

# Gravitacijsko zračenje

---

**Milas, Maja**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:102315>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-31**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Maja Milas

GRAVITACIJSKO ZRAČENJE

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Maja Milas**

Diplomski rad

**Gravitacijsko zračenje**

Voditelj diplomskog rada: Izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2024.

Zahvaljujem mentoru, profesoru Ivici Smoliću, za vođenje, strpljenje i temeljite diskusije tijekom pisanja ovog rada. Veliko hvala i svim profesorima, asistentima, tetama u referadi te ostalom fakultetskom osoblju.

Posebno se zahvaljujem obitelji i prijateljima na podršci tijekom cijelog školovanja.

## Sažetak

Gravitacijski su valovi putujuće deformacije gravitacijskog polja koje nose energiju. Iako je njihovo postojanje predviđeno još početkom 20. stoljeća, prvo direktno opažanje ostvareno je tek stotinu godina kasnije unutar međunarodne kolaboracije LIGO. U ovom je radu dan pregled teorijskih tretmana gravitacijskog zračenja u kontekstu linearizirane opće teorije relativnosti. Osim toga, uveden je problem definicije mase koji proizlazi iz Einsteinovog principa ekvivalencije te su predstavljeni razni analitički pristupi koji pokušavaju dati adekvatne definicije. Budući da su potpuno općenite definicije i dalje otvoren problem, promatranje je ograničeno na asimptotski ravne sustave.

Ključne riječi: gravitacijski valovi, asimptotska ravnost, Komar, ADM, Bondi, linearizirana gravitacija

# Gravitational radiation

## **Abstract**

Gravitational waves are traveling displacements of the gravitational field that carry energy. Although their existence was predicted as early as the beginning of the 20th century, the first direct observation was made only a hundred years later within the international LIGO collaboration. This thesis provides an overview of theoretical treatments of gravitational radiation in the context of the linearized general theory of relativity. In addition, the problem of defining mass, which arises from Einstein's principle of equivalence, is introduced, and various analytical approaches attempting to provide adequate definitions are presented. Since fully general definitions remain an open problem, the discussion is limited to asymptotically flat spacetimes.

Keywords: gravitational waves, asymptotic flatness, Komar, ADM, Bondi, linearized gravity

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Opća teorija relativnosti . . . . .	1
1.2	Gravitacijski valovi . . . . .	2
1.3	Stupnjevi slobode . . . . .	4
1.4	Notacija i konvencije . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Osnovni koncepti</b>	<b>5</b>
2.1	Linearizirana opća teorija relativnosti . . . . .	5
2.2	Baždarna sloboda . . . . .	5
2.3	Gravitacijski valovi u vakuumu . . . . .	7
2.4	Produkcija gravitacijskih valova . . . . .	9
2.5	Problemi linearizirane teorije . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Energija i masa u općoj teoriji relativnosti</b>	<b>15</b>
3.1	Energija i masa materije . . . . .	15
3.2	Nelokalni karakter energije gravitacijskog polja . . . . .	16
3.3	Stacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme . . . . .	18
3.4	Nestacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme . . . . .	21
3.5	Hamiltonijanski pristup — ADM definicije . . . . .	23
3.6	Teoremi o pozitivnosti . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Primjeri</b>	<b>28</b>
4.1	Schwarzschildova crna rupa . . . . .	28
4.2	Schwarzschildova crna rupa s akrecijskim diskom . . . . .	29
4.3	Gravitacijsko zračenje idealnog fluida . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>39</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>Hiperplohe</b>	<b>41</b>
<b>B</b>	<b>Lagrange-Hamilton formulacija OTR-a</b>	<b>44</b>
B.1	Lagrange-Hamilton formulacija u klasičnoj fizici . . . . .	44

B.2	Lagrangeova formulacija OTR-a . . . . .	44
B.3	Hamiltonova formulacija OTR-a . . . . .	46
<b>C</b>	<b>Kauzalna struktura prostorvremena</b>	<b>48</b>
	<b>Literatura</b>	<b>49</b>



# 1 Uvod

## 1.1 Opća teorija relativnosti

Isaac Newton prvi je put krajem 17. stoljeća postavio univerzalni zakon gravitacije koji tvrdi da je gravitacijska sila među tijelima mase  $m_1$  i  $m_2$  na udaljenosti  $r$  dana kao

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

gdje je gravitacijska konstanta  $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}$ . Sila je uvijek privlačna, a tijela međudjeluju kao da im je sva masa koncentrirana u težištu. Iako Newtonov zakon objašnjava mnoga gibanja nebeskih tijela koja vidimo u Svemiru, dobro je poznato da se ne može primijeniti u raznim specijalnim slučajevima poput sustava koji se gibaju velikim relativnim brzinama ili sustava koji imaju komplicirane orbite poput one planeta Merkura.

S ciljem rješavanja problema velikih brzina, početkom 20. stoljeća razvija se specijalna teorija relativnosti koja se temelji na dva postulata. Prvi tvrdi da su zakoni fizike jednaki u svim inercijalnim sustavima, a drugi da je brzina svjetlosti u vakuumu prirodna konstanta jednaka za sve promatrače.

Trenutno najbolja teorija koja opisuje gravitacijske sustave je tzv. "opća teorija relativnosti" koju je postavio A. Einstein 1915. godine. Ova teorija objašnjava gravitaciju kao zakrivljenost prostorvremena, tj. postulira da energija i materija zakrivljuju prostorvrijeme, a zakrivljeno prostorvrijeme uvjetuje njihovo gibanje i izmjenu. Na taj način gravitacijska sila postaje geometrijsko svojstvo prostora i vremena, odnosno četverodimenzionalnog prostorvremena [7].

Osnovna jednadžba teorije je Einsteinova jednadžba polja (1.1) koju možemo shvatiti kao poopćenje Poissonove jednadžbe za Newtonov potencijal,  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ . U ovoj analogiji, gravitacijski potencijal  $\Phi$  zamjenjuje metrika prostorvremena  $g_{\mu\nu}$  koja opisuje zakrivljenost, a gustoću materije  $\rho$  zamjenjuje tenzor energije i impulsa  $T_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (1.1)$$

S lijeve strane jednadžbe prepoznamo Riccijev tenzor te Riccijev skalar  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Riccijev tenzor je kontrahirani Riemannov tenzor  $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$  koji je konstruiran od drugih (i prvih) derivacija metrike  $g_{\mu\nu}$  te u analogiji odgovara  $\nabla^2 \Phi$  članu u Newto-

novoj jednadžbi.

Neka od predviđanja opće teorije relativnosti značajno se razlikuju u odnosu na Newtonovu teoriju. Na primjer, ona predviđa dilataciju vremena, crveni pomak svjetlosti, postojanje crnih rupa i razne druge pojave. Iako je ova teorija vrlo moćna, ujedinjenje s teorijom kvantne mehanike i dalje ostaje otvoreno pitanje.

## **1.2 Gravitacijski valovi**

Tijekom dvadesetog stoljeća, Einsteinova teorija dobila je potvrdu kroz niz opservacijskih testova. To uključuje precizno predviđanje putanje Merkura, objašnjenje skretanja svjetlosnih zraka zbog gravitacijskog utjecaja Sunca te mjerenje gravitacijskog crvenog pomaka. Jedno od najvažnijih predviđanja teorije je postojanje gravitacijskih valova, koje možemo zamisliti kao perturbacije u prostorvremenu koje se propagiraju brzinom svjetlosti. Kada masivna tijela gube energiju tijekom sudara i sličnih događaja, ta se energija emitira u obliku gravitacijskog zračenja.

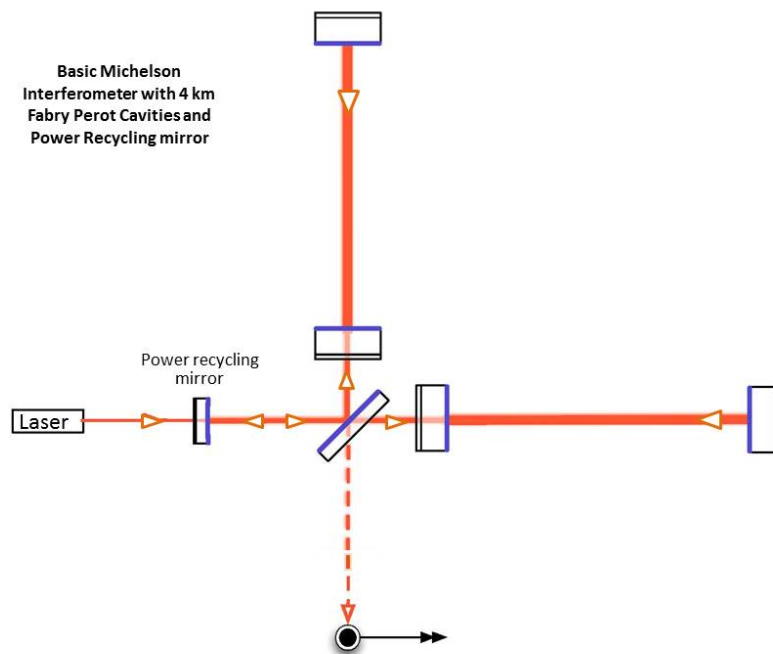
U veljači 2016. godine, kolaboracija LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) objavljuje članak s potvrdom prve izravne detekcije gravitacijskih valova nastalih spajanjem dviju crnih rupa. Eksperiment je proveden uz pomoć dva velika detektora smještena u Livingstonu (Louisiana) i Hanfordu (Washington), a izbor lokacija određen je zahtjevom da detektori budu na istom kontinentu te što udaljeniji. Na ovaj su način detektori udaljeni oko 3000 kilometara što omogućuje dovoljan vremenski razmak između dva opažanja prolaska vala te daje informaciju o smjeru propagacije. Svaki je interferometar dugačak 4 kilometra te oblika slova "L".

Princip rada LIGO detektora sličan je Michelsonovom interferometru, ali umjesto elektromagnetskog, detektira se gravitacijsko zračenje. U središtu se nalazi zrcalo koje razdvaja lasersku zraku te ju šalje u dva okomita smjera. Razdvojene zrake potom putuju kroz vakuumske cijevi zaštićene od okoline velikim metalnim zidovima. Na krajevima detektora nalaze se zrcala koja reflektiraju zrake nazad prema izvoru stvarajući interferencijski uzorak.

Teorija predviđa da prolazak gravitacijskog vala uzrokuje smanjenje udaljenosti između zrcala, s predviđenim kraćenjem od otprilike  $10^{-19}$  m. Budući da je amplituda tih promjena iznimno mala, potrebni su izuzetno osjetljivi detektori. Glavno ograničenje na razlučivost je duljina krakova koja se može poboljšati korištenjem tzv.

”Fabry-Perot šupljina”. Ideja je da se dodatnim zrcalima omogući višestruko odbijanje zrake prije očitavanja interferencijskog uzorka (i do 300 puta) čime se značajno povećava osjetljivost detektora [6]. Drugo ograničenje eksperimenta je snaga lasera korištenog u interferometru. Trenutno korišten laser ima snagu od oko 40 W, dok je za preciznu detekciju potrebno oko 750 kW. Problem se rješava upotrebom tzv. ”reciklirajućih zrcala” koja su prozirna za dolaznu lasersku zraku, ali reflektiraju zraku koja se vraća prema izvoru, čime se povećava snaga lasera. Shematski prikaz LIGO interferometra s dodatnim elementima prikazan je na Sl. 1.1. U stvarnoj izvedbi detektora, postoji još mnogo elemenata koji smanjuju šum, recikliraju signal te ga izoliraju od potresa i drugih vanjskih utjecaja.

Prema općoj teoriji relativnosti, dvije crne rupe koje orbitiraju jedna oko druge zrače gravitacijske valove. U trenutku sudara, dio njihove mase pretvara se u energiju prema formuli  $E = mc^2$ , stvarajući tzv. ”burst” gravitacijskog zračenja te je upravo takav događaj detektiran na LIGO interferometru 2016. godine. Na temelju dobivenih signala, procjenjuje se da su sudarene crne rupe bile oko 30 puta masivnije od Sunca te da se sudar dogodio prije približno 1.3 milijarde godina. Uz LIGO, poznat je i talijanski Virgo eksperiment te su planu brojni drugi.



Slika 1.1: Princip rada LIGO interferometra s označenim dijelovima. Slika preuzeta iz [6].

### 1.3 Stupnjevi slobode

Einsteinova jednađba polja (1.1) daje vezu između simetričnih  $4 \times 4$  tenzora pa ju po komponentama možemo zapisati kao 10 nezavisnih jednađbi. Bianchijev identitet

$$\nabla_{\rho} R^{\rho}_{\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R \quad (1.2)$$

smanjuje broj nezavisnih jednađbi na 6. Izborom koordinatnog sustava fiksiramo dodatna 4 stupnja slobode, tj. teorija je invarijantna na grupu svih mogućih koordinatnih transformacija oblika

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x)$$

gdje su  $x'^{\mu}$  proizvoljne glatke funkcije  $x^{\mu}$ . Uz prethodnu se transformaciju metrika mijenja kao

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x) \quad (1.3)$$

te tu simetriju nazivamo *baždarna simetrija* opće teorije relativnosti [15]. Od početnih 10, preostaju 2 stupnja slobode koja će odgovarati polarizacijama gravitacijskog vala.

### 1.4 Notacija i konvencije

U daljnjem tekstu grčki indeksi  $\mu, \nu, \dots$  označavaju komponente 4-vektora i tenzora. Latinski indeksi  $i, j, \dots$  označavaju prostorne komponente, a indeks 0 vremensku komponentu. Latinske indekse  $a, b, \dots$  koristimo za označavanje apstraktnih prostornovremenskih indeksa. Metrika Minkowskog  $\eta_{ab}$  koristi konvenciju  $(-1, 1, 1, 1)$  te koristimo jedinice u kojima je  $c = 1$ . Volumni element je dan kao  ${}^4\epsilon = \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ .

## 2 Osnovni koncepti

### 2.1 Linearizirana opća teorija relativnosti

Iako je Einsteinova opća teorija relativnosti dana naizgled jednostavnom jednačbom (1.1), pri njezinom se rješavanju pojavljuju poteškoće zato što nije linearna u metriki. U pokušaju nalaženja jednostavnijih rješenja, možemo se ograničiti na slučaj slabog gravitacijskog polja (*eng. weak-field limit*). Metriku prostorstvremena  $g_{\mu\nu}$  sada možemo zapisati kao metriku Minkowskog s malom korekcijom [7]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.1)$$

te tražiti jednačbe gibanja do prvog reda u  $h_{\mu\nu}$ . Budući da vrijednosti komponenti tenzora ovise o referentnom sustavu, uvjet  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  u biti tvrdi da postoji referentni sustav u kojem (2.1) vrijedi na dovoljno velikom dijelu prostorstvremena.

Krenemo li od (2.1) te se zadržimo na prvom redu perturbacije  $h_{\mu\nu}$ , podizanje i spuštanje indeksa radimo s metrikom Minkowskog  $\eta_{\mu\nu}$  te možemo pronaći jednačbe polja u lineariziranoj teoriji. Christoffelovi simboli su tada dani s

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) \quad (2.2)$$

Uvrštavanjem u izraze za  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  i  $R_{\mu\nu}$  (detalji u [7]), dobivamo konačan izraz za Einsteinov tenzor u lineariziranoj teoriji ( $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ )

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial_{\lambda}h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h) \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 2.2 Baždarna sloboda

Jednom kada imamo lineariziranu jednačbu polja, možemo se upustiti u traženje njezinih analitičkih rješenja. Ipak, prije toga treba komentirati baždarnu invarijantnost. Vidimo da dekompozicija (2.1) ne određuje jedinstveno referentni sustav, tj. da može postojati drugi sustav u kojem bi uvjet male perturbacije i dalje vrijedio [15]. Promotrimo transformaciju koordinata oblika

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$$

gdje su  $|\nabla_\mu \xi_\nu|$  reda  $|h_{\mu\nu}|$  kako bi uvjet male perturbacije bio zadovoljen. Koristeći transformaciju metrike (1.3) dobivamo da se  $h_{\mu\nu}$ , do prvog reda, transformira kao

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) . \quad (2.4)$$

Dakle, sporo varirajući difeomorfizmi  $\xi_\nu$  čine simetriju linearizirane teorije. Lako se pokaže da transformacija (2.4) čuva linearizirani Riemannov tenzor, tj. da je  $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$  [7]. Kako bismo dobili jednostavniji oblik lineariziranih jednadžbi polja, koristimo supstituciju [15]

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.5)$$

pa je novi trag  $\bar{h} = -h$ , a Einsteinov se tenzor (2.3) pojednostavljuje i jednadžba polja svodi na

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (2.6)$$

Koristimo baždarnu slobodu (2.4) i biramo tzv. *Lorenzovo baždarenje*

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.7)$$

To se vidi tako da relaciju (2.4) zapišemo preko  $\bar{h}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho) \equiv \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

te je onda ( $\square = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu$ )

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu .$$

Ako je početna konfiguracija polja takva da je  $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = f_\mu(x)$ , da bi zadovoljili (2.7) biramo  $\xi_\mu(x)$  tako da je  $\square \xi_\mu = f_\mu(x)$ . Ovim smo izborom dodatno pojednostavili (2.6) i ona se svodi na jednostavnu valnu jednadžbu

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (2.9)$$

Deriviramo li prethodnu relaciju, odmah vidimo da se u Lorenzovom baždarenju zakon očuvanja energije i impulsa svodi na

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

dok je u punoj općoj teoriji on dan s  $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$  [25].

### TT baždarenje

Vratimo li se ponovno na relacije vezane uz Lorenzovo baždarenje, vidimo da ni (2.7) ne određuje baždarenje u potpunosti. Naime, i dalje možemo proizvoljno odabrati  $f_\mu(x)$ . Promotrimo li jednadžbu polja (2.9) u području izvan izvora, ona se svodi na

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Primijetimo da je u ovom slučaju pogodno odabrati  $f_\mu(x) = \square \xi_\mu = 0$  jer je zbog (2.8) također  $\square \xi_{\mu\nu} = 0$  te možemo pisati

$$\square(\bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu\nu}) = 0$$

i jednostavno fiksirati četiri komponente  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . Sada možemo izabrati  $\xi^0$  tako da je trag  $\bar{h} = 0$ , tj.  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$  [15]. Preostale tri komponente  $\xi^i(x)$  biramo tako da su  $h^{0i}(x) = 0$ . Uvrštavanjem u Lorenzovo baždarenje slijedi da je  $\partial^0 h_{00} = 0$ , odnosno član  $h_{00}$  sadrži samo stacionarni dio gravitacijskog polja pa ga možemo odmah postaviti na nulu. Konačno, sve baždarne uvjete zapisujemo kao

$$h^{0\mu} = 0 \quad h^i_i = 0 \quad \partial^j h_{ij} = 0 \quad (2.12)$$

i ovakav izbor nazivamo TT baždarenje (*eng. traceless transverse gauge*). U ovom baždarenju se jedini propagirajući stupnjevi slobode (oni koji mogu opisivati gravitacijske valove) nalaze u prostornom dijelu metrike [7].

### 2.3 Gravitacijski valovi u vakuumu

Pogledajmo sada propagirajuće stupnjeve slobode u vakuumu ( $T_{\mu\nu} = 0$ ). Koristimo TT baždarenje (relacije (2.12) uz  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ ) te prepoznamo (2.11) kao standardni

zapis valne jednadžbe čija su rješenja ravni valovi

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} .$$

U prethodnoj je relaciji  $k^\sigma$  valni vektor, a  $C_{\mu\nu}$  konstantan simetričan (0, 2) tenzor čije komponente, zbog TT baždarenja, zadovoljavaju

$$C_{0\nu} = 0 , \quad \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0 , \quad k_\mu C^{\mu\nu} = 0 .$$

Uvrstimo li taj ansatz ponovno u (2.11), dobivamo

$$0 = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} = \dots = -k_\sigma k^\sigma h_{\mu\nu}^{TT}$$

odnosno  $k_\sigma k^\sigma = 0$  i valni vektor je svjetlosnog tipa. Zaključujemo da se gravitacijski valovi propagiraju brzinom svjetlosti. S obzirom na to da smo u režimu u kojem je teorija linearna, općenito rješenje (2.11) možemo zapisati kao superpoziciju ravnih valova.

Kako bismo razumjeli fizikalne posljedice prolaska gravitacijskog vala, promotrimo sustav testnih tijela u vakuumu u prisustvu gravitacijskog vala. Njihovo relativno gibanje možemo opisati tzv. jednadžbom devijacije geodezika

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma \quad (2.13)$$

gdje je  $U^\mu(x)$  polje 4-vektora brzine za zadana tijela, a  $S^\mu$  njihov vektor separacije.<sup>1</sup>

Riemannov se tenzor svodi na ( $h_{0\mu}^{TT} = 0$ )

$$R_{\mu 0 0 \sigma} = \frac{1}{2} [\partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{00}^{TT} - \partial_\sigma \partial_0 h_{\mu 0}^{TT} - \partial_\mu \partial_0 h_{0\sigma}^{TT}] = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} . \quad (2.14)$$

Pretpostavimo li da se tijela gibaju sporo, 4-brzinu možemo pisati kao jedinični vektor  $U^\nu = (1, 0, 0, 0)$  uz korekcije prvog reda u  $h_{\mu\nu}$ . Međutim, Riemannov tenzor je već reda  $\mathcal{O}(h)$  pa ćemo ovdje te korekcije zanemariti. Jednadžba (2.13) postaje

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\mu}{}_\sigma . \quad (2.15)$$

<sup>1</sup>Vektor separacije je u razlika između pripadnih geodezika, tj. možemo reći da se jedno tijelo giba po geodeziku  $x^\mu(\tau)$ , a drugo po  $x^\mu(\tau) + S^\mu(\tau)$



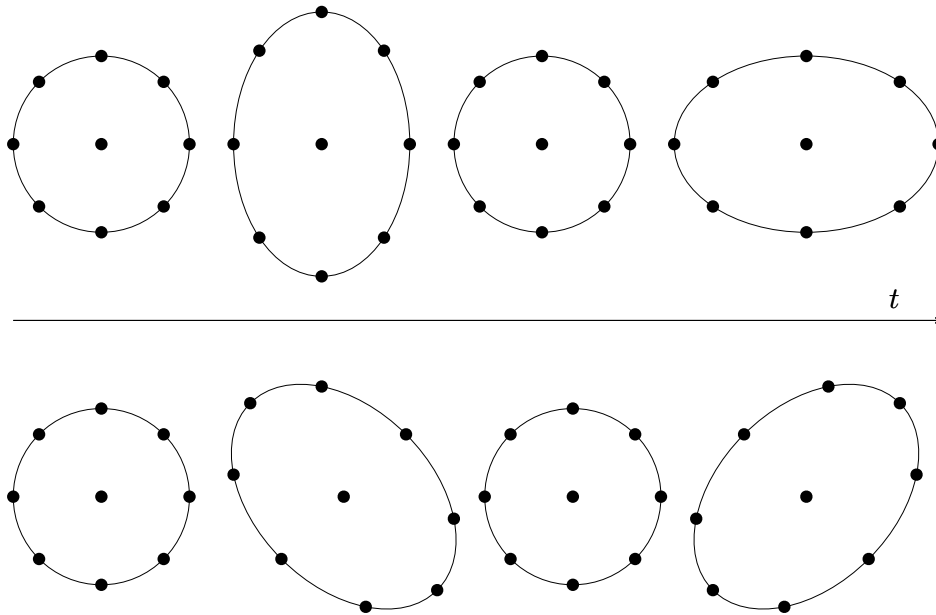
Za val koji putuje u smjeru  $x^3$ , pripadni valni vektor je  $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ . Iz uvjeta na  $C_{\mu\nu}$  dobivamo da je  $C_{3\nu} = 0$  pa je ovaj val u potpunosti određen konstantama  $C_{11}$  i  $C_{12}$  koje ćemo redom nazvati  $h_+$  i  $h_\times$ . Pogledamo li prvo slučaj  $h_\times = 0$ , jednadžba (2.15) u najnižem redu ima rješenja

$$S^1 = (1 + \frac{1}{2}h_+e^{ik_\sigma x^\sigma})S^1(0), \quad S^2 = (1 - \frac{1}{2}h_+e^{ik_\sigma x^\sigma})S^2(0).$$

S druge strane, za  $h_+ = 0$  dobivamo

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2}h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2(0), \quad S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2}h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^1(0).$$

Vidimo da su veličine  $h_+$  i  $h_\times$  mjere dva nezavisna moda linearne polarizacije gravitacijskog vala. Na slici 2.1 grafički su prikazani ovi modovi u vremenu za testna tijela inicijalno postavljena u krug.



Slika 2.1: Ilustracija prolaska gravitacijskog vala, dvije različite polarizacije.

## 2.4 Produkcija gravitacijskih valova

Ubrzo nakon postavljanja temelja opće teorije relativnosti, Albert Einstein koristi lineariziranu teoriju te izvodi poznatu "kvadrupolnu formulu" koja opisuje emisiju gravitacijskog zračenja. Nju možemo dobiti promotrimo li općenitu jednadžbu (2.9) za koju je  $T_{\mu\nu} \neq 0$ . Iako više nismo režimu TT baždarenja, promatramo gravitacij-

ske valove daleko od izvora pa ćemo moći koristiti neke aproksimacije. Još uvijek koristimo Lorenzovo baždarenje (2.7).

Općenito rješenje jednadžbe (2.9) možemo tražiti metodom Greenove funkcije. Greenova funkcija  $G(x^\sigma - y^\sigma)$  za operator  $\square$  rješava valnu jednadžbu u prisustvu točkastih izvora

$$\square G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma) . \quad (2.16)$$

Sada općenito rješenje možemo pisati kao

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y .$$

Jednadžba (2.16) ima retardirano i avansirano rješenje. Uzimamo samo retardirano i zapisujemo općenito rješenje za metriku

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}) d^3 y$$

gdje je  $t = x^0$ , a  $t_r \equiv t - |\vec{x} - \vec{y}|$  retardirano vrijeme. Prelazimo u inverzni prostor u vremenskoj koordinati

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4G \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} e^{i\omega|\vec{x} - \vec{y}|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y})$$

gdje je  $\tilde{T}$  transformiran preko retardiranog vremena. Sada koristimo pretpostavku da je izvor zračenja izoliran te da se nalazimo daleko od izvora. Drugim riječima, ako je udaljenost do izvora  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ , različiti dijelovi izvora su na udaljenostima  $r + \delta r$  tako da vrijedi  $\delta r \ll r$ . U najnižem redu možemo pisati

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3 y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y}) .$$

Izraz dodatno možemo pojednostaviti iskoristimo li Lorenzovo baždarenje koje se u inverznom prostoru svodi na  $i\omega \tilde{h}^{0\nu} = \partial_i \tilde{h}^{i\nu}$ . Vidimo da je dovoljno odrediti prostorne dijelove  $h_{\mu\nu}$ . Integral iz prethodnog izraza postaje

$$\int d^3 y \tilde{T}^{ij}(\omega, \vec{y}) = \int \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) d^3 y - \int y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) d^3 y .$$

Prvi je integral površinski pa iščezava jer je izvor izoliran. Za drugi možemo iskoristiti

zakon sačuvanja tenzora energije i impulsa u lineariziranoj teoriji (2.10) koji se u inverznom prostoru svodi na  $-\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu}$  te dobivamo (detalji u [7])

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \vec{y}) = -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3y .$$

Definiramo tenzor kvadrupolnog momenta

$$I_{ij} \equiv \int y^i y^j \tilde{T}^{00}(t, \vec{y}) d^3y \quad (2.17)$$

te konačno povratkom u realni prostor dobivamo poznatu *kvadrupolnu formulu* gdje je kao i prije  $t_r = t - r$

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt^2} . \quad (2.18)$$

### Primjer — dvojni sustav zvijezda

Promotrimo dvojni sustav zvijezda mase  $M$  na udaljenosti  $2R$  koje se nalaze u  $x$ - $y$  ravnini. Primijenimo li Newtonovu teoriju na putanje, pretpostavljamo da zvijezde orbitiraju po kružnici te da je centripetalna sila jednaka gravitacijskoj [7]

$$\frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{Mv^2}{R}$$

pa brzinu možemo pisati kao  $v = \sqrt{GM/4R}$ , a period i frekvenciju kruženja kao

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad i \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = \left( \frac{GM}{4R^3} \right)^{1/2} . \quad (2.19)$$

Gustoća energije ovakvog sustava je

$$T^{00}(t, \vec{x}) = M\delta(x^3) \left[ \delta(x - R \cos \omega_s t) \delta(y - R \sin \omega_s t) + \delta(x + R \cos \omega_s t) \delta(y + R \sin \omega_s t) \right] .$$

Pojedine komponente tenzora kvadrupolnog momenta  $I_{ij}$  računamo iz (2.17) te odmah vidimo da je  $I_{i3} = 0$ . Preostale su komponente

$$I_{11} = 2MR^2 \cos^2 \omega_s t, \quad I_{22} = 2MR^2 \sin^2 \omega_s t, \quad I_{12} = I_{21} = 2MR^2 \cos \omega_s t \sin \omega_s t$$

te konačno primjenom kvadrupolne formule 2.18 dobivamo korekciju na ravnu metriku

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{8\pi GM}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\omega_s t_r & -\sin 2\omega_s t_r & 0 \\ -\sin 2\omega_s t_r & \cos 2\omega_s t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a preostale bismo komponente  $\bar{h}_{\mu\nu}$  dobili primjenom Lorenzovog baždarenja.

Pogledajmo sada što iz ovoga možemo reći o frekvenciji i snazi gravitacijskog zračenja. Pratit ćemo primjer 3.2 iz [15] koji je nešto općenitiji od prethodnog računa jer promatra zvijezde masa  $m_1$  i  $m_2$  te cijelu kutnu ovisnost. Iz amplitude zračenja  $h_{ij}$  koju ponovno rastavljamo na dva moda  $h_{\times}$  i  $h_{+}$  možemo dobiti kutnu distribuciju snage kao

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{r^2 c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_{\times}^2 \rangle$$

što nakon usrednjavanja postaje

$$P = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left( \frac{GM_c \omega_{\text{gw}}}{2c^3} \right)^{10/3}.$$

U prethodnom smo izrazu uvrstili frekvenciju gravitacijskog zračenja kao  $\omega_{\text{gw}} = 2\omega_s$  te definirali tzv. "chirp" masu

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}.$$

Sada možemo bolje razumjeti ovaj fizikalni sustav. Budući da nismo pretpostavili nikakvu strukturu zvijezda koje orbitiraju, možemo reći da je cijela energija orbite sadržana u kinetičkoj i potencijalnoj energiji. S druge strane, sustav zrači gravitacijske valove frekvencije  $\omega_{\text{gw}}$  i pri tom gubi energiju. Jedini način kompenzacije izgubljene energije je smanjenje radijusa orbite. Može se pokazati da je energija orbite (izvod u [27])

$$E_{\text{orbit}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{Gm_1 m_2}{2R}$$

što možemo zapisati kao funkciju frekvencije  $\omega_{\text{gw}}$  uvrstimo li izraz za (2.19) za  $R$

$$E_{\text{orbit}} = -(G^2 M_c^5 \omega_{\text{gw}}^2 / 32)^{1/3}.$$

Gubitak energije zbog smanjenja orbite odgovara energiji nastalih gravitacijskih va-

lova, tj.

$$P = -dE_{\text{orbit}}/dt .$$

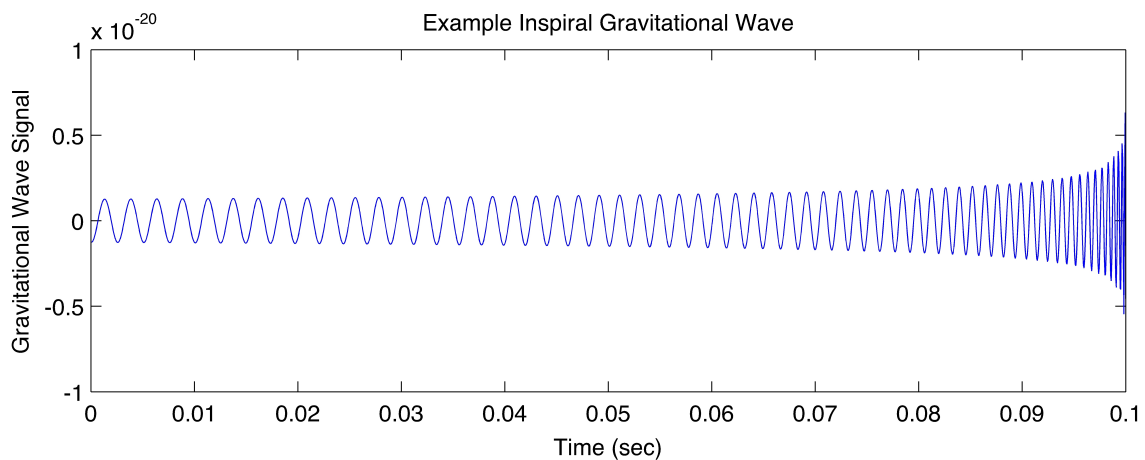
Kada sve uvrstimo (uz  $f_{\text{gw}} = \omega_{\text{gw}}/(2\pi)$ ), dobivamo jednadžbu za frekvenciju zračenja

$$\dot{f}_{\text{gw}} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{gw}}^{11/3} .$$

Konačno, možemo integrirati prethodnu jednadžbu i dobiti frekvenciju kao funkciju vremena  $\tau = t_c - t$  pri čemu je  $t_c$  kritični trenutak kada zvijezde postanu previše blizu (spajanje) i u tom trenutku frekvencija divergira

$$f_{\text{gw}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{3/8} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{-5/8} .$$

Signal koji se dobije na eksperimentu shematski je prikazan na Sl. 2.2. Vidimo da je amplituda signala jako mala te da frekvencija raste u vremenu dok se ne dogodi spajanje.



Slika 2.2: Primjer signala dobivenog od gravitacijskog vala binarnog sustava. Slika preuzeta iz [5].

Russell A. Hulse i Joseph H. Taylor 1974. godine otkrili su prvi dvojni pulsar (poznat kao PSR B1913+16) koristeći radioteleskop. Po njima se ovaj sustav neutronske zvijezde i pulsara naziva Hulse-Taylorov pulsar te su za njega dobili i Nobelovu nagradu. Neutronska zvijezda rotira oko svoje osi 17 puta u sekundi pa je period pulsa 59 milisekundi. Zvijezde se gibaju po eliptičnoj putanji oko centra mase s periodom od 7.75 sati te je objema masa jednaka oko 1.4 solarnih masa. Kako se zvijezde približavaju, orbita se smanjuje, a energija odlazi u okolinu u obliku gravitacijskog

zračenja. Trenutno najbolje mjerenje smanjenja orbite u odnosu na trenutak kad je otkrivena napravljeno je 2016. godine. Mjeri se tzv. "orbitalni raspad" (*eng. orbital decay*) koji odgovara udaljenosti dvaju orbitirajućih tijela u trenutku kada su najbliže te je dobiveno da je omjer predviđenog i izmjerenog raspada  $0.9983 \pm 0.0016$  [26]. Ovaj je izvanredan rezultat još jedna potvrda opće teorije relativnosti. Iako je gravitacijsko zračenje teško detektirati u usporedbi s elektromagnetskim, ovakvi nam sustavi u kojima su udaljenosti male te gravitacijsko privlačenje veliko to omogućuju. Za usporedbu, snaga gravitacijskog zračenja ovog sustava dvadeset je redova veličine veća od snage zračenja cijelog Sunčevog sustava.

## 2.5 Problemi linearizirane teorije

Jedna od glavnih poteškoća pri korištenju linearizirane teorije je razdvajanje parametara koji ovise o baždarenju od stvarnih stupnjeva slobode [14]. Problem možemo ilustrirati pogledamo li metriku

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 - \cos(x-t)(2 + \cos(x-t))dt^2 + 2\cos(x-t)(1 + \cos(x-t)) + dt dx - \cos^2(x-t)dx^2$$

koja na prvi pogled nalikuje standardnoj dekompoziciji (2.1). Međutim, napravimo li koordinatnu transformaciju  $\tilde{t} \equiv t + \sin(t-x)$  dobivamo

$$g = -d\tilde{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

tj. vidimo da je metrika ravna i da ne sadrži gravitacijske valove. Zbog ovih je poteškoća i sam Einstein posumnjao u stvarno postojanje gravitacijskih valova te je 1936. godine, zajedno s kolegom N. Rosenom, pokušao objaviti članak o njihovom nepostojanju. Jedno od prvih rješenja ovog problema ponudio je Andrzej Trautman u svoja dva članka [23,24] u kojima pokazuje kako se u kontekstu prostornovremenske geometrije može definirati energija koju nose gravitacijski valovi te će o tome biti nešto više govora u kasnijim poglavljima.

## 3 Energija i masa u općoj teoriji relativnosti

### Izolirani sustavi

Izolirani sustav u općoj teoriji relativnosti možemo kinematički tretirati analogno čestici u specijalnoj teoriji relativnosti [25]. Svakoj je čestici pridružen četveroimpuls  $P^a$ , a energija joj je definirana kao vremenska komponenta četveroimpulsa. Iskoristimo li Killingov vektor vremenske translacije  $\xi^a = (1, 0, 0, 0)$ , energiju čestice možemo pisati kao  $E = -P_a \xi^a$ , a njezinu masu dobivamo kao  $M = \sqrt{-P_a P^a}$ . Sve ove relacije primjenjujemo i na izolirane sustave u OTR-u te vidimo da će za stacionarni sustav vrijediti jednakost energije i mase, tj.  $E = M$ .

### 3.1 Energija i masa materije

Promotrimo slučaj ravnog prostorvremena Minkowskog  $(\mathcal{M}, \eta_{\mu\nu})$  u odsustvu gravitacijskog polja [12]. U tom je slučaju prostorvrijeme invarijantno na kontinuirane vremenske translacije što možemo opisati Killingovim vektorom  $\xi^\mu$ . Prema Noetherinom teoremu, odgovarajuća očuvana struja je tenzor energije i impulsa  $T_{\mu\nu}$  s pripadnim zakonom sačuvanja  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . Zadamo li prostornu hiperplohu<sup>2</sup>  $\Sigma$  s vektorom normale  $n^\mu$ , za domenu  $D \subset \Sigma$  možemo, ponovno prema Noetherinom teoremu, definirati očuvani naboj

$$Q_D[k^\mu] = \int_D T_{\nu\rho} \xi^\rho n^\nu \sqrt{\gamma} d^3x .$$

U prethodnom je izrazu  $\gamma_{\mu\nu}$  inducirana metrika na hiperplohi  $\Sigma$  ( $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ ) pri čemu je  $\gamma = \det \gamma$ , a  $\sqrt{\gamma} d^3x$  odgovarajući inducirani volumni element. Veličina  $Q_D$  očuvana je u smislu da njezin iznos ne ovisi o izboru hiperplohe  $\Sigma$  [25]. Ovakvim postupkom možemo definirati očuvane veličine vezane uz infinitezimalne generatore translacija  $\mathcal{T}_\alpha^\mu$ , rotacija  $\mathcal{J}_i^\mu$  i potisaka  $\mathcal{K}_i^\mu$ . Uz translacije vežemo četveroimpuls  $P_\alpha[D]$ , a uz rotacije kutnu količinu gibanja  $J_i[D]$  pa definiramo

$$P_\alpha[D] = \int_D T_{\mu\nu} \mathcal{T}_\alpha^\nu n^\mu \sqrt{\gamma} d^3x , \quad J_i[D] = \int_D T_{\mu\nu} \mathcal{J}_i^\nu n^\mu \sqrt{\gamma} d^3x .$$

---

<sup>2</sup>Detalji o hiperplohamu u dodatku A

Sada možemo definirati masu na domeni  $D \subset \Sigma$

$$m^2[D] \equiv -\eta^{\alpha\beta} P_\alpha[D] P_\beta[D].$$

Uključimo li gravitaciju u razmatranje, materija postaje izvorom gravitacijskog polja, a zakon očuvanja tenzora energije i impulsa poprima nešto kompliciraniji oblik,  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . Ako i dalje postoji simetrija na vremenske translacije (opisana Killingovim vektorom  $\xi^\mu$ ), možemo upotrijebiti prethodnu strategiju pri definiciji fizikalnih veličina tako da sve parcijalne derivacije zamijenimo kovarijantnima. S druge strane, u potpuno općenitom prostoru vremenu bez pretpostavljene simetrije ne možemo koristiti prethodne relacije te postaje netrivialno definirati masu i energiju. Još uvijek možemo definirati veličinu  $Q_D[\zeta^\mu]$  za neki proizvoljni vektor  $\zeta^\mu$ , ali će ona sada ovisiti o izboru hiperplohe  $\Sigma$ , tj. neće odgovarati očuvanom naboju [12]. Drugim riječima, u potpuno općenitom slučaju na ovaj način možemo definirati energiju, ali samo u odnosu na nekog promatrača.

### 3.2 *Nelokalni karakter energije gravitacijskog polja*

Pokušamo li iskoristiti strategiju iz prethodnog odjeljka te definirati masu i energiju gravitacijskog polja u točki, ubrzo ćemo se susreti s nekoliko konceptualnih poteškoća. Problemi oko definicije mase u općoj teoriji relativnosti dolaze od toga što se energija i količina gibanja ne mogu jedinstveno lokalizirati [16]. To možemo razumjeti prisjetimo li se Einsteinovog principa ekvivalencije koji tvrdi da je uvijek moguće pronaći referentni sustav u kojem će sva lokalna gravitacijska polja, tj. svi Christoffelovi simboli, iščezavati. Zamislimo točkastu česticu u slobodnom padu. Zbog principa ekvivalencije, ne možemo znati giba li se ona pod utjecajem vanjskog gravitacijskog polja ili se samo nalazimo u akceleriranom referentnom sustavu. Ipak, znamo da gravitacijsko vezanje daje doprinos energiji sustava. Zato je npr. masa neutronske zvijezde manja od mase svih pojedinačnih neutrona na beskonačnim udaljenostima.

Sve informacije o energiji i masi materije sadržane su u tenzoru energije i impulsa  $T_{\mu\nu}$ . Zakon sačuvanja,  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , može se interpretirati kao lokalno sačuvanje energije materije, ali on ne implicira globalno sačuvanje energije zato što nedostaje doprinos gravitacijskog polja [25]. Taj je doprinos energiji vezanja skriven u Einste-



inovom tenzoru  $G_{\mu\nu}$  te to možemo bolje razumjeti razdvojimo li Einsteinov tenzor na dva doprinosa koristeći tzv. Belinfante-Rosenfeldov postupak [3].

$$G^{\mu\nu} \equiv -8\pi t^{\mu\nu} + \frac{1}{2\sqrt{-g}} H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} .$$

U prethodnom je izrazu doprinos materije izražen preko superpotencijala  $H^{\mu\alpha\nu\beta}$  [8] koji je funkcija  $\bar{h}^{\mu\nu}$  i  $\eta_{\mu\nu}$  kao u (2.3) (uz (2.5)). Dakle, izdvojili smo linearne doprinose, a pseudotenzor  $t_{\mu\nu}$  energije i impulsa gravitacijskog polja sadržava nelinearne korekcije. Einsteinova jednadžba postaje

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta} = 16\pi\sqrt{-g}(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}) = 16\pi T_{\text{eff}}^{\mu\nu} . \quad (3.1)$$

Ovakvim smo postupkom energiju i impuls razdvojili na dva doprinosa. Jedan je doprinos materije sadržan u  $T^{\mu\nu}$ , a drugi dolazi od energije gravitacijskog polja. Budući da pseudotenzor energije i impulsa  $t^{\mu\nu}$  te superpotencijal  $H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\alpha\beta}$  nisu tenzori, nemaju dobro definiranu vrijednost u točki prostorvremena.<sup>3</sup> Posljedično, postojat će neodređenost pri lokalnoj definiciji energije gravitacijskog polja  $t^{00}$ .

Uzevši sve u obzir, možemo zaključiti da nije moguće jednostavno definirati masu i energiju gravitacijskog polja kao lokalne veličine. Neki čak tvrde da takva veličina ni ne postoji zato što se energija gravitacijskog polja niti ne može lokalizirati [16]. Možemo stoga razmotriti energiju i impuls gravitacijskog polja kao veličine koje su intrinzično zadane samo na proširenim domenama prostorvremena te pogledati slučajeve u kojima se one mogu rigorozno definirati. Vidjet ćemo da, iako ne možemo definirati lokalnu gustoću energije gravitacijskog polja, možemo definirati ukupnu energiju izoliranih sustava [25]. Postoje razni pokušaji definicija ovih veličina te svi zahtijevaju postojanje dodatne strukture na prostorvremenu. U ovom je poglavlju dan pregled različitih definicije mase i energije za asimptotski ravno prostorvrijeme. Pogledat ćemo slučaj stacionarnog i nestacionarnog asimptotski ravnog prostorvremena te alternativne definicije proizašle iz Hamiltonijanske formulacije opće teorije relativnosti.

---

<sup>3</sup>Drugim riječima, u zadanoj točki prostorvremena  $t^{\mu\nu}$  može iščezavati u jednom koordinatnom sustavu, a u drugome ne. Dakle, da bi definirali ove veličine, moramo dodati dodatnu strukturu na prostorvrijeme.

### 3.3 Stacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme

U potpoglavlju 3.1 pokazali smo poteškoće pri definiciji energije u točki za potpuno općeniti slučaj. Smanjimo li općenitost te pretpostavimo dodatnu strukturu na prostorvremenu, možemo dobiti zadovoljavajuće definicije. Jedan od načina je zahtjev postojanja simetrije određene Killingovim vektorom  $\xi^a$ . U ovom ćemo potpoglavlju pratiti izvod iz [25] (pog. 11.2). Krećemo od stacionarnog, asimptotski ravnog prostorvremena te mu pridružujemo Killingov vektor  $\xi^a$  normaliziran na tzv. "faktor crvenog pomaka"  $V \equiv \sqrt{-\xi_a \xi^a}$ . Promatrač koji "miruje" prati orbitu Killingovog vektora  $\xi^a$ . Drugim riječima, njegova je 4-brzina  $U^\mu$  proporcionalna Killingovom vektoru translacije [7]

$$\xi^\mu = V(x)U^\mu .$$

Primijetimo da će  $V$  biti nula na Killingovom horizontu<sup>4</sup>, a težiti u jedinicu u beskonačnosti. Nazivamo ga faktorom crvenog pomaka jer će foton valne duljine  $\lambda_A$  koji emitira mirujući promatrač  $A$  promatrač  $B$  (također mirujući) vidjeti kao foton valne duljine

$$\lambda_B = \frac{V_B}{V_A} \lambda_A$$

gdje su  $V_A$  i  $V_B$  pripadni faktori crvenog pomaka. Sada možemo 4-akceleraciju ( $a^\mu = U^\sigma \nabla_\sigma U^\mu$ ) mirujućeg promatrača pisati kao

$$a^b = (\xi^a/V) \nabla_a (\xi^b/V) = \frac{1}{V^2} \xi^a \nabla_a \xi^b . \quad (3.2)$$

Ova je akceleracija proporcionalna sili koju bi trebalo primijeniti na jediničnu masu kako bi ju zadržali na mjestu.

Prostorvrijeme u stacionarnom, asimptotski ravnom slučaju možemo podijeliti na hiperplohe  $\Sigma$  određene Killingovim vektorom  $\xi^a$  (detalji u dodatku A). Zamislimo sada da su svi izvori gravitacijskog polja obuhvaćeni 2-plohom  $\mathcal{S}$  uronjenom u hiperplohu  $\Sigma$ . Neka je normala plohe  $\mathcal{S}$  označena s  $\hat{N}$  i okomita na Killingov vektor  $\xi^a$  te pogledajmo promatrača u beskonačnosti. Naivno bismo za akceleraciju mogli primijeniti relaciju (3.2), međutim, ovako je dana akceleracija ispravna samo za promatrača koji lokalno djeluje na masu. Sada ćemo pokazati da se za promatrača u beskonačnosti, sila se razlikuje za faktor  $V$ .

<sup>4</sup>Killingov horizont je hiperploha na kojoj Killingov vektor iščezava.

Zamislamo da promatrač u beskonačnosti drži masu na mjestu uz pomoć duge bezmasene niti. Obavljeni rad,  $dW_\infty$ , možemo izraziti kao umnožak sile i infinitezimalnog pomaka  $dW_\infty = F_\infty ds$ . Masa u lokalnom sustavu osjeća silu  $F$  te je izvršeni rad dan kao  $dW = F ds$ . Sada vidimo da se sile za promatrača u beskonačnosti i lokalnog promatrača odnose kao  $F_\infty = F \frac{dW_\infty}{dW}$ . Vezu između dva infinitezimalna rada dobivamo preko zakona očuvanja energije. Ako je sav rad  $dW$  pretvoren u elektromagnetsko zračenje, pripadna energija u beskonačnosti dobiva faktor crvenog pomaka  $dE = V dW$ . Po zakonu sačuvanja, primljena energija jednaka je uloženom radu  $dW_\infty$  pa slijedi  $F_\infty = VF$ .

Uzevši sve u obzir, možemo zapisati izraz za ukupnu silu kojom promatrač u beskonačnosti mora djelovati na raspodjelu mase kako bi ju zadržao na mjestu

$$F = \int_S N^b (\xi^a / V) \nabla_a \xi_b dA .$$

Kako bi još pojednostavili ovaj izraz, koristimo Killingovu jednadžbu<sup>5</sup> te pišemo

$$F = \frac{1}{2} \int_S N^{ab} \nabla_a \xi_b dA = -\frac{1}{2} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \quad (3.3)$$

gdje koristimo pokratu  $N^{ab} \equiv 2V^{-1} \xi^{[a} N^{b]}$ . Volumni element cijelog prostorvremena je  $\epsilon_{abcd} = -6N_{[ab} \epsilon_{cd]}$  pri čemu je  $\epsilon_{cd}$  volumni element na integracijskoj 2-plohi  $S$ . Ako podintegralnu funkciju zapišemo kao 2-formu  $\alpha_{ab} = \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d$ , može se pokazati (detalji u [25]) da u vakuumu vrijedi  $d\alpha = 0$ . Dakle, integral po plohi  $S$  iz prethodne relacije ne ovisi o izboru  $S$  dokle god promjenom plohe ne obuhvaćamo novu materiju. Također,  $F$  je po definiciji koordinatno neovisna veličina<sup>6</sup> te nije određena izborom  $\Sigma$ . Izvod relacije (3.3) proizlazi iz pretpostavke da je  $\xi^a$  Killingovo polje pa je pretpostavka simetrije bila ključna pri ovom izvodu. Sada možemo definirati masu izoliranog sustava. Prisjetimo li se Newtonove gravitacije, masu gravitacijskog polja  $\phi$  definirali smo kao

$$M = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \phi \cdot \hat{n} dA ,$$

---

<sup>5</sup> $\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$

<sup>6</sup>U zadnjoj se jednakosti izraza (3.3) pojavljuju apstraktni indeksi koji nestaju integracijom po 2-plohi (dodatak A) pa je jedinična sila  $F$  skalar.

tj. vidimo da  $4\pi M$  odgovara ukupnoj sili. Po analogiji definiramo

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{S}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \quad (3.4)$$

i to je Komarova masa. Primijetimo da je upravo ona očuvana veličina koju po Noetherinom teoremu vežemo uz vremensku invarijantnost.

Sada možemo i formalnije iskazati zakon sačuvanja Komarove mase [12]. Promotrimo novu 2-plohu  $\mathcal{S}'$  takvu da je  $\mathcal{S}$  je sadržana u  $\mathcal{S}'$  ili obratno. Neka je  $\mathcal{V}$  dio prostora u  $\Sigma$  sadržan između  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{S}'$ . Veličina  $M$  je sačuvana, tj. ne ovisi o izboru 2-plohe  $\mathcal{S}$  dok god tenzor energije i impulsa iščezava u području  $\mathcal{V}$  što vidimo iz relacije

$$M[\mathcal{S}] = 2 \int_{\mathcal{V}} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) n^\mu k^\nu \sqrt{\gamma} d^3x + M[\mathcal{S}'] .$$

Komarova se masa može generalizirati za nestacionarna polja koja su barem asimptotski simetrična na vremenske translacije.

### **Komarova kutna količina gibanja**

Vidjeli smo da je Komarova masa sačuvana Noetherina veličina za vremenske translacije. Naravno, ovu definiciju možemo proširiti i na druge očuvane veličine. Osnosimetrično prostorstvrijeme imat će pripadni Killingov vektor  $\phi^a$ . Po uzoru na relaciju (3.4) definiramo Komarovu kutnu količinu gibanja [12]

$$J_K = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{S}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \phi^d$$

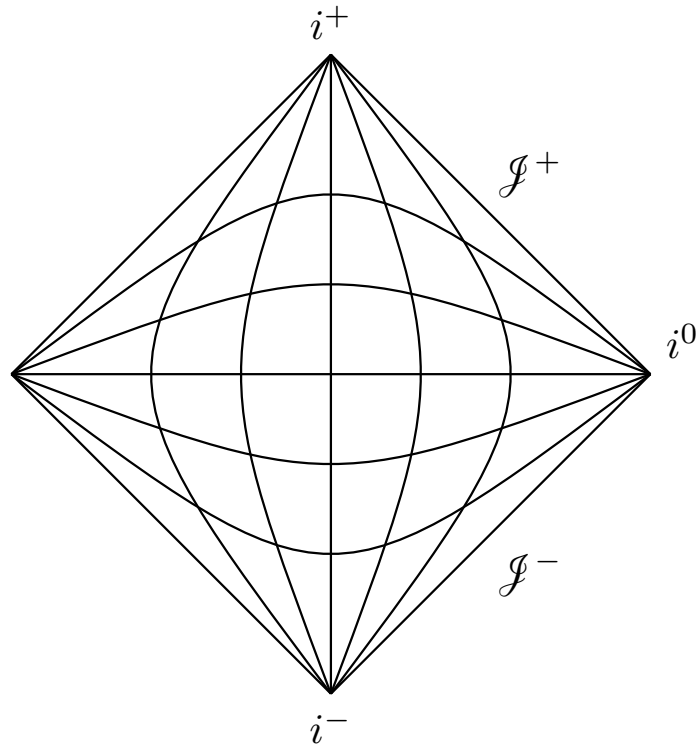
gdje je prema konvenciji odabran pozitivan predznak. Također primijetimo da je dodan faktor  $1/2$  poznat kao "Komarov anomalni faktor", detalji o tome su dani u [13].

### ***Digresija: Penrose-Carterovi dijagrami***

Zamislimo da želimo vizualizirati unutrašnjost kugle, primjerice Zemlje. Budući da raspoložemo s dvije dimenzije, možemo pojednostaviti prikaz tako da nacrtamo samo poprečni presjek. Pretpostavimo li sfernu simetriju, možemo dodatno smanjiti broj dimenzija koje vizualiziramo prikazom dužine čija svaka točka reprezentira sferu

određenog radijusa. Slično razmišljanje možemo primijeniti i u općoj teoriji relativnosti prilikom vizualizacije četverodimenzionalnog prostorvremena. Takve vizualizacije poznate su kao Penrose-Carterovi dijagrami.

Dijagram za ravno prostorvrijeme prikazan je na slici 3.1. Na  $x$ -osi je prostorna dimenzija, a na  $y$ -osi vremenska kao i za Minkowski dijagrame. Pretpostavili smo sfernu simetrije te svaka točka reprezentira 2-sferu. Za razliku od Minkowski dijagrama, sada su koordinate iskrivljene da bi se prikazalo cijelo prostorvrijeme. Točke  $i^+$  i  $i^-$  označavaju vremensku beskonačnost, a točka  $i^0$  prostornu beskonačnost. Svjetlosne krivulje i dalje su prikazane dijagonalama pod kutem od  $45^\circ$  te završavaju u svjetlosnoj beskonačnosti označenoj s  $\mathcal{I}^+$ .



Slika 3.1: Penrose-Carterov dijagram ravnog prostorvremena na kojem svaka točka predstavlja 2-sferu. Označene su vremenske beskonačnosti  $i^+$  i  $i^-$ , prostorna beskonačnost  $i^0$  te svjetlosne beskonačnosti  $\mathcal{I}^+$  i  $\mathcal{I}^-$ .

### 3.4 Nestacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme

U asimptotski ravnom prostorvremenu, vektor  $\xi^a$  asimptotski se približava Killingovom vektoru. Pokušamo li ponovno upotrijebiti Komarovu relaciju za masu (3.4), primijetit ćemo da integral sada ovisi o izboru plohe  $\mathcal{S}$  što ne dalje zadovoljavajuću definiciju. Međutim, uzmemo li limes u beskonačnosti, možemo tvrditi da vektor  $\xi^a$

postaje Killingov vektor te da možemo ponoviti postupak za stacionarno prostorvrijeme. Prirodno je pogledati dva tipa limesa [25]:

(1) *Prostorna beskonačnost*. Ukupna energija za zadani trenutak u vremenu definirana je integralom u prostornoj beskonačnosti.

(2) *Svjetlosna beskonačnost*. Ukupna energija definirana je za zadano "retardirano vrijeme" u svjetlosnoj beskonačnosti. To će nam omogućiti proučavanje energije koju odnose gravitacijski valovi.

Za slučaj (2) očekujemo oblik energije kao u (3.4) (analogno za slučaj (1))

$$E = - \lim_{\mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}} \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_\alpha} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d \quad (3.5)$$

gdje je  $\mathcal{S}_\alpha$  jednoparametarska familija 2-plohi. Može se pokazati da limes u prethodnoj relaciji postoji neovisno o načinu na koji se plohe  $\mathcal{S}_\alpha$  približavaju  $\mathcal{S}$  [10]. Ovdje je  $\mathcal{S}$  2-ploha koja reprezentira presjek u svjetlosnoj beskonačnosti  $\mathcal{I}^+$ . Problem ove definicije je da energija  $E$  nije invarijantna na izbor vektora  $\xi^a$  unutar klase ekvivalencije koju daje BMS grupa<sup>7</sup>, tj. energija nije baždarno invarijantna veličina. Ova se poteškoća može zaobići zahtjevom iščezavanja divergencije  $\xi^a$  u okolini  $\mathcal{I}^+$  odnosno

$$\nabla_a \xi^a = 0 .$$

Sada definicija (3.5) postaje zadovoljavajuća i ovu energiju nazivamo Bondijeva energija. Promjena energije u vremenu može se izraziti kao razlika energija za dvije odabrane 2-plohe  $\mathcal{S}_1$  i  $\mathcal{S}_2$ . Ta se energija može zapisati kao integral funkcije  $f$  po području  $\mathcal{V}$  između  $\mathcal{S}_1$  i  $\mathcal{S}_2$ , tj. možemo pisati

$$E[\mathcal{S}_1] - E[\mathcal{S}_2] = - \int_{\mathcal{V}} f .$$

Funkciju  $f$  interpretiramo kao tok energije koji nose gravitacijski valovi. Također je pokazano da uvijek vrijedi  $f \geq 0$ , tj. energija koju nose gravitacijski valovi je uvijek pozitivna [17].

---

<sup>7</sup>Dva vektora,  $\xi^a$  i  $\xi'^a$ , generiraju istu infinitezimalnu asimptotsku simetriju ako im se poklapaju produžetci u svjetlosnoj beskonačnosti  $\mathcal{I}^+$ . Klasa ekvivalencije takvih vektora generira Bondi-Metzner-Sachs (BMS) grupu koja je univerzalna i ista za svako asimptotski ravno prostorvrijeme [12].

### 3.5 Hamiltonijanski pristup — ADM definicije

Sada možemo pogledati definicije energije koje proizlaze iz hamiltonijanskog pristupa općoj teoriji relativnosti ukratko opisanog u dodatku B. Ponovno ćemo kao dodatnu strukturu na prostorvrijeme nametnuti asimptotsku ravnost, ali je, prije samih definicija, potrebno napraviti digresiju o 3+1 dekompoziciji prostorvremena te navesti relevantne tehničke detalje.

#### 3+1 dekompozicija prostorvremena

Promotrimo globalno hiperbolično prostorvrijeme  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ . Na ovakvom se prostorvremenu može izabrati globalna funkcija vremena  $f$  takva da je svaka ploha konstantne funkcije  $f$  Cauchyjevog tipa<sup>8</sup>. Dakle, moguće je napraviti folijaciju  $\mathcal{M}$  takvu da joj topologija bude  $\mathbb{R} \times \Sigma$  gdje  $\Sigma$  označava odgovarajuće nastale hiperplohe [25]. Detalji o hiperplohama su u dodatku A.

Za naše potrebe, nazovimo funkciju  $f \equiv t$ , a pripadnu folijaciju  $\{\Sigma_t\}$ . Neka je  $n^\alpha$  polje normala na hiperplohe  $\Sigma_t$ . Inducirana metrika  $\gamma_{\alpha\beta}$  na svakoj hiperplohi  $\Sigma_t$  dana je s [25]

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta .$$

Promotrimo sada vektorsko polje  $t^\alpha$  na  $\mathcal{M}$  koje zadovoljava  $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$ . Želimo rastaviti polje na tangencijalni i okomiti dio u odnosu na  $\Sigma_t$  pa definiramo funkciju toka (eng. *lapse function*)  $N$

$$N = -t^\alpha n_\alpha = (n^\alpha \nabla_\alpha t)^{-1} \quad (3.6)$$

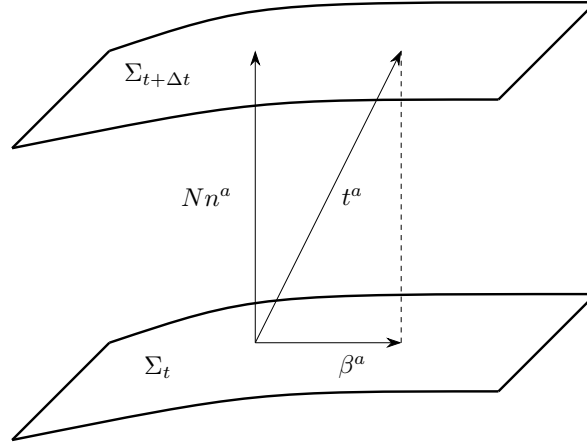
te vektor pomaka (eng. *shift vector*)  $\beta_\alpha$

$$\beta_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} t^\beta . \quad (3.7)$$

Funkcija toka mjeri brzinu protjecanja vlastitog vremena u odnosu na koordinatno vrijeme dok vektor pomaka određuje pomak tangencijalan na hiperplohu  $\Sigma_t$  (Slika 3.2).

Sada se možemo vratiti na definiciju energije. Za asimptotski ravan slučaj, sustav koji promatramo je izoliran i prostorvrijeme u beskonačnosti odgovara prostorvremenu Minkowskog. Kao i ranije, potrebno je preciznije odrediti pojam beskonačnosti

<sup>8</sup>Definicija Cauchyjevih ploha i globalnog hiperboličnog prostorvremena dana je u dodatku C.



Slika 3.2: Na slici su prikazane dvije hiperplohe  $\Sigma_t$  i  $\Sigma_{t+\Delta t}$ . Normala na hiperplohu  $\Sigma_t$  označena je s  $n^a$ . Funkcija toka  $N$  i vektor pomaka  $\beta^a$  određeni su normalom i vektorom vremenske evolucije  $t^a$ .

jer ona može biti prostornog ili svjetlosnog tipa.

Ukupnu ćemo energiju dobiti iz Hamiltonove formulacije opće teorije relativnosti koja je ukratko opisana u dodatku B, a detaljnije u [25]. Primijetimo da je Lagrangeova formulacija kovarijantna dok je za Hamiltonovu formulaciju nužno napraviti 3+1 dekompoziciju prostorvremena čime smo smanjili općenitost, tj. nametnuli dodatnu strukturu na prostorvrijeme. 3+1 dekompozicija pretpostavlja razdvajanje prostorvremena na tri prostorne i jednu vremensku komponentu, a matematički ovu dekompoziciju možemo pisati kao

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)$$

gdje je  $N$  funkcija toka, a  $\beta^i$  vektor pomaka kao i ranije. I ovdje jasno vidimo da funkcija toka opisuje vremensku evoluciju hiperplohi  $\Sigma_t$ , a vektor pomaka određuje prostornu promjenu koordinata pri čemu je  $\gamma_{ij}$  inducirana metrika na hiperplohama  $\Sigma_t$ . Asimptotsku ravnost preciznije definiramo tako da zahtijevamo postojanje pozadinske metrike  $f_{ij}$  koja je ravna osim eventualno na kompaktnoj domeni  $D \subset \Sigma$  te za koju u beskonačnosti ( $r \rightarrow \infty$ ) vrijedi

$$\gamma_{ij} = f_{ij} + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k} = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (3.8)$$

$$K_{ij} = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_k} = \mathcal{O}(r^{-3}). \quad (3.9)$$

Dalje se referiramo na Hamiltonijansku formulaciju iz dodatka B. Domena integra-



cije za akciju omeđena je dvjema prostornim hiperplohama  $\Sigma_{t_1}$  i  $\Sigma_{t_2}$  te vanjskom vremenskom hiperplohom  $\mathcal{B}$ . Primjenom Gaussovog i Stokesovog teorema, integrali se svode na integrale po presjecima  $\mathcal{S}_t \equiv \mathcal{B} \cap \Sigma_t$ . Krećemo od konačnog izraza za ukupni hamiltonijan  $H$  kao u [12]<sup>9</sup>

$$H = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{S}_t} [N(H - H_0) - \beta^i (K_{ij} - K\gamma_{ij})s^j] \sqrt{q} d^2x \quad (3.10)$$

gdje  $H$  je trag vanjske zakrivljenosti 2-plohe  $\mathcal{S}_t$  uronjene u  $(\Sigma_t, \gamma_{ij})$ , a  $H_0$  odgovarajući trag za  $(\Sigma_t, f_{ij})$ . Inducirana metrika na 2-plohi  $\mathcal{S}_t$  dana je kao  $q_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - s_\mu s_\nu$  pri čemu je  $s^\mu$  normala na  $\mathcal{S}_t$  koja je ujedno i tangenti vektor hiperplohe  $\Sigma_t$  ( $n^\mu s_\mu = 0$ ). Dakle, integracijski volumni element je dan kao u (A.1), tj.  ${}^2\epsilon = \sqrt{q} dx^1 \wedge dx^2$ .

Biramo funkciju toka  $N$  te vektor pomaka  $\beta^i$  tako da je vektor vremenske evolucije  $t^\mu$  vezan uz asimptotski intercijalnog promatrača, tj. biramo  $N = 1$  i  $\beta^i = 0$  u prostornoj beskonačnosti. Sačuvanu veličinu možemo interpretirati kao energiju i zovemo ju ADM energija prema autorima (Arnowitt, Deser i Misner) koji su originalno uveli ovaj pristup u [1]. Kada to uvrstimo u prethodni izraz, dobivamo

$$E_{ADM} \equiv -\frac{1}{8\pi} \lim_{t,r \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{S}_t} (H - H_0) \sqrt{q} d^2x. \quad (3.11)$$

ADM energija predstavlja ukupnu energiju sadržanu u hiperplohi  $\Sigma_t$  i ona je, za stacionarno prostorvrijeme, sačuvana po Noetherinom teoremu. Masa je izračunata kao duljina 4-vektora energije i impulsa te ju zamišljamo kao "masu sustava mjerenu u beskonačnosti".

Uvrstimo li u (3.11) eksplicitne izraze za vanjsku zakrivljenost te upotrijebimo Kartezijske koordinate kao u (3.8), dobivamo standarni izraz za ADM energiju

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \lim_{t,r \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{S}_t} \left( \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{jj}}{\partial x^i} \right) s^i \sqrt{q} d^2x. \quad (3.12)$$

Vidimo da smo u izrazima za asimptotsku ravnost koristili oblik iz linearizirane teorije

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

te ovdje možemo poistovijetiti  $h_{\mu\nu}$  sa  $\gamma_{\mu\nu}$ . Ipak, treba imati na umu da je jedini

---

<sup>9</sup>Ukupni hamiltonijan izražen je preko funkcije toka i vektora pomaka kao u (B.4) samo je pri izvodu ove relacije praćen nešto drugačiji izvod dan u [18].

zahtjev asimptotske ravnosti da je  $h_{\mu\nu}$  mali u beskonačnosti, ali ne nužno i svugdje. Može se pokazati da ako dodamo pretpostavku stacionarnosti (tj. kažemo da je  $h_{\mu\nu}$  vremenski neovisan u beskonačnosti), slijedi da je ADM energija jednaka Komarovoj. Ovaj dokaz nije trivijaln, a detalji se mogu naći u [2].

ADM energija vezana je uz simetriju na vremenske translacije dok ADM impuls vežemo uz simetriju na prostorne translacije. Prostorne translacije opisane su vektorima  $\partial_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) što odgovara izboru funkcije toka  $N = 0$  te vektora pomaka  $\beta_{\partial_j}^i = \delta_j^i$ . Ponovno koristimo izraz za hamiltonijan (3.10) te definiramo očuvanu veličinu za infinitezimalne prostorne translacije

$$P_i = \frac{1}{8\pi} \lim_{(t,r \rightarrow \infty)} \oint_{S_t} (K_{ik} - K \gamma_{ik}) s^k \sqrt{q} d^2x .$$

Sada možemo definirati i ukupan četveroimpuls kao

$$P_\mu^{ADM} = (-E_{ADM}, P_1, P_2, P_3)$$

te ADM masu.<sup>10</sup>

$$M_{ADM} = \sqrt{E_{ADM}^2 - P_i P^i} .$$

Trautman-Bondi-Sachs energiju možemo definirati na sličan način kao i ADM energiju samo ovoga puta promatramo limes u svjetlosnoj beskonačnosti. Uvodimo nove koordinate  $u = t - r$  i  $v = t + r$  (retardirano i avansirano vrijeme) te gledamo limes

$$E_{BS} \equiv -\frac{1}{8\pi} \lim_{(u,v \rightarrow \infty)} \oint_{S_u} (H - H_0) \sqrt{q} d^2x . \quad (3.13)$$

ADM mjeri svu energiju sadržanu u prostorvremenu, dok Bondijeva energija isključuje energiju koju su odnijeli gravitacijski valovi.

### 3.6 Teoremi o pozitivnosti

Pitanje pozitivnosti gustoća mase i energije od iznimne je važnosti zbog zakona očuvanja te konzistentnosti opće teorije relativnosti. Kada ne bi postojala donja granica na energiju, tada ni jedan izolirani sustav ne bi bio u potpunosti stabilan te bi uvijek postojala mogućnost prelaska u stanje niže ukupne energije. Shoen i Yau

<sup>10</sup>U literaturi se nekad poistovjećuju ADM energija i ADM masa, ali ovdje koristimo ovakvu definiciju.

su prvi 1981. godine dokazali teorem o pozitivnosti ADM energije [19]. Teorem tvrdi da je ADM energija nesingularnog, asimptotski ravnog prostorvremena koje je rješenje Einsteinove jednačbe te zadovoljava dominantni energetski uvjet uvijek nenegativna. Nadalje, jedino prostorvrijeme čija ADM energija egzaktno iščezava je prostorvrijeme Minkowskog [7]. Poznat je i Wittenov značajno jednostavniji dokaz koji koristi spinorsko polje kako bi izrazio energiju kao integral strogo nenegativne veličine [28].

## 4 Primjeri

### 4.1 Schwarzschildova crna rupa

Kao što je spomenuto u uvodu, Einsteinova jednažba (1.1) daje vezu geometrije prostorvremena i distribucije materije u njemu. Jednažbu je izrazito teško riješiti te analitička rješenja postoje samo za vrlo jednostavne sustave. Prvo je takvo rješenje ponudio Karl Schwarzschild 1916. godine. Riješio je sustav jednažbi pod pretpostavkama stacionarnosti i sferne simetrije te dobio metriku sa singularitetom u ishodištu i na horizontu. Singularitet u ishodištu objasnio je kao crnu rupu mase  $M$  te se ona po njemu zove Schwarzschildova crna rupa, a cijela je metrika dana kao

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Pokušajmo izračunati energiju ovakvog prostorvremena koristeći Komarov pristup. Krećemo od Komarovog integrala definiranog relacijom (3.4) te ga želimo prvo zapisati u primjenjivijoj formi. Integraciju vršimo po plohi  $\mathcal{S}$  čiji je volumni element dan kao (dodatak A)<sup>11</sup>

$$d\mathcal{S}_{\mu\nu} = (s_\mu n_\nu - s_\nu n_\mu) \sqrt{q} dx^2$$

pri čemu je  $s_\mu$  normala 2-plohe  $\mathcal{S}$ , a  $n_\mu$  normala hiperplohe  $\Sigma$ . Metrika 2-plohe  $\mathcal{S}$ ,  $q_{\mu\nu}$  sadržana je u kutnoj dijelu Schwarzschildove metrike te odmah vidimo da je  $\sqrt{q} = r^2 \sin\theta$ . Izraz za Komarovu energiju sada možemo eksplicitnije pisati u ovoj notaciji

$$E = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{S}} dx^2 \sqrt{q} (s_\mu n_\nu - s_\nu n_\mu) \nabla^\mu \xi^\nu.$$

Iskoristimo li Killinovu jednažbu, možemo pojednostaviti podintegralni izraz

$$(s_\mu n_\nu - s_\nu n_\mu) \nabla^\mu \xi^\nu = -2n_\mu s_\nu \nabla^\mu \xi^\nu$$

te dobivamo jednostavniju formulu za Komarovu energiju

$$E = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{S}} dx^2 \sqrt{q} n_\mu s_\nu \nabla^\mu \xi^\nu.$$

---

<sup>11</sup>Ovaj volumni element odgovara  $\epsilon_{abcd}$  iz (3.4) samo su dva dodatna indeksa skrivena u  $dx^2$ .

Vidimo da je integral površinskog tipa (po plohi u beskonačnosti) čime smo izbjegli probleme pri tretiranju singulariteta u  $r = 0$  koji se pojavljuje u Schwarzschildovom prostorvremenu. Jedine komponente vektora normale  $n^\mu$  i  $s^\mu$  različite od nula su

$$n_0 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2}, \quad s_1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2}.$$

Računamo podintegralni izraz za Komarovu energiju pri čemu uzimamo da je Killingov vektor  $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} n_\mu s_\nu \nabla^\mu \xi^\nu &= \nabla^0 \xi^1 = g^{00} \nabla_0 \xi^1 = g^{00} (\partial_0 \xi^1 + \Gamma_{0\lambda}^1 \xi^\lambda) \\ &= g^{00} \Gamma_{00}^1 \xi^0 = \frac{GM}{r^2} \end{aligned}$$

gdje smo upotrijebili rezultat za Christoffelov simbol iz [7]. Konačno, rješavamo Komarov integral

$$E = \frac{1}{4\pi G} \int d\theta d\phi r^2 \sin \theta \left( \frac{GM}{r^2} \right) = M$$

te smo reproducirali rezultat za masu Schwarzschildove crne rupe. Primijetimo da se radi o stacionarnom slučaju te da masa sustava odgovara njegovoj energiji.

Kao i ranije, Komarovu kutnu količinu gibanja dobivamo analogno (uz anomalni faktor 1/2 te negativan predznak)

$$J = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}} n_\mu s_\nu \nabla^\mu R^\nu$$

pri čemu je  $R^\nu = (\partial_\phi)^\nu$  Killingov vektor rotacije. Budući da su za Schwarzschildovo prostorvrijeme jedine komponente različite od nule  $n_0$  i  $s_1$ , a Killingov vektor ima samo komponentu  $R^3$ , odmah se vidi da je

$$n_\mu s_\nu \nabla^\mu R^\nu = 0 \rightarrow J = 0,$$

tj. Schwarzschildova crna rupa ne rotira.

## 4.2 Schwarzschildova crna rupa s akrecijskim diskom

Poznato je da su crne rupe u svemiru okružene značajnom količinom materije i plina koja ima tendenciju formiranja tzv. akrecijskog diska. Ovi su svemirski objekti od

značajne astrofizičke važnosti jer su temelj za aktualne modele aktivnih galaktičkih jezgra, dvojnih sustava, supernovi i sl. Analitički modeli akrecijskih diskova vrlo su ograničeni pa se najčešće zadržavamo na pretpostavkama stacionarnosti, aksijalne simetrije te testne prirode tvari. Posljednja pretpostavka oslanja se na činjenicu da, u sustavu crne rupe s akrecijskim diskom, masa i gravitacijsko polje nose većinski doprinos [9]. Budući da je doprinos crne rupe za sfernu simetriju u potpunosti radijalan, doprinos akrecijskog diska gravitacijskom polju odrazit će se u tangencijalnoj komponenti polja. Ovo će za značajnu masu utjecati na orbite po kojima se materija giba i tu u razmatranje ulaze efekti višeg reda poput samosile (eng. "self-gravitation"). Dodatno, opća je teorija relativnosti nelinearna pa rješenja ne možemo dobiti jednostavnom superpozicijom. U ovom ćemo pojednostavljenom primjeru promotriti tanak sporo rotirajući disk koji simetrično okružuje Schwarzschildovu crnu rupu. Vidjet ćemo da je čak i za ovako jednostavan sustav račun izrazito tehnički zahtjevan pa je primarni cilj ovog potpoglavlja dati generalnu ideju o primjeni ovakvih računa te prikazati glavne rezultate.

Pretpostavimo li da materija prati kružne orbite, možemo koristiti metriku tzv. "kružnog" prostorvremena

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + B^2 r^2 e^{-2\nu} \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\zeta - 2\nu} (dr^2 + r^2 d\theta^2) .$$

gdje su  $t$  i  $\phi$  koordinate koje odgovaraju Killingovim vektorima  $\xi_t$  i  $\xi_\phi$ , a  $r$  i  $\theta$  određuju "meridijalne" ravnine. Koristimo Weylove cilindrične koordinate  $(t, \rho, \phi, z)$  koje su dane kao

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

pa metrika postaje

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + B^2 \rho^2 e^{-2\nu} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\zeta - 2\nu} (d\rho^2 + dz^2) . \quad (4.2)$$

Weylova metrika opisuje klasu rješenja Einsteinove jednadžbe sa svojstvom sacionarnosti i aksijalne simetrije. Nepoznate funkcije,  $B$ ,  $\nu$ ,  $\omega$  i  $\zeta$ , funkcije su isključivo koordinata  $\rho$  i  $z$ . One su zadane Einsteinovim jednadžbama pa je npr. jednadžba koja određuje  $B$

$$B_{,\rho\rho} + \frac{2B_{,\rho}}{\rho} + B_{,zz} = 8\pi B(T_{\rho\rho} + T_{zz}) .$$

Preostale nezavisne jednadžbe dane su relacijama<sup>12</sup>

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (B\nabla\nu) - \frac{B^3\rho^2}{2e^{4\nu}}(\nabla\omega)^2 &= 4\pi B e^{2\zeta-2\nu} \left( T_\phi^\phi - 2\omega T_\phi^t - T_t^t \right), \\ \nabla \cdot (B^3\rho^2 e^{-4\nu}\nabla\omega) &= -16\pi B e^{2\zeta-2\nu} T_\phi^t, \\ \zeta_{,\rho}\mu_{,\rho} - \zeta_{,z}\mu_{,z} &= -\mu[(\nu_{,\rho})^2 - (\nu_{,z})^2] - \frac{1}{2}[\mu_{,\rho\rho} - \mu_{,zz}] + \frac{1}{4}\mu^3 e^{-4\nu}[(\omega_{,\rho})^2 - (\omega_{,z})^2], \\ \zeta_{,\rho}\mu_{,z} + \zeta_{,z}\mu_{,\rho} &= -2\mu\nu_{,\rho}\nu_{,z} - \mu_{,\rho z} + \frac{1}{2}\mu^3 e^{-4\nu}\omega_{,\rho}\omega_{,z}.\end{aligned}$$

U jednadžbe su uključeni i odgovarajući rubni uvjeti — asimptotska ravnost u beskonačnosti te regularnost na horizontu. U Schwarzschildovom prostorvremenu u kojem je crna rupa mase  $M$  u ishodištu, a svugdje ostalo vakuum, pogodno je odabrati

$$B = 1 - \frac{M^2}{4(\rho^2 + z^2)} = 1 - \frac{M^2}{4r^2}.$$

Mi ćemo u ovom primjeru odabrati  $B = 1$  što odgovara horizontu na  $\rho = 0$ . U statičnom slučaju kada je  $\omega = 0$ , prva se jednadžba svodi na Poissonovu

$$\nabla^2\nu = 4\pi e^{2\zeta-2\nu}(T_\phi^\phi - T_t^t).$$

Sada se funkcija  $\nu$  ponaša kao Newtonov potencijal i rješenja možemo dobiti superpozicijom [20].

Naravno, superpozicija općenito ne vrijedi jer su jednadžbe vezane i nelinearne. U potpuno općenitom slučaju u kojem je  $w \neq 0$  sustav se značajno komplicira. Jedan od analitičkih pristupa je perturbativni račun u kontekstu multipolnog razvoja koji je primijenio Will 1974. godine te dobio Greenove funkcije za  $\nu$  i  $\omega$ . Sustav koji je promatrao je Schwarzschildova crna rupa okružena tankim sporo rotirajućim prstenom. Problem njegovih rješenja je što sporo konvergiraju pa su nestabilna pri numeričkoj evaluaciji. Kasnije su Semerak i Čížek poopćili Willovo rješenje na sustav crne rupe okružene akrecijskim diskom te pokazali (detalji u [21] i [9]) da se Willove Greenove funkcije mogu zapisati u zatvorenoj formi preko eliptičkih integrala što je značajno pogodnije za numeričke račune.

Pretpostavili smo da materija diska prati kružne orbite kutnom brzinom  $\Omega =$

---

<sup>12</sup>koristimo pokratu  $B\rho \equiv \mu$

$d\phi/dt$ . To za ovaj izbor metrike odgovara 4-brzini [9]

$$u^\alpha = \frac{\eta^\alpha + \Omega \xi^\alpha}{|\eta^\alpha + \Omega \xi^\alpha|} = u^t(1, 0, 0, \Omega), \quad u_\alpha = -u^t e^{2\nu} \delta_\alpha^t + u^t B \rho \nu(-\omega, 0, 0, 1)$$

pri čemu je

$$(u^t)^2 = \frac{e^{-2\nu}}{1 - B^2 \rho^2 e^{-4\nu} (\Omega - \omega)^2} = \frac{e^{-2\nu}}{1 - v^2}, \quad v \equiv B \rho e^{-2\nu} (\Omega - \omega) = \sqrt{g_{\phi\phi}} e^{-\nu} (\Omega - \omega).$$

U našem se primjeru disk nalazi u  $z = 0$  ravnini te se proteže u intervalu radijusa  $r_{in} \leq r \leq r_{out}$ . Možemo definirati tenzor površinske gustoće energije  $S_\beta^\alpha$  kao

$$S_\beta^\alpha(\rho) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} T_\beta^\alpha g_{zz} dz = \int_{z=0^-}^{z=0^+} T_\beta^\alpha e^{2\zeta - 2\nu} dz.$$

Za tanak disk ( $T_z^z = T_z^\rho = 0$ ) koji nema radijalni tlak ( $T_\rho^\rho = 0$ ), jedine neišcezavajuće komponente će biti  $S_t^t$ ,  $S_\phi^t$  i  $S_\phi^\phi$ . Njih možemo izraziti preko funkcije površinske gustoće  $\sigma$  te azimutalnog tlaka u sugibajućem sustavu  $P$

$$S_t^t = -\sigma - (\sigma + P)u^\phi u_\phi, \quad S_\phi^t = (\sigma + P)u^t u_\phi, \quad S_\phi^\phi = P + (\sigma + P)u^\phi u_\phi.$$

Sada se ovi izrazi mogu vratiti u Einsteinove jednačbe te primijeniti perturbativni pristup. Ideja iza perturbativnog pristupa je razviti u red funkcije  $\nu$ ,  $\omega$  i  $\zeta$  po bezdimenzionalnom parametru  $\lambda$

$$\nu = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j \lambda^j, \quad \omega = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \lambda^j, \quad \zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j \lambda^j$$

pri čemu će koeficijenti  $\nu_j$ ,  $\omega_j$  i  $\zeta_j$  biti funkcije koordinata  $\rho$  i  $z$ , a parametar  $\lambda$  je proporcionalan omjernu masa diska i crne rupe. Glavni rezultat autora u [9] je zapis ovakvih razvoja u zatvorenoj formi preko eliptičkih integrala što omogućuje njihovu numeričku evaluaciju.

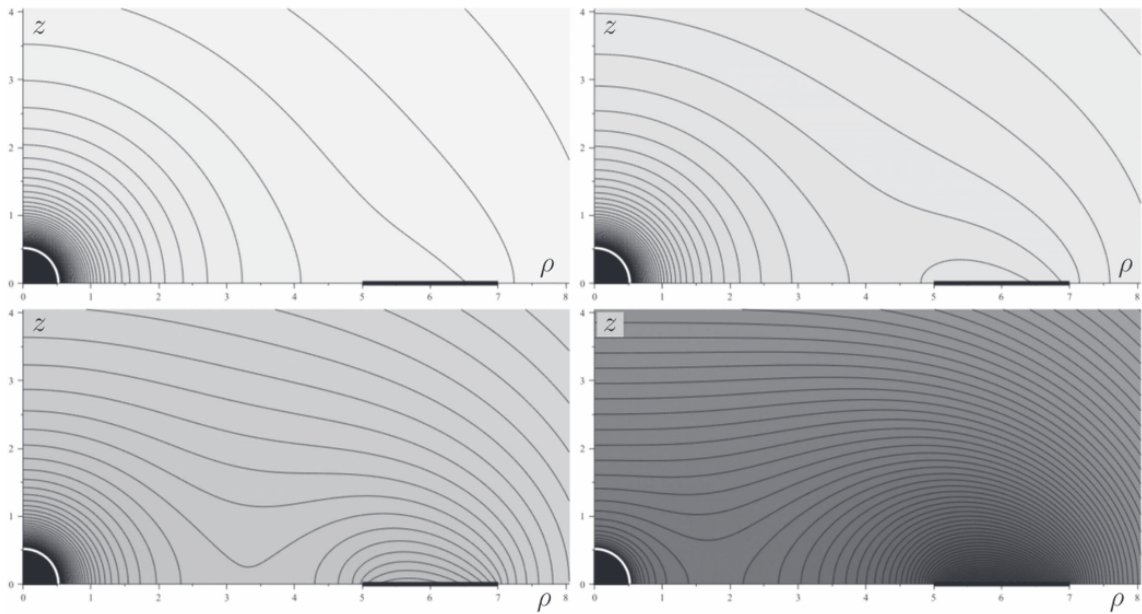
Jednom kada smo pronašli metiku i tenzor energije i impulsa, ukupna masa i kutna količina gibanja mogu se naći računanjem Komarovih integrala određenim Killingovim vektorima  $\xi_t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$  i  $\xi_\phi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}$ . U nastavku su prikazani samo konačni rezultati za masu i kutnu količinu gibanja u perturbativnom režimu za linearan doprinos, a cijeli je postupak opisan u [9]. Sustav koji promatramo je tanki disk uniformne



površinske gustoće  $S$ . Promotrimo li ponašanje potencijala  $\nu$  (preciznije, linearnog člana u razvoju  $\nu_1$ ), vidjet ćemo da u beskonačnosti potencijal diska opada kao

$$\nu_1(r \rightarrow \infty) \propto -\frac{\pi S}{r} \left[ r_{out}^2 - r_{in}^2 - \frac{M^2}{16} \left( \frac{1}{r_{in}^2} - \frac{1}{r_{out}^2} \right) \right].$$

Dakle, u linearnom se režimu potencijal sastoji od pozadinskog Schwarzschildovog doprinosa  $\nu_0$  te prve korekcije od tankog diska  $\nu_1$ . Na slici 4.1 pokazani su numerički rezultati za funkciju potencijala za četiri različite površinske gustoće  $S$ . Disk je u  $z = 0$  ravnini te u intervalu radijusa od  $\rho_- = 5M$  do  $\rho_+ = 7M$  kao što je označeno na slici. Vidi se da je perturbacija polja značajnija za veću površinsku gustoću materije  $S$  što odgovara masivnijem disku. Potencijal je svugdje negativan, a svjetlija i tamnija područja označavaju dubinu potencijala. Potencijal divergira u  $-\infty$  na horizontu crne rupe koji je označen bijelim dijelom kružnice u donjem lijevom kutu. Obje su osi dane u jedinicama mase crne rupe  $M$ .



Slika 4.1: Presjek funkcije gravitacijskog potencijala  $\nu$  u  $\rho$ - $z$  ravnini za četiri različite površinske gustoće  $S$ . (gore- lijevo)  $S = 0.01$ , (gore desno)  $S = 0.026$ , (dolje lijevo)  $S = 0.1$ , (dolje desno)  $S = 0.1$  [9].

Integrali za Komarove veličine se razdvajaju na doprinos crne rupe (mase  $M$  i kutne količine gibanja  $J$ ) te doprinos diska (integrali se vrše po hiperplohamu  $\Sigma$

izvan crne rupe te na horizontu  $H$ )

$$\begin{aligned}
\text{masa} &= \frac{1}{8\pi} \lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S \xi_t^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \lim_{S \rightarrow \infty} \oint_H \xi_t^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} - \int_{\Sigma > H} (2T_\nu^\mu \xi_t^\nu - T \xi_t^\mu) d\Sigma_\mu \\
&= M + \int_{\Sigma > H} (T_i^i - T_t^t) \sqrt{-g} d^3x, \\
\text{k. kol. gibanja} &= -\frac{1}{16\pi} \lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S \xi_\phi^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \oint_H \xi_\phi^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Sigma > H} (2T_\nu^\mu \xi_\phi^\nu - T \xi_\phi^\mu) d\Sigma_\mu = J + \int_{\Sigma > H} T_\phi^t \sqrt{-g} d^3x.
\end{aligned}$$

Biramo  $B = 1$  te upotrebljavamo raniju relaciju za tenzor energije i impusa izražen preko vektora površinske gustoće energije. Nakon tehničkog postupka, masu i kutnu količinu gibanja diska možemo izraziti kao

$$\mathcal{M} = \int_{\text{disk}} \left( \nu_{,z} - \frac{1}{2} \rho e^{-4\nu} \omega \omega_{,z} \right), \quad \mathcal{J} = -\frac{1}{4} \int_{\text{disk}} \rho^3 e^{-4\nu} \omega_{,z} d\rho$$

te kada iz [9] uzmemo konačne izraze za  $\nu$  i  $\omega$  do prvog reda u perturbaciji dobivamo konačan izraz za masu diska  $\mathcal{M}$  i njegovu kutnu količinu gibanja  $\mathcal{J}$

$$\mathcal{M} = \pi S \left[ r_{out}^2 - r_{in}^2 - \frac{M^4}{16} \left( \frac{1}{r_{in}^2} - \frac{1}{r_{out}^2} \right) \right], \quad \mathcal{J} = \frac{WM^2}{8} \left[ r_{out} - r_{in} - \frac{M^2}{4} \left( \frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{r_{out}} \right) \right]$$

gdje je ponovno  $S$  površinska gustoća, a  $W$  "gustoća rotacije" te su obje konstante u ovom primjeru. Horizont rotira kutnom brzinom različitom od nule [21]

$$\omega_H = \frac{W}{8} \frac{(r_{out} - r_{in})(r_{out} + r_{in} + 2)}{(r_{out} + 1)^2 (r_{in} + 1)^2}$$

što znači da rotirajući akrecijski disk povlači za sobom crnu rupu.

### 4.3 Gravitacijsko zračenje idealnog fluida

U astrofizici često protežna tijela poput zvijezda modeliramo idealnim fluidom. Jedna od glavnih poteškoća pri konstrukciji takvih primjera u OTR-u je naći rješenja koja obuhvaćaju gravitacijska i hidrodinamička svojstva fluida. U ovom ćemo primjeru pokušati prikazati jednostavan model prašine iz [11] te ćemo, kao i autori, hidrodinamičke efekte ostaviti po strani. Pretpostavimo da se nalazimo u režimu asimptotske

ravnosti i osne simetrije te promotrimo familiju metrika

$$ds^2 = (Vr^{-2}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma})du^2 + 2e^{2\beta}dudr + 2Ur^2e^{2\gamma}dud\theta - r^2(e^{2\gamma}d\theta^2 + e^{-2\gamma}\sin^2\theta d\phi^2).$$

Ovdje su  $V$ ,  $\beta$ ,  $U$  i  $\gamma$  nepoznate funkcije koordinata  $x^\mu = (u, r, \theta, \phi)$  gdje je vremenska koordinata dana kao  $t = u + r$ . Zbog asimptotske ravnosti dobivamo da kao posljedica rubnih uvjeta vrijedi (kada  $r \rightarrow \infty$ )

$$V = r + \mathcal{O}(r^3), \quad \beta = \mathcal{O}(r^2), \quad U = \mathcal{O}(r), \quad \gamma = \mathcal{O}(r^2).$$

Neka je izvor zračenja idealan fluid tlaka  $p$  i gustoće  $\rho$  čiji je tenzor energije i impulsa

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)w_\mu w_\nu - pg_{\mu\nu},$$

a 4-brzina  $w_\mu$  normirana s  $w_\mu w^\mu = -1$ . Zbog osne simetrije je  $w_3 = 0$ , komponente  $w_1$  i  $w_2$  su zadane početnim uvjetima, a  $w_0$  onda možemo odrediti iz normiranja. U daljnjem ćemo tekstu velikim tiskanim slovima označavati indekse 2 i 3 pa ćemo npr. umjesto  $w_2$ ,  $w_3$  pisati  $w_A$ .

Definiramo li tenzor  $H_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu}$ , Einsteinove jednadžbe se mogu rastaviti na jednadžbe hiperplohe konstantnog  $u$  ( $H_{1\nu} = 0$ ), gravitacijske evolucijske jednadžbe ( $H_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}g^{CD}H_{CD} = 0$ ) te jednadžbe evolucije materije ( $H_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} \equiv 8\pi T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$ ) pri čemu je dokaz dan u [11]. Jednadžbe hiperplohe su ograničenje na svjetlosne hiperplohe konstantnog  $u$ . Zapisujemo ih eksplicitno

$$R_{11} = -8\pi(\rho + p)w_1w_1, \tag{4.3}$$

$$R_{12} = -8\pi(\rho + p)w_1w_2, \tag{4.4}$$

$$g^{AB}R_{AB} = 8\pi[\rho - p + r^{-2}(\rho + p)e^{-2r}(w_2)^2] \tag{4.5}$$

gdje su komponente Riccijevog tenzora zapisane preko funkcija metrike dane kao

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}rR_{11} &= \beta_{,1} - \frac{1}{2}r(\gamma_{,1})^2, \\
-2r^2R_{12} &= [r^4e^{2(\gamma-\beta)}U_{,1}]_{,1} - 2r^2[r^2(r^{-2}\beta)_{,12} - \sin^{-2}\theta(\sin^2\theta\gamma)_{,12} + 2\gamma_{,1}\gamma_{,2}] \\
-r^2e^{2\beta}g^{AB}R_{AB} &= 2V_{,1} + \frac{1}{2}r^4e^{2(\gamma-\beta)}(U_{,1})^2 - (r^2\sin\theta)^{-1}(\sin\theta r^4U)_{,12} \\
&\quad + 2e^{2(\beta-\gamma)}[-1 + (\sin\theta)^{-1}(\sin\theta\beta_{,2})_{,2} - \gamma_{,22} - 3\gamma_{,2}\cot\theta \\
&\quad + (\beta_{,2})^2 + 2\gamma_{,2}(\gamma_{,2} - \beta_{,2})].
\end{aligned}$$

Na ovaj smo način postavili sustav u formi problema početnih uvjeta (eng. *"initial value formulation"*). Drugim riječima, ako je na početnoj svjetlosnoj hiperplohi zadana gustoća fluida  $\rho$  s pripadnom jednađbom stanja  $p(\rho)$  te ako su zadani  $w_1$ ,  $w_2$  i funkcija  $\gamma$ , moguće je iz jednađbi hiperplohe odrediti funkcije  $\beta$ ,  $U$  i  $V$  te dodatno  $w_0$  iz normiranja. Potom dobivene funkcije uvrštavamo u jednađbe evolucije te dobivamo vremenske derivacije  $\gamma_{,0}$ ,  $\rho_{,0}$ ,  $w_{1,0}$  i  $w_{2,0}$  koje pak jednoznačno određuju evoluciju do iduće hiperplohe. Ovakvom postupnom integracijom možemo odrediti metriku u asimptotskoj beskonačnosti, a ranije smo vidjeli da su upravo tamo dane ispravne definicije energije.

Pogledamo li detaljno jednađbe (4.3)-(4.5), primijetit ćemo da se u njima pojavljuju samo derivacije po  $u$  i  $\theta$ . Kada se provede cijela prethodno opisana integracija, sustav je definiran do na pet integracijskih funkcija  $H(u, \theta)$ ,  $K(u, \theta)$ ,  $L(u, \theta)$ ,  $M(u, \theta)$  i  $c(u, \theta)$  što je detaljno opisano u trećem poglavlju [4]. Jednađbe za  $\beta$ ,  $U$  i  $V$  postaju

$$\beta = H - c^2/(4r^2) + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.6)$$

$$U = L + e^{2(H-K)}H_{,2}/r - [c\sin^2\theta e^{2(H-K)}]_{,2}/(r^2\sin^2\theta) + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
V = r^2(L\sin\theta)_{,2}/\sin\theta + re^{2(H-K)}[1 + 2(H_{,2}\sin\theta)_{,2}/\sin\theta + 4(H_{,2})^2 - 4H_{,2}K_{,2} \\
- 2(K_{,2})^2 + K_{,2} + 2K_{,2}\cot\theta] - 2e^{2H}M + \mathcal{O}(r^{-1}).
\end{aligned} \quad (4.8)$$

Primijetimo da je u relaciji (4.8) sadržava funkcija  $M(u, \theta)$  koja će se kasnije pojaviti u Bondijevoj definiciji energije. Kako bi izvrijednili veličine u asimptotskoj beskonačnosti, korisno je prijeći na konformalno prostorvrijeme u kojem je metrika dana kao

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2$$

pri čemu je  $\Omega = 1/r$ . Rub u konformalnoj slici je svjetlosna beskonačnost  $\mathcal{I}^+$  s tangentnim vektorom  $n^\mu$  (Sl. 3.1) te metriku sada možemo pisati pomoću novih funkcija  $L$ ,  $K$  i  $H$  kao

$$d\tilde{s}^2 = -L^2 e^{2K} du^2 - 2e^{2H} dudl + 2Le^{2K} dud\theta - e^{2K} d\theta^2 - e^{-2K} \sin^2 \theta d\phi^2$$

pri čemu smo odabrali novu radijalnu koordinatu  $l = 1/r$ . Ova se slika razlikuje od standardne Bondijeve konformalne slike opisane u [4] u kojoj funkcije  $L$ ,  $K$  i  $H$  iščezavaju. Za definiciju Bondije energije trebaju nam još generatori simetrija BMS grupe  $\xi_\mu$  koji su ovdje dani kao

$$\xi^\mu = \frac{e^{-2H}}{e^K \sin \theta_B} \sin \theta$$

gdje je

$$\frac{d\theta_B}{\sin \theta_B} = \frac{e^{2K}(d\theta - Ldu)}{\sin \theta}.$$

Sada možemo definirati Bondijev moment (uz pokratu  $B^{\mu\nu} \equiv w^{[\mu} r^{;\nu]} / w^{;\alpha} r_{;\alpha}$ )

$$P = \frac{1}{4\pi} \oint (\xi^{[\nu;\mu]} - \xi^\rho{}_{;\rho} B^{\mu\nu}) dS_{\mu\nu}$$

koji se u Bondijevoj slici svodi na ukupnu energiju  $E$ . Integral ćemo izvrijedniti u  $r \rightarrow \infty$  koristeći asimptotski oblik za funkcije metrike dan u (4.6)-(4.8).

Konačno, želimo dodatno pojednostaviti primjer te upotrijebiti prethodni formalizam. Neka je  $\gamma = 0$  te neka je sustav materija koja je inicijalno u mirovanju, tj.  $w_1 = 1, w_A = 0$ . Jednadžbe za  $\beta$ ,  $U$ , i  $V$  poprimaju nešto jednostavniji oblik

$$\begin{aligned} \beta &= 2\pi \int_0^r \rho r dr, \\ U &= 2 \int_0^r dr r^{-4} e^{2\beta} \int_0^r s^4 (s^{-2} \beta_{,2})_{,s} ds \\ V &= \int_0^r dr \left[ -4\pi r^2 e^{2\beta} \rho - e^{2\beta} [-1 + \beta_{,2} \cot \theta + \beta_{,22} + (\beta_{,2})^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} r^4 e^{-2\beta} (U_{,1})^2 + (2 \sin \theta)^{-1} [r^{-2} \sin \theta (r^4 U)_{,1}]_{,2} \right], \end{aligned}$$

a Bondijeva se energija reducira na

$$E = (4\pi)^{-1} \oint M(u, \theta) \sin \theta d\theta d\phi .$$

Neka je prašina početno raspoređena u sfernoj ljusci, tj. neka je gustoća je dana s

$$\rho = \begin{cases} 0, & r < R, \\ k/(8\pi r), & R \leq r \leq \lambda(\theta)R, \\ 0, & r > \lambda(\theta)R. \end{cases}$$

U funkciji  $\lambda(\theta)$  sadržana je netrivialna kutna ovisnost koja je nužna da bi postojalo gravitacijsko zračenje, a gustoća materije određena je konstantnom  $k$ . Rješavanjem sustava dobivamo funkcije  $U$ ,  $V$  i  $\beta$ , ali ovdje ćemo promotriti samo dobiveni izraz za funkciju  $M$

$$M = \lambda R [1 + H_{,22} + H_{,2} \cot \theta + \frac{2}{3}(H_{,2})^2] + \lambda_{,2} H_{,2} R + (2/k)(e^{-2H} - 1) - R e^{-2H}$$

pri čemu je  $H = kR(\lambda - 1)/4$ . Sada možemo odrediti Bondijevu energiju

$$E = (4\pi)^{-1} \oint [\lambda R [1 + \frac{2}{3}(H_{,2})^2] + e^{-2H}(2/k - R) - (2/k)] \sin \theta d\theta d\phi .$$

U limesu male gustoće kada  $k \rightarrow 0$ , Bondijeva energija postaje

$$E = \frac{1}{8} k R^2 \int_0^\pi (\lambda^2 - 1) \sin \theta d\theta - \frac{1}{48} k^2 R^3 \int_0^\pi [(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) - \lambda(\lambda_{,2})^2] \sin \theta d\theta + \mathcal{O}(k^3) .$$

Ovo možemo usporediti s Newtonovim modelom za prašinu koja zadovoljava jednadžbu  $\partial^2 \Phi = 4\pi \rho$ . Energija se sastoji se od inercijalne mase koja odgovara prvom Bondijevom članu

$$m = \oint \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{1}{8} k R^2 \int_0^\pi (\lambda^2 - 1) \sin \theta d\theta$$

te od energije vezanja

$$B = \frac{1}{2} \int \rho \Phi r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi .$$

Energiju vezanja u Newtonovom slučaju nije moguće analitički integrirati zbog kutne ovisnosti  $\lambda(\theta)$ , ali vidimo da se gubitci energije zbog gravitacijskog zračenja dobivaju u redu  $\mathcal{O}(k^2)$  i u višim redovima.

## 5 Zaključak

Gravitacijski su valovi aktualna tema u suvremenoj astrofizici i teorijskoj fizici. Njihovo je prvo eksperimentalno otkriće 2015. godine (kolaboracija LIGO) donijelo potvrdu Einsteinovih predviđanja te otvorilo nove smjerove u proučavanju astrofizičkih pojava. Za detekciju gravitacijskih valova, najzanimljivije su pojave s izraženim dinamičkim svojstvima poput spajanja crnih rupa ili neutronske zvijezde. Za razliku od elektromagnetskog spektra iz kojeg dobivamo informaciju o obliku, temperaturi i sl., gravitacijski spektar nosi informacije o interakcijama sustava koji gube energiju zračenjem. Cilj ovog rada je dati pregled definicija energije i mase gravitacijskih sustava, s posebnim naglaskom na izazove koje postavlja Einsteinova opća teorija relativnosti te nelinearna priroda Einsteinovih jednadžbi polja.

U uvodnim poglavljima rada opisani su teorijski tretmani gravitacijskih valova u slučaju slabog gravitacijskog polja (tzv. *weak-field limit*). Proučena je linearizirana Einsteinova teorija koja zbog svoje linearnosti omogućuje dobivanje rješenja superpozicijom. Uz adekvatan izbor baždarenja, moguće je pokazati da su rješenja linearizirane vakuumske Einsteinove jednadžbe gravitacijski valovi s dva polarizacijska moda. Osim toga, izvedena je i kvadrupolna formula koja povezuje perturbacije metričkog tenzora s energijom i impulsom emitiranih valova, čime se omogućuje procjena snage zračenja.

Gravitacijske sustave često želimo opisati globalnim parametrima poput mase i kutne količine gibanja. Opća teorija relativnosti, kroz Einsteinov princip ekvivalencije, na problem definicije mase nameće fundamentalno ograničenje — nemogućnost lokalne definicije jakosti gravitacijskog polja. Ipak, poznato je da je moguće napraviti smislene definicije pretpostavimo li postojanje dodatne strukture na prostoru vremenu poput simetrije ili asimptotske ravnosti. Stoga smo u trećem poglavlju promotrili različite definicije mase i energije za asimptotski ravno prostorvrijeme. Obraden je Komarov pristup koji se oslanja na Noetherin teorem i simetrije u sustavu te ADM pristup koji proizlazi iz Hamiltonijanske formulacije opće teorije relativnosti.

Konačno, prikazana su dva primjera konkretnih izračuna mase i kutne količine gibanja uz pomoć Komarovih integrala te jedan primjer s gravitacijskim zračenjem. Prvo je analizirano Schwarzschildovo prostorvrijeme, klasičan primjer statičnog sferno simetričnog rješenja Einsteinovih jednadžbi. Zatim je istražena Schwarzschildova

crna rupa s tankim rotirajućim akrecijskim diskom uz pretpostavke stacionarnosti i aksijalne simetrije čime smo obuhvatili i nešto fizikalniji sustav. Naposljetku, dan je primjer gravitacijskog zračenja idealnog fluida te je izračunata Bondijeva energija ovakvog sustava. Ovi primjeri pokazuju da su teorijski tretmani gravitacijskih sustava izrazito tehničke prirode te da često za evaluaciju zahtijevaju numeričke metode. Razumijevanje ovih sustava ključan je korak prema potpunijem shvaćanju temelja gravitacijske fizike, a budući razvoj tehnologije omogućit će sve preciznija predviđanja te validaciju teorijskih pristupa.



# Dodaci

## Dodatak A Hiperplohe

U četverodimenzionalnom prostoru vremenu, hiperploha je trodimenzionalna podmanogostrukost  $\Sigma$  koja može biti zadana restrikcijom na koordinate  $\Phi(x^\alpha) = 0$  ili parametarskim jednadžbama oblika  $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$  ( $a = 1, 2, 3$ ) [18]. Vektor normale na hiperplohu definiran je kao  $\Phi_{,\alpha}$ , a želimo li jedinični vektor  $n_\alpha$ , zadajemo ga relacijom

$$n_\alpha = \frac{\epsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{1/2}}$$

gdje je  $\epsilon$  jednak  $-1$  za hiperplohe  $\Sigma$  prostornog tipa te  $+1$  za  $\Sigma$  vremenskog tipa. Jedinični vektor normale nije definiran za hiperplohe svjetlosnog tipa te u tom slučaju za vektor normale koristimo  $k_\alpha = -\Phi_{,\alpha}$ .

Vratimo li se na parametarski oblik jednadžbi hiperplohe  $\Sigma$  ( $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ ), tangentni vektori bit će dani kao

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$$

pa trodimenzionalna hiperploha u točki ima tri nezavisna tangentna vektora zadana na 4D prostoru. Tangentni su vektori okomiti na vektor normale odnosno vrijedi  $e_a^\alpha n_\alpha = 0$  i  $e_a^\alpha k_\alpha = 0$ . Kako bi dobili *induciranu metriku* hiperplohe  $\Sigma$ , promatramo infinitezimalne pomake

$$ds_\Sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) = \gamma_{ab} dy^a dy^b$$

odnosno inducirana metrika hiperplohe je

$$\gamma_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta.$$

Ona se transformira kao skalar za transformacije  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ , a kao tenzor za  $y^a \rightarrow y^{a'}$ . Sada možemo zapisati relaciju potpunosti za inverznu metriku  $g^{\alpha\beta}$

$$g^{\alpha\beta} = \epsilon n^\alpha n^\beta + \gamma^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta.$$

Vanjska zakrivljenost (*eng. extrinsic curvature*) hiperplohe<sup>13</sup>  $\Sigma$  definirana je kao

$$K_{ab} \equiv \nabla_{\beta} n_{\alpha} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}$$

te ovisi o njezinom smještenu u mnogostrukost  $M$ . Može se pokazati da je vanjska zakrivljenost simetričan tenzor, tj. da vrijedi  $K_{ba} = K_{ab}$ . Često je korisna i relacija za trag

$$K \equiv \gamma^{ab} K_{ab} = \nabla_{\alpha} n^{\alpha} .$$

Hiperplohe kojima je  $K > 0$  zovemo konveksnima, a one kojima je  $K < 0$  konkavnima.

### Integracija po hiperplohi

Za hiperplohu  $\Sigma$  koja nije svjetlosnog tipa, invarijantni volumni element je ( $\gamma = \det[\gamma_{ab}]$ )

$$d\Sigma \equiv |\gamma|^{1/2} d^3y$$

te ga ponekad nazivamo i "površinski element". Ako ga pomnožimo vektorom normale i predfaktorom  $\epsilon$ , dobivamo usmjereni volumeni element

$$d\Sigma_{\alpha} = \epsilon n_{\alpha} d\Sigma$$

te se može pokazati da je on jednak

$$d\Sigma_{\mu} = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} e_1^{\alpha} e_2^{\beta} e_3^{\gamma} d^3y$$

pri čemu je  $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$  Levi-Civita tenzor.

Pri integraciji po hiperplohama podintegralni element ponekad pišemo u obliku p-forme. Promotrimo otvoreni potprostor prostorvremena  $U \subset M$  s koordinatnim sustavom  $\psi$ . Ako je  $\alpha$  p-forma, možemo ju izraziti u nekom koordinatnom sustavu kao

$$\alpha = a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n .$$

---

<sup>13</sup>nekad se još zove i "druga fundamentalna forma"

Integral p-forme  $\alpha$  po dijelu prostora  $U$  pišemo kao

$$\int_U \alpha = \int_{\psi[U]} a dx^1 \dots dx^n .$$

Integral je neovisan o izboru koordinatnog sustava  $\psi$  te bi da smo izabrali drugačiji koordinatni sustav  $\psi'$  nova koordinatna ekspanzija p-forme  $\alpha$  bila dana kao

$$\alpha' = a' dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n .$$

### Zatvorene 2-plohe

Zatvorene 2-plohe bit će važne u nekim definicijama pa ćemo ovdje prokomentirati oznake. U našem slučaju, promatramo zatvorenu 2-plohu  $S$  uronjenu u prostornu hiperplohu  $\Sigma$  s pripadnom normalom  $n^\mu$ . Normalu na  $S$  označavamo s  $s^\mu$  te je zadana tako da bude tangenta na hiperplohu  $\Sigma$ , tj.  $n^\mu s_\mu = 0$ <sup>14</sup>. Inducirana metrika na  $S$  je onda

$$q_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - s_\mu s_\nu ,$$

a pripadni volumni element

$$dS = \sqrt{q} dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{q} d^2 x . \quad (\text{A.1})$$

Pri integraciji tenzora po plohi  $S$  s komponentama normalnim na plohu, korisno je volumni element pisati kao [12]

$$dS_{\mu\nu} = (s_\mu n_\nu - n_\mu s_\nu) \sqrt{q} d^2 x . \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>14</sup>iznimka je potpoglavlje 3.3 gdje normalu na  $S$  označavamo s  $\hat{N}$

## Dodatak B Lagrange-Hamilton formulacija OTR-a

Lagrangeov i Hamiltonov formalizam vrlo su općenite ideje primjenjive u raznim granama fizike. Želimo ovaj formalizam primijeniti i na opću teoriju relativnosti zato što nam omogućuje prirodne definicije energije analogne onima u klasičnoj mehanici. Također, ovakav bi formalizam otvorio vrata prema potencijalnim teorijama kvantne gravitacije [25].

### B.1 Lagrange-Hamilton formulacija u klasičnoj fizici

Prisjetimo se kratko Lagrangeovog i Hamiltonovog formalizma u klasičnoj fizici [22]. Za zadani sustav prvo određujemo gustoću lagranžijana  $\mathcal{L}$  koja je funkcija generaliziranih koordinata  $q_i$  i brzina  $\dot{q}_i$ . Potom određujemo kanonske impulse definirane relacijom

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

te se ovaj sustav najčešće može riješiti tako da dobijemo brzine  $\dot{q}_i$  izražene preko impulsa  $p_i$ . Sada možemo odrediti gustoću hamiltonijana

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$$

koja je sada funkcija  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i)$ . Ekvivalent Lagrangeovim jednadžbama su Hamiltonove jednadžbe koje određuju gibanje

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (\text{B.1})$$

### B.2 Lagrangeova formulacija OTR-a

U OTR-u koristimo Lagranžijansku formulaciju u kontekstu teorije polja. Polje je u ovom slučaju metrika prostorvremena  $g_{ab}$ , a volumni element određen je preko  $g_{ab}$  relacijom (Wald [25], (B.2.9))

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n! .$$

Nezgodna ova definicija je što volumen ovisi o polju pa će posljedično trebati uzeti varijacije volumena pri računanju funkcionalnih derivacija akcije. Kako bi izbjegli

matematičke komplikacije, biramo fiksni volumen integracije  $e_{abcd} = e_{[abcd]}$  koji se od prethodnog razlikuje do na skalarni faktor  $f$

$$\epsilon_{abcd} = f e_{abcd} .$$

U bazi u kojoj neišcezavajuće komponente  $e_{abcd}$  imaju vrijednosti  $\pm 1$ , može se pokazati da je  $f = \sqrt{-g}$  gdje je  $g$  iznos determinante metrike [25]. Definiramo *gustoću tenzora*  $T^{a\dots b}_{c\dots d}$  kao tenzor koji se može pisati u formi

$$T^{a\dots b}_{c\dots d} = \sqrt{-g} \tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}$$

gdje je  $\tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}$  tenzor neovisan o  $e_{abcd}$ . Želimo da integral akcije  $S$  i njegove derivacije budu neovisne o volumnom elementu pa zahtijevamo da gustoća lagranžijana  $\mathcal{L}$  bude skalarna gustoća, a funkcionalne derivacije akcije  $S$  tenzorske gustoće. Može se pokazati da je za Einsteinovu vakuumsku jednadžbu odgovarajuća gustoća lagranžijana

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R ,$$

gdje je, kao i ranije,  $R$  skalarna zakrivljenost, a  $g$  determinanta metrike. Pripadna akcija (tzv. *Hilbertova akcija*)

$$S[g^{ab}] = \int \mathcal{L}_G \mathbf{e}$$

gdje je  $\mathbf{e} = e(x^1, \dots, x^4) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^4$ . Želimo li općenitu Einsteinovu jednadžbu u koju je uključen doprinos materije, dodajemo polja materije lagranžijanskoj gustoći

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \alpha_M \mathcal{L}_M .$$

Sada tenzor energije i impulsa možemo izraziti kao

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} .$$

Zakon sačuvanja tenzora energije i impulsa ( $\nabla^a T_{ab} = 0$ ) proizlazi iz invarijantnosti dijela akcije vezanog uz materiju ( $S_M$ ) na difeomorfizme. Primijenimo li isti argument na  $S_G$ , dobivamo Bianchijev identitet ( $\nabla^a G_{ab} = 0$ ). Iz ovoga vidimo da četiri stupnja slobode koju daje Bianchijev identitet odgovaraju stupnjevima slobode koje

fiksiramo izborom koordinatnog sustava.

Sada možemo jasnije vidjeti kako se i u ovoj formulaciji opće teorije relativnosti odražava problem nelokalnosti energije i impulsa gravitacijskog polja [12]. Jednadžbe polja za materiju dobili bismo varijacijom akcije u odnosu na polja materije  $\phi_i$  o kojima ovisi gustoća lagranžijana  $\mathcal{L}_M$ . S druge strane, gravitacijski doprinos akciji ovisi samo o metrici  $g_{\mu\nu}$  pa ne možemo dobiti gravitacijski analogon tenzora energije i impulsa  $T_{\mu\nu}$  kao "izvora gravitacijskog polja".

### B.3 Hamiltonova formulacija OTR-a

Primijetimo da je Lagrangeova formulacija kovarijantna te se prostor i vrijeme tretiraju jednako. Pri Hamiltonovoj ćemo formulaciji trebati odvojiti prostor i vrijeme, tj. napraviti 3+1 dekompoziciju kao što je opisano u potpoglavlju 3.5. Biramo funkciju vremena  $t$  i vektorsko polje  $t^a$ , a hiperplohe konstantne funkcije  $t$  označavamo sa  $\Sigma_t$  (notacija kao u dodatku A). Neka su  $\Sigma_t$  Cauchijevog tipa te neka vrijedi  $t^a \nabla_a t = 1$ . Drugim riječima, napravili smo folijaciju prostorvremena na hiperplohe  $\Sigma_t$ . Kao i u Lagrangeovoj formulaciji, susrećemo se s problemom odabira volumnog elementa te u ovom slučaju ponovno biramo fiksni volumen element  $e_{abcd}$  takav da je  $\mathcal{L}_t e_{abcd} = 0$ . Volumni element hiperplohe  $\Sigma_t$  sukladno je definiran kao  ${}^{(3)}e_{abc} = e_{abcd} t^d$ .

Analogno klasičnoj fizici, krećemo od gustoće lagranžijana  $\mathcal{L}$  koju želimo zapisati kao funkciju varijabli sustava. Puni tenzor metrike  $g_{ab}$  ima ulogu generaliziranih koordinata  $q$ , ali ovdje umjesto metrike možemo koristiti varijable koje opisuju hiperplohe  $\Sigma_t$ : induciranu metriku  $\gamma_{ab}$ , funkciju toka  $N$  te vektor pomaka  $\beta^a$  (kao u (3.6) i (3.7)). Sada normalu  $n^a$  i metriku  $g_{ab}$  možemo izraziti preko ovih varijabli

$$n^a = \frac{1}{N}(t^a - \beta^a), \quad g^{ab} = \gamma^{ab} - N^{-2}(t^a - \beta^a)(t^b - \beta^b).$$

Krećemo od Hilbertove akcije  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$  te zapisujemo preko  $(\gamma_{ab}, N, \beta^a)$ .

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{\gamma}N[{}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2] \quad (\text{B.2})$$

gdje je vanjska zakrivljenost  $K_{ab}$

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}[\dot{\gamma}_{ab} - D_a\beta_b - D_b\beta_a].$$

U prethodnoj je relaciji  $D_a$  operator derivacije na  $\Sigma_t$ , a  ${}^{(3)}R = \gamma^{ab}R^m{}_{amb}$  je trodimenzionalni Riccijev skalar. Po definiciji dobivamo kanonski moment [22]

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} = \sqrt{\gamma}(K^{ab} - \gamma^{ab}K). \quad (\text{B.3})$$

Primijetimo da  $\mathcal{L}_G$  iz (B.2) ne ovisi o vremenskim derivacijama funkcija toka  $N$  i vektora pomaka  $\beta^a$  pa zaključujemo da odgovarajući konjugirani impulsi iščezavaju. Dakle, jedina prava dinamička varijabla teorije je inducirana metrika  $\gamma_{ab}$  (metrika hiperplohe) s pridruženim konjugiranim impulsom  $\pi^{ab}(t, x^\mu)$  te ćemo preko njih izraziti gustoću hamiltonijana  $\mathcal{H}$ . Izbor  $N$  i  $\beta^a$  odgovara koordinatnoj slobodi, a varijacija hamiltonijana u odnosu na  $N$  i  $\beta^a$  dati će dvije jednadžbe ograničenja.

Sada to sve stavljamo u gustoću hamiltonijana,  $\mathcal{H}(q, \pi) = \pi \dot{q} - \mathcal{L}$ , te dobivamo ukupnu gustoću hamiltonijana [25]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G = h^{1/2} & \left( N[-{}^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2] \right. \\ & \left. - 2N_b[D_a(h^{-1/2}\pi^{ab})] + 2D_a(h^{-1/2}N_b\pi^{ab}) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ukupni hamiltonijan, tj. ukupnu energiju, dobivamo integracijom po  $\Sigma_t$

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}^{(3)} \mathbf{e}.$$

U Lagrangeovoj smo formulaciji imali  $\delta S / \delta \psi|_\psi = 0$ , a polja  $\Psi$  koja daju ekstremalnu vrijednost akcije rješenja u odgovarajućih jednadžbi gibanja. Ova je jednadžba ekvivalentna Hamiltonovom sustavu jednadžbi (analogno (B.1))

$$\dot{q} = \mathcal{L}_t q = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \dot{\pi} = \mathcal{L}_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta q}$$

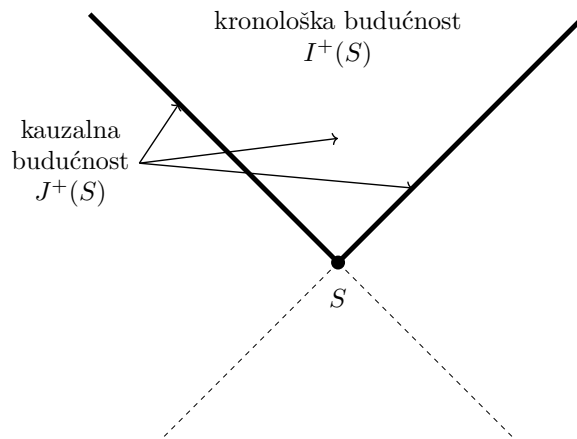
koji odgovara jednadžbama gibanja opće teorije relativnosti. Primijetimo da  $H$  odgovara ukupnoj energiji. Pripadne Hamiltonove jednadžbe su ekvivalentne vakuumskoj Einsteinovoj jednadžbi. Varijacijom  $H$  po  $N$  i  $\beta^a$  dobivamo jednadžbe ograničenja

$$\begin{aligned} -{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab}\pi_{ab}}{\gamma} - \frac{\pi^2}{2\gamma} &= 0 \\ D_a \left( \frac{\pi^{ab}}{\sqrt{\gamma}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

## Dodatak C Kauzalna struktura prostorvremena

ADM pristup temelji se na 3+1 folijaciji prostorvremena na prostorne hiperplohe  $\Sigma$ . Kažemo da su takve plohe *Cauchyjevog* tipa te ih sada želimo preciznije definirati.

**Def.** Vektorsko polje je kauzalnog tipa ako je vremenskog ili svjetlosnog tipa. Za neki podskup  $S$  na mnogostrukosti  $M$  možemo definirati kauzalnu budućnost od  $S$ ,  $J^+(S)$ , koja označava skup točaka do kojih se može doći iz  $S$  prateći kauzalne krivulje usmjerene u budućnost [7]. Slično, možemo definirati kronološku budućnost  $I^+(S)$  kao skup točaka do kojih se dolazi prateći vremenske kauzalne krivulje. Ako je skup  $S$  prikazan točkom u  $t$ - $r$  dijagramu, ove veličine možemo prikazati kao na Sl. C.1.



Slika C.1: Na slici je skicirana kauzalna i kronološka budućnost za skup točaka  $S$ . Tamne linije označavaju svjetlosne geodezike.

Podskup  $S \subset M$  je *akronalan* ako ne postoje dvije točke u  $S$  povezane vremenskom krivuljom. Za zatvoreni akronalan skup  $S$  možemo definirati domenu ovisnosti o  $S$ ,  $D^+(S)$  kao skup točaka takav da svaka kauzalna krivulja usmjerena u prošlost presijeca  $S$ .

Konačno, Cauchyjeva ploha  $\Sigma$  je zatvoreni akronalan skup točaka takav da mu je domena ovisnosti cijela mnogostrukost, tj.  $D(\Sigma) = M$ . Budući da su Cauchyjeve plohe akronalne, svaka kauzalna krivulja ih siječe u točno jednoj točki te zbog toga u ovakvoj folijaciji prostorvremena nisu moguće zatvorene vremenske krivulje. Za prostorvrijeme kojemu su podmnogostrukosti Cauchyjevog tipa kažemo da je *globalno hiperbolično* [22].



## Literatura

- [1] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W Misner. The dynamics of general relativity; gravitation: an introduction to current research. *Chap*, 7:227–265, 1962.
- [2] Abhay Ashtekar and Anne Magnon-Ashtekar. On conserved quantities in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 20(5):793–800, 1979.
- [3] Frederik Jozef Belinfante. On the spin angular momentum of mesons. *Physica*, 6(7-12):887–898, 1939.
- [4] Hermann Bondi, M Gr J Van der Burg, and AWK Metzner. Gravitational waves in general relativity, vii. waves from axi-symmetric isolated system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 269(1336):21–52, 1962.
- [5] LIGO Caltech. Inspiral gravitational waves.
- [6] LIGO Caltech. Ligo’s interferometers, 2016.
- [7] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [8] Chia-Chen Chang, James M Nester, and Chiang-Mei Chen. Pseudotensors and quasilocal energy-momentum. *Physical Review Letters*, 83(10):1897, 1999.
- [9] P Čížek and O Semerák. Perturbation of a schwarzschild black hole due to a rotating thin disk. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 232(1):14, 2017.
- [10] Robert Geroch and Jeffrey Winicour. Linkages in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 22(4):803–812, 1981.
- [11] RA Isaacson, JS Welling, and Jeffrey Winicour. Null cone computation of gravitational radiation. *Journal of Mathematical Physics*, 24(7):1824–1834, 1983.
- [12] José Luis Jaramillo and Ericourgoulhon. *Mass and Angular Momentum in General Relativity*. Springer Netherlands, 2011.

- [13] Joseph Katz. A note on komar’s anomalous factor. *Classical and Quantum Gravity*, 2(3):423, 1985.
- [14] Jerzy Kijowski. Trautman’s description of gravitational radiation is universal: A “pedestrian” approach to radiation phenomena. *Universe*, 9(12):520, 2023.
- [15] Michele Maggiore. *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*. OUP Oxford, 2007.
- [16] Charles W Misner, Kip S Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [17] Roger Penrose. Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, 284(1397):159–203, 1965.
- [18] Eric Poisson. *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [19] Richard Schoen and Shing-Tung Yau. Proof of the positive mass theorem. ii. *Communications in Mathematical Physics*, 79:231–260, 1981.
- [20] O Semerák and M Záček. Gravitating discs around a schwarzschild black hole: I. *Classical and Quantum Gravity*, 17(7):1613, 2000.
- [21] Oldřich Semerák and Pavel Čížek. Rotating disc around a schwarzschild black hole. *Universe*, 6(2):27, 2020.
- [22] Francis Tong. A hamiltonian formulation of general relativity, 2006.
- [23] Andrzej Trautman. Boundary conditions at infinity for physical theories. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 2016.
- [24] Andrzej Trautman. Radiation and boundary conditions in the theory of gravitation. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 2016.
- [25] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [26] Joel M Weisberg and Yuping Huang. Relativistic measurements from timing the binary pulsar psr b1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, 829(1):55, 2016.

[27] Wikipedia. Vis-viva equation, 2024.

[28] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 80(3):381–402, 1981.