Grupa Rubikove kocke

Benko, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Benko

GRUPA RUBIKOVE KOCKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Osnovno o Rubikovoj kocki **3**
1.1 Povijest i arhitektura Rubikove kocke 3
1.2 Potez na Rubikovoj kocki 4
1.3 Svojstva suprotnih poteza 8

2 Kombinatorika **11**
2.1 Broj stanja Rubikove kocke 11
2.2 Božji broj 20 12

3 Grupa Rubikove kocke **15**
3.1 Osnovno o grupi Rubikove kocke 15
3.2 Ciklusi 18
3.3 Konjugiranje 21
3.4 Komutatori 22
3.5 Algoritam za slaganje Rubikove kocke 25

4 Grupa 15-puzzle **31**
4.1 Povijest i arhitektura 15-puzzle 31
4.2 Grupa 15-puzzle 32
4.3 Rješenje 15-puzzle 34
4.4 Parnost Rubikove kocke i 15-puzzle slagalice 36

5 Zaključak **41**

Bibliografija **43**

Uvod

Cilj ovog rada je teoriju grupa, koja se često u literaturi prikazuje na apstraktan način, vizualizirati pomoću Rubikove kocke. A to je moguće učiniti upravo zahvaljujući činjenici da skup svih mogućih pokreta na Rubikovoj kocki čini algebarsku strukturu grupe. Tu strukturu nazivamo grupom Rubikove kocke i označavamo s G_R.

Prije nego se pokažu neke metode slaganja Rubikove kocke, u radu će biti izložene osnove teorije grupa koje su potrebne za razumijevanje njene interpretacije na Rubikovoj kocki.

Iako je glavni cilj proučiti Rubikovu kocku u kontekstu grupe Rubikove kocke, prvi dio rada će dati neka objašnjenja vezana uz kombinatoričke zadatke s Rubikovom kockom.

Svakome tko je pokušao složiti Rubikovu kocku, zasigurno je prošlo kroz glavu pitanje: Koliko je mogućih kombinacija rasporeda kockica na Rubikovoj kocki? Upravo na to pitanje ćemo pokušati odgovoriti u drugom poglavlju.

Važno je napomenuti da kombinatorika Rubikove kocke i grupa Rubikove kocke nisu dva nepovezana pojma. Upravo je broj mogućih stanja Rubikove kocke kardinalitet grupe Rubikove kocke.

Svrha ovog rada je prikazati postupak slaganja Rubikove kocke algoritmima iza kojih stoji teorija grupa. Ali, Rubikova kocka nije jedina igračka na kojoj se može uočiti grupa. Naime, skup svih poteza na igrački 15-puzzle također ima sva svojstva grupe. Ta tvrdnja će se opravdati u četvrtom poglavlju.

Prije nego krenemo na zanimljiv put duž matematičke strane Rubikove kocke, izložit ćemo neke zanimljivosti iz povijesti Rubikove kocke, a kako je nemoguće raspravljati o grupi Rubikove kocke bez da saznamo nešto o njenoj strukturi, u idućem poglavlju će biti riječ i o arhitekturi Rubikove kocke.

Poglavlje 1

Osnovno o Rubikovoj kocki

1.1 Povijest i arhitektura Rubikove kocke

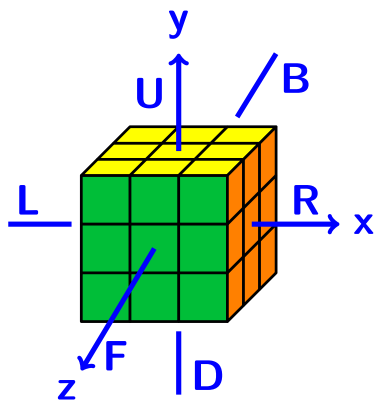
Iako većina ljudi nije nikada organizirano učila slagati Rubikovu kocku, gotovo svi su čuli za nju i znaju ponešto o njenoj povijesti. Razlog tome je što je Rubikova kocka ne tako davno bila novost u svijetu igračaka. Mogli smo čitati o njoj iz popularnih časopisa i kupiti njene kopije u gotovo bilo kojoj trgovini igračaka.

Rubikova kocka je prvi put puštena u proizvodnju 1975., godinu dana nakon što ju je profesor na arhitektonskom fakultetu u Budimpešti, Ernő Rubik osmislio kao pomagalo za svoje studente. Prvotna svrha Rubikove kocke bila je povezana s rješavanjem strukturalnog problema pomicanja dijelova koje neće utjecati na stabilnost određenog mehanizma. Tada profesor Ernő Rubik nije ni naslućivao njen značaj u svijetu matematike.

Rubikova kocka (kao i svaka kocka) ima šest strana koje označavamo odgovarajućim slovima (podrazumijevamo da kocku stalno držimo u istoj orijentaciji, koja je definirana bojama nepomičnih srednjih „kockica"):

$$\begin{aligned}
F &= \text{prednja strana kocke (eng. Front)},\\
B &= \text{stražnja strana kocke (eng. Back)},\\
U &= \text{gornja strana kocke (eng. Up)},\\
D &= \text{donja strana kocke (eng. Down)},\\
R &= \text{desna strana kocke (eng. Right)},\\
L &= \text{lijeva strana kocke (eng. Left)}.
\end{aligned}$$

Slika 1.1. prikazuje oznake pojedinih strana Rubikove kocke.



Slika 1.1: Strane Rubikove kocke

Na svakoj strani Rubikove kocke je devet manjih kocki. Zbog toga nam se čini kao da se Rubikova kocka sastoji od 27 manjih kocki. Međutim, ako rastavimo kocku, možemo vidjeti da središnja mala kocka – zapravo ne postoji.

Razlikujemo tri vrste malih kocki:

1. središnje (ima ih 6),
2. bridne (ima ih 12) i
3. vršne (ima ih 8).

Položaj malih kocki možemo promijeniti na dva načina: tako da rastavimo kocku i ponovno ju sastavimo ili tako da napravimo potez na kocki. Zanimljivo je da ako kocku rastavimo i ponovno sastavimo, vjerojatnost da će se ona nakon toga moći složiti potezima iznosi samo $\frac{1}{12}$ ili tek nešto više od 8 posto. Objašnjenje ove tvrdnje može se pročitati u idućem poglavlju. Ako Rubikovu kocku ne rastavljamo već ju izmiješamo samo potezima – ona se uvijek može složiti (očigledno, jer ako bismo zapamtili poteze koje smo izveli, izvođenjem istih poteza unatrag vraćamo se u početno stanje).

1.2 Potez na Rubikovoj kocki

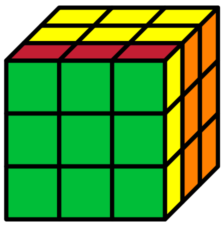
Intuitivno je jasno što smatramo potezom na Rubikovoj kovki. Međutim, vrlo je važno precizno definirati pojam osnovnog poteza na Rubikovoj kocki.

Definicija 1.2.1. *Osnovni potez na Rubikovoj kocki je zaokret jedne od njenih strana za pravi kut u smjeru kazaljke na satu (gledano prema toj strani).*

Osnovnih poteza na Rubikovoj kocki ima 7. Radi lakšeg razvoja teorije, važno je uvesti oznake osnovnih poteza. Oznake 6 osnovnih poteza odgovaraju oznakama za određene strane kocke. Oznake su sljedeće:

F = okret prednje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
B = okret stražnje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
U = okret gornje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
D = okret donje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
R = okret desne strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
L = okret lijeve strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.

Primjer 1.2.2. *Promotrimo jedan osnovni potez na Rubikovoj kocki:* ***F****. Nakon njega kocka izgleda ovako:*



Postoji još jedan osnovni potez a to je neutralni potez, odnosno potez u kojemu nismo pomicali kocku.

Definicija 1.2.3. *Za potez na Rubikovoj kocki kažemo da je neutralan ako njegovim izvođenjem nije promijenjen izgled kocke. Neutralni potez označavamo s I.*

Sada ćemo definirati osnovne suprotne poteze.

Definicija 1.2.4. *Osnovni suprotni potez na Rubikovoj kocki je zaokret jedne od njenih strana za pravi kut u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu.*

Osnovne suprotne poteze označavamo na sljedeći način:

$\mathbf{F}^{-1}$ = okret prednje strane kocke za pravi kut u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu.
$\mathbf{B}^{-1}$ = okret stražnje strane kocke za pravi kut u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu.
$\mathbf{U}^{-1}$ = okret gornje strane kocke za pravi kut u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu.
$\mathbf{D}^{-1}$ = okret donje strane kocke za pravi kut u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu.

$\mathbf{R}^{-1}$ = okret desne strane kocke za pravi kut u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu.

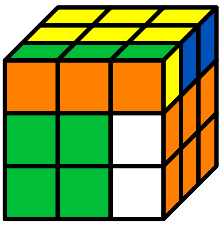
$\mathbf{L}^{-1}$ = okret lijeve strane kocke za pravi kut u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu.

Sada možemo definirati opći potez na Rubikovoj kocki.

Definicija 1.2.5. *Potez na Rubikovoj kocki je konačan niz osnovnih i osnovnih suprotnih poteza.*

Potez na Rubikovoj kocki zapisujemo kao slijed slova koja označavaju neki od osnovnih ili osnovnih suprotnih poteza. Primjerice, potez **UDL** označava ovu radnju na kocki: prvo napravimo potez **U**, zatim potez **D** i na kraju potez **L**.

Primjer 1.2.6. *Promotrimo jedan opći potez na Rubikovoj kocki:* ***RU****. Taj potez je sastavljen od dva osnovna poteza: poteza* ***R*** *i poteza* ***U****. Promotrimo kako Rubikova kocka izgleda nakon poteza* ***RU****:*

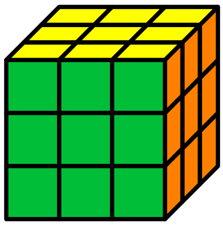


Sada možemo i definirati opći suprotni potez na Rubikovoj kocki.

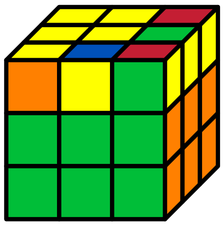
Definicija 1.2.7. *Potez X^{-1} na Rubikovoj kocki je suprotan potezu X ako vrijedi $XX^{-1} = I$.*

Primjer 1.2.8. *Primijetimo:* $\boldsymbol{F}^{-1}$ *je i prema definiciji općeg suprotnog poteza, suprotan potezu* ***F****. To možemo vidjeti i uz pomoć prethodnog primjera. Nakon što je na kocki primjenjen potez* ***F****, možemo primjeniti potez* $\boldsymbol{F}^{-1}$*. Sada će vrijediti za X =* ***F*** *sljedeće: $XX^{-1} = I$.*

Točnije, kocka će se nakon poteza $\boldsymbol{FF}^{-1}$ *ponovno vratiti u početno stanje:*



Primjer 1.2.9. *Primijenimo na kocki sljedeći potez:* $\boldsymbol{FRUR}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}$. *Nakon toga kocka će izgledati ovako:*



Ako na kocki izvodimo više istih osnovnih poteza X za redom, tj. n puta izvodimo potez X, to zapisujemo kao X^n.

Primjer 1.2.10. *Izvedimo na kocki potez* $\boldsymbol{F}$ *dva puta za redom. Taj potez zapisujemo ovako:* $\boldsymbol{F}^2$.

Primjer 1.2.11. *Izvedimo na kocki potez* $\boldsymbol{R}^3$ *i onda vratimo kocku u početni položaj. Nakon toga izvedimo potez* $\boldsymbol{R}^{-1}$. *Što primjećujemo? Kocka ima isti izgled nakon poteza* $\boldsymbol{R}^3$ *kao i nakon poteza* $\boldsymbol{R}^{-1}$. *To pravilo vrijedi za bilo koji osnovni potez X.*

Teorem 1.2.12. *Neka je dan osnovni potez X na Rubikovoj kocki. Vrijedi:* $X^3 = X^{-1}$.

Primjer 1.2.13. *Izvedimo na kocki potez* $\boldsymbol{R}^4$. *Primijetimo da kocka izgleda jednako kao i prije poteza* $\boldsymbol{R}^4$. *To pravilo vrijedi za bilo koji osnovni potez X.*

Teorem 1.2.14. *Neka je dan osnovni potez X na Rubikovoj kocki. Vrijedi:* $X^4 = I$.

Korolar 1.2.15. *Za svaki osnovni potez X i svaki* $n \in \mathbb{N}$ *je* $X^n = X^{n \bmod 4}$. *Drugim riječima, za osnovne poteze nema potrebe razmatrati* X^n *za* $n \notin \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

1.3 Svojstva suprotnih poteza

U ovom odlomku iskazat ćemo dva vrlo važna svojstva suprotnih poteza. Ona će nam pomoći u rješavanju nadolazećih zadataka, ali i pružiti nam uvid u nešto puno važnije - teoreme vezane uz grupu Rubikove kocke možemo dokazivati „naivno", bez razvijene teorije povezane s teorijom grupa, a možemo ih i dokazivati „aksiomatski", što će biti prikazano u idućim poglavljima. U ovom odlomku ćemo dati dva „naivna" dokaza.

Prvo svojstvo je intuitivno jasno: suprotan potez suprotnog poteza je originalan potez. Iskažimo precizno taj teorem.

Teorem 1.3.1. *Neka je dan osnovni potez X na Rubikovoj kocki. Vrijedi:* $(X^{-1})^{-1} = X$.

Dokaz. Prema definiciji suprotnog osnovnog poteza, riječ je o okretu jedne od strana kocke za pravi kut u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu. Izvršimo X^{-1}.

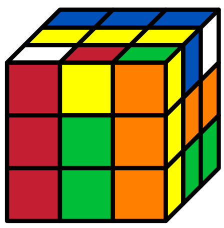
Sada suprotni potez od tog poteza više nije osnovni suprotni potez. Koristimo definiciju općeg suprotnog poteza zadanog poteza Y: $YY^{-1} = I$. Mi tražimo potez Y^{-1} za zadani potez $Y = X^{-1}$ koji smo već izvršili.

Kako želimo da izgled kocke bude isti kao i prije izvršavanja poteza $Y = X^{-1}$ (tj. da stanje bude I), očito je da potez koji moramo napraviti je onaj osnovni potez kojemu je potez Y bio suprotan, dakle moramo izvršiti potez X. Iz toga slijedi: $(X^{-1})^{-1} = X$.

□

Iako smo definirali suprotni potez, iz same definicije nije odmah jasno kako ćemo za dani (opći) potez X odrediti njegov suptrotan potez X^{-1}. Primjerice, ako nam je zadan potez X = **LUDF**, znamo li iz definicije odrediti X^{-1}? Naravno da je odgovor negativan. Ali upravo zato će nam biti korisno drugo svojstvo suprotnih poteza do kojeg ćemo doći u ovom odlomku

Primjer 1.3.2. *Primijenimo na kocki pokret* **LUDF**. *Jedna strana kocke izgleda kao na sljedećoj slici.*



Primijenimo sada na tako dobivenu kocku sljedeći potez: $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$. *Primijetimo da će nakon tog poteza kocka biti u početnom stanju.*

Teorem 1.3.3. *Neka je dan potez na Rubikovoj kocki $X = Y_1Y_2$, pri čemu su Y_1 i Y_2 osnovni potezi. Tada je njegov suprotni potez dan s: $X^{-1} = {Y_2}^{-1}{Y_1}^{-1}$.*

Primijetimo da pravilo prethodnog teorema možemo zapisati i na ovaj način:

$$(Y_1Y_2)^{-1} = {Y_2}^{-1}{Y_1}^{-1}$$

Dokaz. Pretpostavimo da smo već izvršili potez X tj. potez Y_1 pa zatim potez Y_2. Nakon što smo izvršili te poteze, želimo dokazati: $(Y_1Y_2)(Y_1Y_2)^{-1} = I$, tj. želimo nakon poteza Y_1Y_2 doći do početnog stanja kocke (tj. želimo da naše radnje odgovaraju potezu I).

Doista, ako prvo izvedemo potez ${Y_2}^{-1}$ učinit ćemo suprotan potez zadnjem potezu, tj. zadnji potez, potez Y_2 će se „poništiti".

Zatim će na kocki biti stanje kao tek nakon poteza Y_1. Ako sada učinimo potez suprotan potezu Y_1, dakle potez ${Y_1}^{-1}$, zbog pravila iz definicije $Y_1{Y_1}^{-1} = I$, kocka će ponovno biti u početnom stanju. Dakle, vrijedi: $X^{-1} = {Y_2}^{-1}{Y_1}^{-1}$. Time je tvrdnja dokazana.

□

Iskažimo prethodni teorem na općenitoj razini, tj. za potez $X = Y_1Y_2...Y_{n-1}Y_n$.

Teorem 1.3.4. *Neka je dan potez na Rubikovoj kocki $X = Y_1Y_2...Y_{n-1}Y_n$. Tada je njegov suprotni potez dan s: $X^{-1} = {Y_n}^{-1}{Y_{n-1}}^{-1}...{Y_2}^{-1}{Y_1}^{-1}$.*

Pravilo prethodnog teorema možemo zapisati i na ovaj način:

$$(Y_1Y_2...Y_{n-1}Y_n)^{-1} = {Y_n}^{-1}{Y_{n-1}}^{-1}...{Y_2}^{-1}{Y_1}^{-1}$$

Ovaj teorem se jednostavno dokaže pomoću prethodnog teorema i korištenjem matematičke indukcije.

Primjer 1.3.5. *Odredimo poteze suprotne sljedećim potezima:*

1. $\boldsymbol{FDL}^{-1}$,
2. $\boldsymbol{URU}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}$

Rješenje:

1. $(\boldsymbol{FDL}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{LD}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}$,
2. $(\boldsymbol{URU}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{LUR}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$

Poglavlje 2

Kombinatorika

2.1 Broj stanja Rubikove kocke

Kada govorimo o kombinatorici i Rubikovoj kocki, najčešće mislimo na broj mogućih stanja Rubikove kocke. Pri tome je jako važno uzimamo li u obzir samo stanja koja se mogu dobiti potezima na Rubikovoj kocki ili i stanja koja se mogu dobiti rastavljanjem i ponovnim sastavljanjem kocke.

Za početak ćemo izračunati broj svih stanja Rubikove kocke (uključujući ona koja možemo dobiti samo rastavljanjem i ponovnim sastavljanjem kocke). Važno je razlikovati vršne i bridne kockice. Pitamo se na koliko načina možemo rasporediti vršne, odnosno bridne kockice. Da bismo odgovorili na to pitanje, moramo poznavati pojam permutacije skupa kao i pravilo produkta.

Definicija 2.1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je dan n-člani skup S. Permutacija skupa S je svaka uređena n-torka članova skupa S.*

Primjer 2.1.2. *Uzmimo za primjer skup $S = \{1, 2, 3\}$. Jedna od permutacija skupa S je uređena trojka (3,2,1).*

Idući teorem govori o broju permutacija na zadanom skupu.

Teorem 2.1.3. *Broj permutacija n-članog skupa je $n!$.*

Primjer 2.1.4. *Broj permutacija 3-članog skupa je $3! = 6$. Primjerice, za 3-člani skup $\{1, 2, 3\}$, sve permutacije su sljedeće: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).*

Sada je jasno da vršne kockice na Rubikovoj kocki, kojih ima 8, možemo rasporediti na 8! načina, dok bridne, kojih ima 12, možemo rasporediti na 12! načina. Primijetimo da srednje kockice ne možemo premiještati jer su fiksne. Nadalje, vršne kockice možemo okrenuti na 3 načina a bridne na 2.

Pitanje je na koliko ukupno načina možemo rasporediti sve kockice na Rubikovoj kocki točnije, koliko iznosi broj svih mogućih stanja na Rubikovoj kocki.

Da bismo mogli odgovoriti na to pitanje, važno je poznavati pravilo produkta:

Teorem 2.1.5. *Neka su dani $n, m \in \mathbb{N}$ i n-člani skup A te m-člani skup B. Slijedi da je broj elemenata Karetezijevog produkta $A \times B$ jednak $m \cdot n$.*

Prethodni teorem lako se poopći i na Kartezijev produkt konačno mnogo konačnih skupova

Dakle, ukupno imamo $12!8!3^8 2^{12}$ načina za odabrati početno stanje Rubikove kocke. Primijetimo da je riječ o broju reda veličine 10^{20}.

Sada se pitamo koliki je broj stanja Rubikove kocke koja su moguća bez rastavljanja kocke. Očito je da je riječ o manjem broju. Potrebno je od broja svih mogućih stanja kocke oduzeti stanja koja se mogu dobiti samo rastavljanjem i ponovnim sastavljanjem kocke. Rezultat je broj koji je reda veličine 10^{19} i iznosi 43 252 003 274 489 856 000.

Primjer 2.1.6. *Možemo se zapitati koji je broj mogućih stanja „Rubikove" kocke $n \times n \times n$. Očito je da vršnih kockica ima jednako kao i kod originalne kocke. Dakle, vršne kockice možemo rasporediti na* $8!$ *načina. Ova kocka ima* $n-2$ *bridne kockice za svaki brid kocke, dakle ukupno ima* $4(n-2)$ *bridnih kockica (jer dva brida brojimo dva puta). To znači da bridne kockice možemo rasporediti na* $4(n-2)!$ *načina. Vršne kockice možemo, kao i u originalnoj kocki okrenuti na 3, a bridne na 2 načina. Zaključujemo da ukupno imamo* $8!4(n-2)!3^8 2^{4(n-2)}$ *načina da odaberemo početno stanje „Rubikove" kocke $n \times n \times n$.*

2.2 Božji broj 20

Još jedan zanimljivi kombinatorički rezultat vezan je uz pojam „Božji broj ". „Božji broj" iznosi 20, a njegovo značenje leži u iskazu sljedećeg teorema.

Teorem 2.2.1. *Najmanji broj poteza potreban da se složi Rubikova kocka (bez obzira na početno stanje) iznosi 20.*

Vrlo je važno napomenuti da u ovom poglavlju pod pojmom potez na Rubikovoj kocki podrazumijevamo okret jedne od strana kocki. Tako je primjerice $\mathbf{B}$ jedan potez, ali isto tako je i $\mathbf{B}^2$ jedan potez. Također, zbog jednostavnosti, u ovom poglavlju ćemo naglašavati kada je riječ o općem potezu na Rubikovoj kocki, točnije, opći potez koji nije osnovni potez (niti je potez u smislu gornje napomene) nazivat ćemo nizom poteza.

Zanimljivo je što iako postoji približno 43 bilijardi mogućih stanja kocke, dovoljna su nam samo 20 poteza da ju iz bilo kojeg stanja složimo, tj. dovedemo u početno stanje. Međutim, to ne zna napraviti niti jedan čovjek te se broj 20 zapravo odnosi na najmanji broj koji je računalu (ili „Bogu”) dovoljan da složi kocku. Od tuda i naziv „Božji broj”. Istaknimo ovdje da to ne znači da je za svako stanje kocke to istih 20 poteza.

Nameće se jedno vrlo zanimljivo pitanje — kako je moguće znati da „Božji broj” iznosi upravo 20, točnije — kako glasi dokaz prethodnog teorema?

Odgovoru na to pitanje možemo se približiti ako zavirimo u samu povijest otkrivanja „Božjeg broja”, odnosno činjenice da on iznosi 20.

Osobe koje su zadužene za dolaženje do slutnje da „Božji broj” iznosi 20, nisu „odjednom” došle do tog broja, već su mu postepeno „konvergirale”. Prvi korak prema slutnji da je „Božji broj” jednak 20 dogodio se 1980. godine, kada se zaključilo da je taj broj zasigurno veći ili jednak 18. Do tog zaključka se došlo na temelju promatranja svih bitno različitih nizova poteza na Rubikovoj kocki koji se sastoje od 17 ili manje poteza. Ustanovilo se da takvih nizova ima manje nego svih mogućih stanja kocke. Iz toga direktno slijedi da je „Božji broj” strogo veći od 17, dakle zasigurno je veći ili jednak 18.

Logični korak dalje prema otkrivanju „Božjeg broja” je svakako, otkrivanje gornje granice za taj broj. Već godinu dana nakon otkrića da je „Božji broj” veći ili jednak broju 18, Morwen Thistlethwaite dokazuje da je taj broj zasigurno manji ili jednak 52. Zatim, 1995. godine Michael Reid dokazuje da je „Božji broj” manji ili jednak 29. Iste godine, on dokazuje da „Božji broj” iznosi najmanje 20. Dakle, u tom trenutku je poznato (i dokazano) da se „Božji broj” nalazi između brojeva 20 i 29. Konačno, 2010. godine Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson i John Dethridge dokazuju da je „Božji broj” i manji ili jedan 20, dakle iznosi točno 20.

Napomenimo da činjenica da „Božji broj” iznosi točno 20 ne znači da je za svako stanje kocke potrebno točno 20 poteza da bi se došlo do rješenja, već to znači da nam je potrebno 20 ili manje pokreta (očito, jer ako primjerice zamislimo stanje kocke koje je nastalo nakon poteza **R** na već složenoj kocki, znamo da je dovoljan samo jedan potez za vraćanje u složeno stanje, tj. potez $\mathbf{R}^{-1}$, dakle, svakako je u tom slučaju potrebno manje od 20 poteza.)

Možemo se zapitati kako je moguće provjeriti za svih približno 43 bilijardi mogućih stanja kocke mogu li se riješiti u 20 ili manje poteza.

Algoritam je sljedeći:

1. 43 252 003 274 489 856 000 stanja kocke raspodijelimo u 2 217 093 120 skupova stanja tako da svaki skup sadrži 19 508 428 800 različitih stanja kocke;

2. reduciramo broj skupova stanja kocke koje ćemo promatrati, koristeći simetričnost nekih stanja; novi broj skupova stanja kocke iznosi 55 882 296;

3. promatrat ćemo ona rješenja za pojedino stanje koje sadži 20 ili manje poteza, a nećemo tražiti optimalno rješenje;

4. napišemo program za takvo rješavanje kocke;

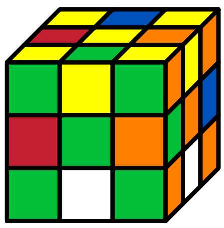
5. pokrenemo program; za izvršavanje programu je potrebno približno 35 CPU godina.

Razlog provedbe prvog koraka algoritma je programerske prirode, točnije riječ je o strategiji „podijeli pa vladaj" koja se često koristi u pisanju programa (ili algoritama), a u ovom primjeru pogoduje memorijskoj ograničenosti računala koje će morati izvršiti program. Naime, riječ je o strategiji u kojoj zadani problem dijelimo na više manjih, istovjetnih problema koje nam je pojedinačno lakše riješiti.

Možda najzanimljivije od svih pitanja vezanih uz „Božji broj" je sljedeće: Koje je stanje kocke najteže za riješiti?

Pri pokušaju odgovora na ovo pitanje, moramo se prisjetiti da kada govorimo o „Božjem broju", ne govorimo o „ljudskim" algoritmima za rješavanje kocke (o kojima je u ovom diplomskom radu uglavnom riječ), već govorimo o rješavanju Rubikove kocke pomoću računala, tj. programa.

Pokazalo se da je gore opisanom programu najteže bilo rješiti stanje kocke koje je nastalo ovim nizom poteza iz početnog stanja kocke: $\mathbf{F}\ \mathbf{U}^{-1}\ \mathbf{F}^{2}\ \mathbf{D}^{-1}\ \mathbf{B}\ \mathbf{U}\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{F}^{-1}\ \mathbf{L}\ \mathbf{D}^{-1}\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{U}^{-1}\ \mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{U}\ \mathbf{B}^{-1}\ \mathbf{D}^{2}\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{F}\ \mathbf{U}^{2}\ \mathbf{D}^{-1}$. Opisano stanje kocke prikazano je sljedećom slikom i poznato je pod nazivom *superflip* - sve vršne kockice su na mjestu i pravilno okrenute, a sve bridne su na mjestu, ali izvrnute.



Naravno, sam opis stanja nas zapravo upućuje i na rješenje (dovoljno je odrediti inverz niza poteza). Primjetimo da broj poteza, očekivano, iznosi 20.

Poglavlje 3

Grupa Rubikove kocke

3.1 Osnovno o grupi Rubikove kocke

Neka je A neki neprazan skup. Algebarska struktura na A je taj skup zajedno s binarnom operacijom na A, tj. funkcijom $*$ s $A \times A$ u A.

Definicija 3.1.1. *Za algebarsku strukturu $(A, *)$ kažemo da je grupa ako vrijede sljedeća svojstva:*

1. *asocijativnost:*
   $(\forall\ X,Y,Z \in A)\ (X * (Y * Z) = (X * Y) * Z)$;

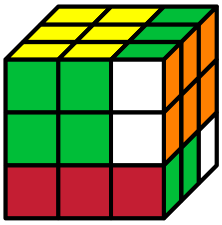
2. *egzistencija neutralnog elementa:*
   $(\exists\ I \in A)\ (\forall\ X \in A)\ (X * I = I * X = X)$;

3. *egzistencija inverznog elementa:*
   $(\forall\ X \in A)\ (\exists\ X^{-1} \in A)\ (X * X^{-1} = X^{-1} * X = I)$.

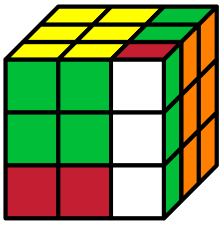
Neka je G skup svih poteza na Rubikovoj kocki, a $*$ uzastopno izvođenje poteza. Uzastopno izvođenje poteza očigledno je asocijativno, neutralni potez I zadovoljava svojstvo neutralnog elementa, a teorem 1.3.4 garantira invertibilnost svakog poteza unutar G.

Važno je uočiti kako svojstvo komutativnosti ne vrijedi.

Primjer 3.1.2. *Pokažimo kontraprimjerom da operacija $*$ uzastopnog izvođenja poteza nije komutativna. Pretpostavimo da je kocka u početnom (složenom) stanju. Izvedimo potez* **RD**. *Sada kocka izgleda kao na sljedećoj slici.*



Izvedimo sad (ponovno na složenoj kocki) potez ***DR****. Kocka izgleda kao na sljedećoj slici.*



Uočavamo da ne vrijedi ***RD*** = ***DR****.*

Uočimo: slaganje Rubikove kocke ne bi bilo izazovno kada bi vrijedilo svojstvo komutativnosti. Naime, tada bi bilo dovoljno prebrojati izvođenje svakog osnovnog poteza i izvesti ih do idućeg višekratnika broja 4.

Grupu $(G, *)$ nazivamo grupom Rubikove kocke i skraćeno označavamo s G_R. Kako bismo mogli odrediti red grupe G_R, najprije ponovimo definiciju reda grupe.

Definicija 3.1.3. *Red grupe $(A, *)$ je broj elemenata skupa A.*

Sada je jasno da smo već ranije u radu naveli red grupe G_R. Naime, riječ je o broju svih mogućih poteza na Rubikovoj kocki koji približno iznosi $43 \cdot 10^{18}$.

Sada ćemo definirati pojam reda elementa grupe.

Definicija 3.1.4. *Neka je dana grupa $(A, *)$ i neka je I neutralni element iz te grupe. Za proizvoljni element X definiramo red elementa X kao najmanji pozitivni cijeli broj m za koji vrijedi: $X^m = I$, pri čemu X^m označava produkt od m elemenata X.*

U kontekstu Rubikove kocke, red elementa grupe G_R označava red poteza na kocki točnije, označava broj koliko je puta dovoljno ponoviti neki potez da bi se izgled kocke vratio u početno stanje (u stanje prije prvog uzastopnog izvršavanja tog poteza).

Kako možemo znati da taj broj za proizvoljan opći potez X, uopće postoji? To nam garantira sljedeći teorem.

Teorem 3.1.5. *Red svakog elementa konačne grupe je konačan.*

Dokaz. Neka je dana konačna grupa $(A, *)$ i neka je X proizvoljan element iz te grupe. Želimo dokazati da je red tog elementa konačan. Kako je skup potencija $\{X^m : m \in \mathbb{Z}\}$ podskup skupa A, te eksponent m prolazi po svim elementima skupa $\mathbb{Z}$ koji je beskonačan skup, mora vrijediti: $X^a = X^b$, za neke $a, b \in \mathbb{Z}$ takve da vrijedi $a < b$. Onda je $X^{a-b} = I$, pa slijedi da X ima konačan red.

□

Očito je da je grupa G_R konačna, tj. da ima konačan broj elemenata. Drugim riječima, uočavamo da za svaki potez na Rubikovoj kocki vrijedi da ako ga ponovimo dovoljan broj puta, kocka će se opet vratiti u početno stanje.

Strogi dokaz svojstava suprotnih poteza

Kao što smo najavili u prvom poglavlju, svojstva suprotnih poteza koje smo dokazali na „naivan” način, dokazat ćemo i aksiomatski. Kako smo u prethodnom poglavlju precizno definirali grupu G_R, tek sada je moguće dati stroge dokaze.

Teorem 3.1.6. *Neka je dan osnovni potez X na Rubikovoj kocki. Vrijedi:* $\left(X^{-1}\right)^{-1} = X$.

Dokaz. Potez $\left(X^{-1}\right)^{-1}$ je suprotan potez poteza X^{-1}. Točnije, $\left(X^{-1}\right)^{-1}$ je inverzni element elementa X^{-1} grupe G_R. Prema definiciji inverznog elementa grupe, vrijedi:

$$X^{-1}(X^{-1})^{-1} = I. \ (1)$$

Sada promotrimo X^{-1} kao inverz elementa X grupe G_R. Vrijedi:

$$X^{-1}X = I. \ (2)$$

Izjednačavanjem lijevih strana jednakosti (1) i (2), imamo:

$$X^{-1}(X^{-1})^{-1} = X^{-1}X.$$

Slijedi:

$$(X^{-1})^{-1} = X,$$

što je i trebalo dokazati.

□

Dokažimo sada drugo svojstvo suprotnih poteza.

Teorem 3.1.7. *Neka su dani potezi X i Y na Rubikovoj kocki. Vrijedi:* $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.

Dokaz. Element $(XY)^{-1}$ je inverz elementa XY, tj. vrijedi:

$$XY(XY)^{-1} = I. \; (3)$$

Također, potez Y^{-1} je inverz elementa Y i vrijedi:

$$YY^{-1} = I.$$

Primjenjujući svojstva grupe G_R kao i prethodni teorem na gornju jednakost, imamo redom:

$$XYY^{-1} = XI.$$

$$XYY^{-1}X^{-1} = XIX^{-1}.$$

$$XYY^{-1}X^{-1} = IXX^{-1}.$$

$$XYY^{-1}X^{-1} = II.$$

$$XYY^{-1}X^{-1} = I. \; (4)$$

Izjednačavanjem lijevih strana jednakosti (3) i (4), imamo:

$$XY(XY)^{-1} = XYY^{-1}X^{-1}$$

Iz čega slijedi svojstvo koje smo i trebali dokazati:

$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}.$$

□

3.2 Ciklusi

Do sada smo rješenja zadataka na Rubikovoj kocki promatrali kao niz osnovnih poteza, odnosno rješenje jednog zadatka je bio jedan opći potez. Međutim, potez na Rubikovoj kocki možemo promatrati iz još jedne perspektive. Naime, potez možemo shvatiti kao zamjenu kockica. Promotrimo potez kao permutaciju kockica u idućem primjeru.

Primjer 3.2.1. *Potez* ***U*** *kockicu koja se nalazi na gornjem prednjem desnom vrhu Rubikove kocke premješta na gornji prednji lijevi vrh kocke. Zatim, taj potez premješta kockicu koja se prije poteza nalazila na gornjem prednjem lijevom vrhu kocke na gornji stražnji lijevi vrh, a kockica koja se prije poteza nalazila na tom vrhu, nakon poteza se nalazi na gornjem stražnjem desnom vrhu. Također, potez je premjestio i kockicu iz gornjeg stražnjeg desnog vrha u gornji prednji desni vrh. Uz pretpostavku da je kocka prije poteza* ***U*** *bila u početnom (složenom) stanju, efekt poteza možemo vidjeti na sljedećoj slici.*

Premještanje kockica opisano u prethodnom primjeru zapravo prikazuje pojam ciklusa. Definirajmo taj pojam preciznije.

Definicija 3.2.2. *Neka je dan skup S i neka je p proizvoljna permutacija skupa S, te $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Za permutaciju p kažemo da je ciklus duljine k ako vrijedi: $p(a_1) = a_2$, $p(a_2) = a_3$, ..., $p(a_{k-1}) = a_k$, $p(a_k) = a_1$, pri čemu su $a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, a_k$ međusobno različiti elementi skupa S. Ostale elemente permutacija p ostavlja neizmjenjenima. Ciklus p označavamo simbolom $(a_1 a_2 ... a_k)$. Ciklus duljine 2 zove se transpozicija.*

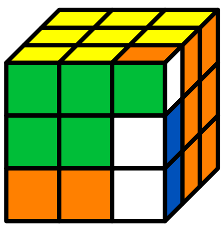
U slučaju da je S skup svih poteza na Rubikovoj kocki, ciklus $(x_1 x_2 ... x_k)$ označava onaj potez koji će kockicu x_1 premjestiti na položaj kockice x_2, a kockicu x_2 na položaj kockice x_3 i tako redom dok ne premjesti kockicu x_k na položaj kockice x_1.

Da bismo mogli rješavati zadatke povezane s ciklusima na Rubikovoj kocki, moramo dogovoriti oznake za kockice koje ćemo u ciklusima premještati.

Kao što smo već ranije u radu naveli, Rubikova kocka se sastoji od 20 „pomičnih" kockica. Primjerice, jedna od „pomičnih" kockica je ona koja se nalazi na gornjem prednjem desnom vrhu kocke. Tu kockicu ćemo označiti trima slovima — svako slovo predstavlja jednu stranu kocke. Dakle, oznaka opisane kockice je ufr.

I ostale kockice označavamo na takav način. Primijetimo da u oznaci za vršne kockice koristimo tri slova, dok u oznakama za bridne kockice koristimo dva slova.

Primjer 3.2.3. *Odredimo potez koji predstavlja ciklus koji kockicu dfr treba premjestiti na poziciju kockice ufr. Nakon tog poteza boja koja je gledala desno sada gleda prema gore. To je potez $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{R}$. Kocka nakon njega izgleda kao na sljedećoj slici.*



Primijetimo da je za položaj kocke koji smo odabrali kao standardni u ovom radu (prednja strana je zelena, a gornja žuta), narančasta tražena boja koja je prije poteza *gledala desno a nakon poteza gleda gore. Efekt opisanog poteza na vršne kockice možemo zapisati kao sljedeći ciklus:* $(dfr\ ufr\ dfl\ dbl)$.

Potez iz gornjeg primjera je konjugat, vrsta poteza koju ćemo definirati u sljedećem poglavlju.

Sada ćemo definirati pojam inverzije u permutaciji.

Definicija 3.2.4. *Neka je dana permutacija* $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ p(1) & p(2) & ... & p(n) \end{pmatrix}$. *Svaki par* (i, j) *takav da je* $i < j$ *i* $p(i) > p(j)$ *nazivamo inverzijom u permutaciji* p. *Broj svih inverzija u permutaciji* p *označavamo s* $I(p)$.

Još je važno definirati pojam parne odnosno neparne permutacije.

Definicija 3.2.5. *Za permutaciju* p *kažemo da je parna ako je* $I(p)$ *paran broj. U suprotnom, za* p *kažemo da je neparna permutacija.*

Kako bismo mogli koristiti činjenicu da svako stanje na Rubikovoj kocki možemo prezentirati pomoću ciklusa, dokažimo da se općenito svaka permutacija može prikazati kao kompozicija ciklusa.

Propozicija 3.2.6. *Svaka se permutacija može prikazati kao kompozicija ciklusa.*

Dokaz. Pokazat ćemo algoritam kojim ćemo proizvoljnu permutaciju p na skupu S prikazati kao kompoziciju ciklusa.

Pritom ćemo ciklus nadopunjavati do funkcije na cijelom skupu S tako da na ostatku skupa ciklus djeluje kao identiteta.

Algoritam glasi:

Sve dok postoji element $a \in S$ koji nije ni u jednom ciklusu:

1. Odaberi neki takav a.
2. Neka je n najmanji prirodni broj takav da je $p^n(a) = a$.
3. Konstruiraj ciklus $(a\ p(a)\ ...\ p^{n-1}(a))$.

   Vrati sve konstruirane cikluse.

Dokažimo sada da je ovaj algoritam ispravan, tj. da generira željene cikluse.

Pokažimo da je $(a\ p(a)\ ...\ p^{n-1}(a))$ zaista ciklus. Problem može nastati jedino ako $p^i(a) = p^j(a)$, za $0 < i < j < n$. Ali zato što je p bijekcija, slijedilo bi $a = p^{j-i}(a)$, a to je u kontradikciji s izborom broja n.

Pokažimo sada da dobiveni ciklusi koriste međusobno disjunkte skupove elemenata iz S. Pretpostavimo da je: $p^i(a) = p^j(b)$, uz pretpostavku da je a odabran prije b. Ako vrijedi $p^n(b) = b$, onda slijedi:

$$p^n(a) = p^{j+(n-i)}(b) = p^{j-i}(p^n(b)) = p^{j-i}(b),$$

dakle: $p^{m+i-j}(a) = b$, što je u kontradikciji s činjenicom da smo pretpostavili da b nije u ciklusu od a.

Jasno je da svaki element od S leži u nekom od konstruiranih ciklusa.

Također, kompozicija ovih ciklusa zapravo je permutacija p. Zaista, neka je $c \in S$ proizvoljan. Tada postoji b iz nekog ciklusa $i, j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $c = p^i(b)$. Tada se djelovanje permutacije p na element c podudara s djelovanjem ciklusa koji sadrži b, dok drugi ciklusi nemaju efekta na element c.

□

Uočimo i da vrijedi sljedeće: svaki 3-ciklus $(a\ b\ c)$ može se zapisati kao dvije transpozicije: $(a\ b\ c) = (a\ b)(b\ c)$. Štoviše, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 3.2.7. *Ciklus duljine n može se zapisati kao $n-1$ transpozicija. Posebno, neparni ciklusi su parne permutacije, a parni ciklusi su neparne permutacije.*

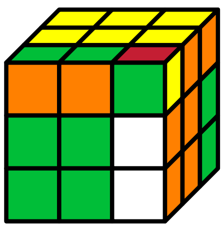
Dokaz. Tvrdnja slijedi iz činjenice da je $(a_1\ a_2\ ...\ a_n) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)...(a_{n-1}\ a_n)$. □

U četvrtom poglavlju ovog rada, bit će više riječi o permutacijama i njihovoj (ne)parnosti.

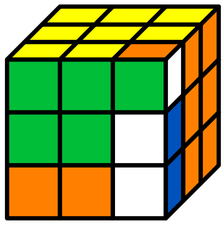
3.3 Konjugiranje

Definicija 3.3.1. *Neka su dana dva poteza X i Y na Rubikovoj kocki. Konjugat poteza X potezom Y je potez $Y^{-1}XY$, označavamo ga s X^Y.*

Primjer 3.3.2. *Potez* $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{RU}$ *je konjugat poteza* $\boldsymbol{R}$ *potezom* $\boldsymbol{U}$. *Kocka koja je prije poteza bila u sređenom stanju, nakon poteza izgleda kao na sljedećoj slici.*



Primjer 3.3.3. *Prisjetimo se primjera iz prošlog poglavlja. Potez* $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{R}$ *je konjugat poteza* $\boldsymbol{D}^{-1}$ *potezom* $\boldsymbol{R}$. *Kocka koja je prije poteza bila u sređenom stanju, nakon poteza izgleda kao na sljedećoj slici.*



Prisjetimo se, tim potezom smo htjeli kockicu dfr dovesti na poziciju kockice ufr. Pomoću ovog primjera možemo zaključiti koja je svrha definiranja konjugata. Naime, potez $\boldsymbol{R}^{-1}$ je doveo kocku u raspored u kojem smo pomoću poteza $\boldsymbol{D}^{-1}$ postigli traženo (zamjena kockica), a zatim je potez $\boldsymbol{R}$ vratio kockice na početni (gornji) sloj.

Iz primjera vidimo da se konjugati mogu koristiti za cikluse točno određenih kockica na Rubikovoj kocki. Ako potez X postiže određeni ciklus na kocki, njegov konjugat X^Y postiže isti tip ciklusa na drugom mjestu na kocki. Primjerice, ako znamo da X šalje lfu na poziciju rfu, rfu na rbu i rbu na lfu, onda njegovim konjugatima možemo postići i druge cikluse triju vršnih kockica. Recimo, ako treća kockica u potrebnom ciklusu nije rbu nego rbd, onda uz $Y = B$ ona dolazi na poziciju rbu, provođenjem X obavimo potrebnu zamjenu, a Y^{-1} ju vraća na polaznu poziciju.

3.4 Komutatori

Definicija 3.4.1. *Neka su dana dva poteza X i Y na Rubikovoj kocki. Komutator poteza X i Y je potez $XYX^{-1}Y^{-1}$, označavamo ga s $[X, Y]$.*

Ranije u radu smo objasnili da grupa G_R nije komutativna. Međutim, naravno da neki potezi na kocki komutiraju. Možemo se zapitati što je komutator poteza X i Y ako X i Y komutiraju.

Propozicija 3.4.2. *Neka su dana dva poteza X i Y. Vrijedi: X i Y komutiraju ako i samo ako je $[X, Y] = I$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da X i Y međusobno komutiraju, tj. da vrijedi: $XY = YX$. Provjerimo čemu je jednak njihov komutator $[X, Y]$. Primjenom redom definicije komutatora, svojstva komutativnosti, svojstva $XX^{-1} = I$, svojstva $XI = X$, te svojstva suprotnog poteza $XX^{-1} = I$, imamo:

$$[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1} = YXX^{-1}Y^{-1} = YIY^{-1} = YY^{-1} = I$$

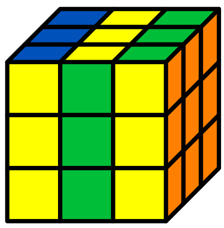
Sada pretpostavimo da su dani potezi X i Y takvi da vrijedi: $[X, Y] = I$. Želimo pokazati da sada vrijedi i $XY = YX$. Jasno je da je $XY = YX$ ako i samo ako $XYX^{-1}Y^{-1} = YXX^{-1}Y^{-1}$. Sada redom primjenom definicije komutatora, svojstva suprotnog poteza $XX^{-1} = I$, imamo:

$$\mathrm{XYX}^{-1}Y^{-1} = YXX^{-1}Y^{-1} \iff [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{YY}^{-1} \iff [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{I}.$$

Kako prema pretpostavci vrijedi $[X, Y] = I$, vrijedi i $XY = YX$, tj. potezi X i Y komutiraju. Time je dokazana tvrdnja propozicije.

□

Primjer 3.4.3. *Provjerimo na primjeru kako izgleda komutator dva komutativna poteza X i Y. Uzmimo da je $X = \textbf{R}$, $Y = \textbf{L}$. Očito je da ta dva poteza komutiraju. Kocka nakon poteza **RL** (ili **LR**), izgleda kao na sljedećoj slici.*



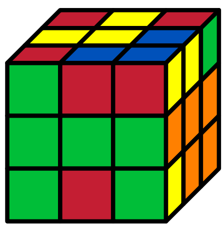
*Ako vratimo kocku na početnu poziciju (pomoću poteza $\textbf{L}^{-1}\textbf{R}^{-1}$), te zatim izvedemo komutator ta dva poteza, točnije potez: $\textbf{RLR}^{-1}\textbf{L}^{-1}$, vidimo da će se kocka ponovno naći u početnom (sređenom) stanju. Razlog tome je komutativnost poteza **R** i **L**.*

Iz ovog primjera se također vidi „priroda” komutativnih poteza. Naime, riječ je o potezima X i Y za koje vrijedi da je presjek skupa kockica na koje utječe potez X i skupa kockica na koje utječe potez Y, prazan skup.

Primjer 3.4.4. *Pokažimo djelovanje komutatora na kocku kada zadani potezi X i Y nisu osnovni potezi. Uzmimo: X=**FRU**, Y = **LU**. Primjetimo da je bez računa, potez na kocki teško izvesti. U sljedećem računu komutatora $[X, Y]$, koristimo svojstvo suprotnog poteza kao i svojstvo neutralnog elementa:*

$$[X, Y] = \textbf{FRULU}(\textbf{FRU})^{-1}(\textbf{LU})^{-1} = \textbf{FRULUU}^{-1}\textbf{R}^{-1}\textbf{F}^{-1}\textbf{U}^{-1}\textbf{L}^{-1} = \textbf{FRUL}I\textbf{R}^{-1}\textbf{F}^{-1}\textbf{U}^{-1}\textbf{L}^{-1} = \textbf{FRULR}^{-1}\textbf{F}^{-1}\textbf{U}^{-1}\textbf{L}^{-1}$$

Ako gornji potez izvedemo na sređenoj kocki, ona izgleda kao na sljedećoj slici.



Možemo se pitati koja korist od komutatora. Kao što i sama riječ komutator govori, cilj je postići da se dva poteza X i Y koja ne komutiraju, na neki način „približe" komutiranju, tj. da se smanji broj elemenata presjeka skupova kockica na koje djeluje potez X, odnosno potez Y.

U sljedeća tri primjera, pokazat ćemo praktične situacije u kojima nam komutatori mogu poslužiti.

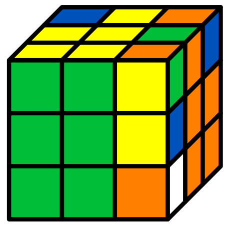
Primjer 3.4.5. *Slažući kocku, često možemo doći u situaciju u kojoj želimo neki vrh koji se nalazi na primjerice, gornjem sloju kocke premjestiti na drugu poziciju na gornjem sloju, bez promjene orijentacije tog vrha. Označimo taj vrh s abc. Za to će nam poslužiti komutator* $[X, Y]$*, pri čemu je X potez koji vrh premješta na donji sloj kocke, a Y je potez koji može urediti gornji sloj prije povratka vrha abc na gornji sloj. Iz definicije komutatora slijedi da je* $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$*, pa je očito što će opisani komutator redom činiti kocki:*

1. *X premješta vrh abc na donji sloj kocke.*
2. *Y „priprema" gornji sloj za povratak vrha abc na taj sloj.*
3. *X^{-1} vraća vrh abc na gornji sloj kocke. U ovom trenutku slaganja smo ispunili traženo, tj. vrh abc se nalazi na traženoj poziciji. Sada još samo moramo ukloniti neželjene posljedice dosadašnjih radnji na kocki.*
4. *Y^{-1} popravlja popratne pojave nastale na gornjem sloju kocke.*

Primjer 3.4.6. *Pomoću komutatora možemo napraviti 3-ciklus željenih bridova a da pritom ne premještamo vrhove s njihovih pozicija (iako im orijentacija neće biti očuvana). To možemo postići pomoću dva puta za redom izvedenim komutatorom dva osnovna poteza koja odgovaraju bilo kojim dvjema susjednim stranama (stranama koje nisu jedna nasuprot druge). Primjerice, strane U i R su susjedne i njima odgovaraju potezi* $\boldsymbol{U}$ *i* $\boldsymbol{R}$*. Stoga, izvodeći potez*

$$[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}][\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}] = \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1},$$

izvest ćemo 3-ciklus bridova: fr, ur i ub, točnije izvest ćemo ciklus (fr ur ub). Nakon tog poteza, kocka će izgledati kao na sljedećoj slici.

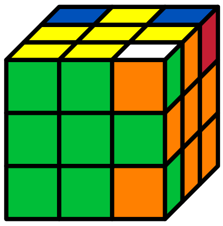


Primjetimo da su vrhovi, izuzev njihove orijentacije, ostali nepromjenjeni.

Primjer 3.4.7. *Slično kao u prethodnom primjeru, iskoristit ćemo komutatore kako bi postigli zamjenu željenih kockica, a pritom uspjeli očuvati pozicije nekih drugih kockica čija nam trenutna pozicija odgovara. Točnije, komutatore možemo koristiti kada želimo zamijeniti točno dva para vrhova a da pri tome ne mičemo bridove. To ćemo učiniti izvodeći tri puta za redom neki komutator dvaju poteza koji odgovaraju dvjema stranama koje su susjedne (kao i u prethodnom primjeru). Primjerice, možemo izvesti potez*

$$[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}][\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}][\boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}] = \boldsymbol{URU}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{URU}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{URU}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}.$$

Nakon tog poteza kocka će izgledati kao na sljedećoj slici.



Zanimljivo je uočiti da ovim potezom pozicija niti jednog brida na kockici nije promjenjena. Promatrajući potez iz perspektive ciklusa, zaključujemo da je riječ o ciklusima $(u f r$ $d f r)$ (ubr ubl).

3.5 Algoritam za slaganje Rubikove kocke

Iako smo u radu već opisali mnoge poteze koji nam pomažu složiti Rubikovu kocku, u ovom poglavlju ćemo te poteze sistematizirati i ponuditi algoritam za slaganje kocke.

Važno je napomenuti da je taj algoritam samo jedan od mnogih algoritama za slaganje kocke. Također, zanimljivo je da neki popularni algoritmi koje matematički laici uče kako bi znali složiti Rubikovu kocku, uopće nisu povezani s teorijom grupa. Međutim, jedan od najpopularnijih i najbržih algoritama (koji se ujedno i često koristi na natjecanjima u brzom slaganju kocke), povezan je s teorijom grupa. Upravo taj algoritam ćemo navesti u ovom poglavlju.

Popularno, algoritam se zove „Corners first" ili u prijevodu, „Najprije vrhovi". Kao što i sam naziv govori, riječ je o algoritmu u kojem ćemo najprije posložiti vrhove na kocki, a tek zatim slagati bridove.

Ukratko opisujući algoritam, možemo ga raščlaniti na četiri velika koraka:

1. Dovođenje vršnih kockica na ispravne pozicije.

2. Okretanje vršnih kockica u cilju postizanja njihove ispravne orijentacije.
3. Dovođenje bridnih kockica na ispravne pozicije.
4. Okretanje bridnih kockica u cilju postizanja njihove ispravne orijentacije.

Dovođenje vršnih kockica na ispravne pozicije

U ovom odlomku opisat ćemo poteze pomoću kojih ćemo dovesti sve vrhove na kocki na njihove ispravne pozicije.

Primjetimo zanimljivu primjenu „podijeli pa vladaj" strategije (koju smo objasnili u poglavlju „Božji broj"):

Problematiku slaganja vrhova možemo svesti na tri manja istovjetna problema u kojem se svaki od njih sastoji od slaganja vrhova na pojedinoj strani kocke. Primjerice, možemo promatrati slaganje vrhova na stranama: F, R i B (uočimo da ako složimo vrhove na tim stranama, zapravo smo složili svih osam vrhova na Rubikovoj kocki).

Promatramo proizvoljnu stranu A Rubikove kocke. Da bismo složili sva četiri vrha na toj strani, dovoljno je znati raditi sljedeće:

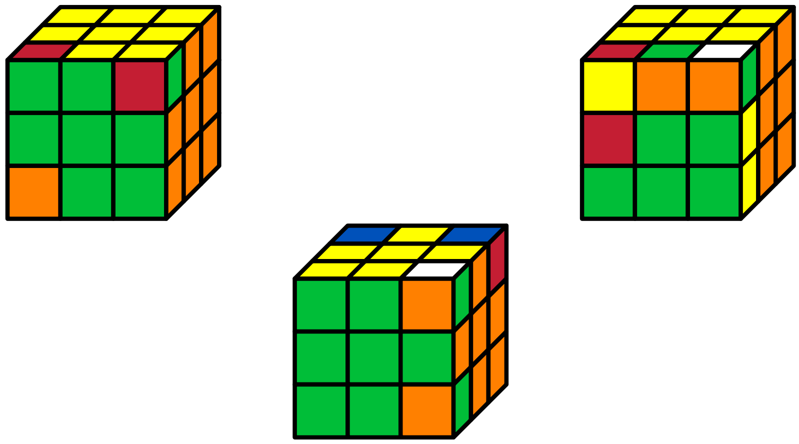
1. 3-ciklus vrhova strane A
2. zamjena dva susjedna vrha strane A i dva susjedna vrha strane nasuprotne strani A
3. zamjena dva susjedna vrha strane A.

Slijedi popis poteza pomoću kojih možemo izvesti gore navedene radnje na kocki. Pri tome bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti da je $A = F$:

1. $[\mathbf{D}^{\mathbf{L}^{-1}}, \mathbf{U}] = (dfl, ufl, ufr)$
2. $[\mathbf{R}, \mathbf{U}]^3 = (ufr, dfr)(ubr, ubl)$
3. $\mathbf{L}^{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{L}^{-1})^{\mathbf{FD}} = (ufr, dfr)$[1].

Efekti tih poteza na složenoj kocki prikazani su redom slijeva udesno na sljedećoj slici.

[1] Ovaj potez radi i određene permutacije bridnih kockica, koje ovdje nećemo zapisati jer nisu relevantne za ovaj dio slaganja kocke.



Uočimo da se zaokretom kocke potezi lako mogu prevesti u poteze koje odgovaraju nekoj drugoj strani. Također, primjetimo učestalost korištenja konjugata i komutatora kojom se potvrđuje širina njihove primjene te nužnost učenja istih u cilju razumijevanja postupaka na kocki usmjerenih prema slaganju iste a izravno povezanih s teorijom grupe.

Primijetimo da se 4 vrha jedne strane uvijek lako slože dok ne moramo paziti na ostale kockice, pa nam je za ovaj korak algoritma dovoljno znati samo poteze koji se odnose na jednu stranu kocke.

Okretanje vršnih kockica

Kako bismo mogli ispravno okrenuti sve vrhove na kocki (koji se već nalaze na ispravnim pozicijama), potrebno je znati izvršiti sljedeće radnje na kocki:

1. Okretanje dva susjedna vrha u suprotnim smjerovima.
2. Okretanje tri vrha jedne strane u istom smjeru.
3. Okretanje četiri vrha jedne strane, po dva susjedna u jednom i drugom smjeru.
4. Okretanje četiri vrha jedne strane, po dva dijagonalno nasuprotna u jednom i drugom smjeru.

Kada govorimo o okretanju vrhova, bitno je znati za koliko stupnjeva i u kojem smjeru okrećemo pojedini vrh. Primjerice, kockicu ufr možemo okrenuti za 120° u smjeru suprotnome od smjera kazaljki na satu. U tom slučaju, taj okret ćemo označiti s $ufr+$. Ukoliko je riječ o okretu iste kockice za 120° u smjeru kazaljki na satu, pisat ćemo $ufr-$. Za okrete koji su gore nabrojani, u nastavku poglavlja bit će precizirano pomoću objašnjenih oznaka o kojem smjeru okreta je riječ.

Napomenimo ovdje da je nemoguće da je samo jedan vrh na kocki krivo orijentiran ili da su dva vrha okrenuta tako da su zaokrenuti za isti kut u suprotnim smjerovima. To je posljedica tzv. osnovnog teorema o grupi kocke, kojeg ćemo iskazati na kraju ovog rada.

Nadalje, ukoliko vrhovi koje treba okrenuti nisu svi na istoj strani, lako je osmisliti potez X takav da on dovede kocku u stanje u kojem su svi vrhovi koje želimo okrenuti na istoj strani. U tom slučaju naravno nakon okretanja provodimo X^{-1} - uočimo konjugiranje!

Uzevši u obzir analognu argumentaciju kao u prethodnom poglavlju, može se zaključiti da je za prethodne radnje dovoljno znati da one redom odgovaraju sljedećim potezima na kocki:

1. $\mathbf{B}^2[(\mathbf{D}^2)^{\mathbf{R}}, (\mathbf{U}^2)^{\mathbf{B}}]^2\mathbf{B}^2 = ufr+\ dbl-$

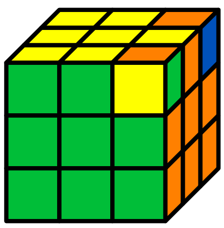
2. $(\mathbf{R}^{-1})^{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{B}^{-1}, \mathbf{R}^2] = ubr-\ dfr-\ dbr-$

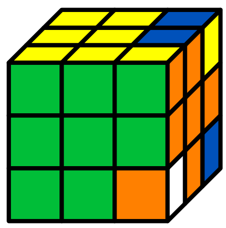
3. $([\mathbf{R}, \mathbf{B}]^2)^{\mathbf{D}^{-1}} = ufr+\ ubr+\ dfr-\ dbr-$

4. $(\mathbf{R}^{-1})^{\mathbf{B}}[\mathbf{R}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}]\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}^2)^{\mathbf{B}} = ufr+\ dbr+\ ubr-\ dfr-$

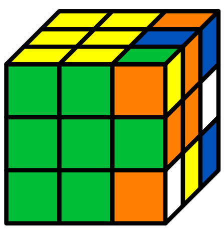
Izvodeći gornje poteze na sredenoj kocki, možemo uočiti da niti jedan od njih ne remeti poziciju bilo koje vršne kockice, međutim neki od njih za posljedicu imaju razmještanje bridnih kockica.

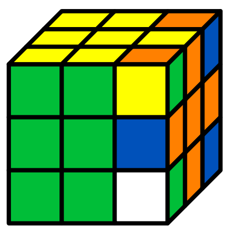
Sljedeća slika, s lijeva na desno redom ilustrira prvi i drugi gornji potez.





Sljedeća slika, s lijeva na desno redom ilustrira treći i četvrti gornji potez.





Dovođenje bridnih kockica na ispravne pozicije

Za dovođenje bridova na ispravne pozicije na kocki, dovoljno je znati izvršiti sljedeće:

1. 3-ciklus bridnih kockica jedne strane.
2. Zamjena dvije i dvije nasuprotne bridne kockice na susjednim stranama.
3. Zamjena dvije i dvije nasuprotne bridne kockice na jednoj strani.
4. Zamjena dvije i dvije susjedne bridne kockice na jednoj strani.

Napomenimo ovdje da je nemoguće da je potrebno zamijeniti samo dvije bridne kockice. To je posljedica teorema 4.4.2. kojeg ćemo dokazati kasnije. Primijetimo i da je, kao što smo komentirali u odlomku „Dovođenje vršnih kockica na ispravne pozicije”, dovoljno znati izvoditi te poteze na samo po jednoj strani kocke (u našem slučaju desnoj):

1. $((\mathbf{LF}^2)^{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^2)^{BL^2} = (uf, df, fl)$
2. $(\mathbf{R}^2\mathbf{U}^2)^3 = (uf, ub)(fl, bl)$
3. $(\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{U}^2)^{\mathbf{L}})^{\mathbf{F}}\mathbf{U}(\mathbf{U}^2)^{\mathbf{R}^{-1}} = (uf, ub)(ul, ur)$
4. $((\mathbf{F}^2)^{\mathbf{R}^2\mathbf{L}^2}\mathbf{B}^2)^{\mathbf{DR}^2\mathbf{L}^2} = (uf, ur)(ul, ub)$

Nakon što se gornji potezi raspišu i izvedu na kocki, vidi se da niti jedan od poteza ne utječe na vršne kockice niti na pozicije ostalih bridnih kockica.

Sljedeća slika, s lijeva na desno redom ilustrira prvi i drugi gornji potez.

Sljedeća slika, s lijeva na desno redom ilustrira treći i četvrti gornji potez.

Okretanje bridnih kockica

Iz već spomenutog osnovnog teorema o grupi Rubikove kocke slijedi da je nemoguće da bude izokrenuta samo jedna bridna kockica. Štoviše, iz tog teorema i posljednje propozicije u poglavlju „Ciklusi" slijedi da se svaka moguća permutacija vrhova može rastaviti na uzastopne zamjene (transpozicije) po dva vrha.

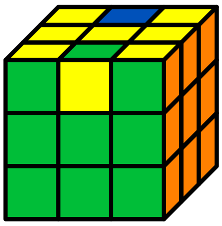
Stoga je za ispravno okretanje svih bridnih kockica (uočimo da se one sad sve nalaze na ispravnim pozicijama) dovoljno znati okrenuti samo dvije. Argumentacija kao prije povlači da bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da su te dvije nasuprotne na jednoj strani.

Promatramo primjerice potez:

$$(\mathbf{FR}^{-1})^{\mathbf{U}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{U}(\mathbf{RU}^{-1})^{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1})^{\mathbf{L}} = uf, ub.$$

Uočimo da taj potez, osim okretaja dva nasuprotna brida jedne strane kocke, nema niti jedan drugi nusefekt.

Sljedeća slika ilustrira gornji potez.



Poglavlje 4

Grupa 15-puzzle

4.1 Povijest i arhitektura 15-puzzle

Kao što je već napomenuto u uvodu ovog rada, Rubikova kocka nije jedina igračka na kojoj možemo uočiti svojstva grupe. Između ostaloga, popularna igračka 15-puzzle također je povezana s teorijom grupa.

Sljedeća slika prikazuje fotografiju igračke 15-puzzle.

Riječ je o slagalici koja se sastoji od okvira i 15 pločica jednake veličine koje se nalaze unutar tog okvira. Svaka pločica je označena jednim brojem između 1 i 15. Pločice su smještene unutar okvira tako da popunjavaju površinu 4×4 s time da jedno mjesto za pločicu nije ispunjeno (jer mjesta ima 16, a pločica 15). To mjesto nazivamo praznim mjestom za pločicu. Slagalica se smatra riješenom kada su pločice poredane u ispravnom redoslijedu u uzlaznom smislu. Ispravan redoslijed u uzlaznom smislu podrazumijeva sljedeći raspored pločica: na prvom gornjem lijevom mjestu za pločicu nalazi se pločica koja je označena brojem 1, na drugom gornjem lijevom mjestu za pločicu nalazi se pločica koja je označena brojem 2 te tako redom do pločice označene brojem 15 koja se nalazi na trećem donjem lijevom mjestu za pločicu dok se prazno mjesto za pločicu nalazi u donjem desnom kutu okvira.

Cilj zagonetke je slagalicu koja nije riješena dovesti u riješeno stanje, tj. poredati pločice u gore opisanom redoslijedu, ali samo pomicanjem pločica u smislu klizanja, tj. bez podizanja pločica izvan okvira.

Sljedeća tablica predstavlja prikaz slagalice u riješenom stanju.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Dok je izumitelj Rubikove kocke bio akademski profesor, zanimljivo je da je igračku 15-puzzle izumio upravnik pošte iz New Yorka. 15-puzzle je starija igračka od Rubikove kocke, naime njena prva verzija datira čak iz 1874. godine. Za razliku od Rubikove kocke, ova igračka je imala nekoliko varijacija prije nego je dostigla svoju konačnu formu. Prva verzija 15-puzzle se sastojala od 16 pločica numeriranih od 1 do 16 koje je trebalo rasporediti unutar okvira tako da za svaki red slagalice vrijedi da je zbroj brojeva na pločicama u tom redu jednak 34, tj. tako da čine magični kvadrat..

Sljedeća tablica prikazuje jedno od rješenja prve verzije zagonetke.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Za razliku od te verzije, današnja verzija 15-puzzla ima jedinstveno rješenje.

4.2 Grupa 15-puzzle

Iako smo već koristili pojmove pločica na 15-puzzle slagalici te potez na slagalici, sada ćemo te pojmove egzaktno definirati.

Definicija 4.2.1. *Pločica na 15-puzzle slagalici je uređen par* (x, y)*,* $x \in \{1, 2, ..., 15\}$*,* $y \in \{1, 2, ..., 16\}$ *pri čemu* x *predstavlja broj kojim je označena pločica na slagalici, a* y *predstavlja redni broj mjesta za pločicu na slagalici.*

Također, umjesto pločica (x, y) možemo govoriti i pločica x koja se nalazi na y mjestu.

Sada ćemo definirati osnovni i opći potez na 15-puzzle slagalici.

Definicija 4.2.2. *Neka je zadano stanje na 15-puzzle slagalici. Osnovni potez je klizno pomicanje pločice x koja se nalazi na y mjestu za jedno mjesto za pločicu u onom od smjerova koje dopušta okvir slagalice. Drugim riječima, osnovni potez pločice* (x, y) *je klizno pomicanje te pločice nakon kojeg je ona zadana s* (x, z)*, pri čemu je* $z \in \{y-4, y-1, y+1, y+4\} \cap \{1, 2, ..., 16\}$.

Definicija 4.2.3. *Neka je zadano stanje na 15-puzzle slagalici. Potez na slagalici je klizno pomicanje pločica tako da pločice ostaju unutar okvira slagalice. Potez označavamo kao niz osnovnih poteza koji ga sačinjavaju.*

Primjer 4.2.4. *Neka je zadano riješeno stanje slagalice. Nakon poteza koji pločicu* 12 *koja se nalazi na* 12 *mjestu za pločicu, premiješta na* 16 *mjesto za pločicu, izgled slagalice odgovara sljedećem prikazu.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	14	15	12

Kako ćemo u daljnjim zadacima s 15-puzzle slagalicom koristiti samo smislene poteze na slagalici, nema potrebe da potez označavamo kao uređeni par. Primjerice, umjesto da osnovni potez iz prethodnog primjera označimo kao prelazak pločice iz stanja $(12, 12)$ u stanje $(12, 16)$, reći ćemo samo da je pločica 12 sada na poziciji 16. Taj potez možemo označiti kao (12 16).

Primjetimo da prazno mjesto za pločicu zapravo označavamo brojem 16. Tako ćemo to činiti i u nastavku rada.

Primjer 4.2.5. *Neka je zadano rješeno stanje slagalice. Opišimo potez koji će za posljedicu imati rotaciju u smjeru kazaljki na satu pločica* 11, 12 *i* 15*. Riječ je o potezu* (12 16)(15 16)(11 16)(12 16)*. Prikažimo svaki korak u potezu tablicom.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	14	15	12

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		11
13	14	15	12

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	15	11
13	14		12

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	15	11
13	14	12	

4.3 Rješenje 15-puzzle

Kao što smo zaključili u poglavlju „Povijest i arhitektura 15-puzzle", očito je da 15-puzzle (u svom današnjem obliku) ima jedinstveno rješenje. Međutim, egzistenciju rješenja za proizvoljni dani raspored pločica na slagalici, nije jednostavno provjeriti.

Pitamo se, ako nam netko zada 15-puzzle slagalicu koja nije riješena, kako ćemo znati je li ona rješiva, točnije, je li zadani redoslijed pločica nastao klizanjem pločica iz početnog (riješenog) stanja slagalice ili je riječ o rasporedu koji je dobiven podizanjem pločica izvan okvira? Ovaj problem možemo usporediti s razlikom između rasporeda kockica na Rubikovoj kocki dobivenog potezima na kocki i rasporeda kockica dobivenog rastavljanjem i ponovnim sastavljanjem kocke.

Da bismo se približili rješenju tog problema, potrebno je prisjetiti se pojma permutacije koji smo definirali ranije u radu. Permutaciju skupa S smo definirali kao uređenu n-torku članova tog skupa. Međutim, permutaciju možemo definirati i kao bijekciju sa skupa S u skup S. Primjerice, jedna permutacija može uređenoj trojci $(1, 2, 3)$ pridružiti uređenu trojku $(3, 1, 2)$.

Također je važno uočiti da ako želimo promatrati permutacije povezane sa slagalicom 15-puzzle, dovoljno je promatrati permutacije skupa $\{1, 2, ..., 16\}$.

Sada možemo za $n \in N$ precizno definirati permutaciju skupa $\{1, 2, ..., n\}$.

Definicija 4.3.1. *Neka je $n \in N$. Permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ je bilo koja bijekcija p : $\{1, 2, .., n\} \rightarrow \{1, 2, .., n\}$.*

Uobičajeno je permutacije zapisivati u tablicu sljedećeg oblika:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ p(1) & p(2) & ... & p(n) \end{pmatrix}.$$

Uočimo, svaki element skupa $\{1, 2, ..., n\}$ u donjem retku tablice pojavljuje se točno jednom, jer je p bijekcija.

Primjer 4.3.2. *Primijetimo da stanje na 15-puzzle slagalici možemo promatrati kao permutaciju skupa* $\{1, 2, ..., 16\}$. *Primjerice, promotrimo sljedeće stanje na 15-puzzle slagalici.*

5	1	2	3
6	7	4	8
9	10	11	12
14	15	13	

To stanje možemo promatrati kao permutaciju:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Sljedeći teorem nam daje odgovor na naše pitanje, pitanje o egzistenciji rješenja zadanog stanja 15-puzzle slagalice. Dokaz teorema može se pronaći u knjizi „The 15 Puzzle book”, koja je i navedena u bibliografiji. Verzija ovog teorema primjenjena na Rubikovoj kocki, dokazana je u sljedećem poglavlju.

Teorem 4.3.3. *Neka je zadano stanje 15-puzzle slagalice takvo da se prazno mjesto za pločicu nalazi u donjem desnom kutu slagalice i neka je to stanje zadano permutacijom p. Tada je stanje rješivo ako i samo ako je permutacija p parna.*

Iako nas uvjet prethodnog teorema na prvu možda može začuditi, riječ je o jednostavno ispunjivom uvjetu. Naime, očito je da je zadano stanje 15-puzzle slagalice jednostavno dovesti do stanja za koje vrijedi da se prazno mjesto za pločicu nalazi u donjem desnom kutu slagalice. Takvo novo stanje nije jedinstveno. Također je očito da prelazak u novo stanje slagalice ne utječe na rješivost stanja, pošto pretpostavljamo da do novog stanja dolazimo kliznim pomicanjem pločica.

Primjer 4.3.4. *Provjerimo rješivost sljedećeg stanje 15-puzzle slagalice.*

2	7	12	13
8	5	4	6
9	10	11	14
15	3	1	

Najprije stanje prikažimo u obliku permutacije:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 13 & 8 & 5 & 4 & 6 & 9 & 10 & 11 & 14 & 15 & 3 & 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Odredimo redom inverzije u permutaciji p.

$$\begin{gathered} (1,15) \\ (2,6), (2,7), (2,8), (2,14), (2,15) \\ (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (3,9), (3,10), (3,11), (3,14), (3,15) \\ (4,5), (4,6), (4,7), (4,8), (4,9), (4,10), (4,11), (4,14), (4,15) \\ (5,6), (5,7), (5,8), (5,14), (5,15) \\ (6,7), (6,14), (6,15) \\ (7,14), (7,15) \\ (8,14), (8,15) \\ (9,14), (9,15) \\ (10,14), (10,15) \\ (11,14), (11,15) \\ (12,14), (12,15) \\ (13,14), (13,15) \\ (14,15) \end{gathered}$$

Izbrojimo sve inverzije u permutaciji p. Dobivamo broj 47. *Kako je riječ o neparnom broju, slijedi da je p neparna permutacijama. Prema prethodnom teoremu zaključujemo da zadano stanje slagalice nije rješivo.*

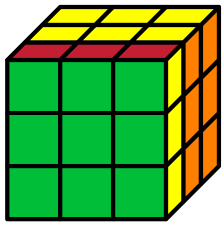
4.4 Parnost Rubikove kocke i 15-puzzle slagalice

Kao što smo vidjeli u teoremu 4.3.3 ako je stanje na 15-puzzle slagalici rješivo, ono odgovara permutaciji koja je parna. Zanimljivo je uočiti da ta činjenica vrijedi i na Rubikovoj kocki. Tu činjenicu ćemo precizno iskazati kao teorem te ju i dokazati.

Prije toga, u cilju iskazivanja teorema, potrebno je istaknuti da permutacijom p na Rubikovoj kocki smatramo opis njenog trenutnog stanja kao posljedice niza ciklusa - koji se pak mogu opisati kao niz zamjena po dvije kockice.

Pojam permutacije p na Rubikovoj kocki možemo prikazati na sljedećem primjeru.

Primjer 4.4.1. *Neka je promatrano stanje Rubikove kocke ono koje nastaje nakon osnovnog poteza **F**. U tom stanju, Rubikova kocka izgleda kao na sljedećoj slici.*



*Potez **F** može se opisati i kao sljedeći niz ciklusa:*

$$(fl\ fu\ fr\ fd)\ (ful\ fur\ fdr\ fdl).$$

Sada taj niz ciklusa možemo opisati kao sljedeći niz zamjena po dvije kockice na Rubikovoj kocki:

$$(fl\ fu)\ (fl\ fr)\ (fl\ fd)\ (ful\ fur)\ (ful\ fdr)\ (ful\ fdl).$$

*Primjetimo da je stanje rješivo. To očito vrijedi jer je stanje dobiveno potezima, točnije samo jednim potezom **F** (a nije dobiveno premještanjem kockica u smislu rastavljanja i ponovnog sastavljanja kocke). Primjer rješenja stanja je potez $\mathbf{F}^{-1}$, što slijedi iz činjenice da je opći suprotni potez inverzni element u grupi G_R (ili se može vidjeti izvođenjem poteza $\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}$ na sređenoj kocki).*

*Iz činjenice spomenute na početku ovog poglavlja, slijedi da je permutacija na Rubikovoj kocki koja odgovara potezu **F**, parna. Permutacija je parna ako je broj zamjena kockica paran. Vidimo da je to točno jer smo imali ukupno 6 zamjena.*

Zaključujemo da na ovom primjeru tvrdnja s početka poglavlja, vrijedi.

Iskažimo sada spomenutu činjenicu kao teorem.

Teorem 4.4.2. *Neka je dano stanje na Rubikovoj kocki rješivo, tj. neka je dobiveno potezima. Slijedi da se stanje može opisati parnom permutacijom p.*

Dokaz. Teorem možemo iskazati i na ovaj način:

Neka je dano stanje na Rubikovoj kocki rješivo, tj. neka je dobiveno s n osnovnih poteza, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$. Slijedi da se stanje može opisani parnom permutacijom p.

Dakle, trebamo dokazati da je nakon bilo kojeg $n \in \mathbb{N}$ broja osnovnih poteza izvedenih na kocki, broj zamjena kockica kojim se može prikazati permutacija p, paran broj.

Dokaz te tvrdnje provest ćemo matematičkom indukcijom.

Provjerimo da tvrdnja vrijedi za $n = 0$.

Za $n = 0$, kocka je u riješenom stanju. Permutaciju koja odgovara tom stanju možemo prikazati kao 0 zamjena po dvije kockice. Kako je nula paran broj, tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki broj $k \in \mathbb{N}$, tj. da vrijedi: stanje na Rubikovoj kocki nakon k osnovnih poteza, može se prikazati kao paran broj zamjena kockica.

Provjerimo sada vrijedi li tvrdnja i za $k + 1$.

Stanje kocke nakon k osnovnih poteza je prikazivo kao paran broj zamjena po dvije kockice, prema pretpostavci indukcije. Želimo dokazati da ako tom nizu osnovnih poteza, dodamo još jedan osnovni potez - stanje će se i dalje moći prikazati kao paran broj zamjena po dvije kockice.

Pod osnovnim potrzima podrazumjevamo sljedeće poteze: $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{U}^{-1}$, $\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{R}^{-1}$, $\mathbf{L}^{-1}$.

Za potez $\mathbf{F}$ već smo vidjeli pomoću prethodnog primjera, da se može prikazati kao paran broj zamjena kockica (tj. kao niz $(fl\ fu)$ $(fl\ fr)$ $(fl\ fd)$ $(ful\ fur)$ $(ful\ fdr)$ $(ful\ fdl)$). Analogno se pokaže i za sve ostale osnovne poteze.

Slijedi da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Sada prema aksiomu indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki broj $n \in \mathbb{N}$. Time je teorem dokazan.

□

Primijetimo da iz ovog teorema i propozicije s kraja poglavlja "Ciklusi" te činjenice da je nemoguće zamijeniti bridnu i vršnu kockicu trivijalno slijedi sljedeći korolar.

Korolar 4.4.3. *Na Rubikovoj kocki (bez rastavljanja) nemoguće je postići zamjenu samo dvije vršne ili bridne kockice.*

Primijetimo da svako - dopustivo ili ne - stanje Rubikove kocke možemo poistovjetiti s uređenom četvorkom (V, v, E, e). Pritom je V permutacija vrhova (dakle, $V \in S_8$) i E permutacija bridova (dakle, $E \in S_{12}$[1]). S druge strane, v i e opisuju orijentacije vršnih odnosno bridnih kockica. Svaki vrh može biti zaokrenut za 0, $1 \cdot 120°$ ili $2 \cdot 120°$ u pozitivnom smjeru, dakle se orijentacija svakog od 8 vrhova može opisati oznakom iz tročlanog skupa $\{0, 1, 2\}$, odnosno $v \in \{0, 1, 2\}^8$. Slično se orijentacija bridnih kockica može shvatiti kao uređena 12-orka elemenata dvočlanog skupa, tj. $e \in \{0, 1\}^{12}$.

Iz teorema 4.4.2 slijedi sljedeći korolar.

Korolar 4.4.4. *Permutacije V i E moraju biti iste parnosti ako odgovaraju dopustivom stanju kocke (dobivenom bez rastavljanja).*

Dokaz. Slijedi iz činjenice da je kompozicija bilo dviju parnih bilo dviju neparnih permutacija je parna, a kompozicija parne i neparne permutacije je neparna. □

[1]Sa S_n označena je simetrična grupa svih permutacija n-članog skupa.

Može se dokazati poboljšanje prethodnog korolara, koje potpuno precizira elemente grupe G_R, tj. sva dopustiva stanja kocke:

Teorem 4.4.5. *(Osnovni teorem o Rubikovoj kocki) Uređena četvorka* $(V, v, E, e) \in S_8 \times \{0, 1, 2\}^8 \times S_{12} \times \{0, 1\}^{12}$ *odgovara dopustivom stanju Rubikove kocke ako i samo ako vrijedi - V i E su iste parnosti, - zbroj svih* 8 *koordinata od v je djeljiv s 3 i - zbroj svih* 12 *koordinata od e je paran.*

Kako je dokaz ovog teorema dosta zahtjevan, čitatelja za isti upućujemo na [1] (str. 225–227).

Koristeći kombinatorno pravilo produkta te neke naprednije konstrukcije iz teorije grupa (posebice semidirektni produkt) pokazuje se da vrijedi, kako je najavljeno na početku:

Teorem 4.4.6. $|G_R| = 8! \cdot 12! \cdot 2^{10} \cdot 3^7 = 43252003274489856000$..

Kao i za prethodno iskazani teorem, za dokaz upućujemo na [1]. Primijetimo da je stoga od svih mogućih stanja Rubikove kocke, bez rastavljanja moguće dobiti samo $\frac{1}{12}$ njih. Dakle, ako rastavite Rubikovu kocku i nasumce je ponovno sastavite, vjerojatnost da ćete ju moći srediti bez rastavljanja je samo $\frac{1}{12}$.

Poglavlje 5

Zaključak

U ovom diplomskom radu, proces slaganja Rubikove kocke prikazan je iz perspektive teorije grupa. Tako je jedna od glavnih perspektiva rada upravo njegova primjena u realizaciji uvoda u teoriju grupa. Uzimajući u obzir da se teorija grupa obrađuje u sklopu visokoškolske matematike, rad se može koristiti kao motivacija za neke kolegije povezane s algebarskim strukturama, konkretnije za poglavlje o algebarskoj strukturi grupe.

Osim tema obrađenih u radu, o grupi Rubikove kocke u kontekstu uvoda u teoriju grupa, možemo pričati i o nekim složenijim rezultatima kao što je činjenica da je moguće izvrnuti vršne kockice Rubikove kocke samo tako da je zbroj kutova okreta na svima višekratnik od $360°$.

Međutim, kako je širi smisao ovog rada slanje popularizacijske poruke o mogućnostima povezivanja matematičkih pojmova s predmetima iz svakidašnjeg života, rad se može iskoristiti i u svrhu prezentiranja teorije grupa populaciji koja nije nužno matematički obrazovana (primjerice, učenici srednje škole ili polaznici tematske radionice). Tako je spajanjem teorije grupe s igračkom, dana jedna od mogućih podloga za uspostavljanje kvalitetnog kontakta laika s matematikom.

Pri tome je važno istaknuti dvije činjenice. Naime, unatoč uvriježenom stavu o matematici kao izrazito teško dokučivoj i ponekad suhoparnoj znanosti, koji prevladava u današnjem društvu, ovim se radom nastoji poručiti da se ona može prezentirati pomoću nećeg što isto to društvo već dugi niz godina smatra izvorom intrige i zabave, a to je sama Rubikova kocka. Druga činjenica se odnosi na dubinu komunikacijskog odnosa između matematike kao znanosti i matematičkih laika. Naime, taj početni kontakt ne mora biti površan - teorija grupa je visokoškolska matematička disciplina a to nas svejedno ne sprječava da ju vizualiziramo i tako reći, taktiliziramo, prikazujući ju kao znanstveno oružje u borbi protiv naizgled nerješive zagonetke koju skriva Rubikova kocka.

Bibliografija

1. D. Joyner, Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other
2. F. M. Brückler, Grupa Rubikove kocke, Poučak 36 (2009) 4-15
3. Mathematical Toys, The Johns Hopkins University Press, 2002.
4. D. Bump, Mathematics of the Rubik's Cube, http://match.stanford.edu/bump/rubik.html
5. T. Davis, Group Theory via Rubik's Cube, http://www.geometer.org/rubik/group.pdf
6. J. Slocum, D. Sonneveld, The 15 Puzzle Book, 2006.
7. Lecture Notes on the Mathematics of the Rubik's Cube, http://www.permutationpuzzles.org/rubik/webnotes/rubik$_{n}$*otes.html*

Sažetak

Glavni cilj ovog diplomskog rada bio je prezentirati matematički aspekt popularne Rubikove kocke. Pritom je stavljen naglasak na teoriju grupa, a sporedno je obrađena i kombinatorička problematika povezana s Rubikovom kockom.

Koristeći činjenicu da skup svih poteza na Rubikovoj kocki čini algebarsku strukturu grupe, predočena su neka strukturalna svojstva kao što su asocijativnost, egzistencija neutralnog i inverznog elementa, ali i dva osnovna svojstva inverznog elementa koji su u kontekstu ove teme nazvani svojstvima suprotnih poteza na Rubikovoj kocki. Također, prikazujući efekte konjugata i komutatora na Rubikovoj kocki kao i poteze koji za posljedicu imaju određene cikluse, predočeni su složeniji pojmovi teorije grupa na intuitivan i razumljiv način.

Po pitanju kombinatorike, u radu se ukazalo na broj svih mogućih stanja Rubikove kocke kao i na minimalan broj poteza dovoljnih za slaganje kocke koja se nalazi u proizvoljnom stanju. Tom prilikom posredno je korišten i pojam metrike iz koje promatramo poteze na Rubikovoj kocki te je time ukazano da je definiranje poteza na Rubikovoj kocki kao okreta jedne njene strane upravo za 90°, samo jedna moguća definicija koja generalno ovisi o odabiru metrike (u ovom slučaju riječ je o tzv. četvrt-metrici).

U zadnjem dijelu rada, dan je osvrt na grupu koja se može uočiti na popularnoj slagalici 15-puzzle. Cilj osvrta bio je komparativne prirode pa su tako istaknute neke sličnosti u procesima rješavanja te slagalice i slaganja Rubikove kocke.

Summary

The main objective of this thesis was to represent the mathematical aspects of the popularly known Rubik's cube. Thereby we elaborated on group theory and analogously on combinatoric problems tied to Rubik's cube.

Using the fact that the set of all moves on a Rubik's cube generates an algebraic structure of a group, certain structural properties are demonstrated such as associativity, identity, and invertibility, as well as two basic properties of invertibility which in the context of this thesis are called properties of opposite moves on the Rubik's cube. Furthermore, by displaying effects of the conjugate and commutator on the Rubik's cube as moves which have assigned cycles as a consequence, complex concepts from group theory are presented with an intuitive and reasonable approach.

On the issue of combinatorics, the thesis touched upon the number of all possible combinations of the Rubik's cube, as well as the minimum number of moves sufficient for solving a cube given an arbitrary position. In this case, a parameterized metric was used indirectly for observing moves on a Rubik's cube, which demonstrated that defining a move on the Rubik's cube as a turn of one of its sides by exactly 90 degrees is only one of the possible definitions of a move which generally depends on the selection of its metric (In this case, the selection is of the so-called quarter metric).

In the last chapter, a review was given of the algebraic group which can be derived from the popular fifteen piece sliding puzzle game. The purpose of this review was of a comparative nature, and as such certain similarities are highlighted between the processes of solving the fifteen piece puzzle and Rubik's cube.

Životopis

Marija Benko rođena je 23. lipnja 1989. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završila je u Sesvetama 2004. godine. U četvrtom razredu osnovne škole, upisuje osnovnu glazbenu školu te maturira 2005. godine na odjelu za flautu Osnovne glazbene škole Zlatka Grgoševića u Sestvetama. Nakon završene osnovne škole, upisuje Klasičnu gimnaziju u Zagrebu koju završava 2008. godine. Iste godine, na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, upisuje preddiplomski studij Matematika.

Nakon završenog preddiplomskog studija, na istom fakultetu upisuje diplomski studij Matematika i informatika, nastavnički smjer. Interes na studiju usmjerava prema popularizaciji matematike te tokom studija organizira i vodi više matematičkih i informatičkih radionica, uglavnom za učenike osnovne i srednje škole.

Na prvoj godini diplomskog studija zapošljava se u Nacionalnom centru za vanjsko vrednovanje obrazovanja, kao stručni suradnik na projektu vrednovanja učeničkih postignuća iz područja matematike i prirodoslovlja na međunarodnom natjecanju TIMSS. Iste godine radi kao demonstrator na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, na kolegiju Metrički prostori.

Na zadnjoj godini diplomskog studija, sudjeluje u izradi nastavnog plana i program za privatnu dopunsku nastavu iz matematike, za potrebe otvorenog učilišta Algebra. Tokom iste akademske godine, radi u galeriji Klovićevi dvori kao vodič na izložbi Volim matematiku.