SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Ćurjurić

SADRŽAJI KOMBINATORIKE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, studeni, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim dečkima.

Sadržaj

Uvod

Razmotrimo sljedeće probleme: koliko mogućih sudoku zagonetki postoji? Koliko različitih registracija automobila postoji za grad Zagreb? Na koliko načina iznos od jednog eura možemo dobiti koristeći se samo kovanicama u iznosu od 10, 20 i 50 centi? Na koliko se načina mogu presložiti slova u riječi BANANA? Kod svih navedenih problema možemo primijetiti nekoliko njihovih zajedničkih osobina. Prije svega, za razliku od mnogih matematičkih problema koji uključuju mnogo apstraktnog jezika, sve ih je lako razumjeti. Potrebno je naglasiti da, unatoč tome, rješenja navedenih problema ne moraju biti nužno jednostavna. Nadalje, iako se ti problemi mogu činiti nepovezani i različiti, oni uglavnom uključuju odabir, slaganje i brojanje objekata raznih vrsta. (prema 1) Konkretno, mnogi od njih istražuju iduće: koliko ima objekata s određenim sredstvima, kako dokazati da neki scenarij nije moguć, kako pokazati da neki objekt postoji te koliko je najmanje (najviše) objekata moguće pod određenim uvjetima? [15]

Upravo se kombinatorika bavi tim pitanjima. Možemo ju opisati kao granu diskretne matematike koja se bavi prebrojavanjem, egzistencijom, konstrukcijom te optimizacijom konačnih matematičkih struktura, [2]. Principi prebrojavanja, permutacije, varijacije i kombinacije dio su nastavnog sadržaja trećeg razreda srednje škole, iako se učenici s kombinatorikom susreću i puno prije srednje škole. Točnije, prvi „tragovi" kombinatorike očituju se već u prvom razredu osnovne škole prilikom učenja brojenja na prste.

Ovaj je diplomski rad usmjeren na metodičke postupke koje nastavnik može primijeniti na nastavnom satu prilikom poučavanja kombinatornog sadržaja. U početnom su poglavlju diplomskog rada navedeni ishodi učenja i razine usvajanja znanja, to jest provedena je i opisana analiza kombinatornog sadržaja u nastavi predviđenog kurikulumom. Učenici u petom razredu osnovne škole rješavaju jednostavne zadatke s prebrojavanjem, a u trećem se razredu srednje škole prvi put susreću s terminom "kombinatorika" te zahtjevnijim kombinatornim, tj. problemskim zadatcima. Pored toga, navedena je i raspodjela nastavnih sati potrebnih za obradu kombinatorike.

Narednih pet poglavlja posvećeno je pojedinom kombinatornom konceptu koji se poučava u školama. Konkretno, navode se osnovna načela prebrojavanja, potom varijacije, permutacije i kombinacije sa i bez ponavljanja elemenata skupa te binomna formula. Opisane su raznovrsne aktivnosti, tj. motivacijski primjeri i početni primjeri za uvođenje određenog pojma koji će nastavnicima pomoći u osmišljavanju sati namijenjenih obradi kombinatornog sadržaja.

U pretposljednjem je poglavlju predloženo nekoliko nastavnih aktivnosti za ponavljanje s učenicima prilikom usustavljivanja teme kombinatorike, dok su u posljednjem poglavlju navedene neke kombinatorne igre koje nastavnici mogu iskoristiti u nastavi kako bi se učenici zabavili na edukativan način.

Poglavlje 1

Kombinatorika u nastavi matematike

1.1 Pozicija u kurikulumu

Prema Nacionalnom matematičkom kurikulumu, učenje i poučavanje matematike ima dvije dimenzije, tj. realizira se povezivanjem domena i matematičkih procesa koji se većinski oslanjaju na korištenje logičkog zaključivanja. Ta se dvodimenzionalnost očituje u ishodima učenja te doprinosi stjecanju matematičkih kompetencija. One se neprestano razvijaju putem uravnoteženog preplitanja matematičkih domena i procesa predmeta Matematika, ali i putem drugih područja odgoja i obrazovanja tijekom svih faza školovanja. Kombinatorika je uvrštena u domenu "Podatci, statistika i vjerojatnost", [9]. Učenje kombinatorike potiče razvoj svih 5 procesa, međutim najveći je naglasak na prikazivanju, povezivanju, logičkom mišljenju, argumentiranju i zaključivanju te na rješavanju problema, [2].

Sadržajne domene koje se odnose na kombinatoriku pronalaze se u petom razredu osnovne škole te u trećem razredu srednje škole. Sadržaj petog razreda obuhvaća skupove, Vennove dijagrame i prebrojavanje, dok sadržaju trećeg razreda srednje škole pripadaju osnovni principi prebrojavanja, varijacije i kombinacije te binomni teorem, [2]. Pod pojmom "srednje škole" u ovom radu podrazumijevam gimnazije i one strukovne škole koje godišnje imaju više od 105 sati nastave matematike u 3. razredu. Kao što je spomenuto u uvodu, učenici se s kombinatornim sadržajima prvi put susreću i prije petog razreda, u razrednoj nastavi, premda nisu eksplicitno istaknuti kao takvi. Primjerice, načelo jednakosti primjenjuje se prilikom učenja pojma broja i prebrojavanja objekata. Učenici se susreću s problemima sličnim ovom:

Primjer 1.1.1. *Zamislimo da su svi učenici u jednom razredu obukli šal. Ako znamo da je u tom razredu 25 učenika, koliko je ukupno šalova?* [7]

S obzirom na ranu dob, učenicima prilikom rješavanja takvih zadataka nije potrebno ukazivati na opće matematičke zakonitosti koje taj zadatak krije. Oni prirodno uočavaju jednakost broja učenika i broja šalova. Osim toga, učenici se susreću i sa zadatcima koji se rješavaju po principu zbroja, na primjer:

Primjer 1.1.2. *Marko ima 2 žuta i 6 ljubičastih balona. Koliko balona ima Marko?*

Zastupljeni su i zadatci koji se temelje na Dirichletovom principu:

Primjer 1.1.3. *U jednom je razredu 14 djevojčica. Postoje li među njima dvije djevojčice koje slave rođendan u istom mjesecu?*

Iznimno je važno i poželjno koristiti takve zadatke u nastavi jer se njihovim rješavanjem postavljaju temelji za složenije probleme s kojima se učenici susreću kasnije u nastavi.

U petom je razredu kombinatorika vezana uz skupove te se u očekivanim postignućima učenika unutar kurikuluma navodi prikazivanje skupova i primjena odnosa među njima za prikaz rješenja problema. Pod proširenim sadržajem navode se elementi skupa u kombinatornim zadatcima, tj. njihovo ispisivanje i prebrojavanje. Učenici koji se pripremaju za natjecanja dodatno uče Dirichletov princip i formulu uključivanja i isključivanja te načelo produkta, [7].

Odgojno-obrazovni ishodi učenja koji se ostvaruju u osnovnoškolskom programu preuzeti su iz službenog kurikuluma za predmet Matematika, [9]:

- Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.
- Ispisuje i prebrojava elemente skupa u kombinatornim zadatcima. (Prošireni sadržaj: Elementi skupa u kombinatornim zadatcima.)

U trećem se razredu odgojno-obrazovni ishodi podudaraju za programe u svim gimnazijama i u strukovnim školama koje godišnje imaju barem 105 sati nastave matematike, dok je u strukovnim školama koje godišnje imaju 70 sati nastave matematike kombinatorika uključena u prošireni sadržaj, skupa s računanjem vjerojatnosti.

Odgojno-obrazovni ishodi učenja koji se ostvaruju u srednjoškolskom programu:

- Prepoznaje i opisuje osnovne principe prebrojavanja, permutacije, kombinacije i varijacije.
- Objašnjava, računa i daje primjer permutacija, kombinacija i varijacija.
- Ilustrira i rješava problem rabeći kombinatoriku.

Ishod učenja proširenog sadržaja jest:

- Primjenjuje binomnu formulu.

1.2 Pozicija u PISA-i

Matematička je pismenost jedan od glavnih čimbenika pripremljenosti mladih ljudi za život u današnjem društvu. Zbog toga je važno dobiti vjerodostojan osvrt na to koliko su mladi po završetku obveznog školovanja pripremljeni za primjenu matematike kako bi razumjeli važna životna pitanja i rješavali svakodnevne probleme s kojima se susretnu. Testiranje matematičke pismenosti kod petnaestogodišnjaka daje rani uvid u načine na koji će učenici u kasnijem životu reagirati u različitim situacijama vezanim uz matematiku. ”The Programme for International Student Assessment”, poznatiji kao PISA, program je organizacije OECD (The Organization for Economic Cooperation and Development) zaslužan za provjeru mjere stečenog znanja i vještina neophodnih za sudjelovanje u modernom društvu kod učenika pred kraj obveznog obrazovanja, [11].

Osnovni polazni dokument za razvoj ispitivanja matematičke pismenosti u PISA istraživanju jest *Konceptualni okvir matematičke pismenosti*. Njegov se tekst, prema [11], temelji na idućim međusobno povezanim elementima matematičke pismenosti:

- matematičko zaključivanje i rješavanje problema – objedinjuje procjenu situacija, izbor strategija, izvođenje logičkih zaključaka, razvoj rješenja te prepoznavanje njihove primjene u nekim drugim situacijama,

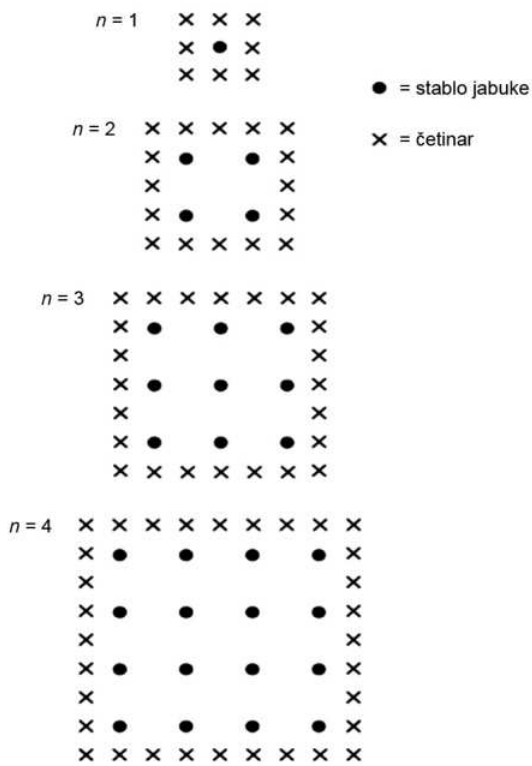
- matematičko sadržajno znanje – podijeljeno je u četiri kategorije: Promjena i odnosi, Prostor i oblik, Količina te Neizvjesnost i podatci,

- konteksti - PISA razlikuje četiri konteksta: osobni, profesionalni, društveni i znanstveni.

U PISI se kombinatorika pojavljuje samo kroz domenu matematičkog zaključivanja i rješavanja problema. Tu je ključno ispitati na koji način učenik pristupa problemu, kako organizira podatke, kako sustavno ispisuje slučajeve i slično. Kombinatorni se zadatci pretežito ubrajaju u kategorije Količina te Promjena i odnosi. U istraživanju PISA 2022 za testiranje učenika dodane su neke dodatne teme, a među njima i tema uvjetnog odlučivanja koja se odnosi na korištenje osnovnih načela kombinatorike i razumijevanja međuodnosa među varijablama s ciljem predviđanja i interpretiranja situacija, [7]. U nastavku je prikazan primjer PISA zadatka iz matematičke pismenosti, a njegovo rješenje uključuje kombinatorne principe, [13].

Zadatak JABUKE:

Poljoprivrednik sadi stabla jabuke u obliku kvadrata. Da bi zaštitio stabla od vjetra, sadi stabla četinara oko voćnjaka. Na donjoj slici prikazan grafički prikaz voćnjaka na kojemu je prikazan uzorak stabala jabuka i četinara za različite brojeve (n) redova stabala jabuka, [12].



Slika 1.1: Zadatak "Jabuke"

1. Dopuni tablicu.

n	Broj stabala jabuka	Broj stabala četinara
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

2. Postoje dvije formule pomoću kojih možeš izračunati broj stabala jabuka i broj četinara za gore prikazani uzorak.

   Broj stabala jabuka = n^2
   Broj četinara = $8n$,

   gdje je n broj redova stabala jabuka. Postoji vrijednost n pri kojoj je broj stabala jabuka jednak broju četinara. Izračunaj vrijednost n i prikaži postupak izračunavanja.

3. Pretpostavimo da poljoprivrednik želi imati mnogo veći voćnjak s više redova stabala. Što će brže rasti kako poljoprivrednik proširuje voćnjak: broj stabala jabuka ili broj četinara? Obrazloži kako si došao/la do rješenja.

Rješenje zadatka.

Pozivajući se na gorespomenute elemente matematičke pismenosti, procesi koje ovaj zadatak ispituje kod učenika jesu povezivanje u prvom i drugom podzadatku te refleksija u trećem podzadatku. Sadržaj se odnosi na promjenu i odnose, dok je kontekst zadatka obrazovni.

Shema zadatka dana je grafički te je prvo potrebno proučiti dani uzorak.

1. Prvi se podzadatak rješava direktnim prebrojavanjem iz priloženog grafičkog prikaza. Popunjena tablica tada sadrži iduće vrijednosti:

n	Broj stabala jabuka	Broj stabala četinara
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

2. Kako bismo opisali što se događa u općem slučaju? Prvo ćemo promatrati uzorak stabala četinara.
   Zadatak nudi bogat izbor strategija za njegovo rješavanje. Prvi je način taj da promatramo svaki red jabuka kao red duljine $2n + 1$. U tome smo slučaju stabla jabuke koja se nalaze u kutu, a takvih ima točno 4 za svaki n, prebrojali dvaput. Zbog toga je ukupan broj stabala jabuke za zadani n dan formulom

   $$4 \cdot (2n + 1) - 4 = 8n$$

   Možemo li promatrati situaciju na drugačiji način, tako da izbjegnemo da neka stabla brojimo dva puta?
   Možemo promatrati stabla jabuke kao stranice kvadrata čija je duljina jednaka broju stabala jabuke u odgovarajućem redu. Sada svakoj stranici oduzmemo jedno stablo, to jest jednu mjernu jedinicu. Tada je duljina svake stranice jednaka $2n$, a jer postoje ukupno 4 stranice, slijedi da je ukupan broj stabala jabuka jednak

   $$4 \cdot 2n = 8n$$

   Postoji i treći način koji je također povezan s tim što je čitava figura kvadrat, međutim sada nećemo promatrati njegov opseg, već površinu. Dimenzija velikog kvadrata je $2n + 1$. Ako želimo dobiti samo broj stabala jabuka, onda možemo od površine velikog kvadrata oduzeti površinu malog kvadrata:

   $$(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1 = 8n.$$

   Dakle, za rješavanje ovog zadatka postoje razne strategije. To je tipičan logično-kombinatorni zadatak u kojem je, osim prebrojavanja, potrebno uočiti uzorak.
   Postoje dvije razine uočavanja uzorka. Jedno je uočavanje grafički na prikazu gledajući u zadanu strukturu, a drugo je uočavanje na razini brojeva. Uočavanje na razini brojeva odnosi se na to da učenici uoče da se u drugom stupcu ispunjene tablice nalaze kvadrati brojeva, a u trećem stupcu zadani brojevi pomoženi s 8. Premda obje razine uočavanja daju isti rezultat, među njima postoji bitna razlika. Kod razine brojeva ne možemo dalje komentirati zašto bismo bili sigurni da će se niz tako nastaviti. Ako argumentiramo na razini grafičkog prikaza, onda možemo proizvesti korak u indukciji, tj. pretpostaviti što će se dogoditi u idućem potezu. Na primjer, imali smo 9 stabala jabuka te smo im dodali $3 + 3 + 1$ stabala jabuke, odnosno imali smo n^2 stabala jabuka te im dodali $n + n + 1$ stabala jabuke. Tako dokazujemo opću tvrdnju na način koji je primjeren i učenicima u osnovnoj školi. Možemo s njima provesti induktivno zaključivanje, to jest imitirati metodu indukcije bez da se pozivamo na princip matematičke indukcije, ali to možemo napraviti samo na grafičkom prikazu. Zadatak je preko grafičkog prikaza i zadan pa je i potpuna argumentacija moguća

samo preko grafičkog prikaza. Kada bismo ostali na razini brojeva, nema načina da se uvjerimo da se niz nastavlja po pretpostavci jer to ne možemo valjano argumentirati.
Ovaj je zadatak dobar primjer za nastavu zbog pregršta strategija koje vode k rješenju. Mnoštvo strategija omogućuje diskusiju među učenicima te vježbanje različitih argumentacija.
Premda se algebarski izrazi obrađuju već u petom razredu, u tom je trenutku korištenje varijabli, tj. općih brojeva, učenicima dosta izazovno. Kako to u nastavi možemo izbjeći? To možemo učiniti tako da učenike pitamo za neki konkretan veliki n, npr. $n = 1000$. Jasno je da za tako veliki n nećemo pokušati s grafičkim prikazom te da je potrebno pronaći opću argumentaciju.

Do formule za broj stabala četinara, n^2, teže je doći nego li je to bilo za stabla jabuka. Međutim, i tu postoje razne strategije. Primjerice, ukoliko uočimo kvadrat, zbrajamo n stabala n puta, $n + n + ... + n$, tj. n^2.
Drugi je način takav da krećemo od toga da imamo n^2 pa onda dodamo $n + n + 1$ da bismo dobili sljedeći korak. Treći bi način bio da krenemo od $(n - 2)^2$ pa dodajemo još rub. Ponovno, postoji puno strategija.

Konačno, u ovom je podzadatku potrebno riješiti jednadžbu $n^2 = 8n$. Tu se logičko-kombinatorno zaključivanje povezuje s algebarskim.

3. Treći je zadatak složeniji s aspekta Bloomove taksonomije. Učenici moraju zaključiti da vrijedi $n^2 > 8n$, za sve $n > 8$. To im nije očito iz samog grafičkog prikaza jer je na njemu prikazana obratna nejednakost. Potrebno je apstraktno razmišljati o primjerima koji nisu grafički prikazani.

1.3 Raspodjela nastavnih sati

Kurikulumski pristup ne zalazi u planiranje na razini nastavnih jedinica i sati na nacionalnoj razini, već je to dio kompetencija i autonomije svakog nastavnika. S druge strane, svaki nastavnik na početku godine treba po satima isplanirati svoj rad u svakom razrednom odjelu (godišnji izvedbeni plan, GIK) i revidirati ga te ažurirati periodički u skladu s potrebama. Primjer mogućeg GIK-a u nastavku preuzet je sa stranica Ministarstva znanosti, obrazovanja i mladih, [10].

MJESEC	TJEDAN	GRUPE ISHODA/ TEME (sati)	PODTEMA	ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHODI
RUJAN	1.	SKUPOVI (12 + 8)	Ponavljanje	**MAT OŠ B.5.2.** Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema. **MAT OŠ E.5.1.** Barata podacima prikazanim na različite načine.
			Ponavljanje	
	2.		Ponavljanje	
			Ponavljanje	
	3.		Ponavljanje	
			Ponavljanje	
	4.		**Pojam skupa i primjeri skupova**	
			Vennovi dijagrami. Podskup. Jednakost skupova	
LISTOPAD	5.	SKUP PRIRODNIH BROJEVA (24)	**Presjek i unija skupova**	
			Skup $\mathbb{N}_0$	

Slika 1.2: Prijedlog godišnjeg izvedbenog kurikuluma za Matematiku u 5. razredu osnovne škole za školsku godinu 2021./2022.

MJESEC	TJEDAN	TEMA (broj sati)	LEKCIJA (broj sati)	ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHODI
SVIBANJ	30.		Hiperbola (1) Parabola (2)	
	31.		Usustavljivanje teme (2)	
		Kombinatorika (12)	**Princip prebrojavanja (1)**	**MAT SŠ E.3.1.** Bira strategiju i rješava problem rabeći kombinatoriku.
	32.		**Princip prebrojavanja (1) Permutacije (2)**	
	33.		**Varijacije (2) Kombinacije (1)**	
LIPANJ	34.		**Kombinacije (1) Binomni poučak (2)**	
	35.		**Usustavljivanje teme (2)**	
		(1)	Završni sat (1)	

Slika 1.3: Prijedlog godišnjeg izvedbenog kurikuluma za Matematiku u 3. razredu srednje škole za školsku godinu 2021./2022. – 105 sati

Poglavlje 2

Osnovna načela prebrojavanja

Prebrojavanje je postupak s kojim se susrećemo već u ranoj životnoj dobi, još prije nego li krenemo u školu. Brojili smo koliko je prstiju na ruci, koliko je voća u košari, koliko je svjećica na torti itd. Međutim, u nekim se situacijama prebrojavanje znatno komplicira te to zahtjeva pronalazak praktičnije metode za otkrivanjem rješenja. Primjerice, zamislite da morate na brzi način izračunati koliko mogućnosti postoji za OIB osobe. Zasigurno do rješenja nećemo doći brzo prebrojavanjem svih mogućnosti, čak i ukoliko to radimo sustavno. Za takva prebrojavanja koristimo načela prebrojavanja, [16].

Motivacijske su tehnike od posebne važnosti na početku nastavnog sata kada nastavnici nastoje privući pozornost učenika na novu nastavnu jedinicu. Nastavnici bi trebali oblikovati pozitivnu razrednu atmosferu, pokazivati oduševljenje za nastavno gradivo, zanimati se za učenike, poticati svakog pojedinca, imati prirodan osjećaj za samopoštovanje i međusobno poštovanje i sl. Postoje razni načini i strategije koje mogu motivirati učenike, a bitno je da izaberemo takvu aktivnost koja je prilagođena našim učenicima u konkretnoj situaciji i koja je ciljno usmjerena, [14].
U skladu s time, uvodni sat obrade kombinatorike, odnosno osnovnih načela prebrojavanja, zanimljivo je započeti sat s jednostavnim pitanjem: ”Koliko vas je danas u razredu?”. To potiče diskusiju o tome kako su učenici došli do broja učenika u razredu: jesu li brojili po retcima ili stupcima, jesu li krenuli brojiti od sebe pa dalje nekim specifičnim redoslijedom, jesu li brojili prvo djevojčice pa dječake ili obratno i sl. Tada je prirodno uvesti pojam kombinatorike kao granu matematike koja se bavi određivanjem broja elemenata nekog konačnog skupa. Važno je da učenici dobro usvoje načela prebrojavanja jer će njihova primjena biti korisna u raznim problemima kasnije, [7].

2.1 Princip zbroja

Definicije i iskazi načela u nastavku preuzeti su iz [6].
Broj elemenata nekog konačnog skupa A označavat ćemo s $|A|$.

Teorem 2.1.1. *Broj elemenata unije u parovima disjunktnih skupova jednak je sumi njihove unije. Preciznije zapisano: za skupove $A_1, A_2, \cdots, A_n$ takve da za sve $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, i \neq j$, imamo $A_i \cap A_j = \emptyset$, vrijedi:*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \,.$$

Formulacija načela sume za redovnu nastavu u trećem razredu srednje škole obuhvaća samo dva skupa:

Princip zbroja. *Ako su A i B konačni skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata, tada je broj elemenata unije $A \cup B$ jednak zbroju broja elemenata skupa A i skupa B, tj. vrijedi:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| \,.$$

Ako su A i B konačni skupovi čiji je presjek neprazan skup, tada vrijedi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \,.$$

Motivacijski primjeri

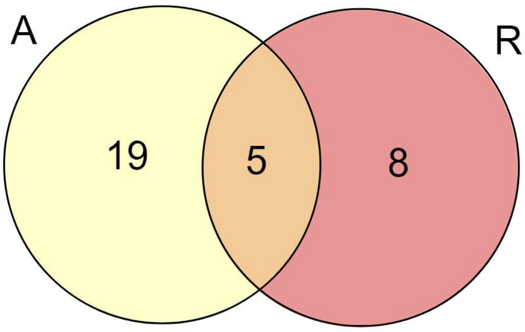
S kojim bismo motivacijskim primjerom učenicima objasnili načelo zbroja? Osim jednostavnih i jasnih primjera zadataka koji također mogu pobuditi znatiželju kod učenika, uvijek je dobro izabrati, ukoliko je to moguće, primjer u koji se učenici mogu aktivno uključiti oslanjajući se na neki osobni podatak. U nastavku slijedi jedan takav primjer, idealan kao uvodni primjer prilikom započinjanja poučavanja kombinatornog sadržaja.

Primjer 2.1.1. Nastavnik na ploči nacrta tablicu dimenzija, primjerice, 6×4. Broj stupaca je fiksan, a broj redaka varira, ali poželjno je da je barem 5 kako bi učenici lakše uočili uzorak. Nastavnik tada kaže učenicima: ”Neka digne ruku svatko tko u svome imenu sadrži slovo A.” Potom nastavnik zbroji sve takve učenike i konačan zbroj zapiše na ploču u prvi stupac. Nakon toga zatraži iduće: ”Neka digne ruku svatko tko u svome imenu sadrži slovo R.” Ponovno zbroji takve učenike i rezultat napiše u drugi stupac tablice. Zatim priupita da dignu ruku samo oni koji u svome imenu sadrže oba spomenuta slova, i A i R. Broj učenika s oba slova nastavnik zapisuje na ploču. Naposlijetku, nastavnik pita učenike koliko njih ima barem jedno od slova A ili R te rezultat zapisuje na ploču u posljednji stupac tablice.

Kako bi učenici mogli, na temelju tog primjera, zaključiti kako glasi načelo zbroja za skupove koji sadrže zajedničke elemente?

S obzirom da će biti postavljene još barem 4 kombinacije dvaju slova, učenici mogu lako uočiti da se broj u zadnjem stupcu tablice dobije tako da se zbroje brojevi u prva dva stupca te se od njih oduzme broj u trećem stupcu. Na taj način učenici otkrivaju načelo zbroja za skupove koji sadrže zajedničke elemente te ga nastavnik zapisuje na ploču, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Učenicima, međutim, možda neće biti jasno zašto je to baš tako. Tada je korisno situaciju vizualizirati pritom se služeći Vennovim dijagramima, kao što je prikazano na slici. Pretpostavimo da u nekom razredu 19 učenika u imenu sadrži slovo A, njih 8 slovo R te njih 5 i jedno i drugo slovo. Žuti krug predstavlja učenike sa slovom A u imenu, a crveni učenike sa slovom R u imenu. Sada je učenicima jasnije da ukoliko zbrajamo učenike sa barem jednim od određena dva slova, dvaput brojimo one koji sadrže oba slova. Zato je u formuli potrebno oduzeti broj zajedničkih elemenata, tj. broj elemenata u presjeku.



Slika 2.1: Primjer sa slovima u imenu

Daljna diskusija s učenicima može se potaknuti pitanjem: "Što ako nijedan učenik nema oba slova u imenu? Kako bi tada izgledala vizualizacija?" Slučaj kada skupovi nemaju zajedničkih elemenata može se promatrati kao poseban slučaj u gornjem primjeru, tj. onda kada je presjek prazan skup. Broj elemenata u presjeku tada je jednak nuli pa je ukupan broj onih koji imaju u imenu slovo A ili slovo R jednak zbroju elemenata tih dvaju skupova, tj. vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Kako bi provedena aktivnost bila uspješna te zaključak što očitiji za učenike, nastavnik se može za sat pripremiti tako da za pojedini razred pregleda listu imena te odabere najbolje kombinacije slova. To znači da je odabir broja elemenata u skupovima što raznovrsniji.

2.2 Princip razlike

Princip razlike. Za konačne skupove A i S takve da je $A \subseteq S$ vrijedi

$$|S \setminus A| = |S| - |A|.$$

Princip razlike, odnosno princip komplementa, ponekad je mnogo praktičnije koristiti prilikom rješavanja zadataka, nego li princip zbroja. Zbog toga je korisno u nastavi učenike upustiti u rješavanje istog zadatka na oba načina kako bi se sami uvjerili u praktičnost ovog načela u određenim problemima.

Motivacijski primjeri

Primjer 2.2.1. Koliko ima prirodnih brojeva manjih (strogo) od 10^n koji sadrže znamenku 4? [6]

Rješenje. Broj 10^n ima $n + 1$ znamenki (n nula i 1 jedinica), stoga broj koji se traži ima najviše n znamenki (jer mora biti strogo manji od 10^n). Jasno je da svi takvi brojevi mogu sadržavati od 0 do n znamenki 4. Jednostavnije nam je prebrojati koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n koji **ne** sadrže znamenku 4. Prirodnih brojeva manjih od 10^n ima $10^n - 1$. Sve prirodne brojeve manje od 10^n možemo gledati kao n-znamenkaste: dozvoljeni su slučajevi i kad je nekoliko nula na početku, jedino moramo odbaciti slučaj kad su sve nule jer tada nećemo dobiti prirodan broj. Dakle, prirodnih brojeva manjih od 10^n koji ne sadrže znamenku 4 ima $9^n - 1$ jer svaku znamenku biramo iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ te odbacujemo slučaj kad su sve znamenke jednake 0. Konačno, odgovor na pitanje iz zadatka je

$$(10^n - 1) - (9^n - 1) = 10^n - 9^n.$$

Uvjerimo se da je rješavanje preko principa komplementa uistinu brži način, nego da smo zadatak riješili ispisivanjem slučajeva i primjenom principa broja. Uzmimo $n = 3$.

Primjer 2.2.2. Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva koji sadrže znamenku 4?

Rješenje. Prvi način. Želimo li riješiti pomoću principa razlike, treba odrediti koliko ima troznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 4. Na mjesto stotica možemo staviti znamenku iz skupa $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, na druga dva mjesta možemo staviti znamenku iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dakle, troznamenkastih brojeva koji nemaju znamenku 4 ima

$8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Svih troznamenkastih brojeva ima 900, pa je broj troznamenkastih brojeva koji imaju znamenku 4 jednak $900 - 648 = 252$.

Drugi način. Ukoliko ne koristimo princip komplementa, prvo je potrebno ispisati sve moguće slučajeve. U zadatku se traže svi prirodni troznamenkasti brojevi koji sadrže znamenku 4. Ona se može u broju pojaviti barem jednom, a najviše tri puta. Sustavno ćemo analizirati svaki od tih slučajeva. Pretpostavimo da se znamenka 4 pojavljuje na prvom mjestu i nigdje više u broju. Tada za drugu i treću znamenku može doći bilo koji broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pa ima ukupno 9^2 mogućnosti. Ukoliko se broj 4 nalazi na drugoj poziciji troznamenkastog broja, onda prvu znamenku biramo iz skupa $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a treću iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$. To nam, po principu umnoška, daje $8 \cdot 9 = 72$ mogućnosti. Isto je i ako je broj 4 na posljednjem mjestu, tj. kao treća znamenka. Dakle, ako se broj 4 pojavljuje samo jednom u broju, ima ukupno $81 + 2 \cdot 72 = 225$ mogućnosti.
Ukoliko se znamenka 4 pojavljuje dva puta u broju, primjerice na prvom i drugom mjestu, tada je ukupan broj mogućnosti jednak 9 jer za treću znamenku biramo bilo koji broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Isto je i za slučaj kad se znamenka 4 nalazi na prvom i trećem mjestu. Ukoliko se nalazi na drugom i trećem mjestu, tada je broj mogućnosti jednak 8 jer prva znamenka ne smije biti niti 0 niti 4. Dakle, ukoliko se znamenka 4 pojavljuje u traženom broju točno 2 puta, tada ima ukupno $9 + 9 + 8 = 26$ mogućnosti.
Za kraj nam je ostao samo slučaj kada su sve znamenke jednake 4, a on je jedan jedini.

Prema tome, odgovor na pitanje iz zadatka je

$$225 + 26 + 1 = 252.$$

2.3 Princip umnoška

Definicija 2.3.1. *S $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ označavamo Kartezijev produkt skupova $A_1, A_2, ..., A_n$:*

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i\}$$

Princip umnoška. Za konačne skupove $A_1, A_2, \dots, A_n$ vrijedi

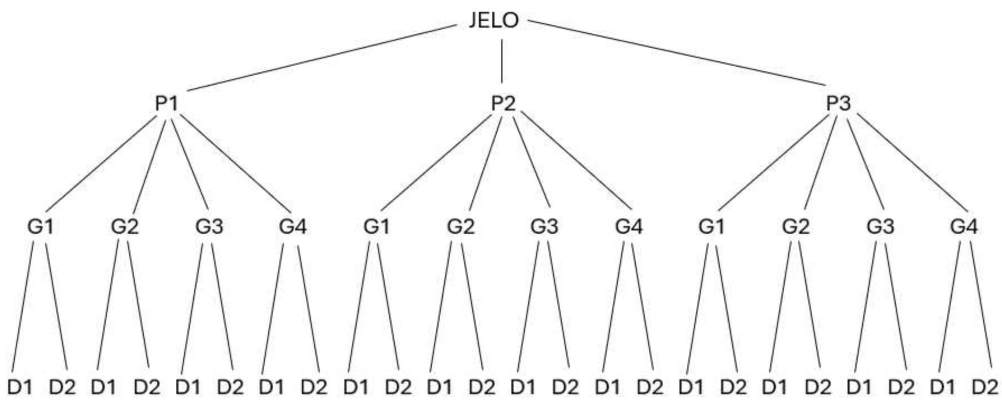
$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|\,.$$

Dakle, biramo jedan po jedan element i to nazivamo principom umnoška, tj, principom uzastopnog prebrojavanja. Preciznije, uzastopno biramo elemente i pritom pribrojavamo na koliko načina možemo odabrati bilo koji element.

Motivacijski primjeri

Primjer 2.3.1. Na koliko načina možemo složiti jelo u restoranu ako su u ponudi 3 predjela, 4 glavna jela i 2 deserta?

Rješenje. Jelo možemo složiti na $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ načina. Lijevi dio jednakosti zapravo nam govori više nego li sam broj 24. Stoga, nije na odmet ostaviti rješenje u obliku faktora jer to nam govori o strukturi rješenja, tj. kako se do rješenja dolazi. Kako bismo taj zadatak riješili primjereno petom razredu?
Rješenje bismo nacrtali. Prvo nacrtamo crtež za sve one koji su odabrali prvo predjelo, potom za one koji su odabrali drugo predjelo te posljednje, crtež za sve one koji su odabrali treće predjelo. Potom crtamo stablo. Oni koji su odabrali prvo predjelo, imaju četiri mogućnosti za odabrati glavno jelo pa onda svi koji su odabrali prvo glavno jelo imaju mogućnosti odabira između dva deserta. Na taj način nacrtamo sva moguća stabla. U konačnici, dobije se jedno veliko stablo koje se prvo grana na tri grane, svaka od njih grana se na četiri grane te se svaka od tih četiriju grana grana na još dvije grane. Učenici tada mogu uočiti da je potrebno proći po ukupno 24 različita puta kako bismo došli do kraja, tj. odredili kompletno jelo. Ispod je prikazano nacrtano stablo.



Slika 2.2: Shematski prikaz stabla

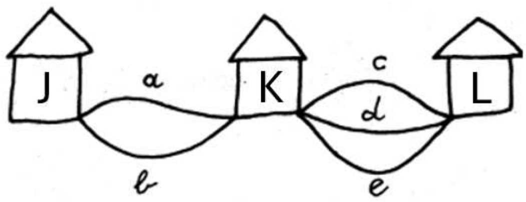
Primjer 2.3.2. Lovro putuje iz Zagreba u Velu Luku na otoku Korčuli. Iz Zagreba leti zrakoplovom do Splita, a dalje plovi trajektom. Želi putovanje završiti u istom danu, ali i zadržati se neko vrijeme u Splitu kod svog rođaka Bruna. Pogledajmo na koliko načina to može napraviti.

Dolazak zrakoplova u Split	Polazak trajekta za Velu Luku	Boravak u Splitu
9h	14	6
	20	12
11h	14	4
	20	10

Slika 2.3: Red vožnje za primjer 2.3.1.

Rješenje. Iz reda vožnje možemo zaključiti da dnevno za Split lete dva zrakoplova. Nakon dolaska u Split, Lovro može nastaviti putovanje jednim od dva trajekta koji plove za Velu luku. Dakle, Lovro ima $2 \cdot 2 = 4$ načina za osmisliti putovanje.

Primjer 2.3.3. U gradu postoje 3 restorana - J, K i L, koja pripadaju istom vlasniku. On svakoga dana obilazi svoja tri restorana: doručkuje u J, ruča u K te večera u L. Uvijek se kreće drugim putem kako ne bi uvijek istim redom dolazio u kontrolu. Od J do K može koristiti ulice a i b, a od K do L može koristiti ulice c, d i e.



Slika 2.4: Kretanja vlasnika triju restorana

Vlasnika zanima na koliko sve načina može posjetiti sva tri restorana te mu je potrebna naša pomoć. Načinimo listu svih mogućih puteva:

1. $J - a - K - c - L$
2. $J - a - K - d - L$
3. $J - a - K - e - L$
4. $J - b - K - c - L$
5. $J - b - K - d - L$
6. $J - b - K - e - L$

Ako vlasnik od J do K može doći na dva načina te od K do L na tri načina, onda ima ukupno $2 \cdot 3 = 6$ načina za doći od J do L. Općenito, ako ima m načina da se izvrši jedna radnja te n načina da se izvrši druga radnja, ukupno ima $m \cdot n$ načina da se obje radnje izvedu zajedno. To nazivamo principom umnoška. [19]

Kod kreiranja motivacijskog primjera bitno je da se njegovo rješavanje može prikazati i grafički, tj. da na tom dijelu sata poštujemo i načelo zornosti. Tako bi bilo neprimjereno započeti obradu ovog načela na primjeru koji je vrlo sličan primjeru 2.3.1, ali umjesto brojeva 3, 4, 2 ima brojeve 15, 12, 7. S matematičke strane ta su dva primjera u biti "ista", ali budući da je uvijek korisno u prvom primjeru primijeniti načelo zornosti, tj. u ovom slučaju nacrtati stablo, veliki brojevi kao što su 15, 12 i 7 stvorili bi nečitljiv crtež i izgubila bi se poanta crtanja stabla.

2.4 Princip kvocijenta

Princip kvocijenta. Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ u parovima disjunktni neprazni skupovi takvi da je $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Ako svi ti skupovi imaju isti broj elemenata, tj. $|A_1| = |A_2| = ... = |A_n| = k$, onda je broj tih skupova n jednak kvocijentu ukupnog broja elemenata skupa A s brojem k:

$$n = \frac{|A|}{k}.$$

Motivacijski primjeri

Primjer 2.4.1. Koliko različitih riječi možemo napraviti od slova *N, A, R, A, N, Č, A*?

Rješenje. Prvi način. Ovaj se zadatak može riješiti sustavnim ispisivanjem slučajeva, odnosno poštujući leksikografski uređaj. Pritom, moramo biti oprezni te osigurati da smo obuhvatili sve slučajeve te da neke od slučajeva nismo ubrojili više puta. Ključna je disjunktna unija pa će ukupan broj riječi biti jednak zbroju svih pojedinih slučajeva. Na taj način redom dobivamo iduće riječi: *AAAČNN, AAANČN, AAANNČ, AAČANN, AAČNAN, AAČNNA, AČAANN, AČANAN, AČANNA, ČAAANN...* Očito je da će ovaj postupak ispisivanja sustavne liste biti dugotrajan. Stoga u razredu treba potaknuti diskusiju koja će voditi k tome da zadatak tako preuredimo da možemo iskoristiti već poznato znanje o stvaranju riječi od različitih slova. Drugim riječima, nakon vođene diskusije, pojavljuje se drugi način rješavanja ovog zadatka u kojem se slova A, odnosno N, obojaju tako da ih počnemo smatrati različitim objektima.

Drugi način. Ako bi svako slovo bilo različito (npr. različite boje), onda bismo imali

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ riječi. Ukoliko pretpostavimo da je jedno slovo N crvene boje, a drugo slovo N plave boje, onda bi dvije različite obojene mogućnosti reprezentirale istu riječ:

NARANČA, NARANČA

Analogno, 6 mogućnosti za bojanje slova A reprezentiraju istu riječ. Prema tome, ukupan broj **različitih** riječi jednak je $\frac{5040}{2 \cdot 6} = 420$, jer je svaka riječ reprezentirana s $2 \cdot 6 = 12$ obojanih riječi.

2.5 Princip bijekcije

Princip bijekcije. Dva skupa A i B imaju jednak broj elemenata ako postoji bijekcija između njih.

Motivacijski primjeri

Primjer 2.5.1. Problem s putevima u primjeru 2.3.3. sada ćemo riješiti na drugačiji način, koristeći se principom bijekcije. Neka je JL skup svih puteva između restorana J i L, JK skup svih puteva između J i K te KL skup svih puteva između K i L. Svakom elementu $p \in JL$ možemo bijektivno pridružiti uređen par (p_1, p_2), gdje je $p_1 \in JK$, $p_2 \in KL$. Sada primjenom principa bijekcije i pravila produkta dobivamo da je

$$|JL| = |JK \times KL| = |JK| \cdot |KL| = 2 \cdot 3 = 6.$$

Osim ovih temeljnih načela prebrojavanja, u kombinatorici upotrebljavamo i tri osnovna principa o redanju, raspoređivanju i odabiru elemenata konačnih skupova. To su permutacije, varijacije i kombinacije. Njima se koristimo na različite načine ovisno o tome upotrebljavamo li samo podskup zadanog skupa ili sve njegove elemente te ponavljaju li se elementi ili ne. Kako bismo odabrali ispravan princip, važno je znati dvije stvari: smiju li se elementi ponavljati te je li njihov poredak važan. Sa svakim ćemo se načinom upoznati u naredna tri poglavlja.

Poglavlje 3

Varijacije

3.1 Varijacije bez ponavljanja

Definicija 3.1.1. *Kada imamo skup $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ s n elemenata, tada svaku uređenu r-torku* ***različitih*** *elemenata iz S zovemo varijacija bez ponavljanja r-tog razreda u skupu od n elemenata. Često se koristi i naziv r-permutacija n-članog skupa, [7].*

Motivacijski primjeri

Primjer 3.1.1. Od slova riječi BROJ napišimo sve troslovne riječi (smislene ili ne) s različitim slovima.

Rješenje. Prvo slovo tražene troslovne riječi može biti bilo koje iz skupa $\{B, R, O, J\}$. Krenimo od slova B na početku. Na drugo mjesto onda može ići jedno od slova R, O i J, a potom na treće mjesto jedno od preostalih dvaju slova.
Tako dobijemo riječi: BRO, BRJ, BOR, BOJ, BJR, BJO.
Ako je R na prvom mjestu u riječi, tada na drugo mjesto možemo staviti jedno od slova B, O, J, a na treće mjesto jedno od preostalih dvaju slova.
Tada imamo riječi: RBO, RBJ, ROB, ROJ, RJB, RJO.
Analognim postupkom određujemo i riječi koje počinju slovima O i J.
Ako je prvo slovo O, imamo riječi OBR, OBJ, ORB, ORJ, OJB, OJR.
Ako je prvo slovo J, imamo riječi JBR, JBO, JRB, JRO, JOB, JOR.

U ovom je primjeru važno da riječ ne sadrži previše slova jer će u tom slučaju broj svih mogućnosti biti prevelik te će njihovo sustavno ispisivanje biti znatno kompliciranije i zamornije za učenike. Prijedlozi nekih matematičkih pojmova za korištenje u ovom primjeru jesu romb, plus, suma, graf, skup itd. Osim toga, treba voditi računa o dvoznačnosti riječi te da troslovne riječi ne budu proste.

Učenici su skloni ispisivanju slučajeva napamet, tj. redom kako se sjete, bez ikakvih pravilnosti. Ovaj je zadatak zato pogodan za objašnjavanje leksikografskog poretka kako bi se učenici naučili izraditi sustavnu listu.

Leksikografski poredak

U matematici, "prirodni" leksikografski poredak odnosi se na poredak brojeva u nizu ili na poredak elemenata nekog skupa od najmanjeg prema najvećem.
Primjer. Leksikografski poredak skupa $\{3, 5, 8, 6.1\}$ je $\{1, 3, 5, 6, 8\}$.

U lingvistici, to je postupak kojim se mijenja redoslijed susjednih elemenata po abecednom redu.
Primjer. Leksikografski poredak dvoslovnih riječi iz skupa $\{a, b, c\}$ je: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

3.2 Varijacije s ponavljanjem

Definicija 3.2.1. *Kada imamo skup $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ s n elemenata, tada svaku uređenu r-torku elemenata iz S zovemo varijacija s ponavljanjem r-tog razreda u skupu od n elemenata. Dakle, varijacija s ponavljanjem je element Kartezijeva umnoška $\underbrace{S \times S \times S \times ... \times S}_{r}$, [7].*

Motivacijski primjeri

Primjer 3.2.1. Registarske tablice u Hrvatskoj izgledaju ovako: prva dva slova određuju grad, zatim slijedi troznamenkasti ili četveroznamenkasti broj, a onda jedno ili dva slova abecede različita od *Č, Ć, Đ, DŽ, LJ, NJ, Š, Ž*. Koliko različitih tablica može imati jedan grad? [16]

Rješenje. S obzirom da je u pitanju jedan konkretan grad, onda su prva dva slova već određena na jedinstven način i njih ne možemo mijenjati. Mijenjaju se, dakle, samo broj koji se nalazi u sredini tablice te slova koja slijede nakon tog broja. Uočimo da svaka registarska tablica uključuje jednu od idućih mogućnosti: troznamenkasti broj i jedno slovo, troznamenkasti broj i dva slova, četveroznamenkasti broj i jedno slovo te četveroznamenkasti broj i dva slova.

Za troznamenkasti broj i jedno slovo imamo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22 = 22\,000$ mogućnosti, jer svaka od triju znamenaka može biti bilo koji broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a slovo može biti bilo koje od dopuštena 22 slova abecede.

Za troznamenkasti broj i dva slova imamo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22 \cdot 22 = 484\,000$ mogućnosti, jer svaka od triju znamenaka može biti bilo koji broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a slova mogu biti bilo koja od dopuštena 22 slova abecede.

Za četveroznamenkasti broj i jedno slovo imamo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22 = 220\,000$ mogućnosti, jer svaka od četiriju znamenaka može biti bilo koji broj iz skupa brojeva $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a slovo može biti bilo koje od dopuštena 22 slova abecede.

Za četveroznamenkasti broj i dva slova imamo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22 \cdot 22 = 4\,840\,000$ mogućnosti, jer svaka od četiriju znamenaka može biti bilo koji broj iz skupa brojeva $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a slova mogu biti bilo koja od dopuštena 22 slova abecede.

Primjenom principa zbroja dobivamo da je ukupan broj registarskih oznaka jednog grada jednak

$$22\,000 + 484\,000 + 220\,000 + 4\,840\,000 = 5\,566\,000.$$

Poglavlje 4

Permutacije

U varijacijama smo tražili broj svih mogućih uređenih r-torki iz skupa od n elemenata, pri čemu vrijedi $r < n$. Što ako želimo posložiti svih n elemenata skupa? Pritom ćemo opet razlikovati mogućnosti da elemente upotrebljavamo ili ne upotrebljavamo više puta.

Permutacija ili **premještanje elemenata n-članog skupa** je uređena n-torka svih elemenata (važan je poredak elemenata), [4].

Uočimo: varijacija n-tog reda zove se permutacija.

4.1 Permutacije bez ponavljanja

Broj permutacija bez ponavljanja skupa od n elemenata jednak je $P_n = n!$

Motivacijski primjeri

Primjer 4.1.1. Aktivnost. Nastavnik može na početku sata reći učenicima da spoje dvije školske klupe (ili četiri ukoliko jedna klupa odgovara jednom učeniku) te odabrati manji broj učenika za provođenje aktivnosti, primjerice trojicu učenika. Napominje da učenici zamisle kako je formirani stol kružnoga oblika. Ukoliko to oduzima previše vremena ili je učionica skučena te je tu aktivnost nemoguće provesti iz bilo kojeg razloga, tada je dovoljno da učenici sami formiraju krug, bez pomicanja školskih klupa. Nastavnik odabire jednu sjedalicu (ili poziciju između dva učenika ukoliko su učenici ti koji formiraju krug) te to mjesto zadržava za sebe. Preostaje napraviti plan sjedenja za učenike pa u skladu s time slijedi razmišljanje o mogućem rasporedu sjedenja. Svi mogući razmještaji mogu se fizički provesti te zapisati na ploču, npr. gledajući od nastavnikova mjesta u smjeru kazaljke na satu. Pretpostavimo da je nastavnik odabrao učenike Antoniju, Majdu i Leonarda.

Označimo ih početnim slovom njihova imena: A, M i L te definiramo redoslijed njihova sjedenja. Na prvo mjesto desno od nastavnika može sjesti bilo tko od tri prijatelja, na drugo jedan od preostala dva i za trećeg više nema izbora, samo je jedna mogućnost. Svi mogući razmještaji su:

AML	LAM	MAL
ALM	LMA	MLA

Dakle, ima ukupno 6 razmještaja. Učenici do tog zaključka, osim direktnog prebrojavanja, dolaze primjenom principa umnoška. Učenicima se postavlja iduća teza za razmišljanje: što ako je i nastavnik ravnopravan učenicima u razmještanju? Tada je potrebno 4 osobe smjestiti za stol. Odaberemo prvu stolicu te na to mjesto posjednemo jednu od četiri osobe. Dakle, odabir je moguć na 4 načina. Nakon prve stolice na drugu može sjesti jedna od preostale tri osobe. Treće mjesto biramo između preostalih dvoje i na kraju sjeda onaj koji je preostao (jedan izbor). Svi mogući razmještaji su:

ANLM	NALM	LANM	MANL
ANML	NAML	LAMN	MALN
ALNM	NLAM	LNAM	MNAL
ALMN	NLMA	LNMA	MNLA
AMNL	NMAL	LMAN	MLAN
AMLN	NMLA	LMNA	MLNA

gdje je N oznaka za nastavnika. Po principu umnoška slijedi da ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina za posjesti četiri prijatelja. Važno je napomenuti kako se rotiranjem svih članova oko stola redoslijed ljudi ne mijenja.

Ako je bitno tko sjedi pored koga, tada ukupan broj razmještaja umanjujemo četiri puta, koliko je mogućih položaja prve osobe koja sjeda. Dakle, četiri je prijatelja moguće rasporediti na $\frac{24}{4} = 6$ načina. Učenici sada mogu zaključiti koliko ima permutacija, tj. premještaja u skupu od n elemenata te na koliko se načina n elemenata može rasporediti u krug. [4]

Još jedan primjer aktivnosti koju nastavnik može iskoristiti kao motivacijski primjer za uvođenje permutacija bez ponavljanja jest slaganje knjiga na hrpu. Jedan od učenika može za aktivnost na početku sata posuditi nekoliko udžbenika iz različitih nastavnih predmeta, a potom ih nastavnik može slagati redom jednu na drugu te zapisivati sve moguće rasporede na ploču. Analognim zaključivanjem kao u primjeru s 3 ili 4 osobe, učenici će zaključiti da je ukupan broj rasporeda n udžbenika jednak $n!$.

4.2 Permutacije s ponavljanjem

Broj permutacija s ponavljanjem skupa od n elemenata gdje je n_1 jednakih elemenata prve vrste, n_2 jednakih elemenata druge vrste pa sve do n_k jednakih elemenata k-te vrste jednak je $P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$.

Motivacijski primjeri

Primjer 4.2.1. Vrtlarica Vedrana želi u jedan kutak svoga vrta posaditi ruže. Od sadnica je kupila jednu crvenu, jednu rozu te tri bijele ruže. Na koliko načina vrtlarica Vedrana može poredati kupljene sadnice ako bijele ruže međusobno ne razlikujemo?

Rješenje. Ispišimo redom sve načine na koje možemo poredati sadnice ruža.
Načini koji počinju s crvenom ružom: *CRBBB, CBRBB, CBBRB, CBBBR*
Načini koji počinju s rozom ružom: *RCBBB, RBCBB, RBBCB, RBBBC*
Način koji počinju sa žutom ružom: *BBBCR, BBBRC, BBCRB, BBRCB, BBCBR, BBRBC, BCRBB, BRCBB, BCBRB, BRBCB, BCBBR, BRBBC*.
Postoji ukupno 20 mogućih uređenih petorki. S obzirom da je poredak ruža važan, tj. promatraju se uređene petorke, tada je riječ o permutacijama. Usto, kako se neki elementi ponavljaju, onda kažemo da su to permutacije s ponavljanjem.
Kako bismo izračunali broj svih načina sađenja ruža, a da pritom ne moramo ispisivati sve slučajeve? Pretpostavimo da se bijele ruže razlikuju te da su sadnice koje Vedrana ima C, R, B_1, B_2, B_3. Tada imamo skup $\{C, R, B_1, B_2, B_3\}$ koji se sastoji od 5 različitih članova, a za njih ima $5! = 120$ mogućih poredaka. U njih su ubrojene, između ostalog, i iduće permutacije: $CRB_1B_2B_3, CRB_1B_3B_2, CRB_2B_1B_3, CRB_2B_3B_1, CRB_3B_1B_2, CRB_3B_2B_1$. Ukoliko bijele ruže ne razlikujemo, tada se navedenih 6 permutacija svodi na samo jednu: $CRBBB$. Slično tome, svakoj permutaciji iz situacije kad se bijele ruže ne razlikuju odgovara $6 = 3!$ permutacija iz situacije kad se bijele ruže razlikuju. Dakle, broj permutacija s ponavljanjem jednak je $\frac{5!}{3!} = 20$.

4.3 Koliko je velik broj 52! ?

Faktorijel nekog prirodnog broja n umnožak je svih prirodnih brojeva koji su manji ili jednaki n, tj. vrijedi

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Dodatno, definirano je $0! = 1$. Notaciju $n!$ uveo je francuski matematičar Christian Kramp 1808. godine. Osim u kombinatorici, čestu primjenu faktorijela možemo pronaći i u algebri te u matematičkoj analizi, [18].

Kako bismo objasnili učenicima koliko je velik, primjerice, broj 52! ? Idealan model za taj primjer jest snop karata koji sadrži 52 karte. Kod učenika možemo potaknuti radoznalost i povećati motivaciju postavljajući iduću tezu i pitanje: svaki put kada uzmete snop od 52 karte te ga izmiješate, gotovo sigurno u rukama držite raspored karata kakav još nitko dosad nije. Kako je to moguće?
Odgovor leži u tome da nas zanima koliko je različitih rasporeda moguće dobiti od 52 karte. Da bismo dobili mogući broj kombinacija, koristimo se faktorijelima. Koristeći se metodom jednostavnijeg slučaja, pogledajmo npr. kako bismo to odredili za broj 7. Primjerice, svaka rukometna momčad sastoji se od 7 igrača, to jest 7 pozicija: golman, lijevo i desno krilo, lijevi, desni i srednji vanjski igrač te pivot. Ako 7 osoba želi igrati u jednom timu, koliko je mogućih razmještaja tih igrača po pozicijama u igri? Recimo da prvo biramo tko će biti golman. S obzirom da je na raspolaganju 7 osoba, to možemo napraviti na 7 načina. Nakon što smo jednoj osobi dodijelili poziciju golmana, preostaje 6 osoba za odabir lijevog krila. Kada smo odabrali i njega, za poziciju desnog krila biramo između preostalih 5 osoba kojima nije dodijeljena nijedna pozicija. Ponavljamo taj postupak sve dok i zadnjoj osobi nije dodijeljena posljednja slobodna pozicija. Možemo ga zapisati kao umnožak prvih 7 prirodnih brojeva,

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Dakle, postoji 5040 načina da se od 7 osoba formira rukometni tim, pri čemu razlikujemo pozicije tih igrača.
Ukoliko promatramo tablicu faktorijela za nekoliko prvih prirodnih brojeva, lako se uoči kako faktorijeli brzo rastu:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n!	1	1	2	6	24	120	720	5040

Vratimo se sada natrag na naš početni primjer s kartama. Kako ćemo izračunati broj 52! ? Dakle, snop ima 52 karte. Uzmimo kartu sa vrha snopa. To može biti bilo koja od 52 karte.

Zatim uzmemo drugu kartu koja može biti bilo koja od preostalih 51 karata. Ponavljamo postupak analogno kao i u primjeru s rukometnim timom, sve dok ne dođemo do posljednje karte. Kada pomnožimo prva 52 prirodna broja, dobijemo broj $80 \cdot 10^{67}$ kao broj načina za presložiti 52 karte u snopu. Kako dočarati učenicima veličinu tog broja?
Zamislimo da cijelu godinu miješamo karte, 24 sata na dan tako da svake sekunde dolazi do drugog miješanja karata. Koliko bismo, u tom slučaju, različitih miješanja karata imali? Jedan dan ima 24 sata, to jest $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ sekundi. Ukoliko taj broj pomnožimo s 365, što je broj dana u godini, dobit ćemo 31 536 000 kombinacija po godini. Sada zamislimo da svaki čovjek na Zemlji godinu dana neprestano miješa karte. Dakle, prijašnji ćemo broj pomnožiti s okvirnim brojem ljudi na Zemlji, a to je 7 900 000 000.

$$31\,536\,000 \cdot 7\,900\,000\,000 = 2.490554 \cdot 10^{17},$$

što i dalje nije blizu broju $80 \cdot 10^{67}$, odnosno $52!$. Naposljetku, zamislimo da svaki čovjek neprestano miješa karte od nastanka svemira, odnosno 13.8 milijardi godina. Ukoliko sada pomnožimo taj broj s prethodno dobivenim brojem, dobivamo sljedeće:

$$2.490554 \cdot 10^{17} \cdot 13\,800\,000\,000 = 3.43696452 \cdot 10^{27}.$$

Taj je broj i dalje manji od broja $52!$! Dakle, svaki put kada promiješamo karte, vrlo je vjerojatno da u rukama držimo redoslijed koji nikada više neće postojati. Učenicima često nije teško shvatiti sami pojam faktorijela te njegov izračun, međutim rijetko se spominje koliko su to zapravo velike veličine, [5].

Poglavlje 5

Kombinacije

Za razliku od varijacija i permutacija gdje je bitan poredak elemenata, postoje situacije kad poredak nije važan te se promatra bilo koja n-torka ili r-torka, a ne samo one uređene. Kod prebrojavanja troznamenkastih brojeva poredak je važan jer su, na primjer, 432 i 342 različiti brojevi. Ako prebrojavamo moguće skupine od 6 brojeva u igri *LOTO 6/45*, poredak nije važan. Važno je samo koji su brojevi izvučeni, ali ne i kojim redom.

5.1 Kombinacije bez ponavljanja

Binomni koeficijent. Binomni koeficijent je broj koji se označava sa $\binom{n}{r}$ i definira kao razlomak $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, gdje su $n, r \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r \leq n$, [16].

Kombinacije bez ponavljanja. Kombinacija r-tog razreda od n elemenata je svaki podskup od r elemenata n-članog skupa, [3].

Ukupan broj kombinacija bez ponavljanja r-tog razreda od n elemenata jednak je $C_n^r = \binom{n}{r}$.

Motivacijski primjeri

Ukoliko smo pojam permutacija u nastavi uveli koristeći se primjerom sa smještanjem ljudi oko stola, korisno je poslužiti se istim primjerom i prilikom uvođenja pojma kombinacija.

Primjer 5.1.1. Na koliko se načina mogu na tri stolice posjesti troje od šestero ljudi: A, B, C, D, E i F?

Rješenje. Tri stolice označit ćemo brojevima $1, 2$ i 3. Koje su sve moguće permutacije smještanja triju od 6 osoba na te stolice? Započnimo sa stolicom broj 1. Ako još nitko nije posjednut, tada postoji ukupno 6 različitih osoba koje možemo posjesti na prvu sjedalicu. Drugim riječima, postoji 6 različitih slučajeva da jedna osoba sjedi na sjedalici broj 1. Za svaki od tih scenarija, koliko ljudi možemo posjesti na sjedalicu broj 2? Neovisno tko od 6 ljudi sjedi na prvoj stolici, za drugu onda preostaje izbor od 5 osoba. Dakle, postoji 6 mogućnosti za odabir osobe koja sjedi na prvoj sjedalici, a potom još 5 mogućnosti za drugu stolicu za svaku od tih 6 mogućnosti. To bi značilo da ima ukupno $6 \cdot 5 = 30$ mogućnosti gdje smo od 6 osoba smjestili dvije osobe. Sada se pitamo koliko različitih osoba možemo smjestiti na treću stolicu za svaku od spomenutih 30 mogućnosti prvih dviju stolica. Još uvijek su preostale 4 osobe koje ne sjede pa za svaki od 30 scenarija možemo izabrati između 4 osobe koja će sjediti na posljednoj, trećoj stolici. Stoga, ukupan broj permutacija gdje nam je bitno tko sjedi na kojoj sjedalici jednak je $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Među tih 120 permutacija ubrajaju se i iduće permutacije: $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$. Sve su to iste tri osobe, ali su drugačije raspoređene na sjedalice $1, 2, 3$ pa je to 6 različitih permutacija. Izdvojimo još 6 permutacija od iste 3 osobe, primjerice od osoba B, C, F: $BCF, BFC, CBF, CFB, FBC, FCB$.

Sada smo nabrojali ukupno 12 od mogućih 120 permutacija. Što ako bismo htjeli odabrati 3 osobe za 3 sjedalice, ali da nam pritom nije bitan redoslijed sjedenja, tj. tko sjedi u kojoj sjedalici? U tom su slučaju svih 6 permutacija $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$ zapravo jednake istom skupu. Također, $BCF, BFC, CBF, CFB, FBC, FCB$ je 6 različitih permutacija koje predstavljaju samo jedan skup ukoliko nam poredak nije važan. Pitanje je iduće: ako među 6 osoba moramo odabrati koga ćemo posjesti na 3 sjedalice, na koliko načina to možemo ako nam nije bitno tko sjedi na kojoj sjedalici? Ispisujući sve permutacije odabranih troje ljudi, možemo uočiti da postoji 6 načina za organiziranje tih istih troje ljudi. Drugim riječima, ako odaberemo bilo kojih troje ljudi iz grupe, postoji 6 permutacija za njihov poredak u sjedalicama $1, 2, 3$. Dakle, svih 120 mogućnosti potrebno je podijeliti s brojem načina za razmještaj triju osoba, a izračunali smo da je to jednako 6. Dobivamo $\frac{120}{6} = 20$.

Ponovimo! Postoji ukupno 120 mogućnosti za posjedanje 6 osoba na 3 sjedalice, no kod kombinacija se pitamo drugo pitanje: ako postoji 6 osoba, na koliko načina možemo izabrati bilo koje tri od njih? Odgovor je 20 kombinacija ljudi (6 permutacija osoba $A, B, C =$ 1 kombinacija osoba A, B, C).

Slijedi sličan primjer.

Primjer 5.1.2. Maro pakira ruksak jer ide na dvodnevni izlet na more. Izdvojio je 4 majice, ali s obzirom na to da je ruksak prepunjen, jednu od njih mora ostaviti kod kuće. Na koliko načina među tim majicama Maro može izabrati njih 3?

Rješenje. Maro treba odabrati 3 majice od mogućih 4. Označimo majice slovima A, B, C, D. Kada bismo ispisali sve uređene trojke od ta 4 slova, dobili bismo

$$\begin{gathered} ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, \\ ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA, \\ ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA, \\ BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB. \end{gathered}$$

Direktnim prebrojavanjem ili primjenom principa umnoška, dolazimo do rješenja $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. No, Maru nije bitno kojim će redom majice složiti u ruksak. Zato trojke

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

predstavljaju isti izbor majica $\{A, B, C\}$. Uočimo da su te trojke permutacije skupa A, B, C. Dakle, po $6 = 3!$ uređenih trojki predstavlja jedan izbor majica. Popis svih različitih knjiga glasi: $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}$. To su svi tročlani podskupovi od skupa sa 4 elementa i ima ih $\frac{24}{6} = 4$.

Izbore $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}$, tj. tročlane podskupove od četveročlanog skupa nazivamo kombinacije trećeg razreda u četveročlanom skupu $\{A, B, C, D\}$. Njihov ukupan broj dobili smo tako da smo broj svih uređenih trojki (to su varijacije bez ponavljanja trećeg razreda od 4 elementa) podijelili s brojem permutacija skupa od 3 elementa, [16].

Prethodno navedena dva primjera pogodni su za uvođenje pojmova kombinacije bez ponavljanja i binomnog koeficijenta. Postupak koji je u njima proveden može se poopćiti na izbor r-članih podskupova n-članog skupa te na taj način dolazimo do definicije kombinacije bez ponavljanja, koja je spomenuta na početku ovog potpoglavlja. Iz tih se primjera također vidi da je ukupan broj svih kombinacija bez ponavljanja r-tog razreda u skupu sa n elemenata jednak

$$C_r^n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1))}{r!}.$$

Ukoliko taj ralomak proširimo brojem $(n-r)!$ dobivamo iduće:

$$C_r^n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1))}{r!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

što kraće zapisujemo $\binom{n}{r}$ i zovemo **binomni koeficijent**.

5.2 Kombinacije s ponavljanjem

Kombinacije s ponavljanjem. Kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda n-članog skupa je skup od r elemenata koji se sastoji od elemenata zadanog n-članog skupa s time da se neki elementi mogu ponoviti i više puta, [3].

Ukupan broj kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda od n različitih elemenata jednak je $\overline{K_r^n} = \binom{n+r-1}{r}$.

Motivacijski primjer

Primjer 5.2.1. U slastičarnici imaju u ponudi 4 torte. Emanuela treba kupiti 9 komada torte. Na koliko načina Emanuela može odabrati tih 9 komada torte?

Rješenje. Emanuelin izbor kolača prikazat ćemo na idući način: ako je uzela 2 komada prve torte, 3 komada druge, 2 komada treće i 2 komada četvrte, zapisat ćemo to kao $tt|ttt|tt|tt$ s jednom crtom (pregradom) između različitih vrsta torti. Primjerice, zapis $|||ttttttttt$ označava ovakav izbor: 0 komada prve torte, 0 komada druge torte, 0 komada treće torte i 9 komada četvrte torte. Pomicanjem pregrade dobivamo različite odabire. Dakle, problem smo sveli na traženje svih nizova od $9 + 3 = 12$ elemenata u kojima se ponavlja 9 elemenata (slova t) i 3 elementa (pregrade). Broj svih odabira je broj svih permutacija s ponavljanjem $\frac{12!}{3!9!}$, što je jednako $\binom{12}{9} = 220$.

Poglavlje 6

Binomna formula

Ideja za uvođenje te objašnjenje binomne formule preuzeta je iz udžbenika [16] spomenutog u popisu literature te ju navodim u nastavku.

Učenici su se u osmom razredu upoznali s formulom za kvadrat binoma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Primjenjujući to znanje učenici lako mogu izvesti raspis za kub i ostale eksponente, npr. za $(a+b)^4$ i $(a+b)^5$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)^2 \\
&= (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^2\cdot(a+b)^2 \\
&= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= (a+b)\cdot(a+b)^4 \\
&= (a+b)\cdot(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4) \\
&= a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^3b+4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2+2ab^3+b^4 \\
&= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}$$

Na analogan način možemo izvesti formulu za bilo koju potenciju. Međutim, izračun tada postaje sve kompliciraniji jer za svaku iduću potenciju imamo sve veći broj množenja, stoga je lako učiniti grešku te bi sami postupak dugo trajao. Kako možemo donijeti općeniti zaključak, tj. formulu na temelju nekoliko jednostavnijih konkretnih primjera?

Možemo učenicima usmjeriti pažnju na to da su u formuli za $(a+b)^2$ koeficijenti uz monome a^2, ab, b^2 redom jednaki $1, 2, 1$. Ti su koeficijenti isto tako redom jednaki $\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}$.

U formuli za $(a+b)^3$ koeficijenti uz monome a^3, a^2b, ab^2, b^3 redom su jednaki brojevima $1, 3, 3, 1$. Ti su koeficijenti isto tako redom jednaki $\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$.

U formuli za $(a+b)^4$ koeficijenti su $1, 4, 6, 4, 1$, a za njih ujedno vrijedi $1 = \binom{4}{0}, 4 = \binom{4}{1}, 6 = \binom{4}{2}, 4 = \binom{4}{3}, 1 = \binom{4}{4}$.

U formuli za $(a+b)^5$ koeficijenti su $1, 5, 10, 10, 5, 1$, a za njih ujedno vrijedi $1 = \binom{5}{0}, 5 = \binom{5}{1}, 10 = \binom{5}{2}, 10 = \binom{5}{3}, 5 = \binom{5}{4}, 1 = \binom{5}{5}$.

Možemo li onda pretpostaviti čemu bi bili jednaki koeficijenti u formuli za $(a+b)^{10}$? Analogno kao i za prethodne slučajeve, uočavamo da se samo mijenja "gornji" broj binomnog koeficijenta te da je on jednak eksponentu tražene potencije. "Donji" broj binomnog koeficijenta čine redom prirodni brojevi s nulom do onog broja koji se nalazi u eksponentu tražene potencije. Stoga, koeficijenti za $(a+b)^{10}$ bi bili $\binom{10}{0}, \binom{10}{1}, \binom{10}{1}, ..., \binom{10}{10}$. Na taj način dolazimo do općenitog zapisa binomne formule.

Binomna formula. Za svaka dva broja a i b i za svaki prirodni broj n vrijedi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Formula zapisana u kraćem obliku je $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ pa uočavamo da je pribrojnik te formule oblika $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ i zove se opći član binomne formule.

Kako bismo dokazali da binomna formula vrijedi, poslužit ćemo se Pascalovom formulom.

Pascalova formula. Za prirodne brojeve n i k, pri čemu je $n \geq k$, vrijedi

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k},$$

gdje $\binom{n}{k}$ označava binomni koeficijent.

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1)!(n-k)!} \\
&= (n-1)!\left[\frac{n-k}{k!(n-k)!} + \frac{k}{k!(n-k)!}\right] \\
&= (n-1)!\frac{n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Dokaz binomne formule.
Formulu ćemo dokazati pozivajući se na princip matematičke indukcije.
Za slučaj $n = 1$ s lijeve strane dobivamo

$$(a+b)^1 = a+b,$$

dok je jednakost s desne strane tada jednaka

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \binom{1}{0}a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1}a^1 b^{1-1} = b + a = a + b,$$

stoga formula vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo sada da formula vrijedi za neki prirodni broj n,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n. \quad (6.1)$$

Trebamo dokazati da tada formula vrijedi i za $n+1$, tj. da je

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1}a^n b^1 + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n+1}{n}a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1}a^0 b^{n+1}.$$

Množenjem jednakosti (6.1) sa a dobivamo:

$$a(a+b)^n = \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \binom{n}{1}a^n b^1 + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^1 b^n, \quad (6.2)$$

a množenjem jednakosti (6.1) s b dobivamo:

$$b(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^1 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^4 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^n + \binom{n}{n}a^0 b^{n+1}. \quad (6.3)$$

Sada zbrajanjem jednakosti (6.2) i (6.3) te primjenom Pascalove formule dobivamo iduću jednakost:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1}a^n b^1 + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n+1}{n}a^1 b^n + \binom{n}{n}a^0 b^{n+1},$$

što je jednako

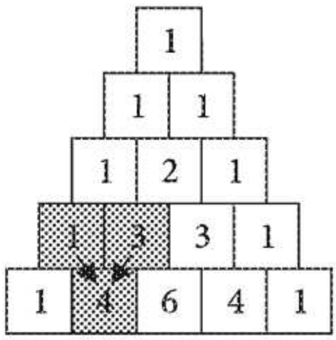
$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1}a^n b^1 + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n+1}{n}a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1}a^0 b^{n+1}.$$

Time je dokazana binomna formula.

6.1 Pascalov trokut

Blaise Pascal francuski je matematičar koji je živio i djelovao u 17. stoljeću. Školovao ga je vlastiti otac, a nazvan je *čudom od djeteta*. Osim *Pascalovog poučka* o šesterovrhu te prvog računalnog stroja u povijesti *Pascaline*, poznat je po jednom od zanimljivih matematičkih pojmova, *Pascalovom trokutu*. Pascal nije zaslužan za otkriće tog trokuta, već su se njegovim proučavanjem bavili ljudi još stoljećima prije njega u Njemačkoj, Italiji, Grčkoj, Iranu, Indiji i Kini. Međutim, njegova upotreba nije objašnjena sve do Pascala, koji je ujedinio sva saznanja o njemu u djelu *Traite du triangle arithmetique*, [8].

Trokut započinje s brojem "1" na vrhu, a preostali se brojevi nižu ispod jedinice na način da se formira oblik trokuta. Svaki idući redak u trokutu sadrži jedan broj više nego prethodni redak, a prvi i posljednji broj svakog retka jednak je 1. Dakle, drugi redak sastoji se od dva broja, od čega su oba jednaka 1. Preostali brojevi pojedinog retka dobiju se zbrajanjem susjednih članova iz prethodnog retka. Na slici je ilustriran taj postupak.



Slika 6.1: Nastanak Pascalovog trokuta,[8]

Pascalov trokut nosi sa sobom niz zanimljivosti. Jedna od njih očituje se ako promatramo zbrojeve pojedinih redaka. Zbroj brojeva u prvom retku (1) iznosi 1, zbroj brojeva u drugom retku (1, 1) iznosi 2, zbroj brojeva u trećem retku (1, 2, 1) iznosi 4, zbroj brojeva u četvrtom retku (1,3,3,1) iznosi 8 itd. Uočimo, to su potencije broja 2.

1	6	15	20	15	6	1
1	6+1	5+2	0+1	5	6	1
1	7	7	1	5	6	1

$\Rightarrow$ broj 1 771 561 = 11^6

Slika 6.2: Računanje potencije 11^6 pomoću Pascalovog trokuta, [8]

Druga je zanimljivost povezana s potencijama broja 11:

$$11^0 = 1$$
$$11^1 = 11$$
$$11^2 = 121$$
$$11^3 = 1331$$
$$11^4 = 14641...$$

Dakle, pojedini redak Pascalovog trokuta ujedno je i potencija broja 11. Međutim, ako gledamo potencije veće od 5, možemo uočiti da ne vrijedi da je npr. $11^5 = 15\,101\,051$, što bismo dobili iščitavanjem iz Pascalovog trokuta. Slika iznad prikazuje postupak određivanja potencije 11^6 pomoću Pascalovog trokuta, a vrijedi za sve eksponente veće ili jednake 5.

Poglavlje 7

Usustavljivanje znanja iz kombinatorike

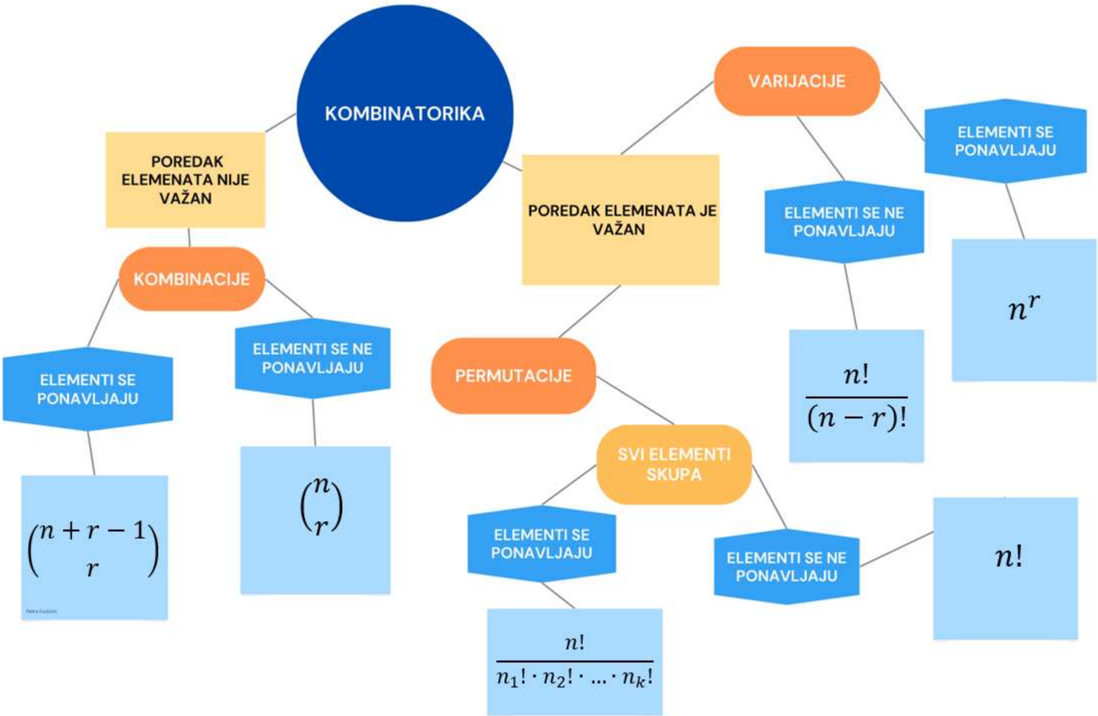
Nakon obrade svih osnovnih načela redanja, raspoređivanja i odabira elemenata konačnih skupova, sistematizaciju je korisno provesti u obliku tablice iz koje učenici lako mogu odabrati način rješavanja kombinatornog problema.

	Svi elementi skupa	Važan poredak	Ponavljanje
Varijacije bez ponavljanja	NE	DA	NE
Varijacije s ponavljanjem	NE	DA	DA
Permutacije bez ponavljanja	DA	DA	NE
Permutacije s ponavljanjem	DA	DA	DA
Kombinacije bez ponavljanja	NE	NE	NE
Kombinacije s ponavljanjem	NE	NE	DA

Nakon odabira odgovarajućeg načina rješavanja, korisno je poslužiti se i prikazanom tablicom s formulama, osobito tijekom satova uvježbavanja.

Varijacije bez ponavljanja	$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
Varijacije s ponavljanjem	$\overline{V_n^r} = n^r$
Permutacije bez ponavljanja	$P_n = n!$
Permutacije s ponavljanjem	$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
Kombinacije bez ponavljanja	$C_n^r = \binom{n}{r}$
Kombinacije s ponavljanjem	$\overline{C_n^r} = \binom{n+r-1}{r}$

Svi podatci iz navedenih tablica pogodni su i za izradu konceptualne mape koja učenicima pomaže da lakše usvoje, organiziraju i pohranjuju kombinatorne sadržaje.

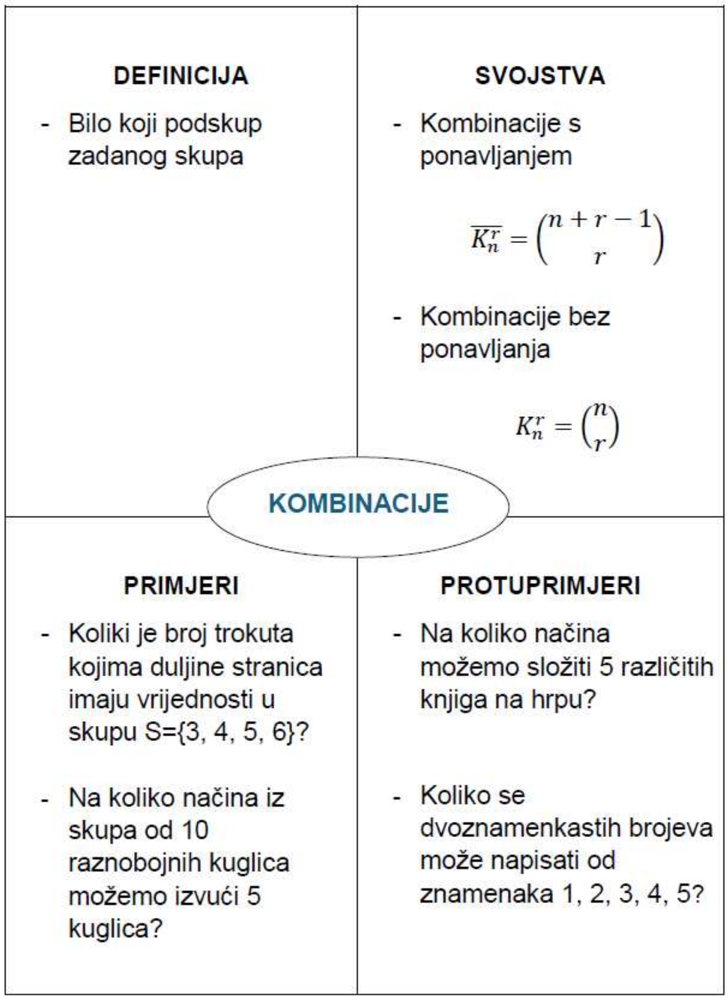


Slika 7.1: Primjer konceptualne mape

U nastavku slijedi par prijedloga aktivnosti za srednju školu vezanih uz usustavljivanje znanja kombinatornog sadržaja u nastavi. Nazivi i koncepti aktivnosti preuzeti su iz prezentacija prof. dr. sc. Aleksandre Čižmešije iz kolegija *Vrednovanje u matematičkom obrazovanju*.

Frayerov model

Osim konceptualne mape, izvrstan alat za podršku u razmišljanju o matematičkom problemu je i Frayerov model. Kada se grafički organizator koristi dosljedno i često, tijekom vremena bit će određeno poboljšanje u procesu rješavanja problema u matematici. U nastavku je prikazan jedan primjer Frayerovog modela, a učenici ga mogu napraviti i za sve ostale kombinatorne pojmove, tj. u središtu mape umjesto kombinacija mogu se pronaći i pojmovi poput kombinatorike, varijacija, permutacija i slično.



Slika 7.2: Primjer Frayerovog modela

Sortiranje kartica

Učenici povezuju kartice s istim vrijednostima, oblicima, pojmovima i definicijama prema određenoj kombinatornoj jedinici. Otežavajući faktor može biti kartica koja nema svoj par.

Broj svih riječi koje se mogu napisati koristeći se slovima riječi KOCKA	Permutacije s ponavljanjem	$\frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$	$\frac{5!}{2!}$
Broj načina na koji 6 osoba planiramo smjestiti na 6 mjesta za okruglim stolom	Permutacije	Svaka uređena n-torka svih n elemenata skupa	$5!$
Broj različitih ishoda prilikom izvlačenja 9 karata iz snopa od 13 karata, bez vraćanja u snop	Varijacije bez ponavljanja	Svaka uređena r -torka različitih elemenata danog n-članog skupa	$\frac{13!}{4!}$
Broj dvoznamenkastih brojeva sa znamenkama 2, 4, 6, 8, ali desetica treba biti manja od ili jednaka jedinici	Kombinacije s ponavljanjem	Svaki r-člani podskup n -članog skupa, gdje se elementi mogu ponavljati	$\binom{5}{2}$
Broj načina za rješavanje kviza od 13 pitanja u kojima pristupnik bira između 3 odgovora ili ostavlja neodgovorenim	Varijacije s ponavljanjem	Svaka uređena r-torka n -članog skupa, gdje se elementi mogu ponavljati	4^{13}
Broj načina za odabir četiriju pik karata iz snopa od 52 karte	Kombinacije bez ponavljanja	Svaki r-člani podskup n -članog skupa	$\binom{13}{4}$
$6!$			

Slika 7.3: Primjer kartica za aktivnost

Poglavlje 8

Kombinatorne igre

U prijašnjim su poglavljima dani prijedlozi i ideje kako kombinatoriku po sadržajnim jedinicama uvesti u nastavu na što zanimljiviji način učenicima. Od velike je važnosti i značaja za učenike novo gradivo predstaviti na zabavan način jer je ključna komponenta takvog načina motivacija za dostizanjem cilja (rješenjem zadatka, tj. problema).
Unatoč tome, uvriježen je stav kod većine ljudi kako bilo što zabavno ne može uključivati nikakvu vrijednu matematiku. U prošlosti je "teorija igara" pronašla široku, iako obično neuspješnu, primjenu u ekonomiji, menadžmentu, vojnoj strategiji i ostalim korisnim oblicima ljudske djelatnosti. Njen je razvoj započeo u 20. stoljeću, a bavi se proučavanjem situacije konflikta među sudionicima. Cilj je teorije odrediti ponašanje sudionika koje je za njih najpovoljnije. Kombinatorne igre, s potpunom informacijom o trenutnom stanju igre, bez slučajnih poteza, bez mjesta za blefiranje, najčešće ne zanimaju klasične teoretičare igara, koji znaju da uvijek postoji barem jedna čista optimalna strategija. Zašto bi nas onda trebale zanimati kombinatorne igre? [1]
Kombinatorne igre bliske su bavljenju matematikom, a iz samog naziva možemo iščitati njihovu vezu s granom matematike - kombinatorikom. One potiču razvoj istih potencijala te zahtijevaju isti tip strategije kao i matematika. Motiviraju učenike na sudjelovanje, suzbijaju stav o matematici kao nečemu strašnom i nemogućem, a samim time i potiču daljni interes za matematikom kod učenika. Ukoliko u redovnoj nastavi nema dovoljno vremena za njihovo provođenje, pogodno ih je koristiti u obliku radionice prilikom Večeri matematike, Dana škole, projektnog dana i sličnih aktivnosti u školi.
U nastavku slijedi opis radionice preuzete iz časopisa Matematika i škola, [20], temeljene upravo na kombinatornim igrama, a osmišljene za rad s učenicima povodm svih navedenih benefita koje takve igre donose.

8.1 Radionica

Pravila igre

Radionica se sastoji od više igara, a za svaku od njih vrijede isti uvjeti:

- u igri sudjeluju dva igrača,
- jasno su određena pravila igre za svakog igrača; za oba igrača dozvoljeni su potezi kojima se mijenja već postojeći položaj,
- potezi se vuku naizmjence,
- kraj igre označava ostvarenje položaja u kojem za igrača koji je na potezu nema više dopuštenih mogućih položaja (tzv. završni položaj),
- igra je gotova nakon određenog broja poteza, bez obzira na to koliko se dugo igrala.

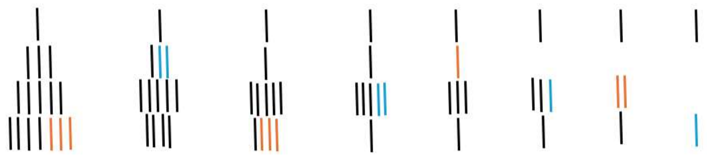
Tijek radionice

Prije samog početka igre, učenike se upoznaje s glavnim pojmovima teorije igara. Također, precizno se definiraju uvjeti koje igra mora zadovoljavati kako bi se moglo tvrditi da je uistinu riječ o kombinatornoj igri. Potom se učenike dijeli u grupe tako da svaka sadrži paran broj učenika jer u kombinatornoj igri sudjeluju dva igrača. Zadatak je svake grupe da otkrije pobjedničku strategiju za pojedinu igru. Igre koje su ovom radionicom predstavljene su *Nim, Chomp, Sprouts* i *Sim*. Svakoj se grupi podijele pravila igre, materijali potrebni za igru te ih se potom pušta dvadesetak minuta u proučavanju i igranju igre. Uz svaku igru, grupe dobiju i odgovarajući zadatak, a to je ujedno i dio u kojem učenici rade samostalno. Iznimno je važno da su sve grupe točno i u potpunosti razumjele pravila igre jer u protivnom igra gubi smisao temeljem neispravne interpretacije pravila. Nakon što istekne dvadesetak minuta igranja, slijedi prezentiranje pojedine grupe o njihovoj igri, kako bi svi učenici upoznali sve moguće igre. Voditelj radionice, primjerice nastavnik, prilikom prezentiranja svake igre iznosi učenicima povijesne činjenice o njezinu nastanku. Svaka grupa ima svoje predstavnike koji nakon nastavnikovog izlaganja naglas čitaju pravila svoje igre te otkrivaju rješenje svog zadatka. Poželjno je da se čitavo to vrijeme pravila projiciraju kako bi ih se učenici mogli prisjetiti u svakom trenutku. Slijedi zajednička analiza iznesenih rješenja zadataka te se provjerava njihova ispravnost. Nakon predstavljanja svih rješenja, grupe međusobno mijenjaju igre i isprobavaju strategije.

Igre

Nim

Na stolu je u 4 reda raspoređeno 16 šibica. Nije nužno da se radi o šibicama, već ih može zamijeniti bilo koji drugi štapićasti predmet (npr. bojice, flomasteri, špageti i slično).

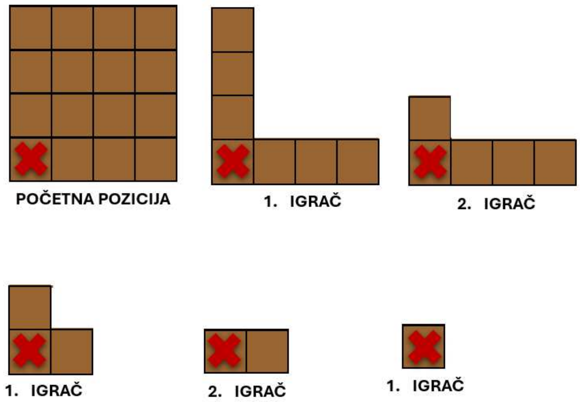


Slika 8.1: Primjer jedne partije igre "Nim"

Igrači naizmjence uklanjaju predmete iz redova. U prvom je redu jedna šibica, u drugom su redu tri šibice, u trećem pet šibica te u posljednjem redu njih sedam. Igrač mora ukloniti barem jedan predmet svaki put kad je na redu za igru te je moguće ukloniti sve predmete koji se nalaze u istom redu krećući s desne strane. Dva igrača naizmjence biraju redak uzimajući iz njega barem jedan predmet. Pobjednik je onaj kojemu je pripala posljednja šibica za uklanjanje.
Zadatak je ove igre odrediti pobjedničku strategiju, tj. kako i u kojem potezu je moguće osigurati pobjedu. Moguće je da učenici neće izložiti potpunu strategiju za pobjedu pa je potrebno da voditelj radionice, tj. nastavnik, objasni tu strategiju na raznim isprojiciranim primjerima. Ukoliko su učenici i dalje priklonjeni svojoj strategiji, tada ih je potrebno razuvjeriti. To se ostvaruje na način da se protiv njih odigra igra te uspostavi pobjeda koristeći se opisanom pobjedničkom strategijom. Više o pobjedničkoj strategiji može se pronaći u članku "Dvije igre i njihova generalizacija", [17].

Chomp

Igra *Chomp* izvorno se igra na pravokutnoj ploči čokolade dimenzija $m \times n$ podijeljenoj na kvadratiće. Osim toga, zgodno je koristiti se malim čokoladicama ili Kiki bombonima jer je od njih lako složiti pravokutnu ploču dimenzija $m \times n$. Igrači naizmjence biraju predmet, primjerice čokoladicu, te "pojedu" sve predmete desno ili iznad izabrane čokoladice, uključujući i nju. Potrebno je upozoriti učenike da ne jedu doslovno čokoladice jer se u protivnom u jako kratkom roku ostaje bez materijala za igru. To im se može dozvoliti u posljednjoj rundi igre. Čokoladica u donjem lijevom kutu proglašena je otrovnom, stoga igrač koji ju "pojede" gubi igru.
Ponovno, zadatak grupe bio je odrediti pobjedničku strategiju. Važno je spomenuti kako se sve do danas ne zna pobjednička strategija za opći slučaj $m \times n$, već za neke konkretne



Slika 8.2: Primjer jedne partije igre ”Chomp”

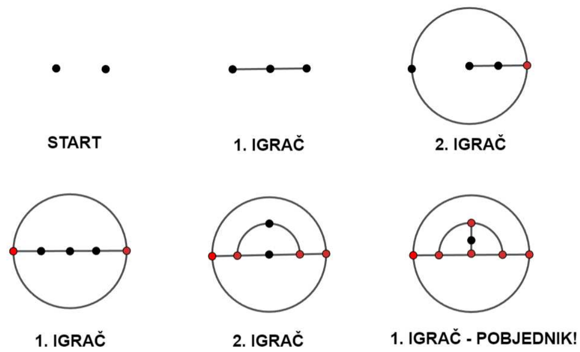
slučajeve pa takve i koristimo prilikom igranja ove igre. Postoje dvije mogućnosti: prva je da je ploča kvadratna ($m = n$), a druga da je dimenzija ploče jednaka $2 \times n$. Rješenje se može pronaći u istom članku kao i za igru ”Nim”, [17].

Sprotus

Na početku igre potrebno je na list papira nacrtati n točaka. Igra se naizmjence. Svaki potez sastoji se od crtanja linije između dviju odabranih točaka te crtanja nove točke negdje na toj liniji. Međutim, postoje pravila prilikom crtanja:

- linija ne smije sjeći nijednu već nacrtanu liniju, a smije biti i ravna i valovita,
- novoodabrana točka ne smije biti na kraju linije, tj. ne smije se preklopiti s već postojećom točkom,
- iz jedne točke moguće je nacrtati najviše tri linije.

Igrač koji je na potezu, a ujedno je i ostao bez dopuštenih mogućih položaja, gubi igru.
S obzirom na to da u igri nije zadan fiksan broj niti raspored točaka, mogući su različiti početci igre. To ju dodatno može učiniti još zanimljivijom. Postupak pronalaženja pobjedničke strategije za ovu igru je presložen pa je zadatak za učenike da utvrde maksimalan broj poteza koji se u jednoj igri može odigrati, ako pretpostavimo da počinjemo igru s n točaka. Iz svake točke mogu ”izaći” maksimalno tri linije pa možemo reći da svaka točka ima tri života. Dakle, na početku igre imamo $3n$ života. Pri svakom spajanju točaka, gubimo dva života. Isto tako, pri spajanju dviju točaka ujedno i dodajemo jedan život jer docrtavamo jednu točku na liniji. To znači da se u svakom potezu gubi ukupno jedan život

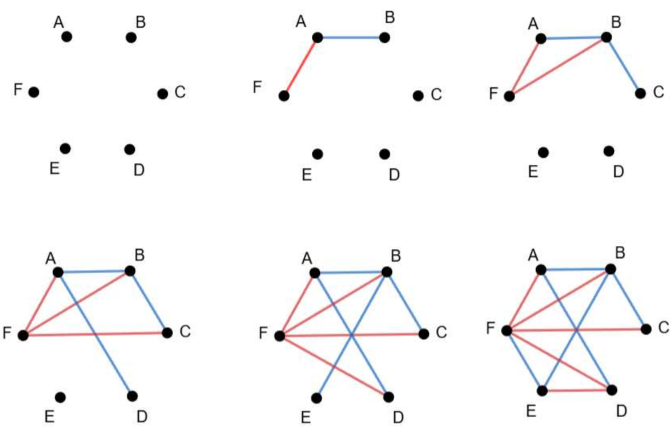


Slika 8.3: Primjer jedne partije igre ”Sprotus”

pa igra mora završiti u najviše $3n$ poteza, što je ujedno i najveći broj poteza koji se u jednoj igri može odigrati.

Sim

Za razliku od prijašnje igre, u ovoj se igri na početku crta fiksan broj točaka: 6. Igrači naizmjenično spajaju po dvije točke, ali svaki svojom bojom (moraju biti dvije različite). Gubitnik je onaj koji napravi trokut svoje boje.



Slika 8.4: Crveni igrač je gubitnik u partiji ”Sim” igre

Učenici moraju odrediti maksimalan broj poteza koji se u jednoj igri može odigrati. Rješenje zadatka može se povezati s brojem dijagonala konveksnog mnogokuta.

Napomena. Važno je napomenuti učenicima kako se spajaju samo izvorno nacrtane točke, a ne i one koje nastanu u presjecima linija.

Bibliografija

[1] American Mathematical Society: *Combinatorial games*. 1990. https://www.ams.org/books/psapm/043/psapm043-endmatter.pdf.

[2] Bašić, M.: *Metodika nastave matematike 4: kombinatorika*. 2013. https://moodle.srce.hr/2023-2024/pluginfile.php/9627032/mod_resource/content/1/MNM4%20Kombinatorika%202024.pdf.

[3] Edutorij: *Kombinacije*. 2021. https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/342_kombinacije.html.

[4] Edutorij: *Permutacije*. 2021. https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/341_permutacije.html.

[5] Hrustek, A.: *52 faktorijela 3rt*, srpanj 2022. https://www.youtube.com/watch?v=FIaAZ4b56Ic.

[6] Marohnić, M. i M. Bašić: *Diskretna matematika - vježbe*. 2006. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/SKRIPTA.pdf.

[7] Martinović, A.: *Kombinatorika u nastavi matematike*. diplomski rad, PMF, Zagreb, 2023.

[8] Mesarić, M.: *Pascalov trokut*. Matka 21, br. 83, 2012./13., 154-157. https://hrcak.srce.hr/file/166741.

[9] Ministarstvo znanosti i obrazovanja: *Kurikulum za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*. Narodne novine, 2024.

[10] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih: *Okvirni godišnji izvedbeni kurikulumi za nastavnu godinu 2021./2022.* 2021./2022. https://mzom.gov.hr/vijesti/okvirni-godisnji-izvedbeni-kurikulumi-za-nastavnu-godinu-2021-2022/4522.

[11] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja: *Matematička pismenost*. https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2023/10/Konceptualni-okvir-matematicke-pismenosti_PISA-2022.pdf.

[12] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja: *Primjeri PISA zadataka iz matematičke pismenosti: testovi "papir-olovka" (PISA 2000, PISA 2003, PISA 2012)*. 2018. https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2018/05/Primjeri-PISA-zadataka_matemati%C4%8Dka-pismenost_papir-olovka.pdf.

[13] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja: *Konceptualni okvir matematičke pismenosti - PISA 2022*. 2023. https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2023/10/Konceptualni-okvir-matematicke-pismenosti_PISA-2022.pdf.

[14] Trškan, D.: *Motivacijske tehnike u nastavi*. HRČAK - Srce, siječanj 2006. https://hrcak.srce.hr/file/39224.

[15] UCLA mathematics: *What is combinatorics?* https://www.math.ucla.edu/~pak/hidden/papers/Quotes/Wilson-what.pdf.

[16] Varošanec, S.: *Matematika 3, udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola (3 ili 4 sata nastave tjedno)*. Element, Zagreb, 2023.

[17] Vuger, J. i V. Krčadinac: *Dvije igre i njihova generalizacija*. math.e, br. 10, 2007. https://hrcak.srce.hr/file/13548.

[18] Wikipedija: *Faktorijel*. https://hr.wikipedia.org/wiki/Faktorijel.

[19] Zorić, Z.: *Poučak o uzastopnom prebrojavanju*. Matka 2, br. 5, 1993./94, 2-5. https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2014/12/matka5-prebrojavanje.pdf.

[20] Černivec, M. i S. Rukavina: *Radionica "Kombinatorne igre"*. Matematika i škola, br. 61, 2011/2012. https://mis.element.hr/clanak/radionica-kombinatorne-igre/.

Sažetak

Traženje uzoraka jedan je od glavnih instinkata koje čovječanstvo posjeduje. Matematika je često opisana kao znanost o uzorcima, a može se reći da se time ponajviše bavi kombinatorika, u odnosu na ostale matematičke grane. Ona je prirodno usađena u sadržaje matematike još od osnovne škole, a njena je domena prebrojavanje konačnih skupova. Još u nižim razredima osnovne škole učenici mogu rješavati zadatke slične ovome:

"Ema ima 2 haljine i 3 jakne. Na koliko načina može iskombinirati po jednu haljinu i jaknu koje će obući za odlazak u kazalište?"

Pri prvom susretu učenika s ovom vrstom zadataka nastavnik treba učenike uspješno dovesti do rješenja, a potom ih pustiti da samostalno rješavaju zadatke. Stoga nastavnik treba dobro poznavati teoriju koja se krije u pozadini ovakvih zadataka, ali treba imati i vještinu osmišljavanja novih zadataka čije se rješenje temelji na primjeni nekog od kombinatornih principa.

Ovaj je diplomski osmišljen kao pomoćni priručnik nastavniku kako bi što prirodnije u nastavu uveo kombinatorne pojmove te kod učenika potaknuo motivaciju i interes za tim sadržajima. Prvi analizirani nastavni sadržaj jesu temeljni principi prebrojavanja: princip umnoška, princip zbroja, princip razlike i princip kvocijenta. Za svaki od navedenih principa dani su primjeri uvodnih zadataka za nastavu s detaljnim raspisom rješenja. Osim toga, definirani su pojmovi varijacije, permutacije i kombinacije sa i bez ponavljanja te binomna formula. Osim definicija, navedene su nastavne aktivnosti, to jest zadatci koji zorno predočuju navedene pojmove. Navedeni su i ishodi učenja koji se ostvaruju usvajanjem nastavnih sadržaja iz područja kombinatorike te primjer rasporeda nastavnih sati.

Summary

The topic of this thesis are contents of combinatorics in mathematics classes and a methodical approach to these contents. The search for patterns is one of the main instincts that humanity possesses. Mathematics is often described as the science of patterns, and it can be said that it is mainly concerned with combinatorics, compared to other branches of mathematics. Combinatorics is naturally embedded in the contents of mathematics since elementary school, and its domain is the counting of finite sets. Even in the lower grades of elementary school, students can solve tasks similar to this:

"Ema has 2 dresses and 3 jackets. In how many ways can she combine one dress and one jacket that she will wear to go to the theater?"

When encountering the students to this type of tasks for the first time, the teacher should successfully lead them to the solution, and then let them find it themselves. Therefore, the teacher should have a good knowledge of the theory that is hidden in the background of such tasks, but should also have the skill of devising new tasks, the solution of which is based on the application of one of the combinatorial principles.

This thesis was designed as an auxiliary manual for the teacher in order to introduce combinatorial concepts in the lesson as naturally as possible and to stimulate students' motivation and interest in these contents. The first analyzed teaching content is the basic principles of counting: the principle of multiplication, the principle of sum, the principle of difference and the principle of quotient. For each of the mentioned principles, examples of introductory tasks for teaching are given with a detailed call for solutions. In addition, the concepts of variation, permutation and combination with and without repetition and the binomial formula are defined. In addition to the definitions, teaching activities are listed, that is, tasks that clearly present the mentioned concepts. The learning outcomes that are realized by adopting teaching content from the field of combinatorics and an example of the schedule of teaching hours are also listed.

Životopis

Rođena sam 22. rujna 1999. u Zadru. Odrasla sam u mjestu Poljica Brig koje pripada općini Nin. Školovanje sam započela u Osnovnoj školi Bartula Kašića u Zadru te nastavila u Gimnaziji Franje Petrića, matematički smjer. Po završetku gimnazije 2018. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nastavnički smjer diplomskog studija Matematike upisala sam 2021. godine na istom fakultetu. Tijekom studiranja radila sam razne studentske poslove, od kojih bih istaknula ulogu demonstratora iz kolegija Diferencijalni i integralni račun 1 te ulogu anotatora u Photomath-u.