Dokazi prebrojavanjem

Štimac, Helena

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:100418

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-03**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Helena Štimac

Dokazi prebrojavanjem

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, studeni 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Prebrojavanje je alat kojim se svatko od nas služi od najranije dobi, no jeste li znali koliko je moćan u rješavanju matematičkih problema? Gotovo svaki dokaz u ovom radu svodi se na prebrojavanje. Promatrat ćemo identitete koje zadovoljavaju često viđeni i dobro poznati brojevi u matematici te ih dokazivati prebrojavanjem. U pravilu ćemo isti skup prebrojavati na dva različita načina iz čega će slijediti jednakost između lijeve i desne strane identiteta. U drugom pristupu dokazivanja, lijevu stranu identiteta interpretiramo kao veličinu jednog skupa, desnu stranu kao veličinu drugog skupa, a zatim uspostavljamo bijekciju između tih dvaju skupova. Glavna literatura koja nas vodi kroz ovaj rad je knjiga pod naslovom *Proofs That Really Count* autora Arthura T. Benjamina i Jennifer J. Quinn [2]. "Propozicije" u radu predstavljat će tvrdnje čiji se dokazi mogu pronaći u knjizi, dok su "zadaci" identiteti koje sam dokazala samostalno ili uz pomoć druge literature.

S konceptom dokaza prebrojavanjem upoznajemo se u poglavlju o Fibonaccijevim brojevima. Najprije uvodimo njihovu zanimljivu kombinatornu interpretaciju. Naime, Fibonaccijev broj F_{n+1} kombinatorno interpretiramo kao broj popločavanja pravokutnika dimenzije $n \times 1$ pomoću kvadrata dimenzije 1×1 i domina dimenzije 2×1. Prelazimo na dokaze identiteta koje Fibonaccijevi brojevi zadovoljavaju. Definiramo pojam lomljivosti ploče duljine n. Koristimo tehniku dokazivanja uspostavljanjem 2-na-1 korespondencije između dvaju skupova. Upoznajemo tehniku zamjene repova koja će se kroz rad pokazati veoma korisnom metodom dokazivanja. Dokazujemo Cassinijev identitet. Poglavlje završavamo sa svojstvima djeljivosti Fibonaccijevih brojeva u kojem je dokazan najvažniji rezultat djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.

U idućem poglavlju proučavamo verižne razlomke. I dalje se bavimo popločavanjima kvadratima i dominama, no vidjet ćemo kako je kombinatorna interpretacija verižnih razlomaka zapravo generalizirani oblik one iz prvog poglavlja. Slijedi niz kombinatornih dokaza identiteta. Prebrojavanjem pokazujemo da limes konačnih verižnih razlomaka postoji te definiramo beskonačne verižne razlomke. Naposljetku uvodimo definiciju i kombinatornu interpretaciju složenih verižnih razlomaka.

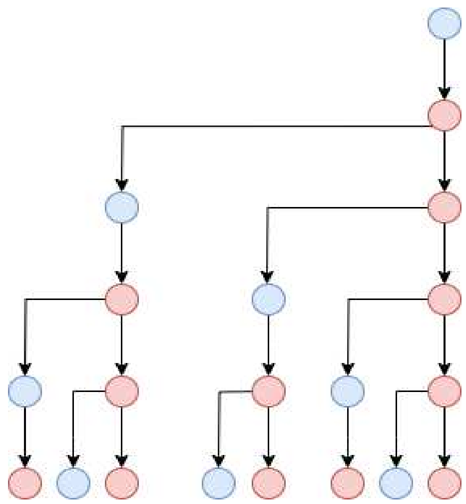
Rad privodimo kraju s poglavljem o binomnim koeficijentima. Definiramo kombinacije s ponavljanjem i uvodimo njihovu kombinatornu interpretaciju. Slijede dokazi jednostavnijih do nešto kompleksnijih identiteta s binomnim koeficijentima. Dokazujemo identitete s alternirajućim predznacima uspostavljanjem korespondencija između skupova s parnim i neparnim indeksima. Poglavlje završavamo dokazom identiteta koji zadovoljavaju kombinacije s ponavljanjem.

Zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Vedranu Krčadincu
na izvrsnom vodstvu i ugodnoj suradnji tijekom izrade ovog rada.

2 Fibonaccijevi brojevi

2.1 Motivacija i definicija

S konceptom dokaza prebrojavanjem upoznat ćemo se najprije kroz Fibonaccijeve brojeve. Niz Fibonaccijevih brojeva dobio je naziv po talijanskom matematičaru Leonardu Fibonacciju. Fibonacci je u svome djelu *Liber Abaci* postavio i riješio problem razmnožavanja zečeva. Naime, pretpostavimo da se 1. siječnja na pustom otoku nalazi jedan par novorođenih zečeva. Nakon dva navršena mjeseca života, oni će dobiti novi par mladih zečeva te tako svakog prvog dana u mjesecu. Isto će vrijediti za sve parove zečeva. Zanima nas koliko će parova zečeva na pustom otoku biti 1. siječnja iduće godine. Na slici 1 nalazi se shematski prikaz razmnožavanja. Sivi krug predstavlja mladi par zečeva, dok crveni predstavlja par zečeva zreo za ramnožavanje.



Slika 1: Shematski prikaz razmnožavanja zečeva

Neka F_n predstavlja broj parova zečeva na početku mjeseca n. Tada na početku mjeseca $n+2$ imamo ukupno F_{n+1} parova iz prethodnog mjeseca, ali i F_n novorođenih parova budući da je F_n parova zrelo za razmnožavanje. Iz toga slijedi relacija

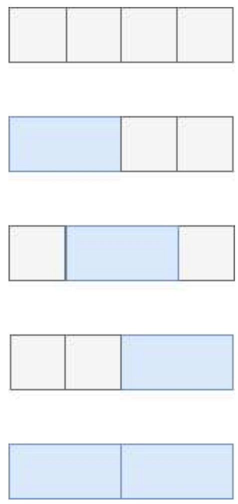
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Nakon motivacije za poglavlje o Fibonaccijevim brojevima, uvedimo konačno njihovu definiciju.

Definicija 2.1. *Fibonaccijevi brojevi definirani su početnim vrijednostima* $F_0 = 0$*,* $F_1 = 1$ *te rekurzijom* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$*, za* $n \geq 2$*.*

2.2 Kombinatorna interpretacija

Sada kada smo definirali Fibonaccijeve brojeve prelazimo na njihovu kombinatornu interpretaciju. Radi lakše predodžbe, koristit ćemo vizualni pristup. Promatramo ploču dimenzije $n \times 1$. Neka je f_n broj načina na koje možemo popločati ploču koristeći kvadrate dimenzije 1×1 te domine dimenzije 2×1. Primjerice, za $n = 4$ postoji 5 načina popločavanja, odnosno vrijedi $f_4 = 5$:



Slika 2: Sva popločavanja ploče dimenzije 4x1

Dodatno, definirajmo broj $f_{-1} = 0$ te neka $f_0 = 1$ predstavlja jedno prazno popločavanje za $n = 0$.

Teorem 2.2. *Neka je f_n broj načina popločavanja ploče dimenzije $n \times 1$ pomoću kvadrata i domina. Tada je f_n Fibonaccijev broj. Točnije, za $n \geq -1$, vrijedi*

$$f_n = F_{n+1}.$$

Dokaz. Očito vrijedi $f_{-1} = 0 = F_0$ i $f_0 = 1 = F_1$. Nadalje, za $n = 1$, ploču možemo popločati na jedan način pa zaista vrijedi $f_1 = 1 = F_2$.

Neka je sada ploča duljine $n \geq 2$. Uočimo dva disjunktna slučaja popločavanja. U prvom slučaju, popločavanje započinjemo kvadratom. Jasno je da ćemo ostatak ploče popločati na f_{n-1} načina. S druge strane, ako popločavanje započnemo dominom, slijedi da za popločavanje imamo f_{n-2} načina. Dakle, vrijedi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Uočimo sada da niz brojeva f_n zadovoljava "pomaknute" početne uvjete i istu rekurziju kao Fibonaccijevi brojevi F_n. Konačno, slijedi da je f_n Fibonaccijev broj. $\square$

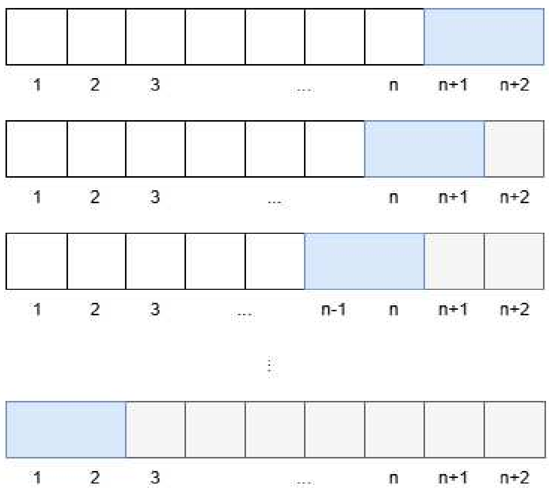
2.3 Kombinatorno dokazivanje identiteta

U nastavku prelazimo na kombinatorno dokazivanje nekih identiteta koje zadovoljavaju Fibonaccijevi brojevi. U tu svrhu koristit ćemo "pomaknute" Fibonaccijeve brojeve f_n zbog njihove direktne kombinatorne interpretacije. Svi identiteti mogu se lako prebaciti u F_n. Dakle, dokazima pristupamo vizualno - popločavanjem $n \times 1$ ploče kvadratima i dominama. Primijetit ćemo da pri tome skup svih popločavanja često dijelimo na disjunktne slučajeve s obzirom na neko svojstvo.

Propozicija 2.3. *Za $n \geq 0$ vrijedi $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$.*

Dokaz. Promatramo desnu stranu jednakosti. Ona odgovora ukupnom broju popločavanja ploče duljine $n+2$ koji sadrže barem jednu domino pločicu. Zaista, ukupno imamo f_{n+2} popločavanja, a izbacivanjem popločavanja koje koristi samo kvadrate dobivamo $f_{n+2} - 1$.

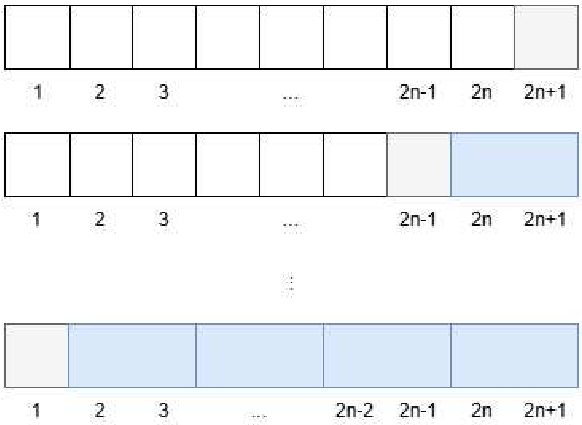
S druge strane, skup svih popločavanja možemo podijeliti na disjunktne podskupove s obzirom na poziciju posljednje domine. Ako se posljednja domina nalazi na pozicijama $k+1$ i $k+2$, tada prvih k pozicija možemo popločati na f_k načina, dok se na pozicijama $k+3, \ldots, n+2$ nalaze kvadrati (vidi sliku 3). Kako k poprima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, \ldots, n\}$, slijedi lijeva strana jednakosti. □



Slika 3: Popločavanja ploče duljine $n+2$ s obzirom na poziciju posljednje domine

Propozicija 2.4. *Za $n \geq 0$ vrijedi $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1}$.*

Dokaz. Desna strana jednakosti odgovara ukupnom broju popločavanja ploče duljine $2n + 1$. Kako je $2n + 1$ neparan broj, zaključujemo da svako popločavanje mora sadržati barem jedan kvadrat. Iz tog razloga ovaj put analiziramo poziciju posljednjeg kvadrata. Promatramo disjunktne slučajeve popločavanja gdje se posljednji kvadrat nužno nalazi na neparnoj poziciji. Preciznije, ako se posljednji kvadrat nalazi na poziciji $2k + 1$, tada postoji f_{2k} popločavanja (vidi sliku 4). Iz toga slijedi lijeva strana jednakosti. □



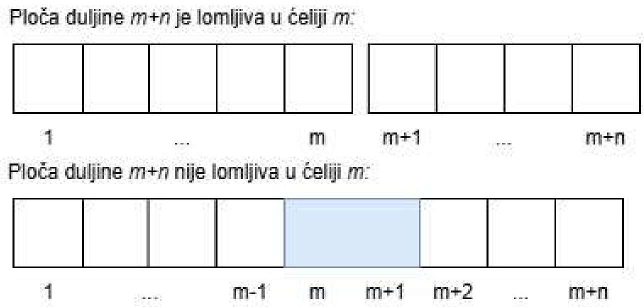
Slika 4: Popločavanja ploče duljine $2n + 1$ s obzirom na poziciju posljednjeg kvadrata

Za potrebe sljedećeg identiteta uvodimo pojam *lomljivosti n-ploče.*

Definicija 2.5. *Za popločanu $n \times 1$ ploču kažemo da je* lomljiva u ćeliji k *ako je unija dviju ploča od kojih jedna ploča sadrži ćelije 1 do k, dok druga ploča sadrži ćelije $k + 1$ do n. Drugim riječima, možemo reći da popločana $n \times 1$ ploča* nije lomljiva u ćeliji k *ako ćelije k i $k + 1$ pokriva jedna domina.*

Propozicija 2.6. *Za $m,n \geq 0$ vrijedi $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$.*

Dokaz. Lijeva strana jednakosti odgovara ukupnom broju popločavanja ploče duljine $m + n$. Promatramo dva disjunktna slučaja. U prvom slučaju, promatramo sva popločavanja takva da je ploča duljine $m+n$ lomljiva u ćeliji m. Takvih je ukupno $f_m f_n$. Drugi slučaj čine preostala popločavanja, odnosno popločavanja takva da ploča duljine $m + n$ nije lomljiva u ćeliji m. Preciznije, na pozicijama m i $m + 1$ nalazi se jedna domina. Slijedi da je lijevo od ćelije m preostalo $m - 1$ praznih ćelija, dok zdesna ćeliji $m + 1$ ostaje $n - 1$ nepopločanih ćelija (vidi sliku 5). Dakle, u drugom slučaju brojimo $f_{m-1} f_{n-1}$ načina popločavanja. Konačno, desna strana jednakosti slijedi kao zbroj prvog i drugog slučaja. □



Slika 5: Popločavanja s obzirom na lomljivost ploče duljine $m+n$ u ćeliji m

Zadatak 2.7. *Za* $n \geq 1$ *vrijedi* ${f_n}^2 - {f_{n-2}}^2 = f_{2n-1}$.

Dokaz. Promatramo par ploča duljina n položenih jednu ispod druge. Izraz s lijeve strane jednakosti odgovara ukupnom broju popločavanja para dviju ploča takvih da barem jedna ploča završava kvadratom. Naime, ${f_n}^2$ predstavlja ukupan broj načina za popločati par dviju ploča od čega zatim oduzimamo popločavanja čije obje ploče završavaju dominom, a takvih je ukupno ${f_{n-2}}^2$.

Prelazimo na desnu stranu jednakosti. Promatramo dva disjunktna skupa popločavanja uvjetno na vrstu pločice kojom završava prva ploča. U prvom slučaju, neka prva ploča završava kvadratom. Tada unijom prve i druge ploče dobivamo ploču duljine $2n$ s kvadratom na poziciji n. Ostatak ploče možemo popločati bez restrikcija. Izbacimo li privremeno taj kvadrat, dobivamo ploču duljine $2n-1$. Ploču duljine $2n-1$ možemo popločati na ukupno f_{2n-1} načina. Međutim, uočimo da ona nužno mora biti lomljiva u ćeliji $n-1$ kako bismo na poziciju n mogli vratiti izbačeni kvadrat. Drugim riječima, moramo izbaciti sva popločavanja ploče duljine $2n-1$ koja na pozicijama $n-1$ i n sadrže dominu. Uočimo da je takvih ukupno $f_{n-2}f_{n-1}$. Slijedi da u prvom slučaju brojimo $f_{2n-1} - f_{n-2}f_{n-1}$ popločavanja.

Neka sada prva ploča završava dominom, a druga kvadratom. U ovom slučaju, unijom prve i druge ploče dobivamo ploču duljine $2n$ s dominom na pozicijama $n-1$ i n te kvadratom na poziciji $2n$. Nju možemo popločati na $f_{n-2}f_{n-1}$ načina. Sada, po principu sume, slijedi i desna strana jednakosti. □

U idućim identitetima pokazat ćemo nekoliko veza Fibonaccijevih brojeva i binomnih koeficijenata. U tu svrhu, podsjetimo se definicije binomnih koeficijenata.

Definicija 2.8. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ *je broj svih k-članih podskupova n-članog skupa.*

Propozicija 2.9. *Za* $n \geq 0$ *vrijedi* $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = f_n$.

Dokaz. Desna strana jednakosti odgovara ukupnom broju popločavanja $n \times 1$ ploče. Prebrojimo načine popločavanja uvjetno na broj domina koje koristimo u popločavanju. Uočimo da je najveći mogući broj domina koje možemo koristiti jednak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Formalno, za broj domina i korištenih u popločavanju $n \times 1$ ploče vrijedi $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. U tom slučaju, $n \times 1$ ploča popločana je s $n - i$ pločica od kojih je i domino pločica te $n - 2i$ kvadrata. Broj načina na koje možemo odabrati i domina od ukupno $n - i$ pločica je $\binom{n-i}{i}$. Iz ovoga slijedi suma s lijeve strane jednakosti. Uočimo da je suma konačna. To slijedi iz $\binom{n}{k} = 0$, za sve $k > n$. □

Propozicija 2.10. *Za* $n \geq 0$ *vrijedi* $f_{2n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_{k-1}$.

Dokaz. Lijeva strana jednakosti odgovara broju popločavanja ploče duljine $2n - 1$. Uočimo da je pri popločavanju nužno iskoristiti najmanje n pločica, od kojih barem jedna mora biti kvadratna. Prebrojavat ćemo popločavanja s obzirom na broj kvadratnih pločica koje se pojavljuju unutar prvih n pločica. Ako je od prvih n pločica njih ukupno k kvadratnih i $n - k$ domina, tada kvadrate možemo odabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Preostali nepopločani dio ploče je sada duljine

$$2n - 1 - (k + 2(n - k)) = k - 1$$

pa ga možemo popločati na f_{k-1} načina. Po principu produkta, broj popločavanja s k kvadrata među prvih n pločica je $\binom{n}{k} f_{k-1}$. Desnu stranu dobivamo sumiranjem po k. □

Do sada smo identitete dokazivali dvostrukim prebrojavanjem jednog skupa. U idućem zadatku koristit ćemo novu tehniku dokazivanja uspostavljanjem 2-na-1 korespondencije između dvaju skupova. U našem slučaju promatrat ćemo, naravno, skupove popločavanja.

Zadatak 2.11. *Za* $n \geq 2$ *vrijedi* $2f_n = f_{n+1} + f_{n-2}$.

Dokaz. Promatramo dva skupa. Prvi skup je veličine f_n te sadrži sva popločavanja ploče duljine n. U drugom skupu sadržana su sva popločavanja ploča duljina $n+1$ i $n-2$, a veličina tog skupa je $f_{n+1} + f_{n-2}$. Dokažimo identitet uspostavljanjem 2-na-1 korespondencije između prvog i drugog skupa.

Naime, iz svakog popločavanja duljine n možemo formirati dva popločavanja duljina $n + 1$ i $n - 2$. Promatramo popločavanje duljine n. Ukoliko desno od ćelije n, odnosno na poziciju $n+1$, zalijepimo kvadrat, formirali smo popločavanje duljine $n+1$ s kvadratom na posljednjoj poziciji. Time smo ploči duljine n pridružili jedno popločavanje. Drugo popločavanje ovisi o vrsti posljednje pločice. Ako se na poziciji n nalazi kvadrat, uklanjanjem tog kvadrata i dodavanjem domine formiramo popločavanje duljine $n+1$ s dominom kao posljednjom pločicom. S druge strane, ukoliko se na pozicijama $n-1$ i n nalazi domina, tada izbacivanjem te domine formiramo popločavanje duljine $n-2$. Time smo ploči duljine n pridružili i drugo popločavanje.

Konačno, preostaje nam provjeriti da se zaista radi o 2-na-1 korespondenciji. Provjerimo da za svako popločavanje duljine $n+1$ ili $n-2$ postoji jedinstveno popločavanje duljine n iz kojeg je formirano. Promotrimo najprije popločavanje duljine $n+1$. Ono je formirano iz popločavanja duljine n koje dobivamo:

1. uklanjanjem posljednjeg kvadrata, ukoliko popločavanje duljine $n+1$ završava kvadratom, ili

2. uklanjanjem posljednje domine i dodavanjem kvadrata, ukoliko popločavanje duljine $n+1$ završava dominom.

Sada promatramo popločavanje duljine $n-2$. Pripadno popločavanje duljine n dobivamo dodavanjem domine iza posljednje pločice.

Konačno, kako je veličina drugog skupa dva puta veća od prvog skupa, zaključujemo da vrijedi $2f_n = f_{n+1} + f_{n-2}$. □

Zadatak 2.12. *Za $n \geq 1$ vrijedi $f_1 + f_4 + f_7 + \ldots + f_{3n-2} = \frac{1}{2}(f_{3n} - 1)$.*

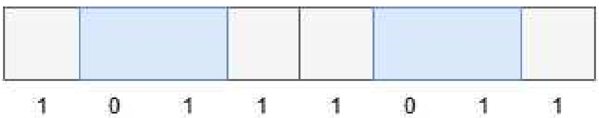
Dokaz. Uočimo da lijeva strana jednakosti odgovara ukupnom broju popločavanja ploče duljine $3n$ takvih da posljednja domina završava na poziciji $3j$, za $1 \leq j \leq n$. Zaista, takvo popločavanje sadrži dominu na pozicijama $3j-1$ i $3j$, dok se na pozicijama $3j+1, 3j+2, \ldots, 3n$ nalaze kvadrati. Preostaje nam popločati prvih $3j-2$ ćelija, a to možemo na f_{3j-2} načina. Budući da j poprima vrijednosti $1, 2, \ldots, n$, slijedi da je takvih popločavanja ukupno $f_1 + f_4 + f_7 + \ldots + f_{3n-2}$.

Promatrajmo sada dva skupa. Neka je prvi skup svih popločavanja duljine $3n$ takvih da posljednja domina završava na poziciji $3j$, za $1 \leq j \leq n$. Drugi skup je skup svih popločavanja duljine $3n$ takvih da posljednja domina završava na pozicijama $3j-1$ ili $3j-2$, za $1 \leq j \leq n$. Uspostavimo 1-na-1 korespondenciju između ta dva skupa. Naime, ukoliko posljednja domina popločavanja duljine $3n$ završava na poziciji $3j$ te joj prethodi kvadrat, zamjenom njihovih mjesta formiramo popločavanje čija posljednja domina završava na poziciji $3j-1$. S druge strane, ukoliko posljednja domina popločavanja završava na poziciji $3j$, ali joj prethodi domino pločica, tada zamjenom posljednje domine dvjema kvadratnim pločicama formiramo popločavanje čija posljednja domina završava na poziciji $3j-2$. Primijetimo da na ovaj način ne možemo formirati popločavanje koje se sastoji isključivo od kvadrata. Postupak možemo napraviti i u obrnutom smjeru. Dakle, uspostavili smo 1-na-1 korespondenciju između zadanih skupova, a njihova disjunktna unija čini skup svih popločavanja duljine $3n$ izuzevši popločavanje samo kvadratima. Zaključujemo da postoji točno $\frac{1}{2}(f_{3n}-1)$ popločavanja duljine $3n$ takvih da posljednja domina završava na poziciji $3j$, $1 \leq j \leq n$.

□

Propozicija 2.13. *Za $n \geq 0$ vrijedi* $f_n + f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} f_k 2^{n-k-2} = 2^n$.

Prije samog dokaza, primijetimo izraz 2^n na desnoj strani jednakosti. Vjerojatno će nas asocirati na broj binarnih nizova duljine n. Upravo njihovo korištenje će i biti naša glavna metoda u dokazu ovog identiteta - popločavanje kvadratima i dominama zamijenit ćemo nulama i jedinicima. Preciznije, kvadrati popločane $n \times 1$ ploče postaju “1”, dok će domine biti pretvorene u “01”. Tako je dobiven binarni niz duljine n. Za primjer vidi sliku 6.



Slika 6: Binarni prikaz popločavanja prikazane ploče duljine 8 je 10111011

Uočimo da na taj način sva popločavanja duljine n neće “pokriti” baš sve binarne nizove duljine n. Zaista, izostavljeni će biti oni nizovi koji sadrže uzastopne 0 ili završavaju s 0.

Dokaz. Desna strana jednakosti odgovara broju binarnih nizova duljine n. Svakom binarnom nizu duljine n pridružit ćemo pripadno popločavanje. Nizovima duljine n koji ne sadrže uzastopne 0 te završavaju s 1 pridružujemo jedinstveno popločavanje duljine n. Nizovima bez uzastopnih 0 koji završavaju s 0 pridružujemo jedinstveno popločavanje duljine $n-1$. Dakle, ukupno je $f_n + f_{n-1}$ binarnih nizova duljine n bez uzastopnih 0.

Nadalje, neka sada niz sadrži 00 i to prvi put na pozicijama $k+1$ i $k+2$, gdje je $0 \leq k \leq n-2$. Takvom nizu pridružujemo popločavanje duljine k, dok se na pozicijama $k+3, \ldots, n$ može nalaziti štogod, 0 ili 1. Dakle, broj nizova koji sadrže 00 je $\sum_{k=0}^{n-2} f_k 2^{n-k-2}$. □

2.4 Tehnika zamjene repova

Ispišimo prvih nekoliko članova Fibonaccijevog niza kako bismo lakše uočili njegovu, na prvu ne tako očiglednu, pravilnost:

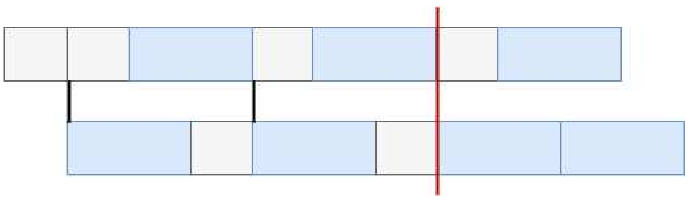
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots.$$

Izračunamo li apsolutnu vrijednost razlike kvadrata proizvoljnog člana niza i produkta njegovih susjednih članova, dobit ćemo rezultat 1. Tu pravilnost formalno i preciznije izražavamo u idućem identitetu, a poznata je kao *Cassinijev identitet*.

Propozicija 2.14. *Za $n \geq 0$ vrijedi $f_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} + (-1)^n$.*

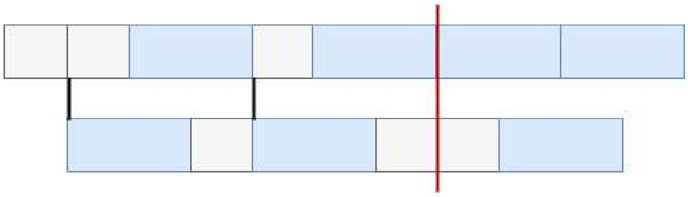
Cassinijev identitet za potrebe ovog rada dokazat ćemo kombinatorno kao i do sada. U tu svrhu, uvodimo tehniku *zamjene repova*. Promatramo par dviju $n \times 1$ ploča položenih jednu ispod druge. Neka je donja ploča pomaknuta za jednu ćeliju udesno. Kažemo da postoji *greška na ćeliji i* ako su gornja i donja ploča lomljive u ćeliji i. Dijelove ploča nakon posljednje greške nazivamo *repovima*. Uočimo da međusobnom zamjenom repova dobivamo par ploča duljina $n+1$ i $n-1$ s istom greškom.

Općenito, uz pretpostavku da parovi popločavanja sadrže grešku, možemo zaključiti da postoji bijekcija između skupa svih popločavanja para dviju ploča duljine n i skupa svih popločavanja ploča duljina $n+1$ i $n-1$. Pogledajmo na primjeru.



Slika 7: *Greška* i *repovi* dviju ploča duljine 10

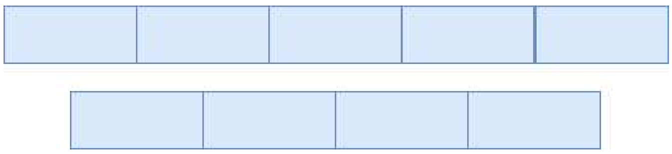
Na slici 7 uočavamo tri zajednička loma dviju ploča duljine 10, odnosno tri greške. Posljednja greška označena je crvenom linijom. Desno od crvene linije nalaze se repovi. Slika 8 prikazuje par ploča duljina 11 i 9 s istom greškom dobivenih tehnikom zamjene repova. Konačno, prelazimo na dokaz Cassinijevog identiteta.



Slika 8: Tehnika *zamjene repova*

Dokaz. Ukupan broj popločavanja para dviju $n \times 1$ ploča jednak je f_n^2 što odgovara lijevoj strani jednakosti. Što je s desnom stranom jednakosti?

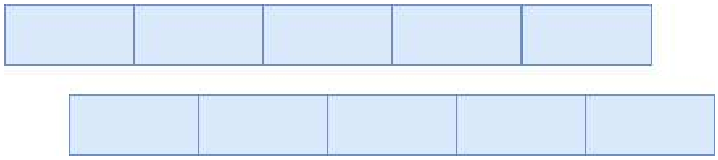
Pretpostavimo da je n neparan. U tom slučaju, obje ploče moramo popločati s barem jednim kvadratom. To povlači da će svaki par popločavanja imati grešku. Naime, neka se kvadrat nalazi na poziciji i jedne ploče. Tada je ona lomljiva u ćelijama $i-1$ te i. Međutim, uočimo da je druga ploča nužno lomljiva u najmanje jednoj od ćelija $i-1$ te i budući da barem jedna od njih mora sadržavati desni rub pločice, bilo domine ili kvadrata. Zaista, slijedi da par popločavanja nužno sadrži grešku. Sada zamjenom repova dobivamo par ploča duljina $n+1$ i $n-1$ s istom greškom. Takav par možemo popločati na $f_{n+1}f_{n-1}$ načina. Međutim, pri tome moramo izbaciti sva popločavanja koja nemaju grešku. Ali to je samo u slučaju kada su i gornja i donja ploča popločane dominama (vidi sliku 9). Uočimo da je to sada moguće jer su $n+1$ i $n-1$ parni brojevi. Dakle, prebrojali smo $f_{n+1}f_{n-1}-1$ parova popločavanja duljine $n+1$ i $n-1$.



Slika 9: Slučaj kada par ploča duljina $n+1$ i $n-1$ nema grešku, uz pretpostavku da je n neparan broj

Pretpostavimo sada da je n paran. Greška neće postojati samo u slučaju kada obje ploče popločamo dominama (vidi sliku 10). Kada greška postoji, ponovno tehnikom zamjene repova dobivamo $f_{n+1}f_{n-1}$ način, ali dodajemo dodatno i spomenuto popločavanje $n \times 1$ ploča dominama. U ovom slučaju, prebrojali smo $f_{n+1}f_{n-1}+1$ parova popločavanja duljine $n+1$ i $n-1$. Konačno, slijedi tvrdnja.

□

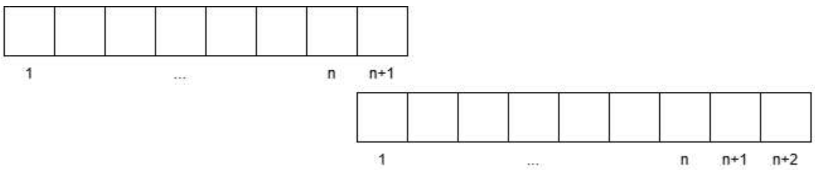


Slika 10: Slučaj kada par $n \times 1$ ploča nema grešku, uz pretpostavku da je n paran broj

Dokaz idućeg zadatka iznesen je ranije u [11].

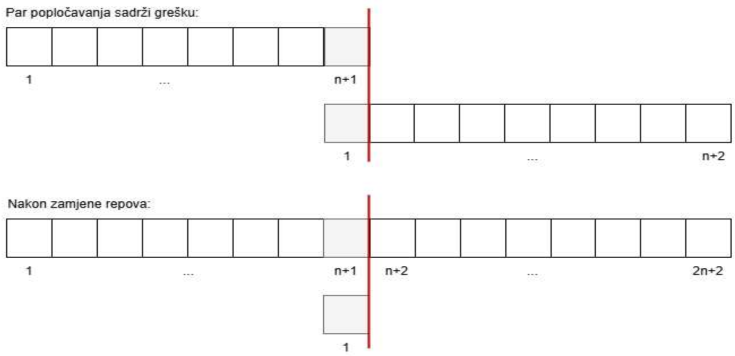
Zadatak 2.15. *Za $n \geq 0$ vrijedi $f_{2n+2} = f_{n+1}f_{n+2} - f_{n-1}f_n$.*

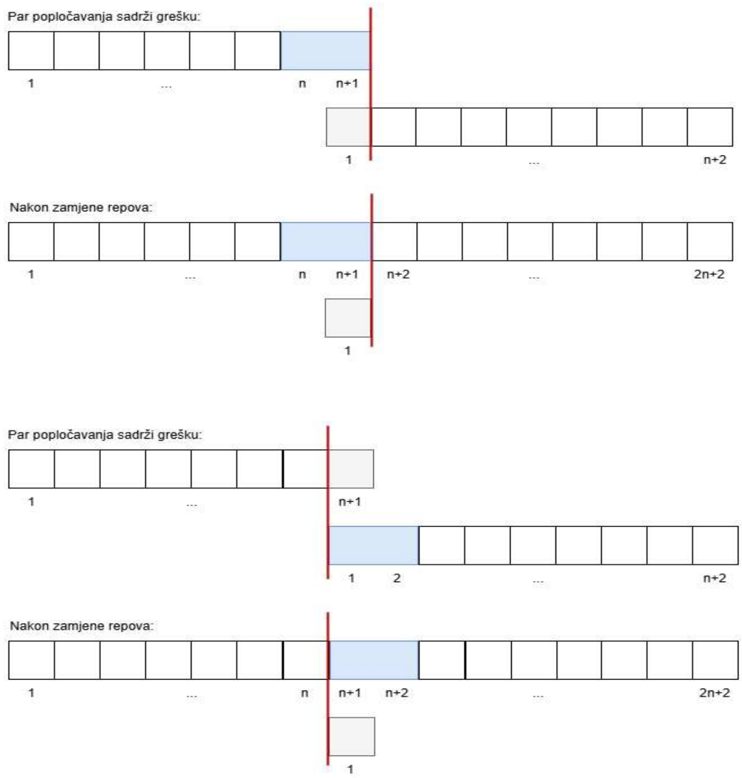
Dokaz. Položimo dvije ploče duljina $n+1$ i $n+2$ jednu ispod druge kao na slici 11. Takav par ploča možemo popločati na ukupno $f_{n+1}f_{n+2}$ načina.



Slika 11: Par ploča duljina $n+1$ i $n+2$

Promotrimo sada par popločavanja koji sadrži grešku. Tehnikom zamjene repova, pridružit ćemo mu popločavanja duljina $2n+2$ i 1 s istom greškom. Na slici 12 prikazani su slučajevi popločavanja kada greška postoji te pripadni pridruženi parovi nakon zamjene repova.





Slika 12: Slučajevi popločavanja koja sadrže grešku te pridružena popločavanja tehnikom zamjene repova

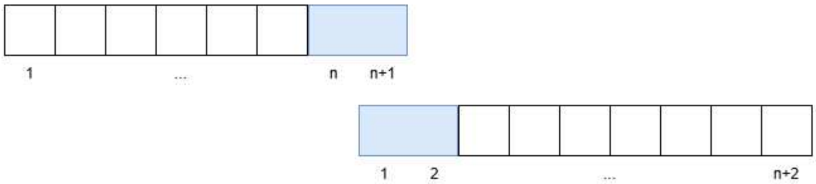
Budući da se donja ploča sastoji od samo jednog kvadrata, uočimo da će greška tako položenih popločavanja duljina $2n + 2$ i 1 uvijek postojati. Slijedi da pridružene parove popločavanja možemo popločati na ukupno f_{2n+2} načina. Dakle, uspostavljanjem bijekcije zaključujemo da vrijedi

$$f_{2n+2} = f_{n+1}f_{n+2} - |S|,$$

gdje je S skup svih popločavanja dviju ploča sa slike 11 koja ne sadrže grešku. Međutim, skup S sadrži sve parove popločavanja čija gornja ploča završava dominom te donja ploča započinje dominom (vidi sliku 13). Iz toga slijedi

$$|S| = f_{n-1}f_n$$

čime je tvrdnja konačno dokazana. $\square$



Slika 13: Slučaj popločavanja koja ne sadrže grešku

2.5 Svojstva djeljivosti Fibonaccijevih brojeva

U ovoj cjelini iskazat ćemo neke rezultate o djeljivosti Fibonaccijevih brojeva. Sljedeći teorem dodatno ćemo iskazati u terminima brojeva f_n pa zatim kombinatorno dokazati.

Teorem 2.16. *Za $m \geq 1$ i $n \geq 0$, ako $m|n$, tada $F_m|F_n$.*

Teorem 2.17. *Za $m \geq 1$ i $n \geq 0$, ako $m|n$, tada $f_{m-1}|f_{n-1}$. Točnije, ako je $n = qm$, tada vrijedi*

$$f_{n-1} = f_{m-1} \sum_{j=1}^{q} f_{m-2}^{j-1} f_{n-jm}.$$

Dokaz. Ako vrijedi $n = qm$, koliko popločavanja duljine $n-1$ postoji? Prebrojavat ćemo disjunktne skupove popločavanja uvjetno na najmanji j za koji je popločavanje duljine $n-1$ lomljivo u ćeliji $jm-1$. Uočimo da su sva popločavanja lomljiva barem u ćeliji $qm-1$ pa takav j sigurno postoji. Nadalje, za takav j te pripadna popločavanja direktno slijedi da nisu lomljiva u ćelijama $m-1, 2m-1, \ldots, (j-1)m-1$. Drugim riječima, na svakoj od tih ćelija nalazi se početak domine. Ćelije koje prethode, odnosno koje se nalaze između tih domina možemo popločati na ukupno f_{m-2}^{j-1} načina. Zatim, broj načina za popločati ćelije $(j-1)m+1, (j-1)m+2, \ldots, jm-1$ odgovara f_{m-1}. Konačno, za preostali dio ploče preostaje $f_{n-1-(jm-1)}$, odnosno f_{n-jm} načina popločavanja. □

Podsjetimo se definicije najvećeg zajedničkog djelitelja ili najveće zajedničke mjere dvaju cijelih brojeva. Naime, za cijele brojeve a i b, *najveći zajednički djelitelj*, u oznaci $nzm(a,b)$, najveći je prirodan broj koji dijeli a i b. Uočimo da vrijedi $nzm(a,b) = nzm(b, a-bx)$, gdje je x proizvoljni cijeli broj. Osnovni korak Euklidovog algoritma za računanje $nzm(a,b)$, ako je $a > b$, jest da ga prikažemo kao $a = qb + r$. Tada je $nzm(a,b) = nzm(b,r)$.

Lema 2.18. *Za $n \geq 1$ vrijedi $nzm(F_n, F_{n-1}) = 1$.*

Dokaz. Dokažimo indukcijom da su dva uzastopna Fibonaccijeva broja relativno prosta. Za $n = 1$ zaista vrijedi $nzm(F_1, F_0) = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, odnosno $nzm(F_n, F_{n-1}) = 1$. Tada

$$nzm(F_{n+1}, F_n) = nzm(F_n, F_{n+1} - F_n) = nzm(F_n, F_{n-1}) = 1.$$

Po principu matematičke indukcije, dokazali smo lemu. $\square$

Primijetimo sada da vrijedi svojstvo

$$nzm(F_n, F_{n-1}) = 1 = F_1 = F_{nzm(n,n-1)},$$

no ono je samo poseban slučaj teorema 2.20., najvažnijeg rezultata djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.

Teorem 2.19. *Za $m \geq 0$ i $n \geq 0$ vrijedi $nzm(F_n, F_m) = F_{nzm(n,m)}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $n = qm + r$, za $0 \leq r < m$. Tada vrijedi

$$F_n = F_{qm+r} = f_{qm+(r-1)} = f_{qm} f_{r-1} + f_{qm-1} f_{r-2} = F_{qm+1} F_r + F_{qm} F_{r-1},$$

gdje treća jednakost slijedi iz propozicije 2.6. Prema tome,

$$\begin{aligned} nzm(F_n, F_m) &= nzm(F_{qm+1} F_r + F_{qm} F_{r-1}, F_m) \\ &= nzm(F_m, F_{qm+1} F_r + F_{qm} F_{r-1} - F_m x), \end{aligned}$$

gdje je x proizvoljan cijeli broj. Međutim, kako $m | qm$, teorem 2.16. povlači da $F_m | F_{qm}$ pa zaključujemo da postoji cijeli broj x takav da vrijedi

$$nzm(F_n, F_m) = nzm(F_m, F_{qm+1} F_r) = nzm(F_m, F_r).$$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice da su F_m i F_{qm+1} relativno prosti. Zaista, iz leme 2.18. znamo da to vrijedi za uzastopne Fibonaccijeve brojeve F_{qm} i F_{qm+1}, a budući da $F_m | F_{qm}$, slijedi da su i F_m i F_{qm+1} relativno prosti.

Primjerice, primjenom dobivene jednakosti

$$nzm(F_n, F_m) = nzm(F_m, F_r) \tag{1}$$

na brojeve F_{978} i F_{96} zaista dobivamo

$$\begin{aligned} nzm(F_{978}, F_{96}) &= nzm(F_{96}, F_{18}) = nzm(F_{18}, F_6) = nzm(F_6, F_0) \\ &= nzm(F_6, 0) = F_6 = F_{nzm(978,96)}. \end{aligned}$$

Konačno, uočimo da algoritam (1) odgovara Euklidovom algoritmu, ali s dodatno umetnutim F-ovima. Općenito, ako Euklidov algoritam započinje s $nzm(n, m)$ i završava s $nzm(0, g) = g$, tada i algoritam pod (1) počinje s $nzm(F_n, F_m)$ te završava s $nzm(F_0, F_g) = nzm(0, F_g) = F_g$. Iz toga slijedi

$$nzm(F_n, F_m) = F_{nzm(n,m)}.$$

$\square$

3 Verižni razlomci

3.1 Definicija i kombinatorna intepretacija

Kao uvod u poglavlje o verižnim razlomcima definirajmo najprije jednostavne verižne razlomke.

Definicija 3.1. *Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli brojevi takvi da vrijedi $a_0 \geq 0, a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1$. Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

zovemo jednostavni verižni razlomak*, a označavamo ga s $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.*

Neka su p i q funkcije koje vraćaju vrijednost brojnika, odnosno nazivnika jednostavnog verižnog razlomka u do kraja skraćenom obliku:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{q(a_0, a_1, \ldots, a_n)}.$$

Primijetimo da tada za $[a] = a$ vrijedi

$$p(a) = a, \tag{2}$$
$$q(a) = 1. \tag{3}$$

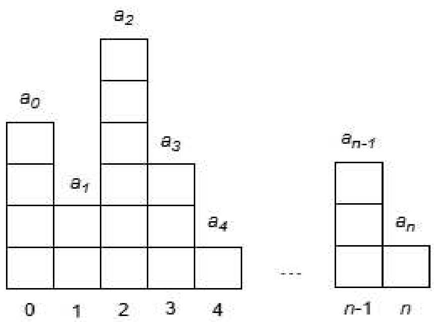
Nadalje, uočimo da se kompliciraniji verižni razlomci mogu izraziti rekurzivno kao

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \ldots, a_n] &= a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n]} \\ &= a_0 + \frac{q(a_1, \ldots, a_n)}{p(a_1, \ldots, a_n)} \\ &= \frac{a_0 p(a_1, \ldots, a_n) + q(a_1, \ldots, a_n)}{p(a_1, \ldots, a_n)}. \end{aligned}$$

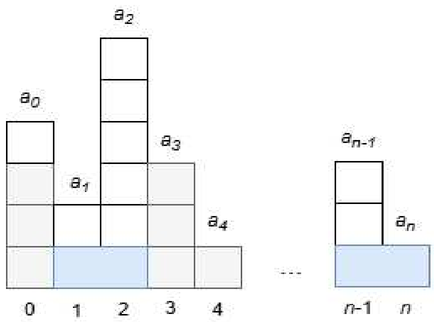
Pretpostavimo sada da postoji broj koji dijeli i brojnik i nazivnik razlomka s desne strane jednakosti. Tada bi on nužno morao dijeliti i $p(a_1, \ldots, a_n)$ i $q(a_1, \ldots, a_n)$. Međutim, znamo da takav broj ne postoji. Dakle, gornji razlomak je do kraja skraćen. Slijedi

$$p(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 p(a_1, \ldots, a_n) + q(a_1, \ldots, a_n), \tag{4}$$
$$q(a_0, a_1, \ldots, a_n) = p(a_1, \ldots, a_n). \tag{5}$$

Prelazimo na kombinatornu interpretaciju verižnih razlomaka. Ponovno ćemo se baviti popločavanjem, no ovaj put ono će biti nešto kompleksnije. U čemu je razlika? Ploču ćemo popločavati kvadratima i dominama kao i do sada, no ovaj put ćelija će moći sadržavati i više kvadrata naslaganih jedan na drugi. S druge strane, za domine mogućnost "podizanja u visinu" ne vrijedi. Za njih popločavanje ostaje nepromijenjeno, najviše jedna domina na dvije prazne ćelije. Također, nije dopušteno slagati pločice različitih vrsta jednu na drugu. Dakle, za popuniti ćelije imat ćemo tri mogućnosti - jednim kvadratom, jednom dominom ili s više kvadrata u visinu. Neka je sada $P(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ broj načina za popločati ploču duljine $n + 1$ kvadratima i dominama. Koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ predstavljat će uvjete na visine ćelija $0, 1, \ldots, n$, odnosno broj kvadratnih pločica koje je dopušteno slagati jednu na drugu na pojedinoj ćeliji.



Slika 14: Nepopločana ploča duljine $n + 1$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_n$



Slika 15: Primjer popločavanja ploče duljine $n + 1$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Slika 14 primjer je jedne nepopločane ploče duljine $n+1$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Na slici 15 prikazan je primjer popločavanja ploče duljine $n+1$ koje zadovoljava uvjete

Definirajmo sada funkciju Q tako da vrijedi

$$Q(a_0, a_1, \ldots, a_n) = P(a_1, \ldots, a_n). \tag{6}$$

Uočimo da Q odgovara broju načina popločavanja ploče duljine n s uvjetima na visine $a_1, \ldots, a_n$. Nadalje, kako ploču duljine 1 s uvjetom na visinu a možemo popločati na a načina, slijedi

$$P(a) = a. \tag{7}$$

Također, uzimamo da ploču duljine 0 možemo popločati na točno jedan način pa za takvo prazno popločavanje vrijedi

$$Q(a) = 1. \tag{8}$$

Dodatno, uočimo da za $n \geq 1$ vrijedi rekurzija

$$\begin{align} P(a_0, a_1, \ldots, a_n) &= a_0 P(a_1, \ldots, a_n) + P(a_2, \ldots, a_n) \tag{9} \\ &= a_0 P(a_1, \ldots, a_n) + Q(a_1, \ldots, a_n). \tag{10} \end{align}$$

Zaista, skup svih popločavanja ploče duljine $n+1$ dijelimo na dva disjunktna podskupa popločavanja uvjetno na vrstu prve pločice, kvadrat ili dominu. Konačno, iz relacija (1) $-$ (9) zaključujemo da funkcije p i q zadovoljavaju iste početne uvjete i rekurzivne relacije kao P i Q. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} p(a_0, a_1, \ldots, a_n) &= P(a_0, a_1, \ldots, a_n), \\ q(a_0, a_1, \ldots, a_n) &= Q(a_0, a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 3.2. *Neka je $a_0, a_1, \ldots$ niz prirodnih brojeva. Za $n \geq 0$, pretpostavimo da je verižni razlomak $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ u do kraja skraćenom obliku jednak $\frac{p_n}{q_n}$. Tada p_n odgovara ukupnom broju načina popločavanja ploče duljine $n+1$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_n$, a q_n predstavlja broj načina popločavanja ploče duljine n s uvjetima na visine $a_1, \ldots, a_n$.*

Primjer 3.3. *Promatramo verižni razlomak $[3, 7, 15]$. Nakon sređivanja dobivamo*

$$[3, 7, 15] = \frac{333}{106}.$$

Primijetimo da je ovo ujedno aproksimacija broja π.

Pokažimo sada da je ukupan broj popločavanja ploče duljine 3 s uvjetima na visine 3,7,15 zaista jednak 333 te da broj popločavanja ploče duljine 2 s uvjetima 7 i 15 odgovara 106. Naime, ploču duljine 3 možemo popločati kvadratima na $3\times7\times15 = 315$ *načina, dominom nakon koje slijedi kvadrat na 15 načina te, obratno, kvadratom pa dominom na 3 načina. Ukupno je to 333 popločavanja. Nadalje, ploču duljine 2 možemo popločati samo kvadratima na* $7 \times 15 = 105$ *načina ili samo dominom na 1 način što u zbroju daje 106. Zaista, primjer opravdava istinitost gornjeg teorema.*

3.2 Kombinatorno dokazivanje identiteta

Slijedi cjelina o identitetima i njihovim kombinatornim dokazima. Krenut ćemo najprije s propozicijom o rekurzivnim relacijama koje zadovoljavaju funkcije p i q.

Propozicija 3.4. *Neka za niz cijelih brojeva* $(a_n)_{n\geq0}$ *vrijedi* $a_0 \geq 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots,$ *te* $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. *Tada* p_n *i* q_n *zadovoljavaju sljedeće rekurzije:*

$$
\begin{aligned}
&p_0 = a_0, \qquad && p_1 = a_0a_1 + 1, \qquad && p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}, \qquad && \text{za } n \geq 0,\\
&q_0 = 1, && q_1 = a_1, && q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}, && \text{za } n \geq 0.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Dokažimo rekurziju za p_n. Ploču duljine 1 s uvjetom na visinu a_0 možemo popločati s $1, 2, 3, \ldots, a_0 - 1$ ili a_0 kvadrata. Dakle, ukupno je a_0 načina popločavanja pa zaista vrijedi $p_0 = a_0$. Nadalje, ploču duljine 2 s uvjetima na visine a_0 i a_1 možemo popločati kvadratima na ukupno a_0a_1 načina ili dominom na 1 način iz čega slijedi $p_1 = a_0a_1 + 1$. Neka je sada ploča duljine $n + 1$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Skup svih njezinih popločavanja dijelimo na dva disjunktna podskupa uvjetno na vrstu posljednje pločice. Ukoliko se na posljednjem mjestu nalazi domina, prethodni nepopločani dio ploče možemo popločati na p_{n-2} načina. S druge strane, posljednje mjesto možemo popločati kvadratima na a_n načina, a ostatak ploče na p_{n-1} način. Iz toga, po principu sume, slijedi $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$. Rekurziju za q_n dokazujemo analogno. □

Propozicija 3.5. *Za* $n \geq 1$ *vrijedi* $[2, 1, 1, \ldots, 1, 1, 2] = \frac{f_{n+3}}{f_{n+1}}$, *gdje* $a_0 = 2, a_n = 2$ *te* $a_i = 1$, *za sve* $0 < i < n$.

Dokaz. Kako bismo dokazali propoziciju, dovoljno je uspostaviti bijekciju između odgovarajućih skupova. Promatramo dva skupa popločavanja. Prvi skup čine sva popločavanja duljine n kvadratima i dominama s uvjetima na visine $1, 1, \ldots, 1, 1, 2$. Prema teoremu 3.2., takvih je ukupno $p(1, \ldots, 1, 2) =$

$q(2,1,\dots,1,2)$. Drugi skup čine sva popločavanja duljine $n+1$ čija veličina odgovara f_{n+1}. Uspostavimo bijekciju između ova dva skupa. Označimo s T popločavanje duljine $n+1$. Ako T završava kvadratom, uklanjanjem tog kvadrata formiramo popločavanje duljine n. Ako T završava dominom, tada njezinim "presavijanjem" dobivamo popločavanje duljine n s dva naslagana kvadrata na posljednjoj poziciji. Time smo opravdali nazivnik na desnoj strani jednakosti.

Što je s brojnikom? Ponovno promatramo dva skupa popločavanja. U ovom slučaju, neka prvi skup čine sva popločavanja duljine $n+1$ s uvjetima na visine $2,1,1,\dots,1,1,2$. Iz teorema 3.2. znamo da je takvih $p(2,1,\dots,1,2)$. Drugi skup je veličine f_{n+3} te sadrži sva popločavanja duljine $n+3$. Slično kao i maloprije, uklanjanjem kvadrata i "presavijajnem" domina, u ovom slučaju i na prvoj i posljednjoj poziciji popločavanja duljine $n+3$, uspostavljamo bijekciju između skupova.

□

Propozicija 3.6. *Pretpostavimo da vrijedi* $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. *Tada za* $n \geq 1$ *vrijedi*

$$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da je veličina skupa svih popločavanja duljine $n+1$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ jednaka p_n. Međutim, uočimo da zrcaljenjem popločane ploče oko vertikalne osi uspostavljamo bijekciju između tog skupa i skupa svih popločavanja duljine $n+1$ s uvjetima na visine $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Na isti način uspostavljamo bijekciju između skupa svih popločavanja duljine n s uvjetima na visine $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ i skupa svih popločavanja duljine n s uvjetima $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Time smo dokazali tvrdnju. □

Zadatak 3.7. *Za* $n \geq 0$ *i* $m \geq 2$ *vrijedi*

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, m] = [a_0, a_1, \dots, a_n, m-1, 1].$$

Dokaz. Za dokaz gornje relacije dovoljno je pokazati da vrijedi

$$p(a_0, a_1, \dots, a_n, m) = p(a_0, a_1, \dots, a_n, m-1, 1)$$

te

$$q(a_0, a_1, \dots, a_n, m) = q(a_0, a_1, \dots, a_n, m-1, 1).$$

Dokaz ćemo provesti za funkciju p, a za q postupamo analogno.

Promatramo dva skupa popločavanja. Prvi skup čine sva popločavanja duljine $n+2$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \dots, a_n, m$. Drugi skup sadrži sva popločavanja duljine $n+3$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_n, m-1, 1$. Uspostavimo bijekciju između navedenih skupova. Neka je T popločavanje iz prvog skupa takvo da se na posljednjoj poziciji nalazi domina ili $1, 2, \ldots, m-2$ ili $m-1$ kvadrata. Dodavanjem kvadrata na ćeliju $n+2$ formirali smo popločavanje iz drugog skupa. S druge strane, ako T na poziciji $n+1$ sadrži m naslaganih kvadrata, tada uklanjanjem svih m kvadrata te postavljanjem domine na ćelije $n+1$ i $n+2$ ponovno formiramo popločavanje iz drugog skupa. Postupak možemo provesti i obrnutom smjeru pa je bijekcija uspostavljena. $\square$

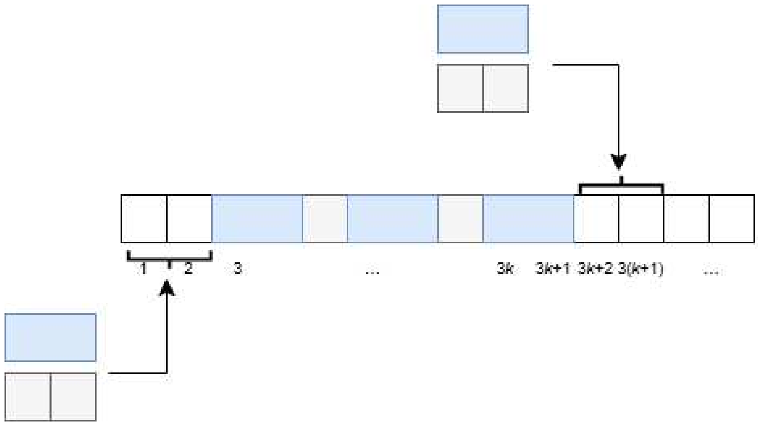
Zadatak 3.8. *Za $n \geq 1$ vrijedi $[4, 4, \ldots, 4, 3] = \frac{f_{3n+3}}{f_{3n}}$, gdje $a_n = 3$ i $a_i = 4$, za sve $0 \leq i < n$.*

Dokaz. Dokažimo da vrijedi $p(4, 4, \ldots, 4, 3) = f_{3n+3}$ te $q(4, 4, \ldots, 4, 3) = f_{3n}$. Najprije ćemo pokazati da vrijedi jednakost za q. Označimo s T popločavanje ploče duljine n s uvjetima na visine $4, \ldots, 4, 3$. Popločavanju T duljine n želimo pridružiti "obično" popločavanje U duljine $3n$, pri čemu "običnim" popločavanjem smatramo popločavanje bez mogućnosti slaganja kvadratnih pločica jednu na drugu. Ideja je da svaku pojedinu pločicu popločavanja T "utrostručimo". Krenimo na sljedeći način:

1. ako ćelija i sadrži jedan, dva ili tri kvadrata, neka je popločavanje U lomljivo u ćeliji $3i$,
2. ako ćelija i sadrži četiri kvadrata, neka tada popločavanje U nije lomljivo u ćeliji $3i$,
3. ako ćelija i sadrži dominu, neka je popločavanje U lomljivo u ćeliji i ako i samo ako domina završava s ćelijom i.

Međutim, uočimo da time još uvijek nismo jedinstveno odredili pridruženo popločavanje U. Naime, pretpostavimo da je prvih k ćelija popločavanja T popločano kvadratima visine 4, gdje $k \geq 0$, nakon čega slijedi jedan kvadrat. Označimo takav dio popločavanja s 4^k1. Tada, iz točke 2, slijedi da pridruženo popločavanje U nužno mora sadržavati početak domine na ćelijama $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \ldots, 3 \cdot k$. U tom slučaju se između svake dvije domine nalazi točno jedna slobodna ćelija pa nam preostaje svaku od njih popločati kvadratom. Nadalje, budući da se na poziciji $k+1$ popločavanja T nalazi jedan kvadrat, točka 1 povlači da pridruženo popločavanje U mora biti lomljivo u ćeliji $3(k+1)$. Iz toga slijedi da se na pozicijama $3(k+1)-1$ i $3(k+1)$ mogu nalaziti dva kvadrata ili jedna domina. Također, uočimo da su ćelije 1 i 2 ostale nepopločane te da za njih nemamo postavljene uvjete pa i njih možemo popločati na dva načina. Ukupno je to četiri mogućnosti popločavanja U

(vidi sliku 16). Dakle, popločavanje U pridruženo popločavanju T uvjetovano gornjim točkama zaista nije jedinstveno određeno.



Slika 16: Četiri mogućnosti pridruživanja popločavanja U popločavanju T koje počinje s 4^k1

Analognim zaključivanjem slijedi da će i popločavanjima s početkom 4^k2, 4^k3, $4^{k-1}d$ također biti pridruženo popločavanje oblika prikazanog na slici 16, gdje je d oznaka za dominu. Konačno, svakom pojedinom od četiri navedena popločavanja T na jedinstven način pridružujemo neko od četiri moguća popločavanja U. Primjerice, popločavanju 4^k1 pridružit ćemo popločavanje $s^2(ds)^ks$, pri čemu je s oznaka za kvadrat. Nadalje, međusobno možemo pridružiti 4^k2 i $d(ds)^ks$, 4^k3 i $s(sd)^kd$ te 4^kd i $d(ds)^kd^2$. Nastavljanjem "utrostručavanja" popločavanja T do popločavanja U dobili bismo točno f_{3n} popločavanja. Iz toga slijedi dokaz relacije za q. Dokaz za p proveli bismo analogno. □

3.3 Beskonačni verižni razlomci

Do sada smo se bavili konačnim verižnim razlomcima. *Beskonačni verižni razlomak* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ definiramo kao limes niza konačnih verižnih razlomaka $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, za $n \to \infty$. Nadalje, sljedeća definicija uvodi pojam *n-te konvergente* beskonačnog verižnog razlomka $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$, dok ćemo u propoziciji 3.10. promatrati udaljenosti uzastopnih konvergenti.

Definicija 3.9. *Racionalni broj* $r_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ *naziva se* n-ta konvergenta *od* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

Prije nego prijeđemo na dokaz iduće propozicije, uvedimo oznake $\mathcal{P}_n$ i $\mathcal{Q}_n$ za skup svih popločavanja kvadratima i dominama s uvjetima na visine

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ i $a_1, \ldots, a_n$, redom. Uočimo da tada vrijedi $|\mathcal{P}_n| = p_n$ i $|\mathcal{Q}_n| = q_n$.

Propozicija 3.10. *Razlika uzastopnih konvergenti od* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *jednaka je*

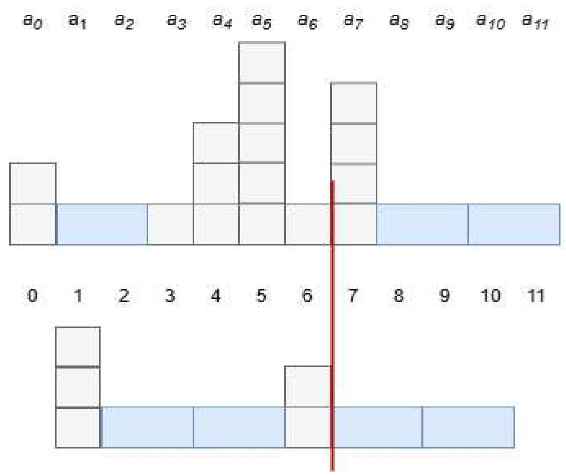
$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Množenjem obje strane s $q_n q_{n-1}$ *gornja jednakost ekvivalentna je*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

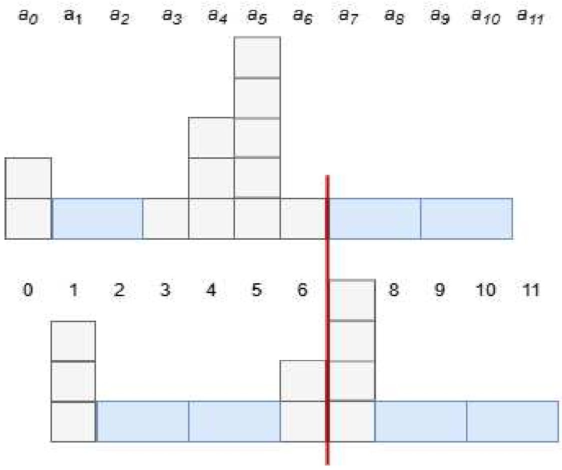
Dokaz. Promatramo par ploča takvih da gornja ploča sadrži ćelije $0, 1, \ldots, n$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_n$, dok donju ploču čine ćelije $1, 2, \ldots, n-1$ s uvjetima na visine $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Takav par ploča možemo popločati na $p_n q_{n-1}$ načina. Nadalje, neka sada gornju ploču čine ćelije $0, 1, \ldots, n-1$ s uvjetima na visine $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, a donju ćelije $1, 2, \ldots, n$ s uvjetima na visine $a_1, \ldots, a_n$. Veličina skupa svih popločavanja takvog para ploča odgovara $p_{n-1} q_n$.

Neka je (S, T) neko dozvoljeno popločavanje prvog para ploča, odnosno neka vrijedi $(S, T) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-1}$. Najprije ćemo se, za potrebe dokaza, prisjetiti pojma *greške* i *repa* popločavanja (S, T) te tehnike zamjene repova. U tu svrhu, promotrimo sliku 17. Uočimo da posljednju grešku sadrži ćelija 6, dok se desno od nje nalaze repovi.



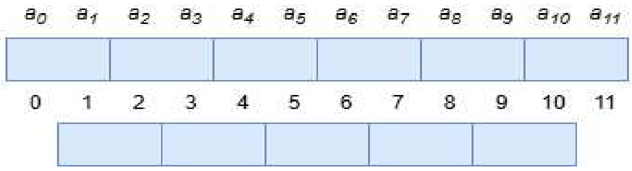
Slika 17: Par popločavanja iz skupa $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-1}$ s pripadnom greškom i repovima, za $n = 11$

Primijetimo da ako (S,T) sadrži grešku, tada zamjenom repova dobivamo popločavanje $(S',T') \in \mathcal{P}_{n-1} \times \mathcal{Q}_n$ (vidi sliku 18). Kako (S,T) i (S',T') imaju istu posljednju grešku, ovaj postupak možemo napraviti i u obrnutom smjeru.



Slika 18: Par popločavanja iz skupa $\mathcal{P}_{n-1} \times \mathcal{Q}_n$, za $n = 11$

U prvom poglavlju zaključili smo da ukoliko popločavanja S ili T sadrže kvadrat, tada (S,T) nužno sadrži grešku. Drugim riječima, ukoliko (S,T) ne sadrži grešku, to nužno povlači da popločavanja S i T čine samo domine. Dodatno, posljedica toga je da su i S i T popločavanja s parnim brojem ćelija, odnosno n je nužno neparan. Na slici 19 prikazan je jedini slučaj popločavanja koje ne sadrži grešku.



Slika 19: Jedini slučaj popločavanja (S,T) koje ne sadrži grešku

Dakle zaključujemo, kada je n neparan, postoji točno jedno popločavanje skupa $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-1}$ koje ne sadrži grešku, dok sva popločavanja skupa $\mathcal{P}_{n-1} \times \mathcal{Q}_n$ sadrže grešku. Iz toga slijedi $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = 1$. S druge strane, kada je n paran, sva popločavanja iz skupa $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-1}$ sadrže grešku, dok točno jedno popločavanje iz skupa $\mathcal{P}_{n-1} \times \mathcal{Q}_n$ ne sadrži. To povlači $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -1$. Konačno, slijedi

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

U prethodnoj propoziciji vidjeli smo kako se konvergente približavaju jedna drugoj. Iduća propozicija tvrdi da je niz uzastopnih parnih konvergenti rastući, dok uzastopne neparne konvergente čine padajući niz.

Propozicija 3.11. *Vrijedi*

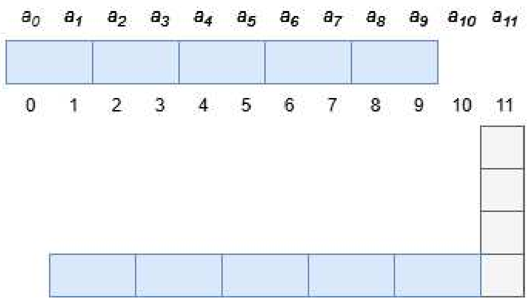
$$r_n - r_{n-2} = (-1)^n \frac{a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

Množenjem obje strane s $q_n q_{n-2}$ gornja jednakost ekvivalentna je

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n.$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo ponovno dokazati tehnikom zamjene repova. U ovom slučaju promatramo skup popločavanja $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-2}$ veličine $p_n q_{n-2}$ te skup $\mathcal{P}_{n-2} \times \mathcal{Q}_n$ veličine $p_{n-2} q_n$. Možemo li uspostaviti bijekciju između ovih skupova? Znamo da je zamjenom repova bijekciju moguće uspostaviti između popločavanja koja sadrže grešku iz skupova $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-2}$ i $\mathcal{P}_{n-2} \times \mathcal{Q}_n$ (vidi slike 21 i 22).

Što s popločavanjima koja nemaju grešku? Pretpostavimo najprije da je n neparan. Tada je i $n-2$ neparan pa sva popločavanja iz skupa $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-2}$ sadrže grešku. Međutim, uočimo da u tom slučaju skup $\mathcal{P}_{n-2} \times \mathcal{Q}_n$ sadrži ukupno a_n popločavanja bez greške. Konkretno, to su popločavanja (S', T') takva da sve ćelije sadrže domine, osim posljednje ćelije popločavanja T' koja može sadržavati $1, 2, \ldots, a_{n-1}$ ili a_n kvadrata. Slika 20 primjer je jednog takvog popločavanja.



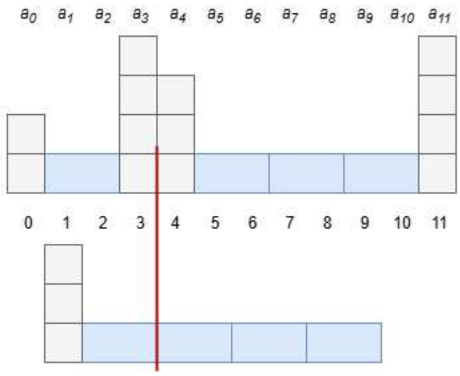
Slika 20: Primjer popločavanja iz skupa $\mathcal{P}_{n-2} \times \mathcal{Q}_n$ koje ne sadrži grešku, za $n = 11$

Pretpostavimo sada da je n paran. U ovom slučaju skup $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-2}$ sadrži ukupno a_n popločavanja bez greške, dok u skupu $\mathcal{P}_{n-2} \times \mathcal{Q}_n$ takva popločavanja ne postoje.

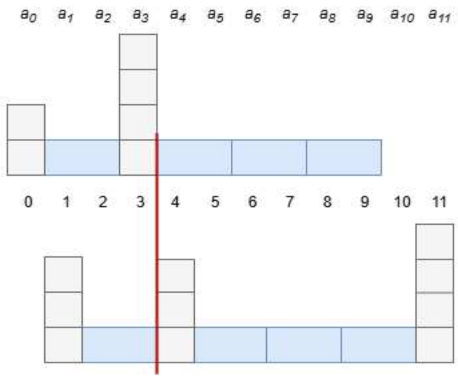
Dakle, zaključujemo da vrijedi

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n.$$

$\square$



Slika 21: Par popločavanja iz skupa $\mathcal{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-2}$ s pripadnom greškom i repovima, za $n = 11$



Slika 22: Par popločavanja iz skupa $\mathcal{P}_{n-2} \times \mathcal{Q}_n$, za $n = 11$

Konačno možemo reći da limes niza konačnih verižnih razlomaka $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ kada $n \to \infty$ zaista postoji. Naime, iz prethodne dvije propozicije te činjenice da $q_n \to \infty$ kada $n \to \infty$, slijedi da je $[r_0, r_1], [r_2, r_3], [r_4, r_5], \ldots$ niz ugniježdenih intervala čija duljina teži u 0. Stoga je jasno da $\lim_{n\to\infty} r_n$ mora postojati. Sada ima smisla definirati

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] := \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Dodatno ćemo pokazati da je beskonačni verižni razlomak $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ iracionalan broj. Stavimo $r = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Tada vrijedi

$$0 < |r - r_n| < |r_{n+1} - r_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{{q_n}^2}$$

odakle slijedi

$$0 < |r - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{{q_n}^2},$$

a množenjem nejednakosti s q_n dobivamo

$$0 < |rq_n - p_n| < \frac{1}{q_n}.$$

Pretpostavimo sada da je r racionalan broj, to jest neka je $r = \frac{a}{b}$, gdje je $\frac{a}{b}$ razlomak skraćen do kraja. Tada množenjem nejednakosti s $b > 0$ dobivamo

$$0 < |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_n}.$$

Uočimo da je $|aq_n - bp_n|$ cijeli broj, dok je vrijednost s desne strane nejednakosti proizvoljno mala kako n raste. Međutim, budući da ne postoje cijeli brojevi između 0 i 1, došli smo do kontradikcije. Zaključujemo da je r nužno iracionalan broj.

3.4 Složeni verižni razlomci

Definicija 3.12. *Neka je a_0 nenegativni cijeli broj te neka su $a_1, \ldots, a_n$, i $b_1, \ldots, b_n$ pozitivni cijeli brojevi. Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

zovemo složeni verižni razlomak, *a označavamo ga s* $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)]$.

Neka su ponovno p i q funkcije koje vraćaju vrijednost brojnika, odnosno nazivnika složenog verižnog razlomka nakon "sređivanja" odozdo prema gore:

$$[a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)] = \frac{p[a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)]}{q[a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)]}.$$

Međutim, ovaj put razlomak s desne strane jednakosti ne mora nužno biti skraćen do kraja kao što je, sjetimo se, bio slučaj kod jednostavnih verižnih razlomaka. Primjerice, tako će za

$$[3,(4,2)] = \frac{14}{4}$$

vrijediti

$$p[3,(4,2)] = 14 \text{ i } q[3,(4,2)] = 4.$$

Primijetimo da za $[a] = a$ i dalje vrijedi

$$\begin{aligned} p[a] &= a, \\ q[a] &= 1. \end{aligned}$$

Nadalje, i složene verižne razlomke možemo izraziti rekurzivno kao

$$\begin{aligned} &[a_0,(b_1,a_1),\dots,(b_n,a_n)] \\ &= a_0 + \frac{b_1}{[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)]} \\ &= a_0 + \frac{b_1 q[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)]}{p[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)]} \\ &= \frac{a_0 p[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)] + b_1 q[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)]}{p[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)]}. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} p[a_0,(b_1,a_1),\dots,(b_n,a_n)] =& a_0 p[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)] \\ &+ b_1 q[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)] \end{aligned}$$

te

$$q[a_0,(b_1,a_1),\dots,(b_n,a_n)] = p[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)].$$

Preostaje nam kombinatorna interpretacija složenih verižnih razlomaka. Pretpostavimo sada da popločavanje dodatno dozvoljava slaganje domina jednu na drugu. Označimo s b_i, $i \geq 1$, najveći broj domina koje je dozvoljeno slagati jednu na drugu na ćelijama $i-1$ i i. Neka je $P[a_0,(b_1,a_1),\dots,(b_n,a_n)]$ broj načina za popločati ploču duljine $n+1$ s uvjetima na visine kvadrata $a_0, a_1, \dots, a_n$ te uvjetima na visine domina $b_1, \dots, b_n$. Nadalje, definirajmo funkciju Q s

$$Q[a_0,(b_1,a_1),\dots,(b_n,a_n)] = P[a_1,(b_2,a_2),\dots,(b_n,a_n)].$$

Iz definicije vidimo da Q broji sva popločavanja ploče nakon izbacivanja početne ćelije 0. Nadalje, uočimo da za ploču duljine 1 s uvjetom na visinu kvadrata a vrijedi

$$P[a] = a.$$

Ploču duljine 0 možemo popločati na točno jedan način pa za takvo prazno popločavanje vrijedi

$$Q[a] = 1.$$

Također, uvjetno na vrstu prve pločice, slijedi

$$\begin{aligned}
&P[a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)] \\
&\quad = a_0 P[a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)] + b_1 P[a_2, (b_3, a_3), \ldots, (b_n, a_n)] \\
&\quad = a_0 P[a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)] + b_1 Q[a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)].
\end{aligned}$$

Konačno, time smo dokazali sljedeći teorem o kombinatornoj interpretaciji, a koji će ujedno biti i naš posljednji teorem u ovom poglavlju.

Teorem 3.13. *Neka je $a_0, a_1, \ldots$ niz prirodnih brojeva. Za $n \geq 1$, pretpostavimo da je verižni razlomak $[a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)]$ jednak $\frac{p_n}{q_n}$. Tada za $n \geq 0$, p_n broji ukupan broj popločavanja ploče duljine $n+1$ s uvjetima na visine $a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)$, dok q_n predstavlja broj načina za popločati ploču duljine n s uvjetima na visine $a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)$.*

4 Binomni koeficijenti i kombinacije s ponavljanjem

4.1 Kombinatorna interpretacija

Za početak se prisjetimo definicije, a ujedno i kombinatorne interpretacije binomnih koeficijenata. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je broj svih k-članih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Što je s rubnim vrijednostima $k = 0$ ili $k = n$? Za $k = 0$ očito vrijedi $\binom{n}{0} = 1$ budući da svaki konačan skup ima točno jedan prazan podskup. Jasno je i da za $k = n$ vrijedi $\binom{n}{n} = 1$. Za $k < 0$ stavit ćemo da vrijedi $\binom{n}{k} = 0$. Nadalje, uvedimo pojam *multiskupa* i *kombinacije s ponavljanjem.*

Definicija 4.1. *Multiskup $M = \{a_1^{k_1}, \ldots, a_s^{k_s}\}$ sadrži međusobno različite elemente $a_1, \ldots, a_s$ nekog skupa S s kratnostima $k_1, \ldots, k_s$. Multiskup M je tada veličine $k_1 + \ldots + k_s$.*

Definicija 4.2. *Kombinacija s ponavljanjem $\left(\binom{n}{k}\right)$ je broj multiskupova veličine k nad skupom $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Navedimo pa zatim kombinatorno dokažimo algebarsku formulu za binomne koeficijente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Propozicija 4.3. *Za $0 \leq k \leq n$ vrijedi $n! = \binom{n}{k} k!(n-k)!$.*

Dokaz. Lijeva strana jednakosti odgovara broju načina na koje možemo poredati brojeve $1, 2, \ldots, n$, bez ponavljanja. Zaista, prvi broj možemo odabrati na n načina. Za drugo mjesto preostaje nam $n - 1$ izbora. Nastavljajući postupak, po principu produkta, dolazimo do izraza

$$n(n-1)\cdots 1 = n!.$$

Izraz s desne strane jednakosti slijedi iz prebrojavanja uvjetno na izbor prvih k brojeva u poretku. Njih možemo odabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Nakon što ih odaberemo, možemo ih poredati na $k!$ načina, dok nam za preostalih $n - k$ praznih mjesta preostaje $n - k$ brojeva koje ćemo poredati na $(n-k)!$ načina. Sada, po principu produkta, slijedi i desna strana jednakosti. $\square$

4.2 Identiteti

Prelazimo na razne metode dokazivanja identiteta koje zadovoljavaju binomni koeficijenti i kombinacije s ponavljanjem. Preskačemo mnoge elementarne identitete kako bismo postigli raznolikost i izbjegli već viđene metode dokazivanja. Kao i do sada u ovom radu, izbjegavat ćemo algebarske dokaze, poput dokaza indukcijom, i fokusirati se na kombinatorni pristup. Krenut ćemo od jednostavnijih do nešto složenijih primjera.

Propozicija 4.4. *Za $0 \leq k \leq n$ (osim za $k = n = 0$) vrijedi*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz. Postoji $\binom{n}{k}$ odbora veličine k unutar grupe od n studenata. Do izraza s desne strane jednakosti dolazimo prebrojavanjem uvjetno na studenta n. Postoji $\binom{n-1}{k-1}$ odbora ako je student n član odbora, odnosno $\binom{n-1}{k}$ ako student n nije član odbora. Po principu sume, slijedi tvrdnja. $\square$

Propozicija 4.5. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

Dokaz. Po principu sume slijedi da na ukupno $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}$ načina možemo formirati odbor s parnim brojem članova unutar grupe od n studenata. S druge strane, za svakog od prvih $n-1$ studenata donosimo odluku hoće li ili neće biti član odbora. Uočimo da je sada odluka za studenta n jedinstveno određena. Primjerice, ako u odboru sudjeluje neparan broj studenata od njih ukupno $n-1$, tada će student n nužno biti član odbora budući da broj članova mora biti paran. Dakle, prebrojali smo 2^{n-1} mogućnosti. $\square$

Zadatak 4.6. *Za $0 \leq m \leq n$ vrijedi*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Dokaz. Na koliko načina unutar grupe od n studenata možemo formirati odbor proizvoljne veličine koji ujedno sadrži i manji pododbor veličine m? Odgovor je $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$. Zaista, od ukupno n studenata biramo k studenata koji će biti članovi odbora na $\binom{n}{k}$ načina. Zatim unutar odbora veličine k

na ukupno $\binom{k}{m}$ načina biramo m članova koji će činiti pododbor. Sada, po principu produkta, slijedi da postoji ukupno $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ mogućnosti formiranja odbora veličine k i pododbora veličine m. Kako je k proizvoljan, po principu sume ukupan broj izbora je

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}\binom{k}{m}.$$

Da bismo dobili izraz s desne strane jednakosti, najprije biramo m studenata koji će činiti pododbor. To možemo učiniti na $\binom{n}{m}$ načina. Nadalje, svaki od preostalih $n-m$ studenata donosi odluku hoće li ili neće biti dio odbora što povlači 2^{n-m} mogućnosti. Konačno, tvrdnja slijedi po principu produkta. □

Propozicija 4.7. *Za* $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ *vrijedi*

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k}\binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

Dokaz. Desna strana jednakosti odgovara broju podskupova veličine $2k+1$ skupa $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Izraz s lijeve strane slijedit će iz prebrojavanja podskupova uvjetno na medijalni element pojedinog podskupa. Medijan podskupa veličine $2k+1$ je element na poziciji $k+1$ uzlaznog poretka svih elemenata podskupa. Dakle, ukupno k elemenata je strogo manje od medijana te je k elemenata strogo veće od medijana. Stoga, za medijan $m+1$, biramo k brojeva strogo manjih od $m+1$ na $\binom{m}{k}$ načina, a zatim između preostalih $(n+1)-(m+1) = n-m$ elemenata biramo k elemenata na $\binom{n-m}{k}$ načina. Po principu produkta, prebrojali smo $\binom{m}{k}\binom{n-k}{k}$ podskupova s medijanom $m+1$. Kako za m nužno vrijedi $k \leq m \leq n-k$, po principu sume konačno slijedi lijeva strana jednakosti. □

Propozicija 4.8. *Za* $t \geq 1$ *i* $n \geq 0$ *vrijedi*

$$\sum_{x_1 \geq 0} \sum_{x_2 \geq 0} \cdots \sum_{x_t \geq 0} \binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\binom{n-x_2}{x_3} \cdots \binom{n-x_{t-1}}{x_t} = f_{t+1}^n.$$

Dokaz. Uočimo da izraz f_{t+1}^n odgovara broju načina na koje možemo popločati n ploča duljine $t+1$, položenih jednu ispod druge, kvadratima i dominama.

Za svaki j, $1 \leq j \leq t$, označimo s x_j broj popločavanja koja na poziciji j sadrže početak domine. Sada na $\binom{n}{x_1}$ načina biramo kojih će x_1 popločavanja među popločavanjima $T_1, \ldots, T_n$ počinjati s dominom. Od preostalih $n - x_1$

popločavanja koja ne počinju s dominom, već kvadratom, biramo x_2 popločavanja koja će početak domine sadržavati na poziciji 2 na ukupno $\binom{n-x_1}{x_2}$ načina. Nadalje, postoji $\binom{n-x_2}{x_3}$ mogućnosti za odabrati x_3 popločavanja čiji će se početak domine nalaziti na poziciji 3. Uzimajući u obzir sve moguće vrijednosti od $x_1, \ldots, x_n$, konačno slijedi da n ploča duljine $t+1$ možemo popločati na ukupno

$$\sum_{x_1 \geq 0} \sum_{x_2 \geq 0} \cdots \sum_{x_t \geq 0} \binom{n}{x_1} \binom{n-x_1}{x_2} \binom{n-x_2}{x_3} \cdots \binom{n-x_{t-1}}{x_t} = f_{t+1}^n$$

načina. □

Dokaz zadatka 4.9. može se pronaći u [8].

Zadatak 4.9. *Za $n \geq 0$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

Dokaz. Dokažimo identitet uspostavljanjem bijekcije. Neka je $S = \{1, \ldots, n\}$ skup veličine n. Podskup $B \subseteq S$ kardinaliteta k možemo odabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Zatim biramo podskup $A \subseteq B$ proizvoljne veličine za što imamo ukupno 2^k mogućnosti. To slijedi iz identiteta

$$\sum_{j \geq 0} \binom{k}{j} = 2^k$$

čiji se dokaz može pronaći u [2]. Po principu produkta, ukupno brojimo $\binom{n}{k} 2^k$ mogućnosti. Nadalje, kako je k proizvoljan, po principu sume dobivamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

Prelazimo na desnu stranu jednakosti. Pretpostavimo da skupovi C, D i E čine particiju skupa S, odnosno $S = C \dot{\cup} D \dot{\cup} E$. Tada uređenu trojku (C, D, E) možemo formirati na ukupno 3^n načina. Zaista, za svaki od n elemenata skupa S postoji 3 mogućnosti za pohranjivanje pa po principu produkta dobivamo upravo 3^n.

Uspostavimo sada bijekciju između skupa uređenih parova (A, B) te skupa uređenih trojki (C, D, E). Definiramo funkciju f kao

$$f(A, B) = (A, B \backslash A, S \backslash B).$$

Kako $A \subseteq B \subseteq S$, uočimo da zaista vrijedi da su $A, B \backslash A, S \backslash B$ disjunktni skupovi te u uniji čine cijeli S. Obratno, inverz od f definirat ćemo s

$$f^{-1}(C, D, E) = (C, C \cup D).$$

Konačno, uspjeli smo uspostaviti bijekciju pa je time dokaz završen. $\square$

Slijede dokazi nekoliko identiteta s alternirajućim predznacima. Definiramo najprije *Kroneckerovu delta funkciju*:

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } m = n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Propozicija 4.10. *Za $n, m \geq 0$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m} (-1)^k = (-1)^n \delta_{n,m}.$$

Dokaz. Označimo s $\mathcal{P}$ skup uređenih parova (S, T), gdje $T \subseteq S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ te vrijedi $|T| = m$ i $|S| = k$, za k paran broj. Tada za veličinu skupa $\mathcal{P}$ vrijedi

$$|\mathcal{P}| = \sum_{k \text{ paran}} \binom{n}{k} \binom{k}{m}.$$

Nadalje, označimo sada s $\mathcal{N}$ skup uređenih parova (S, T), gdje $T \subseteq S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ te vrijedi $|T| = m$ i $|S| = k$, za k neparan broj. Tada je kardinalitet skupa $\mathcal{N}$ jednak

$$|\mathcal{N}| = \sum_{k \text{ neparan}} \binom{n}{k} \binom{k}{m}.$$

Najprije pretpostavimo da vrijedi $n < m$. Primijetimo da su tada skupovi $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ prazni pa očito vrijedi jednakost. Neka je sada $n = m$, gdje je n neparan broj. Tada je $\mathcal{P}$ prazan skup, dok $\mathcal{N}$ sadrži jedan element (S, T), pri čemu $S = T = \{1, \ldots, n\}$. To povlači $|\mathcal{P}| - |\mathcal{N}| = 0 - 1 = -1$. Slično zaključujemo u slučaju $n = m$, gdje je n paran broj. Naime, sada je skup $\mathcal{N}$ prazan, a $\mathcal{P}$ sadrži točno jedan element pa vrijedi $|\mathcal{P}| - |\mathcal{N}| = 1 - 0 = 1$. Preostalo nam je pokazati da tvrdnja vrijedi u slučaju $n > m$. U tu svrhu, dovoljno je uspostaviti bijekciju između skupova $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$. Za proizvoljan uređeni par (S, T), neka je x najveći element iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ takav da vrijedi $x \notin T$. Uočimo da takav x sigurno postoji zbog pretpostavke $n > m$. Ako vrijedi $x \in S$, tada uređenom paru (S, T) pridružujemo par $(S \backslash \{x\}, T)$. S druge strane, ako $x \notin S$, tada (S, T) pridružujemo $(S \cup x, T)$. Uočimo da su tada skup S i njemu pridruženi skup različitih parnosti pa je bijekcija između $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ zaista uspostavljena. $\square$

Propozicija 4.11. *Za $n \geq 0$ slijedi*

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k} = n+1.$$

Dokaz. Promatramo skup svih popločavanja kvadratima i dominama duljine n koja sadrže ukupno k domina, gdje je k paran broj. Prisjetimo li se prvog poglavlja, lako je zaključiti da je takvih popločavanja ukupno $\binom{n-k}{k}$. Zatim, od preostalih $n-2k$ kvadratnih pločica, na ukupno 2^{n-2k} načina možemo izabrati koje od njih će biti bijele, a koje crne boje. Uzmemo li sada u obzir sve parne brojeve k, po principu produkta i principu sume dobivamo

$$\sum_{k \text{ paran}}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}$$

različitih popločavanja. Pohranimo ih sve u skup $\mathcal{P}$.

Označimo s $\mathcal{N}$ skup svih popločavanja duljine n koja se sastoje od k domina te $n-2k$ kvadrata crne ili bijele boje, gdje je k neparan broj. Tada analognim zaključivanjem slijedi

$$|\mathcal{N}| = \sum_{k \text{ neparan}}\binom{n-k}{k}2^{n-2k}.$$

Za početak promatramo popločavanja koja na prvih k ćelija sadrže kvadrate crne boje iza kojih slijedi $n-k$ bijelih kvadrata. Uočimo da ona pripadaju skupu $\mathcal{P}$ budući da je broj domina jednak 0. Kako za k vrijedi $0 \leq k \leq n$, slijedi da brojimo $n+1$ mogućih popločavanja. Nadalje, preostala su popločavanja koja sadrže barem jedan par od dva kvadrata od kojih je prvi bijele, a drugi crne boje te popločavanja koja sadrže najmanje jednu dominu. Neka su i i $i+1$ prve ćelije u popločavanju iz skupa $\mathcal{P}$ koje sadrže bijeli pa zatim crni kvadrat. Tada zamjenom tih dvaju kvadrata domino pločicom dobivamo popločavanje iz skupa $\mathcal{N}$. S druge strane, ako su i i $i+1$ prve ćelije u popločavanju iz skupa $\mathcal{P}$ koje sadrže dominu, postavljanjem bijelog pa crnog kvadrata na mjesto domine popločavanju pridružujemo popločavanje iz skupa $\mathcal{N}$. Pridruživanje možemo napraviti i u obrnutom smjeru. Time smo uspostavili bijekciju između skupa $\mathcal{P}$ s izuzetih $n+1$ elemenata i skupa $\mathcal{N}$ pa konačno slijedi

$$|\mathcal{P}| - |\mathcal{N}| = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k} = n+1.$$

$\square$

Zadatak 4.12. *Za $n \geq 0$ vrijedi*

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^{n-k}\binom{n-k}{k} = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } n \equiv 0 \pmod 3, \\ 0, & \textit{ako je } n \equiv 2 \pmod 3, \\ -1, & \textit{ako je } n \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

Dokaz. Označimo s $\mathcal{P}$ skup svih popločavanja duljine n s parnim brojem pločica od kojih je ukupno k domino pločica. Tada vrijedi

$$|\mathcal{P}| = \sum_{\substack{k\geq 0, \\ n-k \text{ paran}}} \binom{n-k}{k}.$$

Nadalje, s $\mathcal{N}$ označimo skup svih popločavanja duljine n s neparnim brojem pločica od kojih je ukupno k domino pločica. Slijedi

$$|\mathcal{N}| = \sum_{\substack{k\geq 0, \\ n-k \text{ neparan}}} \binom{n-k}{k}.$$

Pretpostavimo najprije da vrijedi $n \equiv 2 \pmod 3$. Uspostavimo bijekciju između skupova $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$. Promatramo proizvoljno popločavanje s parnim brojem pločica. Pronađimo prvi j za koji je popločavanje lomljivo u ćeliji oblika $3j+2$. Uočimo da takva ćelija postoji budući da iz $n \equiv 2 \pmod 3$ slijedi da je ćelija n upravo takvog oblika. Tada popločavanje nužno počinje s j parova pločica od kojih je prva kvadrat, a druga domina, dok se na pozicijama $3j+1$ i $3j+2$ nalaze ili dva kvadrata ili jedna domina. U prvom slučaju, zamjenom dvaju kvadrata jednom dominom dobivamo popločavanje s neparnim brojem pločica. Jednako tako, u drugom slučaju, zamjenom domine dvama kvadratima popločavanju pridružujemo popločavanje s neparnim brojem pločica. Postupak možemo napraviti i obrnutom smjeru. Konačno, uspostavljanjem bijekcije slijedi $|\mathcal{P}|=|\mathcal{N}|$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $n \equiv 1 \pmod 3$, odnosno n je oblika $n = 3q+1$. Popločavanja međusobno pridružujemo na kao i maloprije. Međutim, u ovom slučaju postoji točno jedno popločavanje koje nije lomljivo u ćelijama oblika $3j+2$. Konkretno, radi se o popločavanju koje počinje s q parova pločica od kojih je prva kvadrat, a druga domina, dok se na poziciji $3q+1$ nalazi kvadrat. Kako takvo popločavanje ostaje nepridruženo te sadrži $2q+1$ pločica, zaključujemo da vrijedi jednakost $|\mathcal{P}| - |\mathcal{N}| = -1$.

Analogno dokazujemo i slučaj $n \equiv 0 \pmod 3$, gdje je n oblika $n = 3q$. Ponovno pronalazimo točno jedno popločavanje koje nije lomljivo u ćelijama oblika $3j+2$. U ovom slučaju radi se o popločavanju koje sadrži q parova pločica od kojih je prva kvadrat, a druga domina. Ponovno, iz jednog neuparenog popločavanja s parnim brojem pločica slijedi $|\mathcal{P}| - |\mathcal{N}| = 1$.

$\square$

Prelazimo na identitete koje zadovoljavaju kombinacije s ponavljanjem $\left(\binom{n}{k}\right)$. Ponovno ćemo prebrojavati podskupove veličine k unutar skupa S veličine n, međutim u ovom slučaju je elementima podskupa dozvoljeno ponavljanje. Primijetimo da $\left(\binom{n}{k}\right)$ predstavlja broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k,$$

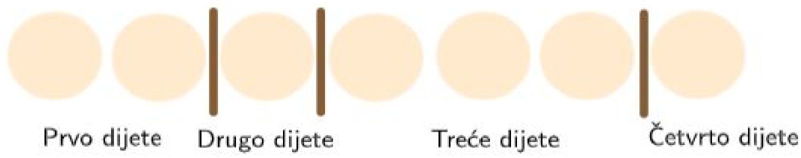
gdje x_i, za $1 \leq i \leq n$, prebrojava koliko puta smo odabrali i-ti element skupa S. To sada povlači niz kombinatornih interpretacija kombinacija s ponavljanjem. Primjerice, $\left(\binom{n}{k}\right)$ broji načine na koje možemo dodijeliti k glasova između n kandidata. Sada x_i odgovara broju glasova koje je osvojio kandidat i. Također, možemo reći da $\left(\binom{n}{k}\right)$ prebrojava sve moguće načine za podijeliti k identičnih bombona unutar skupine od n djece.

Kombinacije s ponavljanjem možemo izraziti u terminima binomnih koecijenata. O tome govori iduća propozicija.

Propozicija 4.13. *Za $n \geq 0$ i $k \geq 0$ vrijedi*

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Na koliko načina možemo podijeliti k identičnih bombona unutar skupine od n djece? Odgovor je na ukupno $\left(\binom{n}{k}\right)$ načina. Odakle slijedi binomni koeficijent s desne strane jednakosti?



Slika 23: Ilustrativni prikaz jedne podjele sedam bombona na četvero djece pomoću kružića i štapića

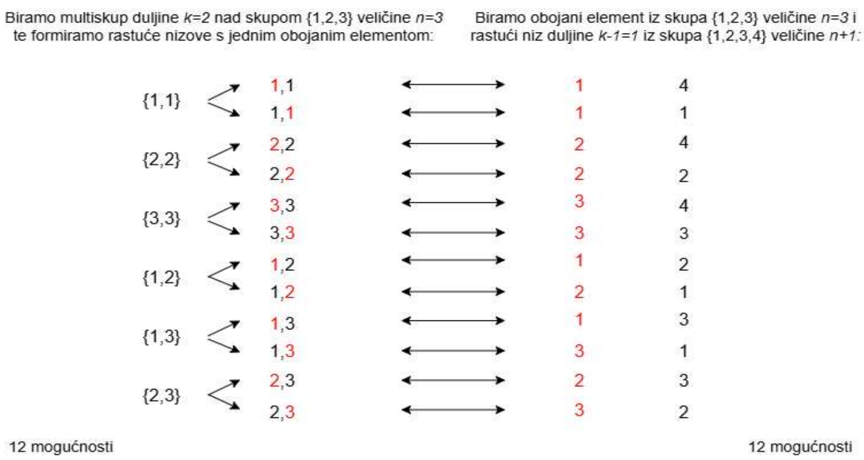
Na slici 23 promatramo primjer jedne podjele sedam bombona na četvero djece koristeći ilustrativni prikaz kružića i štapića. Na ilustraciji kružići predstavljaju bombone. Lijevo od prvog štapića nalaze se bomboni namijenjeni prvom djetetu. Lijevo od drugog štapića, preciznije između prvog i drugog štapića, su bomboni dodijeljeni drugom djetetu. Bombone između drugog i trećeg štapića dobilo je treće dijete, dok preostali bomboni pripadaju posljednjem, u ovom slučaju četvrtom djetetu. Uočimo da nema potrebe za dodavanjem četvrtog štapića na posljednje mjesto budući da je jasno da svi bomboni nakon trećeg štapića pripadaju četvrtom djetetu. Dakle, za n djece i k bombona potrebno je $n + (k-1)$ praznih pozicija kojima ćemo zatim pridruživati kružiće i štapiće. Pozicije na koje ćemo postaviti kružiće možemo izabrati na ukupno $\binom{n+k-1}{k}$ načina što zatim jedinstveno određuje pozicije štapića, a time i podjelu bombona među djecom. Time je dokazana i desna strana jednakosti.

□

Propozicija 4.14. *Vrijedi*

$$k\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = n\left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right).$$

Dokaz. Izraz $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ s lijeve strane jednakosti odgovara ukupnom broju cjelobrojnih nizova $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takvih da vrijedi $1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k \leq n$. Zaista, postoji ukupno $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ multiskupova veličine k nad skupom $\{1, \ldots, n\}$. Elemente svakog dobivenog multiskupa možemo na točno jedan način poredati uzlazno. Time smo multiskupu na jedinstven način pridružili rastući cjelobrojni niz. Po principu produkta, prebrojali smo $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) \cdot 1 = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ nizova. Nadalje, ako dodatno postavimo uvjet da jedan od k članova niza mora biti crvene boje, tada prebrojavamo ukupno $k\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ mogućih nizova.



Slika 24: Primjer pridruživanja za $n = 3$ i $k = 2$

Prelazimo na desnu strane jednakosti. Izaberimo element skupa $\{1, \ldots, n\}$ koji će biti crvene boje na ukupno n načina. Zatim biramo rastući niz elemenata duljine $k-1$ iz skupa $\{1, \ldots, n+1\}$. Postoji $\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$ takvih nizova pa ukupno, po principu produkta, brojimo $n\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$ mogućnosti. Konačan rastući i cjelobrojni niz duljine k formirat ćemo transformacijom i repozicioniranjem tako da sve elemente niza jednake odabranom crvenom elementu postavimo s njegove lijeve strane, dok ćemo sve elemente jednake $n+1$ postaviti s njegove desne strane i zamijeniti ih s njegovom vrijednošću. Primjerice, pretpostavimo da vrijedi $n = 5$ i $k = 4$. Recimo da smo odabrali da će element 1 iz skupa $\{1, \ldots, 5\}$ biti crvene boje. Također, neka naš odabrani rastući niz duljine 3 unutar skupa $\{1, \ldots, 6\}$ odgovara nizu $3, 6, 6$. Nakon repozicioniranja i transformacije, našem odabranom nizu i obojanom elementu pridružujemo rastući niz $1, 1, 1, 3$ s obojanim prvim članom. Pridruživanje možemo uspostaviti i u obrnutom smjeru (vidi primjer na slici 24). Konačno, iz tako uspostavljene bijekcije slijedi desna strana jednakosti. $\square$

Literatura

[1] B. Bakula, Z. Franušić, *Matrice s Fibonaccijevim brojevima*, Hrvatski elektronički matematički časopis math.e, 26 (2014), 18-30.

[2] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *Proofs That Really Count. The Art of Combinatorial Proof*, Mathematical Association of America, 2003.

[3] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *Revisiting Fibonacci and Related Sequences*, The Mathematics Teacher, 97 (2004), 314-318.

[4] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *The Fibonacci Numbers - Exposed More Discretely*, Mathematics Magazine, 76 (2003), 167-181.

[5] A. Benjamin, J. Quinn, F. E. Su, *Phased Tilings and Generalized Fibonacci Identities*, The Fibonacci Quarterly, 38 (2000), 282-288.

[6] L. Carlitz, *Fibonacci notes 3: q-Fibonacci numbers*, The Fibonacci Quarterly, 12 (1974), 317-322.

[7] F. Dablander, *The Fibonacci sequence and linear algebra*, dostupno na `https://fabiandablander.com/r/Fibonacci.html` (listopad 2024.)

[8] S. Das, *The Binomial Theorem and Combinatorial Proofs*, dostupno na `http://discretemath.imp.fu-berlin.de/DMI-2016/notes/binthm.pdf` (listopad 2024.)

[9] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[10] V. Krčadinac, *Kombinatorika*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2024.

[11] E. Lindgren, M. A. Ngo, S. Segroves, *Weighted Tilings and q-Fibonacci Numbers*, Carleton College, 2007.

Sažetak

U radu se kroz tri poglavlja upoznajemo s kombinatornim interpretacijama Fibonaccijevih brojeva, verižnih razlomaka te binomnih koeficijenata i kombinacija s ponavljanjem. Poglavlje o Fibonaccijevim brojevima posebno približava tehnike dokazivanja prebrojavanjem te služi kao temelj u razmišljanju o daljnjim poglavljima i složenijim problemima. Iskazano je mnoštvo identiteta. Svaki identitet dokazujemo na elegantan način temeljen na konceptu prebrojavanja. U radu dokaze provodimo na dva načina, dvostrukim prebrojavanjem istog skupa ili prebrojavanjem dva različita skupa, a zatim uspostavljanjem bijekcije između njih. U oba slučaja slijedit će jednakost između lijeve i desne strane identiteta. Iako nije uvijek najjednostavniji pristup, prebrojavanje nam omogućuje potpuno drugačije shvaćanje i razumijevanje problema. Ovim radom želimo čitatelju dočarati moć prebrojavanja kada je u pitanju dokazivanje kombinatornih identiteta.

Summary

In this thesis, through three chapters, we introduce combinatorial interpretations of Fibonacci numbers, continued fractions, binomial coefficients and combinations with repetition. In the chapter on Fibonacci numbers we get acquainted with proof techniques by counting. It serves as a foundation for further chapters and more complex problems. Many identities are expressed. We give an elegant proof based on counting for each identity. In this thesis, counting arguments are carried out in two ways, by double counting the same set or by counting two different sets and then establishing a bijection between them. In both cases, equality between the left and right side of the identity will follow. Although it is not always the simplest approach, counting allows us to see and understand the problem in a completely different way. With this thesis, we want to convey to the reader the power of counting arguments when it comes to proving combinatorial identities.

Životopis

Rođena sam 17.5.1999. u Zagrebu gdje sam i odrasla. Pohađala sam Osnovnu školu Voltino, a obrazovanje nastavljam u Gimnaziji Tituša Brezovačkog. Preddiplomski sveučilišni studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisujem 2018. godine. Nakon stjecanja prvostupničke diplome, godine 2021. na istom fakultetu opredjeljujem se za diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike.