Teorija grafova i zadaci s natjecanja

Biljuš, Dragana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dragana Biljuš

TEORIJA GRAFOVA I ZADACI S NATJECANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Glavni grad pruskog kraljevstva Königsberg (današnji Kalinjingrad u Rusiji) smješten je na obalama rijeke Pregel. Dio grada nalazi se na dva riječna otoka koji su povezani međusobno i sa kopnom sa sedam mostova. Građani Königsberga rado su šetali gradom i željeli su prijeći sve mostove u Königsbergu tako da preko svakog mosta prijeđu samo jednom i završe šetnju u polaznoj točki. Nitko nije uspio pronaći način kako da to naprave pa su za pomoć zamolili Leonharda Eulera (1707. - 1783.) koji je vrlo brzo riješio taj problem kao usputni zadatak na početku karijere vodećeg matematičara Ruske carske akademije u Petrogradu, gdje je 1733. godine dobio posao. Euler im je odgovorio da je takva šetnja nemoguća. Kako je Euler došao do tog zaključka pojasnit ćemo u posljednjem poglavlju.

Shematski prikaz Königsberga na kojem su dijelovi kopna predstavljeni točkama, a mostovi njihovim spojnicama prototip je modela koji će odrediti definiciju pojma grafa. Rješenje ovog problema je zapravo prvi pisani rad iz teorije grafova i on se smatra temeljem teorije grafova ([4]).

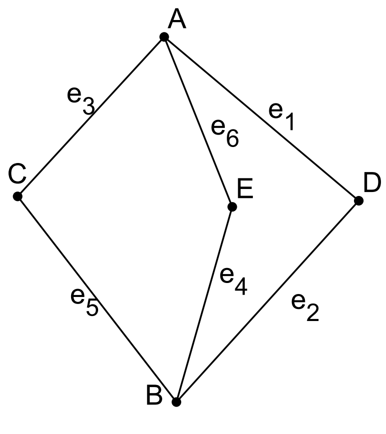
Razvoj teorije grafova kao zasebne matematičke discipline počinje tek 200 godina kasnije kada je mađarski matematičar Dénes König (1884. - 1944.) napisao prvu knjigu iz teorije grafova. Knjiga je izdana 1936. godine pod nazivom Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. König je dotadašnje rezultate objedinio i sistematizirao, navodeći popis od svega 110 objavljenih radova u kojima se eksplicitno pojavljuje pojam grafa i od tada graf postaje općeprihvaćen pojam, nakon toga slijedi intenzivan razvoj teorije grafova ([1]).

Poglavlje 1

Grafovi

1.1 Što je to graf?

Jednostavno rečeno, graf se sastoji od vrhova i bridova. Vrhovi su točke, a bridovi linije koje spajaju vrhove. Grafički vrhove grafa prikazujemo kružićima, a bridove spojnicama vrhova.



Slika 1.1: Primjer grafa

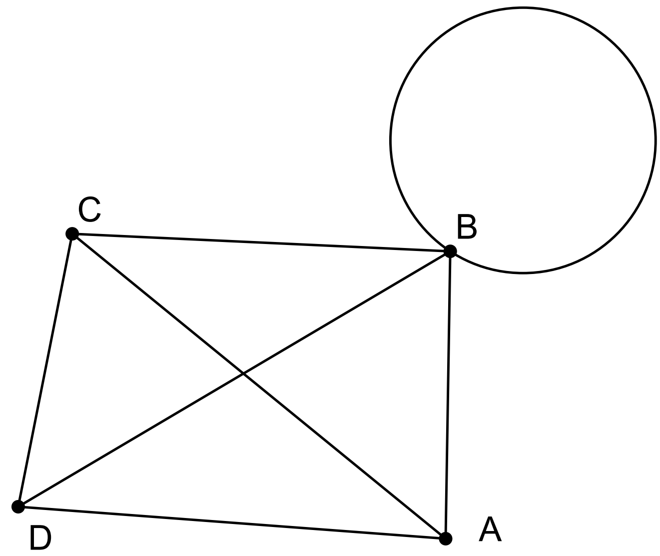
Na slici 1.1 vrhovi su označeni slovima A, B, C, D i E, a bridovi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 i e_6. Bridove još možemo označavati slovima njima incidentnih vrhova (vrhova koje spajaju). Tako je u našem slučaju $e_1 = AD$, $e_2 = BD$, $e_3 = AC\ldots$

A sada ćemo iskazati strogu matematičku definiciju grafa:

Definicija 1.1.1. *Graf G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, koja se sastoji od nepraznog skupa $V = V(G)$, čiji su elementi vrhovi od G, skupa $E = E(G)$ disjunktnog sa $V(G)$, čiji su elementi bridovi od G i funkcije incidencije ψ_G, koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova od G.*

Oznaka V za skup vrhova dolazi od engleske riječi *vertex* za vrh, a oznaka E za skup bridova pak od engleske riječi *edge* za brid.

U definiciji 1.1.1 se vidi da dva vrha koji su povezani jednim bridom ne moraju nužno biti različiti. To znači da brid u grafu može imati samo jedan vrh. Takav graf može izgledati ovako:



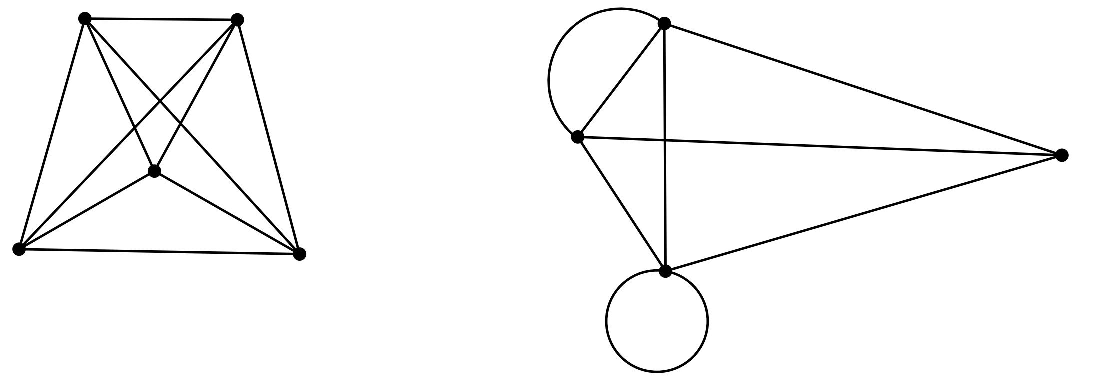
Slika 1.2: Primjer grafa s petljom

Graf na slici 1.2 ima petlju u vrhu B.

Primjetimo da definicija 1.1.1 dozvoljava situaciju u kojoj nekoliko bridova povezuje ista dva vrha.

Definicija 1.1.2. *Graf je jednostavan (ili prost) ako nema petlje i nikoja dva brida ne spajaju isti par vrhova.*

Katkad se govori o multigrafu, kad se želi naglasiti da graf ne mora biti jednostavan. Naprimjer, na slici 1.3 je primjer jednog jednostavnog grafa i jednog multigrafa.



Slika 1.3: Primjer jednostavnog grafa i multigrafa

Mi ćemo se u daljnjem tekstu baviti jednostavim grafovima (koje ćemo jednostavno zvati $grafovi$), a u posljednjem poglavlju ćemo obratiti pažnju na multigrafove.

Neka je $e = UV$ brid grafa G, tada kažemo da on spaja vrhove U i V. U toj situaciji kažemo da su vrhovi U i V grafa G susjedi vrhovi u grafu G. Također, kažemo da je vrh U incidentan sa bridom e. Naravno, tada je i vrh V incidentan sa bridom e.

Dakle, dva vrha incidentna s nekim bridom zovu se susjedni vrhovi. Dva brida sa zajedničkim vrhom zovu se susjedni bridovi.

Na slici 1.1 vrhovi A i D su susjedni, a primjer susjednih bridova je e_1 i e_3.

1.2 Upotreba grafova

Gdje možemo koristiti grafove, odnosno teoriju grafova?

Svaku mrežnu konfiguraciju (cestovnu kartu, plinovod, naftovod, strujni krug) možemo na prirodan način zamijeniti grafom te postaviti zanimljiva pitanja koja teorija grafova na jednostavniji način rješava. Mnoge pojave možemo jednostavno modelirati grafovima koje čine točke i njihove spojnice. Naprimjer, vrhovi grafa mogu predstavljati ljude, a bridovi među njima parove prijatelja; nadalje, graf može predstavljati cestovnu vezu čiji su vrhovi gradovi, a bridovi ceste među njima. Ili, točke grafa mogu predstavljati komunikacijske centre, a bridovi grafa komunikacijske veze. Daljnji su primjeri mreža računala, kompjuterska struktura podataka, željeznička ili avionska mreža ([9]).

U raznim primjenama grafova često su potrebne i dodatne strukture na grafu. Jedna od najprirodnijih je da svakom bridu grafa pridružimo težinu. U konkretnim slučajevima će težina grafa označavati udaljenost među točkama, troškove puta, brzina kretanja i dr. Graf čiji bridovi imaju težinu nazivamo težinski graf.

Definicija 1.2.1. *Težinski graf je uređeni par (G, f), gdje je G graf, a $f : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$ funkcija koju nazivamo težinska funkcija.*

Dakle, funkcija f iz definicije 1.2.1 svakom bridu grafa pridružuje neki nenegativan realan broj veći od nule koji zovemo težina.

Svakom bridu grafa možemo pridružiti smjer.

Definicija 1.2.2. *Usmjereni graf ili digraf D je uređena trojka $D = (V, A, \psi)$, gdje je V neprazan skup čije elemente nazivamo vrhovima, A skup disjunktan s V čije elemente nazivamo lukovima i ψ funkcija koja svakom luku $a \in A$ pridružuje uređeni par (u, v), pri čemu u i v ne moraju nužno biti različiti. Kažemo da je u početak, a v kraj luka a, da je smjer ili orijentacija luka a od u prema v i koristimo oznaku $a = (u, v)$.*

Dakle, usmjereni graf je graf u kojem svaki brid ima smjer od početka prema kraju. Izdvojimo neke poznate probleme koji su riješeni uz pomoć teorije grafova:

- **Problem kineskog poštara**

  Problem kineskog poštara primjer je u kojem poštar raznosi poštu u jednom dijelu grada. Poštar ima zadatak obići sve ulice u tom dijelu grada barem jednom te se na kraju vratiti u poštanski ured. Postavlja se optimizacijski problem, kojim putem treba poštar raznositi pisma, a da bude što uspješniji. Kako tu situaciju prevesti u jezik teorije grafova? Vrhovi grafa su kuće u koje poštar želi dostaviti poštu, a put od kuće do kuće je označen bridom među tim vrhovima. Težina brida je vrijeme potrebno poštaru da dođe od jedne do druge kuće. U ovom primjeru pokušavamo proći kroz svaki vrh grafa samo jednom i to tako da je ukupna težina bridova kojima prolazimo minimalna te se na kraju vratiti u polazni vrh ([4]).

- **Problem trgovačkog putnika**

  Problem trgovačkog putnika (engl. Traveling Salesman Problem (TSP)) definirali su W. R. Hamilton (1805. - 1865.) i T. Kirkman (1806. - 1895.) u prvoj polovici 19. stoljeća. Ovaj problem je na prvi pogled vrlo sličan problemu kineskog poštara. Bavi se slučajem u kojem trgovački putnik putuje nekom državom i želi posjetiti svaki grad te države, ali tako da prijeđe najkraći mogući put. Dakle, vrh grafa označava grad koji će trgovački putnik posjetiti, brid označava put između dva grada, a udaljenost između neka dva grada je težina brida. U ovom primjeru, kao i u prethodnom, pokušavamo proći kroz svaki vrh grafa i to tako da je ukupna težina prijeđenih bridova (ukupna duljina puta koju je prevalio trgovački putnik) minimalna ([4]).

- **Problem četiri boje**

  Ovaj problem je jedan od složenijih primjera primjene teorije grafova. O čemu se zapravo radi? Zamislimo zemljopisnu kartu u kojoj su ucrtane države (pretpostavimo da se svaka država sastoji od samo jedne regije na karti, a ne od više nepovezanih područja). Da bismo razlikovali države želimo ih obojiti tako da su susjedne države obojane različitim bojama. Problem se sastoji u tome da se nađe najmanji broj boja tako da se dana zemljopisna karta može obojati na traženi način. 1852. godine matematičar Francis Guthrie je uočio da mu nije potrebno više od četiri boje da oboji zemljopisnu kartu tako da su susjedne zemlje različitih boja. Mnogi matematičari i amateri su na ovom problemu radili godinama, no nisu uspjeli dokazati tu tvrdnju. Problem je sročen tako jednostavno da se pretpostavljalo da će se jednog dana pronaći elegantan dokaz. No, dogodilo se nešto drugačije, teorem je dokazan 1976. godine, ali uz pomoć računala i to je prvi matematički teorem koji je dokazan računalno. Takav dokaz je naišao na brojne kritike jer ga čovjek ne može provjeriti i ne nudi nikakakav novi uvid u problem. Godine 1997. objavljen je jednostavniji dokaz, na svega 40 stranica, no također uz pomoć računala ([5]).

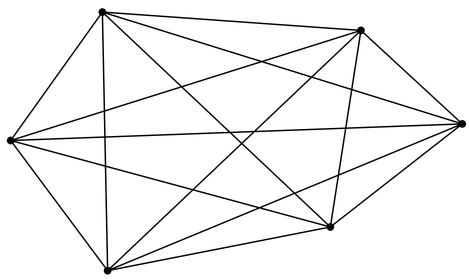
Teorija grafova primjenjuje se u mnogim problemima, a posebno je korisna u problemima logističke prirode. Postoji mnogo svakodnevnih logističkih problema koji mogu biti riješeni primjenom teorije grafova. Naprimjer, praktična primjena Problema kineskog poštara je planiranje ruta autobusnog javnog prijevoza. Da bi uštedjela na gorivu, autobusna kompanija može modelirati autobsnu stanicu kao vrh, a cestu u ruti autobusa kao brid te koristeći se teorijom grafova pronaći optimalnu rutu koja može udovoljiti cilju minimalne potrošnje goriva uz uvjet da autobus prođe svakom zadanom cestom. Ostale primjene su skupljanje smeća, određivanje ruta školskih autobusa, čišćenje smeća i sl.

Na natjecanjima iz matematike često možemo naići na zadatak u kojem istražujemo gore opisane probleme iz stvarnog života. Te zadatke vrlo prirodno možemo *prevesti* u teoriju grafova te na jednostavan način riješiti. U ovom radu ćemo se baviti zadacima koji se javljali na matematičkim natjecanjima i sve ćemo ih rješavati u terminologiji teorije grafova (iako se mogu i na druge načine riješiti).

1.3 Potpuni graf

U zadacima ćemo često naići na specijalnu vrstu grafova, a to je potpuni graf. Definirajmo najprije taj pojam.

Definicija 1.3.1. *Graf u kojem je svaki par od n vrhova spojen bridovima zove se potpuni graf. Potpuni graf sa n bridova označavamo* K_n.



Slika 1.4: Potpun graf

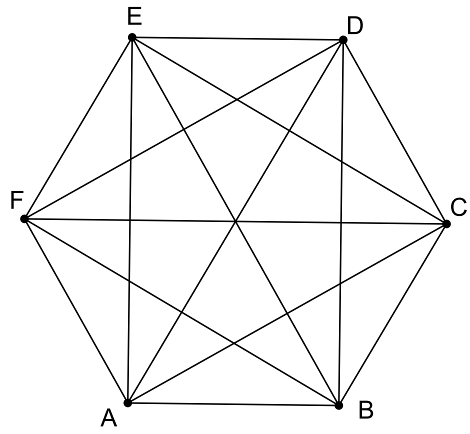
Primjer potpunog grafa sa 6 vrhova možemo vidjeti na sici 1.4, a vrlo lako možemo zaključiti da graf na slici 1.1 nije potpun graf (jer ne postoji brid između vrhova A i B).

Zadatak 1.3.2. *Na nekom turniru sudjelovalo je šest igrača. Svaka dva sudionika su odigrali po jedan meč koji je jednom sudioniku donio pobjedu, a drugom poraz.*

1. *Koliko mečeva je ukupno odigrano?*
2. *Koliko mečeva je odigrao svaki igrač?*
3. *Koliko pobjeda su postigli svi igrači zajedno?*

www.problems.ru ♯88117

Rješenje:
Neka vrhovi grafa predstavljaju igrače na turniru, a bridovi odigrani meč ta dva igrača. Obzirom da je svaki par igrača odigrao točno jedan meč, riječ je potpunom grafu sa 6 vrhova (vidi sliku 1.5), nazovimo ih A, B, C, D, E, F.



Slika 1.5: Odigrani mečevi na turniru

Pitanja iz zadataka sada možemo postaviti ovako:

1. Koliko je bridova u potpunom grafu K_6?

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

   U potpunom grafu K_6 je ukupno 15 bridova. Dakle, na turniru je ukupno odigrano 15 mečeva.

2. Koliko susjednih vrhova ima svaki vrh grafa?
   Svaki vrh ima 5 susjednih vrhova. Pa je odgovor na dano pitanje: svaki igrač je odigrao po 5 mečeva.

3. Obzirom da svaki meč donosi jednom od sudionika pobjedu, pitamo se kao i u prvom dijelu zadatka. U potpunom grafu sa 6 vrhova je ukupuno 15 bridova. Po tome zaključujemo da su svi igrači zajedno postigli 15 pobjeda.

$\square$

1.4 Dirichletov princip

Prije rješavanja daljnjih zadataka spomenimo Dirichletovo pravilo koje ćemo često koristiti u rješavanju zadataka.

Dirichletov princip jedan je od najpoznatijih kombinatornih principa, vrlo je koristan pri dokazivanju postojanja objekata koji imaju neko određeno svojstvo. Dirichletov princip poznat je pod raznim popularnim nazivima kao što su "princip kutija", "princip golubnjaka", "problem zečeva i kaveza", "princip pretinaca" i dr. Prvi ga je jasno formulirao njemački matematičar francuskog porijekla P. G. L. Dirichlet (1805.-1859.). Njemu u čast se taj princip naziva Dirichletov princip. Slikovito, on kaže da ako veliki broj golubova doleti u nekoliko golubnjaka, onda će bar u jednom golubnjaku biti barem dva goluba. Postoji nekoliko formulacija Dirichletovog principa, a ovo je njegov najjednostavniji oblik:

Ako $n + 1$ predmet rasporedimo bilo kako u n praznih kutija, onda postoji bar jedna kutija koja sadrži bar 2 predmeta.

Primjetimo da tvrdnja pogotovo vrijedi ako je broj predmeta veći od $n + 1$ ([7]).

Zadatak 1.4.1. *Između šest otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od kojih su svaka dva povezana istovrsnom brodskom vezom.*

Državno natjecanje, 2006. godine, 3. i 4. razred, B varijanta

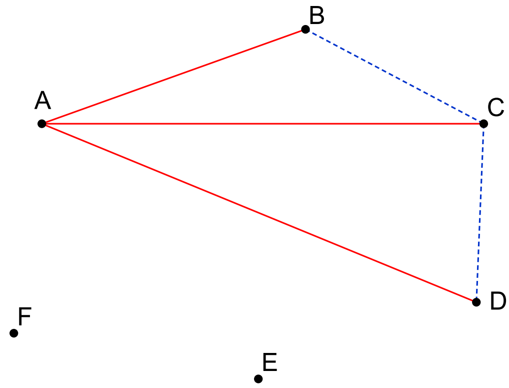
Rješenje:

Neka vrhovi A, B, C, D, E i F predstavljaju otoke, a bridovi među njima brodske veze. Ako su otoci povezani trajektom neka je brid između vrhova crvene boje, a ako su povezani katamaranom neka bude plave boje. Dakle, u ovom zadatku trebamo pokazati da u potpunom grafu K_6 čiji su bridovi obojani u dvije boje postoji jednobojni trokut.

Vrh A spojen je bridovima sa vrhovima B, C, D, E i F. Ukupno je pet bridova koji izlaze iz vrha A pa su po Dirichletovom pravilu sigurno barem tri od tih bridova iste boje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su bridovi AB, AC i AD crvene boje.

Ako je brid BC crvene boje, trokut ABC je crvene boje i gotovi smo. Pretpostavimo da je brid BC plave boje. Ako je brid CD crvene boje, trokut ACD je crvene boje i gotovi smo. Pretpostavimo da je brid CD plave boje i promatrajmo brid BD.

Grafički prikaz ove situacije vidimo na slici 1.6.



Slika 1.6: Otoci povezani trajektom i katamaranom

Ako je brid BD crvene boje, trokut ABD je crvene boje, a ako je brid BD plave boje, trokut BCD je plave boje. U svakom slučaju, pokazali smo da postoji jednobojni trokut. Dakle, dokazali smo da postoje tri otoka koja su međusobno povezana istovrsnom brodskom vezom. □

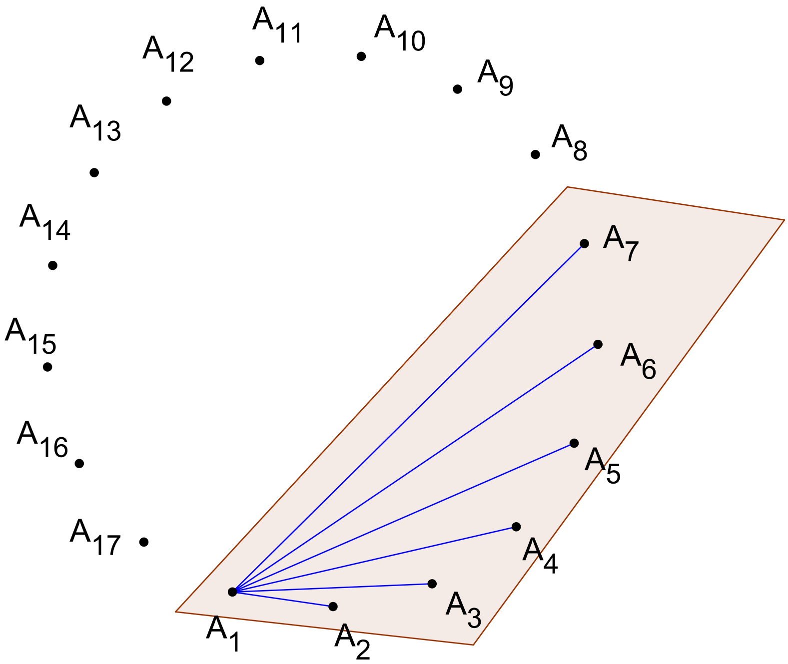
U prethodnom zadatku smo vidjeli da u svakom potpunom grafu sa 6 vrhova čiji su bridovi obojani u dvije boje postoji jednobojan trokut. Sljedeći zadatak je zapravo nadgradnja te tvrdnje, u njemu ćemo pokazati da u svakom potpunom grafu K_{17} čiji su bridovi obojani u tri boje postoji jednobojan trokut.

Zadatak 1.4.2. *Na nekom turističkom putovanju bilo je ukupno 17 turista. Utvrđeno je da su bilo koja dvojica od njih bili međusobno "na ti" ili "na Vi" ili uopće nisu razgovarali. Dokažite da među tih 17 ljudi postoje bar trojica koji su međusobno bili na "na ti" ili bar trojica koji su međusobno bili "na Vi" ili bar trojica koji međusobno nisu razgovarali.*

Državno natjecanje, 1995. godine, 3. razred

Rješenje:
Neka vrhovi grafa $A_1, A_2, \ldots A_{17}$ označavaju turiste, a bridovi odnos među njima. Plavom bojom označimo brid između vrhova koji označavaju dva turista koji su "na ti", crvenom bojom dva turista koji su "na Vi", a zelenom bojom brid između vrhova koji označavaju dva turista koji uopće nisu razgovarali. Dobili smo potpun graf K_{17} čiji su bridovi obojani u tri različite boje. Želimo dokazati da u takvom grafu postoji jednobojan trokut.

Vrh A_1 spojen je bridovima sa svim ostalim vrhovima i imamo 16 bridova koji izlaze iz vrha A_1. Prema Dirichletovom principu među njima je barem 6 bridova jedne boje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su bridovi A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6 i A_1A_7 plave boje.



Slika 1.7: Turisti koji su "na ti"

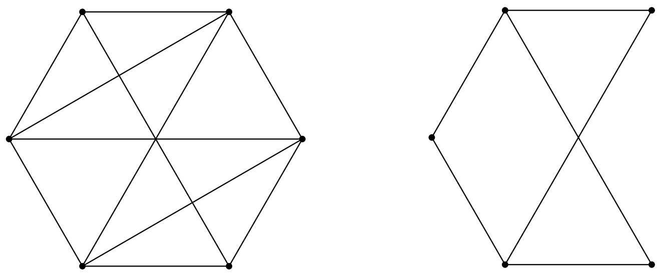
Promatrajmo sada vrhove A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 i A_7 (vidi sliku 1.7). Ako je neki od bridova između tih vrhova plave boje, imamo plavi trokut i gotovi smo. Pretpostavimo da nijedan od tih bridova nije plave boje. Dakle, bridovi između vrhova A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 i A_7 su crvene ili zelene boje. Zapravo, ako promatramo samo graf sa vrhovima A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 i A_7 uočavamo da imamo potpuni graf K_6 (koji je podgraf početnog grafa K_{17}) čiji su bridovi obojani u dvije boje. Po prethodnom zadatku zaključujemo da u toj situaciji imamo jednobojan trokut.

Dakle, dokazali smo da u skupini od 17 turista postoje barem trojica koji su međusobno bili na "na ti" ili "na Vi" ili bar trojica koji međusobno nisu razgovarali.

□

U rješenju ovog zadatka smo koristili pojam podgrafa. Intuitivno je jasno što označava pojam podgrafa: podgraf dobijemo tako da iz početnog grafa izdvojimo neke vrhove (i naravno, sve bridove koji povezuju te vrhove) ili neke bridove tog grafa. Iskažimo i preciznu definiciju podgrafa.

Definicija 1.4.3. *Podgraf G' grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$.*



Slika 1.8: Graf i njegov podgraf

Istim načinom razmišljanja kao u prethodnom zadatku bismo riješili i sljedeći zadatak pa zato njega navodimo bez rješenja.

Zadatak 1.4.4. *17 ljudi dopisuje se svaki sa svakim. U svojim pismima pišu o tri različite teme. Svaki par piše točno o jednoj temi. Dokažite da postoji trojka ljudi koja međusobno piše o istoj temi.*

M. Krnić, Dirichletovo pravilo [7]

Zadatak 1.4.5. *Na nekoj zabavi među bilo koje četiri osobe postoje tri koje se sve međusobno poznaju ili postoje tri koje se međusobno ne poznaju. Poznanstva su uzajamna. Dokaži da se svi sudionici te zabave mogu smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji svi međusobno poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.*

HMO, 2011. godine

Rješenje:
Neka vrhovi grafa G označavaju osobe na zabavi, a bridovi poznanstva i nepoznanstva među njima. Ako se neke dvije osobe poznaju, brid koji spaja odgovarajuće vrhova neka je plave boje, a ako se ne poznaju, brid koji spaja odgovarajuće vrhove neka bude crvene

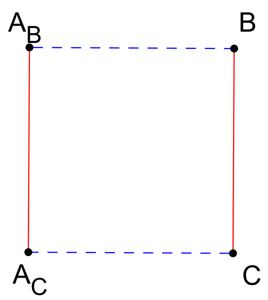
boje. Dakle, osobe i poznanstva među njima smo prikazali potpunim grafom čiji su bridovi obojani u dvije boje. Za neki podgraf grafa G koji ima m vrhova kažemo da je plavi podgraf G_m ako su svaka dva vrha među njima povezana plavim bridom. Analogno, za podgraf grafa G koji ima m vrhova kažemo da je crveni podgraf G_m ako su svaka dva vrha povezana crvenim bridom.

Promatrajmo slučajeve u kojima graf G ima barem 4 vrha. Tada zbog pretpostavke zadatka u grafu sigurno postoji crveni ili plavi podgraf sa 3 vrha. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da u grafu postoji crveni podgraf G_3. Promatrajmo crveni podgraf grafa G s najvećim brojem vrhova, neka ima k vrhova pa ga označimo sa G_k. Neka je $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ skup vrhova crvenog podgrafa G_k. Promotrimo preostale vrhove grafa G (njih ukupno ima $n-k$). Ako su među ostalih $n-k$ vrhova svi bridovi plavi, tada smjestimo osobe iz skupa $\mathcal{A}$ u jednu prostoriju, a sve ostale u drugu.

Pokažimo da je drugi slučaj (tj. da među preostalih $n-k$ vrhova postoji crveni brid) neostvariv. Pretpostavimo da postoje vrhovi B i C koji su povezani crvenim bridom, a ne nalaze se u skupu $\mathcal{A}$, odnosno ne nalaze se u crvenom pografu G_k. Tada postoji vrh $A_B \in \mathcal{A}$ koji je plavim bridom povezan sa vrhom B (jer bismo inače imali crveni podgraf G_{k+1}). Na analogan način bismo zaključili da postoji vrh $A_C \in \mathcal{A}$ koji je plavim bridom povezan sa vrhom C.

Razlikujemo dva slučaja: $A_B \neq A_C$ i $A_B = A_C = A$.

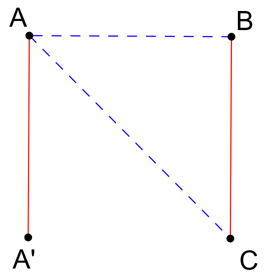
Ako je $A_B \neq A_C$, tada je iz slike 1.9 jasno da među vrhovima B, C, A_B i A_C ne može postojati jednobojni podgraf s tri vrha, što je uvjet zadatka.



Slika 1.9: $A_B \neq A_C$

S druge strane, pretpostavimo da je $A_B = A_C = A$, za neki $A \in \mathcal{A}$. Neka je $A' \in \mathcal{A}$ proizvoljan vrh grafa crvenog podgrafa G_k različit od vrha A.

Slika 1.10 prikazuje situaciju koju imamo među vrhovima A, A', B i C.



Slika 1.10: $A_B = A_C = A$

Očito je da ako imamo jednobojni podgraf sa 3 vrha u tom skupu vrhova (a tako mora biti zbog uvjeta zadatka), vrh A' mora biti crvenim bridom povezan i s B i s C. Kako to vrijedi za svaki vrh $A' \in \mathcal{A}$, osim za vrh A, zaključujemo da su vrhovi B i C crvenim bridom povezani sa svakim vrhom iz crvenog podgrafa G_k osim sa vrhom A, a uz to su i međusobno povezani crvenim bridom. Promotrimo vrhove B i C te sve vrhove crvenog podgrafa G_k osim vrha A. Bridovi među njima su crvene boje pa čine crveni podgraf sa $k + 1$ vrhova što je kontradikcija.

Dakle, pokazali smo da je moguće sve sudionike zabave smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji sve osobe poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.

$\square$

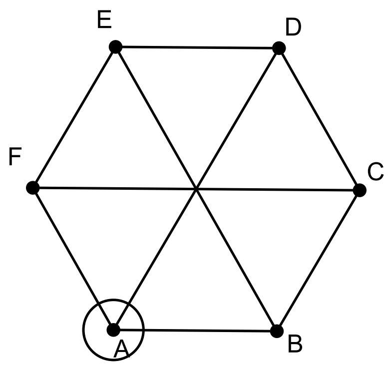
Poglavlje 2

Stupanj vrha

2.1 Stupanj vrha

Definicija 2.1.1. *Stupnjem vrha zovemo broj bridova s kojima je vrh spojen, tj. koji su incidentni s njim i označavamo ga s* $d(v)$ *ili* $deg(v)$.

Intuitivno, stupanj vrha je broj sjecišta male kružnice oko vrha sa bridovima koje izlaze iz tog vrha.



Slika 2.1: Stupanj vrha A je 3

Na slici 2.1 vidimo da stupanj vrha A iznosi 3, to pišemo $d(A) = 3$. Primjetimo da su na tom grafu svi vrhovi istog stupnja.

Definicija 2.1.2. *Graf čiji su svi vrhovi istog stupnja zovemo regularan graf.*

Napomena 2.1.3. *Potpun graf je regularan.*

Zadatak 2.1.4. *Dokažite da u grupi od 50 ljudi postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj prijatelja unutar te grupe.*

Turnir gradova, 1995. godina

Rješenje:
Neka vrhovi $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ označavaju osobe unutar grupe, a bridovi prijateljstva među njima. Želimo dokazati da u grafu koji ima 50 vrhova postoje barem dva vrha istog stupnja. Promatrajmo vrh u grafu koji ima najveći stupanj, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je riječ o vrhu A_1. Za stupanj tog vrha postoje dvije mogućnosti:

1. Vrh A_1 ima stupanj 49
   To znači da su svi ostali vrhovi susjedni sa A_1 pa nijedan vrh nema stupanj 0. Dakle, ukupno je u grafu 50 vrhova, a mogućnosti za njihove stupnjeve su: $1, 2, 3, \ldots, 49$. Ukupno je 49 mogućnosti za stupanj vrha, a 50 vrhova u grafu. Prema Dirichletovom pravilu zaljučujemo da barem dva vrha imaju isti stupanj.

2. Vrh A_1 nema stupanj 49
   To znači da nijedan vrh u grafu nema maksimalan stupanj (jer je A_1 ima najveći stupanj), nego da imaju stupnjeve u rasponu $0, 1, 2, \ldots, 48$. Ovdje imamo ukupno 49 mogućnosti za stupanj vrha, a 50 vrhova u grafu. Po Dirichletovom pravilu dolazimo do zaključka da barem dva vrha imaju isti stupanj.

Dakle, dokazali smo da u grafu koji ima 50 vrhova postoje barem dva vrha sa istim stupnjem, a to znači da u grupi od 50 ljudi postoje barem dvije osobe s jednakim brojem prijatelja unutar te grupe. □

Sljedeći zadatak bismo riješili na isti način kao i prethodni pa zato njega navodimo bez rješenja.

Zadatak 2.1.5. *Na otvorenju nove izložbe poznatog slikara okupilo se društvo od 60 ljubitelja umjetnosti. Dokažite da među nazočnima postoje bar dvije osobe koje imaju jednak broj poznanika.*

M. Krnić, Dirichletovo pravilo [7]

Tvrdnje iz prethodna dva zadatka možemo poopćiti:

Zadatak 2.1.6. *U grafu koji ima n vrhova, pri čemu je* $n > 1, n \in \mathbb{N}$ *postoje barem dva vrha istog stupnja. Dokažite tvrdnju.*

Rješenje:
Razlikujemo dva disjunktna slučaja:

1. Postoji vrh čiji je stupanj $n - 1$
   Dakle, svaki vrh ima barem jedan susjedni vrh, mogućnosti su: $1, 2, \ldots, n-3, n-2, n-1$ susjednih vrhova. Ukupno imamo n vrhova pa po Dirichletovom principu slijedi da barem dva vrha imaju jednak broj susjednih vrhova, odnosno jednak stupanj.

2. Nijedan vrh nema stupanj $n - 1$
   Svaki vrh ima $0, 1, \ldots, n - 3$ ili $n - 2$ susjednih vrhova. Obzirom da ukupno imamo n vrhova, po Dirichletovom principu postoje barem dva vrha s jednakim brojem susjednih vrhova, odnosno jednakim stupnjem.

Dokazali smo u grafu koji ima n vrhova postoje barem dva vrha sa istim stupnjem. □

Zadatak 2.1.7. *U razredu je 20 učenika od kojih svaki ima najmanje 14 prijatelja iz razreda. Možemo li sa sigurnošću tvrditi da u razredu postoji grupa od četiri učenika koji su svi međusobno prijatelji?*

www.problems.ru ♯35734

Rješenje:
Neka vrhovi $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ označavaju učenike, a bridovi prijateljstva među njima. Dakle, zanima nas da li u grafu koji ima 20 vrhova, a čiji je stupanj najmanje 14 postoje četiri vrha koji su svi međusobno susjedni.

Promotrimo vrh A_1. Po pretpostavci zadatka on ima najmanje 14 susjednih vrhova, dakle najviše 5 vrhova nisu susjedni sa A_1. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su to A_{16}, A_{17}, A_{18} A_{19}, A_{20}. Te vrhove nećemo više promatrati.

Nadalje, vrh A_2 je susjedan sa A_1 i sa još najmanje 13 drugih vrhova. Među svim vrhovima u grafu je najviše 5 njih s kojima A_2 nije susjedan. Izbacimo sve vrhove s kojim A_2 nije susjedan, to je po pretpostavci zadatka najviše 5 vrhova, pretpostavimo da su to A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15} i nemojmo ih više promatrati. Naravno, moguće je da vrh A_2 nije susjedan sa nekima od već izbačenih vrhova A_{16}, A_{17}, A_{18} A_{19} ili A_{20}, ali njih ionako više ne promatramo i u tom slučaju bismo imali jednostavniju situaciju i samo bismo izbacili manje novih vrhova.

Vrh A_3 je susjedan sa A_1 i A_2 te sa još najmanje 12 drugih vrhova grafa. Dakle, s najviše 5 vrhova A_3 nije susjedan. Slično kao kod vrha A_2, moguće je da smo već izbacili iz razmatranja vrhove s kojima A_3 nije susjedan, ali pretpostavimo da nije susjedan sa nekih

5 preostalih vrhova. Neka su vrhovi A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10} vrhovi koji mu nisu susjedni, njih nećemo više gledati.

Vrh A_4 je susjedan sa A_1, A_2 i A_3. Dakle, dobili smo četiri vrha koji su svi međusobno susjedni. Zaključujemo da u grafu koji ima 20 vrhova čiji su stupnjevi barem 14 postoje četiri vrha koji su svi međusobno susjedni. Dakle, u takvom razredu postoje barem četiri učenika koji su svi međusobno prijatelji. □

Zadatak 2.1.8. *Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?*

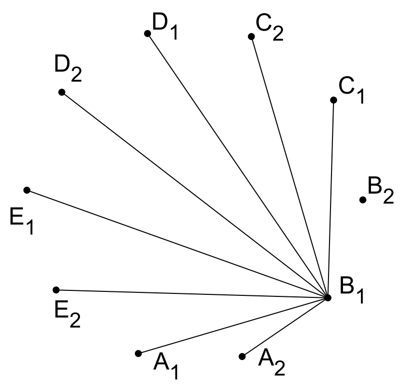
Državno natjecanje, 2011. godine, 1. razred - A varijanta

Rješenje:

Neka vrhovi grafa predstavljaju danih 10 osoba (pet bračnih parova), a bridovi među vrhovima neka označavaju rukovanja ljudi. Tomislava označimo vrhom A_1, Anu vrhom A_2, a ostale osobe vrhovima B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1 i E_2, s tim da B_1 i B_2 označavaju jedan bračni par, C_1 i C_2 drugi bračni par itd.

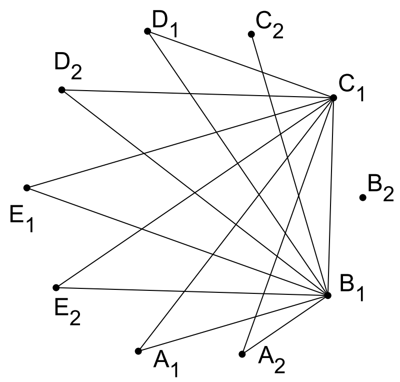
Dakle, imamo graf sa 10 vrhova, a za njih 9 (konkretno, za sve vrhove osim za A_1) znamo da imaju različite stupnjeve koji iznose od 0 do 8 (zato što stupanj vrha označava broj osoba s kojima se rukovala neka osoba). Pitanje je koliko susjednih vrhova ima vrh A_2. Vrh A_1 ne gledamo (odnosno, ne promatramo s kojim je vrhovima A_1 susjedan), ali znamo da A_1 sigurno nije susjedan vrhu A_2 (po pretpostavci zadatka).

Obzirom da vrhovi $A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1$ i E_2 imaju različit broj susjednih vrhova, jedan od tih vrhova je stupnja 8. Pretpostavimo da vrh A_2 ima stupanj 8. To znači da vrhovi $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1$ i E_2 imaju stupnjeve između 0 i 7. Po pretpostavci zadatka vrh A_2 nije susjedan sa A_1 pa je onda susjedan sa vrhovima $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$. Ali u tom slučaju nijedan od tih vrhova nije stupnja 0 pa zaključujemo da vrh A_2 ne može biti stupnja 8. Dakle, neki od vrhova $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1$ i E_2 je stupnja 8, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to vrh B_1. Obzirom da B_1 nije susjedan sa vrhom B_2, njegovi susjedni vrhovi su $A_1, A_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$. Tada vrh B_2 nema niti jedan susjedni vrh jer vrhovi $A_1, A_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1$ i E_2 imaju stupanj barem 1 (vidi sliku 2.2).



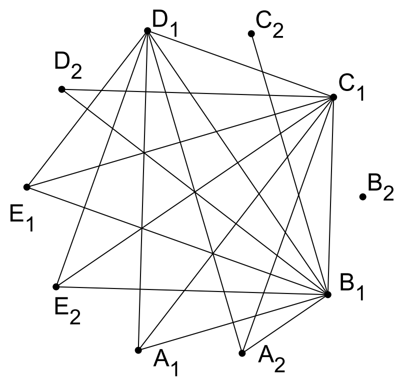
Slika 2.2: Vrh B_1 ima 8 susjednih vrhova

Odredimo vrh u grafu koji ima 7 susjednih vrhova. Pretpostavimo da A_2 ima 7 susjednih vrhova (svi osim A_1 i B_2). To bi značilo da su vrhovi $B_1, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ susjedni sa A_2, odnosno da su stupnjevi vrhova C_1, C_2, D_1, D_2, E_1 i E_2 između 2 i 6 (za vrh B_1 već znamo da je stupnja 8). U tom slučaju ne postoji vrh sa stupnjem 1 pa zato zaključujemo da vrh A_2 ne može biti stupnja 7. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrh C_1 ima 7 susjednih vrhova (to su A_1, A_2, B_1, D_1, D_2, E_1 i E_2). Tada vrh C_2 ima samo jedan susjedni vrh, a to je B_1 (vidi sliku 2.3).



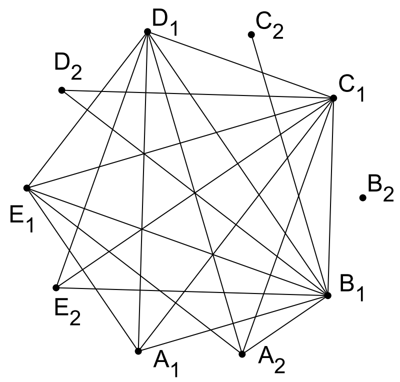
Slika 2.3: Vrh C_1 ima 7 susjednih vrhova

Među preostalim vrhovima koje promatramo (to su A_2, D_1, D_2, E_1 i E_2) postoji vrh koji ima 6 susjednih vrhova. Pretpostavimo da je A_2 vrh koji ima 6 susjednih vrhova. Znamo da A_1, B_2 i C_2 nisu susjedni vrhovi od A_2, a to znači da su vrhovi B_1, C_1, D_1, D_2, E_1 i E_2 susjedni sa A_2. Vrh B_1 je stupnja 8, vrh C_1 je stupnja 7, a stupnjevi preostalih vrhova (to su D_1, D_2, E_1, E_2) su između 2 i 5. Ti vrhovi su susjedni i sa vrhovima B_1 i C_1 pa među njima ne postoji vrh koji ima stupanj 2. Zbog toga zaključujemo da vrh A_2 ne može biti stupnja 6. Zato vrh koji ima 6 susjednih vrhova nazovimo D_1, njegovi susjedni vrhovi su A_1, A_2, B_1, C_1, E_1 i E_2. Tada D_2 ima dva susjedna vrha, a to su C_1 i B_1 (vidi sliku 2.4.



Slika 2.4: Vrh D_1 ima 6 susjednih vrhova

Odredimo vrh koji ima 5 susjednih vrhova. Pretpostavimo da A_2 ima 5 susjednih vrhova. Vrhovi A_1, B_2, C_2 i D_2 sigurno nisu susjedni vrhovi od A_2 pa su njegovi susjedni vrhovi B_1, C_1, D_1, E_1 i E_2. U tom slučaju bi jedan od vrhova E_1 i E_2 trebao biti stupnja 3, ali to je nemoguće jer je svaki od njih susjedan sa B_1, C_1, D_1 i A_2. Dakle, A_2 nije stupnja 5. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrh E_1 ima 5 susjednih vrhova: A_1, A_2, B_1, C_1 i D_1. Onda E_2 ima tri susjedna vrha, a to su B_1, C_1 i D_1 (vidi sliku 2.5).



Slika 2.5: Vrh D_1 ima 5 susjednih vrhova

Dakle, vrh A_2 ima 4 susjedna vrha, a to su: B_1, C_1, D_1 i E_1 (vidi sliku 2.5).
Dakle, Ana se rukovala sa 4 osobe. □

2.2 Lema o rukovanju

Postoji li kakva veza između stupnjeva vrhova grafa i broja bridova? Postoji! Leonhard Euler već je 1736. godine dokazao sljedeću jednostavnu činjenicu.

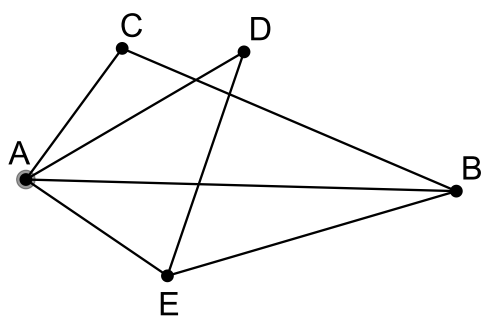
Teorem 2.2.1. *(Lema o rukovanju)*
Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu jednak je dvostrukom broju bridova tog grafa.

Dokaz. Ovu tvrdnju možemo dokazati na više načina, npr. dvostrukim prebrojavanjem. Neka graf G ima n vrhova koje označimo $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Krenimo od vrhova, odnosno njihovih stupnjeva.
Neka vrh V_1 ima stupanj d_1. To znači da iz vrha V_1 izlazi d_1 bridova.
Neka vrh V_2 ima stupanj d_2. Tto znači da iz vrha V_2 izlazi d_2 bridova.
$\vdots$
Neka vrh V_n ima stupanj d_n. To znači da iz vrha V_n izlazi d_n bridova.

Zbrojimo sve stupnjeve vrhova grafa i dobit ćemo $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. Obzirom da svaki brid povezuje dva vrha, zaključujemo da za svaka dva susjedna vrha u grafu imamo jedan brid među njima, odnosno da je u grafu dvostruko manje bridova od zbroja stupnjeva svih vrhova.

□

Tvrdnju teorema možemo provjeriti na slici 2.6.



Slika 2.6: Zbroj stupnjeva svih vrhova grafa je 14

Graf na slici ima 5 vrhova, 7 bridova i vrijedi

$$d(A) + d(B) + d(C) + d(D) + d(E) = 4 + 3 + 2 + 2 + 3 = 14 = 2 \cdot 7$$

Ova se jednostavna tvrdnja naziva Lema o rukovanju. Takav je naziv dobila jer se može interpretirati i na ovaj način: Prilikom rukovanja bilo kojeg broja ljudi, broj ruku koji je u to uključen je nužno paran broj.

Napomena 2.2.2. *Primjetimo, zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu je uvijek paran broj.*

U sljedećim zadacima ćemo trebati prepoznati vrhove i bridove te iskoristiti Lemu o rukovanju kako bismo dokazali tvrdnje u zadatku.

Zadatak 2.2.3. *U nekoj državi je 100 gradova i iz svakog grada vode četiri ceste. Koliko je ukupno cesta u državi?*

www.problems.ru ♯30419

Rješenje:
Neka vrhovi $A_1, A_2, \ldots, A_{99}, A_{100}$ označavaju gradove, a bridovi ceste među njima. Stupanj svakog vrha u grafu je 4. Neka je n broj bridova. Tada je $100 \cdot 4 = 2n$, odnosno $n = 200$. Dakle, u državi je ukupno 200 cesta. □

Zadatak 2.2.4. *Je li moguće umrežiti 77 računala tako da je svako računalo direktno povezano sa točno 15 drugih računala?*

www.problems.ru ♯88021

Rješenje:
Neka vrhovi grafa označavaju danih 77 računala, a bridovi direktnu povezanost dva računala. Zanima nas postoji li graf sa 77 vrhova takav da svaki vrh ima 15 susjednih vrhova. Neka n označava broj bridova u grafu. Prema Lemi o rukovanju vrijedi:

$$2n = 77 \cdot 15 = 1155,$$

a to je nemoguće jer je broj bridova grafa prirodan broj. Dakle, nije moguće umrežiti 77 računala tako da je svako računalo povezano sa točno 15 drugih računala. □

Zadatak 2.2.5. *Vita Ivanov je rekao svom prijatelju:"U našem razredu je 35 učenika. I zamisli, svaki od njih je prijatelj s točno 11 kolega!". "To je nemoguće!", odgovorio mu je prijatelj. Zašto je to rekao?*

www.problems.ru ♯88155

Rješenje:
Neka vrhovi $A_1, A_2, \ldots, A_{34}, A_{35}$ predstavljaju učenike, a bridovi prijateljstva među njima. Treba pokazati da ne postoji graf sa 35 vrhova takav da je stupanj svakog vrha 11. Pretpostavimo suprotno, neka je stupanj svakog vrha 11, odnosno neka svaki vrh ima 11 susjednih vrhova. Neka n označava broj bridova tog grafa. Tada vrijedi:

$$2n = 35 \cdot 11$$

$$2n = 385$$

što je nemoguće jer n (broj bridova) mora biti prirodan broj. Zaključujemo da ne postoji takav graf. Dakle, ako je u razredu 35 učenika, nemoguće je da je svaki učenik prijatelj s točno 11 drugih učenika. □

Zadatak 2.2.6. *Imamo skupinu od* 30 *osoba. Je li moguće da u toj skupini devet osoba ima tri poznanika, jedanaest osoba četiri i deset osoba pet poznanika?*

www.problems.ru ♯30420

Rješenje:
Uočimo najprije da je $9+11+10 = 30$, odnosno da promatramo sve osobe iz zadatka. Neka vrhovi grafa A_1, A_2, ..., A_{29} i A_{30} označavaju danih 30 osoba, a bridovi poznanstva među njima. Trebamo provjeriti postoji li graf koji ima 30 vrhova takav da 9 vrhova tog grafa ima stupanj 3, 11 vrhova stupanj 4 i 10 vrhova stupanj 5. Pretpostavimo da je ta situacija moguća. Tada je zbroj stupnjeva svih vrhova u tom grafu:

$$9 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 121$$

Ali, znamo da zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu mora biti paran broj pa zaključujemo da takav graf ne postoji. Dakle, nemoguće je da u skupini od 30 osoba devet osoba ima tri poznanika, jedanaest osoba četiri i deset osoba pet poznanika. □

Zadatak 2.2.7. *U malom gradu je ukupno* 15 *telefona. Je li moguće spojiti žice između telefona tako da su svi uređaji povezani (eventualno preko drugih telefona) i da među njima postoje četiri telefona od kojih je svaki direktno spojen s tri telefona, osam telefona od kojih je svaki direktno spojen sa šest telefona i tri telefona od kojih je svaki u direktnoj vezi sa pet telefona?*

www.problems.ru ♯30421

Rješenje:
Neka vrhovi grafa označavaju telefone, a bridovi direktnu vezu dva telefona. Onda je broj telefona s kojima je neki telefon direktno povezan stupanj tog vrha. Nazovimo vrhove A_1, $A_2, \ldots A_{14}, A_{15}$. Dakle, pitamo se je li moguće da vrhovi A_1, A_2, A_3 i A_4 imaju po 3 susjedna vrha, vrhovi A_5, A_6, $\ldots A_{12}$ imaju po 6 susjednih vrhova i vrhovi A_{13}, A_{14} i A_{15} imaju po 5 susjednih vrhova. Pretpostavimo da je ta situacija moguća. Tada zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu iznosi:

$$4 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 75$$

To je nemoguće jer zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu mora biti paran broj. Dakle, nemoguće je na taj način spojiti žice telefona. □

Poglavlje 3

Povezanost grafa

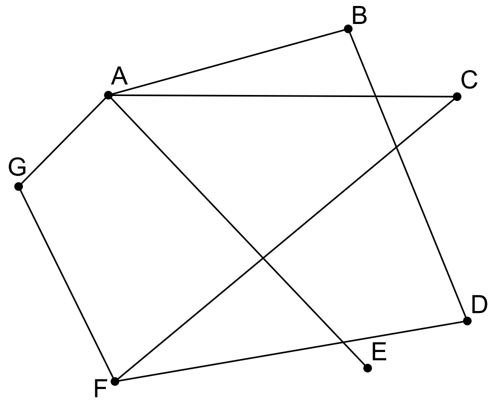
Pitanje povezanosti dva vrha u grafu, odnosno povezanosti grafa često može biti ključno za rješavanje problema. Pojmovi povezanosti dva vrha u grafu i povezanosti grafa su nam intuitvno jasni : dva vrha su povezana ako možemo doći od jednog vrha do drugoga krećući se po bridovima, a graf je povezan ako su svaka dva vrha grafa povezana. U ovom poglavlju ćemo dati precizne definicije tih pojmova.

3.1 Put, povezanost

Definicija 3.1.1. *Put od vrha V_0 do vrha V_k grafa G je niz međusobno različitih vrhova $V_0V_1V_2\ldots V_k$ koji počinje s V_0 i završava s V_k, takvih su V_0 i V_1 susjedni, V_1 i V_2 susjedni, $\ldots$, V_{k-1} i V_k susjedni vrhovi.*

Definicija 3.1.2. *Dva vrha A i B su povezana ako postoji put između njih. Graf G je povezan ako postoji put između svaka dva vrha tog grafa.*

Na konkretnom grafu vrlo je jednostavno odrediti put između vrhova:



Slika 3.1: Put i povezanost u grafu

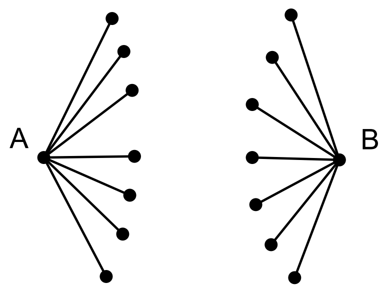
Naprimjer, na slici 3.1 vrhovi E i F su povezani, put između njih je niz $(EACF)$. Primjetimo da to nije jedini put između tih vrhova. Također, primjetimo da su svaka dva vrha u tom grafu povezana, odnosno da je graf na slici 3.1 povezan.

Zadatak 3.1.3. *U nekoj državi je* 15 *gradova. Svaki grad je povezan cestom s najmanje sedam drugih gradova. Dokažite da se iz bilo kojeg grada može doći do bilo kojeg drugog grada (eventualno prolazeći kroz druge gradove).*

www.problems.ru ♯30427

Rješenje:
Neka vrhovi grafa predstavljaju gradove, a bridovi ceste među gradovima. Želimo pokazati da između svaka dva vrha u grafu postoji put, odnosno da je taj graf povezan.

Pretpostavimo suprotno, graf nije povezan. To znači da postoje dva vrha grafa, nazovimo ih A i B koji nisu povezani. Po pretpostavci zadatka svaki vrh iz grafa ima najmanje 7 susjednih vrhova pa tako i vrhovi A i B. Svi ti vrhovi su različiti jer bi inače postojao put između vrhova A i B (vidi sliku 3.2).



Slika 3.2: Vrhovi A i B nisu povezani

Dakle, ukupno imamo barem

$$2 + 7 + 7 = 16$$

vrhova što je kontradikcija. Po tome zaključujemo da postoji put između svaka dva vrha grafa. Dakle, dokazali smo da se iz bilo kojeg grada može doći u bilo koji drugi grad. $\square$

Dokazali smo da je graf koji ima 15 vrhova kojima je stupanj najmanje 7 povezan. Naravno, ako je stupanj vrhova veći od 7, tvrdnja također vrijedi. No, prethodni zadatak možemo generalizirati tako da pokažemo da je graf s n vrhova kojima je stupanj barem $\frac{n-1}{2}$ povezan. Upravo se o tome radi u sljedećem zadatku.

Zadatak 3.1.4. *Dokažite da je graf s n vrhova kojima je stupanj najmanje* $\frac{n-1}{2}$ *povezan.*

www.problems.ru ♯30428

Rješenje:
Pretpostavimo suprotno, graf nije povezan. To znači da u grafu postoje dva vrha, A i B, koji nisu povezani. Svaki od njih ima najmanje $\frac{n-1}{2}$ susjednih vrhova i oni su različiti jer bi inače postojao put između A i B. Ukupno imamo barem

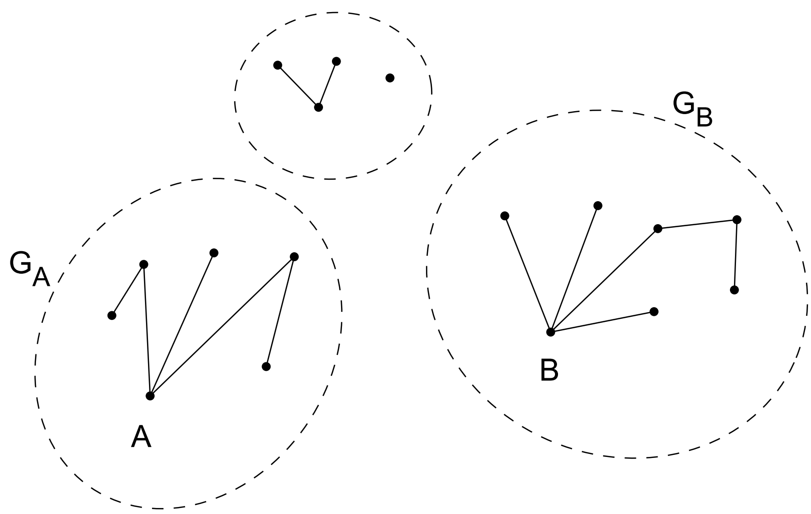
$$2 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n + 1$$

vrhova što je kontradikcija s pretpostavkom da je u grafu n vrhova. Iz toga zaključujemo da postoji put između svaka dva vrha. Dakle, graf je povezan. $\square$

Dakle, graf koji ima n vrhova je povezan ako su vrhovi tog grafa stupnja najmanje $\frac{n-1}{2}$. Postoji li kriterij za povezanost vrhova? Postoji! Sljedeći teorem dat će nam jedan dobar kriterij za povezanost dvaju vrhova u nekom grafu.

Teorem 3.1.5. *Ako su u grafu G vrhovi A i B neparnog stupnja i svi ostali vrhovi parnog stupnja onda su vrhovi A i B povezani.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da vrhovi A i B nisu povezani. Tada graf G možemo podijeliti na barem dva nepovezana podgrafa G_A i G_B. U grafu G_A nalaze se svi vrhovi (i pripadajući bridovi) koji su povezani s vrhom A, u G_B vrhovi i pripadajući briovi koji su povezani s vrhom B, a neki vrhovi mogu biti izvan G_A i G_B. Primjetimo da G_A i G_B nemaju zajedničkih vrhova jer bi inače vrhovi A i B bili povezani (vidi sliku 3.3).



Slika 3.3: Neki vrhovi mogu biti izvan G_A i G_B

Promatrajmo graf G_A. Neka su $A, V_2, V_3, \ldots, V_k$ vrhovi u G_A i n broj bridova u G_A. Tada je po pretpostavci teorema stupanj vrha A neparan broj, a stupnjevi ostalih vrhova grafa G_A su parni brojevi. Prema Lemi o rukovanju vrijedi

$$d(A) + d(V_2) + d(V_3) + \cdots + d(V_k) = 2n.$$

Dobili smo da je paran broj na desnoj strani jednakosti jednak neparnom broju koji se nalazi na lijevoj strani jednakosti. Što je kontradikcija. Time smo dokazali tvrdnju.

Naravno, mogli smo proučavati graf G_B i tada bismo analognim načinom razmišljanja došli do istog zaključka. □

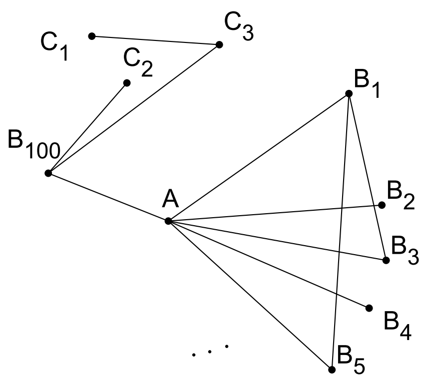
Rješenje sljedećeg zadatka će se bazirati na ideji dokaza prethodnog teorema.

Zadatak 3.1.6. *U nekoj zemlji postoji barem 101 grad. Glavni grad te zemlje spojen je sa 100 gradova izravnim (dvosmjernim) zrakoplovnim linijama. Svaki grad osim glavnog grada spojen je s 10 drugih gradova. Poznato je da se iz bilo kojeg grada može doći u bilo koji drugi grad unutar te države. Dokažite da je moguće zatvoriti polovicu zrakoplovnih linija glavnog grada tako da se sačuva svojstvo da se iz svakog grada može doći u bilo koji drugi grad.*

Turnir gradova, 1982. godine

Rješenje:

Neka vrhovi grafa G označavaju gradove te države, a bridovi među njima zrakoplovne linije. Vrh A neka označava glavni grad, a vrhovi $B_1, B_2, B_3, \dots B_{100}, C_1, C_2, \dots$ ostale gradove u državi. Vrhovi $B_1, B_2, \dots, B_{100}$ označavaju gradove koji koji su spojeni zrakoplovnim linijama s glavnim gradom (dakle, vrh A je susjedan sa svakim od vrhova $B_1, B_2, \dots, B_{100}$), a vrhovi $C_1, C_2, \dots$ označavaju gradove koji nisu povezani zrakoplovnim linjama s glavnim gradom (odnosno, vrh A nije susjedan s nijednim od vrhova $C_1, C_2, \dots$). Dakle, imamo graf G čiji vrh A ima stupanj 100, a vrhovi $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{100}, C_1, C_2, \dots$ su stupnja 10. (vidi sliku 3.4)



Slika 3.4: Graf G

Graf G na slici 3.4 je po pretpostavci zadatka povezan, a kada uklonimo vrh A (i sve bridove koji izlaze iz vrha A) graf G više ne mora biti povezan. Želimo pokazati da je moguće ukloniti polovicu bridova koji izlaze iz vrha A (njih 50) tako da se sačuva svojstvo povezanosti grafa.

Uklonimo vrh A iz grafa G i njemu incidentne bridove. Tada se dobiveni graf G' sastoji od vrhova $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$ koji su stupnja 9 i vrhova $C_1, C_2, \ldots$ koji su stupnja 10. Svaki vrh $B_i, i \in \{1, 2, , \ldots, 100\}$ koji je stupnja 9 povezan je s barem još jednim vrhom istog stupnja (inače bismo imali graf sa samo jednim vrhom neparnog stupnja). Tada možemo svakom vrhu koji je stupnja 9 i povezan je s još nekim vrhovima stupnja 9 dodati još jedan brid koji ga povezuje sa vrhom A (ali, tada drugim vrhovima koji su također stupnja 9 i povezani su sa tim vrhom ne dodajemo takav brid jer su sada oni preko njega povezani sa vrhom A). Takvih vrhova kojima ćemo dodati još jedan brid će biti najviše 50 (jer je svaki vrh stupnja 9 povezan s barem još jednim vrhom stupnja 9 kojem nećemo dodati brid), a to znači da možemo barem 50 od 100 zrakoplovnih linija s glavnim gradom ukinuti.

□

Zadatak 3.1.7. *U nekom kraljevstvu je osam gradova. Kralj želi izgraditi sustav prometnica takav da se iz svakog grada može doći u bilo koji drugi grad tako da se prolazi kroz najviše jedan grad te da iz svakog grada izlazi najviše k cesta. Za koji k je to izvedivo?*

Turnir gradova, 1991. godine

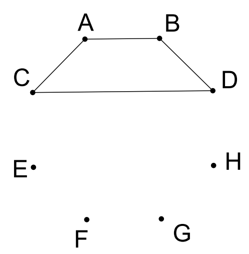
Rješenje:
Neka vrhovi A, B, C, D, E, F, G, H označavaju gradove u kraljevstvu, a bridovi prometnice među njima. Želimo pronaći $k \in \mathbb{N}$ za koji postoji graf sa vrhovima A, B, C, D, E, F, G, H takav da su svi vrhovi grafa povezani (uz uvjet da je maksimalna duljina puta 2 brida), a stupanj svakog vrha grafa najviše k. Primjetimo, kada pronađemo neki $k \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uvjete zadatka, svaki prirodan broj veći od k također će zadovoljiti zadane uvjete. Zato ima smisla tražiti najmanji $k \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uvjete zadatka.

Uzmimo proizvoljan vrh iz grafa, npr. vrh A i pogledajmo što se događa za različite $k \in \mathbb{N}$.

- $k = 1$
  U ovom slučaju vrh A ima jedan susjedan vrh koji također ima samo jedan susjedan vrh (upravo A) pa je očigledno nemoguće iz vrha A doći do svih drugih vrhova.

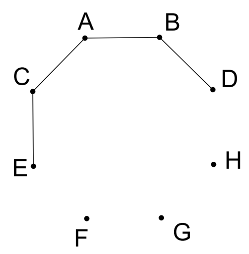
- $k = 2$
  Vrh A ima dva susjedna vrha, a svaki od njih uz A ima po još jedan susjedni vrh. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A susjedan s vrhovima B i C. Svaki od njih je uz vrh A susjedan s još jednim vrhom. Ako je riječ o istom vrhu,

nazovimo ga vrh D, na slici 3.5 vidimo da je vrh A povezan samo sa vrhovima B, C i D.



Slika 3.5: Vrh A je povezan samo sa vrhovima B, C i D

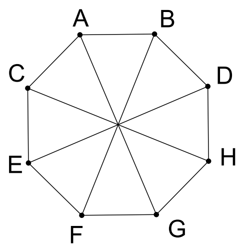
Ako je riječ o različitim vrhovima bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je vrh B susjedan sa D, a vrh C sa E. Na slici 3.6 vidimo da bez obzira s kojim su vrhovima D i E susjedni, vrh A ne može biti povezan sa vrhovima F, G i H putevima duljine najviše 2.



Slika 3.6: Vrh A je povezan putevima duljine najviše 2 samo sa vrhovima B, C, D i E

Dakle, u ovom slučaju iz vrha A možemo doći do najviše četiri druga vrha u grafu poštujući uvjete zadatka.

- $k = 3$
  Razmišljamo kao u prethodnim slučajevima: vrh A ima tri susjedna vrha, a svaki od njih uz A ima još po dva susjedna vrha. U ovom slučaju postoji povezan graf sa 8 vrhova čiji vrhovi imaju stupanj najviše 3. Na slici 3.7 je konkretan primjer povezanog grafa koji zadovoljava uvjet zadataka za $k = 3$.



Slika 3.7: Vrh A je povezan sa svim vrhovima grafa putevima duljine najviše 2

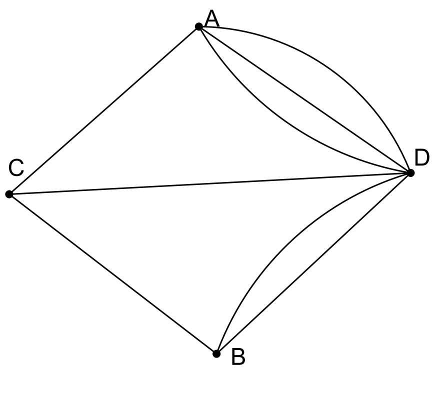
  Pokažimo da graf na slici 3.7 zadovoljava tražene uvjete, odnosno da su svi vrhovi povezani putevima duljine najviše 2. Obzirom da je riječ o simetričnom grafu, dovoljno je provjeriti samo za jedan vrh. Uzmimo vrh A: vrh A je direktno povezan sa vrhovima B, H i E, sa vrhom C je povezan preko vrha B, sa vrhovima D i F preko vrha E, a sa vrhom G preko vrha H.

Dakle, za $k \geq 3$ kralj može izgraditi željeni sustav prometnica. $\square$

Poglavlje 4

Eulerov graf

U ovom poglavlju ćemo generalizirati problem Königsberških mostova. Prisjetimo se, u problemu Königsberških mostova postojalo je pitanje kako prošetati gradom Königsbergom tako da preko svakog mosta prijeđemo samo jednom. Euler je pokazao da ne postoji način kojim bi napravili takvu šetnju. Do sada je između dva vrha postojao samo jedan brid, međutim u nekim situacijama je poželjno promatrati više bridova između dva vrha (baš kao što je Euler radio). Na slici 4.1 vidimo primjer multigrafa.



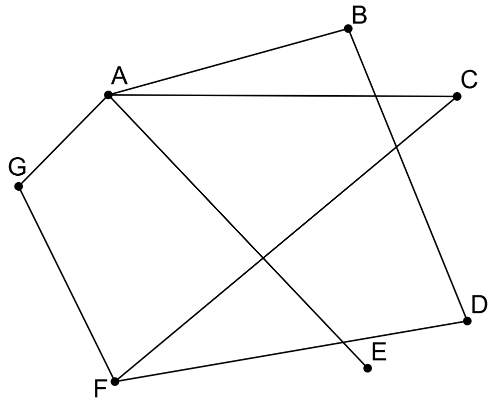
Slika 4.1: Primjer multigrafa

4.1 Šetnja u grafu

U trećem poglavlju smo se upoznali s pojmom puta no on nam nije dopuštao da jednim vrhom prođemo više puta (što ćemo ovdje očito morati). U ovom poglavlju ćemo uvesti pojam šetnje u grafu. Intuitivno je jasno što označava taj pojam, šetnja je kretanje po grafu od jednog vrha, preko brida do sljedećeg vrha pa opet preko brida i tako redom do posljednjeg vrha koji želimo posjetiti, no ipak iskažimo i preciznu definiciju tog pojma.

Definicija 4.1.1. *Šetnja u grafu G je niz vrhova* $(V_0 V_1 \dots V_{k-1} V_k)$, *pri čemu su sljedeći parovi vrhova susjedni* V_0 *i* V_1, V_1 *i* V_2, $\dots$, V_{k-1} *i* V_k.

Ako su početak i kraj šetnje isti, govorimo o zatvorenoj šetnji.



Slika 4.2: Šetnja u grafu

Tako primjerice na slici 4.2 imamo sljedeću šetnju: $(AEABD)$, a primjer zatvorene šetnje je $(AGFCA)$.

U šetnji je dopušteno ponavljanje i vrhova i bridova, no u nekim situacijama možemo imati uvjet da su svi bridovi različiti, odnosno da smijemo samo jednom proći nekim bridom. U tom slučaju govorimo o stazi.

Definicija 4.1.2. *Šetnju bez ponavljanja bridova nazivamo stazom, a ako je uz to početak i kraj šetnje isti vrh, onda je riječ o zatvorenoj stazi ili ciklusu.*

Primjer staze na slici 4.2 je $(ABDF)$, a ciklusa $(AGFCA)$.

Zadatak 4.1.3. *Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na relacijama $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow D$, $D \leftrightarrow A$).*

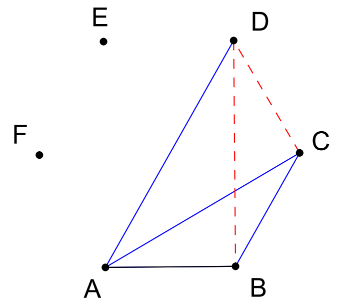
Državno natjecanje, 2006. godina, 3. i 4. razred, A varijanta

Rješenje:
Neka vrhovi A, B, C, D, E i F označavaju otoke, a bridovi brodske veze među njima. Ako su dva otoka povezana linijama katamaranskog poduzeća, neka je brid između odgovarajućih vrhova crvene boje, a ako su povezana linijama hidrogliserskog poduzeća neka je brid plave boje. Dakle, dobili smo potpun graf sa 6 vrhova čiji su bridovi obojani u dvije boje.

U potpunom grafu sa 6 vrhova je ukupno 15 bridova pa po Dirichletovom principu postoji boja kojom je obojano najmanje 8 bridova. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je riječ o plavoj boji. Promotrimo podgrafove početnog grafa koji imaju četiri vrha i za svaki takav podgraf promotrimo sve bridove između ta četiri vrha (njih ima ukupno 6). U barem jednom podgrafu (bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je riječ o podgrafu s vrhovima A, B, C i D) postoje barem 4 brida plave boje (jer je više bridova plave boje nego crvene). Naime, u protivnom bi u svakom podgrafu sa četiri vrha bila najviše 3 brida plave boje, a to je nemoguće.

Ako u podgrafu sa vrhovima A, B, C, D postoji 5 plavih bridova, sigurno postoji i ciklus od 4 plava brida (jer je od ukupno 6 bridova, njih 5 plave boje), a ako je svih 6 bridova plave boje, onda je jasno da postoji traženi ciklus. Pretpostavimo da u podgrafu sa vrhovima A, B, C, D postoje 4 brida plave boje. Ako ta četiri plava brida čine ciklus, tvrdnja je dokazana.

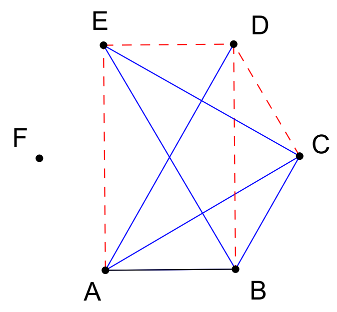
Pretpostavimo da u podgrafu sa vrhovima A, B, C, D postoje četiri plava brida koji ne čine ciklus (vidi sliku 4.3).



Slika 4.3: U podgrafu sa vrhovima A, B, C, D postoje četiri plava brida koja ne čine ciklus

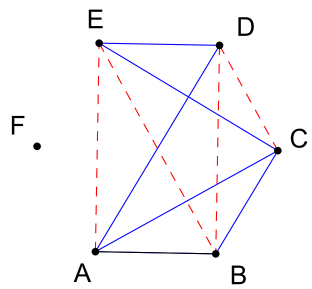
Zato su preostala dva vrha E i F ukupno povezana sa ostalim vrhovima i međusobno sa barem 4 plava brida (jer je u grafu najmanje 8 plavih bridova, a već znamo da su bridovi AB, BC, AC i AD plave boje). Zato je barem jedan od njih, recimo vrh E, povezan sa vrhovima A, B, C i D sa barem dva plava brida.

Ako su oba plava brida između vrha E i neka dva vrha između vrhova A, B C, tada imamo ciklus od 4 plava brida (vidi sliku 4.4), naprimjer: AB, BE, EC i CA.



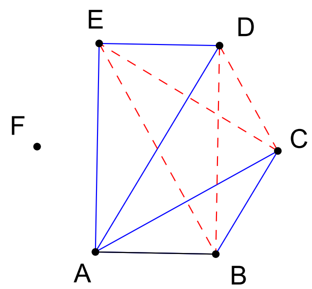
Slika 4.4: Ciklus od četiri plava brida između vrhova A, B, C i E

Ako je brid ED plave boje i jedan od bridova EB i EC plave boje, opet imamo ciklus između 4 povezana vrha (vidi sliku 4.5), naprimjer: AD, DE, EC i CA.



Slika 4.5: Ciklus od četiri plava brida između vrhova A, C, D i E

Pretpostavimo da su bridovi ED i EA plave boje, a bridovi EB i EC crvene boje (vidi sliku 4.6).



Slika 4.6: Bridovi ED i EA su plave, a bridovi EB i EC crvene boje

U ovom slučaju imamo (crveni) ciklus među vrhovima B, D, C i E, bridovi BD, DC, CE i EB su crvene boje.

Pokazali smo da u svakom slučaju možemo pronaći jednobojni ciklus između četiri vrha zadanog grafa.

Dakle, pokazali smo da je moguće ciklički posjetiti neka četiri otoka. □

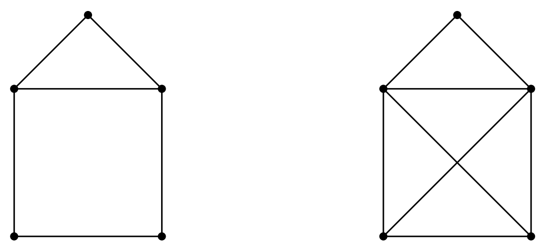
4.2 Eulerov graf

Mnogi su se već susreli s problemom traženja staze ili ciklusa a da toga nisu bili ni svjesni. Vjerojatno su svima poznati razni problemi crtanja grafova bez podizanja olovke s papira. Ti problemi (koji su zapravo vrlo slični problemima mostova Königsberga koje je riješio Euler) su jedni od najstarijih problema teorije grafova, a karakterizira ih to što se u biti radi o traženju staze koja sadrži svaki brid grafa.

Definicija 4.2.1. *Stazu u grafu koja sadrži svaki brid nazivamo Eulerova staza, a ako je i zatvorena, nazivamo ju Eulerova tura.*

Definicija 4.2.2. *Eulerov graf je graf koji ima Eulerovu turu.*

Treba istaknuti da ukoliko postoji Eulerova tura, ona ne mora biti jedinstvena. Na slici 4.7 vidimo dva primjera poznatih Eulerovih grafova.



Slika 4.7: Poznati Eulerovi grafovi

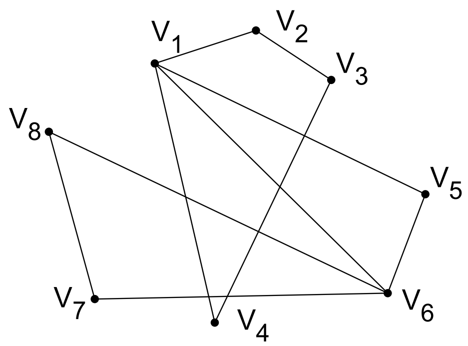
4.3 Eulerov teorem

Rezultat koji je dobiven u problemu Königsberških mostova generaliziran je kao Eulerov teorem. Kriterije koji se navode u tom teoremu znao je i sam Euler 1736. godine, ali prvi dokaz objavljen je tek 1873. godine.

Lema 4.3.1. *U povezanom grafu G čiji su vrhovi parnog stupnja postoji zatvorena staza.*

Dokaz. Pretpostavimo da je G povezan graf čiji su svi vrhovi parnog stupnja. Pretpostavimo da G ima n vrhova, nazovimo ih $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Dakle, stupanj svakog vrha je 2 ili više.

Krenimo od proizvoljnog vrha u grafu, nazovimo ga V_1. Obzirom da mu je stupanj 2 ili više, taj je vrh bridom povezan sa nekim drugim vrhom u grafu, njega nazovimo V_2. Kao i svi ostali vrhovi u G, V_2 je parnog stupnja pa za svaki dolazak u taj vrh, postoji brid s kojim izlazimo iz njega. Ako smo se vratili u vrh V_1, imamo ciklus V_1V_2. Ako nismo, onda bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je V_2 povezan sa V_3, koji također ima paran broj bridova koji mu pripadaju pa postoji brid s kojim izlazimo iz vrha V_3. Na opisani način se nastavimo kretati po bridovima grafa dok ne naiđemo na vrh koji smo već jednom posjetili (na V_1 ćemo sigurno prije ili kasnije naići jer je parnog stupnja, a iz njega smo krenuli pa smo „potrošili" samo jedan brid koji pripada tom vrhu), a kada naiđemo na već posjećeni vrh, dobili smo ciklus (vidi sliku 4.8). Dakle, pokazali smo da u grafu G postoji zatvorena staza.



Slika 4.8: Vrhovi V_1, V_2, V_3 i V_4 čine ciklus

□

Teorem 4.3.2. *(Eulerov teorem)*
Povezan graf G je Eulerov ako i samo ako su svi vrhovi od G parnog stupnja.

Dokaz. Ovaj teorem dokazujemo u dva smjera. Prvo pretpostavimo da je graf Eulerov. To znači da postoji Eulerova tura na grafu. Pretpostavimo da ona počinje (pa onda i završava) u vrhu V.

Svaki unutarnji vrh (onaj koji nije ni početak ni kraj ture) u svakom pojavljivanju ima dva brida: jedan koji ulazi u njega i jedan koji izlazi iz njega. Znači da mu je stupanj paran. Isto tako, obzirom da tura počinje i završava u vrhu V i njegov stupanj je paran. Zaključujemo da su svi vrhovi parnog stupnja.

S druge strane, pretpostavimo da postoji povezan graf G takav da su mu svi vrhovi parnog stupnja, treba dokazati da je Eulerov.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji povezan graf G takav da su mu svi vrhovi parnog stupnja koji nije Eulerov. Odaberimo takav graf s najmanjim mogućim brojem bridova. Obzirom da su svi vrhovi grafa G parnog stupnja, stupanj svakog vrha je 2 ili više. Prema prethodnoj lemi zaključujemo da u tom slučaju graf sadrži zatvorenu stazu (ciklus). Neka je C zatvorena staza u grafu G maksimalne duljine. Obzirom da C nije Eulerova tura od G (inače bi graf bio Eulerov), postoje bridovi iz grafa G koji se ne nalaze u stazi C. Bridove (i vrhove koji im pripadaju) koji se ne nalaze u stazi C, a čine povezan podgraf grafa G s maksimalnim brojem vrhova označimo sa G'. Primjetmo, zbog načina na koji smo odabrali graf G' možemo zaključiti da je povezan. Svi vrhovi na stazi C su parnog stupnja pa povezan graf G' također nema vrh neparnog stupnja. Obzirom da je G' povezan graf koji ima manje bridova od grafa G i iz odabira da je G graf sa najmanje bridova koji ne sadrži Eulerovu turu, slijedi da na G' postoji Eulerova tura C'. Kako je G povezan, postoji vrh V koji se nalazi i u ciklusu C i u ciklusu C'. Možemo pretpostaviti da je vrh V kraj od C i početak od C'. No, u tom slučaju je CC' zatvorena staza u G veća od C, a u to je u kontradikciji s pretpostavkom da je C najveća takva zatvorena staza. Dakle, G je Eulerov graf. □

Na temelju Eulerovog teorema slijedi:

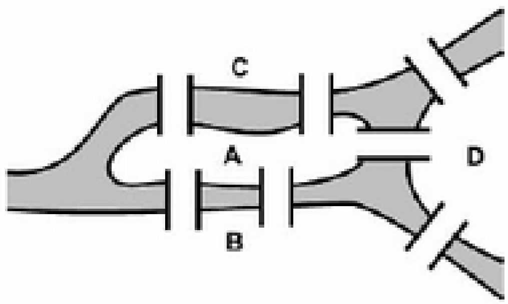
Korolar 4.3.3. *Povezan graf G ima Eulerovu stazu ako i samo ako ima najviše dva vrha neparnog stupnja (početak i kraj staze).*

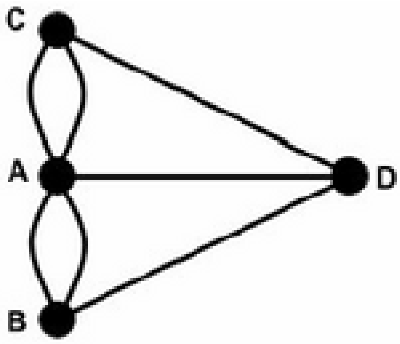
Dokaz. Pretpostavimo da G ima Eulerovu stazu, tada kao u dokazu Eulerovog teorema, svaki vrh koji nije ni početak ni kraj te staze ima paran stupanj.

S druge strane, pretpostavimo da je G povezan graf s najviše dva vrha neparnog stupnja. Ako nema takvih vrhova, onda prema Eulerovom teoremu zaključujemo da G ima zatvorenu Eulerovu stazu. Ako postoje vrhovi neparnog stupnja, onda ih mora biti točno dva jer je suma stupnjeva svih vrhova uvijek paran broj. Neka su to vrhovi U i V. Spojimo ta dva vrha bridom e i promatrajmo graf $G + e$. Svaki vrh iz $G + e$ ima paran stupanj pa po

Eulerovom teoremu slijedi da na grafu postoji Eulerova tura. Ako iz te ture izbacimo brid e dobivamo Eulerovu stazu na G. □

Prisjetimo se problema Königsberških mostova iz uvodnog poglavlja. Königsberg je smješten na obalama rijeke Pregel, a dio grada se nalazi na dva riječna otoka koji su međusobno i sa kopnom povezani sa sedam mostova. Građani Königsberga su rado šetali gradom i htjeli su prijeći sve mostove svoga grada tako da svakim mostom prijeđu samo jednom i šetnju završe u polaznoj točki. Kako sami nisu uspjeli pronaći način kako to napraviti, za pomoć su zamolili Eulera. On im je vrlo brzo odgovorio da je takva šetnja nemoguća. Kako je Euler došao do tog zaključka? Jednostavnim razmišljanjem: svaki put kad dođe na neku obalu (s koje nije krenuo pa na njoj ni ne završava) mora s nje i otići. Zato svaka takva obala za svaki dolazni most mora imati i most s kojim će otići dalje. Drugim riječima, na svim obalama mora biti paran broj mostova. Slika 4.9 prikazuje mostove grada Königsberga i njihov grafički prikaz, na njoj vidimo da je broj mostova na obalama neparan. Zato je takva šetnja nemoguća.





Slika 4.9: Mostovi Königsberga i njihov graf

Nakon što smo se upoznali sa osnovnim pojmovima i najbitnijim rezultatima teorije grafova problem Königsberških mostova možemo interpretirati na ovaj način: problem se zapravo sastoji u ispitivanju sadrži li graf sa 4 vrha i 7 bridova koji označava grad Königsberg, odnosno obale B i C te otoke A i D (vidi sliku 4.9) Eulerovu turu ili ne. Graf koji odgovara grafu Königsberških mostova ima četiri vrha neparnog stupnja (vidi sliku 4.9) pa po Eulerovom teoremu zaključujemo da ne može imati Eulerovu turu, a ni stazu.

Zaključak

Temelje teoriji grafova dao je poznati švicarski matematičar Leonhard Euler kada je u prvoj polovici 18. stoljeća riješio problem königsberških mostova. Do razvoja teorije grafova kao zasebne matematičke discipline dolazi tek 200-tinjak godina kasnije i od tada svjedočimo velikoj primjerni teorije grafova u raznim područjima kao što su promet, računarstvo, ali i u problemima svakodnevnog života.

U ovom radu su uz definiciju pojma graf dane definicije osnovnih pojmova vezanih uz grafove, poput stupnja vrha, puta u grafu, povezanosti vrhova u grafu i povezanosti grafa te šetnje u grafu. Iskazani su i dokazani najbitniji teoremi vezani uz temu, a to su Lema o rukovanju i Eulerov teorem.

U radu su prikazani zadaci koji su se javljali na matematičkim natjecanjima i ti zadaci su riješeni primjenom teorije grafova (iako se mogu riješiti i na druge načine).

Bibliografija

[1] *Dénes König*, https://en.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9nes_K%C5%91nig, 2015.

[2] *Zadaci*, http://problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=192.

[3] M. Bombardelli, Ž. Hanjš i K. A. Škreb, *Matematička natjecanja 2012./2011*, HMD, Element, Zagreb, 2012.

[4] A. Golemac, A. Mimica i T. Vučičić, *Od königsberških mostova do kineskog poštara*, math.e (2010), http://e.math.hr/math_e_article/br21/golemac2.

[5] I. Gregurić i A. Klobučar, *Problem četiri boje*, Osječki matematički list (2010), http://hrcak.srce.hr/file/89408.

[6] Antonija Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH*, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm.

[7] M. Krnić, *Dirichletovo pravilo*, HMD, Zagreb, 2011.

[8] T. Tadić, *Pripreme za matematička natjecanja*, Element, Zagreb, 2006.

[9] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Sažetak

U ovom radu je dan kratak uvid u razvoj teorije grafova s naglaskom na poznati problem teorije grafova - problem Königsberških mostova. Nakon povijesnog pregleda razvoja teorije grafova te definicije pojma graf u radu se baziramo na osnovne pojmove vezane uz grafove kao što su stupanj vrha, poveznost vrhova u grafu, dokazujemo Lemu o rukovanju te su navedeni i riješeni zadaci vezani uz to područje teorije grafova. Zadnji dio rada posvećen je obilascima grafa, odnosno postojanju Eulerove ture. Rješenje problema Königsberških mostova generalizirano je Eulerovim teoremom.

Summary

This paper provides a brief overview of the development of graph theory with a focus on the well-known problem of graph theory - Königsberg bridge problem. Following historical review of development of graph theory and definition of the term graph, this paper is focused on basic concepts related to graphs such as degree of a vertex, connections between vertices in the graph, we prove the handshaking lemma on the operation and there are given and solved problems related to the area of graph theory. The last part is dedicated to the trail in the graph and the existence of Eulerian cycle. Solution to Königsberg bridge problem is generalized with Euler's theorem.

Životopis

Autorica ovog rada rođena je 25. studenog 1988. godine u Mrkonjić Gradu u Bosni i Hercegovini. U Lipovljanima je 2003. godine završila Osnovnu školu Josipa Kozarca, a 2007. godine prirodoslovno - matematički gimnaziju u Srednjoj školi Tina Ujevića u Kutini. Na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu, Matematičkom odsjeku u Zagrebu 2011. godine završila je preddiplomski studij matematike i upisala diplomski studij Matematika i informatika: smjer nastavnički.