes\mathbb{C}[z]/z^2\mathbb{C}[z]$ Liejeve algebre $TA_1^{(1)}$ vrijedi

$$TA_1^{(1)} = T\widehat{\mathfrak{n}}_-\oplus T\widehat{\mathfrak{h}}\oplus T\widehat{\mathfrak{n}}_+.$$

Uočimo, elementi podalgebre $T\widehat{\mathfrak{h}}$ su $h(0), \bar{h}(0), K$, i $\overline{K}$. Prema tome, ovo nije prava trokutasta dekompozicija od $TA_1^{(1)}$ jer $T\widehat{\mathfrak{h}}$ ne djeluje dijagonalizabilno na $TA_1^{(1)}$.

Po uzoru na [35], [46], [17] i [44] dajemo sljedeće definicije.

Definicija 2.4.4. $TA_1^{(1)}$-modul M nazivamo generaliziranim težinskim modulom ako M dopušta dekompoziciju

$$M = \bigoplus_{\lambda \in T\widehat{\mathfrak{h}}^*} M_\lambda,$$

gdje je $M_\lambda = \{m \in M \mid (h - \lambda(h))^r m = 0 \text{ i } (\bar{h} - \lambda(\bar{h}))^s m = 0, \text{ za neke } r, s \in \mathbb{N}\}$.

Definicija 2.4.5. Generalizirani $TA_1^{(1)}$-modul M nazivamo težinskim modulom ako M dopušta dekompoziciju

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} M_\lambda,$$

gdje je $M_\lambda = \{m \in M \mid hm = \lambda(h)m\}$.

Definirajmo sada važnu klasu težinskih modula, module najveće težine.

Definicija 2.4.6. Težinski $TA_1^{(1)}$-modul M nazivamo modulom najveće težine s težinom $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ ako postoji nenula vektor v_λ koji generira M i ima sljedeća svojstva

1. $T\widehat{\mathfrak{n}}_+ . v_\lambda = 0$,

2. $h.v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda$.

Vektor v_λ nazivamo vektorom najveće težine λ, a λ najvećom težinom od M.
Ako je dodatno ispunjeno i

3. $\bar{h}.v_\lambda = \lambda(\bar{h}) v_\lambda$, za $\lambda \in T\widehat{\mathfrak{h}}^*$,

onda kažemo da je M jaki modul najveće težine s težinom λ.

Konstruirajmo sada jednu važnu klasu modula najveće težine. Za neki $\lambda \in T\widehat{\mathfrak{h}}^*$ na $\mathbb{C}v_\lambda$ definiramo strukturu $T\widehat{\mathfrak{n}}_+ \oplus T\widehat{\mathfrak{h}}$-modula na sljedeći način

$$T\widehat{\mathfrak{n}}_+ . v_\lambda = 0,\ h.v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda,\ \bar{h}.v_\lambda = \lambda(\bar{h}) v_\lambda,\ K.v_\lambda = k v_\lambda,\ \overline{K}.v_\lambda = \bar{k} v_\lambda.$$

Inducirani modul

$$M(\lambda) = \mathscr{U}(TA_1^{(1)}) \otimes_{\mathscr{U}(T\widehat{\mathfrak{n}}_+ \oplus T\widehat{\mathfrak{h}})} \mathbb{C}v_\lambda$$

je $TA_1^{(1)}$-modul najveće težine λ s vektorom najveće težine $1 \otimes v_\lambda$. Kako je $M(\lambda)$ restringirani $TA_1^{(1)}$-modul to je po Teoremu 2.4.3 ujedno i $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$-modul, gdje je $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ verteks-algebra.

2.5. Izomorfizam algebri verteks operatora

Za prethodno definiranu algebru verteks operatora $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ centralni naboj je neovisan o k, odnosno $\bar{k}$. Neovisnost centralnog naboja ima univerzalna Heisenbergova algebra verteks operatora. U [33] je pokazano da su sve univerzalne algebre verteks operatora pridružene Heisenbergovoj algebri za nenula nivoe međusobno izomorfne. To nas motivira da provjerimo egzistenciju odgovarajućeg izomorfizma u slučaju $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Po uzoru na Propoziciju 6.3.10 u [33] dajemo sljedeću tvrdnju i dokaz.

Propozicija 2.5.1. Neka su $k, \bar{k}$ nenula kompleksni brojevi. Tada postoji izomorfizam algebri verteks operatora između $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ i $V^{k,k}(TA_1^{(1)})$.

Dokaz. Slično kao u [33] definiramo preslikavanje

$$\phi : V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right) \to V^{k,k}(TA_1^{(1)})$$

na sljedeći način

$$\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1} \mapsto \left(\frac{\bar{k}}{k}\right)^p \overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}$$

gdje je $\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}$ monom baze definiran kao u (2.4).
Kako je, za proizvoljne nenula kompleksne brojeve k i $\bar{k}$, $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ izomorfan s $\mathscr{U}\left(\left(TA_1^{(1)}\right)_-\right)$ kao vektorski prostor, to je s ϕ dobro definiran linearni izomorfizam između $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ i $V^{k,k}(TA_1^{(1)})$.
Iz definicije preslikavanja vrijedi:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{1}) &= \mathbf{1},\\
\phi(a) &= \phi(a(-1)\mathbf{1}) = a(-1)\mathbf{1},\\
\phi(\bar{a}) &= \phi(\bar{a}(-1)\mathbf{1}) = \frac{\bar{k}}{k}\bar{a}(-1)\mathbf{1},
\end{aligned}$$

za $a \in \mathfrak{sl}_2$.
Za početak dokažimo da je ϕ homomorfizam verteks-algebri.
Kako je $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ kao verteks-algebra generirana s TA_1, zbog Propozicije 5.7.9 iz [33], dovoljno je dokazati:

$$\phi(a(n)v) = \phi(a)(n)\phi(v) \tag{2.13}$$

za $a \in TA_1$, $n \in \mathbb{Z}$, $v \in V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$.
Iz pravila pridruživanja preslikavanja ϕ tvrdnja (2.13) vrijedi za $n < 0$.

Preostaje dokazati tvrdnja za $n \geq 0$.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom obzirom na $l(v)$, duljinu monoma $v \in V^{k,\overline{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$.

Neka je $l(v) = 1$, tj. $v = \overline{b}(-m)\mathbf{1}$ ili $v = b(-m)\mathbf{1}$, za $m > 0$ i $b \in \mathfrak{sl}_2$. Dokažimo da je

$$\phi(a(n)v) = \phi(a)(n)\phi(v) \text{ i } \phi(\overline{a}(n)v) = \phi(\overline{a})(n)\phi(v),$$

za $a \in \mathfrak{sl}_2$ i $n \geq 0$.

Neka je $v = \overline{b}(-m)\mathbf{1}$.

Primjenom rezacija za komutator dobivamo

$$\begin{aligned}
\phi(a(n)\overline{b}(-m)\mathbf{1}) &= \phi([a(n),\overline{b}(-m)]\mathbf{1}) \\
&= \phi([a,\overline{b}](n-m)\mathbf{1} + n\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}\overline{K}\mathbf{1}) \\
&= \phi\left(\begin{cases} 0 & ;n-m>0 \\ n\overline{k}\langle a,b\rangle\mathbf{1} & ;n-m=0 \\ [a,\overline{b}](n-m)\mathbf{1} & ;n-m<0 \end{cases}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & ;n-m>0 \\ n\overline{k}\langle a,b\rangle\mathbf{1} & ;n-m=0 \\ \frac{\overline{k}}{k}[a,\overline{b}](n-m)\mathbf{1} & ;n-m<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(n)\phi(\overline{b}(-m)\mathbf{1}) &= a(n)\frac{\overline{k}}{k}\overline{b}(-m)\phi(\mathbf{1}) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}[a(n),\overline{b}(-m)]\phi(\mathbf{1}) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}([a,\overline{b}](n-m)\phi(\mathbf{1}) + n\langle a,\overline{b}\rangle\delta_{n,-m}\underbrace{\overline{K}\phi(\mathbf{1})}_{k\phi(\mathbf{1})}) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}\begin{cases} 0 & ;n-m>0 \\ nk\langle a,b\rangle\phi(\mathbf{1}) & ;n-m=0 \\ [a,\overline{b}](n-m)\phi(\mathbf{1}) & ;n-m<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & ;n-m>0 \\ n\overline{k}\langle a,b\rangle\mathbf{1} & ;n-m=0 \\ \frac{\overline{k}}{k}[a,\overline{b}](n-m)\mathbf{1} & ;n-m<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dakle, $\phi(a(n)v) = \phi(a)(n)\phi(v)$.

Analogno se pokaže da vrijedi $\phi(\overline{a}(n)v) = \phi(\overline{a})(n)\phi(v)$ jer je

$$\phi(\overline{a}(n)\overline{b}(-m)\mathbf{1}) = 0$$
$$\frac{\overline{k}}{k}\overline{a}(n)\phi(\overline{b}(-m)\mathbf{1}) = \left(\frac{\overline{k}}{k}\right)^2 \overline{a}(n)\overline{b}(-m)\mathbf{1} = 0$$

Neka je sada $v = b(-m)\mathbf{1}$. Također, primjenom relacija za komutator dobivamo

$$\phi(a(n)b(-m)\mathbf{1}) = \begin{cases} 0 & ; n-m > 0 \\ nk\langle a,b\rangle\mathbf{1} & ; n-m = 0 \\ [a,b](n-m)\mathbf{1} & ; n-m < 0 \end{cases} = a(n)\phi(b(-m)\mathbf{1})$$

i

$$\phi(\overline{a}(n)b(-m)\mathbf{1}) = \begin{cases} 0 & ; n-m > 0 \\ n\overline{k}\langle a,b\rangle\mathbf{1} & ; n-m = 0 \\ \frac{\overline{k}}{k}[\overline{a},b](n-m)\mathbf{1} & ; n-m < 0 \end{cases} = \frac{\overline{k}}{k}\overline{a}(n)\phi(b(-m)\mathbf{1}).$$

Pretpostavimo da vrijedi

$$\phi(a(n)v) = a(n)\phi(v) \text{ i } \phi(\overline{a}(n)v) = \phi(\overline{a})(n)\phi(v), n \geq 0$$

za svaki monom $v \in V^{k,\overline{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ duljine $l(v) < d$.

Dokažimo

$$\phi(a(n)v) = a(n)\phi(v) \text{ i } \phi(\overline{a}(n)v) = \phi(\overline{a})(n)\phi(v),$$

za svaki monom $v \in V^{k,\overline{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ duljine $l(v) = d$.

Za početak dokažimo

$$\phi(a(n)v) = a(n)\phi(v).$$

Neka je $v = \overline{b}(-m)u$ i $l(v) = d$. Primjenom relacija za komutator, definicije preslikavanja i pretpostavke matematičke indukcije na u vrijedi:

$$\begin{aligned}
\phi(a(n)v) &= \phi(a(n)\overline{b}(-m)u) \\
&= \phi(\overline{b}(-m)a(n)u + [a(n),\overline{b}(-m)]u) \\
&= \underbrace{\phi(\overline{b}(-m)a(n)u)}_{\text{po def.}} + \phi([a,\overline{b}](n-m)u + n\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}\overline{K}u) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}\overline{b}(-m)\underbrace{\phi(a(n)u)}_{\text{p.p.m.i.}} + \underbrace{\phi([a,\overline{b}](n-m)u)}_{\text{p.p.m.i. ili po def.}} + \phi(n\overline{k}\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}u) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}\overline{b}(-m)a(n)\phi(u) + \frac{\overline{k}}{k}[a,\overline{b}](n-m)\phi(u) + n\overline{k}\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}\phi(u)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a(n)\phi(v) &= a(n)\phi(\overline{b}(-m)u) \\
&= a(n)\frac{\overline{k}}{k}\overline{b}(-m)\phi(u) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}(\overline{b}(-m)a(n)\phi(u) + [a(n),\overline{b}(-m)]\phi(u)) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}\overline{b}(-m)a(n)\phi(u) + \frac{\overline{k}}{k}([a,\overline{b}](n-m)\phi(u) + n\overline{k}\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}\overline{K}\phi(u) \\
&= \frac{\overline{k}}{k}\overline{b}(-m)a(n)\phi(u) + \frac{\overline{k}}{k}[a,\overline{b}](n-m)\phi(u) + n\overline{k}\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}\phi(u).
\end{aligned}
$$

Analognim računom dobivamo

$$\phi(\overline{a}(n)v) = \left(\frac{\overline{k}}{k}\right)^2\overline{b}(-m)\overline{a}(n)\phi(u) = \frac{\overline{k}}{k}\overline{a}(n)\phi(v)$$

No, ukoliko je $v = b(-m)u$ analognim postupkom dobivamo

$$\phi(a(n)v) = b(-m)a(n)\phi(u) + [a,b](n-m)\phi(u) + nk\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}\phi(u) = a(n)\phi(v).$$

i

$$\phi(\overline{a}(n)v) = \frac{\overline{k}}{k}b(-m)\overline{a}(n)\phi(u) + \frac{\overline{k}}{k}[\overline{a},b](n-m)\phi(u) + n\overline{k}\langle a,b\rangle\delta_{n,-m}\phi(u) = \frac{\overline{k}}{k}\overline{a}(n)\phi(v).$$

Ovime smo dokazali (2.13).

Dokažimo da je homomorfizam verteks-algebri ujedno i homomorfizam agebri verteks operatora, tj. za $\omega \in V^{k,\overline{k}}(TA_1^{(1)})$ vrijedi

$$\phi(\omega) = \omega \in V^{k,k}(TA_1^{(1)}).$$

$$
\begin{aligned}
\phi(\omega) = \phi\Big(&\frac{1}{2\overline{k}}e(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\overline{k}}f(-1)\overline{e}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\overline{k}}\overline{e}(-1)f(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2\overline{k}}\overline{f}(-1)e(-1)\mathbf{1} \\
&+ \frac{1}{2\overline{k}}\overline{h}(-1)h(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{\overline{k}^2}\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{4\overline{k}^2}\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1} \\
&= \frac{1}{2k}e(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}f(-1)\overline{e}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}\overline{e}(-1)f(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}\overline{f}(-1)e(-1)\mathbf{1} \\
&+ \frac{1}{2k}\overline{h}(-1)h(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{k^2}\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{4k^2}\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1}\Big) = \omega \in V^{k,k}(TA_1^{(1)}).
\end{aligned}
$$

■

Napomena 2.5.2. Primijetimo da je navedeni izomorfizam formalizacija razmatranja koje se javlja u članku T. Quellea, [37].

Autor u navedenom članku opisuje dva postupka, afinizaciju konačnodimenzionalne generalizirane Takiffove algebre te tzv. takifizaciju afine Liejeve algebre. Za Takiffove algebre, koje su poseban slučaj generaliziranih Takiffovih algebri, osnovna razlika u ova dva postupka je da afinizacijom konačnodimenzionalne Takiffove algebre s odgovarajućom invarijantnom formom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ algebra sadrži jedan centralni element K, dok konstrukcijom Takiffove algebre pridružene afinoj Liejevoj algebri dobivamo dva centralna elementa, K i $\overline{K}$. Autor nadalje pokazuje da općenito ne postoji izomorfizam među algebrama, međutim, ako se promatra djelovanje algebri na odgovarajuću reprezentaciju prikladnim odabirom koeficijenata kojim djeluju centralni elementi proizlazi da ova dva postupka komutiraju.

Spomenimo da se postupak afinizacije generalizirane Takiffove algebre pridružene prostoj Liejevoj algebri javlja i u članku A.I. Moleva, [36]. No, važno je naglasiti da se navedeni postupak razlikuje od onog kojeg definira T. Quella zbog različitog načina definiranja invarijantne simetrične bilinearne forme. U svom članku, A. I. Molev definira bilinearnu formu trivijalnim proširenjem standardne normalizirane Killingove forme definirane na polaznoj prostoj Liejevoj algebri što rezultira drugačijom verteks-algebrom obzirom na verteks-algebru definiranu u članku T. Quellea.

Napomena 2.5.3. Zbog izomorfizma algebri

$$V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right) \cong V^{k,k}(TA_1^{(1)})$$

dovoljno je pisati $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$, za $k \neq 0$. Zbog jednostavnosti, u nastavku koristimo samo oznaku V^k.

3. PROSTOTA VERTEKS-ALGEBRE V^k

Glavni cilj ovog poglavlja je dokazati prostotu verteks-algebre V^k. Prisjetimo se da je ireducibilnost modula ekvivalentna prostoti pridružene verteks-algebre ([25]) zbog čega će glavni zadatak biti proučavanje ireducibilnosti odgovarajućeg modula.

Prateći metodu opisanu u [32], gdje je pomoću determinante odgovarajuće bilinearne forme dan kriterij ireducibilnosti Vermaovog modula Virasorove algebre, definirat ćemo kontragredijentni modul adjungiranog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$, na njemu odgovarajuću bilinearnu formu te proučavati matricu, odnosno determinantu, pridruženu toj bilinearnoj formi. U člancima [39], [12], [10], [11], [29] je opisana metoda primijenjena na nekim drugim Takiffovim algebrama te motivirani navedenim člancima ispitujemo naš slučaj.

Na početku smo spomenuli da je Takiffova algebra poseban slučaj algebri koje se u literaturi javljaju pod nazivom "truncated current Lie algebra". U [44], B. J. Wilson daje opći kriterij reducibilnosti Vermaovih modula od "truncated current Lie algebra"za široku klasu Liejevih algebri, točnije za sve one Liejeve algebre koje posjeduju trokutastu dekompoziciju (npr. Kac-Moodyeve Liejeve algebre, Heisenbergova algebra i Virasorova algebra). Kriterij u slučaju Kac-Moodyeve Liejeve algebre je dan sljedećim teoremom.

Teorem. Neka je dana afina Kac-Moodyeva Liejeva algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ i njoj pridružena "truncated current Lie algebra"s indeksom nilpotentnosti N. Tada za proizvoljni Λ, Vermaov modul $M(\Lambda)$ za "truncated current Lie algebra"je reducibilan ako i samo ako je $\langle\Lambda_N, K\rangle = 0$ ili $(\widetilde{\Lambda_N} \mid \alpha) = m\langle\Lambda_N, K\rangle$, za neki korijen α i $m \in \mathbb{Z}$.

No, mi ćemo u ovom poglavlju ispitivati prostotu verteks-algebre V^k, što je ekvivalentno ireducibilnosti adjungiranog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right) := V^{k,k}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Po konstrukciji je $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$ kvocijent Vermaovog modula, tj. vakuum modul neovisan o korijenima. Stoga, zbog potpunosti dajemo kriterij ireducibilnosti samo u našem slučaju.

3.1. IREDUCIBILNOST ADJUNGIRANOG MODULA $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$

Na početku ovog odjeljka dajemo definiciju i osnovna svojstva kontragredijentnog modula prateći [22]. Primjere nekih kontragredijentnih modula možemo pronaći u člancima [6], [39], [2]. Zatim definiramo kontragredijentni modul od $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$ i odgovarajuću bilinearnu formu.

3.1.1. Kontragredijentni modul adjungiranog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$

Definicija 3.1.1. Neka je (W,Y), gdje je $W=\bigoplus_{n\in\mathbb{Q}}W_{(n)}$, modul za algebru verteks operatora $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ i $W^*=\bigoplus_{n\in\mathbb{Q}}W_{(n)}^*$ graduirani dualni prostor od W. Neka je dano bilinearno preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon W^*\times W\to\mathbb{C}$ i linearno preslikavanja

$$Y^*(\cdot,z)\colon V\to(\operatorname{End}W^*)[[z,z^{-1}]]$$

$$v\mapsto Y^*(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v(n)^*z^{-n-1},$$

takvo da

$$\langle Y^*(v,z)w',w\rangle=\langle w',Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}v,z^{-1})w\rangle \tag{3.1}$$

za $v\in V, w'\in W^*, w\in W$. Tada uređeni par (W^*,Y^*) ima strukturu V-modula i nazivamo ga kontragredijentnim modulom od W.

Primjer 3.1.2. Neka je $V=V^k$ te $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$ promatramo kao V^k-modul za algebru verteks operatora V^k. Prethodno smo pokazali da vrijedi

$$[L(m),x(n)]=-nx(m+n)$$

za $x\in TA_1$. Stoga za $x=x(-1)\mathbf{1}\in V^k\left(TA_1^{(1)}\right)_{(1)}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}x&=e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}x(-1)\mathbf{1}\\
&=e^{zL(1)}(-z^{-2})^{1}x(-1)\mathbf{1}\\
&=-z^{-2}e^{zL(1)}x(-1)\mathbf{1}\\
&=-z^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}L(1)^kx(-1)\mathbf{1}\\
&=-z^{-2}x(-1)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Sada po definiciji imamo:

$$\begin{aligned}\langle Y^*(x,z)w',w\rangle &= \langle w',Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}x,z^{-1})w\rangle \\ &= \langle w',Y(-z^{-2}x,z^{-1})w\rangle \\ &= \langle w',(-\sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{n-1})w\rangle \\ &= \langle w',-\sum_{n\in\mathbb{Z}} x(-n)z^{-n-1}w\rangle.\end{aligned}$$

Odnosno, u zapisu po komponentama

$$x(n)^* = -x(-n).$$

Po uzoru na [22] i [34], motivirani s (3.1), definiramo bilinearnu formu

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V^k\left(TA_1^{(1)}\right)\times V^k\left(TA_1^{(1)}\right)\to\mathbb{C}$$

na sljedeći način:

$$\langle\mathbf{1}\mid\mathbf{1}\rangle = 1,$$

$$\langle X\mathbf{1}\mid Y\mathbf{1}\rangle = \langle\mathbf{1}\mid X^*Y\mathbf{1}\rangle.$$

Ovako definirana bilinearna forma je invarijantna.
Posljedica invarijantnosti bilinearne forme je ortogonalnost svojstvenih potprostora $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)_{(r)}$ i $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)_{(s)}$, za $r\neq s$, obzirom na $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ i simetričnost bilinearne forme.
Svojstvo nedegeneriranosti je ekvivalentno egzistenciji izomorfizma između kontragredijentnog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)^*$ adjungiranog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$ i u tom slučaju se bilinearna forma $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ podudara s bilinearnom formom (3.1). Detaljni dokazi invarijantnosti, ortogonalnosti, simetričnosti i nedegeneriranosti bilinearne forme mogu se pronaći u [34] i [22].

Zbog ortogonalnosti svojstvenih potprostora dovoljno je promatrati restrikciju bilinearne forme na potprostor $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)_{(s)}$, kojeg ćemo u nastavku zbog jednostavnosti označavati s $V_{(s)}$

U prethodnom poglavlju smo definirali da je baza od $V_{(s)}$ sačinjena od monoma

$$\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1},$$

za koje vrijedi

$$\sum_{i=1}^{p} n_i + \sum_{j=1}^{q} m_j = s.$$

Uočimo da se u definiciji javljaju particije prirodnog broja.
Po uzoru na [2] definirajmo particiju i uređaj na skupu tih particija. Neka je $n\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$ i $l\leq n$. Particija broja $n\in\mathbb{N}$ je uređena l-torka prirodnih brojeva

$$N = (n_1,n_2,\ldots,n_l)$$

za koju vrijedi

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_l > 0,$$
$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n.$$

Brojeve n_i nazivamo dijelovima particije, broj n težinom particije, u oznaci $|N|$, a broj l duljinom particije, u oznaci $l(N)$.

Označimo skup svih particija broja n s $\mathscr{P}_n$. Definirajmo uređaj na $\mathscr{P}_n$. Neka su $N = (n_1, n_2, \ldots, n_l)$ i $M = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ dvije particije broja n.

$$N \prec M \text{ ako postoji } r \text{ takav da je } n_1 = m_1, \ldots, n_{r-1} = m_{r-1} \text{ i } n_r > m_r.$$

Obzirom na definirane particije, zbog jednostavnosti, elemente baze

$$\overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}$$

ćemo pisati u kraćem obliku

$$\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1},$$

gdje je

$$\overline{A}(-N) := \overline{a_1}(-n_1)\cdots\overline{a_p}(-n_p) \text{ i } B(-M) := b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q),$$

za $a_k, b_l \in \mathfrak{sl}_2$ u odgovarajućem poretku. U nastavku ćemo koristiti i sljedeće oznake

$$\overline{A}^t(N) := \overline{a_p}(n_p)\cdots\overline{a_1}(n_1) \text{ i } B^t(M) := b_q(m_q)\cdots b_1(m_1),$$

za $a_k, b_l \in \mathfrak{sl}_2$.

Dodatno, za $X(-N) = x_1(-n_1)\cdots x_p(-n_p)$ definiramo

$$X^*(-N) = x_1^*(-n_1)\cdots x_p^*(-n_p),$$

gdje je $x_i \in TA_1$ i vrijedi $e^* = \overline{f}$, $f^* = \overline{e}$, $h^* = \overline{h}$, $\overline{e}^* = f$, $\overline{f}^* = e$, $\overline{h}^* = h$.

3.1.2. Kacova determinanta

U ovom pododjeljku proučavamo restrikciju prethodno definiranu bilinearnu formu na $V_{(s)} \times V_{(s)}$ te njoj pridruženu Kacovu determinantu. Cilj nam je učiniti matricu $\langle V_{(s)} \mid V_{(s)} \rangle$ što prikladnijom za računanje determinante. Sličan postupak, za druge galilejske algebre, se javlja u člancima [39], [12]. Kao glavnu motivaciju navodimo sljedeće primjere u kojima promatramo matrice $\langle V_{(1)} \mid V_{(1)} \rangle$ i $\langle V_{(2)} \mid V_{(2)} \rangle$ i njima pridružene Kacove determinante D_1 i D_2.

Primjer 3.1.3. Odredimo Kacovu determinantu D_1 bilinearne forme $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ restringirane na $V_{(1)} \times V_{(1)}$.

Elementi baze potprostora $V_{(1)}$ su svi monomi $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$ za koje vrijedi $|N|+|M|=1$ te su poredani tako da je matrica $\langle V_{(1)} \mid V_{(1)}\rangle$ gornjetrokutasta.

$$\langle V_{(1)} \mid V_{(1)}\rangle =$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} \bar{e}(-1)\mathbf{1} & \bar{h}(-1)\mathbf{1} & \bar{f}(-1)\mathbf{1} & f(-1)\mathbf{1} & h(-1)\mathbf{1} & e(-1)\mathbf{1} \end{array} \\
\begin{array}{c} f(-1)\mathbf{1} \\ h(-1)\mathbf{1} \\ e(-1)\mathbf{1} \\ \bar{e}(-1)\mathbf{1} \\ \bar{h}(-1)\mathbf{1} \\ \bar{f}(-1)\mathbf{1} \end{array} &
\begin{pmatrix}
-k & 0 & 0 & 0 & 0 & -k \\
0 & -2k & 0 & 0 & -2k & 0 \\
0 & 0 & -k & -k & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Uočimo

$$D_1 \neq 0, \text{ za } k \neq 0.$$

Primjer 3.1.4. Odredimo Kacovu determinantu D_2 bilinearne forme $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ restringirane na $V_{(2)} \times V_{(2)}$.

Elementi baze potprostora $V_{(2)}$ su svi monomi $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$ za koje vrijedi $|N|+|M|=2$. Matrica $\langle V_{(2)} \mid V_{(2)}\rangle$ je značajno većeg reda od matrice $\langle V_{(1)} \mid V_{(1)}\rangle$ i zbog toga ćemo je promatrati po blokovima.

Ako s $V_{(s)}^k$ označimo potprostor vektora (ukupne) težine s i komutativne težine k, onda promatramo sljedeće blokove

$$\langle V_{(2)}^0 \mid V_{(2)}^2\rangle =$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccccc} \bar{e}(-1)\bar{e}(-1)\mathbf{1} & \bar{e}(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1} & \bar{e}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} & \bar{h}(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1} & \bar{h}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} & \bar{f}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} & \bar{e}(-2)\mathbf{1} & \bar{h}(-2)\mathbf{1} & \bar{f}(-2)\mathbf{1} \end{array} \\
\begin{array}{c} f(-1)f(-1)\mathbf{1} \\ f(-1)h(-1)\mathbf{1} \\ f(-1)e(-1)\mathbf{1} \\ h(-1)h(-1)\mathbf{1} \\ h(-1)e(-1)\mathbf{1} \\ e(-1)e(-1)\mathbf{1} \\ f(-2)\mathbf{1} \\ h(-2)\mathbf{1} \\ e(-2)\mathbf{1} \end{array} &
\begin{pmatrix}
2k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 & -2k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\langle V_{(2)}^1 \mid V_{(2)}^1 \rangle =$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \bar{e}(-1)f(-1)\mathbf{1} & \bar{e}(-1)h(-1)\mathbf{1} & \bar{e}(-1)e(-1)\mathbf{1} & \bar{h}(-1)f(-1)\mathbf{1} & \bar{h}(-1)h(-1)\mathbf{1} & \bar{h}(-1)e(-1)\mathbf{1} & \bar{f}(-1)f(-1)\mathbf{1} & \bar{f}(-1)h(-1)\mathbf{1} & \bar{f}(-1)e(-1)\mathbf{1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} f(-1)\bar{e}(-1)\mathbf{1} \\ f(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1} \\ f(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} \\ h(-1)\bar{e}(-1)\mathbf{1} \\ h(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1} \\ h(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} \\ e(-1)\bar{e}(-1)\mathbf{1} \\ e(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1} \\ e(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\langle V_{(2)}^2 \mid V_{(2)}^0 \rangle =$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} f(-2)\mathbf{1} & h(-2)\mathbf{1} & e(-2)\mathbf{1} & f(-1)f(-1)\mathbf{1} & f(-1)h(-1)\mathbf{1} & f(-1)e(-1)\mathbf{1} & h(-1)h(-1)\mathbf{1} & h(-1)e(-1)\mathbf{1} & e(-1)e(-1)\mathbf{1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \bar{e}(-2)\mathbf{1} \\ \bar{h}(-2)\mathbf{1} \\ \bar{f}(-2)\mathbf{1} \\ \bar{e}(-1)\bar{e}(-1)\mathbf{1} \\ \bar{e}(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1} \\ \bar{e}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} \\ \bar{h}(-1)\bar{h}(-1)\mathbf{1} \\ \bar{h}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} \\ \bar{f}(-1)\bar{f}(-1)\mathbf{1} \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
-2k & 0 & 0 & 0 & -2k & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4k & 0 & 0 & 0 & 2k & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2k & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8k^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k^2
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Konačno imamo blok-gornjetrokutastu matricu

$$\langle V_{(2)} \mid V_{(2)} \rangle = \begin{pmatrix} \langle V_{(2)}^0 \mid V_{(2)}^2 \rangle & * & * \\ 0 & \langle V_{(2)}^1 \mid V_{(2)}^1 \rangle & * \\ 0 & 0 & \langle V_{(2)}^2 \mid V_{(2)}^0 \rangle \end{pmatrix}$$

Uočimo

$$D_2 \neq 0, \text{ za } k \neq 0.$$

Iz prethodnih primjera je jasno da elemente baze po stupcima, odnosno retcima, moramo poredati na odgovarajući način kako bismo dobili blok-gornjetrokutastu matricu. Najprije poredajmo monome po stupcima.

Neka su $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$ i $\overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1}$ dva proizvoljna elementa baze potprostora $V_{(s)}$ i neka je komutativni stupanj monoma definiran kao u (2.6). Definiramo sljedeći uređaj:

$$\begin{aligned}
&\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1} \prec_{V_{(s)}} \overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1} \text{ ako je}\\
&\deg_c \overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1} > \deg_c \overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1}\\
&\text{ili } \deg_c \overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1} = \deg_c \overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1} \text{ i } N' \prec N\\
&\text{ili } \deg_c \overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1} = \deg_c \overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1} \text{ i } N' = N \text{ i } M \prec M'\\
&\text{ili } \deg_c \overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1} = \deg_c \overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1} \text{ i } N' = N \text{ i } M = M'\\
&\text{i leksikografski poredak komponenti induciran s (2.3).}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Sada poredajmo monome po stupcima.

Neka su elementi baze $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$ poredani kako smo prethodno definirali. Poredak po retcima dobivamo tako da svaki element $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$ zamijenimo s $\overline{A}^*(-N)B^*(-M)\mathbf{1}$. Stoga matricu $\langle V_{(s)} \mid V_{(s)}\rangle$ zapisujemo na sljedeći način.

$$\langle V_{(s)} \mid V_{(s)}\rangle = \begin{pmatrix} \langle V^0_{(s)} \mid V^s_{(s)}\rangle & \langle V^0_{(s)} \mid V^{s-1}_{(s)}\rangle & \cdots & \langle V^0_{(s)} \mid V^0_{(s)}\rangle \\ \langle V^1_{(s)} \mid V^s_{(s)}\rangle & \langle V^1_{(s)} \mid V^{s-1}_{(s)}\rangle & \cdots & \langle V^1_{(s)} \mid V^0_{(s)}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V^s_{(s)} \mid V^s_{(s)}\rangle & \langle V^s_{(s)} \mid V^{s-1}_{(s)}\rangle & \cdots & \langle V^s_{(s)} \mid V^0_{(s)}\rangle \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Sada provjerimo svojstva bilinearne forme kako bismo izveli zaključke o (3.3).

Neka su $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$ i $\overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1}$ dva proizvoljna elementa baze potprostora $V_{(s)}$. Iz definicije bilinearne forme te zbog svojstva komutativnosti slijedi, do na predznak,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1} \mid \overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1}\rangle &= \langle B(-M)\mathbf{1} \mid \overline{A}^t(N)\overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1}\rangle\\
&= \langle B(-M)\mathbf{1} \mid \overline{C}(-N')\overline{A}^t(N)D(-M')\mathbf{1}\rangle\\
&= \langle \overline{C}^t(N')B(-M)\mathbf{1} \mid \overline{A}^t(N)D(-M')\mathbf{1}\rangle.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Analizu provodimo slično kao u [39] i [12] gdje su proučavane neke druge Takiffove algebre.

Neka je $|N'| > |M| (\Leftrightarrow |N| > |M'|)$. Uzastopnom primjenom komutatorske formule na monomima dobivamo

$$\overline{C}(N')B(-M)\mathbf{1} = 0. \tag{3.5}$$

Odnosno,

$$\langle \overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1} \mid \overline{C}(-N')D(-M')\mathbf{1}\rangle = 0.$$

Sada direktno slijedi sljedeća tvrdnja.

Lema 3.1.5. Ako je $i+j>s$, onda je

$$\langle V^i_{(s)} \mid V^j_{(s)}\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Stoga je matrica $\langle V_{(s)} \mid V_{(s)}\rangle$ blok-gornjetrokutasta i njezina determinanta je jednaka produktu determinanti matrica $\langle V^d_{(s)} \mid V^{s-d}_{(s)}\rangle$, za $d \in \{0,\dots,s\}$.
Prema tome, nadalje promatramo bilinearnu formu kada je $|N'| = |M| = d$ i $|M| = |N'| = s-d$.
No, očigledno je $\overline{C}^t(N')B(-M)\mathbf{1} \in \mathbb{C}\mathbf{1}$ i $\overline{A}^t(N)D(-M')\mathbf{1} \in \mathbb{C}\mathbf{1}$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle \overline{C}^t(N')B(-M)\mathbf{1}|\overline{A}^t(N)D(-M')\mathbf{1}\rangle &= \langle \overline{C}^t(N')B(-M)\mathbf{1}|\mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}|\overline{A}^t(N)D(-M')\mathbf{1}\rangle \\
&= \langle \mathbf{1}|B^t(M)\overline{C}(-N')\mathbf{1}\rangle\langle D^t(M')\overline{A}(-N)\mathbf{1}|\mathbf{1}\rangle \\
&= \langle B(-M)\mathbf{1}|\overline{C}(-N')\mathbf{1}\rangle\langle \overline{A}(-N)\mathbf{1}|D(-M')\mathbf{1}\rangle. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Iz (3.7) slijedi

$$\langle V^d_{(s)} \mid V^{s-d}_{(s)}\rangle = \langle V^0_{(s-d)} \mid V^{s-d}_{(s-d)}\rangle \otimes \langle V^0_{(d)} \mid V^d_{(d)}\rangle \tag{3.8}$$

pa daljnje proučavanje matrice možemo ograničiti na proučavanje matrice $\langle V^0_{(s)}|V^s_{(s)}\rangle$ (jer je determinanta tenzorskog produkta jednaka produktu determinanti faktora).
U sljedećem primjeru pogledajmo čemu je jednaka matrica $\langle V^1_{(2)} \mid V^1_{(2)}\rangle$.

Primjer 3.1.6. Uočimo da $\langle V^1_{(2)} \mid V^1_{(2)}\rangle$ možemo zapisati kao tenzorski produkt dvije odgovarajuće matrice.

$$\langle V^1_{(2)} \mid V^1_{(2)}\rangle =$$

$$\begin{pmatrix}
-k\begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} & & \mathbf{0} \\
& -2k\begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} & \\
\mathbf{0} & & -k\begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}
\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} =$$

$$\langle V^0_{(1)} \mid V^1_{(1)} \rangle \otimes \langle V^1_{(1)} \mid V^0_{(1)} \rangle.$$

U svrhu proučavanja matrice $\langle V^0_{(s)} \mid V^s_{(s)} \rangle$ na početku dokažimo sljedeću važnu lemu.

Lema 3.1.7. Neka je $N = (n_1, \dots, n_r)$, $m \geq n_1$ i $x \in \mathfrak{sl}_2$. Tada je

$$x(m)\overline{A}(-N)\mathbf{1} = [x(m), x^*(-m)] \frac{\partial}{\partial_{x^*(-m)}} \overline{A}(-N)\mathbf{1}.$$

Dokaz. Slijedi iz $x(m)\overline{A}(-N)\mathbf{1} = \sum_{i=1}^r \overline{a}_1(-n_1) \cdots [x(m), \overline{a}_i(-n_i)] \cdots \overline{a}_r(-n_r)\mathbf{1}$ i pravila komutiranja. Naime, ako je $m > n_1$, onda je svaki komutator u gornjoj sumi $\overline{b}(m - n_1)$ i pripadni sumand je 0.

S druge strane, u

$$x(m)\overline{e}(-m)^{p_e}\overline{h}(-m)^{p_h}\overline{f}(-m)^{p_f} \cdots \mathbf{1}$$

nenula sumandi dolaze samo od $[x(m), x^*(-m)]$ pa tvrdnja slijedi. ■

Sada direktno slijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 3.1.8. Matrica $\langle V^0_{(s)} \mid V^s_{(s)} \rangle$ je gornjetrokutasta, s dijagonalnim elementima oblika mk^r, za neke $m, r \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Iz prethodne leme (3.1.7) slijedi da je za $|M| = |N|$ i $M \prec_{V_{(s)}} N$

$$\langle B(-M)\mathbf{1} \mid \overline{A}(-N)\mathbf{1} \rangle = 0$$

pa je $\langle V^0_{(s)} \mid V^s_{(s)} \rangle$ blok-gornjetrokutasta te nadalje promatramo blokove na dijagonali

$$\langle B(-N)\mathbf{1} \mid \overline{A}(-N)\mathbf{1} \rangle.$$

No, također iz iste leme, slijedi da je

$$B^t(N)\overline{A}(-N)\mathbf{1} = \delta_{\overline{A}^*, B} \alpha k^{l(N)},$$

odnosno blokovi na dijagonali su dijagonalne matrice s dijagonalnim elementima oblika mk^r, za neke $m, r \in \mathbb{N}$. ■

Dakle,

$$D_s \neq 0 \text{ za } k \neq 0$$

što je ekvivalentno s ireducibilnosti adjungiranog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$. Stoga direktno slijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 3.1.9. Verteks-algebra V^k je prosta za svaki $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Napomena 3.1.10. Analogni rezultati vrijede za galilejsku W_3 algebru, [39], i galilejsku Vir, odnosno $W(2,2)$-algebru, [45]. Izvjesno je da bi isto trebalo vrijediti i za galilejske W_N algebre, za sve N.

4. ZHUOVA ALGEBRA $A\left(V^k\right)$

Asocijativnu algebru $A(V)$ pridruženu verteks-algebri V konstruirao je Yongchang Zhu 1996. godine, [47], gdje je, kao vektorski prostor, $A(V)$ kvocijentni potprostor od V, a množenje je inducirano verteks operatorima na V. Zhuove algebre su važan dio teorije verteks-algebri i proučavane su u brojnim člancima. Važnost Zhuove algebre $A(V)$ proizlazi iz bijektivne korespondencije između klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija od V i klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija od $A(V)$, [47].

O Zhuovim algebrama nekih posebnih verteks-algebri možemo čitati u mnogobrojnim člancima, neki od njih su [24], [43], [19], [1], [4], [3]. No, koliko znamo, ne postoji literatura u kojoj se određuje Zhuova algebra neke Takiffove verteks-algebre.

Cilj ovog poglavlja je odrediti Zhuovu algebru Takiffove verteks-algebre tipa $A_1^{(1)}$.

4.1. TEORIJA ZHUOVIH ALGEBRI

U ovom odjeljku dajemo kratki pregled definicija i osnovnih svojstava teorije Zhuovih algebri (prateći [47]). Neka je V algebra verteks operatora $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ i neka je $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ modul od V. Pišemo $\deg a = n$ za $a \in V_n$. Za homogeni $a \in V$, operator $o(a) := a(\deg a - 1)$ čuva stupanj od M.

Definicija 4.1.1. Neka je bilinearna operacija $*\colon V \times V \to V$ i $\circ\colon V \times V \to V$ definirana s

$$a * b = \mathrm{Res}_z \left(b(a,z) \frac{(z+1)^{\deg a}}{z} b \right),$$

za $a \in V(n)$ i $b \in V$. Označimo s $O(V)$ potprostor od V razapet elementima

$$\mathrm{Res}_z \left(b(a,z) \frac{(z+1)^{\deg a}}{z^2} b \right),$$

a s $A(V)$ kvocijentni prostor $V/O(V)$ kojeg nazivamo Zhuovom algebrom pridruženoj V.

Sliku elementa $a \in V$, obzirom na pridruživanje $V \mapsto A(V)$, ćemo označavati s $[a]$.

Teorem 4.1.2. $O(V)$ je obostrani ideal od V obzirom na množenje $*$ te je $*$ dobro definirano množenje na $A(V)$. Štoviše

i) $A(V)$ je asocijativna algebra obzirom na množenje $*$.

ii) $[\mathbf{1}]$ je jedinica u algebri $A(V)$.

iii) $[\omega]$ je centralni element u $A(V)$.

Sljedeće leme su važne za dokaz prethodnog teorema i općenito za računanje u Zhuovoj algebri.

Lema 4.1.3. $L_{-1}a + L_0 a \in O(V)$, za svaki $a \in V$.

Lema 4.1.4. Za svaki homogeni element $a \in V$, $m \geq n \geq 0$, vrijedi

$$\operatorname{Res}_z \left(Y(a,z) \frac{(z+1)^{\deg a + n}}{z^{2+m}} b \right) \in O(V).$$

Lema 4.1.5. Za svaki homogeni $a, b \in V$ vrijedi

$$a * b \equiv \operatorname{Res}_z \left(Y(b,z) \frac{(z+1)^{\deg b - 1}}{z} a \right) \mod O(V), \tag{4.1}$$

$$a * b - b * a \equiv \operatorname{Res}_z \left(Y(a,z)(z+1)^{\deg a - 1} b \right) \mod O(V). \tag{4.2}$$

Sljedeća dva teorema opisuju važnost Zhuovih algebri.

Teorem 4.1.6. Ako je $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ modul od V, tada je (top level) M_0 modul za asocijativnu algebru $A(V)$, na kojeg $[a] \in A(V)$ djeluje s $o(a)$.

Vrijedi i obrat navedenog teorema.

Teorem 4.1.7. Ako je W modul za asocijativnu algebru $A(V)$, tada postoji V-modul $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ takav da je $M_0 \cong W$ kao $A(V)$-modul.

Navedimo još važnu propoziciju iz [1], koju ćemo u nastavku koristiti za određivanje generatora Zhuove algebre.

Propozicija 4.1.8. Neka je V verteks-algebra jako generirana skupom S. Tada je Zhuova algebra $A(V)$, kao asocijativna algebra, generirana skupom $\{[a] : a \in S\}$.

4.2. Zhuova algebra $A\left(V^k\right)$

U ovom odjeljku ćemo opisati Zhuovu algebru $A\left(V^k\right)$. U Teoremu 3.1.1. članka [24] je dokazano da je Zhuova algebra univerzalne afine algebre verteks operatora nivoa k, u oznaci $A(V^k(\mathfrak{g}))$, izomorfna univerzalnoj omotačkoj algebri $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Motivirani navedenim teoremom u nastavku ćemo dati identifikaciju Zhuove algebre u našem slučaju, a dokaz tvrdnje će biti jednostavno proširenje dokaza spomenutog teorema.

4.2.1. Generatori i relacije Zhuove algebre $A\left(V^k\right)$

Prethodno smo definirali bazu induciranog modula $V^k\left(TA_1^{(1)}\right)$. U nastavku koristimo skraćeni zapis elementa baze

$$\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}.$$

Iz definicije baze zaključujemo da je V^k jako generirana skupom TA_1. Sada iz Propozicije (4.1.8) slijedi da je Zhuova algebra $A\left(V^k\right)$, kao asocijativna algebra, generirana skupom $\{[x] \mid x \in TA_1\}$.

Po uzoru na [24], odredimo relacije koje vrijede u Zhuovoj algebri $A\left(V^k\right)$. Ako u tvrdnju Leme (4.1.4) uvrstimo $n=0$, onda za $a=x(-1)\mathbf{1}, b=v\in V^k$ imamo

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_z\left(Y(x(-1)\mathbf{1},z)\frac{(z+1)^{\deg x(-1)\mathbf{1}}}{z^{2+m}}v\right)\in O(V^k)\\
&\operatorname{Res}_z\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}x(k)z^{-k-1}\frac{(z+1)}{z^{2+m}}v\right)\in O(V^k)\\
&\operatorname{Res}_z(z+1)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}x(k)vz^{-k-3-m}\right)\in O(V^k)\\
&\operatorname{Res}_z\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}x(k)vz^{-k-2-m}\right)+\operatorname{Res}_z\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}x(k)vz^{-k-3-m}\right)\in O(V^k).
\end{aligned}$$

Dakle, za $m\geq 0$ vrijedi

$$x(-m-1)v+x(-m-2)v\in O\left(V^k\right), \tag{4.3}$$

gdje je $x\in TA_1$.

4.2.2. Identifikacija Zhuove algebre $A\left(V^k\right)$

U nastavku navodimo glavni teorem ovog poglavlja.

Neka je $\mathscr{U}(TA_1)$ univerzalna omotačka algebra pridružena Takiffovoj algebri TA_1. Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 4.2.1. Zhuova algebra Takiffove algebre verteks-operatora V^k u oznaci, $A\left(V^k\right)$, je izomorfna univerzalnoj omotačkoj algebri $\mathscr{U}(TA_1)$.

Dokaz. Dokaz tvrdnje je poopćenje dokaza Teorema 3.1.1. u članku [24]. Definirajmo linearni operator

$$F : \mathscr{U}(TA_1) \to A\left(V^k\right)$$

na sljedeći način

$$\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q \mapsto$$

$$\left[(\overline{a_1}(-1)+\overline{a_1}(0))\cdots(\overline{a_p}(-1)+\overline{a_p}(0))(b_1(-1)+b_j(0))\cdots(b_q(-1)+b_q(0))\mathbf{1}\right].$$

Dokažimo da je F homomorfizam algebri, tj.

$$F(\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q\cdot\overline{c_1}\cdots\overline{c_r}d_1\cdots d_s) =$$

$$F(\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q)*F(\overline{c_1}\cdots\overline{c_r}d_1\cdots d_s).$$

Za $x\in TA_1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
[x(-1)\mathbf{1}]*[v] &= \mathrm{Res}_z Y(x(-1)\mathbf{1},z)\frac{(z+1)^{\deg x(-1)\mathbf{1}}}{z}v+O(V^k)\\
&= \mathrm{Res}_z\sum_{n\in\mathbb{Z}}x(n)vz^{-n-1}+\mathrm{Res}_z\sum_{n\in\mathbb{Z}}x(n)vz^{-n-2}+O(V^k)\\
&= [(x(0)+x(-1))v]. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Iz relacije (4.4) dobivamo

$$\begin{aligned}
&F(\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q\cdot\overline{c_1}\cdots\overline{c_r}d_1\cdots d_s)\\
&=\left[(\overline{a_1}(-1)+\overline{a_1}(0))\cdots(b_q(-1)+b_q(0))(\overline{c_1}(-1)+\overline{c_1}(0))\cdots(d_s(-1)+d_s(0))\mathbf{1}\right]\\
&=[(\overline{a_1}(-1)\mathbf{1}]*\cdots*[d_s(-1)\mathbf{1}].
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
&F(\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q)\\
&=\left[(\overline{a_1}(-1)+\overline{a_1}(0))\cdots(b_q(-1)+b_q(0))\mathbf{1}\right]\\
&=[(\overline{a_1}(-1)\mathbf{1}]*\cdots*[b_q(-1)\mathbf{1}]
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&F(\overline{c_1}\cdots\overline{c_r}d_1\cdots d_s)\\
&=[(\overline{c_1}(-1)+\overline{c_1}(0))\cdots(d_s(-1)+d_s(0))\mathbf{1}]\\
&=[(\overline{c_1}(-1)\mathbf{1}]*\cdots*[d_s(-1)\mathbf{1}]
\end{aligned}$$

po definiciji slijedi da je F homomorfizam algebri.

Primjenom relacije (4.4) i Leme (4.1.5) slijedi jednakost

$$[v] * [x(-1)\mathbf{1}] = [x(-1))v], \tag{4.5}$$

za $x \in TA_1, v \in V^k$. Dodatno, dokažimo da vrijedi relacija

$$\left[\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}\right] = (-1)^{|N|+|M|-l(N)-l(M)} \left[\overline{A}\left((-1)^{l(N)}\right) B\left((-1)^{l(M)}\right)\mathbf{1}\right]. \tag{4.6}$$

Relaciju dokazujemo primjenom matematičke indukcije po duljini monoma $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$. Ako je duljina monoma $\overline{A}(-N)B(-M)\mathbf{1}$ jedan, tj. $l(N)+l(M)=1$, onda uzastopnom primjenom relacije (4.3) direktno slijedi

$$[\overline{a_1}(-n_1)\mathbf{1}] = (-1)^{n_1-1}[\overline{a_1}(-1)\mathbf{1}].$$

Analogno, primjenom (4.3), slijedi

$$[a_1(-n_1)\mathbf{1}] = (-1)^{n_1-1}[a_1(-1)\mathbf{1}].$$

Ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za monome čija je duljina strogo manja od $l(N)+l(M) = p+q$, onda primjenom (4.5) i pretpostavke matematičke indukcije na v dobivamo

$$\left[\overline{a_1}(-n_1)\underbrace{\overline{a_2}(-n_2)\cdots\overline{a_p}(-n_p)b_1(-m_1)\cdots b_q(-m_q)\mathbf{1}}_{\text{v}}\right] = (-1)^{n_1-1}[\overline{a_1}(-1)v]$$
$$= (-1)^{n_1-1}[v] * [\overline{a_1}(-1)]$$
$$= (-1)^{n_1-1}\left[\overline{a_2}(-1)\cdots\overline{a_p}(-1)b_1(-1)\cdots b_q(-1)\mathbf{1}\right] * [\overline{a_1}(-1)]$$
$$= (-1)^{n_1-1}\cdots(-1)^{n_p-1}(-1)^{m_1-1}\cdots(-1)^{m_q-1}\left[\overline{a_1}(-1)\overline{a_2}(-1)\cdots\overline{a_p}(-1)b_1(-1)\cdots b_q(-1)\mathbf{1}\right].$$

Sada konačno možemo dokazati surjektivnost.

Neka je $\left[\overline{a_1}(-n_1-1)\cdots\overline{a_p}(-n_p-1)b_1(-m_1-1)\cdots b_q(-m_q-1)\mathbf{1}\right]$ proizvoljni element iz $A\left(V^k\right)$. Primjenom (4.5) i (4.6) na monom dobivamo

$$\left[\overline{a_1}(-n_1-1)\cdots\overline{a_p}(-n_p-1)b_1(-m_1-1)\cdots b_q(-m_q-1)\mathbf{1}\right]$$
$$= (-1)^{n_1}\cdots(-1)^{n_p}(-1)^{m_1}\cdots(-1)^{m_q}\left[\overline{a_1}(-1)\overline{a_2}(-1)\cdots b_q(-1)\mathbf{1}\right]$$
$$= (-1)^{n_1+\cdots+m_q}[b_q(-1)\mathbf{1}] * \cdots * [\overline{a_1}(-1)\mathbf{1}]$$
$$= F(b_q\cdots b_1\overline{a_p}\cdots\overline{a_1}).$$

Potrebno je još dokazati injektivnost, odnosno da je jezgra homomorfizma $\operatorname{Ker} F$ trivijalna. Po definiciji je

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} F &= \{\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q \mid F(\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q) = [0]\} \\ &= \{\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q \mid \left[(\overline{a_1}(-1)+\overline{a_1}(0))\cdots(b_q(-1)+b_q(0))\mathbf{1}\right] = [0]\} \\ &= \{\overline{a_1}\cdots\overline{a_p}b_1\cdots b_q \mid \overline{a_1}(-1)+\overline{a_1}(0))\cdots(b_q(-1)+b_q(0))\mathbf{1} \in O\left(V^k\right)\right)\}\end{aligned}$$

Dakle, ako dokažemo da je cijeli $O\left(V^k\right)$ generiran samo elementima oblika

$$(x(-m-1)+x(-m-2))\,v, \text{ za } m \geq 0 \text{ i } x \in TA_1,$$

onda slijedi da je $\operatorname{Ker} F$ trivijalna. Pretpostavimo da je O', obostrani ideal od V^k obzirom na množenje $*$, generiran samo s elementima

$$(x(-m-1)+x(-m-2))\,v, \text{ za } m \geq 0.$$

Dokažimo da je $O' = O\left(V^k\right)$.

Inkluzija $O' \subseteq O\left(V^k\right)$ vrijedi trivijalno, jer je za $x \in TA_1$

$$(x(-m-1)+x(-m-2))\,v = \operatorname{Res}_z\left(Y\left(x(-1)\mathbf{1},z\right)\frac{(z+1)^{\deg x(-1)\mathbf{1}}}{z^{2+m}}v\right) \in O\left(V^k\right).$$

Neka je sada

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(b_1,z\right)\frac{(z+1)^{\deg b_1}}{z^2}b_2\right) \in O\left(V^k\right),$$

za $b_1, b_2 \in V^k$. Metodom matematičke indukcije po $\deg b_1$ dokažimo da je to ujedno i element iz O'.

Ako je $\deg b_1 = 1$, tj. $b_1 = x(-1)\mathbf{1}$ za $x \in TA_1$, onda je

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(x(-1)\mathbf{1},z\right)\frac{(z+1)^1}{z^2}b_2\right) = (x(-m-1)+x(-m-2))\,b_2 \in O'$$

i time je dokazana baza matematičke indukcije.

Dokažimo sada da za proizvoljne $b_1, b_2 \in V^k$ vrijedi

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(b_1,z\right)\frac{(z+1)^{\deg b_1}}{z^2}b_2\right) \in O'$$

uz pretpostavku matematičke indukcije da za sve $c \in V^k$ takve da $\deg c < \deg b_1$ i $d \in V^k$ vrijedi

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(c,z\right)\frac{(z+1)^{\deg c}}{z^2}d\right) \in O'.$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pisati $b_1 = \overline{a}(-n)v$, za $a \in \mathfrak{sl}_2$ i $n > 0$.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_z \left(Y\left(b_1, z\right) \frac{(z+1)^{\deg b_1}}{z^2} b_2 \right) \\
&= \operatorname{Res}_z \left(Y\left(\overline{a}(-n)v, z\right) \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \right) \\
&= \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} : \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} Y\left(\overline{a}, z\right) \right) Y(v,z) : \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} : \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{a}(m) z^{-m-1} \right) \sum_{l\in\mathbb{Z}} v(l) z^{-l-1} : \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-m-1)\cdots(-m-n+1) : \overline{a}(m) v(l) : z^{-m-n} z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m<0} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-m-1)\cdots(-m-n+1)\, \overline{a}(m) v(l) z^{-m-n} z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&+ \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m\geq 0} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-m-1)\cdots(-m-n+1)\, v(l) \overline{a}(m) z^{-m-n} z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 .
\end{aligned}$$

Raspišimo prvi pribrojnik koristeći relaciju $\overline{a}(m) = (-1)^{-m-1}\overline{a}(-1)$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m<0} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-m-1)\cdots(-m-n+1)\, \overline{a}(m) v(l) z^{-m-n} z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m<-n+1} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-m-1)\cdots(-m-n+1)\, (-1)^{-m-1} \overline{a}(-1) v(l) z^{-m-n} z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \overline{a}(-1) \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m<-n+1} (-m-1)^{\underline{n-1}} (-1)^{-m-1} z^{-m-n} \sum_{l\in\mathbb{Z}} v(l) z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \overline{a}(-1) \operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m<-n+1} \frac{(-m-1)!}{(-m-n)!} (-1)^{-m-1} z^{-m-n} \sum_{l\in\mathbb{Z}} v(l) z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \overline{a}(-1) \operatorname{Res}_z \sum_{m<-n+1} \binom{-m-1}{n-1} (-1)^{-m-1} z^{-m-n} \sum_{l\in\mathbb{Z}} v(l) z^{-l-1} \frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= \overline{a}(-1) \operatorname{Res}_z (-1)^{n-1} (1+z)^{-n} \sum_{l\in\mathbb{Z}} v(l) z^{-l-1} \frac{(1+z)^{\deg v+n}}{z^2} b_2 \\
&= (-1)^{n-1} \overline{a}(-1) \underbrace{\operatorname{Res}_z Y(v,z) \frac{(1+z)^{\deg v}}{z^2} b_2 .}_{\in O' \ p.p.m.i.}
\end{aligned}$$

Kako je O' obostrani ideal od V^k obzirom na $*$, to izraz s desne strane pripada O' (zbog (4.5)).

Raspisivanjem drugog pribrojnika dobivamo

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_z \frac{1}{(n-1)!}\sum_{m\geq 0}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-m-1)\cdots(-m-n+1)\,v(l)\overline{a}(m)z^{-m-1}z^{-l-1}\frac{(z+1)^{\deg v+n}}{z^2}b_2\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{m\geq 0}(-m-1)\cdots(-m-n+1)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\operatorname{Res}_z\sum_{l\in\mathbb{Z}}v(l)z^{-l-1}\frac{(z+1)^{\deg v}}{z^{2+m+i}}\overline{a}(m)b_2.
\end{aligned}$$

Preostaje dokazati

$$\operatorname{Res}_z\sum_{l\in\mathbb{Z}}v(l)z^{-l-1}\frac{(z+1)^{\deg v}}{z^{2+m+i}}\overline{a}(m)b_2\in O'.$$

U tu svrhu, dokažimo opću tvrdnju

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(a,z\right)\frac{(z+1)^{\deg a}}{z^k}b\right)\in O',$$

za $k\geq 2$ i proizvoljne $a,b\in V^k$.

Po uzoru na [47], dokaz provodimo matematičkom indukcijom po k. Za $k=2$ tvrdnja vrijedi po pretpostavci. Uz pretpostavku

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(a,z\right)\frac{(z+1)^{\deg a}}{z^k}b\right)\in O',$$

za proizvoljne $a,b\in V^k$, dokažimo tvrdnju

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(a,z\right)\frac{(z+1)^{\deg a}}{z^{k+1}}b\right)\in O'.$$

Neka su $a=L(-1)u,b\in V^k$. Po pretpostavci matematičke indukcije je

$$\operatorname{Res}_z\left(Y\left(L(-1)u,z\right)\frac{(z+1)^{\deg L(-1)u}}{z^k}b\right)\in O'.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_z\left(Y\left(L(-1)u,z\right)\frac{(z+1)^{\deg L(-1)u}}{z^k}b\right)&=\operatorname{Res}_z\left(Y\left(L(-1)u,z\right)\frac{(z+1)^{\deg u+1}}{z^k}b\right)\\
&=\operatorname{Res}_z\left(\frac{d}{dz}(Y\left(u,z\right)\frac{(z+1)^{\deg u+1}}{z^k}b\right)\\
&=-\operatorname{Res}_z\left(Y\left(u,z\right)\frac{d}{dz}\frac{(z+1)^{\deg u+1}}{z^k}b\right)\\
&=-(\deg u+1)\operatorname{Res}_z\left(Y\left(u,z\right)\frac{(z+1)^{\deg u}}{z^2}b\right)\\
&\quad+k\operatorname{Res}_z\left(Y\left(u,z\right)\frac{(z+1)^{\deg u}}{z^k}b\right)\\
&\quad+k\operatorname{Res}_z\left(Y\left(u,z\right)\frac{(z+1)^{\deg u}}{z^{k+1}}b\right)
\end{aligned}$$

Kako je s lijeve strane jednakosti element iz O' te s desne prvi i drugi pribrojnik, to vrijedi da je i treći pribrojnik s desna iz O'. Konačno vrijedi

$$O' = O\left(V^k\right).$$

$\blacksquare$

5. VERTEKS PODALGEBRA OD V^k

U ovom poglavlju ispitujemo postojanje podalgebre od V^k izomorfne $L^{W(2,2)}(c_L, c_W)$.
Polazeći od Virasorove algebre Vir u literaturi (matematičke) fizike primjenom galilejskih kontrakcija konstruira se galilejska konformna (ili Virasoro) algebra, [41], odnosno BMS_3 algebra, [13], dok u literaturi iz matematike tu algebru nazivamo $W(2,2)$ algebra, [45]. Dakle, polazeći od iste algebre na dva potpuno različita načina dobiva se ista algebra. Strogim matematičkim pristupom, preko generatora i relacija Zhang-Dong konstruiraju $W(2,2)$ algebru, dok Raymond-Rasmussen to čine primjenom galilejskih kontrakcija. Na početku dajemo kratki pregled galilejskih konformnih algebri te rezultate koji su motivacija za ovo poglavlje.

5.1. GALILEJSKE KONFORMNE ALGEBRE

U članku [41], J. Rasmussen i C. Raymond počevši od tenzorskog produkta Virasorove algebre Vir centralnog naboja c, generirane s T i njene kopije $\overline{Vir}$ centralnog naboja $\overline{c}$, generirane s $\overline{T}$ primjenom galilejskih kontrakcija konstruiraju algebru generiranu s T^+ i T^- centralnih naboja c^+ i c^-, gdje T^+ generira Virasorovu podalgebru Vir centralnog naboja c^+. Za polja $T^\pm = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^\pm z^{-n-2}$ vrijede sljedeće relacije za komutator

$$[L_n^+, L_m^\pm] = (n-m)L_{n+m}^\pm + \frac{c^\pm}{12} n(n^2-1)\delta_{n,m}, \quad [L_n^-, L_m^-] = 0.$$

Štoviše, autori realiziraju u galilejskoj afinoj algebri galilejsku konformnu algebru, čiji su generatori T^+ i T^- izraženi preko generatora galilejske afine algebre. Dakle, afinoj Liejevoj algebri pridružuju galilejsku afinu algebru, a onda, poopćenjem Sugawarine konstrukcije, realiziraju galilejsku konformnu algebru. Prilikom konstrukciju galilejske konformne algebre autori koriste galilejske kontrakcije, no očigledno je da, koristeći rezultate iz prethodih poglavlja, isti postupak možemo učiniti i strogim matematičkim pristupom.

5.2. Verteks podalgebra od V^k izomorfna $L^{W(2,2)}(c_L, c_W)$

U Poglavlju 2 je dana definicija Takiffove algebre $TA_1^{(1)}$. Navedenoj Liejevoj algebri generiranoj s $\{a(n), \overline{a}(n), K, \overline{K} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ pridružena je verteks-algebra V^k. Zatim smo, iz [14], izveli formulu za konformni vektor ω u V^k, koji zadovoljava Virasorove relacije i čiji je centralni naboj $c = 6$.

$$\begin{aligned}\omega = &\frac{1}{2k} e(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k} f(-1)\overline{e}(-1)\mathbf{1} \\ &+ \frac{1}{2k}\overline{e}(-1)f(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}\overline{f}(-1)e(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{2k}\overline{h}(-1)h(-1)\mathbf{1} \\ &- \frac{k+4}{k^2}\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} - \frac{k+4}{4k^2}\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Po uzoru na [41], odnosno konstrukciju $W(2,2)$ algebre, želimo konstruirati drugi generator, u oznaci $\overline{\omega}$, preko generatora Takiffove algebre $TA_1^{(1)}$.
Zahtijevamo da je $\overline{\omega}$ vektor koji zadovoljava Virasorove relacije

$$\begin{aligned}&\omega_0\overline{\omega} = L(-1)\overline{\omega} = D\overline{\omega},\\ &\omega_1\overline{\omega} = L(0)\overline{\omega} = 2\omega,\\ &\omega_2\overline{\omega} = L(1)\overline{\omega} = 0,\\ &\omega_3\overline{\omega} = L(2)\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{c}\mathbf{1},\\ &\omega_n\overline{\omega} = 0, \text{ za } n \geq 4.\end{aligned}$$

i komutira sam sa sobom, tj.

$$\overline{\omega}_i\overline{\omega} = 0,$$

za $i \geq 0$. Prethodno smo pokazali da za svaki $a \in \mathfrak{sl}_2$ i $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$[L(m), \overline{a}(n)] = -n\overline{a}(m+n).$$

Iz ove relacije, po definiciji (1.1), slijedi da su vektori $\overline{a}(-1)\mathbf{1}$ primarni težine 1 obzirom na konformni vektor ω. Štoviše, lako se pokaže sljedeća tvrdnja.

Lema 5.2.1. Vektor

$$\overline{a}_1(-1)\cdots\overline{a}_k(-1)\mathbf{1}$$

je primarni vektor obzirom na ω.

Dokaz. Primjenom metode matematičke indukcije po k, tvrdnja direktno slijedi iz relacije

$$[L(m), \overline{a}(n)] = -n\overline{a}(m+n).$$

■

Za nas su od posebnog interesa monomi stupnja 2. Prema prethodnoj lemi jasno je da će komponente $\overline{a}(-1)\overline{b}(-1)\mathbf{1}$ zbog svojstva primarnosti uvijek dati trivijalan centralni naboj. Kako je $\overline{\omega}$ vektor komforne težine 2, to je jednak linearnoj kombinaciji monoma stupnja dva. No, koeficijenti uz komponente $\overline{a}(-2)\mathbf{1}$ su trivijalni zbog relacije $L(1)\overline{\omega} = 0$. Sada se lako dokazuje sljedeća tvrdnja.

Korolar 5.2.2. Vektor

$$\overline{\omega} = \frac{1}{k}\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{4k}\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1}$$

zadovoljava Virasorove relacije s centralnim nabojem $\overline{c} = 0$ i komutira sam sa sobom.

Dokaz. Ako definiramo

$$\overline{\omega} = A\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + B\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1} + C\overline{e}(-2)\mathbf{1} + D\overline{h}(-2)\mathbf{1} + E\overline{f}(-2)\mathbf{1},$$

onda iz prethodnog razmatranja, vektor $\overline{\omega}$ trivijalno zadovoljava Virasorove relacije i svojstvo komutativnosti za $C, D, E = 0$. Iz relacije za komutator vrijedi

$$[x(m), \overline{y}(n)] = [\overline{x}(m), y(n)],$$

pa iz komutatorske formule dobivamo $x_i\overline{y} = \overline{x}_i y$. Prema tome, mora biti

$$\overline{\omega}(0)e = \omega(0)\overline{e} = D\overline{e} \text{ i } \overline{\omega}(1)e = \omega(1)\overline{e} = \overline{e}.$$

Uvrštavanje izraza za $\overline{\omega}$ u $\overline{\omega}(0)e = \overline{e}$ dobivamo

$$\overline{\omega} = \frac{1}{k}\overline{e}(-1)\overline{f}(-1)\mathbf{1} + \frac{1}{4k}\overline{h}(-1)\overline{h}(-1)\mathbf{1}.$$

■

Spomenimo da su ovi vektori poseban slučaj vektora dobivenih u [41], gdje je dan općenitiji račun za proizvoljnu galilejsku afinu algebru. Sada trivijalno slijedi tvrdnja

Korolar 5.2.3. Polja pridružena prethodno definiranim vektorima ω i $\overline{\omega}$ generiraju podalgebru od V^k izomorfnu $L^{W(2,2)}(6,0)$.

Napomena 5.2.4. Prethodno definirani vektor $\overline{\omega}$ ima trivijalan centralni naboj, ali podalgebra s takvim svojstvom nije od posebne važnosti niti je zanimljiva za daljnje proučavanje. Stoga je prirodno pitati se postoje li neki drugi komutativni vektori s netrivijalnim centralnim nabojem. No, očekujemo, a jednako to tvrde autori u [41], da je prethodno definirani vektor $\overline{\omega}$ jedinstven, odnosno vektor s ovakvom linearnom kombinacijom jedino daje trivijalni centralni naboj. Pitanje koje ostavljamo otvorenim za budući rad je može li se definirati drugačiji konformni vektor (za kojeg težine nisu iste kao stupnjevi) uz kojeg se može pronaći $W(2,2)$ podalgebra za koju je $\overline{c} \neq 0$.

ZAKLJUČAK

U ovoj disertaciji je dana konstrukcija jedne nove verteks-algebre, u oznaci $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$. Konstruirana verteks-algebra je pridružena Takiffovoj afinoj Liejevoj algebri $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, u oznaci $TA_1^{(1)}$, te je dokazano je da su svi restringirani $TA_1^{(1)}$-moduli ujedno i moduli za verteks-algebru $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$.

Dodatno je dokazano da se $V^{k,\bar{k}}\left(TA_1^{(1)}\right)$ može opskrbiti strukturom algebre verteks operatora te da su sve algebre verteks operatora, za netrivijalni $\bar{k}$, međusobno izomorfne. Iz tog razloga, u nastavku je proučavana algebra verteks operatora $V^k\left(TA_1^{(1)}\right) := V^k$.

Nadalje su određene nultočke Kacove determinante i dokazana prostota verteks-algebre V^k za svaki netrivijalni k.

Zatim je dokazan izomorfizam

$$A\left(V^k\right) \cong \mathscr{U}\left(TA_1\right)$$

Zhuove algebre od V^k i univerzalne omotačke algebre od Takiffove $\mathfrak{sl}_2$ algebre.

Na kraju je konstruirana podalgebra od V^k izomorfna $L^{W(2,2)}(6,0)$.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Abe, T.: *A $\mathbb{Z}_2$-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator subalgebra*. Mathematische Zeitschrift, Vol.255, No. 4, 2007. ↑ 7, 58, 59.

[2] Adamović, D., Jandrić, B. i Radobolja, G.: *The $N = 1$ super Heisenberg-Virasoro vertex algebra at level zero*. Journal of Algebra and Its Applications, Vol.21, No. 12, 2350003, 2022. ↑ 49, 50.

[3] Adamović, D. i Kontrec, A.: *Classification of irreducible modules for Bershadsky-Polyakov algebra at certain levels*. Journal of Algebra and Its Applications, Vol.20, No. 06,2150102, 2021. ↑ 7, 58.

[4] Adamović, D. i Milas, A.: *The structure of Zhu's algebras for certain W-algebras*. Advances in Mathematics, Vol.227, Issue 6, 2011. ↑ 7, 58.

[5] Adamović, D. i Radobolja, G.: *Free Field Realization of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra at level zero and its applications*. Journal of Pure and Applied Algebra 219.10, 2015. ↑ 2.

[6] Adamović, D. i Radobolja, G.: *Free field realization of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra at level zero and its applications*. Journal of Pure and Applied Algebra, v. 219, 2015. ↑ 26, 49.

[7] Adamović, D. i Radobolja, G.: *On Free Field Realizations of $W(2,2)$-Modules*. Symmetry Integrability and Geometry-Methods and Applications, 12, 113, 13, 2016. ↑ 2, 26.

[8] Adamović, D. i Radobolja, G.: *Self-dual and logarithmic representations of the twisted Heisenberg–Virasoro algebra at level zero*. Communications in Contemporary Mathematics 21.02, 2019. ↑ 2.

[9] Adamović, D. i Čeperić, A.: *On Zhu's algebra and C_2-algebra for symplectic fermion vertex algebra $SF(d)^+$*. Journal of Algebra, 563, 2020. ↑ 7.

[10] Aizawa, N., Chandrashekar, R. i Segar, J.: *Lowest Weight Representations, Singular Vectors and Invariant Equations for a Class of Conformal Galilei Algebras*. SIGMA 11, v.2, 2015. ↑ 40, 48.

[11] Aizawa, N., Isaac, P.S. i Kimura, Y.: *Highest weight representations and Kac determinants for a class of conformal Galilei algebras with central extension*. Int. J. Math, v.23, 2012. ↑ 40, 48.

[12] Aizawa, N. i Kimura, Y.: *Galilean conformal algebras in two spatial dimension*. 2014. arXiv:1112.0634v2[math-ph]. ↑ 2, 48, 51, 54.

[13] Araujo, T.: *Remarks on BMS_3 invariant field theories: Correlation functions and nonunitary CFTs*. Physical Review D, 98, 2018. ↑ 67.

[14] Babichenko, A. i Ridout, D.: *Takiff superalgebras and conformal field theory*. J. Phys. A: Math. Theor., v.46, 2013. ↑ 2, 4, 5, 33, 68.

[15] Borcherds, Richard E.: *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 83.10, 1986. ↑ 3.

[16] Caroca, R., Concha, P., Rodríguez, E. i Salgado-Rebolledo, P.: *Generalizing the BMS_3 and 2D-conformal algebras by expanding the Virasoro algebra*. The European Physical Journal C, 2018. ↑ 2.

[17] Chaffe, M.: *Category $\mathscr{O}$ for Takiff Lie algebras*. Mathematische Zeitschrift, 304.1, 2023. ↑ 5, 40, 42.

[18] De Sole, A. i Kac, V. G.: *Finite vs affine W-algebras*. Japanese Journal of Mathematics, 1, 2006. ↑ 3.

[19] Dong, C., Li, H. i Mason, G.: *Vertex Operator Algebras and Associative Algebras*. Journal of Algebra, Vol.206, Issue 1, 1998. ↑ 7, 58.

[20] Frenkel, E. i Ben-Zvi, D.: *Vertex Algebras and Algebraic Curves; 2nd edition*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Mathematical Surveys and Monographs; v. 88, 2004. ↑ 4, 9, 14, 15, 22, 31.

[21] Frenkel, I., Lepowsky, J. i Meurman, A.: *Vertex Operator Algebras and the Monster*. Pure and Applied Mathematics(Academic Press), v.134, 1988. ↑ 3, 28.

[22] Frenkel, I.B., Huang, Y. Z. i Lepowsky, J.: *On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules*. Memoirs of the American Mathematical Society, 494, v.104, 1993. ↑ 49, 50.

[23] Frenkel, I.B., Lepowsky, J. i Meurman, A.: *A Natural Representation of the Fischer-Griess Monster with the Modular Function J as Character*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 81, 1984. ↑ 3.

[24] Frenkel, I.B. i Zhu, Y.: *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*. Duke Mathematical Journal, Vol.66, No. 1, 1992. ↑ 3, 4, 7, 58, 60, 61.

[25] Gorelik, M. i Kac, V.: *On simplicity of vacuum modules*. Advances in Mathematics, 211, 2007. ↑ 3, 48.

[26] Humphreys, J. E.: *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag New York Inc., 1972. ↑ 19.

[27] Inonu, E. i Wigner, E.P.: *On the Contraction of Groups and Their Representations*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 39.6, 1953. ↑ 2.

[28] Izaurieta, F., Rodríguez, E. i Salgado, P.: *Expanding Lie (super)algebras through Abelian Semigroups*. Journal of Mathematical Physics, 2006. ↑ 2.

[29] Jiang, W. i Zhang, W.: *Verma modules over the $W(2,2)$ algebras*. Journal of Geometry and Physics, v. 98, 2015. ↑ 26, 48.

[30] Kac, V.: *Infinite dimensional Lie algebras; 3rd edition*. Cambridge University Press, 1990. ↑ 12, 18, 40.

[31] Kac, V.: *Vertex Algebras for Begginers; 2nd edition*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, University Lecture Series; v. 10, 1998. ↑ 4, 9, 15, 16.

[32] Kac, V. i Raina, A.K.: *Bombay Lectures on Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*. Advanced Series in Mathematical Physics, v.2, 1987. ↑ 5, 6, 40, 48.

[33] Lepowsky, L. i Li, H.: *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*. Birkhauser Boston Inc., Progress in mathematics; v. 227, 2004. ↑ 4, 5, 9, 12, 16, 17, 18, 22, 24, 31, 35, 40, 41, 43.

[34] Mason, G. i Tuite, M.: *Vertex operators and modular forms*. A Window Into Zeta and Modular Physics, MSRI Publications, v.57, 2010. ↑ 50.

[35] Mazorchuk, V. i Soderberg, C.: *Category $\mathscr{O}$ for Takiff sl_2*. J. Math.Phys., v.60, 2019. ↑ 4, 5, 27, 40, 42.

[36] Molev, A. I.: *Casimir elements and Sugawara operators for Takiff algebras*. Journal of Mathematical Physics, 2021. ↑ 1, 47.

[37] Quella, T.: *On conformal field theories based on Takiff superalgebras*. Journal of Physics Communications, 2020. ↑ 2, 46.

[38] Radobolja, G.: *Subsingular vectors in Verma modules, and tensor product of weight modules over the twisted Heisenberg-Virasoro algebra and $W(2,2)$ algebra*. J. Math. Phys., 2013. ↑ 2, 26.

[39] Radobolja, G.: *Galilean W_3 algebra*. Journal of Mathematical Physics, v.62, 2021. ↑ 2, 40, 48, 49, 51, 54, 57.

[40] Rais, M. i Tauvel, P.: *Indice et Polynomes Invariants pour Certaines Algebres de Lie*. J. Reine Angew. Math., 1992. ↑ 2, 27.

[41] Rasmussen, J. i Raymond, C.: *Galilean contractions of W-algebras*. Nuclear Physics B, v. 922, 2017. ↑ 2, 3, 7, 67, 68, 69, 70.

[42] Takiff, S.J.: *Rings of Invariant Polynomials for Class of Lie Algebras*. American Mathematical Society, v.160, 1971. ↑ 1, 2.

[43] Wang, W.: *Rationality of Virasoro vertex operator algebra*. International Mathematics Research Notices, Vol.1993, Issue 7, 1993. ↑ 7, 58.

[44] Wilson, B.J.: *Highest-weight theory for truncated current Lie algebras*. Journal of Algebra, v, 2011. ↑ 2, 4, 5, 27, 40, 41, 42, 48.

[45] Zhang, W. i Dong, C.: *W-algebra $W(2,2)$ and the vertex operator algebra $L(\frac{1}{2},0)\otimes L(\frac{1}{2},0)$*. Commun. Math. Phys. 285, 991–1004, 2009. ↑ 2, 3, 25, 26, 57, 67.

[46] Zhu, X.: *Simple modules over the Takiff Lie algebra for sl_2*. J. Math. Phys., 65, 2024. ↑ 5, 40, 42.

[47] Zhu, Y.: *Modular Invariance of Characters of Vertex Operator Algebras*. Journal of the American Mathematical Society, Vol.9, No. 1, 1996. ↑ 7, 58, 65.

Životopis

Iva Ćuže (dj. Pandžić) je rođena 19. studenog 1987. u Imotskom. Nakon završene osnovne škole u Drinovcima te opće gimnazije u Imotskom, 2006. godine upisuje preddiplomski sveučilišni studij Matematike i informatike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu. 2009. godine brani završni rad na temu Pseudounitarni prostori i stječe zvanje prvostupnice matematike i informatike. Na istom fakultetu upisuje sveučilišni diplomski studij Matematike i informatike-nastavnički smjer. 2011. godine brani diplomski rad na temu Moduli i stječe zvanje magistra edukacije matematike i informatike.

Od siječnja 2012. do lipnja 2012. radi kao nastavnik matematike u Gimnaziji fra Grge Martića Posušje. 2013. godine upisuje doktorski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu i počinje sudjelovati u radu Seminara za algebru. Od 2013.-2018. godine je zaposlena u nastavi na Fakultetu prirodoslovno matematičkih i odgojnih znanosti Sveučilišta u Mostaru u zvanju asistenta, a od 2019.-2024. u zvanju višeg asistenta. U razdoblju od 2021.-2022., uz nastavu, obavlja sve administrativne i tehničke poslove na Studiju matematike. Članica je povjerenstava za provedbu razredbenog postupka, priznavanje/ekvivalenciju ispita prilikom upisa na studij Matematike te izradu revidiranih nastavnih planova i programa studija Matematike. Recenzirala je predmetni kurikulum Matematike za osnovne škole i opće gimnazije koje nastavu izvode po nastavnom planu i programu na hrvatskom jeziku u Bosni i Hercegovini. Stručno se usavršavala u sklopu EU IPA projekta „Obrazovanje za zapošljavanje u Bosni i Hercegovini“ te Programa cjeloživotnog učenja u području pedagoškog obrazovanja i jačanja kompetencija nastavnog osoblja Sveučilišta u Mostaru TRAIN+. Sudjelovala je na konferencijama Vertex algebras and infinite-dimensional Lie algebras, Split, 2018., Representation Theory XVI, Dubrovnik, 2019., 7th Croatian Mathematical Congress, Split, 2022., Representation Theory XVII, Dubrovnik, 2022. i Representation Theory XVIII, Dubrovnik, 2023. Na 8th Croatian Mathematical Congress u Osijeku, 2024., održala je predavanje pod nazivom Takiff vertex algebra od type $A_1^{(1)}$.